No. 7671
Shelf
526.62

MÉMOIRE

SUR

LA PROJECTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES,

ADOPTÉE AU DÉPÔT GÉNÉRAL DE LA GUERRE;

Par M. HENRY, *Colonel au Corps impérial des Ingénieurs-géographes:*

Publié par ordre

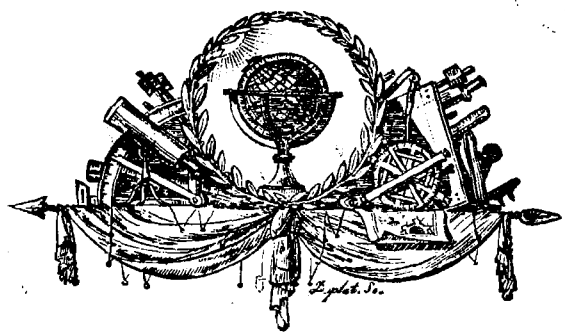
DE S. E. M.r LE DUC DE FELTRE, MINISTRE DE LA GUERRE,

POUR FAIRE SUITE

AU MÉMORIAL TOPOGRAPHIQUE ET MILITAIRE.

TOPOGRAPHIE.

RARE BOOK
GA
110
.H14
1810



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

1810.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

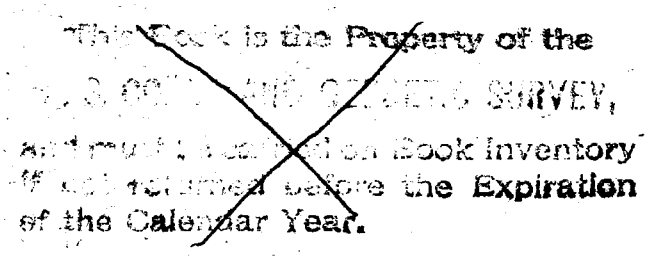
ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009


This Book is the Property of the
U.S. GEOLOGICAL SURVEY,
and must be accounted for on Book Inventory
if not returned before the Expiration
of the Calendar Year.

This Book is the Property of the

U.S. GEOLOGICAL SURVEY,

and must be returned with Book Inventory
if not returned prior to the **Expiration**
of the Calendar Year.

AVERTISSEMENT.

PARMI les différentes sortes de projections, celle de *Flamsteed* modifiée, qui a été employée depuis long-temps par les géographes les plus célèbres, et qui fait l'objet de ce Mémoire, a été adoptée au Dépôt général de la guerre, parce qu'elle a paru être la plus propre aux divers besoins des services publics : tel est le résultat du rapport de la Commission qui fut réunie le 5 pluviôse an XI, par ordre du Ministre de la guerre, pour discuter cet objet.

Les membres de cette Commission étaient,

M. le Comte de l'Empire SANSON, général de division, directeur du Dépôt général de la guerre ;

M. LACROIX, membre de l'Institut et de la Légion d'honneur ;

M. HENRY, colonel au corps impérial des ingénieurs-géographes ;

M. ÉPAILLY, chef d'escadron au même corps ;

M. PLESSIS, capitaine audit corps.

Le présent Mémoire est divisé en deux parties :

La première comprend la recherche des formules nécessaires à l'emploi de la projection dont il traite, et des principales propriétés qui la caractérisent ;

La seconde partie fournit l'application de la projection au tracé d'une carte de l'Europe.

Des Tables relatives à cette application suivent cette seconde partie.

MÉMOIRE
SUR LA PROJECTION
DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

RECHERCHES des Formules nécessaires à l'emploi de la Projection, et des principales propriétés qui la caractérisent.

CHAPITRE I.er

EXPOSITION du sujet, dans laquelle on donne une idée de la Projection d'où découlent ses propriétés.

LE tracé d'une carte géographique n'est autre chose qu'un fragment de la projection, sur un plan, des courbes décrites sur la surface d'un sphéroïde semblable au sphéroïde terrestre, et qui a avec ce dernier un rapport donné; ce rapport est ce qu'on nomme *échelle.* Son numérateur étant l'unité, le dénominateur exprime combien de fois les dimensions linéaires homologues de l'un sont contenues dans celles de l'autre; par exemple, combien de fois le diamètre de l'équateur de l'un est compris dans le diamètre de l'équateur de l'autre.

La Terre étant considérée comme un ellipsoïde de révolution,

aplati par ses pôles, toutes les sections faites suivant l'axe, par un plan, c'est-à-dire tous les méridiens sont des ellipses, et toutes les sections faites perpendiculairement à cet axe, ou, ce qui est la même chose, l'équateur et tous les parallèles à l'équateur sont des cercles de différens rayons. Il en est de même de tout sphéroïde elliptique de révolution semblable à la Terre.

Projeter sur un plan la surface d'un pareil sphéroïde, c'est tracer sur ce plan, suivant certaines lois, des courbes qui soient la représentation des méridiens et des parallèles à l'équateur, pour y rapporter les plans des objets terrestres diminués proportionnellement à l'échelle adoptée, et en former des cartes géographiques.

Lorsque les lois qui dirigent le tracé dérivent des principes de la perspective, alors on obtient une projection proprement dite : dans les autres cas, et en particulier dans celui qui est l'objet de cet écrit, ce n'est qu'une projection improprement dite, ou par développement; c'est pourquoi nous regarderons le mot *développement* comme synonyme de celui de *projection*.

L'essence d'une bonne carte géographique serait d'être une image parfaite, exactement proportionnelle dans ses dimensions, et semblable dans sa figure à la portion de la surface de la Terre qu'elle représente : mais la surface de la Terre étant courbe en tout sens, il est impossible de la développer sur un plan sans altérer ses dimensions et sa figure. C'est pourquoi l'on ne pourra jamais construire une carte géographique dans laquelle les distances des lieux, l'étendue des pays et les directions des points de la surface de la Terre, les uns à l'égard des autres, correspondent rigoureusement aux véritables.

Dans l'impossibilité de satisfaire tout-à-la-fois à ces différentes conditions, ce qu'il paraît y avoir de mieux à faire, est de chercher à satisfaire à une ou plusieurs d'entre elles de préférence aux autres, suivant le but que l'on se propose.

L'administration L'art militaire.. La marine.....	a besoin de Cartes qui représentent les	surfaces des terrains. distances des lieux. directions des lieux.

Depuis long-temps l'on est en possession de la méthode de construire des cartes qui jouissent de la propriété de représenter les directions des lieux, et de conserver aux méridiens et aux parallèles le même rapport entre eux qu'ils ont sur la Terre. Ces cartes satisfont complétement aux besoins de la marine; nous en parlerons ici par occasion.

On satisferait tout-à-la-fois aux besoins des deux autres services, au moyen de cartes qui auraient la propriété de représenter l'étendue des pays exactement, et les distances des lieux au moins d'une manière très-approchée, et ces cartes mériteraient sans doute la préférence sur toutes celles qui n'auraient pas le même avantage.

Telles sont celles qui sont construites suivant la méthode qui va être exposée et que l'on a adoptée au dépôt général de la guerre, pour la réunion des matériaux topographiques et géographiques.

On appelle méridien et parallèle moyens sur la Terre, le méridien et le parallèle à l'équateur, qui partagent à-peu-près en deux également, l'un dans le sens des parallèles, l'autre dans le sens des méridiens, toute l'étendue de pays que l'on se propose de représenter sur la carte.

Que l'on imagine sur le plan de projection une droite indéfinie, qui sera en même temps l'axe et le méridien moyen de la carte. Tous les parallèles à l'équateur sont décrits d'un même centre pris dans cet axe, à une distance l'un de l'autre, égale à la partie proportionnelle du méridien rectifié, comprise entre ces parallèles sur la Terre. On prend ensuite sur chacun de ces parallèles les degrés de longitude, tels que les donne la loi de leurs décroissemens, de l'équateur à l'un des pôles, c'est-à-dire proportionnels aux rayons de ces parallèles sur le sphéroïde terrestre. Enfin, l'on fait passer

par chaque série de points correspondans une ligne courbe qui représente un méridien. Tous les méridiens se tracent de la même manière.

La position du centre des parallèles est déterminée sur l'axe de la carte, en prenant pour rayon du parallèle moyen une droite égale à la partie de la tangente au méridien moyen au point où il est coupé par le parallèle moyen sur le sphéroïde, comprise entre ce point et le prolongement de l'axe de révolution du sphéroïde.

Il est d'abord évident par cette construction, que les arcs de parallèles d'un certain nombre de degrés sur le développement, sont rigoureusement proportionnels à leurs correspondans d'un même nombre de degrés sur le sphéroïde. On démontrera ci-après que chaque quadrilatère de la projection, compris entre deux méridiens et deux parallèles quelconques, est aussi exactement proportionnel au quadrilatère correspondant sur le sphéroïde renfermé entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles.

Quant aux angles des quadrilatères, on voit, sans peine, que tous ceux qui résultent de l'intersection de tous les parallèles par le méridien moyen, ainsi que tous ceux qui résultent de l'intersection de tous les méridiens par le parallèle moyen, sont droits sur le plan de projection comme sur le sphéroïde; mais tous les autres angles sont d'autant plus altérés, qu'ils sont formés par la rencontre de méridiens et de parallèles plus éloignés des moyens. Il arrive de là que les quadrilatères formés par deux méridiens et deux parallèles, s'alongent dans le sens de l'une de leurs diagonales, tandis qu'ils se rétrécissent dans le sens de l'autre, en affectant la forme d'un parallélogramme. C'est-là le principal défaut de cette projection; heureusement il n'est sensible qu'à une distance déjà considérable du centre de la carte.

Pour ce qui est des méridiens, il n'y a que le méridien moyen qui conserve une exacte proportion avec son correspondant sur la Terre; tous les autres s'en écartent tant soit peu, à mesure que leur

différence de longitude avec ce premier méridien devient plus grande.

Nous supposons ici, comme il est naturel, que la latitude du parallèle moyen est boréale; et la supposant australe, mais égale à la boréale, la projection serait la même; ainsi la même projection convient toujours à deux régions semblablement situées dans l'un et l'autre hémisphère.

Disons un mot, en passant, des cartes nautiques. Le principal usage que les marins font de ces cartes, consiste à y tracer exactement, d'après sa longueur et sa direction, le chemin qu'ils ont fait, à y indiquer celui qui leur reste à faire, et la direction qu'ils doivent suivre pour arriver à leur but. La carte connue sous le nom de *Carte réduite* ou *Carte de Mercator,* satisfait complètement à tous ces besoins.

Les méridiens, dans cette carte, sont des lignes droites parallèles entre elles, tracées à des distances égales les unes des autres, et coupées à angles droits par les parallèles à l'équateur; mais de façon que les intervalles qui séparent ceux-ci, croissent à mesure que l'on s'avance de l'équateur vers l'un ou l'autre pôle, dans un rapport précisément inverse de celui que suit sur le sphéroïde la diminution des rayons des parallèles. Il résulte de là que les distances en longitude, mesurées sur chaque parallèle, ont avec les distances en latitude correspondantes, la même relation que sur le sphéroïde terrestre.

Les cartes de Mercator se tracent aisément au moyen d'une table des latitudes croissantes. Nous donnerons dans cette première Partie, une formule fort simple pour calculer une pareille table dans l'ellipse; et dans la seconde Partie, nous en ferons l'application à un exemple.

Voici maintenant le problème qu'il s'agit de résoudre.

Connaissant la longitude et la latitude d'un point quelconque de

la surface du sphéroïde terrestre, déterminer la position de ce point sur le plan de projection.

Réciproquement.

Étant donnée la position d'un point quelconque de la surface de la Terre, sur le plan de projection, trouver sa longitude et sa latitude.

Pour résoudre ce problème, on rapportera, à l'ordinaire, la position de chaque point, sur le plan de projection, à deux droites perpendiculaires entre elles, par des coordonnées qui leur soient respectivement parallèles, ayant par conséquent ces droites pour axes, et leur point d'intersection pour origine commune.

Il est naturel de faire coïncider l'une de ces droites avec le méridien moyen, ce sera l'axe des abscisses; tandis que l'autre droite sera perpendiculaire au méridien moyen, et tangente au parallèle moyen au point où ce parallèle coupe ce méridien, ce sera l'axe des ordonnées; le centre de la projection sera ainsi l'origine des coordonnées.

On pourra, dans la pratique, faire varier, pour plus de commodité, l'origine des coordonnées, comme on le verra plus bas.

Il est visible qu'en supposant la longitude constante, et en ne faisant varier que la latitude, on déterminera sur le plan de projection une suite de points appartenant tous à un même méridien; que pareillement, en supposant la latitude constante, et ne faisant varier que la longitude, on déterminera, sur le même plan, une suite de points appartenant tous à un même parallèle.

On tracera donc aisément les courbes des méridiens et des parallèles, à l'aide de ces points, en les multipliant assez pour que, étant considérés de trois en trois, ils paraissent sensiblement en ligne droite.

C'est cette méthode que l'on est dans le cas d'employer pour tracer les feuilles d'une carte, vu l'impossibilité de les tracer

graphiquement, si ce n'est à une très-petite échelle, à cause de la longueur des rayons des parallèles.

Soient *(figures 1* et *2) O* le centre du sphéroïde terrestre, *P* le pôle boréal de l'équateur, *MON* une portion de l'équateur, *MOP, NOP* deux quarts de méridien elliptique, *CAE, DBF* des portions de parallèles à l'équateur infiniment voisins l'un de l'autre.

Supposons que *MOP* soit une portion du méridien moyen, et $\Gamma\Theta D$ une portion du parallèle moyen, qui, sur la Terre, partagent en quatre parties à-peu-près égales toute l'étendue de pays que doit comprendre la carte que l'on se propose de tracer.

Le méridien moyen est représenté sur le plan de projection *(fig. 3)* par la droite *MP*, et le parallèle moyen par l'arc de cercle $\Gamma\Delta$ décrit du point *R*, centre commun de tous les parallèles, avec le rayon ΓR égal à la partie de la tangente au méridien au point Γ, commune section des méridiens et parallèles moyens, comprise entre ce point et le prolongement *PR* du petit axe du sphéroïde.

Sur le plan de projection *(fig. 3)*, la courbe *NEP* est la représentation du quart d'ellipse *NEP (fig. 2)* du méridien *NOP* du sphéroïde; et les arcs concentriques *CE*, *DE*, infiniment voisins *(fig. 3)*, sont la représentation des portions de parallèles *CE, DE (fig. 2)* du sphéroïde.

Un point quelconque, tel que *E*, commun au méridien *NEP* et au parallèle *CED*, est déterminé sur le développement par les coordonnées rectangulaires ΓH, *HE*, dont les axes sont le méridien moyen *MP*, et la tangente ΓZ au parallèle moyen; et l'origine le point Γ, commune section de ces deux droites.

La longitude et la latitude du point *E* étant connues, il s'agit de déterminer les droites ΓH et *HE*, et, par la connaissance de ces droites, de remonter à celle de la longitude et de la latitude du même point *E*.

Pour parvenir à ce but, il est d'abord nécessaire de chercher dans un sphéroïde elliptique de révolution, aplati par ses pôles, à développer les expressions de quelques-unes de ses parties, dont on fera usage dans le cours de ce Mémoire.

CHAPITRE II.

Expressions analytiques de quelques parties d'un Sphéroïde elliptique de révolution.

DANS tout ce qui va suivre, nous désignerons constamment par

$\mathfrak{V}$ Le quadrant ou la valeur de l'angle droit, en grades;

π Le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre.

Et nous ferons, pour abréger,

$a = NO$ le demi-grand axe du sphéroïde ou le rayon de l'équateur;

$b = PO$ le demi-petit axe du sphéroïde ou le demi-axe de révolution;

$\varphi = DQN$ la latitude vraie d'un point quelconque D de sa surface;

$\theta = GON$ la latitude réduite du même point;

$r = DO$ le rayon de la Terre aboutissant au point D;

$N = DQ$ la normale à la surface au point D, terminée au grand axe en Q;

$\mathcal{N} = DV$ la normale au même point, terminée au petit axe en V;

$T = DT$ la tangente à la surface au point D, terminée au petit axe en T;

$\mathfrak{T} = DL$ la tangente au même point, terminée au grand axe en L;

$\mathcal{R} = DU$ le rayon de courbure au point D;

$S = DN$ la longueur de l'arc du méridien compris entre l'équateur et le point D;

$C =$ La latitude croissante du point D, comptée depuis l'équateur;

$D =$ L'aire d'une zone de la surface comprise entre l'équateur et le parallèle passant par le point D;

$V =$ Le volume d'un tronçon de sphéroïde, ayant pour bases l'équateur et le parallèle du point D;

$x =$ L'abscisse OK,
$y =$ L'ordonnée DK } coordonnées du point D du méridien NOP.

Ces coordonnées sont rectangulaires; elles ont pour origine le centre O, et pour axe les axes mêmes ON et OP du sphéroïde.

On a *(fig. 1.re)*, par la propriété de l'ellipse,

$$GK = DK \times \frac{ON}{OP} = \frac{a}{b} y.$$

Le triangle GKO rectangle en K, donne

$$\overline{OG}^2 - \overline{OK}^2 = \overline{GK}^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 - x^2;$$

ce qui donne pour l'équation à l'ellipse du méridien NOP,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

On en tire par la différenciation,

$$a^2 y\, dy + b^2 x\, dx = 0;$$

multipliant cette équation par xy, elle devient

$$a^2 y^2 x\, dy + b^2 x^2 y dx = 0:$$

mettant successivement dans cette équation les valeurs de $a^2 y^2$ et $b^2 x^2$, tirées de l'équation à l'ellipse, on a

$$x dy - y dx = a dy \left(\frac{a}{x}\right) = - b dx \left(\frac{b}{y}\right);$$

élevant au carré la même équation ci-dessus, il vient

$$a^4 y^2 dy^2 - b^4 x^2 dx^2 = 0:$$

chassant successivement de cette équation les quantités $a^2 y^2$ et $b^2 x^2$, au moyen de leurs valeurs, on a

$$b^2 x^2 dx^2 - a^2 (a^2 - x^2) dy^2 = 0,$$
$$a^2 y^2 dy^2 - b^2 (b^2 - y^2) dx^2 = 0.$$

de ces dernières équations on tire les suivantes :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{b^2 x^2},$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2} = \frac{b^4 - (a^2 - b^2)y^2}{a^2 y^2},$$

qui vont bientôt nous être utiles.

Le triangle DKO rectangle en K, donne

$$\overline{DO}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{DK}^2 = r^2 = x^2 + y^2.$$

Substituant successivement dans cette équation à y^2 et x^2 leurs valeurs tirées de l'équation à l'ellipse, on a

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2} = \frac{a^2 b^2 - (a^2 - b^2)y^2}{b^2}.$$

Le triangle élémentaire CmD, rectangle en m, est semblable aux triangles DKQ, rectangle en K, et DBT rectangle B, ainsi qu'aux triangles DBV, rectangle en B, et DKL rectangle en K, et l'on a, en vertu de cette similitude,

$$KQ = DK\left(\frac{Dm}{Cm}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)y,$$

$$BT = BD\left(\frac{Dm}{Cm}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)x,$$

$$BV = BD\left(\frac{Cm}{Dm}\right) = \left(\frac{dx}{dy}\right)x,$$

$$KL = DK\left(\frac{Cm}{Dm}\right) = \left(\frac{dx}{dy}\right)y.$$

Substituant dans ces équations les valeurs des rapports différentiels, $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, données par l'équation $a^2 y\,dy + b^2 x\,dx = 0$; l'on a

$$KQ = -\left(\frac{b^2}{a^2}\right)x \ldots\ldots BV = -\left(\frac{a^2}{b^2}\right)y,$$

$$BT = -\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{x}{y}\right)x \ldots KL = -\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)y.$$

Les triangles DKQ, DBV, tous deux rectangles, l'un en K, l'autre en B, donnent

$$\overline{DQ}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{KQ}^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4},$$

$$\overline{DV}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BV}^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{b^4}.$$

Si l'on substitue dans l'avant-dernière équation la valeur de y^2, et dans la dernière la valeur de x^2, tirées de l'équation à l'ellipse, on a

$$N = b\left[1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = b\left[1-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{N} = a\left[1+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = a\left[1+\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il suit de ces équations, que l'on a constamment dans l'ellipse, entre les axes et les normales terminées à ces axes, ce rapport

$$\frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Les triangles DBT, DKL, tous deux rectangles, l'un en B, l'autre en K, donnent

$$\overline{DT}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BT}^2 = x^2\left(\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}\right),$$

$$\overline{DL}^2 = \overline{DK}^2 + \overline{KL}^2 = y^2\left(\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{b^4x^2}\right).$$

Mettant dans l'avant-dernière équation la valeur de x^2, et dans la dernière celle de y^2, il vient

$$T = \begin{cases} b\left[\left(\frac{b^2-y^2}{y^2}\right) + \left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2-y^2}{b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ b\left[\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right) + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

$$\mathcal{T} = \begin{cases} a\left[\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right) - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ a\left[\left(\frac{y^2}{b^2-y^2}\right) - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Le triangle GKO, rectangle en K, donne

$$GK = GO \text{ sin. } GON = a \text{ sin. } \theta = \left(\frac{a}{b}\right)y,$$

$$OK = GO \text{ cos. } GON = a \text{ cos. } \theta = x.$$

Le triangle DKQ, également rectangle en K, donne

$$DK = DQ \text{ sin. } DQN = N \text{ sin. } \varphi = y,$$

$$QK = DQ \text{ cos. } DQN = N \text{ cos. } \varphi = \left(\frac{b^2}{a^2}\right) x.$$

On tire de ces équations, en divisant la première de chaque couple par la seconde,

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a} \text{ tang. } \theta = \left(\frac{b^2}{a^2}\right) \text{ tang. } \varphi;$$

partant, on a cette équation,

$$a \text{ tang. } \theta = b \text{ tang. } \varphi.$$

Le triangle élémentaire CmD, rectangle en m, donne

$$\overline{CD}^2 = \overline{Cm}^2 + \overline{Dm}^2 = dS^2 = dx^2 + dy^2.$$

Si l'on substitue dans cette équation les valeurs de $(dx^2 + dy^2)$, trouvées plus haut, on a

$$dS^2 = dy^2 \left[\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{b^2 x^2}\right] = dx^2 \left[\frac{b^4 + (a^2 - b^2) y^2}{a^2 y^2}\right].$$

Le secteur élémentaire CUD donne

$$CD = CU \text{ angl. } CUD = CU \times d \text{ angl. } DQN = \mathcal{R} d\varphi = dS.$$

De l'équation, tang. $\varphi = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)$, l'on tire

$$\text{cos.}^2 \varphi = \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2};$$

en différenciant cette dernière équation, l'on a

$$d\varphi = \left(\frac{a^2 b^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}\right)(x dy - y dx).$$

Cette équation devient, en y mettant la valeur du facteur $(x dy - y dx)$, trouvée plus haut,

$$d\varphi = \left(\frac{a^4 b^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2}\right)\left(\frac{dy}{x}\right) = -\left(\frac{a^2 b^4}{a^4 y^2 + b^4 x^2}\right)\left(\frac{dx}{y}\right).$$

Si l'on met dans cette équation les valeurs de $a^2 y^2$ et $b^2 x^2$, fournies par l'équation à l'ellipse, elle se changera en cette autre,

$$d\varphi = \left[\frac{a^4}{a^4-(a^2-b^2)x^2}\right]\left(\frac{dy}{x}\right) = -\left[\frac{b^4}{b^4+(a^2-b^2)y^2}\right]\left(\frac{dx}{y}\right).$$

On a trouvé ci-dessus l'expression suivante du rayon de courbure

$$\mathcal{R} = \frac{dS}{d\varphi},$$

qui devient, par la substitution des valeurs de dS et $d\varphi$,

$$\mathcal{R} = \frac{a^2}{b}\left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^4}\right]^{\frac{3}{2}} = -\frac{b^2}{a}\left[\frac{b^4+(a^2-b^2)y^2}{b^4}\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{b^4}N^3.$$

Si l'on introduit dans l'expression de dS^2, trouvée ci-dessus, les valeurs de dy^2 en x^2 et dx^2, et celles de dx^2 en y^2 et dy^2, on aura

$$dS = -\left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dx}{a}\right) = \left[\frac{b^4+(a^2-b^2)y^2}{b^2-y^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{b}\right),$$

qui est l'expression de l'élément de la courbe du méridien.

La latitude croissante d'un point quelconque de la surface du sphéroïde est une droite qui représente l'arc du méridien elliptique, compris entre l'équateur et ce point, dans une carte réduite. Puisque cet arc, pour être égal à cette droite, doit être augmenté dans la raison du rayon de l'équateur au rayon du parallèle qui le termine, son expression élémentaire est

$$dC = a\left(\frac{dS}{x}\right);$$

elle devient, en y substituant la valeur de dS que l'on vient de trouver,

$$dC = \left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dx}{x}\right) = \left[\frac{b^4+(a^2-b^2)y^2}{b^2-y^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{[b^2-y^2]^{\frac{1}{2}}}\right).$$

La surface d'une zone d'ellipsoïde comprise entre l'équateur ON et le parallèle BN, dont la distance à l'équateur est $BO = y$, a pour élément une quantité égale au produit de l'arc infinitésimal CD d'ellipse, par la circonférence du cercle qui a $BC = x$ pour rayon. Cet élément est donc égal à

$$dD = 2\pi dS.$$

De la valeur de dS ci-dessus, on tire celle de $x\,dS$, qui, étant substituée dans l'équation précédente, la change en celle-ci;

$$dD=-2\pi\left[\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{a}\right)dx=2a\pi\left[\frac{b^4+(a^2-b^2)y^2}{b^4}\right]^{\frac{1}{2}}dy.$$

Le volume d'un tronçon d'ellipsoïde qui a pour base l'équateur ON et le parallèle BD, et dont l'épaisseur est égale à $BO=y$, a pour élément une quantité égale au produit de la surface du cercle, qui a $BD=x$ pour rayon, par la différentielle $Dm=dy$ de l'ordonnée DK. Cet élément est donc égal à

$$dV = \pi x^2 dy.$$

Si l'on met dans cette expression de dV la valeur de dy en x et dx, et ensuite celle de x^2 en y^2, l'on a

$$dV=\pi\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{x^3}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]dx=\pi\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left[b^2-y^2\right]dy.$$

L'intégration de cette équation est facile; en l'effectuant, on trouve, pour l'expression du volume V d'un tronçon d'ellipsoïde, cette intégrale,

$$V=\pi ab\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\left[1-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)\right]=\pi a^2y\left[1-\tfrac{1}{3}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right],$$

à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, attendu que V devient nul, comme cela doit être, lorsque $x=a$ ou $y=0$.

Pour intégrer les expressions de dC et de dD, il s'agit d'abord de rendre ces différentielles rationnelles, ce qui se fait aisément, en y introduisant une nouvelle variable z, dont la relation avec les variables x ou y soit déterminée par cette équation,

$$z^2=\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{(a^2-b^2)(a^2-x^2)}=\frac{b^4+(a^2-b^2)y^2}{(a^2-b^2)y^2}.$$

En effet, par cette substitution, la différentielle dC devient

$$dC=-b^2(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)\left[a^2-(a^2-b^2)z^2\right]}\right],$$

laquelle étant mise sous cette forme,

$$dC = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)z^2-1} - \frac{1}{z^2-1}\right]dz,$$

a visiblement pour intégrale,

$$C = \tfrac{1}{2}a\left[\mathcal{L}\left\{\frac{z(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}+a}{z(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-a}\right\} - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right],$$

sans constante à ajouter, attendu que C s'évanouit lorsque z est une quantité infinie, ou, comme cela doit être, lorsque $x = a$ ou $y = 0$.

La lettre $\mathcal{L}$ désigne, dans cette équation, les logarithmes naturels ou hyperboliques des quantités qu'elle affecte.

En vertu de la même substitution, la différentielle dD devient

$$dD = -2\pi b^2\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{z}{1-z^2}\right]^2 dz,$$

dont l'intégrale s'obtient aisément sous cette forme,

$$dD = -\pi b^2\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{z^2+1}{(z^2-1)^2} + \frac{1}{z^2-1}\right]dz.$$

Cette intégrale est

$$D = \pi b^2\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{z}{z^2+1}\right) + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right].$$

D devant être nulle lorsque $x = a$ ou z infini, il n'y a point de constante à ajouter à cette intégrale.

L'expression de la différentielle dS ne pouvant être rendue rationnelle par aucune substitution connue, on n'obtient son intégrale que par approximation et en la développant en série.

Mais, avant de nous en occuper, nous allons substituer dans les différentes formules obtenues jusqu'ici, les valeurs des coordonnées x ou y en fonctions de latitude vraie φ du point ou du parallèle que l'on considère.

CHAPITRE III.

Expressions analytiques des mêmes parties du Sphéroïde que l'on vient de considérer, en fonctions de la latitude vraie.

Nous avons trouvé dans le Chapitre précédent les valeurs suivantes des coordonnées x, y,

$$x = a \cos. \theta,$$
$$y = b \sin. \theta;$$

équations qui ont pour différentielles,

$$dx = - a d\theta \sin. \theta,$$
$$dy = + b d\theta \cos. \theta.$$

De l'équation trouvée ci-dessus,

$$a \text{ tang. } \theta = b \text{ tang } \varphi,$$

on tire ces valeurs de sin. θ et cos. θ,

$$\sin. \theta = \sin. \varphi \frac{b}{a} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin.^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos. \theta = \cos. \varphi \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin.^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou en faisant, pour plus de simplicité, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, e étant le rapport de l'excentricité au demi-grand axe de l'ellipse du méridien,

$$\sin. \theta = \sin. \varphi \frac{\frac{b}{a}}{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos. \theta = \cos. \varphi \frac{1}{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

En différenciant la même équation, a tang. $\theta = b$ tang. φ, on a

$$d\theta = \left(\frac{b}{a} \right) d\varphi \frac{\cos.^2 \theta}{\cos.^2 \varphi} = \left(\frac{b}{a} \right) d\varphi \frac{1}{1 - e^2 \sin.^2 \varphi}.$$

Ces

Ces valeurs de sin. θ, cos. θ, $d\theta$, étant substituées dans les expressions de x et y, dx et dy, on aura, pour valeurs de ces coordonnées,

$$x = a \cos.\varphi \left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = b \sin.\varphi \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}};$$

et pour les différentielles de ces coordonnées,

$$dx = -bd\varphi \sin.\varphi \left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$dy = +bd\varphi \cos.\varphi \left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

On tire des valeurs précédentes de x et y,

$$a^2 - x^2 = \frac{b^2 \sin.^2\varphi}{1 - e^2 \sin.^2\varphi},$$

$$b^2 - y^2 = \frac{b^2 \cos.^2\varphi}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}.$$

On tire des mêmes valeurs de x et y et des équations précédentes,

$$a^4 - (a^2 - b^2)x^2 = a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2 = \frac{a^2 b^2}{1 - e^2 \sin.^2\varphi},$$

$$b^4 + (a^2 - b^2)y^2 = b^2(b^2 - y^2) + a^2y^2 = \frac{b^4}{1 - e^2 \sin.^2\varphi}.$$

Si l'on substitue les valeurs de $(a^2 - x^2)$ et $[a^4 - (a^2 - b^2)x^2]$, ou y^2 et $[b^4 + (a^2 - b^2)y^2]$, dans l'expression de z^2 ci-dessus, elle se changera en la suivante,

$$\frac{1}{z} = e \sin.\varphi.$$

En ajoutant ensemble les valeurs de x^2 et de y^2, on a l'équation

$$r^2 = (a^2 + b^2) - \frac{b^2}{1 - e^2 \sin.^2\varphi},$$

laquelle devient, en faisant, pour abréger,

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = e^2 \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2}\right),$$

$$r^2 = (a^2 + b^2) - b^2 \left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos.2\varphi}\right).$$

On peut encore donner à cette équation ces deux autres formes,

$$r^2 = \frac{a^4 - (a^4 - b^4)\sin.^2\varphi}{a^2 - (a^2 - b^2)\sin.^2\varphi} = \frac{b^4 + (a^4 - b^4)\cos.^2\varphi}{b^2 + (a^2 - b^2)\cos.^2\varphi},$$

ou enfin la suivante, en faisant encore, pour abréger,

$$\partial^2 = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4} = e^2\left[\frac{a^2(a^2+b^2)}{a^4 + b^4}\right] = c^2\left[\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 + b^4}\right];$$

$$r^2 = a\left(\frac{1 + c^2}{1 + \partial^2}\right)\left[\frac{1 + \partial^2 \cos.2\varphi}{1 + c^2 \cos.2\varphi}\right].$$

On peut aussi, au moyen des logarithmes, donner deux formes différentes à l'avant-dernière équation,

$$\mathcal{L}\left(\frac{a}{r}\right) = +\int \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^n - 1\right]\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^n \sin.^{2n}\varphi,$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{r}{b}\right) = \pm\int \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^n - 1\right]\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^n \cos.^{2n}\varphi.$$

$\mathcal{L}$ signifie, comme ci-dessus, des logarithmes hyperboliques, et $\int$ désigne la somme de tous les termes que l'on peut former, en donnant successivement à n toutes les valeurs possibles, depuis l'unité inclusivement jusqu'à l'infini.

Dans la dernière formule, le signe supérieur se rapporte à n impair et l'inférieur à n pair.

On calcule facilement, à l'aide des formules précédentes, la valeur du rayon de la Terre, correspondant à une latitude donnée.

Les valeurs de x^2 ou $(b^2 - y^2)$, y^2 ou $(a^2 - x^2)$, étant substituées dans les expressions de N et $\mathcal{N}$, on a, pour évaluer les normales, ces formules,

$$N = b\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos.2\varphi}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{N} = a\left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos.2\varphi}\right]^{\frac{1}{2}},$$

La substitution des valeurs x^2, $(a^2 - x^2)$, ou y^2, $(b^2 - y^2)$, dans

les expressions de T et $\mathcal{E}$, donne, pour l'évaluation des deux parties de la tangente à un point quelconque de l'ellipse du méridien, comprises entre ce point et les prolongemens respectifs des petit et grand axes, ces formules,

$$T = a \text{ cotang. } \varphi \left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{E} = b \text{ tang. } \varphi \left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on ajoute ensemble ces deux équations, on aura, pour la valeur de la tangente entière, comprise entre les prolongemens des deux axes de l'ellipse du méridien, cette formule,

$$T + \mathcal{E} = \frac{2a}{\sin. 2\varphi}\left[\frac{1 + c^2 \cos. 2\varphi}{1 + c^2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

si l'on soustrait la seconde des mêmes équations de la première, on a, pour la différence des deux parties de la tangente, cette valeur,

$$T - \mathcal{E} = \frac{2a}{\sin. 2\varphi}\left[\frac{(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + c^2}\right]\left[\frac{c^2 + \cos. 2\varphi}{(1 + c^2 \cos. 2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right];$$

si l'on substitue les valeurs de x^2, de y^2, ou de N^3 dans les expressions de $\mathcal{R}$, on aura, pour celle du rayon de courbure,

$$\mathcal{R} = b\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Le rayon d'un parallèle quelconque à l'équateur, étant égal à l'abscisse x, son expression est

$$x = a \cos. \varphi \left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mettant dans l'expression de dC les valeurs de x, x^2, $(a^2 - x^2)$, dx, ou celles de y^2, $(b^2 - y^2)$, dy, on aura, pour l'expression élémentaire de la latitude croissante,

$$dC = a\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\left[\frac{d\varphi}{\cos. \varphi\,(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)}\right],$$

équation qui, étant écrite sous cette forme,

$$dC = a\left[\frac{d\varphi}{\cos.\varphi} - e^2\left(\frac{d\sin.\varphi}{1-e^2\sin.^2\varphi}\right)\right],$$

est facile à intégrer. On a, en effet,

$$C = a\left[\mathcal{L}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi) - \tfrac{1}{2}e\,\mathcal{L}\left(\frac{1+e\sin.\varphi}{1-e\sin.\varphi}\right)\right].$$

Il n'y a point de constante à ajouter à cette intégrale, en supposant que C et φ doivent commencer ensemble.

Cette équation peut être écrite comme il suit :

$$C = a\,\mathcal{L}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi)\left[\frac{1-e\sin.\varphi}{1+e\sin.\varphi}\right]^{\frac{1}{2}e}.$$

Soit ϑ un angle subsidiaire tel, que l'on ait

$$\sin.\vartheta = e\sin.\varphi\,;$$

on pourra, à son moyen, donner à l'équation précédente cette autre forme,

$$C = a\,\mathcal{L}\left[\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\nabla+\varphi)}{\text{tang.}^e\frac{1}{2}(\nabla+\vartheta)}\right].$$

Supposons encore que l'on ait

$$C = a\,\mathcal{L}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi-f),$$

on aura, pour déterminer f, cette équation,

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi-f) = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi)\,\text{cotang.}^e\tfrac{1}{2}(\nabla+\vartheta),$$

de laquelle on tire, en faisant, pour abréger,

$$h = \frac{\text{tang.}^e\frac{1}{2}(\nabla+\vartheta)-1}{\text{tang.}^e\frac{1}{2}(\nabla+\vartheta)+1},$$

cette expression de tang. $\frac{1}{2}f$,

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}f = \frac{h\cos.\varphi}{1-h\sin.\varphi}.$$

On serait parvenu à la même valeur de C ci-dessus, en substituant dans celle qui a été trouvée au chapitre précédent, en fonction de z, la valeur de cette quantité en fonction de sin. φ, ou en y faisant $z = \frac{1}{e\sin.\varphi}$.

Reprenons l'expression de dD, et substituons-y les valeurs de x^2, (x^2-a^2), dx, ou celles de y^2, dy. Nous aurons, pour l'élément de la surface du sphéroïde,

$$dD = 2\pi b^2 \frac{d\varphi \cos.\varphi}{(1-e^2 \sin.^2\varphi)^2},$$

qui peut être facilement intégrée, étant mise sous cette forme,

$$dD = \pi b^2 \left[\frac{1+e^2 \sin.^2\varphi}{(1-e^2 \sin.^2\varphi)^2} + \frac{1}{1-e^2 \sin.^2\varphi}\right] d \sin.\varphi;$$

son intégrale est

$$D = \pi b^2 \left[\frac{\sin.\varphi}{1-e^2 \sin.^2\varphi} + \frac{1}{2e} \mathcal{L}\left(\frac{1+e \sin.\varphi}{1-e \sin.\varphi}\right)\right],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$D = \pi b^2 \left[\frac{(1+c^2) \sin.\varphi}{1+c^2 \cos.2\varphi} + \frac{1}{2e} \mathcal{L}\left(\frac{1+e \sin.\varphi}{1-e \sin.\varphi}\right)\right].$$

Il n'y a point de constante à ajouter, si l'on veut que D et φ s'évanouissent en même temps.

On serait également arrivé à la même valeur de D, en substituant celle de z dans l'expression de D, trouvée ci-dessus en fonction de cette quantité.

En introduisant dans l'avant-dernière formule l'angle subsidiaire ϑ ci-dessus, on pourra l'écrire de cette manière plus simple,

$$D = \pi \frac{b^2}{e} \left[\frac{\text{tang.}\vartheta}{\cos.\vartheta} + \mathcal{L} \text{ tang.} \tfrac{1}{2}(\nabla + \vartheta)\right].$$

Si l'on met dans l'expression de dV les valeurs de x^3, (a^2-x^2), dx, ou celles de (b^2-y^2), dy, on aura pour l'élément du volume du sphéroïde,

$$dV = \pi a b^2 \left[\frac{\cos.^2\varphi \, d \sin.\varphi}{(1-e^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}\right].$$

Cette équation étant disposée comme il suit, ce qui n'en change pas la valeur,

$$dV = \pi a b^2 \left[\frac{1}{(1-e^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\sin.^2\varphi}{(1-e^2 \sin.^2\varphi)^{\frac{5}{2}}}\right)\right] d\sin.\varphi,$$

a pour intégrale,

$$V = \pi a b^2 \left[\left(\frac{\sin.^2 \varphi}{1 - e^2 \sin.^2 \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{\sin.^2 \varphi}{1 - e^2 \sin.^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \right],$$

à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, si V et φ doivent être nuls en même temps.

Si l'on eût substitué dans l'expression de V du chapitre précédent les valeurs de $(a^2 - x^2)$, ou de y et y^3, on serait de même parvenu, après quelques réductions faciles, à la formule précédente.

Si l'on fait, pour abréger, $\vartheta^2 = \frac{3a^2 - 2b^2}{3a^2 + 2b^2}$, la dernière formule deviendra

$$V = \pi a b^2 \sin. \varphi \left[\frac{(1 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \vartheta^2} \right] \left\{ \frac{1 + c^2 \cos. 2\varphi}{(1 + \vartheta^2 \cos. 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

mais la même formule devient encore plus simple par l'introduction de l'angle subsidiaire ϑ, on a alors

$$V = \pi \frac{a b^2}{e} \text{tang.} \vartheta \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{b^2}{a^2 e^2} \right) \text{tang.}^2 \vartheta \right].$$

En substituant dans l'expression de dS les valeurs de x^2, $(a^2 - x^2)$, dx, ou de y^2, $(b^2 - y^2)$, dy, elle devient

$$dS = \left(\frac{b^2}{a} \right) \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin.^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

pour l'élément de l'ellipse du méridien.

On pourrait intégrer cette équation sous cette forme, après avoir réduit le dénominateur du second membre en une série ordonnée par rapport aux puissances de e^2; mais on peut encore écrire cette équation comme il suit :

$$dS = \frac{b^2}{a} (1 + c^2)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{d\varphi}{(1 + c^2 \cos. 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

et c'est sous cette forme que nous allons l'intégrer.

CHAPITRE IV.

Expression de la longueur d'un Arc de méridien elliptique compris entre deux parallèles donnés.

On tire de la dernière équation,

$$\frac{a\,S}{b^2\,(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\varphi}{(1+c^2\cos.2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le second membre de cette équation ne pouvant pas être rendu rationnel, il n'y a d'autre moyen pour obtenir son intégrale que de développer en série son dénominateur radical. On a ainsi

$$\left(\frac{1}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{1.3}{2.1}c^2\cos.2\varphi + \frac{1.3.5}{2^2.1.2}c^4\cos.^2 2\varphi - \frac{1.3.5.7}{2^3.1.2.3}c^6\cos.^3 2\varphi + \&c.,$$

et la fonction à intégrer sera alors de cette forme,

$$d\varphi\left[1-\frac{1.3}{2.1}c^2\cos.2\varphi+\frac{1.3.5}{2^2.1.2}c^4\cos.^2 2\varphi-\frac{1.3.5.7}{2^3.1.2.3}c^6\cos.^3 2\varphi+\&c.\right].$$

Avant de l'intégrer, il faut d'abord remplacer les puissances de cos. 2φ par leurs valeurs en fonction des cosinus des multiples de l'angle 2φ. Pour cet effet, on se rappellera que A étant un angle quelconque, on a généralement

$$2^{n-1}\cos.^n A = \cos.nA + \frac{n}{1}\cos.(n-2)A + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)A + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)A + \&c.,$$

au nombre de $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ termes, en observant que, pour le cas de n pair, on ne prend pour le $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{me}$ terme que la moitié du nombre qui se présente après le $\left(\frac{n}{2}\right)^{me}$ terme.

En faisant dans cette équation $A = 2\varphi$, et donnant successivement à n toutes les valeurs de la suite des nombres naturels, à

commencer par l'unité, et ayant d'ailleurs égard à la remarque précédente, on formera cette suite de valeurs des puissances de cos. 2φ.

$$\cos. 2\varphi = \cos. 2\varphi,$$
$$2\cos.^2 2\varphi = 1 + \cos. 4\varphi,$$
$$2^2\cos.^3 2\varphi = 3\cos. 2\varphi + \cos. 6\varphi,$$
$$2^3\cos.^4 2\varphi = 3 + 4\cos. 4\varphi + \cos. 8\varphi,$$
$$2^4\cos.^5 2\varphi = 10\cos. 2\varphi + 5\cos. 6\varphi + \cos. 10\varphi,$$
$$2^5\cos.^6 2\varphi = 10 + 15\cos. 4\varphi + 6\cos. 8\varphi + \cos. 12\varphi,$$
$$2^6\cos.^7 2\varphi = 35\cos. 2\varphi + 21\cos. 6\varphi + 7\cos. 10\varphi + \cos. 14\varphi,$$
$$2^7\cos.^8 2\varphi = 35 + 56\cos. 4\varphi + 28\cos. 8\varphi + 8\cos. 12\varphi + \cos. 16\varphi,$$

et ainsi de suite.

La substitution de ces puissances de cos. 2φ dans la série précédente, la change en celle-ci,

$$\left(\frac{1}{1 + c^2\cos. 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1.3}{2.1}c^2\cos. 2\varphi + \frac{1.3.5}{2^2.1.2}c^4\cos.^2 2\varphi - \frac{1.3.5.7}{2^3.1.2.3}c^6\cos.^3 2\varphi + \&c.$$

$$= 1$$
$$- \frac{1.3}{2.1}c^2 \quad (\cos. 2\varphi),$$
$$+ \frac{1.3.5}{2^3.1.2}c^4 \quad (1 + \cos. 4\varphi),$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2^5.1.2.3}c^6 \quad (3\cos. 2\varphi + \cos. 6\varphi),$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9}{2^7.1.2.3.4}c^8 \quad (3 + 4\cos. 4\varphi + \cos. 8\varphi),$$
$$- \frac{1.3.5.7.9.11}{2^9.1.2.3.4.5}c^{10} \quad (10\cos. 2\varphi + 5\cos. 6\varphi + \cos. 10\varphi),$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12} \quad (10 + 15\cos. 4\varphi + 6\cos. 8\varphi + \cos. 12\varphi),$$
$$- \frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2^{13}.1.2.3.4.5.6.7}c^{14} \quad (35\cos. 2\varphi + 21\cos. 6\varphi + 7\cos. 10\varphi + \cos. 14\varphi),$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} \quad (35 + 56\cos. 4\varphi + 28\cos. 8\varphi + 8\cos. 12\varphi + \cos. 16\varphi),$$

et ainsi de suite.

En

En multipliant chaque terme de cette série par $d\varphi$, on l'intégrerait aisément par parties; mais on peut lui donner une forme plus simple. En effet, si l'on ordonne tous les termes par rapport aux multiples de l'angle φ, et que l'on fasse, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 1 + \frac{1.3.5}{2^3.1.2}c^4 + 3\frac{1.3.5.7.9}{2^7.1.2.3.4}c^8 + 10\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12} + 35\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} + \&c.,$$

$$\beta = 1\frac{1.3}{2.1}c^2 + 3\frac{1.3.5.7}{2^5.1.2.3}c^6 + 10\frac{1.3.5.7.9.11}{2^9.1.2.3.4.5}c^{10} + 35\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2^{13}.1.2.3.4.5.6.7}c^{14} + \&c.,$$

$$2\gamma = 1\frac{1.3.5}{2^3.1.2}c^4 + 4\frac{1.3.5.7.9}{2^7.1.2.3.4}c^8 + 15\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12} + 56\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} + \&c.,$$

$$3\delta = 1\frac{1.3.5.7}{2^5.1.2.3}c^6 + 5\frac{1.3.5.7.9.11}{2^9.1.2.3.4.5}c^{10} + 21\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2^{13}.1.2.3.4.5.6.7}c^{14} + \&c.$$

$$4\varepsilon = 1\frac{1.3.5.7.9}{2^7.1.2.3.4}c^8 + 6\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12} + 28\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} + \&c.$$

$$5\iota = 1\frac{1.3.5.7.9.11}{2^9.1.2.3.4.5}c^{10} + 7\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2^{13}.1.2.3.4.5.6.7}c^{14} + \&c.$$

$$6\varkappa = 1\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12} + 8\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} + \&c.$$

$$7\lambda = 1\frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2^{13}.1.2.3.4.5.6.7}c^{14} + \&c.$$

$$8\mu = 1\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}c^{16} + \&c.$$

et ainsi de suite, la série précédente devient

$$\left(\frac{1}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2}\alpha - \beta\cos.2\varphi + 2\gamma\cos.4\varphi - 3\delta\cos.6\varphi + 4\varepsilon\cos.8\varphi - \&c.;$$

multipliant par $2d\varphi$ les deux membres de cette équation, et intégrant, l'on a

$$\int \frac{2\,d\varphi}{(1+c^2\cos.2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \alpha\varphi - \beta\sin.2\varphi + \gamma\sin.4\varphi - \delta\sin.6\varphi + \varepsilon\sin.8\varphi - \&c.,$$

en déterminant la constante de façon que le second membre de cette équation s'évanouisse lorsque φ est zéro.

Cette valeur étant portée dans l'expression de S, il vient

$$S = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}[\alpha\varphi - \beta\sin.2\varphi + \gamma\sin.4\varphi - \delta\sin.6\varphi + \varepsilon\sin.8\varphi - \&c.].$$

Telle est la valeur d'un arc de méridien elliptique compris entre l'équateur et le parallèle, dont la latitude est φ.

Soit φ' la latitude d'un autre parallèle plus éloigné de l'équateur que le précédent, on aura pareillement,

$$S' = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}[\alpha\varphi' - \beta\sin.2\varphi' + \gamma\sin.4\varphi' - \delta\sin.6\varphi' + \varepsilon\sin.8\varphi' - \&c.],$$

pour la longueur de l'arc de méridien compris entre l'équateur et ce parallèle.

Soustrayant l'équation précédente, membre à membre, de celle-ci, on a

$$S'-S = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}[\alpha(\varphi'-\varphi) - \beta(\sin.2\varphi' - \sin.2\varphi) + \gamma(\sin.4\varphi'-\sin.4\varphi) - \delta(\sin.6\varphi'-\sin.6\varphi) + \&c.],$$

ou, ce qui est la même chose,

$$S'-S = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}[\alpha(\varphi'-\varphi) - 2\beta\sin.(\varphi'-\varphi)\cos.(\varphi'+\varphi) + 2\gamma\sin.2(\varphi'-\varphi)\cos.2(\varphi'+\varphi) - 2\delta\sin.3(\varphi'-\varphi)\cos.3(\varphi'+\varphi) + \&c.],$$

en faisant, pour abréger, $\sigma = (S'-S)$ et $\Phi = (\varphi'-\varphi)$, cette équation devient

$$\sigma = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}[\alpha\Phi - 2\beta\sin.\Phi\cos.(2\varphi+\Phi) + 2\gamma\sin.2\Phi\cos.2(2\varphi+\Phi) - 2\delta\sin.3\Phi\cos.3(2\varphi+\Phi) + \&c.].$$

C'est la valeur d'un arc de méridien compris entre deux parallèles à l'équateur, dont les latitudes sont φ et φ'.

Si, dans l'expression de S, l'on fait $\varphi = \nabla =$ à l'angle droit, l'arc S deviendra alors égal à un quart d'ellipse terminé à l'équateur et à l'un des pôles; en le désignant par Q, en sorte que $S = Q$, lorsque $\varphi = \nabla$, l'on aura

$$Q = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\tfrac{1}{2}\alpha\nabla,$$

au moyen de quoi, la dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$\sigma = Q\left(\frac{\Phi}{\nabla}\right) - 4\left(\frac{Q}{\pi}\right)\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\sin.\Phi\cos.(2\varphi+\Phi) - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\sin 2.\Phi\cos.2(2\varphi+\Phi) + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)\sin.3\Phi\cos.3(2\varphi+\Phi) - \&c.\right].$$

Dans le cas particulier où l'on aurait $\varphi' + \varphi = 2\varphi + \Phi = \nabla$, à cause de cos. $\nabla = 0$, cos. $2\nabla = -1$, cos. $3\nabla = 0$, cos. $4\nabla = +1$, &c., l'expression précédente de σ deviendrait

$$\sigma = Q\left(\frac{\Phi}{\nabla}\right) - 4\left(\frac{Q}{\pi}\right)\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\sin.2\Phi - \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\sin.4\Phi + \left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)\sin.6\Phi - \&c.\right];$$

et cette formule exprimerait alors les valeurs d'un arc de méridien compris entre deux parallèles, dont les latitudes φ et φ' sont complément l'une de l'autre.

En désignant par m le rang des coèfficiens α, β, γ, &c., par n le rang des termes de chaque coèfficient, et par k un nombre tel que

$$k_m = \left(\frac{1}{m-1}\right)\int\left(\frac{1}{2^{2m+4n-7}}\right)\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(m+n-3)}{1.2.3\ldots(m+n-2)} \times \frac{3.5.7.9\ldots(2m+4n-5)}{1.2.3.4\ldots(m+2n-3)}\,c^{2m+4n-6},$$

le signe $\int$ désignant la somme de tous les termes que l'on peut former, en faisant n successivement égal à tous les termes de la

série des nombres naturels 1, 2, 3, &c., à commencer par l'unité, l'on a

$$\beta = k_2, \quad \gamma = k_3, \quad \delta = k_4, \quad \varepsilon = k_5, \text{ &c.}$$

Il n'y a d'exception que pour le premier coèfficient α; mais il est aisé de voir que l'on a d'ailleurs pour l'expression de ce coèfficient,

$$\tfrac{1}{2}\alpha = k_1 = 1 + \frac{1}{2^{4n}} \int \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots n} \times \frac{3.5.7.9\ldots(4n+1)}{1.2.3.4\ldots \quad 2n}\, c^{4n}.$$

Au moyen de l'expression du coèfficient général ci-dessus, on peut trouver autant de termes que l'on voudra de la valeur d'un coèfficient particulier quelconque; par exemple, du coèfficient μ, dont le rang est $m = 9$; car on a

$$\mu = k_9 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2^{4n+11}}\right) \int \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots (n+7)} \times \frac{3.5.7.9\ldots(4n+13)}{1.2.3.4\ldots(2n+6)}\, c^{4n+12};$$

et si l'on fait, dans cette formule, n successivement égale à 1, 2, 3, &c., les trois premiers termes du coèfficient μ développé, seront

$$8\mu = 1\ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2^{15}.1.2.3.4.5.6.7.8}\, c^{16} + 10\ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21}{2^{19}.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}\, c^{20} + 66\ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25}{2^{23}.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}\, c^{24} + \text{&c.},$$

et ainsi des autres coèfficiens.

Si, dans l'expression de Q, on met pour α sa valeur, et si à ∇ on substitue $\frac{1}{2}\pi$, qui est sa valeur en partie du rayon, il viendra

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2}{a}\right)(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{1}{2^{4n}} \int \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots n} \times \frac{3.5.7.9\ldots(4n+1)}{1.2.3.4\ldots \quad 2n}\, c^{4n}\right];$$

mais le rayon de courbure du méridien elliptique, sous le parallèle dont $\frac{1}{2}\nabla$ est la latitude, est, d'après ce qui précède, égal à

$\frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{1}{2}}$, et par conséquent le facteur $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2}{a}\right)(1+c^2)^{\frac{3}{2}}$ est égal au quart de la circonférence du cercle osculateur sous cette latitude, en désignant ce quart de circonférence par $\mathcal{Q}$, ou en faisant

$$\mathcal{Q} = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2}{a}\right)(1+c^2)^{\frac{3}{2}},$$

et substituant $\mathcal{Q}$ au lieu de cette quantité dans l'équation précédente, elle deviendra

$$Q = \mathcal{Q}\left[1+\frac{1}{2^{4n}}\int\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ n}\times\frac{3.5.7.9\ldots(4n+1)}{1.2.3.4\ \ldots\ 2n}c^{4n}\right].$$

On peut, au moyen du coëfficient général k, donner à la valeur de σ cette forme abrégée,

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\alpha\Phi \mp \int k_m \sin.(m-1)\Phi\cos.(m-1)(2\varphi+\Phi)\right],$$

dans laquelle le signe $\int$ désigne la somme de tous les termes que l'on peut former, en donnant successivement à m toutes les valeurs des nombres entiers, depuis 2 jusqu'à l'infini.

Le signe supérieur se rapporte à m pair, le signe inférieur à m impair.

Si l'on veut faire commencer l'arc σ au parallèle dont la latitude est égale au huitième de la circonférence, ou $\frac{1}{2}\nabla$, l'expression de cette quantité deviendra un peu plus simple. En effet, puisque

$$\cos.(m-1)(2\varphi+\Phi) = \cos.2(m-1)\varphi\cos.(m-1)\Phi - \sin.2(m-1)\varphi\sin.(m-1)\Phi,$$

si l'on met $\frac{1}{2}\nabla$ au lieu de φ dans cette équation, elle devient

$$\cos.[(m-1)\nabla+\Phi] = \cos.(m-1)\nabla\cos.(m-1)\Phi - \sin.(m-1)\nabla\sin.(m-1)\Phi;$$

en faisant donc m successivement égal à 2, 3, 4, 5, &c. à l'infini, les termes du second membre de cette dernière équation s'évanouiront alternativement, à commencer par le premier, et l'on aura,

dans le cas de $m = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases} \left\| \begin{array}{l} \cos.\,(m-1)(2\varphi+\Phi), \\ -\sin.\ \Phi, \\ -\cos.\ 2\Phi, \\ +\sin.\ 3\Phi, \\ +\cos.\ 4\Phi, \\ -\sin.\ 5\Phi, \end{array} \right.$

et ainsi de suite.

Substituant ces valeurs dans l'expression développée de σ, on trouve

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \beta\sin.^2\Phi - \tfrac{1}{2}\gamma\sin.4\Phi - \delta\sin.^3 3\Phi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.8\Phi - \&c.\right].$$

Désignant par ρ le rayon du cercle osculateur, sous la latitude $\frac{1}{2}\mathfrak{V}$, en sorte que l'on ait

$$\rho = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}},$$

chacun des coëfficiens $\frac{1}{2}\alpha$, β, $\frac{1}{2}\gamma$, δ, &c. des termes de la série précédente devra être multiplié par ρ : or, afin de faciliter cette opération, on fera d'abord attention que la valeur de ρ peut s'écrire de ces deux différentes manières,

$$\rho = a(1-c^2)(1+c^2)^{\frac{1}{2}} = b(1+c^2)(1-c^2)^{\frac{1}{2}},$$

qui deviennent, en extrayant la racine carrée du troisième facteur, et effectuant la multiplication par le second,

$$\rho = \left\{ \begin{array}{l} a\left[1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1.5}{2.4}c^4 + \frac{1.9}{2.4.6}c^6 - \frac{1.3.13}{2.4.6.8}c^8 + \frac{1.3.5.17}{2.4.6.8.10}c^{10} - \&c.\right] \\ b\left[1 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1.5}{2.4}c^4 - \frac{1.9}{2.4.6}c^6 - \frac{1.3.13}{2.4.6.8}c^8 - \frac{1.3.5.17}{2.4.6.8.10}c^{10} - \&c.\right] \end{array} \right\}.$$

Ces séries sont évidemment toujours convergentes, et la loi en est manifeste.

On peut aussi trouver aisément le logarithme de ρ, en prenant celui de chaque facteur de la double expression précédente, et

réunissant les termes semblables des séries qui en résultent; on a ainsi

$$\mathcal{L}\rho = \left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}a + \frac{1}{2}M\left[c^2 + \frac{3}{4}c^4 + \frac{1}{3}c^6 + \frac{3}{4}c^8 + \frac{1}{5}c^{10} + \frac{3}{6}c^{12} + \&c.\right] \\ \mathcal{L}b + \frac{1}{2}M\left[c^2 - \frac{3}{4}c^4 + \frac{1}{3}c^6 - \frac{3}{4}c^8 + \frac{1}{5}c^{10} - \frac{3}{6}c^{12} - \&c.\right] \end{array}\right\},$$

M étant le module des logarithmes. Ces séries sont aussi toujours convergentes, et faciles à continuer indéfiniment.

Si l'on multiplie maintenant chacun des coèfficiens α, β, γ, δ, &c. par la première valeur de ρ; savoir, celle dans laquelle a entre comme facteur, on aura, en divisant par a,

$$\frac{\alpha\rho}{2a} = 1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{5}{2^4}c^4 - \frac{9}{2^5}c^6 + \frac{241}{2^{10}}c^8 - \frac{449}{2^{11}}c^{10} + \frac{3221}{2^{14}}c^{12} - \&c.,$$

$$\frac{\beta\rho}{a} = \frac{1.3}{2}c^2\left[1 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{15}{2^5}c^4 - \frac{23}{2^6}c^6 + \frac{351}{2^{10}}c^8 - \frac{599}{2^{12}}c^{10} + \&c.\right],$$

$$\frac{2\gamma\rho}{a} = \frac{3.5}{2^4}c^4\left[1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{11}{2^4}c^4 - \frac{15}{2^5}c^6 + \frac{2059}{2^{10}}c^8 - \&c.\right],$$

$$\frac{3\delta\rho}{a} = \frac{5.7}{2^6}c^6\left[1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{59}{2^6}c^4 - \frac{15}{2^7}c^6 + \&c.\right],$$

$$\frac{4\varepsilon\rho}{a} = \frac{5.7.9}{2^{10}}c^8\left[1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{31}{2^6.5}c^4 - \&c.\right],$$

$$\frac{5\iota\rho}{a} = \frac{7.9.11}{2^{12}}c^{10}\left[1 - \frac{1}{2}c^2 + \&c.\right],$$

$$\frac{6\varkappa\rho}{a} = \frac{3.7.11.13}{2^{15}}c^{12}\left[1 - \&c.\right],$$

et ainsi de suite.

Pour avoir les produits des mêmes coèfficiens α, β, γ, δ, &c. par la seconde valeur de ρ; savoir, celle qui a b pour facteur, il suffit de changer a en b dans le premier membre des équations précédentes, et de prendre positivement tous les termes négatifs du second membre, sans rien changer aux autres.

CHAPITRE V.

Développement en Séries régulières des formules du Chapitre III.

NOUS avons donné dans le chapitre II, pour déterminer les valeurs des quantités r, N, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{R}$, x, C, D, V, des formules finies qui sont fonctions de la latitude φ à laquelle se rapportent ces différentes quantités : mais ces formules, quoique rigoureuses et simples, ne sont pas ce qu'il y a de plus commode pour obtenir ces valeurs, et l'on peut arriver bien plus simplement au même but, à l'aide des séries convergentes dans lesquelles les expressions de ces quantités sont susceptibles d'être transformées.

Le moyen de parvenir facilement à ces nouvelles expressions est d'abord de développer la quantité $\left(\frac{1}{1+\mu\cos.2\varphi}\right)$, et le logarithme de cette quantité en suites de termes procédant selon les multiples de l'angle 2φ. Pour cet effet, soit υ une quantité telle que l'on ait

$$\mu = \frac{2\upsilon}{1+\upsilon^2},$$

ce qui donne ces rapports,

$$\upsilon = \frac{1}{1+(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} \cdots \frac{1-\upsilon^2}{1+\upsilon^2} = (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}},$$

au moyen de quoi, la fonction à développer peut s'écrire ainsi,

$$\frac{1}{1+\mu\cos.2\varphi} = \left(\frac{1}{1-\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1-\upsilon^2}{1+2\upsilon\cos.2\varphi+\upsilon^2}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{1-\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{2\upsilon(\upsilon+\cos.2\varphi)}{1+2\upsilon\cos.2\varphi+\upsilon^2}\right].$$

Or, on a généralement, i étant un membre entier quelconque,

$$\frac{\upsilon^i\cos.2(i-1)\varphi+\upsilon^{i-1}\cos.2i\varphi}{1+2\upsilon\cos.2\varphi+\upsilon^2}$$
$$= \upsilon^{i-1}\cos.2i\varphi - \frac{\upsilon^{i+1}\cos.2i\varphi+\upsilon^i\cos.2(i+1)\varphi}{1+2\upsilon\cos.2\varphi+\upsilon^2}.$$

En

En faisant successivement dans cette équation, i égal à 1, 2, 3, 4, &c. à l'infini, et substituant, les unes dans les autres, les valeurs qui résultent de ces différentes suppositions, on a

$$\frac{v + \cos. 2\varphi}{1 + 2v \cos. 2\varphi + v^2} = \cos.2\varphi - v\cos.4\varphi + v^2\cos.6\varphi - v^3\cos.8\varphi + \&c.,$$

le dernier terme étant de cette forme, $v^i\left(\frac{v\cos.2i\varphi + \cos.2(i+1)\varphi}{1 + 2v\cos.2\varphi + v^2}\right)$;

partant, la fonction $\frac{1}{1 + \mu\cos. 2\varphi}$ a pour valeur en série,

$$\frac{1}{1 + \mu\cos. 2\varphi} = \left(\frac{1}{1+\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - 2v\cos.2\varphi + 2v^2\cos.4\varphi - 2v^3\cos.6\varphi + 2v^4\cos. 8\varphi - \&c.\right];$$

et cette série est évidemment toujours convergente, tant que v est une quantité moindre que l'unité.

Maintenant, pour avoir le logarithme de la fonction $\left(\frac{1}{1 + \mu\cos. 2\varphi}\right)$, on fera attention que ce logarithme est égal à celui de $(1 + \mu\cos. 2\varphi)$ *pris avec un signe contraire : cela posé*, l'on a, en différenciant la fonction $(1 + \mu\cos. 2\varphi)$, cette équation identique,

$$\mathcal{L}(1 + \mu\cos. 2\varphi) = \text{const.} - \int 2\,d\varphi\,\frac{\mu\sin. 2\varphi}{1 + \mu\cos. 2\varphi}.$$

Or, le facteur $\frac{\mu\sin. 2\varphi}{1 + \mu\cos. 2\varphi}$ peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{\mu\sin. 2\varphi}{1 + \mu\cos. 2\varphi} = \mu\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)\sin. 2\varphi\left[1 - \frac{2v(v + \cos. 2\varphi)}{1 + 2v\cos. 2\varphi + v^2}\right];$$

partant, l'on a, par la substitution de cette quantité,

$$\mathcal{L}(1 + \mu\cos.2\varphi) = K - \left(\frac{2v}{1-v^2}\right)\int 2\,d\varphi\sin.2\varphi\left[1 - \frac{2v(v+\cos.2\varphi)}{1+2v\cos.2\varphi+v^2}\right],$$

et en mettant dans le second membre de cette équation la valeur développée de $\frac{v + \cos. 2\varphi}{1 + 2v\cos. 2\varphi + v^2}$, elle devient

$$\mathcal{L}(1 + \mu\cos. 2\varphi) = K - \left(\frac{2v}{1-v^2}\right)\int 2\,d\varphi\sin. 2\varphi\left[1 - 2v\cos. 2\varphi + 2v^2\cos. 4\varphi - 2v^3\cos. 6\varphi + 2v^4\cos. 8\varphi - \&c.\right];$$

effectuant la multiplication de tous les termes du second membre par sin. 2φ, et se rappelant que l'on a généralement, n étant un nombre entier quelconque,

$$2 \sin. 2\varphi \cos. 2n\varphi = \sin. 2(n+1)\varphi - \sin. 2(n-1)\varphi ;$$

il vient, au lieu de la dernière équation,

$$\mathcal{L}(1+\mu\cos. 2\varphi) = K - \int 2 d\varphi \,[\upsilon \sin. 2\varphi - \upsilon^2 \sin. 4\varphi + \upsilon^3 \sin. 6\varphi - \upsilon^4 \sin. 8\varphi + \&c.].$$

Cette équation étant intégrée, devient

$$\mathcal{L}(1+\mu\cos. 2\varphi) = K + 2\left[\upsilon\cos. 2\varphi - \tfrac{1}{2}\upsilon^2\cos. 4\varphi + \tfrac{1}{3}\upsilon^3\cos. 6\varphi - \tfrac{1}{4}\upsilon^4\cos. 8\varphi + \&c.\right].$$

Pour déterminer la valeur de K, l'on observera que dans la supposition de 2φ égal au quadrant ou à l'angle droit, on a

$$0 = K + (\upsilon^2 - \tfrac{1}{2}\upsilon^4 + \tfrac{1}{3}\upsilon^6 - \tfrac{1}{4}\upsilon^8 + \&c) = K + \mathcal{L}(1+\upsilon^2);$$

partant, l'on a, pour déterminer K, l'équation

$$K = -\mathcal{L}(1+\upsilon^2) = -\mathcal{L}\left(\frac{2}{1+(1-\mu^2)}\right) :$$

donc, attendu que $\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+\mu\cos. 2\varphi}\right) = -\mathcal{L}(1+\mu\cos. 2\varphi)$, on a

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+\mu\cos. 2\varphi}\right) = \mathcal{L}(1+\upsilon^2) - 2\left[\upsilon\cos. 2\varphi - \tfrac{1}{2}\upsilon^2\cos. 4\varphi + \tfrac{1}{3}\upsilon^3\cos. 6\varphi - \&c.\right].$$

Nous venons d'exposer les développemens de la fonction $\left(\frac{1}{1+\mu\cos. 2\varphi}\right)$, et de son logarithme, en suites de termes ordonnés par rapport aux multiples de l'angle 2φ; nous allons actuellement en faire quelques applications.

On a trouvé ci-dessus, chapitre III, plusieurs équations équivalentes pour déterminer la valeur du rayon r de la Terre; l'une d'elles peut se réduire immédiatement à cette forme,

$$\left(\frac{a^2 - r^2}{b^2}\right) = c^2 \left(\frac{1 - \cos. 2\varphi}{1 + c^2\cos. 2\varphi}\right) :$$

or, en faisant $\mu = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c^2$, ce qui donne ces rapports,

$$\upsilon = \frac{a - b}{a + b} = \frac{c^2}{1 + (1 - c^4)^{\frac{1}{2}}},$$

et par abréviation, $\upsilon = \frac{c^2}{1 + (1 - c^4)^{\frac{1}{2}}} = \partial^2$, on a

$$\frac{1}{1 + c^2 \cos. 2\varphi} = \left(\frac{1}{1 - c^4}\right)^{\frac{1}{2}} [1 - 2\partial^2 \cos. 2\varphi + 2\partial^4 \cos. 4\varphi - 2\partial^6 \cos. 6\varphi + \&c.];$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient

$$\left(\frac{a^2 - r^2}{b^2}\right) = \left(\frac{1}{1 - c^4}\right)^{\frac{1}{2}} [1 - \cos. 2\varphi](1 - 2\partial^2 \cos. 2\varphi + 2\partial^4 \cos. 4\varphi - 2\partial^6 \cos. 6\varphi + \&c.);$$

effectuant la multiplication par $(1 - \cos. 2\varphi)$, et ayant égard à ce que n étant un nombre entier quelconque, on a généralement

$$2 \cos. 2\varphi \cos. 2n\varphi = \cos. 2(n+1)\varphi + \cos. 2(n-1)\varphi :$$

l'équation précédente devient, en désignant par a l'aplatissement de la Terre, ou en faisant $a = \left(\frac{a - b}{a}\right)$,

$$\frac{a^2 - r^2}{2ab} = \frac{1}{2} a - \partial^2 \cos. 2\varphi + \partial^4 \cos. 4\varphi - \partial^6 \cos. 6\varphi + \&c.$$

Soit ν un angle tel que

$$\cos. \nu = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 - c^4)^{\frac{1}{2}}}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right],$$

on aura aussi cette autre équation,

$$\frac{a^2 + b^2 - r^2}{2ab} = \cos. \nu = \frac{1}{2} - \partial^2 \cos. 2\varphi + \partial^4 \cos. 4\varphi - \partial^6 \cos. 6\varphi + \&c.;$$

laquelle appartient à un triangle scalène, dont les trois côtés sont a, b, r, et dont ν est l'angle opposé à r.

Ces dernières équations peuvent s'écrire de cette manière abrégée,

$$\frac{a^2 - r^2}{ab} = a \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi,$$

$$\frac{a^2 + b^2 - r^2}{2ab} = \cos. \nu = \frac{1}{2} \mp \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi.$$

Le caractère $\int$ désignant la somme de tous les termes qui répondent aux différentes valeurs de n, depuis $n = 1$ jusqu'à n infini, et le signe supérieur étant relatif à n impair, l'inférieur à n pair.

On peut, à l'aide de ces équations, évaluer le rayon r qui répond à une latitude donnée; mais comme ce n'est ordinairement pas de cette valeur qu'on fait usage dans la pratique, mais plutôt de son logarithme, nous allons donner des formules pour le déterminer.

D'abord, on tire de l'équation dernière; savoir,

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. v,$$

en y faisant $v = \frac{b}{a}$, et comme plus haut $\mu = \frac{2v}{1+v^2}$,

$$2\mathcal{L}\frac{r}{a} = \mathcal{L}(1+v^2) + \mathcal{L}(1-\mu\cos. v).$$

Or, il est facile de voir, d'après ce qui précède, que l'on a

$$\mathcal{L}(1-\mu\cos. v) = -\mathcal{L}(1+v^2) - 2[v\cos. v + \tfrac{1}{2}v^2\cos. 2v + \tfrac{1}{3}v^3\cos. 3v + \&c.];$$

substituant cette valeur, et remplaçant v par $\frac{b}{a}$, il vient

$$\mathcal{L}r = \mathcal{L}a - \left(\frac{b}{a}\right)\cos. v - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\cos. 2v - \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3\cos. 3v - \&c.,$$

ou par abréviation,

$$\mathcal{L}r = \mathcal{L}a - \int \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n \cos. nv;$$

mais cette série n'étant guère convergente, lorsque a et b sont des quantités qui diffèrent peu l'une de l'autre, comme cela a lieu dans le cas de la nature, nous allons déduire de la valeur de r donnée ci-dessus, une autre formule plus convergente.

Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation suivante,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(\frac{1+c^2}{1+\partial^2}\right)\left[\frac{1+\partial^2\cos. 2\varphi}{1+c^2\cos. 2\varphi}\right],$$

on aura

$$\mathcal{L}\left(\frac{r}{a}\right) = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + \partial^2 \cos. 2\varphi}{1 + \partial^2}\right) - \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + c^2 \cos. 2\varphi}{1 + c^2}\right).$$

Or, en faisant d'abord $\mu = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4} = \partial^2$, ce qui donne $\upsilon = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c^2$, le premier terme du second membre de cette équation devient

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + \partial^2 \cos. 2\phi}{1 + \partial^2}\right) = -\mathcal{L}(1 + c^2) + [c^2 \cos. 2\varphi - \tfrac{1}{2}c^4 \cos. 4\varphi + \tfrac{1}{3}c^6 \cos. 6\varphi - \&c.],$$

équation qui devient, en développant le logarithme de la quantité constante $(1 + c^2)$, et réunissant les termes affectés de la même puissance de c^2,

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + \partial^2 \cos. 2\varphi}{1 + \partial^2}\right) = -2[c^2 \sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}c^4 \sin.^2 2\varphi + \tfrac{1}{3}c^6 \sin.^2 3\varphi - \&c.].$$

Pareillement, en faisant $\mu = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c^2$, ce qui donne $\upsilon = \frac{a - b}{a + b} = \partial^2$; le second terme de l'équation précédente devient

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + c^2 \cos. 2\varphi}{1 + c^2}\right) = -\mathcal{L}(1 + \partial^2) + [\partial^2 \cos. 2\varphi - \tfrac{1}{2}\partial^4 \cos. 4\varphi + \tfrac{1}{3}\partial^6 \cos. 6\varphi - \&c.];$$

développant le logarithme de $(1 + \partial^2)$, et réunissant tous les termes affectés de la même puissance de ∂^2, cette équation se transformera en la suivante,

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1 + c^2 \cos. 2\varphi}{1 + c^2}\right) = -2[\partial^2 \sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}\partial^4 \sin.^2 2\varphi + \tfrac{1}{3}\partial^6 \sin.^2 3\varphi - \&c.].$$

Les deux équations que nous venons de trouver sont entièrement de la même forme, et peuvent se déduire l'une de l'autre, en changeant c^2 en ∂^2, ou réciproquement.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $\mathcal{L}\left(\frac{r}{a}\right)$, il

vient

$$\mathcal{L}r = \mathcal{L}a - 2[(c^2-\partial^2)\sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}(c^4-\partial^4)\sin.^2 2\varphi + \tfrac{1}{3}(c^6-\partial^6)\sin.^2 3\varphi - \&c.]$$

Cette série est très-convergente dans le cas de la nature; on peut l'écrire fort simplement comme il suit,

$$\mathcal{L}r = \mathcal{L}a \pm 2\int \frac{1}{n}(c^{2n} - \partial^{2n}) \sin.^2 n\varphi.$$

Le caractère $\int$ désigne ici, comme plus haut, la somme de tous les termes relatifs aux différentes valeurs de n, depuis l'unité jusqu'à l'infini. Le signe supérieur ayant lieu quand n est impair, et l'inférieur quand n est pair.

On a trouvé ci-dessus ces différentes équations,

$$\left(\frac{aN}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right)^2 = \left(\frac{T}{a}\text{ tang. }\varphi\right)^2 = \left(\frac{a\mathcal{E}}{b^2}\text{ cotang. }\varphi\right)^2$$
$$= \left(\frac{x}{a\cos.\varphi}\right)^2 = \left(\frac{a\mathcal{R}}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi},$$

en prenant les logarithmes de ces quantités, et divisant ensuite tout par 2, l'on a

$$\mathcal{L}\left(\frac{aN}{b^2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{T}{a}\text{ tang. }\varphi\right) = \mathcal{L}\left(\frac{a\mathcal{E}}{b^2}\text{ cotang. }\varphi\right)$$
$$= \mathcal{L}\left(\frac{x}{a\cos.\varphi}\right) = \tfrac{1}{3}\mathcal{L}\left(\frac{a\mathcal{R}}{b^2}\right) = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi}\right).$$

Or on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi} = \frac{a}{b}(1 \mp 2\int \partial^{2n}\cos.2n\varphi);$$

on a encore

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi}\right) = \pm 2\int \tfrac{1}{n}\partial^{2n}\sin.^2 n\varphi.$$

Dans ces expressions abrégées, le signe supérieur se rapporte à n impair, et l'inférieur à n pair.

Si l'on substitue ces dernières valeurs dans les équations aux-

quelles elles sont relatives, on obtiendra douze formules, à l'aide desquelles on pourra évaluer commodément les six quantités N, $\mathcal{N}$, T, $\mathcal{E}$, x et $\mathcal{R}$. Voici six de ces formules :

$$N^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right) \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$\mathcal{N}^2 = a^2 \left(\frac{a}{b}\right) \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$T^2 = a^2 \left(\frac{a}{b}\right) \text{cotang.}^2 \varphi \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$\mathcal{E}^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right) \text{tang.}^2 \varphi \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$x^2 = a^2 \left(\frac{a}{b}\right) \cos.^2 \varphi \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$\mathcal{R}^{\frac{2}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}} \left[1 \mp 2 \int \partial^{2n} \cos. 2n\varphi\right];$$

suivent les six autres formules :

$$\mathcal{L}N = \mathcal{L}\frac{b^2}{a} \pm 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi,$$

$$\mathcal{L}\mathcal{N} = \mathcal{L}a \pm 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi,$$

$$\mathcal{L}T = \mathcal{L}a \text{ cotang. } \varphi \pm 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi,$$

$$\mathcal{L}\mathcal{E} = \mathcal{L}\frac{b^2}{a} \text{ tang. } \varphi \pm 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi,$$

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}a \text{ cos. } \varphi \pm 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi,$$

$$\mathcal{L}\mathcal{R} = \mathcal{L}\frac{b^2}{a} \pm 6 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi.$$

Trois des six équations précédentes se prêtent encore à d'autres formes. En effet, on trouve aisément de ce qui précède,

$$\frac{(1+c^2)\cos.^2\varphi}{1+c^2\cos. 2\varphi} = \left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 \pm 2\left(\frac{b}{a+b}\right)\int \partial^{2(n-1)} \cos. 2n\varphi\right];$$

$$\frac{b}{a}\left[\frac{(1+c^2)\sin.^2\varphi}{1+c^2\cos. 2\varphi}\right] = \left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 \mp 2\left(\frac{a}{a+b}\right)\int \partial^{2(n-1)} \cos. 2n\varphi\right];$$

au moyen de quoi, l'on a ces trois formules,

$$T^2 = \frac{a^2}{\sin.\varphi}\left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 \mp 2\left(\frac{b}{a+b}\right)\int \partial^{2(n-1)} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{b^2}{\cos.^2\varphi}\left(\frac{b}{a+b}\right)\left[1 \mp 2\left(\frac{a}{a+b}\right)\int \partial^{2(n-1)} \cos. 2n\varphi\right],$$

$$x^2 = a^2\left(\frac{a}{a+b}\right)\left[1 \mp 2\left(\frac{b}{a+b}\right)\int \partial^{2(n-1)} \cos. 2n\varphi\right].$$

Même remarque que ci-dessus, par rapport au double signe de ces formules.

CHAPITRE VI.

Continuation du Développement en séries des formules du Chapitre III.

REPRENONS la formule qui exprime la valeur de C, et observons qu'on peut l'écrire comme il suit :

$$C = a\,\mathcal{L}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\nabla + \varphi) - 2ac^2\int \frac{d\varphi \cos.\varphi}{1 + c^2\cos. 2\varphi};$$

substituant dans cette équation la valeur développée de $\frac{1}{1+c^2\cos.2\varphi}$, multipliant par cos. φ, et ayant égard à ce que l'on a généralement,

$$2\cos.\varphi\cos. n\varphi = \cos.(n+1)\varphi + \cos.(n-1)\varphi,$$

n étant un nombre entier quelconque; on trouvera après quelques réductions faciles,

$$c^2\left(\frac{d\varphi\cos.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi}\right) = a\,d\varphi\,[\cos.\varphi - \partial^2\cos. 3\varphi + \partial^4\cos. 5\varphi - \partial^6\cos. 7\varphi + \&c.],$$

équation qui, étant intégrée, devient

$$c^2\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi} = a\,[\sin.\varphi - \tfrac{1}{3}\partial^2\sin. 3\varphi + \tfrac{1}{5}\partial^4\sin. 5\varphi - \tfrac{1}{7}\partial^6\sin. 7\varphi + \&c.],$$

sans

sans constante, parce qu'en faisant commencer la valeur de C à l'équateur, elle doit s'évanouir en même temps que φ.

On a ainsi pour l'expression de la latitude croissante d'un parallèle à l'équateur, dont la latitude est φ,

$$C = a[\mathcal{L}\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi) - 2a(\sin.\varphi - \tfrac{1}{3}\partial^2\sin.3\varphi + \tfrac{1}{5}\partial^4\sin.5\varphi - \&c.)],$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme abrégée,

$$C = a[\mathcal{L}\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\nabla+\varphi) \mp \int\left(\frac{2}{2n-1}\right)a\partial^{2(n-1)}\sin.(2n-1)\varphi].$$

La série précédente est sans doute la plus élégante qu'offre l'analyse ; elle est d'ailleurs très-commode pour évaluer C : cependant la méthode qui consiste à faire usage de l'angle subsidiaire f, est tout aussi commode dans la pratique. En effet, toute la difficulté consiste à calculer cet angle, lequel étant retranché de la latitude φ, l'expression de C se trouve réduite à un seul terme : or, voici comment on peut obtenir la valeur de f.

Faisons, pour un moment, $g = (\nabla - \varphi)$, nous aurons

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}f = \frac{h\sin.g}{1 - h\cos.g},$$

équation d'où l'on tire, par la différenciation,

$$\tfrac{1}{2}df = h\,dg\left(\frac{\cos.g - h}{1 - 2h\cos.g + h^2}\right).$$

Le facteur complexe du second membre étant de la même forme que celui que nous avons considéré au commencement du chapitre précédent, est susceptible d'un semblable développement ; on a ainsi

$$\tfrac{1}{2}df = h\,dg[\cos.g + h\cos.2g + h^2\cos.3g + \&c.],$$

et en intégrant

$$\tfrac{1}{2}f = h\sin.g + \tfrac{1}{2}h^2\sin.2g + \tfrac{1}{3}h^3\sin.3g + \&c.$$

sans constante, attendu que f et h doivent être nuls en même temps.

Mettant, au lieu de g, sa valeur dans cette équation, elle devient

$$\tfrac{1}{2} f = h \cos.\varphi + \tfrac{1}{2} h^2 \sin.2\varphi - \tfrac{1}{3} h^3 \cos.3\varphi + \tfrac{1}{4} h^4 \sin.4\varphi - \&c.;$$

il ne reste plus qu'à substituer dans cette série la valeur de h et de ses puissances. Pour cet effet, faisons

$$u = \mathcal{L} \text{tang.}^{\epsilon} \tfrac{1}{2} (\nabla + \mathfrak{I}).$$

Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$u = e^2 \sin.\varphi + \tfrac{1}{3} e^4 \sin.^3\varphi + \tfrac{1}{5} e^6 \sin.^5\varphi + \&c.,$$

et en désignant par E le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, il viendra

$$h = \frac{E^u - 1}{E^u + 1},$$

ou en développant le second membre,

$$h = \left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{u}{2}\right)^3 + \frac{2}{3\cdot5}\left(\frac{u}{2}\right)^5 - \frac{17}{3\cdot5\cdot7\cdot3}\left(\frac{u}{2}\right)^7 + \frac{62}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot3}\left(\frac{u}{2}\right)^9 - \&c.$$

La substitution de la valeur de u dans cette équation, donne, en négligeant les termes qui ont pour facteurs des puissances de e plus hautes que la sixième,

$$h = \tfrac{1}{2} e^2 \sin.\varphi + \tfrac{1}{6} e^4 \sin.^3\varphi - \tfrac{1}{2} e^6 \sin.^3\varphi \left(\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{5} \sin.^2\varphi\right) + \&c.$$

Mettant cette valeur de h et de ses puissances dans l'expression de $\frac{1}{2} f$, on trouve

$$f = e^2 \sin.\varphi \cos.\varphi + \tfrac{3}{12} e^4 \sin.^2\varphi \,(4 \sin.\varphi \cos.\varphi + 3 \sin.2\varphi) + \tfrac{1}{12} e^6 \sin^3\varphi \left(\tfrac{12}{5} \sin.^2\varphi \cos.\varphi + 2 \sin.\varphi \sin.2\varphi - \cos.3\varphi - \cos.\varphi\right) + \&c.$$

équation qui se réduit aisément à la suivante :

$$f = \tfrac{1}{2} e^2 \sin.2\varphi + \tfrac{5}{12} e^4 \sin.^2\varphi \sin.2\varphi + \tfrac{1}{120} e^6 \sin.^2\varphi \,(16 \sin.2\varphi - 13 \sin.4\varphi) + \&c.$$

Le facteur $\sin.^2\varphi (16 \sin.2\varphi - 13 \sin.4\varphi)$ est le plus grand possible,

lorsque l'on a tang. $4\varphi = 14$ tang. φ, ou 7 tang.$^4\varphi = 40$ tang.$^2\varphi$, d'où l'on tire tang.$^2\varphi = \frac{20 - \sqrt{365}}{7}$, et il n'est alors que de $-0{,}88526$, *c'est-à-dire moindre que l'unité. Le troisième terme* de la valeur de f est donc toujours au-dessous de $\frac{1}{120} e^6$, et par *conséquent insensible*; au moyen de quoi l'on a, pour déterminer l'angle f, cette formule très-simple,

$$f = \frac{1}{2} e^2 \sin. 2\varphi \left(1 + \frac{5}{6} e^2 \sin.^2 \varphi\right),$$

on a ensuite,

$$C = a\, \mathcal{L} \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\nabla + \varphi - f),$$

pour l'expression de la latitude croissante.

Soit maintenant φ' la latitude d'un parallèle plus distant de l'équateur que celui dont la latitude est φ, on aura, comme plus haut,

$$C' = a[\mathcal{L} \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\nabla + \varphi') - 2a(\sin.\varphi' - \tfrac{1}{3}\partial^2 \sin.3\varphi' + \tfrac{1}{5}\partial^4 \sin.5\varphi' - \&c.)];$$

retranchant de cette équation, membre à membre, son analogue, il vient

$$C' - C = a\left\{\mathcal{L}\left(\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi')}{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi)}\right) - 2a[(\sin.\varphi' - \sin.\varphi) - \tfrac{1}{3}\partial^2(\sin.3\varphi' - \sin.3\varphi) + \tfrac{1}{5}\partial^4(\sin.5\varphi' - \sin.5\varphi) - \&c.]\right\},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$C' - C = a\left\{\mathcal{L}\left(\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi')}{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi)}\right) - 4a[\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) - \tfrac{1}{3}\partial^2 \sin.\tfrac{3}{2}(\varphi' - \varphi)\cos.\tfrac{3}{2}(\varphi' + \varphi) + \tfrac{1}{5}\partial^4 \sin.\tfrac{5}{2}(\varphi' - \varphi)\cos.\tfrac{5}{2}(\varphi' + \varphi) - \&c.]\right\}$$

Et en *faisant*, pour abréger, $C' - C = \Gamma$, et comme plus haut, $\varphi' - \varphi = \Phi$, l'équation précédente devient

$$\Gamma = a\left\{\mathcal{L}\left(\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi + \Phi)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(\nabla + \varphi)}\right) - 4a[\sin.\tfrac{1}{2}\Phi \cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi + \Phi) - \tfrac{1}{3}\partial^2 \sin.\tfrac{3}{2}\Phi \cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi + \Phi) + \tfrac{1}{5}\partial^4 \sin.\tfrac{5}{2}\Phi \cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi + \Phi) - \&c.]\right\}$$

Cette équation peut encore s'écrire comme il suit :

$$\Gamma = a\left[\mathcal{L}\left(\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\nabla+\varphi+\Phi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\nabla+\varphi)}\right)\right.$$

$$\left.\mp\int\left(\frac{4}{2n-1}\right)a\,\partial^{2(n-1)}\sin.\tfrac{1}{2}(2n-1)\,\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2n-1)(2\varphi+\Phi)\right].$$

Même remarque que précédemment, relativement à l'emploi des signes. Cette formule est l'expression de la latitude croissante d'un arc de méridien elliptique compris entre deux parallèles dont les latitudes sont φ' et φ.

Revenons à la valeur de D du chapitre III, et écrivons-là ainsi :

$$D = \pi b^2\left[\frac{(1+c^2)\sin.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi}+\int\left(\frac{(1+c^2)\,d\varphi\cos.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)\right].$$

En développant d'abord le second terme du second membre de cette équation, comme on vient de faire pour C, l'on a

$$\frac{(1+c^2)\,d\varphi\cos.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi} = (1+\partial^2)d\varphi[\cos.\varphi-\partial^2\cos.3\varphi+\partial^4\cos.5\varphi-\&c.];$$

cette équation a pour intégrale

$$\int\frac{(1+c^2)\,d\varphi\cos.\varphi}{1+c^2\cos.2\varphi} = (1+\partial^2)[\sin.\varphi-\tfrac{1}{3}\partial^2\sin.3\varphi+\tfrac{1}{5}\partial^4\sin.5\varphi-\&c.]$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, si l'on veut que ce terme devienne nul, ainsi que le premier, en même temps que φ. Developpons encore le premier terme de la valeur de D, et, pour cet effet, mettons-y la valeur développée du facteur $\left(\frac{1}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)$; et ayant d'ailleurs égard à ce que n étant un nombre entier quelconque, on a généralement

$$2\sin.\varphi\cos.n\varphi = \sin.(n+1)\varphi-\sin.(n-1)\varphi,$$

nous trouverons, après quelques réductions aisées,

$$\frac{(1+c^2)\sin.\varphi}{1+c\cos.2\varphi} = \frac{a}{b}(1+\partial^2)[\sin.\varphi-\partial^2\sin.3\varphi+\partial^4\sin.5\varphi-\&c.],$$

ajoutant ce terme au précédent, et multipliant la somme par π, on a

$$D = 2ab\pi\left[\sin.\varphi - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)\sin.3\varphi + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)\sin.5\varphi - \tfrac{1}{7}\partial^6(4+3\partial^2)\sin.7\varphi + \&c.\right]$$

Cette série peut, à l'aide de son terme général, s'écrire de cette manière abrégée,

$$D = \pm\pi ab\int\left(\frac{2}{2n-1}\right)\partial^{2(n-1)}\left[n+(n-1)\partial^2\right]\sin.(2n-1)\varphi.$$

Telle est l'expression de la surface d'une zone d'ellipsoïde de révolution aplati, compris entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est φ.

Soit φ' la latitude d'un autre parallèle plus distant de l'équateur que celui dont la latitude est φ, on aura cette équation

$$D' = 2ab\pi\left[\sin.\varphi' - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)\sin.3\varphi' + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)\sin.5\varphi' - \tfrac{1}{7}\partial^6(4+3\partial^2)\sin.7\varphi' + \&c.\right],$$

retranchant de cette équation son analogue, il vient

$$D'-D = 2ab\pi\left[(\sin.\varphi'-\sin.\varphi) - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)(\sin.3\varphi'-\sin.3\varphi) + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)(\sin.5\varphi'-\sin.5\varphi) - \&c.\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$D'-D = 4ab\pi\left[\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi) - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)\sin.\tfrac{3}{2}(\varphi'-\varphi)\cos.\tfrac{3}{2}(\varphi'-\varphi) + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)\sin.\tfrac{5}{2}(\varphi'-\varphi)\cos.\tfrac{5}{2}(\varphi'-\varphi) - \&c.\right]$$

et en faisant $\Delta = D'-D$, et $\Phi = \varphi'-\varphi$, comme précédemment, on a

$$\Delta = 4ab\pi\left[\sin.\tfrac{1}{2}\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+\Phi) - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)\sin.\tfrac{3}{2}\Phi\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+\Phi) + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)\sin.\tfrac{5}{2}\Phi\cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi+\Phi) - \&c.\right],$$

ou, en écrivant cette équation de la manière abrégée,

$$\Delta = \pm ab\pi\int\left(\frac{4}{2n-1}\right)\partial^{2(n-1)}\left[n+(n-1)\partial^2\right]\sin.\tfrac{1}{2}(2n-1)\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2n-1)(2\varphi+\Phi),$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque n est impair, et l'inférieur quand n est pair.

Cette formule est l'expression de la surface d'une zone d'ellipsoïde de révolution aplati, comprise entre deux parallèles à l'équateur, dont les latitudes sont φ et φ'.

Nous avons trouvé dans le chapitre III, l'expression du volume V d'un tronçon de sphéroïde compris entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est φ; si l'on prend le logarithme de cette quantité, on aura l'équation

$$\mathcal{L}V = \mathcal{L}\pi a b^2 \sin.\varphi + \mathcal{L}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} - \mathcal{L}\left(\frac{1+\vartheta^2}{1+\vartheta^2\cos.2\varphi}\right).$$

Développons les deux derniers termes du second membre, nous aurons, d'abord

$$\mathcal{L}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} = 6\left[\vartheta^2\sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}\vartheta^4\sin.^2 2\varphi + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\sin.^2 3\varphi - \&c.\right],$$

le dernier terme donnera

$$\mathcal{L}\left(\frac{1+\vartheta^2}{1+\vartheta^2\cos.2\varphi}\right) = 4\left[\vartheta^2\sin.^2\varphi - \tfrac{1}{2}\vartheta^4\sin.^2 2\varphi + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\sin.^2 3\varphi - \&c.\right];$$

en faisant, pour abréger, $\vartheta^2 = \frac{a\sqrt{3} - b\sqrt{2}}{a\sqrt{3} + b\sqrt{2}}$.

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente, donne, pour déterminer V au moyen de son logarithme, cette formule,

$$\mathcal{L}V = \mathcal{L}\pi a b^2 \sin.\varphi \mp 2\int \frac{1}{n}\left(2\vartheta^{2n} - 3\vartheta^{2n}\right)\sin.^2 n\varphi;$$

mais la série qui résulte du développement du dernier terme du second membre de cette équation, ou dont le terme général est $\frac{2}{n}\left(2\vartheta^{2n} - 3\vartheta^{2n}\right)\sin.^2 n\varphi$, ne convergeant que très-lentement, il est plus commode, dans la pratique, de chercher directement la valeur de V, à l'aide de la série suivante, qui est ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de sin. φ. Cette série se tire

de l'intégrale de dV, qui se présente sous cette forme,

$$V = \pi a b^2 \sin.\varphi \left[\left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sin.^2\varphi \left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

En effet, si l'on développe les deux facteurs radicaux de cette expression, le premier donnera

$$\left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} e^4 \sin.^4\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6 \sin.^6\varphi + \&c.,$$

l'autre facteur donnera

$$\left(\frac{1}{1 - e^2 \sin.^2\varphi} \right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} e^2 \sin.^2\varphi + \frac{3.5}{2.4} e^4 \sin.^4\varphi - \frac{3.5.7}{2.4.6} e^6 \sin.^6\varphi + \&c.;$$

multipliant cette dernière série par $\frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sin.^2\varphi$; retranchant le produit de l'avant-dernière, et multipliant la différence qui en résultera par $\pi a b^2 \sin.\varphi$, on trouvera

$$V = \pi a b^2 \sin.\varphi \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{2}{3} \frac{b^2}{a^2} \right) \sin.^2\varphi + \frac{1.3}{2.4} \left(e^2 + \frac{4}{3} \frac{b^2}{a^2} \right) e^2 \sin.^4\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(e^2 + \frac{6}{3} \frac{b^2}{a^2} \right) e^4 \sin.^6\varphi + \&c. \right],$$

formule qui peut s'écrire de cette manière abrégée,

$$V = \pi a b^2 \sin.\varphi \left\{ 1 \mp \int \left(\frac{1.3.5.7 \ldots (2n-1)}{2.4.6.8 \ldots 2n} \right) \left[1 + \left(\frac{2n-3}{3} \right) \frac{b^2}{a^2} \right] e^{2(n-1)} \sin.^{2n}\varphi \right\};$$

le signe supérieur se rapporte à n impair, l'inférieur à n pair.

Cette formule est plus commode pour déterminer la valeur V d'un tronçon d'ellipsoïde que la précédente.

On a trouvé ci-dessus l'équation

$$a \text{ tang. } \theta = b \text{ tang. } \varphi,$$

de laquelle on peut tirer immédiatement la valeur de l'angle θ, à l'aide d'une série élégante. En effet, si l'on différencie cette équation, l'on trouve

$$d(\varphi - \theta) = 2\upsilon \left(\frac{\upsilon + \cos. 2\varphi}{1 + 2\upsilon \cos. 2\varphi + \upsilon^2} \right) d\varphi;$$

en entendant, comme précédemment, par v une quantité telle que l'on ait, $v = \frac{a-b}{a+b} = \partial^2$.

Or, nous avons trouvé

$$\frac{v + \cos. 2\varphi}{1 + 2v\cos. 2\varphi + v^2} = \cos. 2\varphi - v\cos. 4\varphi + v^2\cos. 6\varphi - \&c.;$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$d(\varphi - \theta) = 2v\,d\varphi\,[\cos. 2\varphi - v\cos. 4\varphi + v^2\cos. 6\varphi - v^3\cos. 8\varphi + \&c.]$$

Cette équation a pour intégrale

$$\varphi - \theta = v\sin. 2\varphi - \tfrac{1}{2}v^2\sin. 4\varphi + \tfrac{1}{3}v^3\sin. 6\varphi - \&c.$$

la constante étant nulle, attendu que les angles φ et θ commencent tous les deux en même temps.

Mettant ∂^2 pour v dans cette équation, elle devient

$$\varphi - \theta = \partial^2\sin. 2\varphi - \tfrac{1}{2}\partial^4\sin. 4\varphi + \tfrac{1}{3}\partial^6\sin. 6\varphi - \&c.$$

Cette formule donne la valeur de θ en φ, ou en fonction de la latitude; c'est celle dont on a besoin ici. On en déduit la valeur de φ en θ par cette considération fort simple, que l'équation primitive a tang. $\theta = b$ tang. φ, restant la même en y permutant a et b, φ et θ en même temps, l'équation ou série précédente doit subsister aussi en y faisant les mêmes permutations, au moyen de quoi l'on a

$$\varphi - \theta = \partial^2\sin. 2\theta + \tfrac{1}{2}\partial^4\sin. 4\theta + \tfrac{1}{3}\partial^6\sin. 6\theta + \&c.,$$

formule analogue à la précédente.

L'avant-dernière formule peut s'écrire ainsi :

$$\varphi - \theta = \pm\int \frac{1}{n}\partial^{2n}\sin. 2n\varphi,$$

le signe supérieur étant relatif à n impair, l'inférieur à n pair; et la dernière peut être présentée de la sorte,

$$\varphi - \theta = +\int \frac{1}{n}\partial^{2n}\sin. 2n\theta,$$

sans changemens de signes.

CHAPITRE VII.

Détermination des Coordonnées d'un point quelconque de la surface du Sphéroïde sur le plan de projection et de l'angle formé à ce point, 1.° par le Méridien et le Parallèle de ce point, 2.° par la Tangente au même Méridien en ce point et le Méridien moyen, 3.° par la même Tangente et celle d'une Courbe quelconque tracée sur le Sphéroïde.

Nous avons exposé dans le chapitre précédent plusieurs formules indispensables à l'objet de ce Mémoire, et quelques autres qui s'y lient assez naturellement, sans toutefois y être nécessaires : toutes ces formules se rapportent au sphéroïde terrestre. Celles que nous allons établir dans les chapitres suivans, seront relatives à sa projection considérée de la manière qu'on l'a énoncée plus haut.

Il s'agit d'abord de déterminer, sur le plan de projection, les coordonnées d'un point quelconque E, dont le point correspondant sur la surface du sphéroïde est déterminé par sa longitude et sa latitude.

Pour cet effet, soient ξ et ζ les coordonnées de ce point, savoir :

$\xi = \Gamma H$, l'abscisse ;

$\zeta = EH$, l'ordonnée ;

Ces coordonnées étant rectangulaires, et ayant, comme il a été dit ci-dessus, pour axes ; la première, le méridien moyen MT de la projection, et la seconde la tangente ΓZ au développement du parallèle moyen $\Gamma\Delta$, et pour origine l'intersection Γ de ces deux lignes, qui est en même temps le centre de la projection ;

$\eta = HR$, une autre abscisse comptée du point R, centre commun de tous les parallèles, et qui ne sert que d'auxiliaire pour arriver à l'abscisse ξ ;

$T = \Gamma R$, le rayon du parallèle moyen $\Gamma\Delta$ de la projection ;

$R = CR$, le rayon du parallèle du point E plus distant de l'équateur que le moyen ;

$\sigma = C\Gamma$, l'arc de méridien rectifié compris entre ces deux parallèles ;

$\omega = \Gamma\Theta\Delta$, la différence de longitude du méridien du point E et du méridien moyen ;

$\varpi = CPE$, l'angle correspondant à l'arc CE du parallèle du point E ;

φ', la latitude de ce parallèle CE ;

φ, la latitude du parallèle moyen $\Gamma\Delta$;

$\Phi = (\varphi' - \varphi)$, la différence de latitude de ces parallèles.

On suppose ici que la latitude φ' est plus grande que φ, et dans ce cas, la quantité Φ est positive ; s'il s'agissait d'un autre parallèle dont la latitude φ' fût moindre que φ, la quantité Φ changerait de signe, et devrait être prise négativement.

Pour déterminer les coordonnées HR et HE du point E, il faut, avant tout, connaître le rayon ER et l'angle CRE : or, on a d'abord

$$CR = \Gamma R - \Gamma C = T - \sigma = R,$$

équation dans laquelle T et σ sont des quantités déjà connues par ce qui précède. On observera, en passant, que l'arc σ change de signe en même temps que l'angle Φ.

On a trouvé, chapitre III, cette valeur de T :

$$T = a \text{ cotang. } \varphi \left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et chapitre V, le logarithme de cette quantité, ou

$$\mathcal{L}T = \mathcal{L}a \text{ cotang. } \varphi \mp 2 \int \tfrac{1}{n} \partial^{2n} \sin.^2 n\varphi ;$$

on a trouvé d'ailleurs, chapitre IV, cette expression de σ,

$$\sigma = \frac{b^2}{a} (1 + c^2)^{\frac{3}{2}} \left[\tfrac{1}{2} \alpha \Phi \mp \int k_m \sin.(m-1)\Phi \cos.(m-1)(2\varphi + \Phi)\right] ;$$

les coëfficiens $\frac{1}{2}\alpha$ et k_m s'évaluent au moyen des équations de ce chapitre.

L'arc du parallèle CE étant, par construction, égal à son correspondant sur le sphéroïde, l'on a *(fig. 2)* $CE =$ angle $CAE \times$ rayon $AC = x\omega$. Or, la valeur du rayon x du parallèle correspondant à la latitude $(\varphi + \Phi)$, a pour expression, chapitre III,

$$x = a \cos.(\varphi + \Phi)\left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2(\varphi + \Phi)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et l'angle CRE étant égal à $\frac{CE}{CR}$, on a *(fig. 3)* $\varpi = \omega \frac{x}{R}$, ou en mettant, au lieu de x, sa valeur

$$\varpi = \omega \frac{a}{R} \cos.(\varphi + \Phi)\left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2(\varphi + \Phi)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le triangle EHR rectangle en H donne

$$EH = ER \sin. ERH = \zeta = R \sin. \varpi,$$
$$HR = ER \cos. ERH = \eta = R \cos. \varpi :$$

donc, attendu que

$$\Gamma H = \Gamma R - HR = T - \eta = \xi ;$$

on a les valeurs suivantes des coordonnées du point E,

$$\xi = T - R \cos. \varpi ,$$
$$\zeta = R \sin. \varpi .$$

On peut faire dépendre la valeur de l'abscisse ξ de celle de l'ordonnée ζ, en cette façon. On sait que $\cos. \varpi = 1 - \sin. \varpi \tang. \frac{1}{2}\varpi$; multipliant par R les deux membres de cette équation, l'on a

$$R \cos. \varpi = R - R \sin. \varpi \tang. \tfrac{1}{2}\varpi = R - \zeta \tang. \tfrac{1}{2}\varpi ;$$

substituant cette valeur de $R \cos. \varpi$, dans l'expression de ξ, on a

$$\xi = (T - R) + \zeta \tang. \tfrac{1}{2}\varpi .$$

Mais, d'après ce qui précède, on a $\sigma = T - R$; et partant,

$$\xi = \sigma + \zeta \tang. \tfrac{1}{2}\varpi ;$$

sous cette forme, la valeur de ξ est plus commode à évaluer, lorsque ϖ est un angle de peu d'ouverture.

En désignant par ζ' et η' des coordonnées, analogues aux coordonnées ζ et η, rapportées à la même origine et aux mêmes axes, d'un point dont la latitude est $(\varphi + \vartheta)$, et la différence de longitude avec le méridien moyen ω, plus grande que ω; il est clair que si $\mathcal{R}$ est ce que devient R, lorsque dans l'expression de σ l'on met ϑ au lieu de Φ, et ω ce que devient ϖ, lorsque Φ se change en ϑ, l'on aura

$$\omega = \omega \frac{a}{\mathcal{R}} \cos.(\varphi + \vartheta) \left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2(\varphi + \vartheta)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et les valeurs des coordonnées ζ' et η' seront

$$\zeta' = \mathcal{R} \sin. \omega,$$
$$\eta' = \mathcal{R} \cos. \omega.$$

Soient μ et ν des nouvelles coordonnées rectangulaires du même point, dont le lieu E est encore l'origine, mais dont les axes sont différens; en sorte que la droite ER soit l'axe des μ, et l'axe des ν une droite perpendiculaire à ER, on aura d'abord

$$R + \mu = \eta' \cos. \varpi + \zeta' \sin. \varpi,$$
$$\nu = \zeta' \cos. \varpi - \eta' \sin. \varpi;$$

et en substituant dans ces équations les valeurs précédentes de ζ' et η', on a

$$R + \mu = \mathcal{R} \cos.(\omega - \varpi),$$
$$\nu = \mathcal{R} \sin.(\omega - \varpi).$$

Ces équations peuvent être utiles pour transporter l'origine des coordonnées à tel point E de la projection que l'on voudra, en prenant pour un des axes le rayon du parallèle qui passe par ce point, et pour l'autre la tangente au même parallèle en ce point.

Pour déterminer l'angle formé sur le plan de projection par un

méridien et un parallèle quelconques, on observera *(fig. 3)* que l'angle IEF du méridien PEN avec le rayon qui passe par la commune section E de ce méridien et du parallèle CE du point E, est l'excès ou la différence de l'angle que l'on cherche avec l'angle droit.

Il est visible que cet angle est nul pour tous les points d'intersection des méridiens avec le parallèle moyen..

Pour un parallèle quelconque compris entre l'équateur et le parallèle moyen, cet angle, considéré intérieurement par rapport au méridien coupant et au méridien moyen, est l'excès sur l'angle droit; c'est la différence avec l'angle droit, lorsque le parallèle est compris entre le pôle et le parallèle moyen.

Désignons par α cet angle d'un méridien avec un parallèle. Le triangle élémentaire EIF rectangle en I, donne

$$\text{tang. } IEF = \frac{FI}{EI} = \text{tang. } \alpha.$$

Or, les secteurs semblables CRE, DRI, donnent cette proportion,

$$CE : DI :: CR : DR,$$

de laquelle on tire *detrahendo*,

$$CE - DI = CE\left(\frac{CR-DR}{CR}\right) = \frac{CD}{CR}\,CE.$$

Cette équation devient, en y substituant les valeurs de CD, CE, CR,

$$CE - DI = \frac{x}{R}\,\omega\, d\sigma,$$

et attendu que $\frac{x}{R}\,\omega = \varpi$, ainsi qu'on l'a vu plus haut, il vient

$$DI = CE - \varpi\, d\sigma.$$

En différenciant l'arc CE, l'on a

$$dCE = CE - DF = \omega\, dx :$$

donc, attendu que $dx = \sin.(\varphi + \Phi)\, d\sigma$, on a

$$DF = CE - \omega \sin.(\varphi + \Phi)\, d\sigma.$$

Mais $IF = DF - DI$; et partant,

$$IF = [\varpi - \omega \sin.(\varphi + \Phi)]\, d\sigma;$$

substituant cette valeur de IF dans l'expression de tangente α; et faisant attention que $EI = CD = d\sigma$, on aura cette formule très-simple,

$$\text{tang.}\ \alpha = \varpi - \omega \sin.(\varphi + \Phi).$$

On a encore *(fig 3)*,

$$CTE = 2\nabla - ERT - RET = CRE - RET = (\varpi - \alpha).$$

En désignant donc par $\mathfrak{C}$ l'angle CTE, on aura

$$\mathfrak{C} = \varpi - \alpha,$$

ce qui détermine l'angle de la tangente ET à la courbe d'un méridien développé, en un point quelconque E, avec le méridien moyen MCP; et par conséquent, l'angle que fait la courbe elle-même en ce point avec cette même droite.

Cet angle, que l'on peut considérer comme la mesure de la convergence d'un méridien, en un point donné, peut s'exprimer ainsi :

$$\mathfrak{C} = \omega \sin.(\varphi + \Phi) + \tfrac{1}{3}\,\text{tang.}^3\,\alpha - \tfrac{1}{5}\,\text{tang.}^5\,\alpha + \tfrac{1}{7}\,\text{tang.}^7\,\alpha - \&c.,$$

série qui sera toujours suffisamment convergente, attendu que dans la pratique, l'angle α n'est jamais grand.

Mais, parce que

$$\text{tang.}\ \alpha = \alpha\,(1 + \tfrac{1}{3}\,\text{tang.}^2\,\alpha - \tfrac{4}{45}\,\text{tang.}^4\,\alpha + \tfrac{44}{945}\,\text{tang.}^6\,\alpha - \&c.),$$

en substituant pour tang. α cette valeur dans la série précédente, on la rendra homogène, et l'on aura

$$\mathfrak{C} = \omega \sin.(\varphi + \Phi) + \tfrac{1}{3}\,\alpha\,\text{tang.}^2\,\alpha - \tfrac{16}{135}\,\alpha\,\text{tang.}^4\,\alpha + \&c.$$

Si, connaissant l'angle FEL que fait au point E une courbe quelconque tracée sur la surface du sphéroïde avec le méridien de ce point, on voulait connaître l'angle correspondant de la projection de la même courbe avec le méridien développé, ayant nommé V l'angle azimutal FEL sur le sphéroïde, et $\mathcal{V}$ son correspondant sur le plan de projection, à cause de $EF=EI$ (*fig. 2* et *3*), et de l'égalité de l'arc FL dans les deux figures; on aurait d'abord (*fig. 2*),

Dans le triangle élémentaire EFL, rectangle en F,

$$\text{tang. } FEL = \frac{LF}{EF} = \frac{FL}{EI}.$$

Le petit triangle EIL, rectangle en I (*fig. 3*), donne

$$\text{tang. } IEL = \text{tang. } (FEL - IEF) = \frac{IL}{IE} = \frac{FL}{EI} - \frac{FI}{EI}$$

Substituant dans cette équation la valeur précédente de $\frac{FL}{EI}$, et celle de $\frac{FI}{EI}$, qui est tang. α, comme on l'a vu plus haut, on aura, à cause de $FEL = V$ sur le sphéroïde, et $\mathcal{V}$ sur le plan de projection,

$$\text{tang. } (\mathcal{V} - \alpha) = \text{tang. } V - \text{tang. } \alpha = \frac{\text{sin. } (V-\alpha)}{\text{cos. } V \text{ cos. } \alpha}.$$

L'angle V est compté comme on a coutume de compter les azimuts du nord à l'ouest et de zéro à la circonférence entière.

CHAPITRE VIII.

Détermination de l'Arc élémentaire de la Courbe d'un Méridien développé, de sa Tangente, Sous-tangente, Normale, Sous-normale et de son Rayon de courbure, en un point donné.

SOIENT maintenant sur le plan de projection (*fig. 3*),

$dM = EF$, l'élément de la longueur de la courbe NEP du méridien ;

$t = ET$, la tangente à la courbe du méridien au point E ;

$\tau = HT$, la sous-tangente à la courbe au même point ;

$\gamma = RT$, la distance du centre R des parallèles au point T de rencontre de la tangente et du méridien moyen ;

$n = EJ$, la normale à la courbe du méridien au point E ;

$u = HJ$, la sous-normale à la courbe au même point ;

$\delta = JR$, la distance du centre R des parallèles à la commune section J de la normale et du méridien moyen ;

$\varepsilon = \gamma + \delta = JT$, la distance des points d'intersection du méridien moyen par la tangente et la normale ;

$\varrho = ES$, le rayon de courbure de la projection du méridien au point E ;

$\square = ECDE$, l'aire du quadrilatère curviligne compris sur le plan de projection entre deux méridiens et deux parallèles donnés.

Le triangle élémentaire EIF, rectangle en I, donne

$$EI = EF \cos. IEF = d\sigma = dM \cos. \alpha ;$$

on a donc ce rapport très-simple entre l'élément d'un méridien quelconque et celui du méridien moyen,

$$\frac{dM}{d\sigma} = \text{sécante } \alpha :$$

nous ferons usage de cette formule ci-après.

On aurait pu parvenir à cette expression de dM de cette autre manière.

En différenciant les coordonnées ζ et η, on a

$$d\zeta = dR \sin. \varpi + R d\varpi \cos. \varpi ,$$

$$d\eta = dR \cos. \varpi - R d\varpi \sin. \varpi ;$$

substituant

substituant les carrés de ces valeurs dans l'équation

$$dM = (d\zeta^2 + d\eta^2)^{\frac{1}{2}},$$

l'on a

$$dM = dR\left[1 + \left(\frac{R\,d\varpi}{dR}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

et parce que $d\sigma = dR$, on tire de ce qui précède, en différenciant l'équation $\varpi = \omega\frac{x}{R}$,

$$\frac{R\,d\varpi}{dR} = \omega\left(\frac{dx}{dR} - \frac{x}{R}\right) = -[\varpi - \omega\sin.(\varphi+\Phi)] = -\text{tang.}\,\alpha;$$

substituant cette valeur dans l'expression de dM, on a, comme précédemment,

$$dM = \frac{d\sigma}{\cos.\alpha}.$$

Pour avoir la valeur de M ou la longueur d'un arc de méridien développé, compris entre deux parallèles donnés, il faudrait intégrer cette équation, après y avoir substitué les valeurs de $d\sigma$ et de cos. α en fonction de la latitude $(\varphi+\Phi)$; mais cette substitution rendrait cette équation tellement compliquée, qu'on aurait de la peine à en tirer une valeur de M applicable à la pratique. Heureusement on peut s'en passer, et nous ne nous y arrêterons pas.

Le triangle scalène ERT fournit ces deux équations,

$$ET = ER\frac{\text{sin.}\,ERT}{\text{sin.}\,ETR} \ldots RT = ER\frac{\text{sin.}\,RET}{\text{sin.}\,ETR};$$

on a ensuite

$$HT = HR + RT;$$

et après les substitutions des valeurs connues dans ces trois équations, l'on a

$$t = R\frac{\text{sin.}\,\varpi}{\text{sin.}\,(\varpi-\alpha)} \ldots \tau = R\frac{\text{sin.}\,\varpi}{\text{tang.}\,(\varpi-\alpha)} \ldots \gamma = R\frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,(\varpi-\alpha)},$$

formules à l'aide desquelles la tangente à la courbe de projection

d'un méridien, en un point donné, est déterminée de grandeur et de position.

Les triangles EHT, EHJ, tous les deux rectangles en J, et de plus semblables, attendu qu'ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, donnent

$$EJ = ET\frac{EH}{HT} \ldots HJ = EJ\frac{EH}{HT};$$

on a ensuite

$$JR = HI + HR:$$

en substituant dans ces équations les valeurs qui s'y rapportent, on a

$$n = R\frac{\sin.\varpi}{\cos.(\varpi-\alpha)} \ldots u = R\sin.\varpi\,\text{tang.}(\varpi-\alpha) \ldots \delta = R\frac{\cos.\alpha}{\cos.(\varpi-\alpha)},$$

formules à l'aide desquelles la normale à la projection d'un méridien, en un point donné, est déterminée de grandeur et de position.

Au surplus, on a cette équation,

$$\varepsilon = \gamma + \delta = 2R\frac{\sin.\varpi}{\sin.2(\varpi-\alpha)}.$$

Soient encore, pour le remarquer en passant, Π, $'\Pi$, Π', les périmètres, Δ, $'\Delta$, Δ', les aires respectives des triangles scalènes EJT, EJR, ERT.

Ces quantités sont susceptibles d'expressions fort simples; en effet, on a d'abord

$$\Pi' = R + t + \gamma \ldots {}'\Pi = R + n + \delta \ldots \Pi = t + n + \varepsilon;$$

les valeurs des quantités R, t, n, γ, δ, ε, étant substituées dans ces équations, elles deviennent

$$\Pi' = 2R\frac{\sin.\varpi\cos.\alpha}{\sin.\frac{1}{2}(\varpi-\alpha)} \ldots {}'\Pi = 2R\frac{\cos.\frac{1}{2}\varpi\cos.\frac{1}{2}(\nabla-\alpha)}{\cos.\frac{1}{2}(\nabla+\varpi-\alpha)},$$

$$\Pi = 4R\sqrt{2\sin.\varpi\frac{\sin.\frac{1}{2}(\varpi-\alpha)\sin.\frac{1}{2}(\nabla+\varpi-\alpha)}{\sin.2(\varpi-\alpha)}},$$

et parce que

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}\gamma\zeta \ldots {}'\Delta = \tfrac{1}{2}\delta\zeta \ldots \Delta = \tfrac{1}{2}\epsilon\zeta :$$

on trouve, en substituant dans ces équations, les valeurs de γ, δ, ϵ, ζ, les suivantes,

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}R^2 \frac{\sin.\varpi \sin.\alpha}{\sin.(\varpi-\alpha)} \ldots {}'\Delta = \tfrac{1}{2}R^2 \frac{\sin.\varpi \cos.\alpha}{\cos.(\varpi-\alpha)} \ldots \Delta = R^2 \frac{\sin.^2\varpi}{\sin.2(\varpi-\alpha)} .$$

Après cette courte digression, revenons à notre objet.

Le secteur élémentaire ESF *(fig. 3)*, donne

$$ES = \frac{EF}{ESF} = \frac{d(NEP)}{d(EJR)} .$$

Or, à cause de $EJ = \curlyvee - ETC = \curlyvee - (\varpi - \alpha)$, on a, en différenciant $dEJR = d(\alpha - \varpi)$; on a d'ailleurs $EF = dM$, au moyen de quoi on a cette expression fort simple de ϱ,

$$\varrho = \frac{dM}{d(\alpha-\varpi)} = \left(\frac{1}{\cos.\alpha}\right)\frac{d\sigma}{d(\alpha-\varpi)},$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de remplacer le rapport des différentielles en quantités finies : or on a, en vertu de l'équation, tang. $\alpha = \varpi - \omega(\varphi + \Phi)$, différenciée par rapport à α, ϖ et Φ,

$$d(\alpha-\varpi) = -[d\varpi \sin.^2\alpha + \omega\, d\Phi \cos.(\varphi+\Phi) \cos.^2\alpha].$$

On a au surplus, d'après ce qui précède, à cause de $dR = d\sigma$,

$$-d\varpi = \frac{d\sigma}{R} \text{ tang. } \alpha ;$$

chassant de l'avant-dernière équation la différentielle $d\Phi$, au moyen de sa valeur tirée de la première équation du chapitre IV, après y avoir substitué $(\varphi + \Phi)$ et $d\Phi$ à φ et $d\varphi$, pour l'approprier au cas actuel; et multipliant tout par cos. α, on aura

$$\frac{d(\alpha-\varpi)}{d\sigma} \cos.\alpha = \frac{1}{\varrho}$$

$$= \frac{b^2(1+c^2)^{\frac{3}{2}} \sin.^3\alpha - Ra\omega \cos.^3\alpha \cos.(\varphi+\Phi)[1+c^2\cos.2(\varphi+\Phi)]^{\frac{3}{2}}}{Rb^2(1+c^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

partant, en renversant cette formule, on a

$$\varrho = \frac{R\,b^2\,(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}{b^2\,(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\sin.^3\alpha - R\,a\,\omega\cos.^3\alpha\cos.(\varphi+\Phi)\,[1+c^2\cos.2(\varphi+\Phi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est l'expression du rayon du cercle osculateur à la courbe d'un méridien développé, en un point donné quelconque.

Pour tous les points du parallèle moyen, l'angle ω est nul, ainsi que l'angle Φ; dans ce cas particulier, l'expression précédente se simplifie considérablement, et devient

$$\varrho = -\left(\frac{b^2}{a}\right)\frac{1}{\omega\cos.\varphi}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on compare cette valeur de ϱ avec la valeur de $\mathcal{R}$ du chap. III, on aura cette relation fort simple,

$$\frac{\mathcal{R}}{\varrho} = -\omega\cos.\varphi,$$

entre le rayon de courbure d'un méridien sur le sphéroïde elliptique et le rayon de courbure de sa projection aux points où ces méridiens sont coupés par le parallèle moyen.

L'aire du petit triangle EIF étant un infiniment petit du second ordre, celle du quadrilatère $ECDI$ est égale à la différence des secteurs CRE et DRF; ainsi l'on a pour son expression $\frac{1}{2}(CE.CR - DI.DR)$, ou, en remplaçant DI par sa valeur trouvée plus haut, et qui est $DI = CE\left(1-\frac{CD}{CR}\right)$, on a

$$ECDI = \tfrac{1}{2}CE\left(CR - DR + CD\frac{DR}{CR}\right) = CE.CD\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{CD}{CR}\right).$$

Mais $\frac{1}{2}\,CD^2\,\frac{CE}{CR}$ est une quantité infiniment petite par rapport à $CECD$; en l'omettant, on a simplement, aire $ECDI = EC.CD$, ou

$$d\square = x\,\omega\,d\sigma;$$

substituant les valeurs de x et de $d\sigma$, trouvées plus haut dans

cette expression, elle devient

$$d\square = \omega b^2 d\Phi \cos.(\varphi+\Phi)\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2(\varphi+\Phi)}\right)^2.$$

Telle est l'expression élémentaire de l'aire comprise sur le plan de projection entre deux méridiens dont la différence de longitude est ω, et deux parallèles dont la différence de latitude est Φ.

Il est aisé de s'assurer que l'aire analogue comprise sur le sphéroïde entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles, a pour élément la même quantité. En effet, on a trouvé, chap. III, pour l'élément d'une zone elliptique sur le sphéroïde,

$$dD = 2\pi b^2 \frac{d\sin.(\varphi+\Phi)}{[1-e^2\sin.^2(\varphi+\Phi)]^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$dD = 2\pi b^2 d\Phi \cos.(\varphi+\Phi)\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2(\varphi+\Phi)}\right)^2.$$

Or, on a $d\square = \frac{\omega}{2\pi} dD$, et en substituant la valeur précédente de dD, on trouve celle de $d\square$, comme on vient de l'exposer.

Il suit de là que l'aire comprise entre deux méridiens et deux parallèles quelconques sur le plan de projection, est égale à sa correspondante sur la surface du sphéroïde comprise entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles. C'est une propriété de cette projection dont il a été fait déjà mention ci-dessus, et qu'il s'agissait de démontrer.

Pour déterminer l'aire d'un pareil quadrilatère, on fera usage de la formule du chap. III, qui donne la valeur de D, en y mettant $\frac{1}{2}\omega$ au lieu de π, et $(\varphi+\Phi)$ au lieu de φ, ou mieux encore de la série qui en dérive, et qui a pour terme général,

$$\pm\omega ab\left(\frac{2}{2n-1}\right)\vartheta^{2(n-1)}[n+(n-1)\vartheta^2]\sin.\tfrac{1}{2}(2n-1)\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2n-1)(2\varphi+\Phi);$$

le signe supérieur étant pour les termes impairs, et l'inférieur pour les termes pairs.

CHAPITRE IX,

Dans lequel on examine ce que deviennent les Formules des deux Chapitres précédens, dans les cas particuliers où l'on suppose que le Parallèle moyen coïncide avec le Pôle, ou se confond avec l'Équateur.

DANS les formules des chapitres VII et VIII, la latitude φ du parallèle moyen est indéterminée et peut être quelconque; en faisant φ égal à l'angle droit, le parallèle moyen se réduit en un point, et ce point est le pôle même du sphéroïde boréal ou austral : or, il est aisé de voir que dans ce cas toutes les formules exposées dans ces chapitres subsistent, à l'exception de celle qui donne la valeur de T, ou du rayon du parallèle moyen qui est alors nul, et l'on a $R = -\sigma$; c'est-à-dire que le rayon de chaque parallèle développé est égal à la portion du méridien moyen rectifié, comprise entre le pôle et ce parallèle.

Mais, lorsque l'on prend l'équateur pour parallèle moyen, auquel cas $\varphi = 0$, alors T devenant infini, R le devient aussi; partant, l'angle ϖ est nul, et tous les parallèles projetés sont des lignes droites proportionnelles aux circonférences de leurs correspondans sur la surface du sphéroïde. Dans ce cas, plusieurs des quantités trouvées dans les chapitres précédens prennent une forme indéterminée : ce sont celles qui sont en même temps fonctions de R et ϖ; les autres, dans lesquelles il n'entre que R ou que ϖ, se simplifient considérablement, ainsi qu'on va le voir dans ce qui suit.

Désignant toujours par ξ et ζ les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque E, ayant pour axes le méridien moyen et le parallèle moyen qui alors se confond avec sa tangente, et pour origine la commune section de ces deux droites, qui est en même temps le centre de la projection;

Le point Γ tombant en M, et l'arc CE devenant une ligne droite, on a

$$MC = \Gamma C = \xi = \sigma \ldots CE = \zeta = \omega x,$$

pour expressions des coordonnées ξ, ζ; x est le rayon du parallèle du point E de la surface du sphéroïde : dont la valeur a été déterminée ci-dessus.

A cause que la latitude φ et l'angle ϖ sont nuls, on a cette formule,

$$-\text{tang. } \alpha = \text{tang. } \mathfrak{C} = \omega \text{ sin. } \Phi.$$

$\mathfrak{C}$ étant l'angle que fait la tangente à la projection du méridien du point E avec le méridien moyen.

Dans le cas que nous examinons ici, l'arc CE du parallèle du point E, étant rectiligne, se confond avec son sinus EH; supposant donc que C tombe en H, on aura dans le triangle ECT, rectangle en C,

$$CE = ET \text{ sin. } CTE = t \text{ sin. } \mathfrak{C},$$
$$CT = ET \text{ cos. } CTE = t \text{ cos. } \mathfrak{C}.$$

La première de ces équations donne, en y substituant la valeur de $CE = \omega x$,

$$t = \omega \frac{x}{\text{sin. } \mathfrak{C}},$$

mettant cette valeur de t dans la seconde, on a

$$\mathfrak{C} = \omega \frac{x}{\text{tang. } \mathfrak{C}},$$

et en chassant de ces équations l'angle ω, il vient

$$t = x \frac{\text{sécant. } \mathfrak{C}}{\text{sin. } \Phi} \ldots \tau = x \frac{1}{\text{sin. } \Phi}.$$

Telles sont les expressions de la tangente et de la sous-tangente à la courbe de projection du méridien du point quelconque E.

Les triangles semblables ECJ, TCJ, tous deux rectangles en C, donnent

$$EJ = CE\frac{ET}{CT} \ldots CJ = CE\frac{CE}{CT}.$$

Les équations ci-dessus donnent le rapport $\frac{CE}{CT} =$ tang. $\mathcal{C}$: on a d'ailleurs $ET = t$ et $CE = \omega x$; ainsi

$$n = t \text{ tang. } \mathcal{C} = \omega x \text{ sécante } \mathcal{C} \ldots u = \omega x \text{ tang. } \mathcal{C},$$

équations qui deviennent, en chassant t et ω, à l'aide des précédentes,

$$n = x \text{ sin. } \mathcal{C}\frac{\text{sécant.}^2\,\mathcal{C}}{\text{sin. }\Phi} \ldots u = x\frac{\text{tang.}^2\,\mathcal{C}}{\text{sin. }\Phi}.$$

Ce sont les expressions de la normale et de la sous-normale de la courbe de projection du méridien du point E.

La valeur de x, qui doit être substituée dans les équations précédentes, se tire de cette formule,

$$x = a \text{ cos. } \Phi\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\text{ cos. }2\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour avoir la valeur du rayon du cercle osculateur au point E de la projection du méridien NEP, il suffit de faire la valeur de R infinie dans l'expression de ϱ du chapitre précédent, elle se réduira à la suivante ;

$$\varrho = -\left(\frac{b^2}{a}\right)\left[\frac{1}{\omega \text{ cos.}^3\,\alpha \text{ cos. }\Phi}\right]\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\text{ cos. }2\Phi}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou en chassant l'angle ω de cette équation, et faisant attention que $\text{sin.}^2\,\alpha\,\text{cos.}^2\,\alpha = \frac{1}{4}\text{sin.}^2\,2\alpha$,

$$\varrho = 4\mathcal{R}\frac{\text{tang. }\Phi}{\text{sin.}^2\,2\alpha},$$

$\mathcal{R}$ étant le rayon de courbure d'un méridien elliptique du sphéroïde.

En substituant dans l'équation $dM = \frac{d\sigma}{\text{cos. }\alpha}$ les valeurs de

$d\sigma$

$d\sigma$ et de sécante α, relatives aux cas que nous examinons, on trouve pour l'expression de l'élément du méridien développé du point E,

$$dM = \frac{b^2}{a}\, d\Phi \left[\frac{1 + \omega^2 \sin.^2 \Phi}{(1 - e^2 \sin.^2 \Phi)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

équation qu'il faudrait intégrer pour avoir la longueur d'un arc M de la projection d'un méridien. L'expression de cet élément est beaucoup plus simple dans ce cas particulier que dans le cas général; cependant son intégrale serait encore trop compliquée pour la pratique, et parce que d'ailleurs elle serait de peu d'utilité, nous ne nous y arrêterons pas.

Si l'on fait $a = b$ ce qui donne $e = 0$, auquel cas le sphéroïde elliptique se change en une sphère du rayon a ou b, la dernière formule se simplifie encore, et devient

$$dM = b\, d\Phi\, (1 + \omega^2 \sin.^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}.$$

Or, il est aisé de s'assurer que la valeur de dM est alors l'expression élémentaire du perimètre d'une ellipse dans laquelle on aurait $\omega^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$, a et b étant les demi-axes de cette ellipse. En effet, si dans l'expression de ds du chapitre II, on fait $y = b \sin. \Phi$, on trouvera

$$ds = b\, d\Phi \left[1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \sin.^2 \Phi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mais alors les courbes de projection des méridiens sphériques sont du genre de celle qu'on appelle *courbe des sinus;* la rectification de ces courbes, ainsi que celle de la courbe des sinus, dépendent donc de la rectification de l'ellipse.

Pour obtenir la rectification de ces courbes, à l'aide de nos formules, il suffit de substituer à l'angle φ, dans les formules du chapitre IV, un angle tel que

$$\text{tang. } \varphi = \frac{a}{b} \text{ tang. } \Phi;$$

l'angle Φ étant, dans l'ellipse que nous considérons, celui que forme à son centre, avec le demi-grand axe, la droite tirée de ce centre au point où le prolongement de l'ordonnée coupe le cercle circonscrit.

Puisque l'on a, d'après ce qui précède, l'équation $a^2 = b^2(1+\omega^2)$, dans laquelle b est une quantité constante égale tout-à-la-fois au rayon de la sphère et au demi-petit axe de l'ellipse en question, il est clair que la valeur du demi-grand axe de cette ellipse dépend de la longitude ω du méridien à rectifier, et qu'elle se détermine à l'aide de cette équation.

Si l'on prend l'intégrale de la dernière équation différentielle, depuis $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = \nabla$ ou égal à l'angle droit, et que l'on double le résultat, on aura l'expression du demi-périmètre de l'ellipse, lequel est égal en longueur à la courbe rectifiée, qui est la projection d'un méridien sphérique, faisant, avec le méridien moyen, l'angle ω égal à sa longitude : on aura donc $M = 2Q$, ou, chapitre IV,

$$M = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}} \tfrac{1}{2}\alpha\pi,$$

valeur qui devient, en y substituant celle de $\frac{1}{2}\alpha$, et ayant égard à ce que

$$\frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}} = b\left[\frac{1-c^4}{(1-c^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = a\left[\frac{1-c^4}{(1+c^2)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$M = \pi b\left[\frac{1-c^4}{(1-c^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\left(1+\frac{1.3.5}{2^3.1.2}c^4+3\frac{1.3.5.7.9}{2^7.1.2.3.4}c^8+10\frac{1.3.5.7.9.11.13}{2^{11}.1.2.3.4.5.6}c^{12}+\&c.\right)$$

et en effectuant la multiplication par $(1-c^4)$, on trouve cette autre expression plus simple,

$$M = \pi b\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1.1}{4.4}c^4-\frac{1.1.3.5}{4.4.8.8}c^8-\frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}c^{12}-\frac{1.1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16.16}c^{16}-\&c.\right]$$

à laquelle on peut donner cette forme abrégée,

$$M = b\pi\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\int\frac{1.1.3.5.7.9\ldots(4n-3)}{4^2.8^2.12^2\ldots(4n)^2}\,c^{4n}\right];$$

le caractère $\int$ désignant, comme plus haut, la somme de tous les termes que l'on forme, en donnant successivement à n les valeurs de tous les nombres de la série naturelle, à commencer par l'unité.

De l'équation $\frac{a^2-b^2}{b^2} = \omega^2$, on tire $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = c^2 = \frac{\frac{1}{2}\omega^2}{1+\frac{1}{2}\omega^2}$ et $\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+\frac{1}{2}\omega^2)^{\frac{1}{2}}$.

Si l'on fait $\omega = 1$, ce qui donne $c^2 = \frac{1}{3}$ et $\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\frac{3}{2})}$, on aura alors

$$M = \pi b\sqrt{\tfrac{3}{2}}.\left[1-\int\frac{1.1.3.5.7.9\ldots(4n-3)}{4^2.8^2.12^2\ldots(4n)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right],$$

pour l'expression de la longueur de la courbe individuelle des sinus, qui est en même temps la projection du méridien sphérique, ayant pour longitude un angle ω, dont l'arc égal au rayon est la mesure. En effectuant le calcul, on trouve pour la longueur de cette courbe en partie du rayon b de la sphère,

$$M = (3.8192221)\,b.$$

On a, d'après ce qui précède, pour la longueur du quart d'ellipse,

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi b\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\int\frac{1.1.3.5.7.9\ldots(4n-3)}{4^2.8^2.12^2\ldots(4n)^2}\,c^{4n}\right].$$

Si l'on fait dans cette équation $c = 0$, valeur qui répond à $a = b$, on aura $Q = \frac{1}{2}a\pi$, *c'est la longueur du quart de cercle du rayon* a, comme cela doit être, puisque, par cette supposition, l'ellipse se change en cercle : mais si l'on fait $b = 0$, auquel cas, le quart d'ellipse devient égal au demi-grand axe, on a, à cause de $c = 1$ et de $b\left(\frac{1}{1-c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$; après avoir fait $Q = a$ et tout multiplié par $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$,

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 1-\int\left(\frac{1.1.3.5.7.9\ldots(4n-3)}{4^2.8^2.12^2\ldots(4n)^n}\right),$$

résultat remarquable déjà connu d'ailleurs.

L'élément de l'aire d'un quadrilatère du développement compris entre deux méridiens dont la différence de longitude est ω, et entre l'équateur et un parallèle dont la latitude est Φ, est comme au chapitre précédent, en faisant $\varphi = 0$,

$$d\square = \omega b^2 \frac{d \sin. \Phi}{(1 - e^2 \sin.^2 \Phi)^2}.$$

C'est encore l'élément de l'aire du quadrilatère correspondant sur la surface du sphéroïde compris entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles, d'où résulte aussi, dans ce cas, l'égalité de ces quadrilatères.

CHAPITRE X,

Dans lequel on se propose de résoudre ce Problème :

« Connaissant la longitude et la latitude d'un lieu quelconque de la surface » du sphéroïde terrestre, déterminer la position de ce point sur le plan de pro- » jection, et réciproquement. »

C'est dans l'application de ce problème que consiste, ainsi qu'on a pu le remarquer au chapitre I.^{er}, la méthode de projection que nous analysons ; sa résolution est donc un point essentiel de cette théorie.

Nous considérons particulièrement trois cas :

1.° Le cas général où la latitude du parallèle moyen demeure indéterminée ;

2.° Le cas où cette latitude est fixée à 50 grades.

Les formules appropriées à ce cas, dérivent, à l'aide d'une légère modification, de celles du précédent ;

3.° Le cas où la latitude du parallèle moyen étant nulle, le parallèle est l'équateur : c'est le cas le plus simple.

En désignant toujours par ξ et ζ les coordonnées rectangulaires du point à construire, rapportées, comme il a été expliqué, au méridien moyen et à la tangente au parallèle moyen, sur le plan de projection, comme axes, et à l'intersection de ces deux droites comme origine; on aura, pour déterminer ces coordonnées, ces trois systèmes de formules relatifs à chaque cas particulier.

1.° Dans le cas où la latitude du parallèle moyen est nulle,

$$\sigma = \frac{b^2}{2a}(1+c^2)^{\frac{1}{2}}\left[a\Phi \mp \int k_m \sin.\, 2(m-1)\Phi\right],$$

$$x = a\cos.\,\Phi\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.\,2\Phi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi = \sigma \ldots \zeta = \omega x;$$

2.° Dans le cas où la latitude du parallèle moyen est quelconque,

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}a\Phi \mp \int k_m \sin.(m-1)\Phi\cos.(m-1)(2\varphi+\Phi)\right],$$

$$T = a\,\text{cotang.}\,\varphi\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.\,2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$R = T - \sigma,$$

$$\varpi = \omega\frac{a}{R}\cos.(\varphi+\Phi)\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.\,2(\varphi+\Phi)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi = T - R\cos.\varpi = \sigma + \zeta\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varpi,$$

$$\zeta = R\sin.\varpi;$$

3.° Dans le cas où la latitude du parallèle moyen est de 50 grades,

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}a\Phi + \beta\sin.^2\Phi - \tfrac{1}{2}\gamma\sin.4\Phi - \delta\sin.^2 3\Phi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.8\Phi - \&c.\right]$$

$$T = a(1+c^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varpi = \omega\frac{a}{R}\cos.(50^\circ+\Phi)\left(\frac{1+c^2}{1-c^2\sin.\,2\Phi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les autres formules restent les mêmes que dans le cas précédent.

Les coèfficiens k_m ou a, β, γ, &c. des valeurs précédentes de σ, se calculent à l'aide des équations exposées à la fin du chapitre IV;

et les mêmes remarques relatives au double signe qui affecte le coëfficient k_m, trouvent ici leur application.

La valeur de T, dans ce dernier cas, se calcule plus aisément au moyen de cette série convergente,

$$T = a\left[1 + \tfrac{1}{2}c^2 - \frac{1.1}{2.4}c^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}c^6 - \text{\&c.}\right].$$

Les demi-axes a et b étant, dans le cas de la nature, peu différens l'un de l'autre, le second terme de cette série est déjà fort petit, et par conséquent T diffère peu de a.

En prenant $T = a$, on tomberait sur une projection peu différente de celle où la latitude du parallèle moyen est supposée de 50 grades.

La latitude du parallèle moyen étant toujours désignée par φ, serait dans ce cas telle, que l'on aurait

$$\text{tang.}^2\ \varphi = \frac{a}{b},$$

d'où il est facile de tirer pour l'expression de la tangente de la différence de latitude entre ce parallèle et celui de 50 grades,

$$\text{tang.}\ (\varphi - 50^\circ) = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Ce parallèle coupe chaque méridien du sphéroïde en un point fort remarquable par plusieurs propriétés qui le caractérisent. Quoique ces propriétés soient étrangères à l'objet de ce Mémoire, il ne sera peut-être pas tout-à-fait hors de propos d'en faire mention en passant.

La principale propriété, dont la découverte est due à M. *Legendre*, consiste à partager chaque quart de méridien elliptique en deux parties telles, que 1.° la différence des arcs compris entre ce point et le pôle le plus voisin, ce point et l'équateur, soit égale à la différence des demi-axes de méridien; 2.° la tangente au

méridien en ce point, prolongée, de part et d'autre, jusqu'à la rencontre des axes, soit égale à leur demi-somme.

Pour le démontrer, soient

L et l les latitudes de deux points quelconques d'un méridien elliptique ;

U la tangente au méridien, au point dont la latitude est L, terminée au prolongement du petit axe ;

u la tangente au méridien, au point dont la latitude est l, terminée au prolongement du grand axe,

on aura, d'après ce qui a été démontré au chapitre III,

$$U = a \text{ cotang. } L \left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2L}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u = \frac{b^2}{a} \text{ tang. } l \left(\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En supposant entre les latitudes L et l une relation telle, que

$$b \text{ tang. } l = a \text{ cotang. } L ;$$

on tire de cette équation

$$\cos. 2l = -\frac{c^2 + \cos. 2L}{1 + c^2 \cos. 2L} ;$$

les valeurs précédentes de b tang. l, et cos. $2l$ étant substituées dans l'expression de u, elle devient

$$u = a \text{ cotang. } L \left(\frac{1 + c^2 \cos. 2L}{1 + c^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

retranchant cette valeur de u de celle de U, on a

$$U - u = a \left(\frac{c^2}{1 + c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin. 2L \left(\frac{c^2}{1 + c^2 \cos. 2L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En ajoutant ensemble les valeurs de U et u, l'on a

$$U + u = 2U \left(\frac{1 + c^2 \cos.^2 L}{1 + c^2}\right) ;$$

et en multipliant ces deux quantités l'une par l'autre, il vient

$$U \times u = a^2 \text{ cotang.}^2 L = b^2 \text{ tang.}^2 l.$$

Si l'on différencie l'expression de $(U-u)$, on trouvera

$$d(U-u) = a\,dL\left[\left(\frac{1+c^2\cos.2L}{1+c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2L}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

la supposition de $d(U-u) = 0$, dans cette équation, donne

$$\cos.2L = -\left(\frac{a-b}{a+b}\right),$$

équation qui dérive de la suivante,

$$\text{tang.}^2 L = \frac{a}{b};$$

et partant, la différence des tangentes U et u est la plus grande, lorsque $L = \varphi$ et $L = l$, et cette différence est égale à $(a-b)$ ou à la demi-différence des axes du méridien.

De l'équation b tang. $l = a$ cotang. L, on tire la suivante,

$$\cos.2L = -\frac{c^2+\cos.2l}{1+c^2\cos.2l};$$

la même équation étant différenciée, donne

$$dL = -\frac{b}{a}\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2l}\right)dl;$$

substituant les valeurs précédentes de dL et cos. $2L$ dans les expressions ci-dessus de $d(U-u)$, elle devient

$$d(U-u) = -\frac{b^2}{a}\left[\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2l}\right)^{\frac{3}{2}}dl + \left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2L}\right)^{\frac{3}{2}}dL\right].$$

Les deux termes du second membre sont les élémens de deux arcs de méridien commençant à l'équateur. Pour transporter l'origine du premier arc au pôle, il suffit de faire $\mathrm{J} = \nabla - l$, ou de substituer à la latitude l, l'angle J égal à son complément ; l'équation précédente devient alors

$$d(U-u) = \frac{b^2}{a}\left[\left(\frac{1+c^2}{1-c^2\cos.2\mathrm{J}}\right)^{\frac{3}{2}}d\mathrm{J} - \left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2L}\right)^{\frac{3}{2}}dL\right].$$

Cela

Cela posé, nommant S le premier arc de méridien commençant au pôle, et s le second arc commençant à l'équateur, on aura

$$d(U-u) = d(S-s);$$

intégrant, et faisant attention que la constante est nulle, attendu que les quantités U et S, u et s, s'évanouissent en même temps, on a

$$U-u = S-s.$$

Mais au point où la latitude φ a pour expression de sa tangente $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, on a $U=a$ et $u=b$; donc à ce même point on a aussi

$$U-u = S-s = a-b.$$

Il suit de ce qui précède, que l'on a encore

$$U+u = a+b,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

En désignant, comme ci-dessus, le quart du méridien compris entre l'équateur et le pôle, par Q, on a

$$S+s = Q;$$

et par conséquent au point que nous considérons, l'on a

$$S = \tfrac{1}{2}Q+\tfrac{1}{2}(a-b) \ldots s = \tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}(a-b).$$

En substituant dans l'équation a tang. $\theta = b$ tang. φ du chap. II, la valeur $\sqrt{\frac{a}{b}}$ de tang. φ, il en résulte

$$\text{tang. } \theta = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{cotang. } \varphi:$$

les angles θ et φ sont donc alors complément l'un de l'autre.

Si l'on substitue, où il y a lieu, dans les expressions du chap. III, la valeur de tang. $\varphi = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, et celles de cos. φ et de cos. 2 φ qui en dérivent, on arrivera aux résultats fort simples que voici :

$$r^2 = a^2 + b^2 - ab\,;$$

$$N^2 = \frac{b^3}{a} \ldots\ldots \mathcal{N}^2 = \frac{a^3}{b},$$

$$T = U = a \ldots\ldots \mathcal{C} = u = b,$$

$$\mathcal{R}^2 = ab,$$

$$x^2 = a^2 \left(\frac{a}{a+b}\right),$$

qui sont d'autres propriétés du point en question.

D'après ce qui a été démontré, chapitre III, l'on a

$$\left(\frac{1+c^2}{1+c^2\cos.2(\varphi+\Phi)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos.\theta}{\cos.(\varphi+\Phi)} = \frac{\mathcal{N}}{a};$$

la substitution de ces valeurs dans l'expression de l'angle ϖ, donne

$$\varpi = \omega \frac{a}{R} \cos.\theta = \omega \frac{\mathcal{N}}{R} \cos.(\varphi+\Phi);$$

et l'on a, pour déterminer la quantité θ et le logarithme de $\mathcal{N}$, les deux séries convergentes exprimées, au moyen de leurs termes généraux, de la manière suivante,

$$\varphi + \Phi - \theta = \pm \int \frac{1}{n} \partial^{2n} \sin.2n(\varphi+\Phi),$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) = \pm 2 \int \partial^{2n} \sin.^2 n(\varphi+\Phi);$$

le signe supérieur se rapportant à n impair, l'inférieur à n pair. Ces formules contribuent à rendre l'évaluation de l'angle ϖ plus facile.

Nous venons d'exposer la manière de déterminer les coordonnées de la projection d'un point quelconque de la surface du sphéroïde dont on connaît la longitude et la latitude. Supposons maintenant que l'on connaisse les coordonnées d'un point projeté, on peut se proposer de déterminer la longitude et la latitude de ce point.

Ce problème, qui est l'inverse du précédent, peut avoir son utilité, comme nous le verrons bientôt, et se résout par les mêmes formules ; en voici la solution.

Les coordonnées $\Gamma H = \xi$ et $EH = \zeta$ du point donné, que nous supposons être en E, étant connues, on a, d'après ce qui a été exposé au commencement de ce chapitre,

$$R = \frac{T - \xi}{\cos. \varpi} = \frac{\zeta}{\sin. \varpi}.$$

On tire de cette équation celle-ci,

$$R^2 = (T - \xi)^2 + \zeta^2,$$

au moyen de laquelle le rayon $R = CR = ER$ est déterminé. La même équation donne

$$\text{tang. } \varpi = \frac{\zeta}{T - \xi}.$$

On connaît donc aussi l'angle ϖ à l'aide de cette formule; R étant connu, on a

$$\Gamma C = \Gamma R - CR = \sigma = T - R.$$

Avec cette valeur de σ, on évalue la différence de latitude Φ, qui lui répond, par cette formule,

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\alpha\Phi \mp \int k_m \sin.(m-1)\Phi \cos.(m-1)(2\varphi+\Phi)\right],$$

ou à l'aide d'une table qui la représente.

Cet angle étant ajouté à la latitude φ du parallèle moyen, on a celle du point E.

La double formule

$$\omega = \frac{\zeta}{a}\left(\frac{\varpi}{\sin. \varpi \cos. \theta}\right) = \frac{\zeta}{\mathcal{N}}\left(\frac{\varpi}{\sin. \varpi \cos. (\varphi + \Phi)}\right),$$

fait enfin connaître la longitude ω du point proposé E, comptée du méridien moyen, lorsque l'on a déterminé l'une ou l'autre des quantités θ ou $\mathcal{N}$ par les formules ci-dessus; et le problème est résolu.

CHAPITRE XI,

Où l'on a pour but de déterminer tous les Points d'intersection de deux droites parallèles aux Axes des Coordonnées de la Projection par tous les Méridiens et les Parallèles qu'elles rencontrent.

Deux droites étant tirées sur le plan de projection, l'une parallèlement au méridien moyen, l'autre parallèlement à la tangente au parallèle moyen, et par conséquent perpendiculaire à la première ; et connaissant les distances respectives de ces lignes à ce méridien et à cette tangente, ou, ce qui est la même chose, aux axes des coordonnées de la projection, on se propose ici de déterminer tous les points d'intersection de ces droites par tous les méridiens et les parallèles développés qu'elles rencontrent ; c'est-à-dire, de déterminer les coordonnées de ces points et ensuite leur longitude et leur latitude.

Ce problème, comme on voit, a deux parties; l'une relative aux parallèles, l'autre relative aux méridiens.

La première partie étant la plus simple, c'est par elle que nous commencerons.

Puisque les distances des deux droites aux deux axes respectifs sont données, on connaît déjà une des coordonnées du point cherché, et il ne s'agit que de déterminer l'autre.

Dans la première partie du problème, qui consiste à trouver les points d'intersection des deux droites par un parallèle donné, on trouvera d'abord l'arc σ par la série

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}\alpha\Phi + \beta\sin.^2\Phi - \frac{1}{2}\gamma\sin.4\Phi - \delta\sin.^2 3\Phi + \frac{1}{2}\varepsilon\sin.8\Phi + \&c.\right]$$

dans laquelle tout est connu.

On aura ensuite R par l'équation

$$R = T - \sigma.$$

Enfin, connaissant l'une des coordonnées ξ, ζ, on déterminera l'autre par l'équation

$$R^2 = (T - \xi)^2 + \zeta^2,$$

et cette partie du problème sera résolue.

Pour tirer plus commodément de cette dernière équation les valeurs de ξ ou de ζ, on fera, comme précédemment,

$$n = T - \xi,$$

au moyen de quoi, l'équation précédente devient

$$R^2 = n^2 + \zeta^2;$$

mais il est encore plus simple d'employer à calculer l'une des coordonnées n, ζ, l'autre étant connue, ces formules du chapitre VIII,

$$n = R \cos. \varpi \ldots \zeta = R \sin. \varpi,$$

d'où l'on tire, en divisant la seconde par la première,

$$\zeta = n \text{ tang. } \varpi.$$

Pour résoudre la seconde partie du problème, qui consiste à trouver les points d'intersection de deux droites par un méridien donné, il faudrait d'abord tirer de cette équation

$$T - \frac{n}{\cos. \varpi} = T - \frac{\zeta}{\sin. \varpi}$$

$$= \frac{b^2}{a}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\alpha\Phi \mp \int k_m \sin.(m-1)\Phi \cos.(m-1)(2\varphi+\Phi)\right];$$

les valeurs de cos. $(\varphi + \Phi)$ et de cos. $2(\varphi + \Phi)$ en fonction de $T - \frac{n}{\cos. \varpi}$ ou de $T - \frac{\zeta}{\sin. \varpi}$, que l'on substituerait dans l'expression de l'angle ϖ, en même temps que les valeurs analogues de R données par l'équation

$$R = \frac{n}{\cos. \varpi} = \frac{\zeta}{\sin. \varpi},$$

on aurait de cette façon une équation entre l'angle donné ω, le demi-axe a, une des coordonnées n ou ζ, l'angle ϖ, et les puissances de son sinus ou de son cosinus : il s'agirait de tirer de cette équation

la valeur de l'angle ϖ, ou d'une fonction de ϖ; mais on voit bien que cette équation, qui d'ailleurs est transcendante de sa nature, deviendrait tellement embrouillée, qu'elle serait ou tout-à-fait intraitable, ou qu'il n'en pourrait rien résulter d'assez simple pour la pratique. Cet angle ϖ une fois connu, R le serait aussi, et l'on pourrait trouver la valeur de l'autre coordonnée par les mêmes formules de la première partie : alors cette seconde partie du problème serait résolue.

Il est à regretter que cette partie du problème se refuse à une analyse directe, à cause de l'utilité dont elle peut être pour tracer sur une carte les méridiens par leurs points d'intersection avec le cadre de chaque feuille, ainsi que cela peut se pratiquer à l'égard des parallèles. On peut heureusement donner de cette partie du problème une solution indirecte, aussi exacte pour la pratique que pourrait être la solution directe et rigoureuse ; mais elle suppose que l'on connaît d'avance les coordonnées de plusieurs points de chaque méridien assez rapprochés du point d'intersection, pour que ce point tombe entre les extrêmes, et fasse partie de la portion du méridien déterminée par ces coordonnées.

Ainsi, en supposant que l'on ait formé un tableau des coordonnées de tous les points d'intersection des méridiens et des parallèles calculés pour chaque décigrade de longitude et de latitude dans toute l'étendue d'une carte, on pourrait aisément, étant donnée la distance d'une droite quelconque parallèle à l'un des axes des coordonnées, reconnaître dans ce tableau, quelles sont les coordonnées entre lesquelles tombent celles du point d'intersection de cette droite par un méridien donné.

On pourrait ensuite, au moyen des coordonnées de trois, ou même moins de points, par une interpolation facile, ou même sans interpolation, calculer les coordonnées du point d'intersection que l'on se propose de déterminer, ainsi qu'on va le voir.

En effet, à cause du peu de courbure des méridiens, on peut supposer que chaque méridien se confond dans le peu d'étendue que nous avons à considérer avec la courbe parabolique assujettie à passer par trois de ses points peu distans l'un de l'autre ; le point d'intersection d'une droite quelconque parallèle à l'un des axes des coordonnées, par cette courbe, sera le même que celui de la même droite par le méridien correspondant. Il s'agit donc de déterminer ce point d'intersection d'abord au moyen de la courbe parabolique osculatrice, nous verrons ensuite comment on peut le faire par d'autres considérations.

Nous désignerons ici, pour abréger, par

$\dot{X}$, la distance, à l'axe des ordonnées, d'une droite parallèle à cet axe ;

$\dot{Y}$, la distance, à l'axe des abscisses, d'une droite parallèle à cet axe ;

$\widehat{X}$, l'abscisse du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des abscisses ;

$\widehat{Y}$, l'ordonnée du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées :

En sorte que

$\dot{X}$, $\widehat{Y}$, soient les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées ;

$\widehat{X}$, $\dot{Y}$, soient les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Soient

$$\left.\begin{array}{c} Y \\ Y-p \\ Y+q \\ \widehat{Y} \\ Y+y \end{array}\right\} \text{les ordonnées correspondantes aux abscisses} \left\{\begin{array}{c} X \\ X-m \\ X+n \\ X+x \\ \widehat{X} \end{array}\right.$$

Nous aurons

$$\widehat{Y} = Y + Ax + Bx^2$$

pour l'équation de la courbe parabolique qui doit avoir trois de ses points communs avec la courbe de projection du méridien que l'on considère.

A et B sont des coèfficiens constans qu'il s'agit de déterminer. Pour cet effet, on observera que les coordonnées de deux courbes devant être les mêmes dans les points qui leur sont communs,

La supposition de $x = -m$, donne

$$\widehat{Y} = Y - p = Y - Am + Bm^2;$$

La supposition de $x = +n$ donne

$$\widehat{Y} = Y + q = Y + An + Bn^2.$$

On a ainsi ces deux équations

$$-p = -Am + Bm^2,$$
$$+q = +An + Bn^2,$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes des coèfficiens A et B,

$$A = \frac{n^2 p + m^2 q}{mn(m+n)} \ldots B = -\frac{np - mq}{mn(m+n)},$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation à la courbe parabolique ci-dessus, celle-ci devient

$$\widehat{Y} = Y + \frac{n^2 p + m^2 q}{mn(m+n)} x - \frac{np - mq}{mn(m+n)} x^2.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante, plus commode à évaluer,

$$\widehat{Y} = Y - \frac{px(x-n)}{m(m+n)} + \frac{qx(x+m)}{n(m+n)}.$$

On trouverait par un semblable raisonnement, ou simplement en changeant dans cette formule Y en X et x en y, (m en p), (n en q), et réciproquement, la suivante

$$\widehat{X} = X - \frac{my(y-q)}{p(p+q)} + \frac{ny(y+p)}{q(p+q)}.$$

Ces

Ces formules supposent que les coordonnées connues vont en croissant; dans le cas contraire, il faudrait changer les signes de leurs différences, c'est-à-dire, de m, n, ou de p, q.

S'il arrivait que l'on eût $m = n$ et $p = q$, les deux formules précédentes se simplifieraient considérablement, et deviendraient

$$\widehat{Y} = Y + \frac{p}{m} x,$$

$$\widehat{X} = X + \frac{m}{p} y;$$

comme cela est d'ailleurs évident, puisque les trois points déterminés par les coordonnées ci-dessus seraient alors en ligne droite.

Il est visible qu'alors les coordonnées de deux points de cette droite suffisent pour déterminer l'abscisse ou l'ordonnée d'un troisième point, dont on connaît l'ordonnée ou l'abscisse au moyen d'une proportion tirée de la considération de deux triangles semblables, ainsi que l'indiquent les formules précédentes.

Quoique les méridiens projetés soient tous, excepté le premier ou le méridien moyen de la projection, des courbes qui le deviennent d'autant plus, que leur différence en longitude avec ce méridien est plus grande; cependant, un arc d'une petite amplitude, telle que de deux décigrades, même pris sur le méridien le plus courbe, ne s'écartera jamais de la tangente à son milieu qu'insensiblement : c'est pourquoi l'on pourra, presque toujours, se contenter des deux dernières formules, sans qu'il en résulte des erreurs appréciables dans la pratique, pour déterminer les points d'intersection dont il est ici question.

Le triangle formé par le petit arc de méridien comme hypothénuse, et les deux petites droites m et p, dont la première est parallèle à l'axe des abscisses, et la seconde à l'axe des ordonnées, étant par-là même rectangle, il est évident que $\frac{p}{m}$ est la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des abscisses le

méridien développé au point dont les coordonnées sont X, Y; angle que nous avons désigné précédemment par $\mathcal{C}$, et dont nous avons donné, chapitre VII, l'expression suivante :

$$\mathcal{C} = \omega \sin.(\varphi + \Phi) + \tfrac{1}{3}\alpha \text{ tang.}^2\alpha - \tfrac{16}{135}\alpha \text{ tang.}^4\alpha + \&c.$$

on a donc

$$\frac{p}{m} = \text{tang. } \mathcal{C} \text{ et } \frac{m}{p} = \text{cotang. } \mathcal{C},$$

valeurs qui, étant mises dans les dernières équations, deviennent

$$\widehat{Y} = Y + x \text{ tang. } \mathcal{C},$$

$$\widehat{X} = X + y \text{ cotang. } \mathcal{C};$$

il est d'ailleurs visible par ce qui précède, que l'on a

$$x = \overset{1}{X} - X,$$

$$y = \overset{1}{Y} - Y.$$

Ayant ainsi déterminé, à l'aide des formules précédentes, l'une des coordonnées $\widehat{X}$ ou $\widehat{Y}$, et l'autre étant $\overset{1}{Y}$ ou $\overset{1}{X}$, si l'on fait

$$\overset{1}{X} = \xi \text{ et } \widehat{Y} = \zeta,$$

on calculera par les formules exposées à la fin du chapitre précédent, la longitude et la latitude du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, par la projection d'un méridien proposé.

Pareillement, en faisant

$$\widehat{X} = \xi \text{ et } \overset{1}{Y} = \zeta,$$

on déterminera par les mêmes formules la longitude et la latitude du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, par la projection du même ou d'un autre méridien proposé.

SECONDE PARTIE.

APPLICATION de la Projection à un cas de pratique, et en particulier au Tracé d'une Carte d'Europe.

CHAPITRE I.er

Résumé et Application des Formules générales au cas particulier que l'on considère; détermination des Constantes qui entrent dans ces Formules; explication de quelques Tables qui en dérivent; emploi de ces Tables pour calculer les Coordonnées d'un point donné de grandeur naturelle.

APRÈS avoir exposé dans la première partie de ce Mémoire les formules nécessaires à la méthode de projection qui en fait l'objet, il nous reste à en faire, dans cette seconde partie, l'application à un cas de pratique. Pour cet effet, nous supposerons qu'il s'agisse de construire une Carte de l'Europe à une échelle donnée.

Nous avons dit qu'il convenait de prendre pour méridien moyen et pour parallèle moyen, le méridien et le parallèle qui, par leur rencontre, divisent toute l'étendue du pays, en quatre portions à-peu-près égales; mais cette condition n'étant pas d'une rigoureuse nécessité, il reste encore assez d'arbitraire sur le choix de ces deux élémens, principalement sur celui du méridien, et il est bien possible que les géographes ne soient pas d'accord à cet égard.

Le Dépôt général de la guerre, en adoptant cette projection, a

arrêté que, pour le cas dont il s'agit, on prendrait pour parallèle moyen de la carte, le parallèle à l'équateur, dont la latitude est de 50 grades, et pour méridien moyen celui de l'Observatoire de Paris.

Faisant, en conséquence, dans nos formules, $\varphi = 50$, nous aurons pour calculer les coordonnées de chaque point de la carte le système suivant :

$$\sigma = \rho\left[\tfrac{1}{2}\alpha\Phi + \beta\sin.^2\Phi - \tfrac{1}{2}\gamma\sin.4\Phi - \delta\sin.^2 3\Phi + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin.8 - \&c.\right],$$

$$T = a(1+c^2)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1.1}{2.4}c^4 + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}c^6 - \&c.\right],$$

$$R = T - \sigma,$$

$$\varpi = \omega\left(\frac{a}{R}\right)\cos.\theta = \omega\left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right)\cos.(50+\Phi),$$

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi + \Phi - \vartheta^2\sin.2(50+\Phi) + \tfrac{1}{2}\vartheta^4\sin.4(50+\Phi) - \tfrac{1}{3}\vartheta^6\sin.6(50+\Phi) + \&c.$$

$$\mathcal{L}\mathcal{N} = \mathcal{L}a + 2\left[\vartheta^2\sin.^2(50+\Phi) - \tfrac{1}{2}\vartheta^4\sin.^2 2(50+\Phi) + \tfrac{1}{3}\vartheta^6\sin.^2 3(50+\Phi) - \&c.\right]$$

$$\xi = T - R\cos.\varpi = \sigma + \zeta\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varpi,$$

$$\zeta = R\sin.\varpi.$$

Au moyen de ces formules, on calculera aisément les coordonnées ξ et ζ d'un point quelconque, dont la latitude $(50+\Phi)$, et la longitude ω, par rapport au méridien moyen (*c'est-à-dire* dans ce cas comptée de Paris), seront données.

Pour déterminer la position de tous les points appartenant à un même méridien dont la longitude ω est donnée, en faisant dans les formules précédentes cette longitude constante, on fera varier successivement la latitude ou l'angle Φ de quantité plus ou moins grande, selon que l'on voudra avoir ces points plus ou moins rapprochés.

Pareillement, pour déterminer la position de tous les points appartenant à un même parallèle dont la latitude $(50+\Phi)$ est donnée, en faisant dans les formules l'angle Φ constant, on fera varier successivement la longitude ω de quantités plus ou moins

grandes suivant que l'on voudra que ces points soient plus ou moins rapprochés.

On obtiendra de cette manière les coordonnées ξ et ζ d'autant de points que l'on jugera nécessaire, de chaque méridien et de chaque parallèle par lesquels on fera passer ces courbes, ainsi qu'il a déjà été dit au commencement de la première partie.

Maintenant, avant de passer outre, il faut substituer, dans les formules précédentes, les valeurs numériques des constantes qui sont fonctions des demi-axes de la Terre. Pour cet effet, nous adopterons entre ces axes le rapport 335 à 334, qui paraît le plus solidement établi par les opérations exécutées en France, en Angleterre, à l'équateur et au cercle polaire ; nous aurons ainsi, $334.a = 335.b$, ou, ce qui est la même chose,

$$\text{Aplatissement ou } (a-b) = \left(\frac{1}{335}\right)a = \left(\frac{1}{334}\right)b;$$

on en tire ces valeurs,

$$e^2 = \frac{1}{669} \quad \ldots \quad c^2 = \frac{669}{223781};$$

au moyen de quoi, les équations qui terminent le chapitre IV de la première partie, donnent

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha\rho}{2a}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{669}{223781}\right) + \frac{5}{16}\left(\frac{669}{223781}\right)^2 - \frac{9}{32}\left(\frac{669}{223781}\right)^3 + \&c. = 0{,}9985080204,$$

$$\left(\frac{\beta\rho}{a}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{669}{223781}\right)\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{669}{223781}\right) + \frac{15}{32}\left(\frac{669}{223781}\right)^2 - \&c.\right] = 0{,}0044775710,$$

$$\left(\frac{\gamma\rho}{a}\right) = \frac{15}{32}\left(\frac{669}{223781}\right)^2\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{669}{223781}\right) + \&c.\right] \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0000041833,$$

$$\left(\frac{\delta\rho}{a}\right) = \frac{35}{192}\left(\frac{669}{223781}\right)^3\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{669}{223781}\right) + \&c.\right] \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0000000049;$$

substituant ces valeurs dans la première des équations du présent chapitre, elle devient

$$\sigma = a\,[0{,}9985080204.\Phi + 0{,}0044775711 \sin.^2\Phi - 0{,}0000020916 \sin. 4\Phi - 0{,}0000000049 \sin.^2 3\Phi + \&c.],$$

Or, en faisant dans l'expression de S du chapitre IV, l'angle φ égal au quart de la circonférence du cercle, ou en substituant $\frac{1}{2}\pi$ à φ, auquel cas, l'arc S devient égal à Q ou au quart du méridien elliptique, on a trouvé

$$2Q = a\pi\left(\frac{a\rho}{2a}\right);$$

mais, par convention, $Q = 10000000$ mètres; d'ailleurs, π ou le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre $= 3,141592653$: on a ainsi l'équation

$$20000000 = a \times 3.141592653 \times 0,9985080204,$$

d'où résulte pour la valeur de a en mètres,

$$a = 6375710,15,$$

laquelle étant mise au lieu de a dans l'équation précédente, on aura cette formule dont tous les coëfficiens numériques expriment des mètres,

$$\sigma = 100000\Phi + 28547,95\sin.^2\Phi - 13,334\sin.4\Phi - 0,031\sin.^2 3\Phi + \&c.$$

La valeur de T est donnée par l'équation suivante :

$$T = a\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{689}{223781}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{669}{223781}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{669}{223781}\right)^3 - \&c.\right] = a \times 1,00149365;$$

mettant, au lieu de a dans cette équation, la quantité que l'on vient de trouver, on aura pour T en mètres,

$$T = 6385233,2.$$

La substitution de la valeur de e^2 et de ses puissances dans l'expression de θ, donne

$$\theta = \tfrac{1}{4}\pi + \Phi - 0,0014947683 \sin. 2(50 + \Phi) + 0,000000111716 \sin. 4(50 + \Phi) - 0,000000001113 \sin. 6(50 + \Phi) + \&c.:$$

les angles θ et Φ étant alors exprimés en parties du rayon. Pour que ces angles soient exprimés en grades, il faut multiplier les coëfficiens numériques de la formule précédente, par la valeur du

rayon en grades ou par la quantité 63,66197, alors elle deviendra

$$\theta = 50 + \Phi - 0{,}0951537 \sin.2(50+\Phi) + 0{,}0000711 \sin.4(50+\Phi) - 0{,}00000007 \sin.6(50+\Phi) + \&c.$$

La substitution de la même valeur de ∂^2 et de ses puissances dans l'expression de $\mathcal{L}\mathcal{N}$, donne

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) = 0{,}0029895366 \sin.^2(50+\Phi) - 0{,}0000022353 \sin.^2 2(50+\Phi) + 0{,}000000002226 \sin.^2 3(50+\Phi) - \&c.,$$

la lettre $\mathcal{L}$ désignant des logarithmes hyperboliques. Si l'on multiplie les coèfficiens numériques de cette équation par le module des logarithmes, ou par la quantité 0,43429448, le même caractère $\mathcal{L}$ désignera alors des logarithmes vulgaires, et l'on aura

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) = 0{,}0012983392 \sin.^2(50+\Phi) - 0{,}0000009703 \sin.^2 2(50+\Phi) + 0{,}000000000967 \sin.^2 3(50+\Phi) - \&c.$$

Soit $\downarrow$ une quantité telle que l'on ait

$$\downarrow = \left(\frac{a}{R}\right) \cos.\theta = \left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right) \cos.(50+\Phi).$$

Si l'on rassemble maintenant sous un même coup-d'œil les formules nécessaires pour évaluer en mètres les coordonnées ξ, ζ, on aura

$$\sigma = 100000\,\Phi + 28547{,}95 \sin.^2\Phi - 13{,}334 \sin.4\Phi - 0{,}031 \sin.^2 3\Phi + \&c.,$$

$$R = 6385233{,}2 - \sigma,$$

$$\theta = 50 + \Phi - 0{,}0951537 \sin.2(50+\Phi) + 0{,}000071 \sin.4(50+\Phi) - 0{,}000000007 \sin.6(50+\Phi) + \&c.,$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) = 0{,}0012983392 \sin.^2(50+\Phi) - 0{,}0000009703 \sin.^2 2(50+\Phi) + 0{,}000000000967 \sin.^2 3(50+\Phi) - \&c.,$$

$$\downarrow = \left(\frac{a}{R}\right) \cos.\theta = \left(\frac{a}{R}\right)\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) \cos.(50+\Phi),$$

$$\varpi = \omega\downarrow,$$

$$\eta = R\cos.\varpi \ldots\ldots \zeta = R\sin.\varpi,$$

$$\xi = 6385233{,}2 - \eta = \sigma + 2R\sin.^2\tfrac{1}{2}\varpi = \sigma + \zeta\,\mathrm{tang.}\tfrac{1}{2}\varpi.$$

On voit, par ce système de formules, que le calcul des valeurs des coordonnées ξ et ζ se réduit à peu de chose, lorsque l'on connaît les logarithmes des quantités R et $\downarrow$, et la valeur en mètres de l'arc σ, dans le cas où il est avantageux d'employer la dernière équation,

$$\xi = \sigma + 2R \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varpi = \sigma + \zeta \tang. \tfrac{1}{2}\varpi,$$

ce qui a toujours lieu tant que n est un nombre composé de plus de chiffres effectifs que ζ.

C'est dans le dessein de faciliter ce calcul que l'on a dressé sur ces formules les Tables ci-après. Elles s'étendent toutes en latitude depuis 30 jusqu'à 70 grades, ce qui suffit pour construire une carte de l'Europe entière, et procèdent de décigrade en décigrade.

La Table I.re donne immédiatement la valeur de l'angle $(50 + \Phi - \theta)$, d'où l'on conclut celle de l'angle θ. On entre dans cette Table avec $(50 + \Phi)$ pour argument.

La Table II donne la valeur du logarithme vulgaire de la normale $\mathcal{N}^o$ terminée au petit axe de l'ellipsoïde, en supposant le demi-diamètre de l'équateur égal à l'unité. On entre dans cette Table avec le même argument que dans la précédente.

Ces deux Tables ne sont que subsidiaires et ne servent qu'à calculer les Tables V et VII, dont l'une, savoir :

La Table V donne la valeur de l'angle $\downarrow$ en grades; et l'autre, c'est-à-dire la Table VII, donne le logarithme de ce nombre de grades ou des quantités de la Table V.

On peut employer à calculer la Table V, les Tables I et II concurremment, ou simplement l'une des deux, le choix est à-peu-près indifférent.

La Table III donne la valeur en mètres de l'arc de méridien σ, compris entre le parallèle moyen et un autre parallèle, dont la latitude

latitude est donnée. On entre dans cette Table avec la latitude $(50+\Phi)$ pour argument.

Cet arc σ étant retranché de la quantité constante 6385233,2, lorsque l'angle Φ est positif, ou lorsque la latitude donnée surpasse 50 grades, et étant ajouté à cette quantité, lorsque Φ est négatif, on a R ou le rayon en mètres du parallèle correspondant sur le plan de projection.

La Table IV donne, avec la latitude $(50+\Phi)$ d'un parallèle pour argument, la valeur R de son rayon calculé comme on vient de le dire.

La Table VI donne le logarithme de R ou de chaque nombre de la Table IV : on le prend avec le même argument $(50+\Phi)$.

L'usage de ces Tables est facile. Pour en donner un exemple, supposons que l'on veuille calculer les coordonnées du point de la surface de la Terre, qui a 70 grades de latitude, et 40 grades de longitude, à partir du méridien moyen.

Avec $(50+\Phi)=70$ grades de latitude pour argument, on trouve d'abord dans les Tables VI et VII,

$$\log. R = 6.6417238 \ldots \log. \downarrow = 9.8208816 :$$

donc, puisque $\omega = 40$ grades, on a

$$\varpi = 26{,}48145 \text{ grades.}$$

Aux logarithmes du cosinus et du sinus de cet angle, ajoutant le logarithme de R, on aura respectivement les logarithmes de η et ζ; et en passant aux nombres, il viendra

$$\eta = 400800{,}0 \text{ mètres} \ldots \zeta = 1770872{,}0 \text{ mètres} :$$

partant, on a, en retranchant la valeur de η de la constante 6385233,2,

$$\xi = 2376433{,}2 \text{ mètres.}$$

Pour calculer ξ par la dernière formule, il faudrait d'abord chercher dans la Table III, avec la latitude 70 grades comme

argument, la valeur de σ que l'on trouverait de 2002713,4 mèt.; à quoi ajoutant la valeur du second terme, ζ tang. $\frac{1}{2}\varpi = 373719{,}8$, il viendrait $\xi = 2376433{,}2$ mètres, ainsi qu'on l'a obtenu de l'autre manière.

Mais ici il n'y a aucun avantage à employer cette seconde manière, attendu que η et ζ sont des quantités composées d'un même nombre de chiffres effectifs.

CHAPITRE II.

Réduction, à une Échelle quelconque, des Coordonnées d'un point donné, calculées de grandeur naturelle ; manière de transporter leur origine à l'un des angles de chaque feuille d'une Carte, les dimensions des feuilles étant données; notation des feuilles propre à les distinguer et à les classer.

Les coordonnées ξ et ζ de la projection d'un point quelconque de la Terre, telles que les donnent immédiatement nos formules ou les Tables, ont, comme on l'a déjà dit, le centre de la projection pour origine commune; et on les obtient de grandeur naturelle, ou, pour nous servir d'autres termes, elles sont pour l'échelle $\frac{1}{1}$; mais il est facile de les réduire à une autre échelle quelconque, puisque, d'après le système des échelles décimales adoptées au Dépôt général de la guerre, il suffit, en effet, de diviser leur valeur numérique par un des nombres 1, 2, 5, suivi de plusieurs zéros.

Ayant trouvé de cette manière, à une échelle quelconque, les coordonnées d'une suite de points appartenant tous au même méridien ou au même parallèle, on a tout ce qui est nécessaire pour tracer ces courbes sur le plan de projection; mais attendu qu'une

carte d'une certaine étendue, quelque petite qu'en soit l'échelle, est nécessairement composée de l'assemblage d'un nombre plus ou moins grand de feuilles différentes, les mêmes courbes se trouvent réparties sur plusieurs feuilles séparées.

Pour tracer commodément ces courbes sur les feuilles isolées, et y rapporter ensuite chaque objet dans la position relative qu'il doit y occuper, il est nécessaire de transporter l'origine des coordonnées à l'un des angles de chaque feuille indifféremment ; cependant, pour plus d'uniformité, et dans la vue de proscrire l'arbitraire, sur-tout dans la formation des tableaux des coordonnées, il est bon de convenir, une fois pour toutes, que l'angle de chaque feuille où sera fixée l'origine des coordonnées qui doivent servir à la tracer, est celui dont le sommet est le plus voisin du centre de la projection.

Pour transporter l'origine des coordonnées du centre de la projection à l'angle de chaque feuille que l'on vient d'indiquer, il faut avoir égard aux dimensions des feuilles, qui sont des parallélogrammes rectangulaires tous égaux entre eux : or, il a été arrêté au Dépôt général de la guerre, que chaque parallélogramme aurait 0,5 mètre de hauteur ou dans le sens des abscisses, et 0,8 mètre de largeur ou dans le sens des ordonnées. Si donc, à partir du point d'intersection des axes des coordonnées, l'on divise l'axe des abscisses de 0,5 en 0,5 mètre, et l'axe des ordonnées de 0,8 en 0,8 mètre, et que, par chaque point de division de l'axe des abscisses, l'on tire des droites parallèles à l'axe des ordonnées; que semblablement, par chaque point de division de l'axe des ordonnées, l'on tire des droites parallèles à l'axe des abscisses, on partagera la surface de la carte en un nombre indéfini de parallélogrammes égaux qui donneront autant de feuilles, ainsi que cela se voit dans la Planche II.

Pour distinguer ces feuilles les unes des autres et les rassembler

sans peine, il suffit d'une notation fort simple, qui consiste uniquement à affecter chacun des deux côtés de chaque feuille les plus rapprochés des axes des coordonnées, d'un numéro qui marque le quantième de la feuille dans le sens de chacun de ces axes, et en partant de l'un et de l'autre. Les Planches II et III fournissent des exemples de cette notation.

La carte étant divisée par les axes des coordonnées, en quatre parties, auxquelles on peut donner le nom de *régions* en les considérant par rapport à ces axes, on voit tout d'un coup, par la disposition des numéros qui affectent les côtés d'une feuille, à quelle région elle appartient, et les valeurs de ces numéros indiquent le rang qu'elle y occupe. Ainsi, par exemple, on voit tout de suite, à l'inspection de la feuille cotée A, Planches II et III, que cette feuille tombe dans l'angle nord-est des axes des coordonnées ou dans la région nord-est, et que, de plus, elle est la huitième à partir de l'axe des abscisses, et la neuvième à partir de l'axe des ordonnées. Il en est de même des autres feuilles B, C, D : on remarque sans peine à quelle région chacune appartient, et son rang dans cette région.

Toutes les feuilles qui tombent dans le même angle des axes des coordonnées étant notées de la même manière, et la notation étant différente pour les quatre angles, elles sont nécessairement distinguées les unes des autres.

L'axe des abscisses, ou le méridien moyen de la projection, partageant le développement de la carte en deux portions symétriques considérées par rapport aux courbes des méridiens ou des parallèles, les feuilles correspondantes ou de mêmes numéros de ces deux portions, prises du même côté de l'axe des ordonnées, sont l'une la contre-épreuve de l'autre, et ont les mêmes coordonnées; à cela près que les unes ont des directions contraires des autres, ce qui diminue de moitié le calcul de ces coordonnées. Ainsi, deux objets qui

ont la même latitude, et dont la longitude de l'un est supplément à quatre angles droits de la longitude de l'autre, ont les coordonnées de même grandeur, mais leur position est différente relativement aux ordonnées.

Il est clair, d'après ce qui vient d'être dit, que l'angle de chaque feuille le plus voisin du centre de la projection, est distant de l'axe des ordonnées d'un multiple p de 0,5 mètre, et de l'axe des abscisses d'un multiple q de 0,8 mètre, p et q étant deux nombres entiers tels, que $p \times 0{,}5 = \frac{1}{2}p$ soit une quantité dont la différence avec l'abscisse ξ soit moindre que $\frac{1}{2}$ mètre, et $q \times 0{,}8 = \frac{4}{5}q$ une quantité dont la différence avec l'ordonnée ζ soit moindre que $\frac{4}{5}$ mètre.

En désignant donc par X et Y les coordonnées rapportées à l'angle de chaque feuille, on a

$$X = \xi - \tfrac{1}{2}p,$$
$$Y = \zeta - \tfrac{4}{5}q.$$

Les quantités p et q font connaître les numéros de la feuille sur laquelle tombe le point déterminé par les coordonnées ξ et ζ. En effet, le numéro du côté de la feuille le plus voisin de l'axe des ordonnées et parallèle à cet axe, est égal à $(p+1)$, et le numéro du côté de la même feuille le plus voisin de l'axe des abscisses et parallèle à cet axe, est égal à $(q+1)$; les nombres p et q étant donnés par les équations précédentes, en sorte que

$$p = 2\,(\xi - X),$$
$$q = \tfrac{5}{4}\,(\zeta - Y).$$

Ces équations supposent connues les valeurs des coordonnées X et Y, lorsque l'on s'en sert pour déterminer les nombres p et q; tandis que ces nombres doivent, au contraire, servir à déterminer ces coordonnées, ce qui est sans doute un cercle vicieux. Cependant, si l'on fait attention que X et Y sont des fractions dont la première

est toujours moindre que $\frac{1}{2}$ et la seconde moindre que $\frac{4}{5}$, on verra bien que l'on peut dans tous les cas, en y faisant ces coordonnées nulles, déterminer les nombres p et q, à moins d'une unité près; ce qui revient à dire que l'on obtiendra les valeurs exactes de ces quantités, en rejetant les fractions qui les accompagnent.

Par exemple, on a trouvé, à la fin du chapitre précédent, les coordonnées du point qui a 70 grades de latitude et 40 grades pour différence de longitude avec le méridien moyen; ces coordonnées sont, pour l'échelle $\frac{1}{1}$,

$$\xi = 2376433{,}2 \text{ , et } \zeta = 1770872{,}0 \text{ mètres.}$$

Ces coordonnées réduites à l'échelle $\frac{1}{2000}$, et toujours comptées du centre du développement, sont

$$\xi = 1188{,}2166, \text{ et } \zeta = 885{,}4360 \text{ mètres;}$$

de là on tire, en omettant les fractions qui se présentent dans les valeurs de p et q,

$$p = 2376 \text{ et } q = 1106.$$

Partant, le numéro du côté de la feuille le plus voisin de l'axe des ordonnées est 2377, celui du côté de la même feuille le plus voisin de l'axe des abscisses est 1107 : ainsi à l'échelle $\frac{1}{2000}$, le point en question tombe sur la feuille 2377.^{me} à compter de l'axe des ordonnées, et 1107.^{me} à compter de l'axe des abscisses; et ses coordonnées rapportées à l'angle de cette feuille le plus voisin du centre de la projection, sont

$$X = 0{,}2166, \text{ et } Y = 0{,}4360 \text{ mètre.}$$

En supposant, comme on fait ici, le point en question situé dans l'hémisphère boréal de la Terre, et sa différence de longitude orientale par rapport au méridien moyen, on voit du premier coup-d'œil que le côté de la feuille le plus voisin de l'axe des ordonnées qui doit porter le numéro 2377 est l'inférieur, et que le plus voisin

de l'axe des abscisses qui doit porter le numéro 1107 est le côté de gauche. De cette façon, tout est déterminé, tant l'ordre de la feuille que la région dont elle fait partie.

On rencontre, sous le titre VIII, une Table des multiples de 0,5 et de 0,8, et des numéros des feuilles qui y correspondent. Cette Table dispense du petit calcul, d'ailleurs très-facile, qu'il faudrait faire toutes les fois qu'il s'agit de transporter l'origine des coordonnées d'un point, du centre de la projection à l'angle de la feuille à laquelle il appartient le plus voisin de ce centre.

Par exemple, on voit dans cette Table qu'à l'échelle $\frac{1}{20000}$, le point dont la latitude est de 70 grades, et la différence de longitude avec le méridien moyen de 40 grades, tombe, en comptant de l'axe des ordonnées, sur la feuille 238.me, qui est en même temps la 111.me à compter de l'axe des abscisses, et que ses coordonnées rapportées à l'angle de cette feuille le plus voisin du centre de la projection, sont

$$X = 0{,}3211 \text{ et } Y = 0{,}5436 \text{ mètre.}$$

En effet, les coordonnées de ce point, par rapport au centre du développement, sont

$$\xi = 118{,}8211 \text{ et } \zeta = 88{,}5436 \text{ mètres.}$$

Les multiples de 0,5 et de 0,8, immédiatement moindres que ces coordonnées, sont respectivement

$$\left.\begin{matrix} p \times 0{,}5 = 118{,}5 \\ q \times 0{,}8 = 88{,}0 \end{matrix}\right\} \text{ qui se trouve dans la Table vis-à-vis du nombre } \left\{\begin{matrix} 238 \\ 111 \end{matrix}\right.$$

Ces quantités étant retranchées de ξ et ζ, il reste pour X et Y les mêmes nombres que ci-dessus.

On trouverait pareillement, à toute autre échelle donnée, les numéros de la feuille sur laquelle tomberait le même point, et ses coordonnées rapportées à l'angle de cette feuille le plus voisin du centre de la projection. Voici, pour les neuf échelles adoptées au

Dépôt général de la guerre, un tableau de ces résultats, que l'on ne donne d'ailleurs ici que pour servir d'exemple.

TABLEAU des Coordonnées du Point de la surface de la Terre, qui a 70 grades de latitude et 40 grades de différence en longitude avec le Méridien moyen de la Projection, exprimées en mètres pour neuf différentes Échelles, et rapportées à l'angle de chaque Feuille le plus voisin du centre de la Projection, avec les numéros des Feuilles.

NUMÉROS des Échelles.	ÉCHELLES.	ABSCISSES comptées du centre du développement.	ORDONNÉES comptées du centre du développement.	ABSCISSES rapportées à l'angle de la feuille le plus voisin du centre.	NUMÉRO de la feuille, à compter depuis l'axe des ordonnées.	ORDONNÉES rapportées à l'angle de la feuille le plus voisin du centre.	NUMÉRO de la feuille, à compter depuis l'axe des abscisses.
	RAPPORTS.	MÈTRES.	MÈTRES.	MÈTRES.	NOMBRES.	MÈTRES.	NOMBRES.
N.°	$\frac{1}{1}$	2376423	1770872	2376423	1	1770872	1
1	$\frac{1}{2000}$	1188,2115	885,4360	0,2115	2377	0,6360	1107
4	$\frac{1}{20000}$	118,8211	88,5436	0,3211	238	0,5436	111
7	$\frac{1}{200000}$	11,8821	8,8544	0,3821	24	0,0544	12
2	$\frac{1}{5000}$	475,2846	354,1744	0,2846	951	0,5744	443
5	$\frac{1}{50000}$	47,5285	35,4174	0,0285	96	0,2174	45
8	$\frac{1}{500000}$	4,7528	3,5417	2,2528	10	0,3417	5
3	$\frac{1}{10000}$	237,6423	177,0872	0,1423	476	0,2872	222
6	$\frac{1}{100000}$	23,7642	17,7087	0,2642	48	0,2709	36
9	$\frac{1}{1000000}$	2,3764	1,7709	0,3764	5	0,1709	3

CHAPITRE

CHAPITRE III.

Exposition détaillée de la manière de construire les différens Points d'une Carte au moyen de leurs Coordonnées rectangulaires.

LES Tables VI et VII, dont on a expliqué la construction et l'usage à la fin du chapitre I.^er^, sont suffisantes pour calculer les coordonnées des méridiens et des parallèles que l'on est convenu, au Dépôt général de la guerre, de tracer de décigrade en décigrade tant de longitude que de latitude, et alors les nombres dont on a besoin s'y trouvent immédiatement; mais pour chaque point intermédiaire il serait nécessaire de calculer une partie proportionnelle qui serait d'autant moins exacte et plus pénible à obtenir, que les différences entre les nombres de ces Tables sont plus fortes ; c'est pourquoi on a jugé à propos de décupler ces nombres, c'est-à-dire de les calculer pour chaque centigrade de longitude et de latitude; tandis que ceux des Tables VI et VII ne sont calculés que de décigrade en décigrade. C'est ainsi qu'ont été dressées les Tables IX et X, qui ne sont que des fragmens plus détaillés des Tables VI et VII. Elles suffisent pour calculer les coordonnées des différens points de la carte d'un pays renfermé entre les parallèles qui ont pour latitudes 51 et 53 grades, tel que l'Helvétie.

L'emploi de ces Tables étant le même que celui des Tables VI et VII qui a déjà été expliqué, nous pourrions nous dispenser d'en donner un nouvel exemple ; cependant comme ce problème est l'objet principal de ce Mémoire, nous donnerons encore l'exemple suivant, auquel nous ajouterons quelques considérations de plus.

Supposons que l'on veuille calculer les coordonnées du sommet de la montagne dite *le Chasseral*, qui est un endroit remarquable par sa situation.

Le lieu du signal élevé sur la crête de la montagne, a pour

$$\left.\begin{array}{ll}\text{longitude orientale} & 5{,}24271\\ \text{latitude boréale..} & 52{,}37055\end{array}\right\}\ \text{grades.}$$

On ne trouve pas immédiatement dans les Tables IX et X les nombres qui correspondent à la latitude $(50 + \Phi) = 52{,}37055$ qui en est l'argument; mais prenant d'abord ceux qui correspondent dans ces Tables à 52, 37, qui est la latitude la plus approchante de la proposée, savoir,

$$6.7887477 \text{ et } 9.8491769,$$

et observant que ces nombres diminuent à mesure que la latitude augmente, il suffira de retrancher de chacun une partie proportionnelle à 0,055.

Or, pour un centigrade, les différences relatives à ces nombres, sont

$$706 \text{ et } 27;$$

partant, les parties proportionnelles sont

$$706 \times 0{,}055 = 38{,}8 \text{ et } 27 \times 0{,}055 = 1{,}4:$$

en les soustrayant donc des nombres ci-dessus, il reste

$$\log. R = 6.7887438 \ldots\ldots \log. \downarrow = 9.8491768.$$

Au logarithme de $\downarrow$, ajoutant celui de la longitude ou de ω, savoir, 0.7195558, on a 0.5687326 pour le logarithme de ϖ; ainsi

$$\varpi = 3{,}70453 \text{ grades.}$$

Les Tables ordinaires des logarithmes des sinus donnent

$$\log. \sin. \varpi = 8.7646079 \ldots \log. \cos. \varpi = 9.9992643;$$

à quoi ajoutant le logarithme de R, il vient

$$\log. \zeta = 5.5533517 \ldots \log. n = 6.7880081;$$

partant, on a

$$\zeta = 357562{,}3 \text{ et } \eta = 6137734{,}3 \text{ mètres :}$$

la valeur de η étant retranchée de la quantité constante $6305233{,}2$, on a

$$\xi = 247498{,}9 \text{ mètres.}$$

Dans ce cas, la valeur de la coordonnée ζ, contenant un chiffre effectif de moins que celle de la coordonnée η, il est avantageux d'évaluer la dernière, ou ξ, au moyen de la première; c'est pourquoi, au logarithme de ζ, ajoutant celui de tang. $\frac{1}{2}\varpi$, savoir, 8.4639444, la somme est 4.0172961 : donc,

$$\zeta \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\varpi = 10406{,}3 \text{ mètres.}$$

A cette quantité, il faut ajouter la valeur de l'arc $\sigma = 237092{,}5$, qui se prend dans la Table III, avec la latitude pour argument, et l'on trouve pour ξ cette valeur,

$$\xi = 247498{,}8 \text{ mètres,}$$

qui diffère à peine de la précédente.

Les valeurs des coordonnées ξ et ζ que l'on vient de trouver, se rapportent au cas de la nature ou à l'échelle $\frac{1}{1}$: on les réduira à une autre échelle, par exemple à celle qui répond au numéro 5 de la série des échelles adoptées, ou à l'échelle $\frac{1}{50000}$, en divisant ces valeurs par le dénominateur de cette fraction, ou par 50000; ce qui se fait aisément, en les doublant et en reculant la virgule de cinq rangs vers la gauche. On aura ainsi à cette échelle

$$\xi = 4{,}94997 \text{ et } \zeta = 7{,}15125 \text{ mètres.}$$

Pour savoir maintenant sur quelle feuille tombe le point déterminé par ces coordonnées, il faut chercher dans la Table VIII, les distances aux axes des coordonnées, des côtés de la feuille les plus voisins de ces axes, immédiatement moindres que les valeurs précédentes. On trouve dans ce cas,

Vis-à-vis du numéro	Distance à l'axe des
10	ordonnées ou $\frac{1}{2}p = 4,5$,
9	abscisses ou $\frac{4}{5}q = 6,4$.

En faisant attention que l'objet est au nord du parallèle moyen et à l'est du méridien moyen, on apercevra sans peine que le côté de la feuille sur lequel il tombe, le plus voisin de l'axe des abscisses est le côté vertical de gauche dont le numéro est 9, et le côté le plus voisin de l'axe des ordonnées est le côté horizontal inférieur, dont le numéro est 10. L'origine des coordonnées étant le point d'intersection de ces côtés, est par conséquent l'angle inférieur de gauche de la feuille.

Les coordonnées *du Chasseral*, comptées de cet angle sur les côtés de la feuille, vertical et horizontal, comme axes, sont

$$X = 0,44997 \text{ et } Y = 0,75125 \text{ mètre.}$$

On voit par ces valeurs que le point déterminé par les coordonnées X, Y, tombe sur la feuille $\frac{9}{10}\square$, à peu de distance de l'angle diagonalement opposé à celui qui est l'origine de ces coordonnées.

Il serait par conséquent plus commode, pour placer ce point sur la feuille, de transporter à cet angle l'origine des coordonnées; ce qui n'exige d'autre calcul que de prendre le complément à 0,5 du nombre qui exprime la valeur de l'abscisse X, et le complément à 0,8 du nombre qui exprime la valeur de l'ordonnée Y. Ce calcul se fait aisément à vue. On aurait ainsi ces nouvelles valeurs des coordonnées,

$$X = 0,05003 \text{ et } Y = 0,04875 \text{ mètre.}$$

Ces quantités étant beaucoup plus petites que les précédentes, le point est plus facile à construire par leur moyen.

En général, il sera toujours utile de transporter l'origine des coordonnées d'un angle à l'autre, lorsque ce transport contribuera

à diminuer les distances ; car, outre le plus de facilité qui en résultera dans la construction, le papier se dégradera beaucoup moins en faisant contribuer à-peu-près également les quatre angles de la feuille, que si l'on partait toujours du même.

On voit dans la *tabelle* suivante l'ordre dans lequel doit s'opérer ce transport.

Si l'abscisse X étant	L'ordonnée Y est	L'origine des coordonnées est à l'angle
$<$ ou $>$ 0,25 mètre.	$<$ ou $>$ 0,4 mètre...	Primitif
		opposé horizontalement.
		opposé verticalement.
		opposé diagonalement.

Quoique rien ne soit plus aisé que d'entendre ce que nous venons d'expliquer, nous allons cependant ajouter encore un exemple qui comprendra tous les cas de cette tabelle.

On a trouvé la longitude et la latitude de la principale tour de Berne, telles qu'elles suivent :

$$\left.\begin{array}{l}\text{longitude orientale} = 5{,}6783 \\ \text{latitude boréale...} = 52{,}1642\end{array}\right\} \text{grades.}$$

En opérant comme dans l'exemple précédent, on trouve, avec ces données, les coordonnées ξ et ζ de la projection de cette tour à l'échelle $\frac{1}{1}$ ou de grandeur naturelle :

$$\xi = 228698{,}9 \text{ et } \zeta = 388581{,}9 \text{ mètres.}$$

En réduisant ces coordonnées aux différentes échelles 7, 5, 4, 3, on a, pour chacune d'elles, les coordonnées X, Y de ce point,

rapportées à l'angle de la feuille sur laquelle il tombe, le plus voisin du centre de la projection, lequel est à l'angle inférieur de gauche, ainsi qu'on le voit dans la tabelle suivante :

NUMÉROS des Échelles.	ABSCISSES X	ORDONNÉES Y	NUMÉROS des Feuilles.
7	0,1440	0,3429	$\frac{3}{3}$
5	0,0740	0,5716	$\frac{10}{10}$
4	0,4349	0,2291	$\frac{25}{23}$
3	0,3699	0,4582	$\frac{49}{46}$

On appliquera, sans peine, les remarques précédentes aux différens cas de cette tabelle.

CHAPITRE IV.

Autre manière de construire les différens objets d'une Carte, au moyen des différences de Longitude et de Latitude.

La méthode exposée dans le chapitre précédent, pour construire les différens objets d'une carte, étant très-rigoureuse, on pourrait se dispenser d'en indiquer une autre ; cependant, comme celle dont il va être question, est toujours suffisamment exacte dans la pratique, et peut paraître plus simple que la précédente, à quelques personnes

peu habituées aux calculs, c'est en leur faveur que nous allons ajouter ce qui suit.

Cette méthode suppose que les méridiens et les parallèles à l'équateur sont tracés, par la procédé rigoureux, sur chaque feuille d'une carte, de décigrade en décigrade, tant de longitude que de latitude. Chaque point d'intersection de ces courbes est pris alors pour l'origine des coordonnées, et les portions de ces courbes, comprises entre deux méridiens et deux parallèles voisins, sont les axes. Ces coordonnées sont les différences de longitude et de latitude exprimées en mètres, du point à construire avec celui qui est pris pour origine, lequel doit naturellement en être le plus rapproché, à moins qu'on ne veuille, dans la construction, éviter les coordonnées négatives. C'est pour faciliter l'emploi de cette méthode que l'on a dressé les Tables XI, XII, XIII, XIV et XV, dont on va expliquer la construction et l'usage.

La Table XI donne la valeur en mètres d'un arc de parallèle d'un grade correspondant à une latitude donnée; elle a été construite à l'aide de cette formule,

$$\text{grade de longitude} = \left(\frac{\varpi}{200}\right)x = \left(\frac{\varpi}{200}\right)\mathcal{N}\cos.\varphi = \left(\frac{\varpi}{200}\right)\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right)a\cos.\varphi.$$

Le logarithme de $\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right)$ étant connu par ce qui précède, on a pour celui du facteur x,

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right) + \mathcal{L}a\cos.\varphi,$$

ou en mettant pour $\mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{N}}{a}\right)$ sa valeur (*voy.* le chap. I.er de cette seconde partie),

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}a\cos.\varphi + 0{,}0012983392\sin.2(50+\Phi)$$
$$-0{,}0000009703\sin.4(50+\Phi) + 0{,}000000000967\sin.6(50+\Phi) - \&c.;$$

on a d'ailleurs, $\mathcal{L}a = 6.80452861$ et $\mathcal{L}\left(\frac{\varpi}{200}\right) = 8.19611987$.

La Table XII donne la valeur en mètres d'un arc de méridien d'un grade correspondant à une latitude donnée; elle a été calculée sur la formule,

$$\sigma = 100000 - 448{,}4076 \cos.(2\varphi + 1) + 0{,}8377 \cos. 2(2\varphi + 1) - 0{,}015 \cos. 3(2\varphi + 1) + \&c.,$$

qui dérive de celle qui a été trouvée, chapitre IV de la première partie, pour l'expression de l'arc σ, en y faisant Φ égal à un grade.

La Table XIII est l'inverse de la Table III, dont elle a été tirée par voie d'interpolation.

La Table XIV fait connaître, pour chaque latitude proposée, la valeur de tang. α, exprimée en grades, qui correspond à un grade de longitude. Elle a été calculée, en faisant usage de la Table V, qui donne les différentes valeurs de ϖ pour ω égal à un grade, ou

$$\varpi = 1^{\circ} \left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right) \cos.(50 + \Phi);$$

on a fait la différence des nombres de cette Table, et de ceux qui répondent au sinus de la latitude en parties du rayon, ou à

$$1^{\circ} \sin.(50 + \Phi),$$

ainsi que l'indique la formule,

$$\text{tang.}\alpha = \varpi - \omega \sin.(50 + \Phi) = \omega\left[\left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right)\cos.(50 + \Phi) - \sin.(50 + \Phi)\right],$$

dans le cas de $\omega = 1$ grade.

En multipliant ainsi les nombres de cette Table par la valeur de ω, on a les valeurs correspondantes de tang. α en grades.

Pour avoir l'angle α lui-même, il faut retrancher de la valeur de sa tangente l'excès de la tangente sur l'arc qui se trouve dans la Table XV, avec la tangente en grades pour argument.

Ces

Ces deux Tables XIV et XV sont donc uniquement destinées à évaluer l'angle α.

Les Tables XI et XII sont suffisantes pour construire les objets d'une carte, par les différences de longitude et de latitude, dans certaines limites dépendantes de la longitude et de la latitude des objets à construire, et de la grandeur de l'échelle que l'on emploie : au-delà de ces limites, il devient indispensable de faire usage des Tables suivantes XIII, XIV et XV. On comprendra mieux ceci par des exemples.

Supposons que l'on veuille construire par cette méthode *le Chasseral*, dont on a calculé les coordonnées rigoureuses dans le chapitre précédent.

Le méridien de la projection qui approche le plus du méridien du *Chasseral*, est celui qui a 5,2 grades de longitude. Le parallèle de la projection le plus voisin du parallèle du *Chasseral*, est celui dont la latitude est de 52,4 grades. Mais attendu qu'à l'échelle $\frac{1}{50000}$, le point d'intersection de ces deux courbes tombe sur une autre feuille que *le Chasseral*, au lieu du parallèle précédent, nous prendrons celui qui a 52,3 grades de latitude. Le point d'intersection de ce parallèle et du méridien dont nous venons de parler, sera l'origine des coordonnées, dont les axes seront les arcs de méridien et de parallèle compris entre les parallèles et les méridiens voisins.

Pour avoir ces coordonnées, on observera d'abord que l'on a, entre cette origine et le point à construire, pour différence de

$$\left.\begin{array}{ll} \text{longitude} & 0{,}04271 \\ \text{latitude} & 0{,}07055 \end{array}\right\} \text{grade.}$$

Entrant ensuite dans la Table XI, avec la latitude 52,3 grades pour argument, on trouvera pour la valeur en mètres du grade de longitude correspondant 6832 1,4 ; avec le même argument, l'on

trouvera dans la Table XII, pour la valeur en mètres du grade de latitude, $100038{,}6 = d\sigma$; faisant ensuite ces proportions,

$$1 : 68321{,}4 \;::\; 0{,}04271 : p = 2838{,}01,$$
$$1 : 100038{,}6 :: 0{,}07055 : q = 7057{,}72;$$

p et q seront les coordonnées cherchées du *Chasseral* à l'échelle $\frac{1}{1}$, ayant pour axes respectifs le parallèle et le méridien passant par l'origine. Divisant ces valeurs de p et q par 100000, après les avoir doublées, on aura au cinquante millième,

$$p = 0{,}05676 \ldots \quad q = 0{,}14116 \text{ mètre.}$$

Au moyen de ces coordonnées, il est facile de placer le lieu du signal du *Chasseral* sur la feuille à laquelle il appartient.

On trouvera toujours, de cette manière, une valeur exacte de p, parce que, dans toute l'étendue d'un même parallèle, les arcs d'un égal nombre de grades de longitude sont égaux entre eux sur le plan de projection comme sur la surface du sphéroïde ; mais il n'en est pas ainsi de la valeur de q.

En effet, la Table XII ne donne que les arcs d'un grade qui conviennent au méridien moyen, lesquels sont, pour ce méridien, égaux à leurs correspondans sur le sphéroïde. Dans tout autre méridien, l'arc correspondant à un grade de latitude, est plus grand à mesure que le méridien est plus éloigné du méridien moyen, et que l'origine de l'arc est plus distante du parallèle moyen.

Pour évaluer rigoureusement un arc d'un pareil méridien compris entre deux parallèles donnés, il faudrait pouvoir obtenir la rectification de sa courbe de projection d'une manière assez simple pour la pratique ; mais c'est ce qui ne paraît pas possible, comme on l'a remarqué dans la première partie. Heureusement, comme on n'a jamais dans la pratique que de petits arcs à considérer, la formule élémentaire, qui est très-simple, peut les donner avec une précision suffisante.

Dans le cas que nous venons de considérer, à cause du peu de distance du *Chasseral*, soit du méridien, soit du parallèle moyens, la valeur de q que nous avons obtenue par le calcul précédent, est à très-peu-près rigoureuse, même à l'échelle numéro 1, qui est la plus grande de toutes.

Nous allons donc choisir pour exemple un autre lieu éloigné des méridien et parallèle moyens relativement auquel la correction pour q sera sensible.

Soit le point de la ville de *Moscow*, qui a pour

$$\left.\begin{array}{l}\text{longitude orientale} = 39{,}1250\\ \text{latitude boréale} \quad = 61{,}9583\end{array}\right\} \text{grades.}$$

Le méridien de la projection qui approche le plus de *Moscow*, est celui dont la longitude est de 39,1 grades ; et le parallèle de la projection qui en est le plus voisin, est celui qui a 62,0 grades de latitude.

L'intersection de ce méridien et de ce parallèle étant l'origine des coordonnées p, q, on a entre cette origine et le point à construire, pour différence de

$$\left.\begin{array}{ll}\text{longitude} & 0{,}0250\\ \text{latitude} & 0{,}0417\end{array}\right\} \text{grade.}$$

Entrant dans la Table XI avec la latitude 62,0 grades pour argument, on y trouve 56407,4 pour la valeur en mètres du grade de longitude correspondant à cette latitude ; faisant ensuite cette proportion,

$$1 : 56407{,}4 :: 0{,}0250 : p = 1410{,}2 \text{ mètres},$$

on a la valeur de p exacte.

Pour avoir celle de q, on entrera d'abord dans la Table XIII avec le même argument, et l'on trouvera 100171,0 mètres pour valeur du grade de latitude, tant sur le sphéroïde terrestre que sur le méridien moyen de la projection.

Il s'agit de déterminer la valeur du grade sur la projection du méridien de *Moscow*, à la même latitude. Pour cet effet, entrant dans la Table XIV avec la latitude 62 grades pour argument, on y trouvera le nombre 0,134403. C'est en fraction de grade la valeur de tang. α correspondante à $\omega = 1°$; multipliant ce nombre par la valeur actuelle de $\omega = 39,125$, il viendra 5,25852; c'est la valeur de tangente α exprimée en grades : il ne reste plus, pour avoir α lui-même, que de prendre dans la Table XV, avec ce nombre pour argument, l'excès de la tangente sur l'arc. Dans le cas présent, on trouve 0,01191 grade; cet angle étant retranché du précédent, il reste pour valeur de α,

$$\alpha = 5,24661 \text{ grades.}$$

Il n'y a plus qu'à diviser la valeur du grade sur le méridien moyen par le cosinus de cet angle, pour avoir la valeur du grade correspondant sur le méridien de *Moscow*; on trouve alors 100512,1 mètres, quantité qui est plus grande de 341,1 mètres que le nombre ci-dessus.

Faisant ensuite la proportion

$$1 : 100512,1 :: 0,0417 : q = 4191,35 \text{ mètres;}$$

le quatrième terme est la valeur de q exacte.

Après avoir réduit les coordonnées p et q à l'échelle convenable, il sera facile de placer le lieu qu'elles déterminent sur la feuille à laquelle il appartient : mais il faut faire attention que la latitude du point à construire étant moindre que celle du parallèle le plus voisin, l'abscisse q est négative, et doit être portée du nord au sud; on la rendrait positive, et alors elle devrait être portée du sud au nord, en partant du point d'intersection du même méridien avec le parallèle qui a 51,9 grades de latitude; et l'on aurait sa valeur, en prenant le complément de la précédente, à 100051,21, valeur du décigrade de latitude; savoir, $q = 5859,86$ mètres.

On voit par ce qui précède, qu'aux longitude et latitude mentionnées, l'excès de l'angle formé par l'intersection du méridien et du parallèle sur l'angle droit, est de 5,25 grades, et qu'un arc de méridien d'un décigrade surpasse de 34,1 mètres son correspondant sur le méridien moyen : l'omission de cette quantité ne pourrait produire dans cette manière de construire, à l'échelle numéro 5, tout au plus qu'une erreur de 0,00034 mètre ou environ un tiers de millimètre. Ainsi, dans l'hypothèse où l'on n'aspirerait pas à une précision plus grande dans la construction, l'emploi des Tables XI et XII pourrait suffire à cette échelle jusqu'à cette distance du centre de la carte.

Il serait sans doute utile de connaître, à une échelle proposée, les limites dans lesquelles on peut considérer, relativement à cette manière de construire, les arcs d'un demi-décigrade comme égaux à leurs correspondans sur le méridien moyen, sans s'exposer à une erreur plus grave que de deux décimillimètres ; c'est ce qui nous engage à résoudre ce problème. Pour cet effet, nous regarderons la latitude comme connue, et nous chercherons la longitude. Soit donc e l'échelle proposée, σ un arc d'un grade du méridien moyen, exprimé en mètres ; t l'erreur exprimée de même.

On déterminera d'abord α à l'aide de cette formule,

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{t}{e\sigma + t};$$

on aura ensuite ω pour la suivante,

$$\omega = \frac{\text{tang. } \alpha}{\left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right) \cos.(50 + \Phi) - \sin.(50 + \Phi)};$$

qui devient très-simple, en faisant son dénominateur égal à w, dont on trouve la valeur dans la Table XIV ; de sorte que

$$\omega = \frac{\text{tang. } \alpha}{w};$$

comme on peut faire en sorte que l'abscisse q ne surpasse jamais dans cette méthode un arc d'un demi-décigrade, la valeur de t correspondante à celle de σ est de 0,004 mètre.

Supposons, par exemple, la latitude $=$ 70 grades et l'échelle $\frac{1}{50000}$; avec cette latitude pour argument, on trouve, Tables XII et XIV,

$$\sigma = 100269{,}0 \text{ mètres} \ldots w = 0{,}229 :$$

donc $e\sigma + t = 2{,}00938$ mètres, et l'on a

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{1004{,}69} \ldots \omega = \frac{\text{tang. } \alpha}{0{,}229}.$$

Pour avoir ω en grades, il faut multiplier la seconde formule par l'arc égal au rayon : le calcul fait, on trouve

$$\alpha = 4{,}018 \ldots \omega = 17{,}57 \text{ grades.}$$

La longitude cherchée est donc de 17,57 grades. On trouverait pareillement, à la même échelle, la valeur de ω ou la longitude correspondante à une autre latitude donnée.

Le calcul se ferait de même pour toute autre échelle de la série. Ainsi, par exemple, pour nous borner aux trois échelles 4, 5, 6, qui sont les plus susceptibles d'être employées, il est clair que la question revient à déterminer la longitude du méridien sur lequel l'augmentation de la valeur du grade de latitude est, à une latitude donnée, aux échelles respectives,

	4	...	5	...	6
de	80	...	200	...	400 mètres.

C'est sur ce principe qu'a été construite la Table suivante :

TABLE des Limites en-deçà desquelles on peut se dispenser d'avoir égard aux accroissemens des Arcs des Courbes de projection des Méridiens, dans la construction des objets d'une Carte.

LATITUDES.	NUMÉROS DES ÉCHELLES.			LATITUDES.	NUMÉROS DES ÉCHELLES.		
	4	5	6		4	5	6
Grades.	LONGITUDES.			Grades.	LONGITUDES.		
30	11,38	18,00	25,46	50	.....	.....	.....
31	11,98	18,95	26,82	51	229,29	.....	.....
32	12,66	20,02	28,32	52	111,46	181,28	.....
33	13,44	21,25	30,07	53	76,39	120,82	170,97
34	14,24	22,54	31,90	54	57,25	90,58	128,16
35	15,21	24,06	34,04	55	45,78	72,43	102,48
36	16,31	25,79	36,45	56	38,12	60,32	85,35
37	17,57	27,79	39,31	57	32,64	51,65	73,08
38	19,04	30,12	42,61	58	28,34	45,16	63,91
39	20,78	32,87	46,51	59	25,36	40,10	56,74
40	22,87	36,17	51,18	60	22,79	36,05	51,00
41	25,42	40,21	56,89	61	20,69	32,72	46,30
42	28,61	45,26	64,04	62	18,93	29,95	42,37
43	32,72	51,74	73,21	63	17,45	27,59	39,04
44	38,18	60,39	85,44	64	16,17	25,57	36,18
45	45,83	72,49	102,56	65	15,05	23,81	33,68
46	57,30	90,63	128,23	66	14,07	22,26	31,50
47	76,42	120,87	171,01	67	13,21	20,89	29,56
48	111,46	181,32	.....	68	12,44	19,67	27,83
49	229,30	.....	.....	69	11,74	18,57	26,27
50	.....	.....	.....	70	11,11	17,57	24,86

On voit, par exemple, dans cette Table, que si l'on a à construire à l'échelle numéro 5 un point dont la longitude et la latitude sont moindres, la première que 60 et la seconde que 36 grades,

l'erreur à laquelle on s'exposera, en considérant l'accroissement de son méridien comme nul en ce point sur l'étendue d'un demi-décigrade, sera au-dessous de deux décimillimètres.

CHAPITRE V.

Application à des cas particuliers, des Problèmes résolus au Chapitre XI de la I.re Partie.

On a résolu analytiquement, au chapitre cité, les problèmes suivans :

Deux droites étant tirées sur le plan de projection, l'une parallèlement au méridien moyen, l'autre parallèlement à la tangente au parallèle moyen; ou, ce qui est la même chose, deux droites étant menées parallèlement aux axes des coordonnées de la projection, et connaissant les distances respectives de ces droites à ces axes, trouver,

1.° La longitude et la latitude de leur commune section;

2.° Déterminer les points d'intersection qui résultent de la rencontre des parallèles par ces droites;

3.° Déterminer les points d'intersection des méridiens par ces mêmes droites.

Il s'agit ici de résoudre les mêmes problèmes numériquement.

La Table XIII, dont nous n'avons pas encore parlé, a pour but de faciliter cette résolution. Cette table est l'inverse de la Table III, qui a servi à la calculer.

Les nombres de ces deux tables satisfont également à la première équation du chap. I.er de cette seconde partie. En y entrant avec σ, ou la distance en mètres d'un parallèle quelconque au parallèle moyen, pour argument, elle fait connaître la latitude de ce parallèle.

Cela

Cela posé, imaginons que l'une des droites est distante de 520000 mètres de l'axe des abscisses, et que l'autre droite est distante de 250000 mètres de l'axe des ordonnées, et plus au nord que cet axe. Il est clair que le point qui est commun à ces deux droites a pour coordonnées rectangulaires,

$$\xi = 250000 \ldots \zeta = 520000 \text{ mètres.}$$

Retranchant ξ de T ou de $6385233,2$, il reste $\eta = 6135233,2$ mètres : donc, attendu que tang. $\varpi = \frac{\zeta}{\eta}$, on trouve la valeur de l'angle $\varpi = 5,38289$ grades.

On a ensuite $R = \frac{\zeta}{\sin. \varpi} = \frac{\eta}{\cos. \varpi} = 6157230,1$ mètres, et cette valeur de R satisfait à l'équation $R^2 = \eta^2 + \zeta^2$, comme cela doit être. Retranchant R de T, il vient $\sigma = 228003,1$ mètres.

Avec cette quantité pour argument, la Table XIII donne

$$(50 + \Phi) = 52,2796 \text{ grades :}$$

c'est la latitude du point d'intersection des deux droites.

Avec cette latitude pour argument, la Table I.re donne

$$\theta = 52,2796 - 0,09491 = 52,18474 \text{ grades.}$$

On a ainsi toutes les quantités qui entrent dans la formule

$$\omega = \left(\frac{R}{a}\right) \frac{\varpi}{\cos. \theta},$$

d'où l'on tire $\omega = 7,6175$ grades : c'est la longitude du point d'intersection des deux droites.

Au cinquante millième, ou à l'échelle numéro 5, les coordonnées ci-dessus ont pour valeurs,

$$\xi = 5,0 \text{ et } \zeta = 10,4 \text{ mètres.}$$

Les nombres qui correspondent à ces valeurs dans la Table VIII, sont respectivement 11 et 14, ce qui fait connaître que le point

d'intersection des deux droites est le sommet de l'angle de la feuille $^{14}_{11}\square$ le plus voisin du centre de la projection.

On trouverait semblablement par la même méthode, et à une autre échelle donnée, la longitude et la latitude de tous les sommets d'angles de chaque feuille d'une carte, puisque l'échelle et les numéros de la feuille étant connus, on a les distances en mètres de ses côtés verticaux et horizontaux aux axes des coordonnées, ou les valeurs de ξ, ζ.

Passons au second problème, et proposons-nous de déterminer les points d'intersection des deux mêmes droites par la projection du parallèle de 52,3 grades de latitude.

Avec cette latitude pour argument, la Table III donne la valeur de $\sigma = 230035{,}3$ mètres; laquelle étant soustraite de celle de $T = 6385233{,}2$, il reste $R = 6155197{,}9$ mètres.

Avec le même argument, on trouve dans la Table I.re l'angle $\theta = 52{,}3 - 0{,}0949 = 52{,}2051$ grades. Cet angle va bientôt nous servir. Connaissant R et ζ, l'équation $\zeta = R \sin. \varpi$ donne $\varpi = 5{,}38467$ grades; on a ensuite $n = \zeta \operatorname{cotang}. \varpi = 6133098{,}8$ mètres, et cette quantité étant retranchée de la valeur de T, il reste $\xi = 252134{,}4$ mètres. Ainsi les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, et éloignée de cet axe de 520000 mètres par le parallèle de 52,3 de latitude boréale, sont

$$\xi = 252134{,}4 \text{ et } \zeta = 520000 \text{ mètres};$$

à l'échelle numéro 5, ces coordonnées se réduisent aux suivantes:

$$\xi = 5{,}04269 \text{ et } \zeta = 10{,}4 \text{ mètres};$$

et leur origine étant transportée à l'angle de la feuille $^{14}_{11}\square$ le plus voisin du centre de la projection, elles deviennent

$$\xi = 0{,}04269 \text{ et } \zeta = 0 \text{ mètre.}$$

Le côté vertical gauche de cette feuille, ou le plus voisin de l'axe des abscisses coïncidant avec la droite en question, est coupé par le parallèle proposé à la distance 0,04269 mètre de son extrémité inférieure.

On trouve enfin pour la longitude du point d'intersection

$$\omega = \left(\frac{R}{a}\right)\frac{\varpi}{\cos.\theta} = 7{,}6202 \text{ grades.}$$

Voilà pour l'une des droites; voyons ce qui est relatif à l'autre. Connaissant R et ξ, ou n, on tire de l'équation $n = R \cos.\varpi$ cette valeur de $\varpi = 5{,}12898$ grades; on a ensuite $\zeta = n$ tang. $\varpi =$ 4953623,8 mètres.

Ainsi les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, et éloignée de cet axe de 250000 mètres par le parallèle dont la latitude boréale est de 52,3 grades, sont

$$\xi = 250000 \text{ et } \zeta = 4953623{,}8 \text{ mètres.}$$

A l'échelle numéro 5, ces coordonnées se réduisent à celles-ci :

$$\xi = 5\ldots \text{ et } \zeta = 9{,}90725 \text{ mètres;}$$

et en transportant leur origine à l'angle de la feuille $\frac{13}{11}\square$ le plus rapproché du centre de la projection, on a

$$\xi = 0\ldots \text{ et } \zeta = 0{,}30725 \text{ mètres.}$$

Le côté horizontal inférieur de cette feuille, ou le plus voisin de l'axe des ordonnées, coïncidant avec la droite proposée, est coupé par ledit parallèle de 52,3 grades de latitude, à la distance de 0,30725 mètre de son extrémité gauche.

Enfin le calcul donne pour la longitude du point d'intersection,

$$\omega = \left(\frac{R}{a}\right)\frac{\varpi}{\cos.\theta} = 7{,}2583 \text{ grades.}$$

On voit bien que l'on trouverait, par la même méthode, les points d'intersection des côtés d'une feuille quelconque dont les numéros

sont donnés, ainsi que l'échelle de la projection, par un parallèle proposé.

Le troisième problème a pour objet de déterminer le point d'intersection de deux droites parallèles aux axes des coordonnées, par la courbe de projection d'un méridien donné. Ce problème n'est point, comme les précédens, susceptible d'une solution directe, ainsi que nous l'avons déjà observé; mais nous y avons suppléé par une méthode indirecte qui semble ne laisser rien à desirer. Cette méthode suppose que l'on a formé préalablement un tableau des coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles calculés de décigrade en décigrade, tant pour la longitude que pour la latitude.

Voici un fragment d'un pareil tableau, suffisant pour notre objet.

Coordonnées rectangulaires de quelques Points d'intersection des Méridiens et Parallèles, calculés en mètres, et pour le cas de la nature, ou à l'échelle $\frac{1}{1}$.

Latitude.	Abscisses.	Ordonnées.	Abscisses.	Ordonnées.	Abscisses.	Ordonnées.	Abscisses.	Ordonnées.	Abscisses.	Ordonnées.
Longitude.	6,9		7,0		7,1		7,2		7,3	
52,7	287967	467776	288486	474542	289019	481308	289556	488072	290101	494836
52,8	297939	466978	298457	473732	298989	480486	299525	487329	300069	493991
52,9	307912	466179	308428	472921	308960	479663	309495	480405	310038	493146
53,0	317885	465378	318400	472109	318932	478839	319465	485569	320007	492299

On voit, par exemple, d'un coup-d'œil dans cette table, que le point d'intersection du parallèle qui a 52,8 grades de latitude par le méridien qui a 7,1 grades de longitude, tombe plus près qu'aucun autre du point d'intersection de la droite qui est distante de 300000 mètres de l'axe des abscisses et parallèle à cet axe, par le

même méridien, et que le point d'intersection du parallèle qui a 52,9 grades de latitude par le méridien qui a 7,1 grades de longitude, est plus rapproché qu'aucun autre du point d'intersection de la droite qui est distante de 480000 mètres de l'axe des ordonnées et parallèle à cet axe, par le même méridien.

La même table donne les coordonnées de ces points ainsi que de leurs voisins; coordonnées à l'aide desquelles il est facile de calculer celles des points d'intersection des deux droites, dont les coordonnées sont :

$$\acute{X} = 0 \quad \ldots \quad \acute{Y} = 480000 \text{ mètres},$$
$$\acute{Y} = 0 \quad \ldots \quad \acute{X} = 300000 \text{ mètres},$$

par le méridien dont la longitude est de 7,1 grades, en faisant usage des formules du chapitre XI de la première partie.

Nous aurons ainsi,

$X - m = 289019$	$9970 = m$	$Y - p = 481308$	$822 = -p$
$X = 298989$		$Y = 480486$	
$X + n = 308960$	$9971 = n$	$Y + q = 479663$	$823 = -q$
d'où $m + n = 19941$		d'où $-(p + q) = 1645$	
$X + x = 300000 = \acute{X}$		$Y + y = 480000 = \acute{Y}$	
$x = 1011$		$-y = 486$	
$(x + m) = 10981$		$-(y + p) = 1308$	
$-(x - n) = 8960$		$(y - q) = 337$	

Il aurait été plus naturel de faire, dans cet exemple,

$$Y - p = 478839 \ \ldots \ Y = 479663 \ \ldots \ Y + q = 480486,$$

attendu que le nombre 480000 approche davantage de 479663 que de 480486; et si nous avons fait autrement, c'est afin de pouvoir calculer les deux cas à l'aide des coordonnées des mêmes points. Au reste, cela est encore assez indifférent.

La substitution de ces différentes quantités dans les formules citées, donne les valeurs suivantes des coordonnées $\widehat{Y}$, $\widehat{X}$ que l'on cherche.

$$\widehat{Y} = 480486 - 45{,}9 - 37{,}4 = 480403 \text{ mètres},$$
$$\widehat{X} = 298989 + 4686{,}0 + 1208{,}9 = 304004 \text{ mètres}.$$

On aurait pu arriver aux mêmes résultats d'une manière plus simple. En effet, puisque les quantités m et n ne diffèrent entre elles que d'une unité métrique, ainsi que les quantités p et q, différence qui n'est ici d'aucune conséquence, en les supposant égales deux à deux, c'est-à-dire $m = n$ et $p = q$, on eût trouvé, au moyen des formules abrégées qui résultent de cette supposition,

$$\widehat{Y} = 480486 - 83{,}3 = 480403 \text{ mètres},$$
$$\widehat{X} = 298489 + 5894{,}9 = 304884 \text{ mètres},$$

quantités qui sont les mêmes que celles qui précèdent. Nous allons encore les retrouver par le calcul suivant :

Puisque $p = m$ tang. $\mathcal{C}$, et que d'ailleurs on a

$$\mathcal{C} = \omega \sin.(\varphi + \Phi) + \tfrac{1}{3}\alpha \text{ tang.}^2\alpha - \tfrac{16}{135}\alpha \text{ tang.}^4\alpha + \&c.$$

Si l'on évalue l'angle $\mathcal{C}$ à l'aide de cette formule, en observant qu'à cause que α est, dans cet exemple, un très-petit angle qui ne surpasse guère 0,2 grade, on peut s'en tenir au premier terme du second membre. On aura, en se rappelant d'ailleurs que $\omega = 7{,}1$ et $(\varphi + \Phi) = 52{,}8$ grades,

$$-\mathcal{C} = 5{,}2364 \text{ grades};$$

et par ce moyen, l'on trouve, pour valeurs de $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$, absolument les mêmes nombres que les précédens.

Ainsi les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, et distante de cet axe de 300000 mètres, par le méridien qui a 7,1 de latitude, sont

$$\dot{X} = \xi = 300000 \text{ et } \widehat{Y} = \zeta = 480403 \text{ mètres}.$$

A l'échelle numéro 5, ces coordonnées se réduisent aux suivantes :

$$\xi = 6 \quad \text{et} \quad \zeta = 9{,}60806 \text{ mètres};$$

en transportant leur origine à l'angle de la feuille $\frac{13}{13}$ le plus rapproché du centre de la projection, elles sont

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \zeta = 0{,}00806 \text{ mètre.}$$

Le côté horizontal inférieur de la feuille ou le plus voisin de l'axe des ordonnées, coïncidant avec la droite en question, est coupé par le méridien proposé à la distance 0,00806 mètre de son extrémité gauche.

Calculons la latitude du point d'intersection. Retranchant ξ de $T = 6385233{,}2$, il reste $n = 6085233{,}2$ mètres, et l'équation tang. $\varpi = \frac{\zeta}{n}$ donne $\varpi = 5{,}01542$ grades ; moyennant quoi, on a $R = \frac{\zeta}{\text{sin. } \varpi} = 6104172{,}9$ et $\sigma = T - R = 281060{,}3$ mètres. Avec cette quantité pour argument, la Table XIII donne $(\varphi + \Phi) = 52{,}81009$ grades ; c'est la latitude cherchée.

Pareillement, les coordonnées du point d'intersection d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, et distante de cet axe de 480000 mètres, par le même méridien dont la longitude est de 7,1 grades, sont

$$\hat{X} = \xi = 304884 \quad \text{et} \quad \dot{Y} = \zeta = 480000 \text{ mètres.}$$

En réduisant ces coordonnées à l'échelle numéro 5, on a

$$\xi = 6{,}09768 \quad \text{et} \quad \zeta = 9{,}6 \text{ mètres};$$

et leur origine étant transportée à l'angle de la même feuille $\frac{13}{13}$ le plus rapproché du centre de la projection, il vient

$$\xi = 0{,}09768 \quad \text{et} \quad \zeta = 0 \text{ mètre.}$$

Le côté vertical de cette feuille le plus voisin de l'axe des abscisses, se confondant avec la droite en question, est coupé par le même méridien à 0,09768 mètre de distance de son extrémité inférieure.

On trouvera, comme pour l'autre droite, la latitude du point d'intersection. En effet, si l'on retranche ξ de T, il reste $n = 6080349{,}2$ mètres. Mettant cette valeur et celle de ζ dans l'équation tang. $\varpi = \frac{\zeta}{n}$, on aura $\varpi = 5{,}01524$ grades, d'où $R = \frac{\zeta}{\text{sin. } \varpi} = 609927{,}5$ et $T - R = \sigma = 285957{,}7$ mètres. Avec cette valeur de σ pour argument, on prend dans la Table XIII $(\varphi + \Phi) = 52{,}85902$ grades. Telle est la latitude cherchée.

En substituant dans l'équation $\omega = \left(\frac{R}{a}\right) \frac{\varpi}{\text{cos. } \theta}$ les valeurs de R, ϖ, cos. θ, relatives aux deux cas que nous venons d'examiner, on retomberait chaque fois sur la longitude donnée, ou $\omega = 7{,}1$ grades, ce qui sert de vérification aux calculs.

On voit par ce problème, comment on peut trouver les points d'intersection des côtés d'une feuille dont les numéros sont donnés, ainsi que l'échelle de la projection, par un méridien quelconque.

On sentira aisément l'utilité de ces deux derniers problèmes. En effet, ils sont utiles non-seulement lorsque l'échelle étant petite, on a sur chaque feuille d'une carte un nombre de points suffisant pour tracer les courbes des méridiens et des parallèles; car ils servent à donner sur les côtés, des points d'intersection, avec plus de précision que de toute autre manière, ce qui contribue à rendre les raccordemens plus faciles, et plus parfaits; mais aussi ils sont nécessaires, lorsque l'échelle étant grande, on n'a pour tracer ces courbes que peu de points sur chaque feuille, et même quelquefois point du tout, comme cela arrive dans l'exemple précédent, relativement au méridien qui a 7,1 grades de longitude. Les points d'intersection de ce méridien, par les parallèles de 52,8 et 52,9 grades de latitude, tombent à la vérité très-près des bords, mais cependant hors de la feuille $\frac{13}{13}$.

Au

Au surplus, dans les cas où l'échelle serait fort grande, les arcs de parallèles, et à plus forte raison les arcs de méridien, étant sensiblement rectilignes dans le peu d'espace qu'ils occupent sur l'étendue d'une feuille, leurs points d'intersection avec les côtés de la feuille suffiraient pour les retracer.

CHAPITRE VI.

De la figure des Quadrilatères de la Projection, renfermés entre deux Méridiens et deux Parallèles donnés.

NOUS avons observé, au commencement de ce Mémoire, que les angles formés par la rencontre des courbes des méridiens et des parallèles sont d'autant plus altérés, que ces méridiens et ces parallèles s'éloignent plus des moyens; d'où il arrive que les quadrilatères compris entre ces courbes, s'alongent dans le sens de l'une de leurs diagonales, et se rétrécissent dans le sens de l'autre, et par-là diffèrent plus ou moins de leurs correspondans sur le sphéroïde, qui sont tous rectangulaires.

On jugera aisément de la figure d'un quadrilatère quelconque, et jusqu'à quel point elle est altérée, par ses angles, par la longueur et la courbure de ses côtés. Voici la manière d'en faire le calcul.

Prenons pour exemple le quadrilatère dont un des angles a 20 grades de longitude et 30 grades de latitude, ce qui détermine cet angle de position.

Pour avoir la valeur de cet angle, on remarquera qu'il surpasse l'angle droit d'une quantité qu'il s'agit de trouver. Pour cet effet, on entrera dans la Table XIV avec la latitude 30 grades pour argument. Le nombre 0,224125 que l'on y prendra, étant multiplié par la longitude 20 grades, le produit sera 4°,4825 : c'est en grades la

tangente de l'angle α cherché. On aura l'angle lui-même, en diminuant cette tangente d'une quantité égale à son excès sur l'arc qui se prend dans la Table XV avec la tangente pour argument : ici, l'on a à retrancher 0,0074, et il reste $\alpha = 4{,}4751$ grades; à quoi ajoutant l'angle droit, on a 104,4751 grades pour l'angle formé, sur le plan de projection, par le méridien qui a 20 grades de longitude, et le parallèle qui a 30 grades de latitude.

C'est ainsi que l'on a calculé les valeurs de l'angle α pour le méridien qui a 20 grades de longitude, et pour les parallèles, de décigrade en décigrade, depuis 30 jusqu'à 70 grades de latitude. Ces quantités se trouvent rassemblées dans la Table XVI. Voilà pour l'un des angles; les autres se calculent de même.

Deux des côtés du quadrilatère sont des arcs de parallèles égaux par construction à leurs correspondans sur le sphéroïde, et leur courbure est par conséquent la même que celle des cercles auxquels ils appartiennent, c'est-à-dire, en raison inverse de leurs rayons.

Dans l'exemple actuel, le rayon du côté circulaire adjacent à l'angle précédent est, pour le cas de la nature ou à l'échelle $\frac{1}{1}$, de 8383494,1 mètres.

La Table IV donne en mètres ces rayons pour tous le parallèles, de décigrade en décigrade, depuis 30 jusqu'à 70 degrés de latitude. La suivante, qui en est extraite, donne, mais de grade en grade seulement, les mêmes rayons exprimés en parties du demi-diamètre de l'équateur pris pour unité.

TABLE des Rayons de courbure des Parallèles, de grade en grade, depuis 30 jusqu'à 70 grades de latitude, en prenant pour unité le demi-diamètre de l'Équateur.

Grades.	30	40	50	60
0	1,31475	1,15823	1,00149	0,84454
1	1,29911	1,14256	0,98581	0,82883
2	1,28346	1,12690	0,97013	0,81312
3	1,26782	1,11123	0,95443	0,79741
4	1,25217	1,09556	0,93874	0,78170
5	1,23652	1,07989	0,92304	0,76598
6	1,22086	1,06421	0,90735	0,75027
7	1,20521	1,04854	0,89165	0,73455
8	1,18955	1,03286	0,87595	0,71883
9	1,17389	1,01718	0,86025	0,70310
10	1,15823	1,00149	0,84454	0,68738

Les arcs de méridien qui forment les deux autres côtés du quadrilatère appartiennent à des courbes transcendantes, dont la rectification, ainsi que nous l'avons remarqué, serait trop compliquée pour la pratique : mais comme il ne s'agit ici que de petits arcs, on en trouve aisément le rapport avec leurs correspondans sur le méridien moyen, en multipliant ces derniers par la sécante de l'angle α, conformément à la formule

$$dM = \frac{d\sigma}{\cos.\,\alpha}.$$

On évaluerait aussi, comme nous ferons plus bas, des arcs de méridien d'une étendue quelconque, en sommant numériquement tous les dM calculés par la formule précédente ; ce qui tiendrait lieu d'une intégration rigoureuse.

Dans l'exemple qui nous occupe, on a, Table XII, pour l'arc d'un grade à la latitude de 30 grades, tant sur le sphéroïde que sur

le méridien moyen de la projection, $d\sigma = 99741{,}9$: en multipliant ce nombre par la sécante de $4^{\circ},4751 = \alpha$, on trouve $dM = 99988{,}8$ mètres. C'est un des côtés du quadrilatère, savoir, celui qui est adjacent à l'angle donné de position, en supposant le quadrilatère d'un grade dans le sens des méridiens; en le supposant d'un décigrade, ce serait le dixième. On trouverait de même l'autre côté. J'observerai seulement qu'il eût été plus exact de prendre ici pour valeur de σ celle qui répond à 30,5, en supposant le côté d'un grade en latitude.

C'est de cette manière que l'on a calculé la Table XVII, qui donne, en mètres, la valeur du grade de latitude correspondant à chaque décigrade de latitude du méridien développé qui a 20 grades de longitude.

La comparaison des nombres de cette Table avec leurs correspondans de la Table XII, met en évidence les accroissemens des parties de ce méridien. Voici un tableau de ces accroissemens relatifs à chaque grade, depuis 30 jusqu'à 70 de latitude.

TABLEAU des Accroissemens, exprimés en mètres, des Grades de latitude à la longitude de 20 grades.

Grades.	30	40	50	60
0	246,9	61,2	0,0	61,5
1	222,8	49,7	0,6	74,8
2	200,2	39,4	2,4	89,4
3	178,6	30,2	5,5	105,1
4	158,2	22,2	9,8	122,4
5	139,0	15,2	15,3	141,4
6	122,2	9,7	21,9	162,0
7	104,0	5,4	29,9	183,4
8	88,4	2,4	39,1	206,6
9	74,1	0,6	49,6	231,9
10	61,2	0,0	61,5	259,1

Pour se faire une idée de la courbure d'un côté, il s'agit de connaître celle du méridien dont il fait partie vers son milieu, ou même à l'une de ses extrémités, ce qui est moins exact, mais suffisant pour notre objet. On a donc besoin de savoir calculer la valeur du rayon de courbure d'un méridien dans un point donné, et c'est pourquoi nous allons expliquer la manière de faire ce calcul, en y employant, pour plus de facilité, plusieurs des Tables de cet ouvrage.

On n'aura pas de peine à s'assurer que l'expression de ϱ du chapitre VIII peut se mettre sous cette forme plus simple,

$$\frac{a}{\varrho} = \left(\frac{a}{R}\right) \sin.^3 \alpha - \left(\frac{a}{\mathscr{R}}\right) \omega \cos.^3 \alpha \cos. (\varphi + \Phi) ;$$

mais on a

$$\frac{a}{\mathscr{R}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{\mathscr{N}}\right)^3 .$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient

$$\frac{a}{\varrho} = \left(\frac{a}{R}\right) \sin.^3 \alpha - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{a}{\mathscr{N}}\right)^3 \omega \cos.^3 \alpha \cos. (\varphi + \Phi).$$

Les Tables II et III donnent les logarithmes de $\left(\frac{a}{\mathscr{N}}\right)$ et de $\left(\frac{a}{R}\right)$, ce qui facilite considérablement l'évaluation de cette formule.

On ne voit pas d'abord quels signes on doit donner à sin. α et cos. α. Pour lever ce doute, il faut recourir à l'expression de tang. α que l'on peut mettre sous cette forme,

$$\text{tang. } \alpha = (\sigma - t) \frac{\omega}{R} \sin. (\varphi + \Phi),$$

t étant une ligne telle, que $T - t = a$ cotang. $(\varphi + \Phi) \left[\frac{1 + c^2}{1 + c^2 \cos. 2(\varphi + \Phi)}\right]^{\frac{1}{2}}$; ce qui fait voir que α a toujours le même signe que le facteur $(\sigma - t)$, lequel est positif quand Φ est négatif, et *vice versâ*; en sorte que α est positif lorsque la latitude est moindre que 50 grades, et négatif lorsqu'elle est plus grande : cos. α est toujours positif.

Dans notre exemple, on trouve $\left(\frac{a}{R}\right)\sin.^3\alpha = +0{,}0002635$ $\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{a}{\mathcal{N}}\right)^3\omega\cos.^3\alpha\cos.(\varphi+\Phi) = -0{,}279001$; partant, $\frac{a}{\varrho} = -0{,}278737$ et $\varrho = -3{,}58764$.

Le calcul se ferait de même pour tout autre point, et c'est ainsi que nous avons calculé, de grade en grade, la table suivante des rayons de courbure du méridien qui a 20 grades de longitude.

TABLE des Rayons de courbure du Méridien qui a 20 grades de longitude, le demi-diamètre de l'Équateur étant pris pour unité.

Grades.	30	40	50	60
0	3,58764	3,93096	4,49482	5,42329
1	3,61435	3,97586	4,56784	5,54616
2	3,64263	4,02295	4,64462	5,67607
3	3,67249	4,07246	4,72527	5,81385
4	3,70401	4,12432	4,81012	5,95915
5	3,73719	4,17884	4,89941	6,11385
6	3,77216	4,23605	4,99343	6,27790
7	3,80890	4,29609	5,09248	6,45104
8	3,84759	4,35912	5,19688	6,63808
9	3,88821	4,42531	5,31925	6,83592
10	3,93096	4,49482	5,42329	7,04712

Quant aux autres méridiens compris entre le méridien moyen et celui dont la longitude est de 20 grades, à la distance d'un grade l'un de l'autre, nous nous sommes contentés d'en calculer les rayons de courbure en trois points seulement pour chacun, savoir, aux points où ils sont coupés par les parallèles de 30, 50 et 70 grades de latitude. La table suivante contient les résultats de ces calculs.

TABLE des Rayons de courbure des Méridiens, depuis zéro jusqu'à 20 grades de longitude, aux points où ils sont coupés par les Parallèles de 30, 50, 70 grades de latitude, en prenant pour unité le demi-diamètre de l'Équateur.

Latitude.	30		50		70	
Grades.	LONGITUDE.					
	0	10	0	10	0	10
0	∞	7,13038	∞	8,98965	∞	14,05245
1	71,15602	6,48580	89,89654	8,17241	140,39023	12,77743
2	35,58000	5,94760	44,94827	7,49137	70,19515	11,71550
3	23,72214	5,48983	29,96551	6,91512	46,80114	10,79225
4	17,79455	5,10079	22,47413	6,42118	35,10126	10,04712
5	14,23832	4,76617	17,97931	5,99310	28,08436	9,37981
6	11,86803	4,47105	14,98275	5,61853	23,40605	8,79639
7	10,17532	4,21095	12,84236	5,28803	20,06461	8,28164
8	8,86438	3,97991	11,23706	4,99425	17,55926	7,82446
9	7,91947	3,77336	9,98850	4,73139	15,61110	7,41515
10	7,13038	3,58764	8,98965	4,49482	14,05245	7,03917

Relativement aux points où les méridiens sont coupés par le parallèle moyen, ou à cause de $\alpha = 0$, l'expression du rayon de courbure se simplifie considérablement, et devient

$$q = \left(\frac{a}{\omega}\right)\left[\frac{b}{a}\right]^2 (1+c^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2},$$

ω étant exprimé en parties du rayon; si on veut qu'il soit exprimé en grades, il faudra multiplier le second membre de cette formule par $\frac{200}{\pi}$, on aura alors

$$q = \frac{200}{\pi}\sqrt{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[1+c^2\right]^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{\omega}\right).$$

En substituant des nombres dans cette formule, elle se change en la suivante :

$$\varrho = 89{,}89654 \left(\frac{a}{\omega}\right),$$

qui fait voir qu'aux points où les méridiens sont coupés par le parallèle moyen, leur courbure est proportionnelle à la longitude; et il est aisé de voir que cela n'a lieu que pour ces points. C'est d'après cette formule que l'on a calculé les deux colonnes de la table précédente, qui répondent à 50 grades de latitude.

En faisant $\varrho = a$, on aurait la formule

$$\omega = \frac{200}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left[1 + c^2\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{2},$$

pour déterminer la longitude du méridien de la projection dont le rayon de courbure au point qui répond au parallèle moyen, est égal au demi-diamètre de l'équateur du sphéroïde.

Pareillement, la supposition de $\varrho = T$ donne cette formule,

$$\omega = \frac{200}{\pi} \left(1 - c^4\right) \sqrt{2},$$

qui fait connaître la longitude du méridien développé, dont le rayon de courbure au point où il est coupé par le parallèle moyen, est égal au rayon de ce parallèle.

Les valeurs de la longitude ou de ω, dans ces deux cas, diffèrent, comme on le voit, peu l'une de l'autre, et de 90 grades.

Si l'on veut enfin se faire une idée de la figure du quadrilatère compris entre le méridien moyen, celui qui a 20 grades de longitude, et les arcs de parallèles de 30 et 70 grades de latitude, il faudra se rappeler que les angles adjacens au méridien moyen sont droits. On verra d'ailleurs par la Table XVI, que l'angle formé par le méridien de 20 grades de longitude et le parallèle de 30 grades de latitude, est de 104,4751 grades; et que l'angle formé par le même méridien et le parallèle de 70 grades de latitude, est de 95,4285 grades.

Pour

Pour ce qui est des côtés, on trouvera par la Table XI, que l'arc du parallèle de 30 grades de latitude, compris entre les deux méridiens, est de 1785776 mètres; et l'arc du parallèle de 70 grades de latitude, compris entre les mêmes méridiens, est de 911496 mètres.

La Table III fait voir que l'arc du méridien moyen compris entre les deux parallèles dont on vient de parler, est de 3999974 mètres.

La Table XVII donne pour la longueur de l'arc du méridien de 20 grades de longitude, intercepté entre les mêmes parallèles, 4003562 mètres.

Enfin, l'aire de ce quadrilatère est égale à 557,8745 myriamètres carrés.

Afin de se faire une idée encore plus juste de la figure de ce quadrilatère, calculons-en les diagonales et quelques autres parties; mais, pour plus de simplicité, plaçons des lettres à ses angles, en sorte que A et C soient aux angles formés par le méridien moyen, celui qui a 20 grades de longitude, et le parallèle de 30 grades de latitude; et B et D aux angles formés par les mêmes méridiens, et le parallèle de 70 grades de latitude. Cela posé.

Avec les latitudes 30 et 70 grades pour argumens, la Table VI donne le logarithme des rayons des parallèles de la projection, relatifs à ces latitudes, savoir :

pour 30°, $\mathcal{L}R = 6923373$ ... pour 70°, $\mathcal{L}R' = 6{,}6417238$.

Avec les mêmes latitudes pour argumens, la Table V donne les angles aux centres des parallèles correspondans, pour ces latitudes, à 20 grades de longitude, et l'on a

pour 30°, $\varpi = 13{,}56230$ ... pour 70°, $\varpi' = 13{,}24072$.

Avec ces données, l'on trouve aisément les cordes,

$$AC = 2R \sin. \tfrac{1}{2}\varpi = 1782399{,}2 \text{ mètres},$$
$$BD = 2R' \sin. \tfrac{1}{2}\varpi' = 909853{,}6 \text{ mètres};$$

et les angles $BAC = 93{,}21885$, $ABD = 106{,}62035$, formés respectivement par ces cordes et le méridien moyen : ce qui suffit pour calculer tout le reste.

Le tableau suivant expose les résultats de ces calculs.

Angles et Lignes du Quadrilatère ABCD.

ANGLES.	GRADES.	ANGLES.	GRADES.
BAM	100,00000	*ABN*	100,00000
CAM	6,78115	*DBN*	6,62035
BAC	93,21885	*ABD*	106,62035
BAD	13,84778	*ABC*	27,71520
CAD	79,37107	*CBD*	78,90515
MCP	104,47512	*NDP*	104,57154
ACM	6,78115	*BDN*	6,62035
ACP	97,69392	*BDP*	111,19189
ACD	92,86651	*BDC*	107,29428
ACB	79,06594	*BDA*	79,53186
BCD	13,80056	*ADC*	27,76243
DCP	4,82746	*CDP*	3,98761

	LIGNES.	MÈTRES.	LIGNES.	MÈTRES.
ARCS..	*AIB*	3999974,6	*AMC*	1785476,3
	BND	911496,0	*CPD*	4003562,0
CORDES.	*AB*	3999974,6	*AC*	1782399,2
	BD	909853,6	*CD*	4000098,3
DIAGONALES.....			*AD*	4193235,8
			BC	4202472,9

CHAPITRE VII.

Évaluation numérique des Aires des Quadrilatères de la Projection, formés par deux Méridiens et deux Parallèles.

UNE propriété caractéristique de la projection que nous venons d'analyser, et dont on trouve la démonstration au chapitre VIII de la première partie de ce Mémoire, est de conserver un rapport constant déterminé par l'échelle, entre l'aire plane de chaque quadrilatère compris entre deux méridiens et deux parallèles développés, et l'aire courbe du quadrilatère correspondant renfermé entre les mêmes méridiens et les mêmes parallèles sur le sphéroïde.

Or, ω étant la distance angulaire des deux méridiens ou leur différence de longitude, φ la latitude de l'un des parallèles, et Φ la différence de latitude des deux parallèles, on trouve, en substituant $\frac{1}{2}\omega$ à π, dans la série du chapitre VI de la première partie, pour l'expression de l'aire Δ du quadrilatère compris, sur le sphéroïde, entre les méridiens et les parallèles donnés,

$$\Delta = 2ab\omega\left[\sin.\tfrac{1}{2}\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+\Phi) - \tfrac{1}{3}\partial^2(2+\partial^2)\sin.\tfrac{3}{2}\Phi\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+\Phi) + \tfrac{1}{5}\partial^4(3+2\partial^2)\sin.\tfrac{5}{2}\Phi\cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi+\Phi) - \&c.\right].$$

On peut donc, à l'aide de cette formule, déterminer, tant sur le plan de projection que sur la surface du sphéroïde, la valeur de chaque quadrilatère proposé, l'échelle de la projection étant donnée.

Il est visible que le premier terme de cette série est l'expression du quadrilatère formé par les méridiens et les parallèles déterminés par les angles φ, Φ et ω, à la surface d'une sphère, dont le rayon serait moyen proportionnel entre les deux demi-axes du sphéroïde; et que les autres termes contiennent la correction qu'il faut faire aux résultats relatifs à cette sphère, pour les approprier au sphéroïde elliptique que nous considérons.

La valeur des quadrilatères étant proportionnelle à la différence de longitude ω des méridiens, nous allons calculer les coëfficiens de la formule ci-dessus, en supposant ω d'un grade, c'est-à-dire, égal à $\frac{\pi}{200} = 0{,}015707263$, et en prenant le produit ab en myriamètres.

On a trouvé, chapitre I.er de cette seconde partie, $a = 63{,}7571$ myriamètres; partant, $ab = \frac{334}{335} a^2 = 4052{,}832$. Le produit de ce nombre, par $2\omega = 0{,}131415926$, est $2\omega ab = 127{,}3235$ myriamètres.

Mais on a

$$\tfrac{1}{3}(2\partial^2 + \partial^4) = 0{,}0009972570,$$
$$\tfrac{1}{5}(3\partial^4 + \partial^6) = 0{,}000013419,$$
$$\tfrac{1}{7}(4\partial^6 + \partial^8) = 0{,}000000000191;$$

les autres coëfficiens sont insensibles.

Multipliant chacune des quantités précédentes par la valeur de $2\omega ab$, on aura en myriamètres,

$$\tfrac{2}{3}\omega ab(2\partial^2 + \partial^4) = 0{,}12697429,$$
$$\tfrac{2}{5}\omega ab(3\partial^4 + \partial^6) = 0{,}00017086,$$
$$\tfrac{2}{7}\omega ab(4\partial^6 + \partial^8) = 0{,}00000024.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de Δ, elle devient

$$\Delta = 127{,}3235 \sin.\tfrac{1}{2}\Phi \cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi + \Phi)$$
$$- 0{,}12697429 \sin.\tfrac{3}{2}\Phi \cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi + \Phi)$$
$$+ 0{,}00017086 \sin.\tfrac{5}{2}\Phi \cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi + \Phi) - \&c.$$

La valeur du second membre de cette série doit être multipliée par le nombre abstrait qui exprime combien de grades contient la longitude.

Pour donner un exemple de l'application de cette série, soit

proposé d'évaluer l'aire du quadrilatère compris entre les parallèles de 30 et 70 grades de latitude boréale, et deux méridiens dont la distance angulaire ou la différence de longitude, est de 40 grades. La série devient dans ce cas,

$$\Delta = 127{,}3235 \sin. 20 \cos. 50 - 0{,}12697429 \sin. 60 \cos. 50 + 0{,}00017086 \sin. 100 \cos. 250 - \&c.$$

Effectuant le calcul, et réunissant les termes, il vient

$$\Delta = 27{,}89373 \text{ myriamètres.}$$

Multipliant ce résultat par 40, ou par la différence de longitude, on a

$$\Delta = 1115{,}74915 \text{ myriamètres carrés}$$

pour l'aire cherchée. C'est l'étendue superficielle qu'embrassent les Tables de ce Mémoire.

Proposons-nous maintenant de trouver l'aire d'un grade en tous sens, c'est-à-dire, l'aire du quadrilatère compris entre deux méridiens dont la différence de longitude est d'un grade, et entre deux parallèles dont la différence de latitude est pareillement d'un grade.

La série ci-dessus, adaptée à ce cas, devient

$$\Delta = 099998657 \cos. \tfrac{1}{2}(2\varphi + 1) - 0{,}00299148 \cos. \tfrac{3}{2}(2\varphi + 1) + 0{,}00000671 \cos. \tfrac{5}{2}(2\varphi + 1) - \&c.$$

Pour un quadrilatère d'un décigrade en tous sens, on a la série suivante :

$$\Delta = 0{,}009999866 \cos. \tfrac{1}{2}(2\varphi + 0{,}1) - 0{,}000029915 \cos. \tfrac{3}{2}(2\varphi + 0{,}1) + 0{,}000000067 \cos. \tfrac{5}{2}(2\varphi + 0{,}1) - \&c.,$$

dont les coëfficiens numériques sont à très-peu-près la centième partie des coëfficiens correspondans de la série précédente.

Le tableau suivant présente l'ensemble des coëfficiens numériques des trois termes du second membre de l'avant-dernière série, exprimés en mètres aux neuf différentes échelles.

NUMÉROS des ÉCHELLES.	COÈFFICIENS DU TERME.		
	I.er	II.me	III.me
1	2499,96642	7,47871	0,01677
4	24,99966	0,07478	0,00017
7	0,25000	0,00007	0,00000
2	399,99463	1,19659	0,00268
5	3,99995	0,01197	0,00003
8	0,00400	0,00011	0,00000
3	99,99866	0,29914	0,00067
6	0,99999	0,00299	0,00001
9	0,01000	0,00003	0,00000

En divisant par 100 chaque nombre de ce tableau, on aurait, sans différence sensible, celui des coèfficiens des trois termes du second membre de la dernière série.

Par exemple, si l'on veut évaluer, à l'échelle numéro 5, l'aire du quadrilatère d'un grade compris entre les parallèles dont les latitudes sont 52 et 53 grades, et deux méridiens distans d'un grade, on prendra dans la table précédente, vis-à-vis du numéro 5, les coèfficiens qui doivent être substitués à ceux de l'avant-dernière série, laquelle deviendra, dans ce cas,

$$\Delta = 3{,}99995 \cos. 52{,}5 - 0{,}01197 \cos. 157{,}5 + 0{,}00003 \cos. 262{,}5 - \&c.$$

Le calcul donne pour la somme de ces trois termes,

$$\Delta = 2{,}72455 \text{ mètres carrés.}$$

Telle est, sur le plan de projection, l'aire du quadrilatère d'un

grade en tous sens, renfermé entre les parallèles dont les latitudes sont de 52 et 53 grades.

Il suffirait de diviser le résultat par 100 pour avoir, sans erreur sensible, l'aire du quadrilatère d'un décigrade compris dans le précédent.

On trouverait pareillement à toute autre échelle, l'aire du quadrilatère d'un grade, en faisant usage des coëfficiens relatifs à cette échelle, tels que les donne la table précédente.

Si l'on était curieux de connaître la surface du sphéroïde terrestre, on y parviendrait aisément, au moyen de la série suivante:

$$\text{surface du sphéroïde} = 4ab\pi\left[\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{1\cdot 3}\partial^2 - \frac{1}{3\cdot 5}\partial^4 - \frac{1}{5\cdot 7}\partial^6 - \frac{1}{7\cdot 9}\partial^8 - \text{\&c.}\right],$$

qui dérive de l'expression de D du chapitre VI de la première partie, en y faisant $\varphi = 100$ grades, et doublant le résultat pour l'étendre au sphéroïde entier.

En substituant des nombres dans cette équation, l'on a

$$4ab\pi \times 1{,}0009986 = 50934{,}4 \text{ myriamètres carrés}$$

pour la surface du sphéroïde terrestre.

Si l'on divise ce nombre par 1115,75 trouvé plus haut, le quotient sera 45,65; ainsi, l'aire du quadrilatère compris entre deux méridiens dont la distance angulaire, ou la différence de longitude, est de 40 grades, et les parallèles de 30 et 70 grades de latitude, est contenue au-delà de quarante-cinq fois dans la surface du sphéroïde terrestre.

CHAPITRE VIII.

De la Construction des Cartes réduites.

Les cartes réduites se construisent au moyen des latitudes croissantes des parties de méridien comprises entre l'équateur et des parallèles donnés. On facilite ce travail à l'aide d'une table de ces quantités, telle que la Table XVIII, dont nous allons expliquer la construction et l'usage.

Cette Table a été dressée sur la formule suivante du chap. VI de la première partie.

$$C = a\left[\mathcal{L}\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\nabla + \varphi) - 2a\left(\sin.\varphi - \tfrac{1}{3}\partial^2\sin.3\varphi + \tfrac{1}{5}\partial^4\sin.5\varphi - \&c.\right)\right];$$

elle donne les valeurs de C correspondantes aux différentes valeurs de φ, de décigrade en décigrade, depuis zéro jusqu'à 80 grades de latitude, c'est-à-dire, chaque partie de méridien de cette carte, comprise entre l'équateur et le parallèle dont la latitude est φ.

La lettre $\mathcal{L}$, qui affecte le premier terme de cette série, désignant un logarithme naturel, son coèfficient a doit être multiplié par $\frac{1}{M}$, ou divisé par le module des logarithmes. Si l'on veut que $\mathcal{L}$ désigne un logarithme vulgaire, l'équation devient ainsi,

$$C = a\left[\tfrac{1}{M}\mathcal{L}\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\nabla + \varphi) - 2a\left(\sin.\varphi - \tfrac{1}{3}\partial^2\sin.3\varphi + \tfrac{1}{5}\partial^4\sin.5\varphi - \&c.\right)\right];$$

mais, selon que l'on veut avoir la valeur de C en mètres ou en grades, il faut faire respectivement

$a = 6375710{,}15$ mètres, ou $a = 63{,}6619772$ grades;

or $\frac{1}{M} = 2{,}302585093$; on a donc, dans ces deux cas,

$\frac{a}{M} = 14780615{,}135$ mètres, ou $\frac{a}{M} = 146{,}5871198$ grades.

Le

Le coèfficient général des autres termes de la valeur de C, est

$$\left(\frac{2}{2n-1}\right) a\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{d}^{2(n-1)}.$$

Mettant successivement dans cette expression la valeur de a en mètres ou en grades, et pour $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$ leurs valeurs rapportées au chapitre I.^{er}, on aura, dans ces deux cas,

$$\left(\frac{2}{2n-1}\right)\left(\frac{1}{669}\right)^{2(n-1)} \times 19031{,}967 \text{ mètres}$$

$$\text{et } \left(\frac{2}{2n-1}\right)\left(\frac{1}{669}\right)^{2(n-1)} \times 0{,}1900357 \text{ grade.}$$

Faisant successivement n égale à 1, 2, 3, &c.; dans ces deux expressions, on a respectivement,

Lorsque	Valeurs particulières du coèfficient général :	
$n =$ 1	38063,934	0,3800714
2	18,965 mètres.	0,0001894 grade.
3	0,017	0,0000002

Substituant ces valeurs dans l'expression de C, on aura d'abord pour la valeur de C en mètres,

$$C = 14780615{,}135\ \mathfrak{L}\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(100+\varphi) - 38063{,}934 \sin.\varphi + 18{,}965 \sin.3\varphi - 0{,}017 \sin.5\varphi + \&c.,$$

et pour la valeur de la même quantité en grades,

$$C = 146{,}5871198\ \mathfrak{L}\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}(100+\varphi) - 0{,}3800714 \sin.\varphi + 0{,}0001894 \sin.3\varphi - 0{,}0000002 \sin.5\varphi + \&c.$$

C'est cette dernière formule qui a servi à construire la Table XVIII. On a préféré de la calculer en grades plutôt qu'en mètres, afin d'en rendre l'usage plus étendu. En effet, elle peut servir sous cette forme à résoudre plusieurs problèmes relatifs à la pratique du pilotage.

Les coèfficiens de l'avant-dernière série, sont aux coèfficiens respectifs de la dernière dans le rapport de 100149 à l'unité.

Si l'on voulait avoir la différence de latitude croissante Γ, ou la droite comprise sur une carte réduite, entre un parallèle dont la latitude est φ, et un autre parallèle dont la latitude est $(\varphi+\Phi)$; on aurait, en substituant des nombres dans l'expression de Γ du chapitre VI,

$$\Gamma = 14780615{,}135\ \mathcal{L}\left[\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi+\Phi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi)}\right]$$
$$-76127{,}868\sin.\tfrac{1}{2}\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+\Phi)+37{,}930\sin.\tfrac{3}{2}\Phi\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+\Phi)$$
$$-0{,}034\sin.\tfrac{5}{2}\Phi\cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi+\Phi)+\&c.,$$

lorsque Γ doit être exprimé en mètres.

Mais, dans le cas où Γ devrait être exprimé en grades, on aurait

$$\Gamma = 146{,}5871198\ \mathcal{L}\left[\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi+\Phi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi)}\right]$$
$$-0{,}7601428\sin.\tfrac{1}{2}\Phi\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+\Phi)+0{,}0003788\sin.\tfrac{3}{2}\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+\Phi)$$
$$-0{,}0000004\sin.\tfrac{5}{2}\Phi\cos.\tfrac{5}{2}(2\varphi+\Phi)+\&c.$$

Si l'on suppose la différence de latitude Φ d'un grade, on aura pour les valeurs de Γ relatives à cette supposition, d'abord en mètres,

$$\Gamma = 14780615{,}135\ \mathcal{L}\left[\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(101+\varphi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi)}\right]-597{,}901\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+1)$$
$$+0{,}894\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+1)-\&c.;$$

ensuite en grades,

$$\Gamma = 146{,}5871198\ \mathcal{L}\left[\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(101+\varphi)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(100+\varphi)}\right]-0{,}005834\cos.\tfrac{1}{2}(2\varphi+1)$$
$$+0{,}000009\cos.\tfrac{3}{2}(2\varphi+1)-\&c.$$

On calculerait aisément, à l'aide de ces deux formules, une table des latitudes croissantes de grade en grade.

On peut déterminer les valeurs de Γ en grades, au moyen de

la Table XVIII, en y entrant deux fois, d'abord avec la latitude φ pour argument, ce qui donne un premier nombre; ensuite avec la latitude $(\varphi + \Phi)$, ce qui donne un second nombre : de celui-ci ôtant le premier, il reste la valeur de Γ relative aux angles φ et Φ.

Par exemple, soient $\varphi = 45$ et $(\varphi + \Phi) = 46$ grades; avec ces deux argumens, on trouve dans la Table XVIII, les nombres respectifs 49,0496 et 50,3691. La différence de ces deux nombres est 1,3195 grade.

On trouverait de même la valeur de Γ pour toutes autres valeurs de φ et Φ; mais dans les cas où les argumens φ et $(\varphi + \Phi)$ contiendraient d'autres fractions du grade que des décigrades, il serait nécessaire de faire une proportion; on ferait mieux alors, et il serait presque aussi facile, de calculer la valeur de Γ immédiatement par la formule.

Pour une carte réduite, il suffit de tracer les méridiens et les parallèles de décigrade en décigrade, en partant de zéro pour la longitude et la latitude; on aura donc toujours immédiatement par la table, sans qu'il soit nécessaire de faire des parties proportionnelles, la portion de méridien comprise entre deux parallèles donnés exprimée en fraction de grade.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de tracer une carte réduite de la mer du Nord, on cherchera d'abord les distances des parallèles correspondantes à chaque décigrade de latitude, ce qui se fera aisément, en prenant la différence des nombres consécutifs de la Table XVIII, à partir d'une latitude donnée. Ainsi, en partant du 60.^{me} grade de latitude, on a les nombres suivans.

LATITUDES.	DISTANCES DES PARALLÈLES.	
60, 0	0, 1700	grade.
60, 1	0, 1703	
60, 2	0, 1707	
60, 3	0, 1711	
60, 4	0, 1715	
60, 5	&c.	
&c.		

Ces nombres sont relatifs au grade de l'équateur pris pour unité. Pour avoir sa valeur en mètres, on observera que la circonférence de l'équateur est égale à $2a\pi = 40059772$ mètres; partant, le grade de l'équateur est de 100149,43 mètres.

Les échelles les plus propres pour ce genre de cartes, paraissent être celles qui portent les numéros 7, 8, 9.

A ces échelles, on a les valeurs suivantes du grade de l'équateur,

NUMÉROS des ÉCHELLES.	RAPPORTS.	VALEURS DU GRADE en Mètres.
7	$\frac{1}{200000}$	0,5007471
8	$\frac{1}{500000}$	0,2002986
9	$\frac{1}{1000000}$	0,1001494

En donnant aux feuilles des cartes marines, comme à celles des cartes géographiques, 0,5 mètre de hauteur et 0,8 mètre de largeur, on aura, aux trois échelles sus-mentionnées,

NUMÉROS des ÉCHELLES.	RAPPORTS.	HAUTEURS des Feuilles en grades.	LARGEURS des Feuilles en grades.
7	$\frac{1}{200000}$	0,998501	1,597601
8	$\frac{1}{500000}$	2,496252	3,994003
9	$\frac{1}{1000000}$	4,992504	7,988006

On pourrait, pour plus de facilité, négliger les décimales qui accompagnent ces nombres, à partir de la seconde; ce qui donnerait les nombres respectifs suivans pour les

hauteurs, 1 ... 2,5 ... 5
largeurs, 1,6 ... 4 ... 8
} grades.

Cette omission est permise, attendu que les dimensions des feuilles sont en quelque façon arbitraires, et elle facilite leur notation, qui peut se faire d'une manière analogue à celle qui a été exposée au chapitre II de cette seconde partie, pour les feuilles de géographie, en partant ici de l'équateur et d'un premier méridien pris arbitrairement.

On entendra ici par centre de la projection la commune section de l'équateur et du premier méridien. En désignant par

P, le numéro d'une feuille en comptant de l'équateur,

Q, le numéro d'une feuille en comptant du premier méridien;

C, désignant toujours la latitude croissante, et G le nombre de grades de la longitude, à partir du premier méridien : on aura, aux échelles 7, 8, 9,

	7	8	9
$P =$	$C + 1$	$\frac{2}{5}C + 1$	$\frac{1}{5}C + 1$
$Q =$	$\frac{5}{8}G + 1$	$\frac{1}{4}G + 1$	$\frac{1}{8}G + 1$

en rejetant les fractions qui accompagnent ces nombres.

Réciproquement, on a pour déterminer la latitude croissante et la longitude de l'angle, d'une feuille donnée, le plus voisin du centre de la projection aux mêmes échelles.

	7	8	9
$C' =$	$P - 1$	$\frac{1}{2}(P - 1)$	$5(P - 1)$
$G' =$	$\frac{8}{5}(Q - 1)$	$4(Q - 1)$	$8(Q - 1)$

Et en faisant X et Y les coordonnées d'un point quelconque, rapportées à cet angle comme origine, et au premier méridien et à l'équateur comme axes respectifs, on a aux mêmes échelles,

	7	8	9
$X =$	$C-(P-1)$	$C-\frac{1}{2}(P-1)$	$C-5(P-1)$
$Y =$	$G-\frac{8}{5}(Q-1)$	$G-4(Q-1)$	$G-8(Q-1)$

Par exemple, si l'on veut connaître, pour l'échelle numéro 8, à quelle feuille appartient le point qui a 39,6671 grades de latitude croissante et 27,3785 de longitude, on trouvera d'abord

$$P = 16 \ldots\ldots Q = 7;$$

ainsi, en supposant la feuille dans la région nord-est, elle sera notée ainsi $7\,\square_{16}$.

En rapportant l'origine des coordonnées du point à l'angle de la feuille précédente, le plus rapproché du centre de la projection, savoir, celui qui a pour sommet la commune section des côtés numérotés, on a

$$X = 2{,}1671 \ldots Y = 3{,}3785 \text{ grades};$$

on trouve ensuite

$$C' = 37{,}5 \text{ et } G' = 24 \text{ grades.}$$

Le côté de la feuille le plus voisin du méridien moyen a donc pour longitude 24 grades.

Le côté de la même feuille le plus voisin de l'équateur a pour latitude croissante 37,5 grades.

Pour avoir la latitude vraie correspondante, on entre dans la Table XVIII, et l'on y voit que la latitude vraie correspondante à cette latitude croissante tombe entre 35,6 et 35,7, mais beaucoup plus près de cette dernière que de l'autre. Au moyen d'une proportion facile à établir, on trouve qu'il en faut retrancher 0,0265 : ainsi la latitude vraie que l'on cherche est de 35,6735 grades.

Ces longitudes et latitudes sont en même temps celles de l'angle de la feuille le plus près du centre de la projection.

FIN.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces Tables *ont été calculées*, en adoptant pour rapport des axes de l'ellipsoïde terrestre, celui de 334 à 335. *Voyez* le Chapitre I.^er^ de la seconde Partie.

On rédige au Dépôt général de la guerre, des Tables qui donneront à vue les coordonnées des points d'intersection des méridiens et des parallèles de la projection que cet Établissement a adoptée, pour toute l'étendue qu'embrassent les Tables auxiliaires jointes au présent Mémoire. Ce grand et utile travail, conçu et dirigé par M. PLESSIS, Capitaine au Corps impérial des Ingénieurs-géographes, et auquel M. BOULET, ancien Officier du même Corps, coopère avec zèle, est déjà très-avancé ; aussi espère-t-on de pouvoir le publier bientôt.

TABLE I.

TABLE I.

Latitude vraie, moins Latitude réduite.

ARGUMENT : Latitude vraie.

LATITUDE vraie. (Grades.)	LATITUDE réd.te (Grades.)	Angles. (Second.)	Diff. (S.)	LATITUDE vraie. (Grades.)	LATITUDE réd.te (Grades.)	Angles. (Second.)	Diff. (S.)	LATITUDE vraie. (Grades.)	LATITUDE réd.te (Grades.)	Angles. (Second.)	Diff. (S.)	LATITUDE vraie. (Grades.)	LATITUDE réd.te (Grades.)	Angles. (Second.)	Diff (S.)
30,0	70,0	769,1		32,5	67,5	810,6		35,0	65,0	847,2		37,5	62,5	878,5	
1	9	770,8	1,7	6	4	812,1	1,5	1	9	848,6	1,4	6	4	879,7	1,2
2	8	772,5	1,7	7	3	813,7	1,6	2	8	849,9	1,3	7	3	880,8	1,1
3	7	774,3	1,8	8	2	815,2	1,5	3	7	851,2	1,3	8	2	882,0	1,2
4	6	776,0	1,7	9	1	816,8	1,6	4	6	852,5	1,3	9	1	883,1	1,1
5	5	778,7	1,7	33,0	67,0	818,3	1,5	5	5	853,8	1,3	38,0	62,0	884,2	1,
6	4	779,4	1,7	1	9	819,8	1,5	6	4	855,2	1,4	1	9	885,3	1,1
7	3	781,1	1,7	2	8	821,3	1,5	7	3	856,5	1,3	2	8	886,3	1,0
8	2	782,9	1,8	3	7	822,8	1,5	8	2	857,8	1,3	3	7	887,4	1,1
9	1	784,6	1,7	4	6	824,3	1,5	9	1	859,1	1,3	4	6	888,5	1,1
31,0	69,0	786,3	1,7	5	5	825,8	1,5	36,0	64,0	860,4	1,3	5	5	889,5	1,0
1	9	788,0	1,7	6	4	827,3	1,5	1	9	861,7	1,3	6	4	890,6	1,1
2	8	789,6	1,6	7	3	828,8	1,5	2	8	862,9	1,2	7	3	891,6	1,0
3	7	791,3	1,7	8	2	830,3	1,5	3	7	864,1	1,2	8	2	892,7	1,1
4	6	792,9	1,6	9	1	831,8	1,5	4	6	865,4	1,3	9	1	893,8	1,1
5	5	794,6	1,7	34,0	66,0	833,2	1,4	5	5	866,6	1,2	39,0	61,0	894,8	1,0
6	4	796,2	1,6	1	9	834,6	1,4	6	4	867,8	1,2	1	9	895,8	1,0
7	3	797,8	1,6	2	8	836,0	1,4	7	3	869,1	1,3	2	8	896,8	1,0
8	2	799,5	1,7	3	7	837,4	1,4	8	2	870,3	1,2	3	7	897,7	0,9
9	1	801,1	1,6	4	6	838,8	1,4	9	1	871,5	1,2	4	6	898,7	1,0
32,0	68,0	802,8	1,7	5	5	840,2	1,4	37,0	63,0	872,8	1,3	5	5	899,7	1,0
1	9	804,4	1,6	6	4	841,6	1,4	1	9	873,9	1,1	6	4	900,7	1,0
2	8	805,9	1,5	7	3	843,0	1,4	2	8	875,1	1,2	7	3	901,6	1,9
3	7	807,4	1,5	8	2	844,4	1,4	3	7	876,2	1,1	8	2	902,6	1,0
4	6	809,0	1,6	9	1	845,8	1,4	4	6	877,4	1,2	9	1	903,6	1,0
5	5	810,6	1,6	35,0	65,0	847,2	1,4	5	5	878,5	1,1	40,0	60,0	904,5	0,9

ARGUMENT : Latitude réduite.

Suite de la TABLE I.

Latitude vraie, moins Latitude réduite.

ARGUMENT : Latitude vraie.

LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.
Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.
40,0	60,0	904,5		42,5	57,5	924,8		45,0	55,0	939,6		47,5	52,5	948,4	
1	9	905,4	0,9	6	4	925,5	0 7	1	9	940,0	0,4	6	4	948,6	0,2
2	8	906,3	0,9	7	3	926,2	0,7	2	8	940,4	0,4	7	3	948,9	0,3
3	7	907,2	0,9	8	2	926,9	0,7	3	7	940,9	0,5	8	2	949,1	0,2
4	6	908,1	0,9	9	1	927,6	0,7	4	6	941,3	0,4	9	1	949,3	0,2
5	5	909,0	0,9	43,0	57,0	928,3	0,7	5	5	941,7	0,4	48,0	52,0	949,6	0,3
6	4	909,8	0,8	1	9	928,9	0,6	6	4	942,1	0,4	1	9	949,7	0,1
7	3	910,7	0,9	2	8	929,5	0,6	7	3	942,6	0,5	2	8	949,9	0,2
8	2	911,6	0,9	3	7	930,1	0,6	8	2	943,0	0,4	3	7	950,0	0,1
9	1	912,5	0,9	4	6	930,8	0,7	9	1	943,4	0,4	4	6	950,1	0,1
41,0	59,0	913,4	0,9	5	5	931,4	0,6	46,0	54,0	943,9	0,5	5	5	950,3	0,2
1	9	914,2	0,8	6	4	932,0	0,6	1	9	944,2	0,3	6	4	950,4	0,1
2	8	915,0	0,8	7	3	932,6	0,6	2	8	944,5	0,3	7	3	950,6	0,2
3	7	915,7	0,7	8	2	933,2	0,6	3	7	944,8	0,3	8	2	950,7	0,1
4	6	916,5	0,8	9	1	933,8	0,6	4	6	945,2	0,4	9	1	950,9	0,2
5	5	917,3	0,8	44,0	56,0	934,4	0,6	5	5	945,6	0,4	49,0	51,0	951,0	0,1
6	4	918,1	0,8	1	9	934,9	0,5	6	4	945,9	0,3	1	9	951,1	0,1
7	3	918,9	0,8	2	8	935,5	0,6	7	3	946,2	0,3	2	8	951,1	0,0
8	2	919,7	0,8	3	7	936,0	0,5	8	2	946,5	0,3	3	7	951,2	0,1
9	1	920,5	0,8	4	6	936,5	0,5	9	1	946,8	0,3	4	6	951,2	0,0
42,0	58,0	921,3	0,8	5	5	937,0	0,5	47,0	53,0	947,1	0,3	5	5	951,3	0,1
1	9	922,0	0,7	6	4	937,5	0,5	1	9	947,4	0,3	6	4	951,3	0,0
2	8	922,7	0,7	7	3	938,1	0,6	2	8	947,7	0,3	7	3	951,4	0,1
3	7	923,4	0,7	8	2	938,6	0,5	3	7	947,9	0,2	8	2	951,4	0,0
4	6	924,1	0,7	9	1	939,1	0,5	4	6	948,1	0,2	9	1	951,5	0,1
5	5	924,8	0,7	45,0	55,0	939,6	0,5	5	5	948,4	0,3	50,0	50,0	951,5	0,0

ARGUMENT : Latitude réduite.

Suite de la TABLE I.

Latitude vraie, moins Latitude réduite.

ARGUMENT : Latitude vraie.

LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.
Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.
50,0	50,0	951,5		52,5	47,5	948,6		55,0	45,0	940,0		57,5	42,5	925,4	
			0,0				0,2				0,5				0,6
1	9	951,5		6	4	948,4		1	9	939,5		6	4	924,8	
			0,1				0,3				0,5				0,7
2	8	951,4		7	3	948,1		2	8	939,0		7	3	924,1	
			0,0				0,2				0,5				0,7
3	7	951,4		8	2	947,9		3	7	938,5		8	2	923,4	
			0,1				0,2				0,5				0,7
4	6	951,3		9	1	947,7		4	6	938,0		9	1	922,7	
			0,0				0,3				0,5				0,7
5	5	951,3		53,0	47,0	947,4		5	5	937,5		58,0	42,0	922,0	
			0,0				0,3				0,5				0,8
6	4	951,3		1	9	947,1		6	4	937,0		1	9	921,2	
			0,1				0,3				0,5				0,8
7	3	951,2		2	8	946,8		7	3	936,5		2	8	920,4	
			0,0				0,4				0,5				0,8
8	2	951,2		3	7	946,4		8	2	936,0		3	7	919,6	
			0,1				0,3				0,6				0,8
9	1	951,1		4	6	946,1		9	1	935,4		4	6	918,8	
			0,0				0,3				0,5				0,8
51,0	49,0	951,1		5	5	945,8		56,0	44,0	934,9		5	5	918,1	
			0,1				0,3				0,6				0,8
1	9	951,0		6	4	945,5		1	9	934,3		6	4	917,3	
			0,1				0,3				0,6				0,8
2	8	950,9		7	3	945,2		2	8	933,7		7	3	916,5	
			0,2				0,4				0,6				0,8
3	7	950,7		8	2	944,8		3	7	933,1		8	2	915,7	
			0,1				0,3				0,6				0,8
4	6	950,6		9	1	944,5		4	6	932,5		9	1	914,9	
			0,2				0,3				0,6				0,8
5	5	950,4		54,0	46,0	944,2		5	5	931,9		59,0	41,0	914,1	
			0,1				0,4				0,6				0,8
6	4	950,3		1	9	943,8		6	4	931,3		1	9	913,3	
			0,2				0,4				0,6				0,9
7	3	950,1		2	8	943,4		7	3	930,7		2	8	912,4	
			0,1				0,4				0,6				0,9
8	2	950,0		3	7	943,0		8	2	930,1		3	7	911,5	
			0,1				0,4				0,6				0,9
9	1	949,9		4	6	942,6		9	1	929,5		4	6	910,6	
			0,2				0,5				0,6				0,8
52,0	48,0	949,7		5	5	942,1		57,0	43,0	928,9		5	5	909,8	
			0,2				0,4				0,7				0,9
1	9	949,5		6	4	941,7		1	9	928,2		6	4	908,9	
			0,2				0,4				0,7				0,9
2	8	949,3		7	3	941,3		2	8	927,5		7	3	908,0	
			0,3				0,4				0,7				0,9
3	7	949,0		8	2	940,9		3	7	926,8		8	2	907,1	
			0,2				0,4				0,7				0,8
4	6	948,8		9	1	940,5		4	6	926,1		9	1	906,3	
			0,2				0,5				0,7				0,9
5	5	948,6		55,0	45,0	940,0		5	5	925,4		60,0	40,0	905,4	

ARGUMENT : Latitude réduite.

Suite de la TABLE I.

Latitude vraie, moins Latitude réduite.

ARGUMENT : Latitude vraie.

LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.	LATITUDE vraie.	LATITUDE réd.te	Angles.	Diff.
Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.	Grades.		Second.	S.
60,0	40,0	905,4		62,5	37,5	879,5		65,0	35,0	848,4		67,5	32,5	811,8	
1	9	904,4	1,0	6	4	878,4	1,1	1	9	847,0	1,4	6	4	810,3	1,5
2	8	903,5	0,9	7	3	877,2	1,2	2	8	845,6	1,4	7	3	808,7	1,6
3	7	902,5	1,0	8	2	876,1	1,1	3	7	844,2	1,4	8	2	807,1	1,6
4	6	901,5	1,0	9	1	874,9	1,2	4	6	842,8	1,4	9	1	805,6	1,5
5	5	900,6	0,9	63,0	37,0	873,8	1,1	5	5	841,4	1,4	68,0	32,0	804,1	1,5
6	4	899,6	1,0	1	9	872,6	1,2	6	4	840,0	1,4	1	9	802,4	1,7
7	3	898,6	1,0	2	8	871,4	1,2	7	3	838,6	1,4	2	8	800,8	1,6
8	2	897,7	0,9	3	7	870,1	1,3	8	2	837,2	1,4	3	7	799,1	1,7
9	1	896,7	1,0	4	6	868,9	1,2	9	1	835,8	1,4	4	6	797,5	1,6
61,0	39,0	895,7	1,0	5	5	867,7	1,2	66,0	34,0	834,4	1,4	5	5	795,8	1,7
1	9	894,7	1,0	6	4	866,4	1,3	1	9	833,0	1,4	6	4	794,2	1,6
2	8	893,6	1,1	7	3	865,2	1,2	2	8	831,5	1,5	7	3	792,6	1,6
3	7	892,6	1,0	8	2	864,0	1,2	3	7	830,0	1,5	8	2	790,9	1,7
4	6	891,5	1,1	9	1	862,8	1,2	4	6	828,5	1,5	9	1	789,3	1,6
5	5	890,5	1,0	64,0	36,0	861,5	1,3	5	5	827,0	1,5	69,0	31,0	787,7	1,6
6	4	889,4	1,1	1	9	860,2	1,3	6	4	825,5	1,5	1	9	786,0	1,7
7	3	888,4	1,0	2	8	858,9	1,3	7	3	824,0	1,5	2	8	784,3	1,7
8	2	887,3	1,1	3	7	857,6	1,3	8	2	822,6	1,4	3	7	782,5	1,8
9	1	886,3	1,0	4	6	856,3	1,3	9	1	821,1	1,5	4	6	780,8	1,7
62,0	38,0	885,2	1,1	5	5	855,0	1,3	67,0	33,0	819,6	1,5	5	5	779,1	1,7
1	9	884,1	1,1	6	4	853,6	1,4	1	9	818,0	1,6	6	4	777,4	1,7
2	8	882,9	1,2	7	3	852,3	1,3	2	8	816,5	1,5	7	3	775,7	1,7
3	7	881,8	1,1	8	2	851,0	1,3	3	7	814,9	1,6	8	2	773,9	1,8
4	6	880,6	1,2	9	1	849,7	1,3	4	6	813,4	1,5	9	1	772,2	1,7
5	5	879,5	1,1	65,0	35,0	848,4	1,3	5	5	811,8	1,6	70,0	30,0	770,5	1,7

ARGUMENT : Latitude réduite.

TABLE II.

Logarithmes des Normales au méridien elliptique, terminées au petit axe.

LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
30,0	0,00026696	32,5	0,00030927	35,0	0,00035368	37,5	0,00039992
1	0,00026861	6	0,00031101	1	0,00035550	6	0,00040180
2	0,00027026	7	0,00031275	2	0,00035731	7	0,00040368
3	0,00027192	8	0,00031450	3	0,00035914	8	0,00040557
4	0,00027358	9	0,00031625	4	0,00036096	9	0,00040746
5	0,00027524	33,0	0,00031800	5	0,00036289	38,0	0,00040936
6	0,00027691	1	0,00031975	6	0,00036462	1	0,00041125
7	0,00027858	2	0,00032151	7	0,00036646	2	0,00041315
8	0,00028026	3	0,00032337	8	0,00036829	3	0,00041405
9	0,00028194	4	0,00032503	9	0,00037013	4	0,00041695
31,0	0,00028362	5	0,00032680	36,0	0,00037197	5	0,00041886
1	0,00028530	6	0,00032857	1	0,00037382	6	0,00042077
2	0,00028709	7	0,00033035	2	0,00037566	7	0,00042267
3	0,00028869	8	0,00033212	3	0,00037751	8	0,00042458
4	0,00029038	9	0,00033390	4	0,00037937	9	0,00042650
5	0,00029208	34,0	0,00033569	5	0,00038122	39,0	0,00042841
6	0,00029379	1	0,00033747	6	0,00038308	1	0,00043033
7	0,00029550	2	0,00033926	7	0,00038494	2	0,00043225
8	0,00029721	3	0,00034105	8	0,00038681	3	0,00043417
9	0,00029892	4	0,00034284	9	0,00038867	4	0,00043610
32,0	0,00030063	5	0,00034465	37,0	0,00039054	5	0,00043803
1	0,00030235	6	0,00034645	1	0,00039241	6	0,00043995
2	0,00030408	7	0,00034825	2	0,00039428	7	0,00044188
3	0,00030581	8	0,00035006	3	0,00039616	8	0,00044382
4	0,00030754	9	0,00035187	4	0,00039804	9	0,00044575
5	0,00030927	35,0	0,00035368	5	0,00039992	40,0	0,00044769

Suite de la TABLE II.

Logarithmes des Normales au méridien elliptique, terminées au petit axe.

LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
40,0	0,00044769	42,5	0,00049671	45,0	0,00054667	47,5	0,00059727
1	0,00044963	6	0,00049869	1	0,00054823	6	0,00059930
2	0,00045157	7	0,00050067	2	0,00055070	7	0,00060134
3	0,00045351	8	0,00050266	3	0,00055272	8	0,00060337
4	0,00045545	9	0,00050465	4	0,00055473	9	0,00060541
5	0,00045740	43,0	0,00050663	5	0,00055675	48,0	0,00060744
6	0,00045935	1	0,00050862	6	0,00055877	1	0,00060948
7	0,00046130	2	0,00051062	7	0,00056079	2	0,00061121
8	0,00046325	3	0,00051261	8	0,00056281	3	0,00061354
9	0,00046521	4	0,00051460	9	0,00056483	4	0,00061558
41,0	0,00046716	5	0,00051660	46,0	0,00056685	5	0,00061762
1	0,00046912	6	0,00051859	1	0,00056887	6	0,00061966
2	0,00047108	7	0,00052059	2	0,00057090	7	0,00062170
3	0,00047304	8	0,00052259	3	0,00057292	8	0,00062373
4	0,00047500	9	0,00052459	4	0,00057495	9	0,00062577
5	0,00047697	44,0	0,00052659	5	0,00057698	49,0	0,00062781
6	0,00047894	1	0,00052859	6	0,00057900	1	0,00062965
7	0,00048090	2	0,00053060	7	0,00058103	2	0,00063189
8	0,00048287	3	0,00053260	8	0,00058306	3	0,00063392
9	0,00048434	4	0,00053461	9	0,00058509	4	0,00063596
42,0	0,00048682	5	0,00053662	46,0	0,00058712	5	0,00063800
1	0,00048879	6	0,00053863	1	0,00058915	6	0,00064004
2	0,00049077	7	0,00054064	2	0,00059118	7	0,00064208
3	0,00049275	8	0,00054265	3	0,00059321	8	0,00064412
4	0,00049473	9	0,00054466	4	0,00059524	9	0,00064616
5	0,00049671	45,0	0,00054667	5	0,00059727	50,0	0,00064820

Suite de la TABLE II.

Logarithmes des Normales au méridien elliptique, terminées au petit axe.

LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
50,0	0,00064820	52,5	0,00069914	55,0	0,00074978	57,5	0,00079980
1	0,00065024	6	0,00070117	1	0,00075179	6	0,00080178
2	0,00065228	7	0,00070321	2	0,00075380	7	0,00080375
3	0,00065432	8	0,00070554	3	0,00075582	8	0,00080574
4	0,00065636	9	0,00070727	4	0,00075783	9	0,00080772
5	0,00065840	53,0	0,00070930	5	0,00075984	58,0	0,00080970
6	0,00066044	1	0,00071133	6	0,00076185	1	0,00081168
7	0,00066247	2	0,00071336	7	0,00076386	2	0,00081365
8	0,00066451	3	0,00071539	8	0,00076586	3	0,00081562
9	0,00066655	4	0,00071742	9	0,00076787	4	0,00081760
51,0	0,00066859	5	0,00071935	56,0	0,00076988	5	0,00081956
1	0,00067063	6	0,00072147	1	0,00077188	6	0,00082153
2	0,00067267	7	0,00072350	2	0,00077388	7	0,00082350
3	0,00067471	8	0,00072553	3	0,00077588	8	0,00082546
4	0,00067675	9	0,00072755	4	0,00077788	9	0,00082743
5	0,00067878	54,0	0,00072958	5	0,00077988	59,0	0,00082939
6	0,00067982	1	0,00073160	6	0,00078188	1	0,00083135
7	0,00068286	2	0,00073362	7	0,00078388	2	0,00083330
8	0,00068489	3	0,00073565	8	0,00078587	3	0,00083526
9	0,00068693	4	0,00073767	9	0,00078787	4	0,00083721
52,0	0,00068896	5	0,00073969	57,0	0,00078986	5	0,00083917
1	0,00069100	6	0,00074171	1	0,00079185	6	0,00084111
2	0,00069304	7	0,00074373	2	0,00079384	7	0,00084306
3	0,00069507	8	0,00074574	3	0,00079583	8	0,00084501
4	0,00069710	9	0,00074776	4	0,00079781	9	0,00084695
5	0,00069914	55,0	0,00074978	5	0,00079980	60,0	0,00084890

Suite de la TABLE II.

Logarithmes des Normales au méridien elliptique, terminées au petit axe.

LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.	LATIT.	NORMALE.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
60,0	0,00084890	62,5	0,00089677	65,0	0,00094312	67,5	0,00098765
1	0,00085084	6	0,00089865	1	0,00094493	6	0,00098939
2	0,00085278	7	0,00090053	2	0,00094675	7	0,00099113
3	0,00085471	8	0,00090242	3	0,00094856	8	0,00099286
4	0,00085665	9	0,00090429	4	0,00095037	9	0,00099459
5	0,00085858	63,0	0,00090617	5	0,00095218	68,0	0,00099632
6	0,00086051	1	0,00090804	6	0,00095398	1	0,00099804
7	0,00086244	2	0,00090991	7	0,00095578	2	0,00099976
8	0,00086436	3	0,00091178	8	0,00095758	3	0,00100148
9	0,00086629	4	0,00091364	9	0,00095937	4	0,00100319
61,0	0,00086821	5	0,00091551	66,0	0,00096116	5	0,00100490
1	0,00087013	6	0,00091737	1	0,00096295	6	0,00100661
2	0,00087205	7	0,00091922	2	0,00096474	7	0,00100831
3	0,00087396	8	0,00092108	3	0,00096652	8	0,00101001
4	0,00087588	9	0,00092293	4	0,00096830	9	0,00101170
5	0,00087779	64,0	0,00092478	5	0,00097008	69,0	0,00101339
6	0,00087969	1	0,00092662	6	0,00097185	1	0,00101508
7	0,00088160	2	0,00092847	7	0,00097362	2	0,00101677
8	0,00088350	3	0,00093031	8	0,00097538	3	0,00101845
9	0,00088541	4	0,00093215	9	0,00097714	4	0,00102012
62,0	0,00088731	5	0,00093398	67,0	0,00097890	5	0,00102180
1	0,00088920	6	0,00093581	1	0,00098046	6	0,00102347
2	0,00089110	7	0,00093764	2	0,00098241	7	0,00102513
3	0,00089299	8	0,00093947	3	0,00098416	8	0,00102679
4	0,00087488	9	0,00094129	4	0,00098591	9	0,00102845
5	0,00089677	65,0	0,00094312	5	0,00098765	70,0	0,00103011

TABLE III.

Distances de différens Parallèles à l'équateur, au Parallèle moyen ou de 50 grades.

LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
30,0	1997261,2	32,5	1747884,7	35,0	1498433,4	37,5	1248904,0
1	1987287,6	6	1737908,1	1	1488453,8	6	1238921,2
2	1977313,7	7	1727931,4	2	1478474,0	7	1228938,2
3	1967339,8	8	1717954,6	3	1468494,1	8	1218955,1
4	1957365,9	9	1707977,6	4	1458514,1	9	1208971,8
5	1947391,7	33,0	1698000,5	5	1448533,9	38,0	1198988,5
6	1937417,5	1	1688023,4	6	1438553,6	1	1188006,0
7	1927443,1	2	1678046,0	7	1428573,2	2	1179021,4
8	1917468,7	3	1668068,6	8	1418592,7	3	1169037,6
9	1907494,4	4	1658091,1	9	1408612,0	4	1159053,7
31,0	1897519,4	5	1648113,3	36,0	1398631,3	5	1149070,9
1	1887544,5	6	1638135,6	1	1388650,3	6	1139085,6
2	1877569,7	7	1628157,6	2	1378669,3	7	1129101,3
3	1867594,5	8	1618179,6	3	1368688,1	8	1119116,8
4	1857619,4	9	1608201,1	4	1358706,8	9	1109132,3
5	1847644,1	34,0	1598223,2	5	1348725,3	39,0	1099147,6
6	1837668,7	1	1588244,7	6	1338743,8	1	1089162,8
7	1827693,2	2	1578266,1	7	1328762,1	2	1079178,0
8	1817717,5	3	1568287,5	8	1318780,6	3	1069192,8
9	1807741,7	4	1558308,8	9	1308798,4	4	1059207,6
32,0	1797765,9	5	1548329,8	37,0	1298816,5	5	1049222,3
1	1787789,8	6	1538350,8	1	1288834,1	6	1039236,8
2	1777813,8	7	1528371,6	2	1278851,9	7	1029251,2
3	1767837,6	8	1518392,4	3	1268869,3	8	1019265,4
4	1757861,2	9	1508412,9	4	1258887,0	9	1009279,5
5	1747884,7	35,0	1498433,4	5	1248904,0	40,0	999293,5

Suite de la TABLE III.

Distances de différens Parallèles à l'équateur, au Parallèle moyen ou de 50 grades.

LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
40,0	999293,5	42,5	749599,6	45,0	499820,2	47,5	249953,9
1	989307,4	6	739609,0	1	489827,2	6	239957,5
2	979321,1	7	729620,4	2	479834,1	7	229960,8
3	969334,7	8	719630,6	3	469840,8	8	219964,1
4	959348,2	9	709640,6	4	459847,3	9	209967,2
5	949361,0	43,0	699650,6	5	449853,9	48,0	199970,2
6	939374,7	1	689660,4	6	439860,2	1	189973,0
7	929387,7	2	679670,0	7	429866,4	2	179975,7
8	919400,7	3	669679,5	8	419872,5	3	169978,2
9	909413,5	4	659688,9	9	409878,4	4	159980,6
41,0	899426,1	5	649698,1	46,0	399884,1	5	149982,9
1	889438,6	6	639707,2	1	389889,8	6	139985,0
2	879450,9	7	629716,2	2	379895,3	7	129987,0
3	869463,2	8	619725,0	3	369900,6	8	119988,9
4	859475,3	9	609733,7	4	359906,8	9	109990,6
5	849487,3	44,0	599742,3	5	349910,9	49,0	99992,1
6	839499,1	1	589750,7	6	339915,8	1	89993,5
7	829500,9	2	579759,0	7	329920,6	2	79994,8
8	819522,4	3	569767,1	8	319925,3	3	69996,0
9	809533,8	4	559775,1	9	309929,8	4	59997,0
42,0	799545,1	5	549782,9	47,0	299934,2	5	49997,8
1	789556,3	6	539790,7	1	289938,4	6	39998,5
2	779567,3	7	529798,2	2	279942,5	7	29999,1
3	769578,2	8	519805,7	7	269946,4	8	19999,6
4	759588,9	9	509813,0	4	259949,2	9	9999,9
5	749599,6	45,0	499820,2	5	249953,9	50,0	0000000,0

Suite de la TABLE III.

Distances de différens Parallèles à l'équateur, au Parallèle moyen ou de 50 grades.

LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
50,0	0000000,0	52,5	250041,9	55,0	500171,6	57,5	750388,3
1	10000,0	6	260045,4	1	510178,6	6	760398,8
2	20000,1	7	270049,1	2	520185,8	7	770409,4
3	30000,4	8	280052,9	3	530193,0	8	780420,1
4	40000,8	9	290056,8	4	540200,5	9	790431,0
5	50001,3	53,0	300060,9	5	550208,0	58,0	800442,0
6	60002,0	1	310065,1	6	560215,7	1	810453,2
7	70002,9	2	320069,4	7	570223,6	2	820464,4
8	80003,8	3	330073,9	8	580231,5	3	830475,9
9	90004,9	4	340078,5	9	590239,7	4	840487,4
51,0	100006,2	5	350083,3	56,0	600247,9	5	850499,1
1	110007,6	6	360088,2	1	610256,3	6	860510,9
2	120009,1	7	370093,2	2	620264,8	7	870522,9
3	130010,8	8	380098,4	3	630273,5	8	880535,1
4	140012,6	9	390103,8	4	640282,3	9	890547,2
5	150014,6	54,0	400109,2	5	650291,3	59,0	900559,6
6	160016,7	1	410114,8	6	660300,4	1	910572,1
7	170018,9	2	420120,6	7	670309,6	2	920584,8
8	180021,3	3	430126,5	8	680318,9	3	930597,5
9	190023,8	4	440132,5	9	690328,4	4	940610,5
52,0	200026,5	5	450138,7	57,0	700338,1	5	950624,0
1	210029,3	6	460145,1	1	710347,9	6	960636,7
2	220032,2	7	470151,4	2	720357,8	7	970650,0
3	230035,3	8	480158,0	3	730367,8	8	980663,5
4	240038,5	9	490164,7	4	740378,0	9	990677,1
5	250041,9	55,0	500171,6	5	750388,3	60,0	1000690,8

Suite de la TABLE III.

Distances de différens Parallèles à l'équateur, au Parallèle moyen ou de 50 grades.

LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
60,0	1000690,8	62,5	1251077,1	65,0	1501545,1	67,5	1752091,5
1	1010704,6	6	1261094,3	1	1511565,3	6	1762115,0
2	1020718,6	7	1271111,6	2	1521585,8	7	1772138,6
3	1030732,7	8	1281128,9	3	1531606,5	8	1782162,2
4	1040747,0	9	1291146,6	4	1541627,2	9	1792186,1
5	1050761,4	63,0	1301164,2	5	1551648,1	68,0	1802210,0
6	1060775,9	1	1311182,1	6	1561669,1	1	1812234,0
7	1070790,6	2	1321199,7	7	1571690,2	2	1822258,2
8	1080805,4	3	1331218,1	8	1581711,5	3	1832282,5
9	1090820,3	4	1341236,3	9	1591732,8	4	1842306,9
61,0	1100835,4	5	1351254,6	66,0	1601754,3	5	1852331,4
1	1110850,6	6	1361273,1	1	1611776,0	6	1862356,1
2	1120865,9	7	1371291,7	2	1621797,8	7	1872380,9
3	1130881,3	8	1381310,4	3	1631820,1	8	1882405,7
4	1140896,9	9	1391329,2	4	1641842,1	9	1892430,7
5	1150912,6	64,0	1401348,2	5	1651863,7	69,0	1902455,8
6	1160928,5	1	1411367,3	6	1661885,9	1	1912481,1
7	1170944,5	2	1421386,6	7	1671908,3	2	1922506,4
8	1180960,6	3	1431405,9	8	1681930,7	3	1932531,9
9	1190976,9	4	1441425,4	9	1691953,3	4	1942557,5
62,0	1200993,2	5	1451445,0	67,0	1701976,1	5	1952583,2
1	1211009,7	6	1461464,8	1	1711998,9	6	1962609,0
2	1221026,4	7	1471484,6	2	1722021,9	7	1972634,9
3	1231043,2	8	1481504,6	3	1732045,0	8	1982661,0
4	1241060,1	9	1491524,8	4	1742068,2	9	1992687,1
5	1251077,1	65,0	1501545,0	5	1752091,5	70,0	2002713,4

TABLE IV.

Rayons des Cercles de projections des Parallèles à l'équateur.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
30,0	8382494,1	32,5	8133117,6	35,0	7883666,3	37,5	7634136,9
1	8372520,5	6	8123141,0	1	7873686,7	6	7624154,1
2	8362546,6	7	8113164,3	2	7863706,9	7	7614171,1
3	8352572,5	8	8103187,5	3	7853727,0	8	7604188,0
4	8342598,8	9	8093210,5	4	7843747,0	9	7594204,7
5	8332624,6	33,0	8083233,4	5	7833766,8	38,0	7584221,4
6	8322650,4	1	8073256,3	6	7823786,5	1	7574238,9
7	8312676,0	2	8063278,9	7	7813806,1	2	7564254,3
8	8302701,6	3	8053301,5	8	7803825,6	3	7554270,5
9	8292727,0	4	8043324,0	9	7793844,9	4	7544286,6
31,0	8282752,3	5	8033346,2	36,0	7783864,2	5	7534303,8
1	8272777,4	6	8023368,5	1	7773883,2	6	7524318,5
2	8262802,6	7	8013390,5	2	7763902,2	7	7514334,2
3	8252827,4	8	8003412,5	3	7753921,0	8	7504349,7
4	8242852,3	9	7993434,0	4	7743939,7	9	7494365,2
5	8232877,0	34,0	7983456,1	5	7733958,2	39,0	7484380,5
6	8222901,6	1	7973477,6	6	7723976,7	1	7474395,7
7	8212926,1	2	7963499,0	7	7713995,0	2	7464410,9
8	8202950,4	3	7953520,4	8	7704013,5	3	7454425,7
9	8192974,6	4	7943541,7	9	7694031,3	4	7444440,5
32,0	8182998,8	5	7933562,7	37,0	7684049,4	5	7434455,2
1	8173022,7	6	7923583,7	1	7674067,1	6	7424469,7
2	8163046,7	7	7913604,5	2	7664084,8	7	7414484,1
3	8153070,5	8	7903625,3	3	7654102,2	8	7404498,3
4	8143094,1	9	7893645,8	4	7644119,9	9	7394512,4
5	8133117,6	35,0	7883666,3	5	7634136,9	40,0	7384526,4

Suite de la TABLE IV.

Rayons des Cercles de projections des Parallèles à l'équateur.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
40,0	7384526,4	42,5	7134832,5	45,0	6885053,1	47,5	6635186,8
1	7374540,3	6	7124841,9	1	6875060,1	6	6625190,4
2	7364554,0	7	7114853,3	2	6865067,0	7	6615193,7
3	7354567,6	8	7104863,5	3	6855073,7	8	6605197,0
4	7344581,1	9	7094873,5	4	6845080,2	9	6595200,1
5	7334593,9	43,0	7084883,5	5	6835086,8	48,0	6585203,1
6	7324607,6	1	7074893,3	6	6825093,1	1	6575205,9
7	7314620,6	2	7064902,9	7	6815099,3	2	6565208,6
8	7304633,6	3	7054912,4	8	6805105,4	3	6555211,1
9	7294646,4	4	7044921,8	9	6795111,3	4	6545213,5
41,0	7284659,0	5	7034931,0	46,0	6785117,0	5	6535215,8
1	7274671,5	6	7024940,1	1	6775122,7	6	6525217,9
2	7264683,8	7	7014949,1	2	6765128,2	7	6515219,9
3	7254696,1	8	7004957,9	3	6755133,5	8	6505221,8
4	7244708,2	9	6994966,6	4	6745139,7	9	6495223,5
5	7234720,2	44,0	6984975,2	5	6735143,8	49,0	6485225,0
6	7224732,0	1	6974983,6	6	6725148,7	1	6475226,4
7	7214743,8	2	6964991,9	7	6715153,5	2	6465227,7
8	7204755,3	3	6955000,0	8	6705158,2	3	6455228,9
9	7194766,7	4	6945008,0	9	6695162,7	4	6445229,9
42,0	7184778,0	5	6935015,8	47,0	6685167,1	5	6435230,7
1	7174789,2	6	6925023,6	1	6675171,3	6	6425231,4
2	7164800,2	7	6915031,1	2	6665175,4	7	6415232,0
3	7154811,1	8	6905038,6	3	6655179,3	8	6405232,5
4	7144821,8	9	6895045,9	4	6645182,1	9	6395232,8
5	7134832,5	45,0	6885053,1	5	6635186,8	50,0	6385232,9

Suite de la TABLE IV.

Rayons des Cercles de projections des Parallèles à l'équateur.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
50,0	6385232,9	52,5	6135191,0	55,0	5885061,3	57,5	5634844,6
1	6375232,9	6	6125187,5	1	5875054,3	6	5624834,1
2	6365232,8	7	6115183,8	2	5865047,1	7	5614823,5
3	6355232,5	8	6105180,0	3	5855039,9	8	5604812,8
4	6345232,1	9	6095176,1	4	5845032,4	9	5594801,9
5	6335231,6	53,0	6085172,0	5	5835024,9	58,0	5584790,9
6	6325230,9	1	6075167,8	6	5825017,2	1	5574779,7
7	6315230,0	2	6065163,5	7	5815009,3	2	5564768,5
8	6305229,1	3	6055159,0	8	5805001,4	3	5554757,0
9	6295228,0	4	6045154,4	9	5794993,2	4	5544745,5
51,0	6285226,7	5	6035149,6	56,0	5784985,0	5	5534733,8
1	6275225,3	6	6025144,7	1	5774976,6	6	5524722,0
2	6265223,8	7	6015139,7	2	5764968,1	7	5514710,0
3	6255222,1	8	6005134,5	3	5754959,4	8	5504697,8
4	6245220,3	9	5995129,1	4	5744950,6	9	5494685,7
5	6235218,3	54,0	5985123,7	5	5734941,6	59,0	5484673,3
6	6225216,2	1	5975118,1	6	5724932,5	1	5474660,8
7	6215214,0	2	5965112,3	7	5714923,3	2	5464648,1
8	6205211,6	3	5955106,4	8	5704914,0	3	5454635,4
9	6195209,1	4	5945100,4	9	5694904,5	4	5444622,4
52,0	6185206,4	5	5935094,2	57,0	5684894,8	5	5434608,9
1	6175203,6	6	5925087,8	1	5674885,0	6	5424596,2
2	6165200,7	7	5915081,5	2	5664875,1	7	5414582,9
3	6155197,6	8	5905074,9	3	5654865,1	8	5404569,4
4	6145194,2	9	5895068,2	4	5644854,9	9	5394555,8
5	6131191,0	55,0	5885061,3	5	5634844,6	60,0	5384542,1

Suite de la TABLE IV.

Rayons des Cercles de projections des Parallèles à l'équateur.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
60,0	5384542,1	62,5	5134155,8	65,0	4883687,8	67,5	4633141,4
1	5374528,3	6	5124138,6	1	4873667,6	6	4623117,9
2	5364514,3	7	5114121,3	2	4863647,1	7	4613094,3
3	5354500,2	8	5104104,0	3	4853626,4	8	4603070,7
4	5344485,9	9	5094086,3	4	4843605,7	9	4593046,8
5	5334471,5	63,0	5084068,7	5	4833584,8	68,0	4583022,9
6	5324457,0	1	5074050,8	6	4823563,8	1	4572998,9
7	5314442,3	2	5064033,9	7	4813542,7	2	4562974,7
8	5304427,5	3	5054014,8	8	4803521,4	3	4552950,4
9	5294412,6	4	5043996,6	9	4793500,1	4	4542926,0
61,0	5284397,5	5	5033978,3	66,0	4783478,6	5	4532901,5
1	5274382,3	6	5023959,8	1	4773456,9	6	4522876,8
2	5264367,0	7	5013941,2	2	4763435,1	7	4512852,0
3	5254351,6	8	5003922,5	3	4753412,8	8	4502827,2
4	5244336,0	9	4993903,7	4	4743390,8	9	4492802,9
5	5234320,3	64,0	4983884,7	5	4733369,2	69,0	4482777,1
6	5224304,4	1	4973865,6	6	4723347,0	1	4472751,8
7	5214288,4	2	4963846,3	7	4713324,6	2	4462726,5
8	5204272,3	3	4953827,0	8	4703302,2	3	4452701,0
9	5194256,0	4	4943807,5	9	4693279,6	4	4442675,4
62,0	5184239,7	5	4933787,9	67,0	4683256,8	5	4432649,7
1	5174223,2	6	4923768,1	1	4673234,0	6	4422623,9
2	5164206,5	7	4913748,3	2	4663211,0	7	4412598,0
3	5154189,7	8	4903728,3	3	4653187,9	8	4402571,9
4	5144172,8	9	4893708,1	4	4643164,7	9	4392545,8
5	5134155,8	65,0	4883687,9	5	4633141,4	70,0	4382519,5

TABLE V.

Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade de longitude.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
30,0	0,678115	32,5	0,684454	35,0	0,690113	37,5	0,695048
1	0,678381	6	0,684694	1	0,690324	6	0,695230
2	0,678646	7	0,684932	2	0,690534	7	0,695410
3	0,678910	8	0,685170	3	0,690743	8	0,695590
4	0,679173	9	0,685406	4	0,690951	9	0,695768
5	0,679436	33,0	0,685641	5	0,691158	38,0	0,695945
6	0,679697	1	0,685875	6	0,691364	1	0,696121
7	0,679955	2	0,686185	7	0,691569	2	0,696296
8	0,680214	3	0,686340	8	0,691773	3	0,696469
9	0,680472	4	0,686571	9	0,691975	4	0,696641
31,0	0,680730	5	0,686801	36,0	0,692176	5	0,696812
1	0,680986	6	0,687030	1	0,692376	6	0,696981
2	0,681240	7	0,887257	2	0,692575	7	0,697149
3	0,681494	8	0,687483	3	0,692772	8	0,697316
4	0,681746	9	0,687709	4	0,692968	9	0,697481
5	0,681998	34,0	0,687933	5	0,693163	39,0	0,697645
6	0,682248	1	0,688156	6	0,693357	1	0,697807
7	0,682498	2	0,688378	7	0,693550	2	0,697969
8	0,682746	3	0,688599	8	0,693742	3	0,698129
9	0,682993	4	0,688819	9	0,693932	4	0,698288
32,0	0,683239	5	0,689037	37,0	0,694121	5	0,698446
1	0,683484	6	0,689254	1	0,694309	6	0,698602
2	0,683728	7	0,689471	2	0,694496	7	0,698758
3	0,683971	8	0,689686	3	0,694681	8	0,698912
4	0,684213	9	0,689900	4	0,694865	9	0,699065
5	0,684454	35,0	0,690113	5	0,695048	40,0	0,699217

Suite de la TABLE V.

Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade de longitude.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
40,0	0,699217	42,5	0,702565	45,0	0,705040	47,5	0,706577
1	0,699366	6	0,702681	1	0,705120	6	0,706618
2	0,699514	7	0,702796	2	0,705198	7	0,706657
3	0,699662	8	0,702910	3	0,705275	8	0,706695
4	0,699808	9	0,703022	4	0,705350	9	0,706731
5	0,699953	43,0	0,703132	5	0,705424	48,0	0,706766
6	0,700096	1	0,703241	6	0,705496	1	0,706798
7	0,700238	2	0,703348	7	0,705567	2	0,706829
8	0,700379	3	0,703455	8	0,705637	3	0,706859
9	0,700518	4	0,703560	9	0,705705	4	0,706888
41,0	0,700656	5	0,703663	46,0	0,705772	5	0,706914
1	0,700793	6	0,703765	1	0,705836	6	0,706939
2	0,700929	7	0,703865	2	0,705899	7	0,706962
3	0,701063	8	0,703964	3	0,705960	8	0,706983
4	0,701196	9	0,704062	4	0,706020	9	0,707003
5	0,701327	44,0	0,704158	5	0,706078	49,0	0,707021
6	0,701457	1	0,704253	6	0,706135	1	0,707037
7	0,701585	2	0,704346	7	0,706191	2	0,707052
8	0,701712	3	0,704438	8	0,706245	3	0,707064
9	0,701838	4	0,704528	9	0,706296	4	0,707076
42,0	0,701963	5	0,704617	47,0	0,706347	5	0,707085
1	0,702086	6	0,704705	1	0,706397	6	0,707093
2	0,702208	7	0,704791	2	0,706445	7	0,707099
3	0,702328	8	0,704875	3	0,706490	8	0,707103
4	0,702447	9	0,704958	4	0,706534	9	0,707106
5	0,702565	45,0	0,705040	5	0,706577	50,0	0,707107

Suite de la TABLE V.

Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade de longitude.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
50,0	0,707107	52,5	0,706548	55,0	0,704810	57,5	0,701784
1	0,707106	6	0,706502	1	0,704714	6	0,701634
2	0,707103	7	0,706454	2	0,704616	7	0,701482
3	0,707099	8	0,706404	3	0,704517	8	0,701328
4	0,707093	9	0,706352	4	0,704415	9	0,701171
5	0,707085	53,0	0,706298	5	0,704311	58,0	0,701013
6	0,707075	1	0,706243	6	0,704205	1	0,700852
7	0,707064	2	0,706186	7	0,704097	2	0,700689
8	0,707051	3	0,706126	8	0,703987	3	0,700523
9	0,707036	4	0,706064	9	0,703874	4	0,700355
51,0	0,707019	5	0,706000	56,0	0,703759	5	0,700184
1	0,707001	6	0,705935	1	0,703643	6	0,700012
2	0,706980	7	0,705867	2	0,703525	7	0,699837
3	0,706958	8	0,705798	3	0,703404	8	0,699660
4	0,706934	9	0,705726	4	0,703281	9	0,699480
5	0,706908	54,0	0,705653	5	0,703155	59,0	0,699298
6	0,706880	1	0,705578	6	0,703028	1	0,699114
7	0,706851	2	0,705501	7	0,702899	2	0,698927
8	0,706819	3	0,705421	8	0,702767	3	0,698737
9	0,706786	4	0,705340	9	0,702633	4	0,698546
52,0	0,706751	5	0,705257	57,0	0,702497	5	0,698351
1	0,706714	6	0,705171	1	0,702358	6	0,698155
2	0,706675	7	0,705084	2	0,702218	7	0,697956
3	0,706635	8	0,704995	3	0,702076	8	0,697755
4	0,706592	9	0,704903	4	0,701931	9	0,697551
5	0,706548	55,0	0,704810	5	0,701784	60,0	0,697344

Suite de la TABLE V.

Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade de longitude.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
60,0	0,697344	62,5	0,691345	65,0	0,683610	67,5	0,673927
1	0,697135	6	0,691071	1	0,683262	6	0,673495
2	0,696924	7	0,690793	2	0,682910	7	0,673060
3	0,696710	8	0,690513	3	0,682556	8	0,672622
4	0,696493	9	0,690230	4	0,682198	9	0,672180
5	0,696274	63,0	0,689944	5	0,681837	68,0	0,671735
6	0,696053	1	0,689655	6	0,681473	1	0,671286
7	0,695829	2	0,689363	7	0,681106	2	0,670832
8	0,695602	3	0,689069	8	0,680735	3	0,670376
9	0,695373	4	0,688771	9	0,680361	4	0,669916
61,0	0,695141	5	0,688471	66,0	0,679984	5	0,669452
1	0,694907	6	0,688168	1	0,679604	6	0,668985
2	0,694670	7	0,687862	2	0,679219	7	0,668513
3	0,694430	8	0,687553	3	0,678833	8	0,668038
4	0,694188	9	0,687241	4	0,678443	9	0,667559
5	0,693943	64,0	0,686926	5	0,678050	69,0	0,667076
6	0,693695	1	0,686608	6	0,677653	1	0,666590
7	0,693445	2	0,686287	7	0,677252	2	0,666099
8	0,693192	3	0,685963	8	0,676849	3	0,665605
9	0,692936	4	0,685636	9	0,676442	4	0,665107
62,0	0,692678	5	0,685306	67,0	0,676031	5	0,664605
1	0,692417	6	0,684973	1	0,675617	6	0,664099
2	0,692153	7	0,684637	2	0,675200	7	0,663589
3	0,691886	8	0,684298	3	0,674779	8	0,663075
4	0,691617	9	0,683956	4	0,674355	9	0,662557
5	0,691345	65,0	0,683610	5	0,673927	70,0	0,662036

TABLE VI.

Logarithmes des rayons des Parallèles à l'équateur développés.

LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
30,0	6,9233733	32,5	6,9102570	35,0	6,8967283	37,5	6,8827599
1	6,9228562	6	6,9097241	1	6,8961782	6	6,8821917
2	6,9223385	7	6,9091902	2	6,8956273	7	6,8816228
3	6,9218202	8	6,9086559	3	6,8650758	8	6,8810529
4	6,9213013	9	6,9081208	4	6,8945236	9	6,8804823
5	6,9207819	33,0	6,9075851	5	6,8939707	38,0	6,8799111
6	6,9202617	1	6,9070487	6	6,8934171	1	6,8793381
7	6,9197409	2	6,9065117	7	6,8928626	2	6,8787652
8	6,9192194	3	6,9059740	8	6,8923055	3	6,8781916
9	0,9186975	4	6,9054356	9	6,8917518	4	6,8776173
31,0	6,9181747	5	6,9048965	36,0	6,8911954	5	6,8770421
1	6,9176514	6	6,9043568	1	6,8906381	6	6,8764662
2	6,9171273	7	6,9038163	2	6,8900800	7	6,8758896
3	6,9166028	8	6,9032752	3	6,8895214	8	6,8753121
4	6,9160776	9	6,9027334	4	6,8889619	9	6,8747339
5	6,9155517	34,0	6,9021910	5	6,8884020	39,0	6,8741558
6	6,9150251	1	6,9016478	6	6,8878409	1	6,8735761
7	6,9144979	2	6,9011039	7	6,8872794	2	6,8729956
8	6,9139701	3	6,9005594	8	6,8867171	3	6,8724143
9	6,9134417	4	6,9000142	9	6,8861540	4	6,8718321
32,0	6,9129126	5	6,8994682	37,0	6,8855902	5	6,8712492
1	6,9123828	6	6,8989217	1	6,8850256	6	6,8706655
2	6,9118522	7	6,8983743	2	6,8844604	7	6,8700809
3	6,9113212	8	6,8978263	3	6,8838942	8	6,8694957
4	6,9107895	9	6,8972776	4	6,8833275	9	6,8689095
5	6,9102570	35,0	6,8967283	5	6,8825799	40,0	6,8683223 .

Suite de la TABLE VI.

Logarithmes des rayons des Parallèles à l'équateur développés.

LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
40,0	6,8683223	42,5	6,8533837	45,0	6,8379073	47,5	6,8218533
1	6,8677350	6	6,8527932	1	6,8372765	6	6,8211983
2	6,8671465	7	6,8521662	2	6,8366447	7	6,8205426
3	6,8665571	8	6,8515558	3	6,8360122	8	6,8198858
4	6,8659671	9	6,8509447	4	6,8353786	9	6,8192280
5	6,8653761	43,0	6,8503328	5	6,8347440	48,0	6,8185692
6	6,8647844	1	6,8497200	6	6,8341087	1	6,8179094
7	6,8641918	2	6,8491062	7	6,8334723	2	6,8172486
8	6,8635984	3	6,8484916	8	6,8328349	3	6,8165867
9	6,8630043	4	6,8478761	9	6,8321966	4	6,8159238
41,0	6,8624092	5	6,8472599	46,0	6,8315574	5	6,8152600
1	6,8618134	6	6,8466426	1	6,8309171	6	6,8145950
2	6,8612167	7	6,8460246	2	6,8302760	7	6,8139291
3	6,8606193	8	6,8454055	3	6,8296340	8	6,8132621
4	6,8600209	9	6,8447857	4	6,8289910	9	6,8125940
5	6,8594217	44,0	6,8441649	5	6,8283469	49,0	6,8119250
6	6,8588217	1	6,8435430	6	6,8277019	1	6,8112550
7	6,8582209	2	6,8429207	7	6,8270560	2	6,8105839
8	6,8576193	3	6,8422971	8	6,8264091	3	6,8099117
9	6,8570168	4	6,8416728	9	6,8257612	4	6,8092384
42,0	6,8564134	5	6,8410474	47,0	6,8251123	5	6,8085641
1	6,8558092	6	6,8404213	1	6,8244625	6	6,8078888
2	6,8552041	7	6,8397942	2	6,8238106	7	6,8072123
3	6,8545982	8	6,8391662	3	6,8231598	8	6,8065349
4	6,8539914	9	6,8385372	4	6,8225069	9	6,8058563
5	6,8533837	45,0	6,8379073	5	6,8218533	50,0	6,8051767

Suite de la TABLE VI.

Logarithmes des rayons des Parallèles à l'équateur développés.

LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
50,0	6,8051767	52,5	6,7878281	55,0	6,7697510	57,5	6,7508820
1	6,8044961	6	6,7871195	1	6,7690119	6	6,7501097
2	6,8038143	7	6,7864097	2	6,7682715	7	6,7493362
3	6,8031314	8	6,7856986	3	6,7675299	8	6,7485611
4	6,8024474	9	6,7849862	4	6,7667870	9	6,7477848
5	6,8017624	53,0	6,7842728	5	6,7660428	58,0	6,7470069
6	6,8010765	1	6,7835583	6	6,7652972	1	6,7462277
7	6,8003892	2	6,7828425	7	6,7645504	2	6,7454471
8	6,7997009	3	6,7821256	8	6,7638023	3	6,7446651
9	6,7990115	4	6,7814074	9	6,7630529	4	6,7438817
51,0	6,7983210	5	6,7806881	56,0	6,7623023	5	6,7430968
1	6,7976294	6	6,7799675	1	6,7615503	6	6,7423105
2	6,7969366	7	6,7792458	2	6,7607970	7	6,7415227
3	6,7962427	8	6,7785228	3	6,7600423	8	6,7407335
4	6,7955478	9	6,7777986	4	6,7592864	9	6,7399431
5	6,7948517	54,0	6,7770732	5	6,7585290	59,0	6,7391509
6	6,7941544	1	6,7763465	6	6,7577704	1	6,7383573
7	6,7934561	2	6,7756186	7	6,7570103	2	6,7375622
8	6,7927566	3	6,7748896	8	6,7562491	3	6,7367657
9	6,7920559	4	6,7741592	9	6,7554864	4	6,7359678
52,0	6,7913541	5	6,7734277	57,0	6,7547225	5	6,7351683
1	6,7906513	6	6,7726949	1	6,7539572	6	6,7343674
2	6,7899473	7	6,7719607	2	6,7531904	7	6,7335651
3	6,7892421	8	6,7712255	3	6,7524222	8	6,7327612
4	6,7885357	9	6,7704888	4	6,7516529	9	6,7319558
5	6,7878281	55,0	6,7697510	5	6,7508820	60,0	6,7311488

Suite de la TABLE VI.

Logarithmes des rayons des Parallèles à l'équateur développés.

LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.	LATIT.	RAYON des Parallèles.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
60,0	6,7311488	62,5	6,7104691	65,0	6,6887480	67,5	6,6658756
1	6,7303404	6	6,7096210	1	6,6878560	6	6,6649350
2	6,7295303	7	6,7087710	2	6,6869620	7	6,6639925
3	6,7287189	8	6,7079195	3	6,6860663	8	6,6630478
4	6,7279061	9	6,7070663	4	6,6851688	9	6,6621008
5	6,7270915	63,0	6,7062115	5	6,6842693	68,0	6,6611521
6	6,7262754	1	6,7053549	6	6,6833681	1	6,6602011
7	6,7254577	2	6,7044966	7	6,6824649	2	6,6592482
8	6,7246385	3	6,7036365	8	6,6815597	3	6,6582929
9	6,7238177	4	6,7027748	9	6,6806527	4	6,6573357
61,0	6,7229955	5	6,7019113	66,0	6,6797439	5	6,6563762
1	6,7221716	6	6,7010462	1	6,6788330	6	6,6554149
2	6,7213462	7	6,7001793	2	6,6779204	7	6,6544512
3	6,7206019	8	6,6993106	3	6,6770056	8	6,6534853
4	6,7196905	9	6,6984401	4	6,6760890	9	6,6525173
5	6,7188603	64,0	6,6975680	5	6,6751703	69,0	6,6515472
6	6,7180285	1	6,6966941	6	6,6742498	1	6,6505749
7	6,7171951	2	6,6958183	7	6,6733273	2	6,6496003
8	6,7163601	3	6,6949409	8	6,6724029	3	6,6486235
9	6,7155234	4	6,6940615	9	6,6714765	4	6,6476444
62,0	6,7146851	5	6,6931805	67,0	6,6705481	5	6,6466634
1	6,7138452	6	6,6922976	1	6,6696176	6	6,6456801
2	6,7130037	7	6,6914129	2	6,6686864	7	6,6446943
3	6,7121605	8	6,6905264	3	6,6677505	8	6,6437065
4	6,7113157	9	6,6896380	4	6,6668141	9	6,6427164
5	6,7104691	65,0	6,6887480	5	6,6658756	70,0	6,6417238

TABLE VII.

Logarithmes des Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
30,0	9,8313031	32,5	9,8353442	35,0	9,8389197	37,5	9,8420149
1	9,8314735	6	9,8354964	1	9,8390529	6	9,8421285
2	9,8316433	7	9,8356476	2	9,8391853	7	9,8422412
3	9,8318123	8	9,8357981	3	9,8393168	8	9,8423531
4	9,8319806	9	9,8359480	4	9,8394476	9	9,8424642
5	9,8321482	33,0	9,8360970	5	9,8395776	38,0	9,8425746
6	9,8323151	1	9,8362453	6	9,8397070	1	9,8426852
7	9,8324804	2	9,8363928	7	9,8398356	2	9,8427939
8	9,8326460	3	9,8365396	8	9,8399633	3	9,8429019
9	9,8328106	4	9,8366857	9	9,8400903	4	9,8430091
31,0	9,8329766	5	9,8368310	36,0	9,8402163	5	9,8431154
1	9,8331379	6	9,8369756	1	9,8403418	6	9,8432208
2	9,8333003	7	9,8371194	2	9,8404665	7	9,8433255
3	9,8334619	8	9,8372623	3	9,8405903	8	9,8434294
4	9,8336226	9	9,8374045	4	9,8407134	9	9,8435325
5	9,8337828	34,0	9,8375464	5	9,8408355	39,0	9,8436339
6	9,8339424	1	9,8376872	6	9,8409572	1	9,8437353
7	9,8341011	2	9,8378271	7	9,8410778	2	9,8438359
8	9,8342591	3	9,8379664	8	9,8411976	3	9,8439357
9	9,8344163	4	9,8381049	9	9,8413168	4	9,8440348
32,0	9,8345727	5	9,8382426	37,0	9,8414352	5	9,8441328
1	9,8347285	6	9,8383795	1	9,8415527	6	9,8442301
2	9,8348836	7	9,8385158	2	9,8416695	7	9,8443266
3	9,8350379	8	9,8386512	3	9,8417854	8	9,8444223
4	9,8351913	9	9,8387859	4	9,8419005	9	9,8445172
5	9,8353442	35,0	9,8389197	5	9,8420149	40,0	9,8446112

Suite de la TABLE VII.

Logarithmes des Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade.

LATIT	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
40,0	9,8446112	42,5	9,8466865	45,0	9,8482134	47,5	9,8491594
1	9,8447043	6	9,8467584	1	9,8482626	6	9,8491846
2	9,8447967	7	9,8468295	2	9,8483109	7	9,8492088
3	9,8448883	8	9,8468998	3	9,8483583	8	9,8492320
4	9,8449789	9	9,8469681	4	9,8484047	9	9,8492543
5	9,8450687	43,0	9,8470364	5	9,8484503	48,0	9,8492755
6	9,8451577	1	9,8471039	6	9,8484946	1	9,8492957
7	9,8452458	2	9,8471705	7	9,8485383	2	9,8493149
8	9,8453331	3	9,8472362	8	9,8485810	3	9,8593332
9	9,8454196	4	9,8473010	9	9,8486228	4	9,8493504
41,0	9,8455053	5	9,8473648	46,0	9,8486637	5	9,8493665
1	9,8455901	6	9,8474277	1	9,8487036	6	9,8493817
2	9,8456739	7	9,8474895	2	9,8487424	7	9,8493959
3	9,8457569	8	9,8475506	3	9,8487802	8	9,8494090
4	9,8458391	9	9,8476109	4	9,8488171	9	9,8494211
5	9,8459204	44,0	9,8476704	5	9,8488531	49,0	9,8494321
6	9,8460009	1	9,8477289	6	9,8488881	1	9,8494421
7	9,8460805	2	9,8477864	7	9,8489221	2	9,8494510
8	9,8461592	3	9,8478429	8	9,8489551	3	9,8494590
9	9,8462372	4	9,8478985	9	9,8489872	4	9,8494659
42,0	9,8463143	5	9,8479533	47,0	9,8490184	5	9,8494717
1	9,8463905	6	9,8480072	1	9,8490486	6	9,8494764
2	9,8464657	7	9,8480601	2	9,8490788	7	9,8494801
3	9,8465401	8	9,8481121	3	9,8491060	8	9,8494828
4	9,8466137	9	9,8481632	4	9,8491332	9	9,8494845
5	9,8466865	45,0	9,8482134	5	9,8491594	50,0	9,8494853

Suite de la TABLE VII.

Logarithmes des Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
50,0	9,8494853	52,5	9,8491418	55,0	9,8480717	57,5	9,8462032
1	9,8494843	6	9,8491138	1	9,8480128	6	9,8461105
2	9,8494827	7	9,8490837	2	9,8479527	7	9,8460164
3	9,8494801	8	9,8490531	3	9,8478912	8	9,8459210
4	9,8494765	9	9,8490213	4	9,8478284	9	9,8458242
5	9,8494716	53,0	9,8489883	5	9,8477643	58,0	9,8457261
6	9,8494655	1	9,8489541	6	9,8476991	1	9,8456263
7	9,8494586	2	9,8489186	7	9,8476325	2	9,8455250
8	9,8494505	3	9,8488818	8	9,8475645	3	9,8454223
9	9,8494412	4	9,8488438	9	9,8474952	4	9,8453181
51,0	9,8494311	5	9,8488047	56,0	9,8474246	5	9,8452125
1	9,8494198	6	9,8487644	1	9,8473526	6	9,8451056
2	9,8494072	7	9,8487229	2	9,8472793	7	9,8449971
3	9,8493935	8	9,8486802	3	9,8472047	8	9,8448871
4	9,8493786	9	9,8486364	4	9,8471287	9	9,8447755
5	9,8493628	54,0	9,8485913	5	9,8470514	59,0	9,8446624
6	9,8493459	1	9,8485449	6	9,8469728	1	9,8445479
7	9,8493277	2	9,8484973	7	9,8468929	2	9,8444318
8	9,8493085	3	9,8484485	8	9,8468115	3	9,8443141
9	9,8492882	4	9,8483984	9	9,8467288	4	9,8441948
52,0	9,8492667	5	9,8483471	57,0	9,8466445	5	9,8440741
1	9,8492440	6	9,8482946	1	9,8465589	6	9,8439518
2	9,8492201	7	9,8482408	2	9,8464721	7	9,8438281
3	0,8491951	8	9,8481857	3	9,8463839	8	9,8437028
4	9,8491690	9	9,8481294	4	9,8462943	9	9,8435759
5	9,8491418	55,0	9,8480717	5	9,8462032	60,0	9,8434473

Suite de la TABLE VII.

Logarithmes des Angles au centre des Parallèles développés, correspondant à un grade.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
60,0	9,8434473	62,5	9,8396950	65,0	9,8348089	67,5	9,8286129
1	9,8433171	6	9,8395224	1	9,8345875	6	9,8283347
2	9,8431855	7	9,8393480	2	9,8343640	7	9,8280540
3	9,8430521	8	9,8391718	3	9,8341383	8	9,8277712
4	9,8429171	9	9,8389937	4	9,8339105	9	9,8274858
5	9,8427804	63,0	9,8388137	5	9,8336806	68,0	9,8271979
6	9,8426422	1	9,8386317	6	9,8334486	1	9,8269073
7	9,8425023	2	9,8384481	7	9,8332145	2	9,8266141
8	9,8423610	3	9,8382625	8	9,8329782	3	9,8263184
9	9,8422179	4	9,8380750	9	9,8327396	4	9,8260202
61,0	9,8420731	5	9,8378856	66,0	9,8324989	5	9,8257194
1	9,8419266	6	9,8776943	1	9,8322559	6	9,8254160
2	9,8417784	7	9,8375012	2	9,8320106	7	9,8251098
3	9,8416285	8	9,8373061	3	9,8317632	8	9,8248009
4	9,8414769	9	9,8371089	4	9,8315135	9	9,8244895
5	9,8413237	64,0	9,8369098	5	9,8312615	69,0	9,8241756
6	9,8411688	1	9,8367087	6	9,8310072	1	9,8238585
7	9,8410120	2	9,8365056	7	9,8307506	2	9,8235390
8	9,8408536	3	9,8363006	8	9,8304918	3	9,8232167
9	9,8406934	4	9,8360936	9	9,8302304	4	9,8228917
62,0	9,8405315	5	9,8358846	67,0	9,8299667	5	9,8225636
1	9,8403678	6	9,8356735	1	9,8297007	6	9,8222328
2	9,8402023	7	9,8354603	2	9,8294324	7	9,8218992
3	9,8400350	8	9,8352452	3	9,8291618	8	9,8215628
4	9,8398659	9	9,8350281	4	9,8288884	9	9,8212235
5	9,8396950	65,0	9,8348089	5	9,8286129	70,0	9,8208816

TABLE VIII

Pour servir à transporter l'origine des Coordonnées et numéroter les feuilles d'une Carte.

N.° des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.° des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.° des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.° des côtés.	DISTANCES à l'axe des	
	ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.
N.°	Mètres.	Mètres.	N.°	Mètres.	Mètres.	N.°	Mètres.	Mètres.	N.°	Mètres.	Mètres.
0	.....	.....	25	12,0	19,2	50	24,5	39,2	75	37,0	59,2
1	0,0	0,0	26	12,5	20,0	51	25,0	40,0	76	37,5	60,0
2	0,5	0,8	27	13,0	20,8	52	25,5	40,8	77	38,0	60,8
3	1,0	1,6	28	13,5	21,6	53	26,0	41,6	78	38,5	61,6
4	1,5	2,4	29	14,0	22,4	54	26,5	42,4	79	39,0	62,4
5	2,0	3,2	30	14,5	23,2	55	27,0	43,2	80	39,5	63,2
6	2.5	4,0	31	15,0	24,0	56	27,5	44,0	81	40,0	64,0
7	3,0	4,8	32	15,5	24,8	57	28,0	44,8	82	40,5	64,8
8	3,5	5,6	33	16,0	25,6	58	28,5	45,6	83	41,0	65,6
9	4,0	6,4	34	16,5	26,4	59	29,0	46,4	84	41,5	66,4
10	4,5	7,2	35	17,0	27,2	60	29,5	47,2	85	42,0	67,2
11	5,0	8,0	36	17,5	28,0	61	30,0	48,0	86	42,5	68,0
12	5,5	8,8	37	18,0	28,8	62	30,5	48,8	87	43,0	68,8
13	6,0	9,6	38	18,5	29,6	63	31,0	49,6.	88	43,5	69,6
14	6,5	10,4	39	19,0	30,4	64	31,5	50,4	89	44,0	70,4
15	7,0	11,2	40	19,5	31,2	65	32,0	51,2	90	44,5	71,2
16	7,5	12,0	41	20,0	32,0	66	32,5	52,0	91	45,0	72,0
17	8,0	12,8	42	20,5	32,8	67	33,0	52,8	92	45,5	72,8
18	8,5	13,6	43	21,0	33,6	68	33,5	53,6	93	46,0	73,6
19	9,0	14,4	44	21,5	34,4	69	34,0	54,4	94	46,5	74,4
20	9,5	15,2	45	22,0	35,2	70	34,5	55,2	95	47,0	75,2
21	10,0	16,0	46	22,5	36,0	71	35,0	56,0	96	47,5	76,0
22	10,5	16,8	47	23,0	36,8	72	35,5	56,8	97	48,0	76,8
23	11,0	17,6	48	23,5	37,6	73	36,0	57,6	98	48,5	77,6
24	11,5	18,4	49	24,0	38,4	74	36,5	58,4	99	49,0	78,4
25	12,0	19,2	50	24,5	39,2	75	37,0	59,2	100	49,5	79,2

Suite de la TABLE VIII

Pour servir à transporter l'origine des Coordonnées et numéroter les feuilles d'une Carte.

N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des	
	ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.
N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.
100	49,5	79,2	125	62,0	99,2	150	74,5	119,2	175	87,0	139,2
101	50,0	80,0	126	62,5	100,0	151	75,0	120,0	176	87,5	140,0
102	50,5	80,8	127	63,0	100,8	152	75,5	120,8	177	88,0	140,8
103	51,0	81,6	128	63,5	101,6	153	76,0	121,6	178	88,5	141,6
104	51,5	82,4	129	64,0	102,4	154	76,5	122,4	179	89,0	142,4
105	52,0	83,2	130	64,5	103,2	155	77,0	123,2	180	89,5	143,2
106	52,5	84,0	131	65,0	104,0	156	77,5	124,0	181	90,0	144,0
107	53,0	84,8	132	65,5	104,8	157	78,0	124,8	182	90,5	144,8
108	53,5	85,6	133	66,0	105,6	158	78,5	125,6	183	91,0	145,6
109	54,0	86,4	134	66,5	106,4	159	79,0	126,4	184	91,5	146,4
110	54,5	87,2	135	67,0	107,2	160	79,5	127,2	185	92,0	147,2
111	55,0	88,0	136	67,5	108,0	161	80,0	128,0	186	92,5	148,0
112	55,5	88,8	137	68,0	108,8	162	80,5	128,8	187	93,0	148,8
113	56,0	89,6	138	68,5	109,6	163	81,0	129,6	188	93,5	149,6
114	56,5	90,4	139	69,0	110,4	164	81,5	130,4	189	94,0	150,4
115	57,0	91,2	140	69,5	111,2	165	82,0	131,2	190	94,5	151,2
116	57,5	92,0	141	70,0	112,0	166	82,5	132,0	191	95,0	152,0
117	58,0	92,8	142	70,5	112,8	167	83,0	132,8	192	95,5	152,8
118	58,5	93,6	143	71,0	113,6	168	83,5	133,6	193	96,0	153,6
119	59,0	94,4	144	71,5	114,4	169	84,0	134,4	194	96,5	154,4
120	59,5	95,2	145	72,0	115,2	170	84,5	135,2	195	97,0	155,2
121	60,0	96,0	146	72,5	116,0	171	85,0	136,0	196	97,5	156,0
122	60,5	96,8	147	73,0	116,8	172	85,5	136,8	197	98,0	156,8
123	61,0	97,6	148	73,5	117,6	173	86,0	137,6	198	98,5	157,6
124	61,5	98,4	149	74,0	118,4	174	86,5	138,4	199	99,0	158,4
125	62,0	99,2	150	74,5	119,2	175	87,0	139,2	200	99,5	159,2

Suite de la TABLE VIII

Pour servir à transporter l'origine des Coordonnées et numéroter les feuilles d'une Carte.

N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des		N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des	
	ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.		ordonn.es	abscisses.
N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.
200	99,5	159,2	225	112,0	179,2	250	124,5	199,2	275	137,0	219,2
201	100,0	160,0	226	112,5	180,0	251	125,0	200,0	276	137,5	220,0
202	100,5	160,8	227	113,0	180,8	252	125,5	200,8	277	138,0	220,8
203	101,0	161,6	228	113,5	181,6	253	126,0	201,6	278	138,5	221,6
204	101,5	162,4	229	114,0	182,4	254	126,5	202,4	279	139,0	222,4
205	102,0	163,2	230	114,5	183,2	255	127,0	203,2	280	139,5	223,2
206	102,5	164,0	231	115,0	184,0	256	127,5	204,0	281	140,0	224,0
207	103,0	164,8	232	115,5	184,8	257	128,0	204,8	282	140,5	224,8
208	103,5	165,6	233	116,0	185,6	258	128,5	205,6	283	141,0	225,6
209	104,0	166,4	234	116,5	186,4	259	129,0	206,4	284	141,5	226,4
210	104,5	167,2	235	117,0	187,2	260	129,5	207,2	285	142,0	227,2
211	105,0	168,0	236	117,5	188,0	261	130,0	208,0	286	142,5	228,0
212	105,5	168,8	237	118,0	188,8	262	130,5	208,8	287	143,0	228,8
213	106,0	169,6	238	118,5	189,6	263	131,0	209,6	288	143,5	229,6
214	106,5	170,4	239	119,0	190,4	264	131,5	210,4	289	144,0	230,4
215	107,0	171,2	240	119,5	191,2	265	132,0	211,2	290	144,5	231,2
216	107,5	172,0	241	120,0	192,0	266	132,5	212,0	291	145,0	232,0
217	108,0	172,8	242	120,5	192,8	267	133,0	212,8	292	145,5	232,8
218	108,5	173,6	243	121,0	193,6	268	133,5	213,6	293	146,0	233,6
219	109,0	174,4	244	121,5	194,4	269	134,0	214,4	294	146,5	234,4
220	109,5	175,2	245	122,0	195,2	270	134,5	215,2	295	147,0	235,2
221	110,0	176,0	246	122,5	196,0	271	135,0	216,0	296	147,5	236,0
222	110,5	176,8	247	123,0	196,8	272	135,5	216,8	297	148,0	236,8
223	111,0	177,6	248	123,5	197,6	273	136,0	217,6	298	148,5	237,6
224	111,5	178,4	249	124,0	198,4	274	136,5	218,4	299	149,0	238,4
225	112,0	179,2	250	124,5	199,2	275	137,0	219,2	300	149,5	239,2

Suite de la TABLE VIII

Pour servir à transporter l'origine des Coordonnées et numéroter les feuilles d'une Carte.

N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des ordonn.es	DISTANCES à l'axe des abscisses.	N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des ordonn.es	DISTANCES à l'axe des abscisses.	N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des ordonn.es	DISTANCES à l'axe des abscisses.	N.os des côtés.	DISTANCES à l'axe des ordonn.es	DISTANCES à l'axe des abscisses.
N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.	N.os	Mètres.	Mètres.
300	149,5	239,2	325	162,0	259,2	350	174,5	279,2	375	187,0	299,2
301	150,0	240,0	326	162,5	260,0	351	175,0	280,0	376	187,5	300,0
302	150,5	240,8	327	163,0	260,8	352	175,5	280,8	377	188,0	300,8
303	151,0	241,6	328	163,5	261,6	353	176,0	281,6	378	188,5	301,6
304	151,5	242,4	329	164,0	262,4	354	176,5	282,4	379	189,0	302,4
305	152,0	243,2	330	164,5	263,2	355	177,0	283,2	380	189,5	303,2
306	152,5	244,0	331	165,0	264,0	356	177,5	284,0	381	190,0	304,0
307	153,0	244,8	332	165,5	264,8	357	178,0	284,8	382	190,5	304,8
308	153,5	245,6	333	166,0	265,6	358	178,5	285,6	383	191,0	305,6
309	154,0	246,4	334	166,5	266,4	359	179,0	286,4	384	191,5	306,4
310	154,5	247,2	335	167,0	267,2	360	179,5	287,2	385	192,0	307,2
311	155,0	248,0	336	167,5	268,0	361	180,0	288,0	386	192,5	308,0
312	155,5	248,8	337	168,0	268,8	362	180,5	288,8	387	193,0	308,8
313	156,0	249,6	338	168,5	269,6	363	181,0	289,6	388	193,5	309,6
314	156,5	250,4	339	169,0	270,4	364	181,5	290,4	389	194,0	310,4
315	157,0	251,2	340	169,5	271,2	365	182,0	291,2	390	194,5	311,2
316	157,5	252,0	341	170,0	272,0	366	182,5	292,0	391	195,0	312,0
317	158,0	252,8	342	170,5	272,8	367	183,0	292,8	392	195,5	312,8
318	158,5	253,6	343	171,0	273,6	368	183,5	293,6	393	196,0	313,6
319	159,0	254,4	344	171,5	274,4	369	184,0	294,4	394	196,5	314,4
320	159,5	255,2	345	172,0	275,2	370	184,5	295,2	395	197,0	315,2
321	160,0	256,0	346	172,5	276,0	371	185,0	296,0	396	197,5	316,0
322	160,5	256,8	347	173,0	276,8	372	185,5	296,8	397	198,0	316,8
323	161,0	257,6	348	173,5	277,6	373	186,0	297,6	398	198,5	317,6
324	161,5	258,4	349	174,0	278,4	374	186,5	298,4	399	199,0	318,4
325	162,0	259,2	350	174,5	279,2	375	187,0	299,2	400	199,5	319,2

TABLE IX.

Logarithmes des rayons des Parallèles développés,

ou Supplément à la TABLE VI.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
51,00	6,7983210	51,25	6,7965898	51,50	6,7948517	51,75	6,7931065
01	6,7982518	26	6,7965204	51	6,7947820	76	6,7930365
02	6,7981827	27	6,7964510	52	6,7947124	77	6,7929666
03	6,7981136	28	6,7963816	53	6,7946426	78	6,7928965
04	6,7980444	29	6,7963122	54	6,7945729	79	6,7928266
05	6,7979753	51,30	6,7962428	55	6,7945032	51,80	6,7927566
06	6,7979061	31	6,7961733	56	6,7944335	81	6,7926866
07	6,7978369	32	6,7961038	57	6,7943638	82	6,7926166
08	6,7977678	33	6,7960344	58	6,7942940	83	6,7925465
09	6,7976986	34	6,7959649	59	6,7942243	84	6,7924764
51,10	6,7976294	35	6,7958954	51,60	6,7941544	85	6,7924064
11	6,7975602	36	6,7958259	61	6,7940846	86	6,7923363
12	6,7974909	37	6,7957564	62	6,7940149	87	6,7922663
13	6,7974216	38	6,7956898	63	6,7939451	88	6,7921962
14	6,7973524	39	6,7956173	64	6,7938753	89	6,7921261
15	6,7972831	51,40	6,7955478	65	6,7938054	51,90	6,7920559
16	6,7972138	41	6,7954782	66	6,7937355	91	6,7919858
17	6,7971445	42	6,7954086	67	6,7936657	92	6,7919157
18	6,7970753	43	6,7953391	68	6,7935958	93	6,7918456
19	6,7970060	44	6,7952695	69	6,7935260	94	6,7917754
51,20	6,7969366	45	6,7951999	51,70	6,7934561	95	6,7917053
21	6,7968673	46	6,7951302	71	6,7933862	96	6,7916350
22	6,7967979	47	6,7950606	72	6,7933162	97	6,7915648
23	6,7967285	48	6,7949910	73	6,7932463	98	6,7914947
24	6,7966592	49	6,7949213	74	6,7931764	99	6,7914245
51,25	6,7965898	51,50	6,7948517	51,75	6,7931065	52,00	6,7913542

Suite de la TABLE IX.

Logarithmes des rayons des Parallèles développés,

ou Supplément à la TABLE VI.

LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.	LATIT.	RAYON du Parallèle.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
52,00	6,7913542	52,25	6,7895949	52,50	6,7878281	52,75	6,7860542
01	6,7912839	26	6,7895243	51	6,7877573	76	6,7859831
02	6,7912137	27	6,7894537	52	6,7876864	77	6,7859120
03	6,7911435	28	6,7893832	53	6,7876156	78	6,7858409
04	6,7910732	29	6,7893127	54	6,7875448	79	6,7857697
05	6,7910029	52,30	6,7892420	55	6,7874740	52,80	6,7856986
06	6,7909326	31	6,7891714	56	6,7874030	81	6,7856273
07	6,7908623	32	6,7891009	57	6,7873321	82	6,7855562
08	6,7907920	33	6,7890303	58	6,7872613	83	6,7854849
09	6,7907217	34	6,7889597	59	6,7871904	84	6,7854137
52,10	6,7906513	35	6,7888890	52,60	6,7871194	85	6,7853426
11	6,7905809	36	6,7888184	61	6,7870485	86	6,7852713
12	6,7905105	37	6,7887477	62	6,7869776	87	6,7852000
13	6,7904402	38	6,7886771	63	6,7869065	88	6,7851288
14	6,6903698	39	6,7886063	64	6,7868356	89	6,7850576
15	6,7902994	52,40	6,7885357	65	6,7867646	52,90	6,7849862
16	6,7902289	41	6,7884650	66	6,7866936	91	6,7849150
17	6,7901585	42	6,7883943	67	6,7866226	92	6,7848437
18	6,7900881	43	6,7883235	68	6,7865516	93	6,7847724
19	6,7900177	44	6,7882528	69	6,7864807	94	6,7847010
52,20	6,7899473	45	6,7881820	52,70	6,7864097	95	6,7846297
21	6,7898767	46	6,7881113	71	6,7863385	96	6,7845584
22	6,7898063	47	6,7880405	72	6,7862675	97	6,7844870
23	6,7897358	48	6,7879697	73	6,7861965	98	6,7844156
24	6,7896654	49	6,7878989	74	6,7861254	99	6,7843443
25	6,7895949	52,50	6,7878281	52,75	6,7860542	53,00	6,7842728

TABLE X.

Logarithmes des angles au centre des Parallèles développés,

ou Supplément à la TABLE VII.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
51,00	9,8494311	51,25	9,8494004	51,50	9,8493628	51,75	9,8493182
01	9,8494300	26	9,8493991	51	9,8493611	76	9,8493163
02	9,8494289	27	9,8493977	52	9,8493595	77	9,8493143
03	9,8494279	28	9,8493963	53	9,8493578	78	9,8493124
04	9,8494267	29	9,8493949	54	9,8493561	79	9,8493004
05	9,8494256	51,30	9,8493935	55	9,8493544	51,80	9,8493084
06	9,8494245	31	9,8493921	56	9,8493526	81	9,8493063
07	9,8494234	32	9,8493907	57	9,8493510	82	9,8493043
08	9,8494223	33	9,8493892	58	9,8493594	83	9,8493023
09	9,8494211	34	9,8493878	59	9,8493576	84	9,8493003
51,10	9,8494200	35	9,8493863	51,60	9,8493459	85	9,8492982
11	9,8494189	36	9,8493849	61	9,8493442	86	9,8492962
12	9,8494175	37	9,8493833	62	9,8493424	87	9,8492942
13	9,8494162	38	9,8493819	63	9,8493406	88	9,8492922
14	9,8494149	39	9,8493803	64	9,8493387	89	9,8492902
15	9,8494136	51,40	9,8493787	65	9,8493369	51,90	9,8492882
16	9,8494123	41	9,8493772	66	9,8493351	91	8,8492861
17	9,8494110	42	9,8493757	67	9,8493333	92	9,8492840
18	9,8494096	43	9,8493741	68	9,8493315	93	9,8492819
19	9,8494084	44	9,8493726	69	9,8493296	94	9,8492797
51,20	9,8494072	45	9,8493709	51,70	9,8493277	95	9,8492776
21	9,8494059	46	9,8493693	71	9,8493259	96	9,8492754
22	9,8494045	47	9,8493677	72	9,8493241	97	9,8492732
23	9,8494032	48	9,8493661	73	9,8493221	98	9,8492711
24	9,8494017	49	9,8493645	74	9,8493202	99	9,8492689
25	9,8494004	51,50	9,8493628	51,75	9,8493182	52,00	9,8492667

Suite de la TABLE X.

Logarithmes des angles au centre des Parallèles développés,

ou Supplément à la TABLE VII.

LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.	LATIT.	ANGLES.
Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.	Grad.	Logarithmes.
52,00	9,8492667	52,25	9,8492076	52,50	9,8491418	52,75	9,8490686
01	9,8492645	26	9,8492051	51	9,8491389	76	9,8490655
02	9,8492623	27	9,8492026	52	9,8491361	77	9,8490624
03	9,8492599	28	9,8491999	53	9,8491333	78	9,8490593
04	9,8492576	29	9,8491975	54	9,8491305	79	9,8490562
05	9,8492553	52,30	9,8491951	55	9,8491276	52,80	9,8490531
06	9,8492531	31	9,8491925	56	9,8491247	81	9,8490500
07	9,8492509	32	9,8491899	57	9,8491218	82	9,8490468
08	9,8492486	33	9,8491872	58	9,8491190	83	9,8490436
09	9,8492463	34	9,8491846	59	9,8491162	84	6,8490404
52,10	9,8492440	35	9,8491821	52,60	9,8491133	85	9,8490372
11	9,8492416	36	9,8491795	61	9,8491104	86	9,8490340
12	9,8492392	37	9,8491769	62	9,8491075	87	9,8490308
13	9,8492368	38	9,8491742	63	9,8491046	88	9,8490276
14	9,8492344	39	9,8491716	64	9,8491017	89	9,8490244
15	9,8492319	52,40	9,8491690	65	9,8490988	52,90	9,8490212
16	9,8492296	41	9,8491661	66	9,8490957	91	9,8490180
17	9,8492272	42	9,8491635	67	9,8490928	92	9,8490147
18	9,8492248	43	9,8491609	68	9,8490897	93	9,8490115
19	9,8492225	44	9,8491583	69	9,8490868	94	9,8490081
52,20	9,8492201	45	9,8491556	52,70	9,8490837	95	9,8490048
21	9,8492177	46	9,8491528	71	9,8490808	96	9,8490016
22	9,8492151	47	9,8491499	72	9,8490777	97	9,8489982
23	9,8492126	48	9,8491472	73	9,8490748	98	9,8489949
24	9,8492102	49	9,8491445	74	9,8490717	99	9,8489916
52,25	9,8492076	52,50	9,8491418	75	9,8490686	53,00	9,8489883

TABLE XI.

Grades de longitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
30,0	89288,8	32,5	87442,2	35,0	85461,0	37,5	83347,9
1	89217,5	6	87365,5	1	85379,0	6	83260,7
2	89146,0	7	87288,6	2	85296,7	7	83173,2
3	89074,3	8	87211,5	3	85214,2	8	83085,6
4	89002,7	9	87134,2	4	85131,5	9	82997,8
5	88930,3	33,0	87056,7	5	85048,7	38,0	82909,7
6	88858,0	1	86978,9	6	84965,7	1	82821,5
7	88785,4	2	86900,9	7	84882,5	2	82733,0
8	88712,6	3	86822,7	8	84799,0	3	82644,4
9	88639,6	4	86744,3	9	84715,3	4	82555,5
31,0	88566,4	5	86665,7	36,0	84631,4	5	82466,4
1	88493,0	6	86586,9	1	84547,3	6	82377,2
2	88419,4	7	86507,8	2	84463,0	7	82287,7
3	88345,5	8	86428,6	3	84378,5	8	82198,0
4	88271,4	9	86349,2	4	84293,7	9	82108,1
5	88197,1	34,0	86269,5	5	84208,8	39,0	82018,1
6	88122,6	1	86189,6	6	84123,6	1	81927,8
7	88047,9	2	86109,5	7	84038,3	2	81837,3
8	87973,0	3	86029,2	8	83952,7	3	81746,6
9	87897,8	4	85948,6	9	83866,9	4	81655,7
32,0	87822,4	5	85867,8	37,0	83780,9	5	81564,6
1	87746,8	6	85786,9	1	83694,7	6	81473,3
2	87671,0	7	85705,7	2	83608,3	7	81381,8
3	87594,9	8	85624,4	3	83521,7	8	81290,2
4	87518,6	9	85542,8	4	83434,9	9	81198,3
5	87442,2	35,0	85461,0	5	83347,9	40,0	81106,1

Suite de la TABLE XI.

Grades de longitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
40,0	81106,1	42,5	78739,0	45,0	76250,1	47,5	73643,2
1	81013,8	6	78641,8	1	76148,1	6	73536,5
2	80921,3	7	78544,3	2	76045,9	7	73429,6
3	80828,6	8	78446,7	3	75943,5	8	73322,6
4	80735,7	9	78348,9	4	75840,9	9	73215,4
5	80642,6	43,0	78250,9	5	75738,1	48,0	73108,0
6	80549,3	1	78152,7	6	75635,1	1	73000,4
7	80455,8	2	78054,3	7	75531,9	2	72892,6
8	80362,1	3	77955,7	8	75428,5	3	72784,6
9	80268,2	4	77856,9	9	75325,0	4	72676,5
41,0	80174,1	5	77757,9	46,0	75221,3	5	72568,2
1	80079,8	6	77658,7	1	75117,4	6	72459,7
2	79985,3	7	77559,3	2	75013,3	7	72351,1
3	79890,7	8	77459,7	3	74909,0	8	72242,2
4	79795,8	9	77360,0	4	74804,5	9	72133,2
5	79700,7	44,0	77260,1	5	74699,9	49,0	72024,0
6	79605,4	1	77159,9	6	74595,0	1	71914,6
7	79510,0	2	77059,6	7	74490,0	2	71805,0
8	79414,3	3	76959,1	8	74384,8	3	71695,3
9	79318,4	4	76858,4	9	74279,4	4	71585,4
42,0	79222,3	5	76757,5	47,0	74173,9	5	71475,3
1	79126,1	6	76656,4	1	74068,1	6	71365,0
2	79029,6	7	76555,1	2	73962,1	7	71254,5
3	78932,9	8	76453,6	3	73856,0	8	71143,9
4	78836,1	9	76352,0	4	73749,7	9	71033,1
5	78739,0	45,0	76250,1	5	73643,2	50,0	70922,1

Suite de la TABLE XI.

Grades de longitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
50,0	70922,1	52,5	68091,0	55,0	65154,2	57,5	62116,2
1	70810,9	6	67975,6	1	65034,6	6	61992,6
2	70699,6	7	67859,9	2	64914,8	7	61868,9
3	70588,1	8	67744,1	3	64794,9	8	61745,0
4	70476,4	9	67628,2	4	64674,8	9	61621,0
5	70364,6	53,0	67512,1	5	64554,6	58,0	61496,8
6	70252,5	1	67395,8	6	64434,2	1	61372,5
7	70140,3	2	67279,2	7	64313,6	2	61248,0
8	70027,9	3	67162,5	8	64192,8	3	61123,4
9	69915,4	4	67045,7	9	64071,9	4	60998,6
51,0	69802,7	5	66928,7	56,0	63950,9	5	60873,7
1	69689,8	6	66811,5	1	63829,7	6	60748,6
2	69576,7	7	66694,2	2	63708,3	7	60623,3
3	69463,4	8	66576,8	3	63586,8	8	60497,9
4	69350,0	9	66459,2	4	63465,1	9	60372,4
5	69236,4	54,0	66341,4	5	63343,2	59,0	60246,7
6	69122,6	1	66223,4	6	63221,2	1	60120,8
7	69008,7	2	66105,2	7	63099,1	2	59994,8
8	68894,6	3	65986,9	8	62976,8	3	59868,7
9	68780,3	4	65868,5	9	62854,3	4	59742,4
52,0	68665,8	5	65749,8	57,0	62731,7	5	59616,0
1	68551,2	6	65631,0	1	62608,9	6	59489,4
2	68436,4	7	65512,1	2	62485,9	7	59362,6
3	68321,4	8	65393,0	3	62362,8	8	59235,7
4	68206,3	9	65273,7	4	62239,6	9	59108,7
5	68091,0	55,0	65154,2	5	62116,2	60,0	58981,5

Suite de la TABLE XI.

Grades de longitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.	LATIT.	GRADE de Longitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
60,0	58981,5	62,5	55755,1	65,0	52441,7	67,5	49046,5
1	58854,2	6	55624,1	1	52307,4	6	48909,1
2	58726,7	7	55494,0	2	52173,0	7	48771,6
3	58599,1	8	55362,8	3	52038,5	8	48633,9
4	58471,3	9	55231,5	4	51903,8	9	48496,1
5	58343,4	63,0	55099,1	5	51769,0	68,0	48358,2
6	58215,3	1	54967,6	6	51634,1	1	48220,2
7	58087,1	2	54835,9	7	51499,0	2	48082,1
8	57958,8	3	54704,0	8	51363,8	3	47943,8
9	57830,3	4	54572,1	9	51228,5	4	47805,4
61,0	57701,6	5	54440,0	66,0	51093,1	5	47666,9
1	57572,8	6	54307,8	1	50957,5	6	47528,3
2	57443,9	7	54175,3	2	50821,8	7	47389,6
3	57314,8	8	54042,7	3	50686,0	8	47250,8
4	57185,6	9	53910,0	4	50550,1	9	47111,8
5	57056,3	64,0	53777,1	5	50414,0	69,0	46972,4
6	56926,8	1	53644,1	6	50277,8	1	46833,2
7	56797,2	2	53511,0	7	50141,5	2	46693,9
8	56667,4	3	53377,8	8	50005,1	3	46554,4
9	56537,5	4	53244,5	9	49868,5	4	46414,7
62,0	56407,4	5	53111,0	67,0	49731,8	5	46275,1
1	56277,2	6	52977,4	1	49595,0	6	46135,2
2	56146,9	7	52843,7	2	49458,1	7	45995,2
3	56016,3	8	52709,8	3	49321,0	8	45855,2
4	55885,7	9	52575,8	4	49183,8	9	45715,0
5	55755,1	65,0	52441,7	5	49046,5	70,0	45574,8

TABLE XII.

Grades de latitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
30,0	99741,9	32,5	99771,3	35,0	99802,2	37,5	99834,4
1	99743,1	6	99772,6	1	99803,5	6	99835,7
2	99744,2	7	99773,8	2	99804,7	7	99837,0
3	99745,4	8	99775,0	3	99806,0	8	99838,3
4	99746,5	9	99776,2	4	99807,3	9	99839,6
5	99747,7	33,0	99777,4	5	99808,6	38,0	99840,9
6	99748,9	1	99778,6	6	99809,8	1	99842,2
7	99750,0	2	99779,9	7	99811,1	2	99843,5
8	99751,2	3	99781,1	8	99812,4	3	99844,9
9	99752,3	4	99782,3	9	99813,6	4	99846,2
31,0	99753,5	5	99783,6	36,0	99814,9	5	99847,5
1	99754,7	6	99784,8	1	99816,2	6	99848,8
2	99755,9	7	99786,0	2	99817,5	7	99850,1
3	99757,0	8	99787,2	3	99818,8	8	99851,5
4	99758,2	9	99788,5	4	99820,1	9	99852,8
5	99759,4	34,0	99789,7	5	99821,4	39,0	99854,1
6	99760,6	1	99790,9	6	99822,6	1	99855,4
7	99761,8	2	99792,2	7	99823,9	2	99856,8
8	99762,9	3	99793,4	8	99825,2	3	99858,1
9	99764,1	4	99794,7	9	99826,5	4	99859,5
32,0	99765,3	5	99796,0	37,0	99827,8	5	99860,8
1	99766,5	6	99797,2	1	99829,1	6	99862,1
2	99767,7	7	99798,5	2	99830,4	7	99863,5
3	99768,9	8	99799,7	3	99831,7	8	99864,8
4	99770,1	9	99801,0	4	99833,0	9	99866,2
5	99771,3	35,0	99802,2	5	99834,4	40,0	99867,5

Suite de la TABLE XII.

Grades de latitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
40,0	99867,5	42,5	99901,5	45,0	99936,0	47,5	99971,0
1	99868,9	6	99902,8	1	99937,4	6	99972,4
2	99870,2	7	99904,2	2	99938,8	7	99973,8
3	99871,6	8	99905,6	3	99940,2	8	99975,2
4	99872,9	9	99906,9	4	99941,6	9	99976,6
5	99874,3	43,0	99908,3	5	99943,0	48,0	99978,0
6	99875,6	1	99909,7	6	99944,4	1	99979,4
7	99877,0	2	99911,1	7	99945,8	2	99980,8
8	99878,3	3	99912,4	8	99947,2	3	99982,2
9	99879,7	4	99913,8	9	99948,6	4	99983,6
41,0	99881,0	5	99915,2	46,0	99950,0	5	99985,1
1	99882,4	6	99916,6	1	99951,4	6	99986,5
2	99883,7	7	99918,0	2	99952,8	7	99987,9
3	99885,1	8	99919,3	3	99954,2	8	99989,3
4	99886,4	9	99920,7	4	99955,6	9	99990,7
5	99887,8	44,0	99922,1	5	99957,0	49,0	99992,1
6	99889,2	1	99923,5	6	99958,4	1	99993,5
7	99890,5	2	99924,9	7	99959,8	2	99994,9
8	99891,9	3	99926,3	8	99961,2	3	99996,3
9	99893,2	4	99927,7	9	99962,6	4	99997,7
42,0	99894,6	5	99929,1	47,0	99964,0	5	99999,2
1	99896,0	6	99930,4	1	99965,4	6	100000,6
2	99897,3	7	99931,8	2	99966,8	7	100002,0
3	99898,7	8	99933,2	3	99968,2	8	100003,4
4	99900,1	9	99934,6	4	99969,6	9	100004,8
5	99901,5	45,0	99936,0	5	99971,0	50,0	100006,2

Suite de la TABLE XII.

Grades de latitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
50,0	100006,2	52,5	100041.4	55,0	100076,3	57,5	100110,7
1	100007,6	6	100042,8	1	100077,7	6	100112,1
2	100009,0	7	100044,2	2	100079,1	7	100113,5
3	100010,4	8	100045,6	3	100080,4	8	100114,7
4	100011,8	9	100047,0	4	100081,8	9	100116,2
5	100013,2	53,0	100048,4	5	100083,2	58,0	100117,6
6	100014,7	1	100049,8	6	100084,6	1	100119,0
7	100016,1	2	100051,2	7	100086,0	2	100120,3
8	100017,5	3	100052,6	8	100087,4	3	100121,7
9	100019,0	4	100054,0	9	100088,8	4	100123,0
51,0	100020,3	5	100055,4	56,0	100090,2	5	100124,4
1	100021,7	6	100056,8	1	100091,6	6	100125,8
2	100023,1	7	100058,2	2	100092,9	7	100127,1
3	100024,5	8	100059,6	3	100094,3	8	100128,5
4	100025,9	9	100061,0	4	100095,7	9	100129,8
5	100027,3	54,0	100062,4	5	100097,0	59,0	100131,2
6	100028,8	1	100063,8	6	100098,4	1	100132,5
7	100030,2	2	100065,2	7	100099,8	2	100133,9
8	100031,6	3	100066,6	8	100101,2	3	100135,2
9	100033,0	4	100068,0	9	100102,5	4	100136,6
52,0	100034,4	5	100069,3	57,0	100103,9	5	100137,9
1	100035,8	6	100070,7	1	100105,3	6	100139,2
2	100037,2	7	100072,1	2	100106,6	7	100140,6
3	100038,6	8	100073,5	3	100108,0	8	100141,9
4	100040,0	9	100074,9	4	100109,4	9	100143,3
5	100041,4	55,0	100076,3	5	100110,7	60,0	100144,6

Suite de la TABLE XII.

Grades de latitude dans le Sphéroïde elliptique.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
60,0	100144,6	62,5	100177,5	65,0	100209,4	67,5	100239,9
1	100145,9	6	100178,8	1	100210,6	6	100241,1
2	100147,3	7	100180,1	2	100211,9	7	180242,3
3	100148,6	8	100181,4	3	100213,1	8	100243,5
4	100149,9	9	100182,7	4	100214,3	9	100244,7
5	100151,2	63,0	100184,0	5	100215,5	68,0	100245,9
6	100152,6	1	100185,3	6	100216,8	1	100247,1
7	100153,9	2	100186,6	7	100218,0	2	100248,2
8	100155,2	3	100187,8	8	100219,2	3	100249,4
9	100156,6	4	100189,1	9	100220,5	4	100250,5
61,0	100157,9	5	100190,4	66,0	100221,7	5	100251,7
1	100159,2	6	100191,7	1	100222,9	6	100252,9
2	100160,5	7	100192,9	2	100224,1	7	100254,0
3	100161,8	8	100194,2	3	100225,4	8	100255,2
4	100163,1	9	100195,5	4	100226,6	9	100256,3
5	100164,4	64,0	100196,8	5	100227,8	69,0	100257,5
6	100165,8	1	100198,1	6	100229,0	1	100258,6
7	100167,1	2	100199,3	7	100230,2	2	100259,8
8	100168,4	3	100200,6	8	100231,4	3	100260,9
9	100169,7	4	100201,8	9	100232,7	4	100262,1
62,0	100171,0	5	100203,1	67,0	100233,9	5	100263,2
1	100172,3	6	100204,4	1	100235,1	6	100264,4
2	100173,6	7	100205,6	2	100236,3	7	100265,5
3	100174,9	8	100206,9	3	100237,5	8	100266,7
4	100176,2	9	100208,1	4	100238,7	9	100267,8
5	100177,5	65,0	100209,4	5	100239,9	70,0	100269,0

TABLE XIII.

Latitudes des Parallèles correspondans aux différentes distances du Parallèle moyen.

DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.
Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.
2000000	29,9725	1750000	32,4788	1500000	34,9843	1250000	37,4890
1990000	30,0728	1740000	32,5790	1490000	35,0845	1240000	37,5892
1980000	30,1731	1730000	32,6793	1480000	35,1847	1230000	37,6894
1970000	30,2733	1720000	32,7795	1470000	35,2849	1220000	37,7895
1960000	30,3736	1710000	32,8797	1460000	35,3851	1210000	37,8897
1950000	30,4738	1700000	32,9800	1450000	35,4853	1200000	37,9899
1940000	30,5741	1690000	33,0802	1440000	35,5856	1190000	38,0900
1930000	30,6744	1680000	33,1804	1430000	35,6858	1180000	38,1902
1920000	30,7746	1670000	33,2806	1420000	35,7860	1170000	38,2903
1910000	30,8749	1660000	33,3808	1410000	35,8862	1160000	38,3905
1900000	30,9751	1650000	33,4811	1400000	35,9864	1150000	38,4907
1890000	31,0754	1640000	33,5813	1390000	36,0866	1140000	38,5908
1880000	31,1756	1630000	33,6815	1380000	36,1867	1130000	38,6910
1870000	31,2759	1620000	33,7817	1370000	36,2869	1120000	38,7911
1860000	31,3761	1610000	33,8820	1360000	36,3871	1110000	38,8913
1850000	31,4764	1600000	33,9822	1350000	36,4873	1100000	38,9915
1840000	31,5766	1590000	34,0824	1340000	36,5875	1090000	39,0916
1830000	31,6769	1580000	34,1826	1330000	36,6876	1080000	39,1918
1820000	31,7771	1570000	34,2828	1320000	36,7878	1070000	39,2919
1810000	31,8774	1560000	34,3830	1310000	36,8880	1060000	39,3920
1800000	31,9776	1550000	34,4832	1300000	36,9882	1050000	39,4922
1790000	32,0778	1540000	34,5834	1290000	37,0883	1040000	39,5923
1780000	32,1781	1530000	34,6837	1280000	37,1885	1030000	39,6925
1770000	32,2783	1520000	34,7839	1270000	37,2887	1020000	39,7926
1760000	32,3785	1510000	34,8841	1260000	37,3888	1010000	39,8928
1750000	32,4788	1500000	34,9843	1250000	37,4890	1000000	39,9929

Suite de la TABLE XIII.

Latitudes des Parallèles correspondans aux différentes distances du Parallèle moyen.

DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.
Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.
1000000	39,9929	750000	42,4959	500000	44,9982	250000	47,4995
990000	40,0931	740000	42,5961	490000	45,0983	240000	47,5996
980000	40,1932	730000	42,6962	480000	45,1983	230000	47,6996
970000	40,2933	720000	42,7963	470000	45,2984	220000	47,7997
960000	40,3934	710000	42,8964	460000	45,3985	210000	47,8997
950000	40,4936	700000	42,9965	450000	45,4985	200000	47,9997
940000	40,5937	690000	43,0966	440000	45,5986	190000	48,0997
930000	40,6938	680000	43,1967	430000	45,6986	180000	48,1997
920000	40,7940	670000	43,2968	420000	45,7987	170000	48,2998
910000	40,8941	660000	43,3969	410000	45,8988	160000	48,3998
900000	40,9943	650000	43,4970	400000	45,9988	150000	48,4998
890000	41,0944	640000	43,5970	390000	46,0989	140000	48,5998
880000	41,1945	630000	43,6971	380000	46,1989	130000	48,6998
870000	41,2946	620000	43,7972	370000	46,2990	120000	48,7999
860000	41,3947	610000	43,8973	360000	46,3990	110000	48,8999
850000	41,4948	600000	43,9974	350000	46,4991	100000	48,9999
840000	41,5950	590000	44,0975	340000	46,5991	90000	49,0999
830000	41,6951	580000	44,1976	330000	46,6992	80000	49,1999
820000	41,7952	570000	44,2977	320000	46,7992	70000	49,2999
810000	41,8953	560000	44,3977	310000	46,8993	60000	49,3999
800000	41,9954	550000	44,4978	300000	46,9993	50000	49,4999
790000	42,0955	540000	44,5979	290000	47,0994	40000	49,6000
780000	42,1956	530000	44,6980	280000	47,1994	30000	49,7000
770000	42,2957	520000	44,7981	270000	47,2995	20000	49,8000
760000	42,3958	510000	44,8981	260000	47,3995	10000	49,9000
750000	42,4959	500000	44,9982	250000	47,4995	00000	50,0000

Suite de la TABLE XIII.

Latitudes des Parallèles correspondans aux différentes distances du Parallèle moyen.

DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.
Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.
00000	50,0000	250000	52,4996	500000	54,9983	750000	57,4961
10000	50,1000	260000	52,5995	510000	55,0982	760000	57,5960
20000	50,2000	270000	52,6995	520000	55,1982	770000	57,6959
30000	50,3000	280000	52,7995	530000	55,2981	780000	57,7958
40000	50,4000	290000	52,8994	540000	55,3980	790000	57,8957
50000	50,5000	300000	52,9994	550000	55,4979	800000	57,9956
60000	50,5999	310000	53,0994	560000	55,5978	810000	58,0955
70000	50,6999	320000	53,1993	570000	55,6978	820000	58,1954
80000	50,7999	330000	53,2993	580000	55,7977	830000	58,2952
90000	50,8999	340000	53,3992	590000	55,8976	840000	58,3951
100000	50,9999	350000	53,4992	600000	55,9975	850000	58,4950
110000	51,0999	360000	53,5991	610000	56,0974	860000	58,5949
120000	51,1999	370000	53,6991	620000	56,1973	870000	58,6948
130000	51,2998	380000	53,7990	630000	56,2972	880000	58,7946
140000	51,3998	390000	53,8990	640000	56,3972	890000	58,8945
150000	51,4998	400000	53,9989	650000	56,4971	900000	58,9944
160000	51,5998	410000	54,0988	660000	56,5970	910000	59,0943
170000	51,6998	420000	54,1988	670000	56,6969	920000	59,1941
180000	51,7997	430000	54,2987	680000	56,7968	930000	59,2940
190000	51,8997	440000	54,3987	690000	56,8967	940000	59,3939
200000	51,9997	450000	54,4986	700000	56,9966	950000	59,4937
210000	52,0997	460000	54,5985	71,0000	57,0965	960000	59,5936
220000	52,1997	470000	54,6985	720000	57,1964	970000	59,6935
230000	52,2996	480000	54,7984	730000	57,2963	980000	59,7934
240000	52,3996	490000	54,8984	740000	57,3962	990000	59,8932
250000	52,4996	500000	54,9983	750000	57,4961	1000000	59,9931

Suite de la TABLE XIII.

Latitudes des Parallèles correspondans aux différentes distances du Parallèle moyen.

DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.	DISTANCES.	LATIT.
Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.	Mètres.	Grades.
1000000	59,9931	1250000	62,4892	1500000	64,9846	1750000	67,4791
1010000	60,0930	1260000	62,5891	1510000	65,0844	1760000	67,5789
1020000	60,1928	1270000	62,6889	1520000	65,1842	1770000	67,6786
1030000	60,2927	1280000	62,7887	1530000	65,2840	1780000	67,7784
1040000	60,3925	1290000	62,8885	1540000	65,3838	1790000	67,8782
1050000	60,4924	1300000	62,9884	1550000	65,4835	1800000	67,9780
1060000	60,5922	1310000	63,0882	1560000	65,5833	1810000	68,0778
1070000	60,6921	1320000	63,1880	1570000	65,6831	1820000	68,1775
1080000	60,7919	1330000	63,2878	1580000	65,7829	1830000	68,2773
1090000	60,8918	1340000	63,3877	1590000	65,8827	1840000	68,3770
1100000	60,9917	1350000	63,4875	1600000	65,9825	1850000	68,4768
1110000	61,0915	1360000	63,5873	1610000	66,0823	1860000	68,5765
1120000	61,1914	1370000	63,6871	1620000	66,1821	1870000	68,6763
1130000	61,2912	1380000	63,7869	1630000	66,2818	1880000	68,7760
1140000	61,3911	1390000	63,8867	1640000	66,3816	1890000	68,8758
1150000	61,4909	1400000	63,9865	1650000	66,4814	1900000	68,9755
1160000	61,5907	1410000	64,0863	1660000	66,5812	1910000	69,0752
1170000	61,6906	1420000	64,1861	1670000	66,6809	1920000	69,1750
1180000	61,7904	1430000	64,2859	1680000	66,7807	1930000	69,2747
1190000	61,8903	1440000	64,3857	1690000	66,8805	1940000	69,3745
1200000	61,9901	1450000	64,4855	1700000	66,9803	1950000	69,4742
1210000	62,0899	1460000	64,5853	1710000	67,0800	1960000	69,5740
1220000	62,1897	1470000	64,6851	1720000	67,1798	1970000	69,6737
1230000	62,2896	1480000	64,7850	1730000	67,2796	1980000	69,7735
1240000	62,3894	1490000	64,8848	1740000	67,3793	1990000	69,8732
1250000	62,4892	1500000	64,9846	1750000	67,4791	2000000	69,9729

TABLE XIV

Pour servir à calculer la différence de l'angle formé par un Méridien et un Parallèle, avec l'angle droit.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
30,0	0,224125	32,5	0,195833	35,0	0,167613	37,5	0,139478
1	0,222991	6	0,194703	1	0,166487	6	0,138354
2	0,221859	7	0,193572	2	0,165359	7	0,137230
3	0,220726	8	0,192443	3	0,164232	8	0,136108
4	0,219593	9	0,191312	4	0,163105	9	0,134985
5	0,218462	33,0	0,190182	5	0,161979	38,0	0,133862
6	0,217329	1	0,189053	6	0,160853	1	0,132739
7	0,216195	2	0,187923	7	0,159727	2	0,131617
8	0,215063	3	0,186794	8	0,158601	3	0,130494
9	0,213931	4	0,185664	9	0.157475	4	0,129372
31,0	0,212800	5	0,184535	36,0	0,156349	5	0,128250
1	0,211669	6	0,183407	1	0,155224	6	0,127128
2	0,210536	7	0,182277	2	0,154098	7	0,126006
3	0,209405	8	0,181148	3	0,152972	8	0,124884
4	0,208273	9	0,180020	4	0,151847	9	0,123762
5	0,207142	34,0	0,178892	5	0,150721	39,0	0,122639
6	0,206010	1	0,177763	6	0,149597	1	0,121517
7	0,204879	2	0,176635	7	0,148472	2	0,120396
8	0,203748	3	0,175507	8	0,147348	3	0,119275
9	0,202616	4	0,174379	9	0,146223	4	0,118154
32,0	0,201485	5	0,173251	37,0	0,145098	5	0,117033
1	0,200354	6	0,172123	1	0,143974	6	0,115912
2	0,199224	7	0,170996	2	0,142850	7	0,114792
3	0,198093	8	0,169869	3	0,141726	8	0,113671
4	0,196963	9	0,168740	4	0,140602	9	0,112551
5	0,195833	35,0	0,167613	5	0,139478	40,0	0,111431

Suite de la TABLE XIV

Pour servir à calculer la différence de l'angle formé par un Méridien et un Parallèle, avec l'angle droit.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
40,0	0,111431	42,5	0,083471	45,0	0,055592	47,5	0,027776
1	0,110311	6	0,082354	1	0,054478	6	0,026665
2	0,109190	7	0,081238	2	0,053364	7	0,025553
3	0,108071	8	0,080122	3	0,052251	8	0,024441
4	0,106951	9	0,079006	4	0,051137	9	0,023330
5	0,105832	43,0	0,077889	5	0,050024	48,0	0,022219
6	0,104712	1	0,076773	6	0,048910	1	0,021107
7	0,103593	2	0,075657	7	0,047797	2	0,019995
8	0,102474	3	0,074542	8	0,046685	3	0,018884
9	0,101355	4	0,073426	9	0,045572	4	0,017774
41,0	0,100237	5	0,072310	46,0	0,044459	5	0,016663
1	0,099117	6	0,071195	1	0,043347	6	0,015552
2	0,097999	7	0,070079	2	0,042234	7	0,014441
3	0,096881	8	0,068964	3	0,041121	8	0,013330
4	0,095763	9	0,067849	4	0,040008	9	0,012219
5	0,094645	44,0	0,066734	5	0,038895	49,0	0,011108
6	0,093527	1	0,065619	6	0,037783	1	0,009997
7	0,092408	2	0,064505	7	0,036671	2	0,008887
8	0,091290	3	0,063390	8	0,035559	3	0,007775
9	0,090173	4	0,062275	9	0,034446	4	0,006665
42,0	0,089056	5	0,061161	47,0	0,033335	5	0,005554
1	0,087939	6	0,060048	1	0,032224	6	0,004443
2	0,086822	7	0,058933	2	0,031112	7	0,003332
3	0,085704	8	0,057819	3	0,030000	8	0,002221
4	0,084587	9	0,056705	4	0,028888	9	0,001111
5	0,083471	45,0	0,055592	5	0,027776	50,0	0,000000

Suite de la TABLE XIV

Pour servir à calculer la différence de l'angle formé par un Méridien et un Parallèle, avec l'angle droit.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
50,0	0,000000	52,5	0,027774	55,0	0,055596	57,5	0,083533
1	0,001111	6	0,028886	1	0,056711	6	0,084654
2	0,002222	7	0,029997	2	0,057827	7	0,085776
3	0,003332	8	0,031109	3	0,058941	8	0,086898
4	0,004443	9	0,032221	4	0,060057	9	0,088020
5	0,005554	53,0	0,033333	5	0,061172	58,0	0,089142
6	0,006665	1	0,034444	6	0,062288	1	0,090265
7	0,007775	2	0,035556	7	0,063404	2	0,091388
8	0,008885	3	0,036668	8	0,064519	3	0,092511
9	0,010096	4	0,037781	9	0,065637	4	0,093635
51,0	0,011107	5	0,038894	56,0	0,066753	5	0,094760
1	0,012217	6	0,040006	1	0,067871	6	0,095884
2	0,013329	7	0,041119	2	0,068987	7	0,097009
3	0,014440	8	0,042232	3	0,070104	8	0,098134
4	0,015551	9	0,043345	4	0,071223	9	0,099261
5	0,016662	54,0	0,044458	5	0,072341	59,0	0,100387
6	0,017773	1	0,045571	6	0,073459	1	0,101513
7	0,018884	2	0,046684	7	0,074576	2	0,102640
8	0,019995	3	0,047798	8	0,075695	3	0,103768
9	0,021106	4	0,048911	9	0,076814	4	0,104895
52,0	0,022218	5	0,050025	57,0	0,077947	5	0,106025
1	0,023329	6	0,051139	1	0,079154	6	0,107153
2	0,024441	7	0,052253	2	0,080173	7	0,108282
3	0,025552	8	0,053367	3	0,081292	8	0,109411
4	0,026663	9	0,054482	4	0,082412	9	0,110542
5	0,027774	55,0	0,055596	5	0,083533	60,0	0,111673

Suite de la TABLE XIV

Pour servir à calculer la différence de l'angle formé par un Méridien et un Parallèle, avec l'angle droit.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.	Grad.	Grade.
60,0	0,111673	62,5	0,140125	65,0	0,169029	67,5	0,198569
1	0,112804	6	0,141270	1	0,170198	6	0,199767
2	0,113936	7	0,142418	2	0,171367	7	0,200967
3	0,115068	8	0,143565	3	0,172537	8	0,202167
4	0,116201	9	0,144714	4	0,173708	9	0,203369
5	0,117334	63,0	0,145863	5	0,174881	68,0	0,204572
6	0,118468	1	0,147014	6	0,176154	1	0,205776
7	0,119602	2	0,148165	7	0,177228	2	0,206984
8	0,120737	3	0,149316	8	0,178405	3	0,208191
9	0,121872	4	0,150469	9	0,179580	4	0,209400
61,0	0,123009	5	0,151623	66,0	0,180758	5	0,210611
1	0,124145	6	0,152777	1	0,181937	6	0,211823
2	0,125282	7	0,153932	2	0,183117	7	0,213038
3	0,126420	8	0,155087	3	0,184298	8	0,214253
4	0,127558	9	0,156244	4	0,185483	9	0,215471
5	0,128698	64,0	0,157402	5	0,186663	69,0	0,216690
6	0,129838	1	0,158560	6	0,187848	1	0,217910
7	0,130978	2	0,159720	7	0,189035	2	0,219132
8	0,132119	3	0,160881	8	0,190221	3	0,220356
9	0,133261	4	0,162042	9	0,191410	4	0,221581
62,0	0,134403	5	0,163204	67,0	0,192600	5	0,222808
1	0,135545	6	0,164367	1	0,193792	6	0,224037
2	0,136689	7	0,165531	2	0,194984	7	0,225268
3	0,137834	8	0,166704	3	0,196178	8	0,226501
4	0,138979	9	0,167862	4	0,197372	9	0,227735
5	0,140125	65,0	0,169029	5	0,198569	70,0	0,228971

TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	0	1	2	3	4
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,00	0,00000	0,00008	0,00066	0,00222	0,00525
0,01	0,00000	0,00008	0,00067	0,00224	0,00529
0,02	0,00000	0,00009	0,00068	0,00227	0,00533
0,03	0,00000	0,00009	0,00069	0,00229	0,00537
0,04	0,00000	0,00009	0,00070	0,00231	0,00541
0,05	0,00000	0,00009	0,00071	0,00233	0,00545
0,06	0,00000	0,00010	0,00072	0,00236	0,00549
0,07	0,00000	0,00010	0,00073	0,00238	0,00553
0,08	0,00000	0,00010	0,00074	0,00240	0,00557
0,09	0,00000	0,00011	0,00075	0,00243	0,00562
0,10	0,00000	0,00011	0,00076	0,00245	0,00566
0,11	0,00000	0,00011	0,00077	0,00248	0,00570
0,12	0,00000	0,00012	0,00078	0,00250	0,00574
0,13	0,00000	0,00012	0,00079	0,00252	0,00578
0,14	0,00000	0,00012	0,00081	0,00254	0,00582
0,15	0,00000	0,00012	0,00082	0,00256	0,00587
0,16	0,00000	0,00013	0,00083	0,00259	0,00591
0,17	0,00000	0,00013	0,00084	0,00261	0,00595
0,18	0,00000	0,00013	0,00085	0,00264	0,00599
0,19	0,00000	0,00014	0,00086	0,00266	0,00604
0,20	0,00000	0,00014	0,00088	0,00269	0,00608
0,21	0,00000	0,00014	0,00089	0,00271	0,00612
0,22	0,00000	0,00015	0,00090	0,00274	0,00617
0,23	0,00000	0,00015	0,00091	0,00276	0,00621
0,24	0,00000	0,00016	0,00092	0,00279	0,00625
0,25	0,00000	0,00016	0,00094	0,00281	0,00630

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	5	6	7	8	9
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,00	0,01024	0,01767	0,02801	0,04172	0,05925
0,01	0,01031	0,01776	0,02813	0,04187	0,05944
0,02	0,01037	0,01785	0,02825	0,04203	0,05964
0,03	0,01043	0,01794	0,02837	0,04219	0,05984
0,04	0,01049	0,01803	0,02849	0,04234	0,06004
0,05	0,01055	0,01812	0,02861	0,04250	0,06023
0,06	0,01062	0,01821	0,02873	0,04266	0,06043
0,07	0,01068	0,01830	0,02885	0,04281	0,06063
0,08	0,01074	0,01839	0,02898	0,04297	0,06083
0,09	0,01080	0,01848	0,02920	0,04313	0,06103
0,10	0,01087	0,01857	0,02922	0,04329	0,06123
0,11	0,01092	0,01866	0,02934	0,04345	0,06143
0,12	0,01099	0,01875	0,02947	0,04361	0,06163
0,13	0,01105	0,01884	0,02959	0,04377	0,06183
0,14	0,01112	0,01893	0,02971	0,04393	0,06204
0,15	0,01119	0,01902	0,02984	0,04409	0,06224
0,16	0,01125	0,01912	0,02996	0,04425	0,06244
0,17	0,01131	0,01921	0,03009	0,04441	0,06264
0,18	0,01138	0,01930	0,03021	0,04458	0,06284
0,19	0,01145	0,01940	0,03034	0,04474	0,06305
0,20	0,01151	0,01949	0,03046	0,04490	0,06326
0,21	0,01158	0,01959	0,03059	0,04506	0,06346
0,22	0,01165	0,01968	0,03072	0,04523	0,06367
0,23	0,01172	0,01978	0,03085	0,04539	0,06387
0,24	0,01179	0,01987	0,03097	0,04556	0,06408
0,25	0,01185	0,01996	0,03110	0,04572	0,06428

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	0	1	2	3	4
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,25	0,00000	0,00016	0,00094	0,00281	0,00630
0,26	0,00000	0,00017	0,00095	0,00284	0,00635
0,27	0,00000	0,00017	0,00096	0,00287	0,00639
0,28	0,00000	0,00017	0,00097	0,00289	0,00643
0,29	0,00000	0,00018	0,00099	0,00292	0,00648
0,30	0,00000	0,00018	0,00100	0,00295	0,00652
0,31	0,00000	0,00019	0,00101	0,00298	0,00657
0,32	0,00000	0,00019	0,00103	0,00300	0,00662
0,33	0,00000	0,00019	0,00104	0,00303	0,00666
0,34	0,00000	0,00020	0,00105	0,00306	0,00671
0,35	0,00000	0,00020	0,00107	0,00308	0,00675
0,36	0,00000	0,00021	0,00108	0,00311	0,00680
0,37	0,00000	0,00021	0,00109	0,00314	0,00685
0,38	0,00000	0,00022	0,00111	0,00317	0,00690
0,39	0,00000	0,00022	0,00112	0,00320	0,00693
0,40	0,00000	0,00023	0,00114	0,00323	0,00698
0,41	0,00000	0,00023	0,00115	0,00325	0,00703
0,42	0,00000	0,00023	0,00117	0,00328	0,00708
0,43	0,00000	0,00024	0,00118	0,00331	0,00713
0,44	0,00000	0,00024	0,00119	0,00334	0,00717
0,45	0,00000	0,00025	0,00121	0,00337	0,00722
0,46	0,00000	0,00025	0,00122	0,00340	0,00727
0,47	0,00000	0,00026	0,00124	0,00343	0,00732
0,48	0,00000	0,00027	0,00125	0,00346	0,00737
0,49	0,00000	0,00027	0,00127	0,00349	0,00743
0,50	0,00000	0,00028	0,00129	0,00352	0,00747

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	5	6	7	8	9
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,25	0,01185	0,01996	0,03110	0,04572	0,06428
0,26	0,01192	0,02006	0,03123	0,04589	0,06449
0,27	0,01199	0,02016	0,03136	0,04605	0,06470
0,28	0,01205	0,02025	0,03149	0,04622	0,06491
0,29	0,01212	0,02035	0,03162	0,04639	0,06511
0,30	0,01219	0,02045	0,03174	0,04655	0,06532
0,31	0,01226	0,02054	0,03188	0,04672	0,06553
0,32	0,01233	0,02064	0,03201	0,04689	0,06574
0,33	0,01240	0,02074	0,03214	0,04706	0,06595
0,34	0,01247	0,02084	0,03227	0,04722	0,06616
0,35	0,01254	0,02093	0,03240	0,04739	0,06637
0,36	0,01261	0,02103	0,03253	0,04756	0,06658
0,37	0,01268	0,02113	0,03266	0,04773	0,06679
0,38	0,01275	0,02123	0,03280	0,04790	0,06701
0,39	0,01282	0,02133	0,03293	0,04807	0,06722
0,40	0,01289	0,02143	0,03306	0,04824	0,06743
0,41	0,01297	0,02153	0,03319	0,04841	0,06764
0,42	0,01304	0,02163	0,03333	0,04859	0,06786
0,43	0,01311	0,02173	0,03346	0,04876	0,06807
0,44	0,01318	0,02183	0,03360	0,04893	0,06829
0,45	0,01326	0,02193	0,03373	0,04910	0,06850
0,46	0,01333	0,02204	0,03387	0,04928	0,06872
0,47	0,01340	0,02214	0,03400	0,04945	0,06893
0,48	0,01348	0,02224	0,03414	0,04963	0,06915
0,49	0,01355	0,02234	0,03427	0,04980	0,06937
0,50	0,01362	0,02245	0,03441	0,04998	0,06958

Suite

Suite de la TABLE XV.

Excès de la tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	0	1	2	3	4
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,50	0,00001	0,00028	0,00129	0,00352	0,00747
0,51	0,00001	0,00028	0,00130	0,00355	0,00752
0,52	0,00001	0,00029	0,00132	0,00358	0,00757
0,53	0,00001	0,00029	0,00133	0,00361	0,00762
0,54	0,00001	0,00030	0,00135	0,00364	0,00767
0,55	0,00001	0,00031	0,00136	0,00367	0,00772
0,56	0,00001	0,00031	0,00138	0,00371	0,00777
0,57	0,00001	0,00032	0,00140	0,00374	0,00782
0,58	0,00002	0,00032	0,00141	0,00377	0,00788
0,59	0,00002	0,00033	0,00143	0,00380	0,00793
0,60	0,00002	0,00034	0,00145	0,00383	0,00798
0,61	0,00002	0,00034	0,00146	0,00386	0,00803
0,62	0,00002	0,00035	0,00148	0,00390	0,00808
0,63	0,00002	0,00036	0,00150	0,00393	0,00814
0,64	0,00002	0,00036	0,00151	0,00396	0,00819
0,65	0,00002	0,00037	0,00153	0,00399	0,00824
0,66	0,00002	0,00038	0,00155	0,00402	0,00829
0,67	0,00002	0,00038	0,00157	0,00406	0,00835
0,68	0,00003	0,00039	0,00159	0,00409	0,00840
0,69	0,00003	0,00040	0,00160	0,00413	0,00846
0,70	0,00003	0,00040	0,00162	0,00416	0,00852
0,71	0,00003	0,00041	0,00164	0,00419	0,00857
0,72	0,00003	0,00042	0,00166	0,00423	0,00862
0,73	0,00003	0,00043	0,00167	0,00426	0,00868
0,74	0,00003	0,00043	0,00169	0,00430	0,00873
0,75	0,00003	0,00044	0,00171	0,00433	0,00879

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les six premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	5	6	7	8	9
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,50	0,01362	0,02245	0,03441	0,04998	0,06958
0,51	0,01370	0,02255	0,03455	0,05015	0,06980
0,52	0,01377	0,02265	0,03469	0,05033	0,07002
0,53	0,01385	0,02276	0,03482	0,05050	0,07024
0,54	0,01392	0,02286	0,03496	0,05068	0,07046
0,55	0,01400	0,02297	0,03510	0,05086	0,07068
0,56	0,01407	0,02307	0,03524	0,05103	0,07090
0,57	0,01415	0,02318	0,03538	0,05121	0,07112
0,58	0,01422	0,02328	0,03552	0,05139	0,07134
0,59	0,01430	0,02339	0,03566	0,05157	0,07157
0,60	0,01438	0,02349	0,03580	0,05175	0,07179
0,61	0,01445	0,02360	0,03594	0,05193	0,07201
0,62	0,01453	0,02371	0,03608	0,05211	0,07224
0,63	0,01461	0,02382	0,03622	0,05229	0,07246
0,64	0,01469	0,02392	0,03636	0,05247	0,07268
0,65	0,01476	0,02403	0,03650	0,05265	0,07291
0,66	0,01484	0,02414	0,03665	0,05283	0,07313
0,67	0,01492	0,02425	0,03679	0,05301	0,07336
0,68	0,01500	0,02436	0,03693	0,05320	0,07358
0,69	0,01508	0,02446	0,03708	0,05338	0,07381
0,70	0,01516	0,02457	0,03722	0,05356	0,07402
0,71	0,01524	0,02468	0,03737	0,05374	0,07426
0,72	0,01532	0,02479	0,03751	0,05393	0,07449
0,73	0,01540	0,02490	0,03766	0,05411	0,07472
0,74	0,01548	0,02501	0,03780	0,05430	0,07495
0,75	0,01556	0,02512	0,03794	0,05448	0,07517

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	0	1	2	3	4
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,75	0,00003	0,00044	0,00171	0,00433	0,00879
0,76	0,00004	0,00045	0,00173	0,00436	0,00884
0,77	0,00004	0,00046	0,00175	0,00439	0,00890
0,78	0,00004	0,00046	0,00177	0,00443	0,00896
0,79	0,00004	0,00047	0,00179	0,00446	0,00901
0,80	0,00004	0,00048	0,00181	0,00450	0,00906
0,81	0,00004	0,00049	0,00183	0,00453	0,00912
0,82	0,00004	0,00049	0,00185	0,00457	0,00917
0,83	0,00005	0,00050	0,00186	0,00461	0,00923
0,84	0,00005	0,00051	0,00188	0,00464	0,00929
0,85	0,00005	0,00052	0,00190	0,00468	0,00935
0,86	0,00005	0,00053	0,00192	0,00472	0,00941
0,87	0,00005	0,00054	0,00194	0,00475	0,00946
0,88	0,00006	0,00055	0,00197	0,00479	0,00952
0,89	0,00006	0,00055	0,00199	0,00483	0,00958
0,90	0,00006	0,00056	0,00201	0,00486	0,00964
0,91	0,00006	0,00057	0,00203	0,00490	0,00970
0,92	0,00006	0,00058	0,00205	0,00494	0,00976
0,93	0,00007	0,00059	0,00207	0,00498	0,00982
0,94	0,00007	0,00060	0,00209	0,00502	0,00988
0,95	0,00007	0,00061	0,00211	0,00506	0,00994
0,96	0,00007	0,00062	0,00213	0,00509	0,01000
0,97	0,00007	0,00063	0,00216	0,00513	0,01006
0,98	0,00008	0,00064	0,00218	0,00517	0,01012
0,99	0,00008	0,00065	0,00220	0,00521	0,01018
1,00	0,00008	0,00066	0,00222	0,00525	0,01024

Suite de la TABLE XV.

Excès de la Tangente sur l'Arc, exprimé en fraction de grade, pour les dix premiers grades du Quadrant.

ARGUMENT : Tangente en grades.

GRADES.	5	6	7	8	9
Argument.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.	Tangente.
0,75	0,01556	0,02512	0,03794	0,05448	0,07517
0,76	0,01564	0,02524	0,03809	0,05467	0,07540
0,77	0,01572	0,02535	0,03824	0,05485	0,07563
0,78	0,01580	0,02546	0,03839	0,05504	0,07586
0,79	0,01589	0,02557	0,03853	0,05523	0,07609
0,80	0,01597	0,02568	0,03868	0,05541	0,07632
0,81	0,01605	0,02580	0,03883	0,05560	0,07656
0,82	0,01613	0,02591	0,03898	0,05579	0,07679
0,83	0,01622	0,02603	0,03913	0,05598	0,07702
0,84	0,01630	0,02614	0,03928	0,05617	0,07725
0,85	0,01638	0,02625	0,03942	0,05636	0,07748
0,86	0,01647	0,02637	0,03958	0,05655	0,07772
0,87	0,01655	0,02648	0,03973	0,05674	0,07796
0,88	0,01664	0,02660	0,03988	0,05693	0,07819
0,89	0,01672	0,02671	0,04003	0,05712	0,07843
0,90	0,01681	0,02683	0,04018	0,05731	0,07866
0,91	0,01689	0;02695	0,04033	0,05750	0,07890
0,92	0,01698	0,02706	0,04048	0,05769	0,07914
0,93	0,01706	0,02718	0,04064	0,05788	0,07938
0,94	0,01715	0,02730	0,04079	0,05808	0,07961
0,95	0,01723	0,02741	0,04094	0,05827	0,07985
0,96	0,01732	0,02753	0,04110	0,05847	0,08009
0,97	0,01741	0,02765	0,04125	0,05866	0,08033
0,98	0,01750	0,02777	0,04141	0,05886	0,08057
0,99	0,01758	0,02789	0,04156	0,05905	0,08081
1,00	0,01767	0,02801	0,04172	0,05925	0,08105

TABLE XVI.

Excès, sur l'angle droit, des angles formés par le Méridien qui a vingt grades de longitude, et par les différens Parallèles.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
30,0	4,4751	32,5	3,9117	35,0	3,3492	37,5	2,7878
1	4,4525	6	3,8892	1	3,3267	6	2,7653
2	4,4300	7	3,8667	2	3,3042	7	2,7429
3	4,4074	8	3,8442	3	3,2817	8	2,7205
4	4,3849	9	3,8216	4	3,2592	9	2,6981
5	4,3624	33,0	3,7991	5	3,2368	38,0	2,6756
6	4,3398	1	3,7766	6	3,2143	1	2,6532
7	4,3172	2	3,7541	7	3,1919	2	2,6308
8	4,2947	3	3,7316	8	3,1694	3	2,6084
9	4,2722	4	3,7091	9	3,1469	4	2,5860
31,0	4,2496	5	3,6866	36,0	3,1245	5	2,5636
1	4,2271	6	3,6641	1	3,1020	6	2,5412
2	4,2046	7	3,6416	2	3,0795	7	2,5188
3	4,1821	8	3,6191	3	3,0571	8	2,4964
4	4,1595	9	3,5966	4	3,0346	9	2,4740
5	4,1370	34,0	3,5741	5	3,0122	39,0	2,4516
6	4,1146	1	3,5516	6	2,9897	1	2,4292
7	4,0919	2	3,5291	7	2,9673	2	2,4068
8	4,0694	3	3,5066	8	2,9448	3	2,3844
9	4,0468	4	3,4841	9	2,9224	4	2,3620
32,0	4,0243	5	3,4616	37,0	2,8999	5	2,3396
1	4,0018	6	3,4391	1	2,8775	6	2,3172
2	3,9793	7	3,4166	2	2,8551	7	2,2948
3	3,9567	8	3,3941	3	2,8327	8	2,2725
4	3,9342	9	3,3716	4	2,8102	9	2,2501
5	3,9117	35,0	3,3492	5	2,7878	40,0	2,2277

Suite de la TABLE XVI.

Excès, sur l'angle droit, des angles formés par le Méridien qui a vingt grades de longitude, et par les différens Parallèles.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
40,0	2,2277	42,5	1,6690	45,0	1,1117	47,5	0,5555
1	2,2053	6	1,6467	1	1,0894	6	0,5333
2	2,1829	7	1,6244	2	1,0672	7	0,5111
3	2,1606	8	1,6021	3	1,0449	8	0,4888
4	2,1382	9	1,5798	4	1,0227	9	0,4666
5	2,1159	43,0	1,5575	5	1,0004	48,0	0,4444
6	2,0935	1	1,5352	6	0,9781	1	0,4221
7	2,0711	2	1,5129	7	0,9559	2	0,3999
8	2,0488	3	1,4906	8	0,9336	3	0,3777
9	2,0264	4	1,4683	9	0,9114	4	0,3555
41,0	2,0041	5	1,4459	46,0	0,8891	5	0,3333
1	1,9817	6	1,4237	1	0,8669	6	0,3111
2	1,9594	7	1,4013	2	0,8446	7	0,2888
3	1,9370	8	1,3791	3	0,8224	8	0,2666
4	1,9147	9	1,3568	4	0,8001	9	0,2444
5	1,8923	44,0	1,3345	5	0,7779	49,0	0,2222
6	1,8700	1	1,3122	6	0,7556	1	0,1999
7	1,8476	2	1,2899	7	0,7334	2	0,1777
8	1,8253	3	1,2676	8	0,7111	3	0,1555
9	1,8030	4	1,2453	9	0,6889	4	0,1333
42,0	1,7807	5	1,2231	47,0	0,6667	5	0,1111
1	1,7583	6	1,2008	1	0,6445	6	0,0888
2	1,7360	7	1,1785	2	0,6222	7	0,0666
3	1,7137	8	1,1562	3	0,6000	8	0,0444
4	1,6913	9	1,1340	4	0,5778	9	0,0222
5	1,6690	55,0	1,1117	5	0,5555	50,0	0,0000

Suite de la TABLE XVI.

Excès, sur l'angle droit, des angles formés par le Méridien qui a vingt grades de longitude, et par les différens Parallèles.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
50,0	0,0000	52,5	0,5555	55,0	1,1118	57,5	1,6703
1	0,0222	6	0,5777	1	1,1341	6	1,6927
2	0,0444	7	0,5999	2	1,1564	7	1,7151
3	0,0666	8	0,6222	3	1,1787	8	1,7375
4	0,0888	9	0,6444	4	1,2010	9	1,7599
5	0,1111	53,0	0,6666	5	1,2233	58,0	1,7824
6	0,1333	1	0,6888	6	1,2456	1	1,8048
7	0,1555	2	0,7111	7	1,2679	2	1,8273
8	0,1777	3	0,7333	8	1,2902	3	1,8497
9	0,2019	4	0,7556	9	1,3126	4	1,8722
51,0	0,2221	5	0,7778	56,0	1,3349	5	1,8946
1	0,2443	6	0,8001	1	1,3572	6	1,9171
2	0,2666	7	0,8223	2	1,3795	7	1,9396
3	0,2888	8	0,8446	3	1,4018	8	1,9621
4	0,3110	9	0,8668	4	1,4242	9	1,9846
5	0,3332	54,0	0,8891	5	1,4466	59,0	2,0071
6	0,3555	1	0,9114	6	1,4689	1	2,0296
7	0,3777	2	0,9336	7	1.4912	2	2,0521
8	0,3999	3	0,9559	8	1,5136	3	2,0746
9	0,4221	4	0,9781	9	1,5360	4	2,0971
52,0	0,4444	5	1,0004	57,0	1,5584	5	2,1197
1	0,4666	6	1,0227	1	1,5828	6	2,1422
2	0,4888	7	1,0450	2	1,6032	7	2,1648
3	0,5110	8	1,0672	3	1,6255	8	2,1874
4	0,5332	9	1,0895	4	1,6479	9	2,2099
5	0,5555	55,0	1,1118	5	1,6703	60,0	2,2325

Suite de la TABLE XVI.

Excès, sur l'angle droit, des angles formés par le Méridien qui a vingt grades de longitude, et par les différens Parallèles.

LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.	LATIT.	ANGLE.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
60,0	2,2325	62,5	2,8007	65,0	3,3774	67,5	3,9662
1	2,2551	6	2,8235	1	3,4007	6	3,9901
2	2,2777	7	2,8464	2	3,4240	7	4,0140
3	2,3004	8	2,8693	3	3,4474	8	4,0379
4	2,3230	9	2,8923	4	3,4707	9	4,0618
5	2,3456	63,0	2,9152	5	3,4941	68,0	4,0858
6	2,3683	1	2,9382	6	3,5195	1	4,1098
7	2,3909	2	2,9612	7	3,5409	2	4,1338
8	2,4136	3	2,9841	8	3,5644	3	4,1579
9	2,4363	4	3,0071	9	3,5878	4	4,1819
61,0	2,4590	5	3,0301	66,0	3,6113	5	4,2061
1	2,4816	6	3,0532	1	3,6348	6	4,2302
2	2,5043	7	3,0762	2	3,6583	7	4,2544
3	2,5271	8	3,0993	3	3,6818	8	4,2786
4	2,5498	9	3,1224	4	3,7054	9	4,3028
5	2,5725	64,0	3,1455	5	3,7290	69,0	4,3271
6	2,5953	1	3,1686	6	3,7526	1	4,3512
7	2,6181	2	3,1917	7	3,7762	2	4,3757
8	2,6409	3	3,2149	8	3,7999	3	4,4001
9	2,6637	4	3,2380	9	3,8236	4	4,4244
62,0	2,6865	5	3,2612	67,0	3,8472	5	4,4489
1	2,7093	6	3,2844	1	3,8710	6	4,4733
2	2,7321	7	3,3076	2	3,8948	7	4,4978
3	2,7550	8	3,3308	3	3,9186	8	4,5224
4	2,7778	9	3,3541	4	3,9424	9	4,5470
5	2,8007	65,0	3,3774	5	3,9662	70,0	4,5715

TABLE XVII.

Grades de latitude du Méridien développé, qui a vingt grades de longitude.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
30,0	99988,8	32,5	99960,6	35,0	99941,2	37,5	99930,4
1	99987,5	6	99959,7	1	99940,6	6	99930,2
2	99986,3	7	99958,8	2	99940,0	7	99930,0
3	99985,0	8	99957,8	3	99939,5	8	99929,7
4	99983,8	9	99956,9	4	99938,9	9	99929,5
5	99982,5	33,0	99956,0	5	99938,3	38,0	99929,3
6	99981,3	1	99955,2	6	99937,8	1	99929,1
7	99980,0	2	99954,3	7	99937,3	2	99929,0
8	99978,8	3	99953,5	8	99936,8	3	99928,8
9	99977,5	4	99952,6	9	99936,3	4	99928,7
31.0	99976,3	5	99951,8	36,0	99935,8	5	99928,5
1	99975,2	6	99951,0	1	99935,4	6	99928,4
2	99974,1	7	99950,2	2	99934,9	7	99928,3
3	99972,9	8	99949,5	3	99934,5	8	99928,3
4	99971,8	9	99948,7	4	99934,0	9	99928,2
5	99970,7	34,0	99947,9	5	99933,6	39,0	99928,2
6	99969,7	1	99947,2	6	99933,2	1	99928,2
7	99968,6	2	99946,5	7	99932,9	2	99928,2
8	99967,6	3	99945,7	8	99932,5	3	99928,2
9	99966,5	4	99945,0	9	99932,2	4	99928,3
32,0	99965,5	5	99944,3	37,0	99931,8	5	99928,3
1	99964,5	6	99943,7	1	99931,5	6	99928,4
2	99963,5	7	99943,1	2	99931,2	7	99928,4
3	99962,6	8	99942,4	3	99931,0	8	93928,5
4	99961,6	9	99941,8	4	99930,7	9	99928,6
5	99960,6	35,0	99941,2	5	99930,4	40,0	99928,7

Suite de la TABLE XVII.

Grades de latitude du Méridien développé, qui a vingt grades de longitude.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
40,0	99928,7	42,5	99936,1	45,0	99951,2	47,5	99974,7
1	99928,9	6	99936,6	1	99952,0	6	99975,8
2	99929,0	7	99937,1	2	99952,8	7	99977,0
3	99929,2	8	99937,5	3	99953,7	8	99978,1
4	99929,3	9	99938,0	4	99954,5	9	99979,3
5	99929,5	43,0	99938,5	5	99955,3	48,0	99980,4
6	99929,7	1	99939,0	6	99956,2	1	99981,6
7	99930,0	2	99939,6	7	99957,1	2	99982,8
8	99930,2	3	99940,1	8	99957,9	3	99984,0
9	99930,5	4	99940,7	9	99958,8	4	99985,2
41,0	99930,7	5	99941,2	46,0	99959,7	5	99986,4
1	99931,0	6	99941,8	1	99960,6	6	99987,7
2	99931,3	7	99942,4	2	99961,6	7	99988,9
3	99931,6	8	99943,1	3	99962,5	8	99990,2
4	99931,9	9	99943,7	4	99963,5	9	99991,4
5	99932,2	44,0	99944,3	5	99964,4	49,0	99992,7
6	99932,6	1	99945,0	6	99965,4	1	99994,0
7	99932,9	2	99945,7	7	99966,4	2	99995,3
8	99933,3	3	99946,3	8	99967,4	3	99996,7
9	99933,6	4	99947,0	9	99968,4	4	99997,9
42,0	99934,0	5	99947,7	47,0	99969,4	5	99999,3
1	99934,4	6	99948,4	1	99970,5	6	100000,6
2	99934,8	7	99949,1	2	99971,5	7	100002,0
3	99935,3	8	99949,8	3	99972,6	8	100003,4
4	99935,7	9	99950,5	4	99973,6	9	100004,8
5	99936,1	45,0	99951,2	5	99974,7	50,0	100006,2

Suite de la TABLE XVII.

Grades de latitude du Méridien développé, qui a vingt grades de longitude.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
50,0	100006,2	52,5	100045,2	55,0	100091,6	57,5	100145,1
1	100007,6	6	100046,9	1	100093,6	6	100147,4
2	100009,1	7	100048,7	2	100095,6	7	100149,7
3	100010,5	8	100050,4	3	100097,7	8	100152,1
4	100012,0	9	100052,2	4	100099,7	9	100154,4
5	100013,4	53,0	100053,9	5	100101,7	58,0	100156,7
6	100014,9	1	100055,7	6	100103,8	1	100159,1
7	100016,4	2	100057,5	7	100105,9	2	100161,5
8	100017,9	3	100059,3	8	100107,9	3	100163,8
9	100019,4	4	100061,1	9	100110,0	4	100166,2
51,0	100020,9	5	100062,9	56,0	100112,1	5	100168,6
1	100022,5	6	100064,8	1	100114,2	6	100171,0
2	100024,0	7	100066,6	2	100116,4	7	100173,5
3	100025,6	8	100068,5	3	100118,5	8	100175,9
4	100027,1	9	100070,3	4	100120,7	9	100178,4
5	100028,7	54,0	100072,2	5	100122,8	59,0	100180,8
6	100030,3	1	100074,1	6	100125,0	1	100183,3
7	100031,9	2	100076,0	7	100127,2	2	100185,8
8	100033,6	3	100078,0	8	100129,4	3	100188,3
9	100035,2	4	100079,9	9	100131,6	4	100190,8
52,0	100036,8	5	100081,8	57,0	100133,8	5	100193,3
1	100038,5	6	100083,8	1	100136,1	6	100195,9
2	100040,2	7	100085,7	2	100138,3	7	100198,4
3	100041,8	8	100087,7	3	100140,6	8	100201,0
4	100043,5	9	100089,6	4	100142,8	9	100203,5
5	100045,2	55,0	100091,6	5	100145,1	60,0	100206,1

Suite de la TABLE XVII.

Grades de latitude du Méridien développé, qui a vingt grades de longitude.

LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.	LATIT.	GRADE de Latitude.
Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.	Grad.	Mètres.
60,0	100206,1	62,5	100274,7	65,0	100350,8	67,5	100434,7
1	100208,7	6	100277,6	1	100354,1	6	100438,3
2	100211,3	7	100280,5	2	100357,4	7	100441,8
3	100214,0	8	100283,3	3	100360,6	8	100445,4
4	100216,6	9	100286,2	4	100363,9	9	100448,9
5	100219,2	63,0	100289,1	5	100367,2	68,0	100452,5
6	100221,9	1	100292,1	6	100370,5	1	100456,1
7	100224,6	2	100295,1	7	100373,8	2	100459,8
8	100227,3	3	100298,0	8	100377,1	3	100463,4
9	100230,0	4	100301,0	9	100380,4	4	100467,1
61,0	100232,7	5	100304,0	66,0	100383,7	5	100470,7
1	100235,4	6	100307,0	1	100387,0	6	100474,4
2	100238,2	7	100310,1	2	100390,3	7	100478,2
3	100240,9	8	100313,1	3	100393,7	8	100481,9
4	100243,7	9	100316,2	4	100397,0	9	100485,7
5	100246,4	64,0	100319,2	5	100400,3	69,0	100489,4
6	100249,2	1	100322,3	6	100403,7	1	100493,2
7	100252,0	2	100325,4	7	100407,1	2	100497,1
8	100254,8	3	100328,5	8	100410,5	3	100500,9
9	100257,6	4	100331,6	9	100413,9	4	100504,8
62,0	100260,4	5	100334,7	67,0	100417,3	5	100508,6
1	100263,3	6	100337,9	1	100420,8	6	100512,5
2	100266,1	7	100341,1	2	100424,3	7	100516,4
3	100269,0	8	100344,4	3	100427,7	8	100520,3
4	100271,8	9	100347,6	4	100431,2	9	100524,2
5	100274,7	65,0	100350,8	5	100434,7	70,0	100528,1

TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
0,0	0,0000	2,5	2,4857	5,0	4,9754	7,5	7,4728
1	0,0994	6	2,5852	1	5,0751	6	7,5729
2	0,1988	7	2,6847	2	5,1748	7	7,6730
3	0,2982	8	2,7832	3	5,2746	8	7,7732
4	0,3976	9	2,8837	4	5,3743	9	7,8734
5	0,4970	3,0	2,9832	5	5,4741	8,0	7,9735
6	0,5964	1	3,0827	6	5,5739	1	8,0738
7	0,6959	2	3,1823	7	5,6737	2	8,1740
8	0,7953	3	3,2818	8	5,7735	3	8,2743
9	0,8947	4	3,3813	9	5,8733	4	8,3746
1,0	0,9941	5	3,4809	6,0	5,9732	5	8,4749
1	1,0935	6	3,5800	1	6,0730	6	8,5751
2	1,1929	7	3,6800	2	6,1729	7	8,6755
3	1,2923	8	3,7796	3	6,2728	8	8,7759
4	1,3918	9	3,8792	4	6,3727	9	8,8762
5	1,4912	4,0	3,9788	5	6,4726	9,0	8,9766
6	1,5906	1	4,0784	6	6,5726	1	9,0771
7	1,6901	2	4,1780	7	6,6725	2	9,1775
8	1,7895	3	4,2777	8	6,7725	3	9,2770
9	1,8890	4	4,3773	9	6,8725	4	9,3785
2,0	1,9885	5	4,4770	7,0	6,9725	5	9,4790
1	2,0879	6	4,5766	1	7,0725	6	9,5796
2	2,1873	7	4,6763	2	7,1726	7	9,6801
3	2,2868	8	4,7760	3	7,2726	8	9,7807
4	2,3863	9	4,8757	4	7,3727	9	9,8814
5	2,4857	5,0	4,9754	5	7,4728	10,0	9,9820

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
10,0	9,9820	12,5	12,5071	15,0	15,0521	17,5	17,6216
1	10,0827	6	12,6084	1	15,1544	6	17,7250
2	10,1834	7	12,7099	2	15,2567	7	17,8284
3	10,2841	8	12,8113	3	15,3591	8	17,9318
4	10,3848	9	12,9128	4	15,4615	9	18,0353
5	10,4856	13,0	13,0144	5	15,5639	18,0	18,1389
6	10,5864	1	13,1159	6	15,6664	1	18,2423
7	10,6872	2	13,2175	7	15,7689	2	18,3461
8	10,7881	3	13,3191	8	15,8715	3	18,4498
9	10,8890	4	13,4208	9	15,9751	4	18,5535
11,0	10,9899	5	13,5224	16,0	16,0768	5	18,6572
1	11,0908	6	13,6242	1	16,1794	6	18,7611
2	11,1918	7	13,7259	2	16,2822	7	18,8650
3	11,2928	8	13,8277	3	16,3950	8	18,9689
4	11,3938	9	13,9296	4	16,4878	9	19,0729
5	11,4949	14,0	14,0314	5	16,5906	19,0	19,1768
6	11,5960	1	14,1333	6	16,6935	1	19,2810
7	11,6971	2	14,2343	7	16,7965	2	19,3851
8	11,7982	3	14,3373	8	16,8994	3	19,4893
9	11,8994	4	14,4393	9	17,0025	4	19,5935
12,0	12,0006	5	14,5413	17,0	17,1056	5	19,6978
1	12,1018	6	14,6434	1	17,2087	6	19,8022
2	12,2031	7	14,7455	2	17,3119	7	19,9066
3	12,3044	8	14,8477	3	17,4151	8	20,0110
4	12,4056	9	14,9499	4	17,5183	9	20,1155
5	12,5071	15,0	15,0521	5	17,6216	20,0	20,2201

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
20,0	20,2201	22,5	22,8522	25,0	25,5232	27,5	28,2385
1	20,3246	6	22,9583	1	25,6309	6	28,3481
2	20,4293	7	23,0644	2	25,7387	7	28,4578
3	20,5340	8	23,1706	3	25,8466	8	28,5676
4	20,6388	9	23,2768	4	25,9545	9	28,6774
5	20,7436	23,0	23,3831	5	26,0625	28,0	28,7874
6	20,8485	1	23,4895	6	26,1706	1	28,8974
7	20,9535	2	23,5960	7	26,2788	2	29,0075
8	21,0585	3	23,7025	8	26,3870	3	29,1177
9	21,1635	4	23,8090	9	26,4953	4	29,2279
21,0	21,2686	5	23,9157	26,0	26,6037	5	29,3383
1	21,3738	6	24,0324	1	26,7122	6	29,4487
2	21,4790	7	24,1291	2	26,8207	7	29,5553
3	21,5842	8	24,2360	3	26,9293	8	29,6699
4	21,6896	9	24,3429	4	27,0380	9	29,7805
5	21,7950	24,0	24,4498	5	27,1467	29,0	29,8913
6	21,9004	1	24,5569	6	27,2555	1	30,0022
7	22,0060	2	24,6640	7	27,3644	2	30,1132
8	22,1115	3	24,7711	8	27,4734	3	30,2242
9	22,2271	4	24,8784	9	27,5825	4	30,3353
22,0	22,3228	5	24,9857	27,0	27,6916	5	30,4465
1	22,4286	6	25,0930	1	27,8008	6	30,5578
2	22,5344	7	25,2005	2	27,9102	7	30,6692
3	22,6403	8	25,3080	3	28,0195	8	30,7807
4	22,7462	9	25,4157	4	28,1290	9	30,8922
5	22,8522	25,0	25,5232	5	28,2385	30,0	31,0039

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
30,0	31,0039	32,5	33,8257	35,0	36,7109	37,5	39,6671
1	31,1156	6	33,9399	1	36,8278	6	39,7869
2	31,2265	7	34,0541	2	36,9447	7	39,9069
3	32,3394	8	34,1685	3	37,0618	8	40,0270
4	31,4451	9	34,2829	4	37,1790	9	40,1472
5	31,5635	33,0	34,3975	5	37,2962	38,0	40,2675
6	31,6757	1	34,5121	6	37,4136	1	40,3880
7	31,7880	2	34,6269	7	37,5312	2	40,5086
8	31,9004	3	34,7418	8	37,6498	3	40,6293
9	32,0129	4	34,8567	9	37,7666	4	40,7502
31,0	32,1255	5	34,9718	36,0	37,8844	5	40,8722
1	32,2381	6	35,0870	1	38,0024	6	40,9924
2	32,3509	7	35,2023	2	38,1205	7	41,1136
3	32,4638	8	35,3177	3	38,2188	8	41,2350
4	32,5767	9	35,4332	4	38,3571	9	41,3666
5	32,6898	34,0	35,5488	5	38,4756	39,0	31,4782
6	32,8029	1	35,6645	6	38,5942	1	41,6000
7	32,9162	2	35,7803	7	38,7129	2	41,7230
8	33,0395	3	35,8963	8	38,8317	3	41,8440
9	33,1230	4	36,0123	9	38,9507	4	41,9663
32,0	33,2565	5	36,1285	37,0	39,0698	5	42,0886
1	33,3702	6	36,2447	1	39,1890	6	42,2111
2	33,4839	7	36,3611	2	39,3083	7	42,3338
3	33,5978	8	36,4776	3	39,4278	8	42,4565
4	33,7137	9	36,5952	4	39,5474	9	42,5795
5	33,8257	35,0	36,7109	5	39,6671	40,0	42,7025

Suite

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
40,0	42,7025	42,5	45,8265	45,0	49,0496	47,5	52,3834
1	42,8257	6	45,9535	1	49,1807	6	52,5192
2	42,9490	7	46,0806	2	49,3120	7	52,6653
3	43,0725	8	46,2078	3	49,4435	8	52,7915
4	43,1961	9	46,3353	4	49,5752	9	52,9279
5	43,3199	43,0	46,4628	5	49,7071	48,0	53,0646
6	43,4438	1	46,5906	6	49,8391	1	53,2014
7	43,5679	2	46,7185	7	49,9713	2	53,3385
8	43,6921	3	46,8466	8	50,1037	3	53,4757
9	43,8164	4	46,9748	9	50,2363	4	53,6132
41,0	43,9409	5	47,1032	46,0	50,3691	5	53,7509
1	44,0664	6	47,2318	1	50,5020	6	53,8888
2	44,1904	7	47,3605	2	50,6352	7	54,0268
3	44,3153	8	47,4894	3	50,7685	8	54,1651
4	44,4504	9	47,6185	4	50,9320	9	54,3036
5	44,5656	44,0	47,7477	5	51,0358	49,0	54,4424
6	44,6910	1	47,8771	6	51,1696	1	54,5813
7	44,8166	2	48,0067	7	51,3037	2	54,7204
8	44,9423	3	48,1365	8	51,4380	3	54,8598
9	45,0681	4	48,2664	9	51,5725	4	54,9994
42,0	45,1941	5	48,3965	47,0	51,7071	5	55,1391
1	45,3203	6	48,5268	1	51,8420	6	55,2791
2	45,4466	7	48,6572	2	51,9771	7	55,4194
3	45,5731	8	48,7878	3	52,1123	8	55,5598
4	45,6997	9	48,9186	4	52,2478	9	55,7005
5	45,8265	45,0	49,0496	5	52,3834	50,0	55,8414

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
50,0	55,8414	52,5	59,4388	55,0	63,1933	57,5	67,1256
1	55,9825	6	59,5858	1	63,3471	6	67,2870
2	56,1238	7	59,7331	2	63,5011	7	67,4486
3	56,2654	8	59,8806	3	63,6554	8	67,6106
4	56,4072	9	60,0285	4	63,8100	9	67,7729
5	56,5492	53,0	60,1765	5	63,9649	58,0	67,9355
6	56,6914	1	60,3248	6	64,1200	1	68,0984
7	56,8339	2	60,4734	7	64,2755	2	68,2617
8	56,9766	3	60,6222	8	64,4313	3	68,4253
9	57,1195	4	60,7713	9	64,5873	4	68,5893
51,0	57,2627	5	60,9207	56,0	64,7436	5	68,7536
1	57,4061	6	61,0703	1	64,9003	6	68,9182
2	57,5497	7	61,2202	2	65,0773	7	69,0832
3	57,6936	8	61,3703	3	65,2145	8	69,2486
4	57,8377	9	61,5207	4	65,3721	9	69,4142
5	57,9820	54,0	61,6714	5	65,5299	59,0	69,5802
6	58,1266	1	61,8224	6	65,6881	1	69,7466
7	58,2714	2	61,9736	7	65,8466	2	69,9133
8	58,4165	3	62,1251	8	66,0053	3	70,0804
9	58,5618	4	62,2769	9	66,1644	4	70,2478
52,0	58,7073	5	82,4289	57,0	66,3239	5	70,4156
1	58,8531	6	62,5812	1	66,4836	6	70,5837
2	58,9992	7	62,7338	2	66,6436	7	70,7522
3	59,1455	8	62,8867	3	66,8040	8	70,9211
4	59,2920	9	63,0399	4	66,9646	9	71,0903
5	59,4388	55,0	63,1933	5	67,1256	60,0	71,2599

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
60,0	71,2599	62,5	75,6251	65,0	80,2558	67,5	85,1944
1	71,4299	6	75,8049	1	80,4471	6	85,3991
2	71,6002	7	75,9852	2	80,6389	7	85,6043
3	71,7709	8	76,1660	3	80,8212	8	85,8101
4	71,9420	9	76,3471	4	81,0240	9	86,0165
5	72,1135	63,0	76,5287	5	81,2173	68,0	86,2235
6	72,2853	1	76,7108	6	81,4112	1	86,4311
7	72,4575	2	76,8932	7	81,6055	2	86,6393
8	72,6301	3	77,0761	8	81,8004	3	86,8481
9	72,8031	4	77,2595	9	81,9962	4	87,0575
61,0	72,9765	5	77,4433	66,0	82,1916	5	87,2675
1	73,1502	6	77,6275	1	82,3880	6	87,4781
2	73,3244	7	77,8123	2	82,5849	7	87,6893
3	73,4989	8	77,9974	3	82,7824	8	87,9011
4	73,6739	9	78,1830	4	82,9794	9	88,1136
5	73,8492	64,0	78,3691	5	83,1789	69,0	88,3267
6	74,0250	1	78,5556	6	83,3780	1	88,5405
7	74,2011	2	78,7426	7	83,5776	2	88,7549
8	74,3777	3	78,9301	8	83,7777	3	88,9699
9	74,5546	4	79,1181	9	83,9785	4	89,1856
62,0	74,7320	5	79,3065	67,0	84,1797	5	89,4019
1	74,9098	6	79,4954	1	84,3815	6	89,6189
2	75,0880	7	79,6847	2	84,5839	7	89,8365
3	75,2666	8	79,8746	3	84,7868	8	90,0548
4	75,4456	9	80,0629	4	84,9904	9	90,2738
5	75,6251	65,0	80,2558	5	85,1944	70,0	90,4935

Suite de la TABLE XVIII.

Latitudes croissantes dans le Sphéroïde.

LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.	LATIT.	ARCS du Méridien.
Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.	Grad.	Grades.
70,0	90,4935	72,5	96,2190	75,0	102,4559	77,5	109,3159
1	90,7138	6	96,4580	1	102,7175	6	109,6053
2	90,9349	7	96,7240	2	102,9801	7	109,9586
3	91,1566	8	96,9385	3	103,2437	8	110,1877
4	91,3790	9	97,1800	4	103,5083	9	110,4808
5	91,6021	73,0	97,4224	5	103,7739	78,0	110,7751
6	91,8259	1	97,6656	6	104,0406	1	111,0708
7	92,0504	2	97,9096	7	104,3183	2	111,3677
8	92,2756	3	98,1545	8	104,5771	3	111,6660
9	92,5016	4	98.4003	9	104,8469	4	111,9656
71,0	92,7283	5	98,6469	76,0	105,1178	5	112,2666
1	92,9557	6	98,8944	1	105,3897	6	112,5688
2	93,1838	7	99,1427	2	105,6628	7	112,8725
3	93,4127	8	99,3921	3	105,9369	8	113,1775
4	93,6422	9	99,6423	4	106,2122	9	113,4839
5	93,8727	74,0	99,8934	5	106,4886	79,0	113,7918
6	94,0038	1	100,1453	6	106,7661	1	114,1010
7	94,3357	2	100,3983	7	107,0447	2	114,4117
8	94,4684	3	100,6522	8	107,3245	3	114,7238
9	94,8018	4	100,9070	9	107,6054	4	115,0373
72,0	95,0360	5	101,1628	77,0	107,8875	5	115,3524
1	95,2710	6	101,4194	1	108,1708	6	115,6689
2	95,5068	7	101,6771	2	108,4553	7	115,9869
3	95,7434	8	101,9358	3	108,7410	8	116,3065
4	95,9808	9	102,1953	4	109,0279	9	116,6276
5	96,2190	75,0	102,4559	5	109,3159	80,0	116,9503

ERRATA.

Page 1, ligne 5, en remontant ; *effacez* linéaires homologues.

Ibidem.. ligne 4, en remontant ; celles, *lisez* les dimensions homologues.

2, ligne 16 ; c'est pourquoi, *lisez* néanmoins.

5, ligne 4 ; et la supposant, *lisez* en la supposant.

15, ligne 15 ; $\left(\frac{z}{z^2+1}\right)$, *lisez* $\left(\frac{z}{z^2-1}\right)$.

30, ligne 10 ; $-\beta \sin.^2 \Phi$, *lisez* $+\beta \sin.^2 \Phi$.

Ibidem..... $\delta \sin.^3 3\Phi$, *lisez* $\delta \sin.^2 3\Phi$.

31, ligne 4 ; — &c., *lisez* + &c.

32, ligne 3, en remontant ; membre, *lisez* nombre.

38, ligne 5 ; *La* $\pm$, *lisez* *La* $\mp$.

84, ligne 7 et 6, en remontant ; de quantité plus ou moins grande, *lisez* de quantités plus ou moins grandes.

103, ligne 4 ; la procédé, *lisez* le procédé.

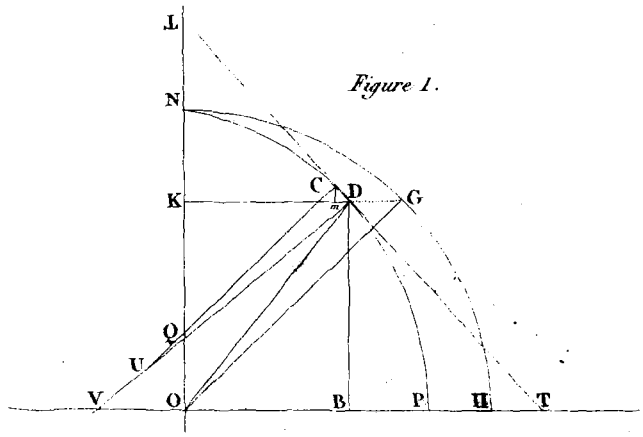


Figure 1.

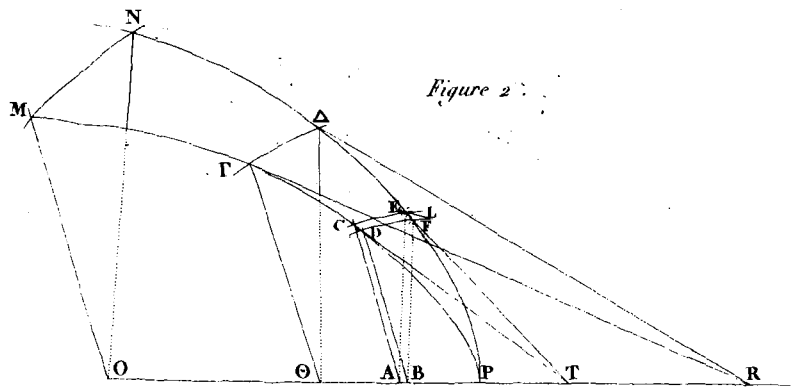


Figure 2.

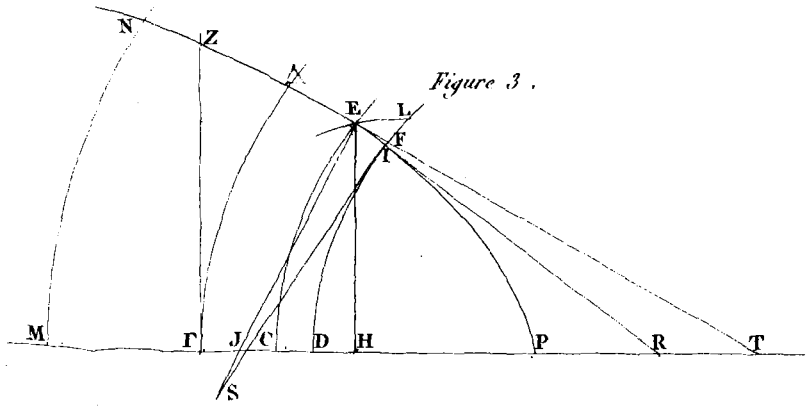
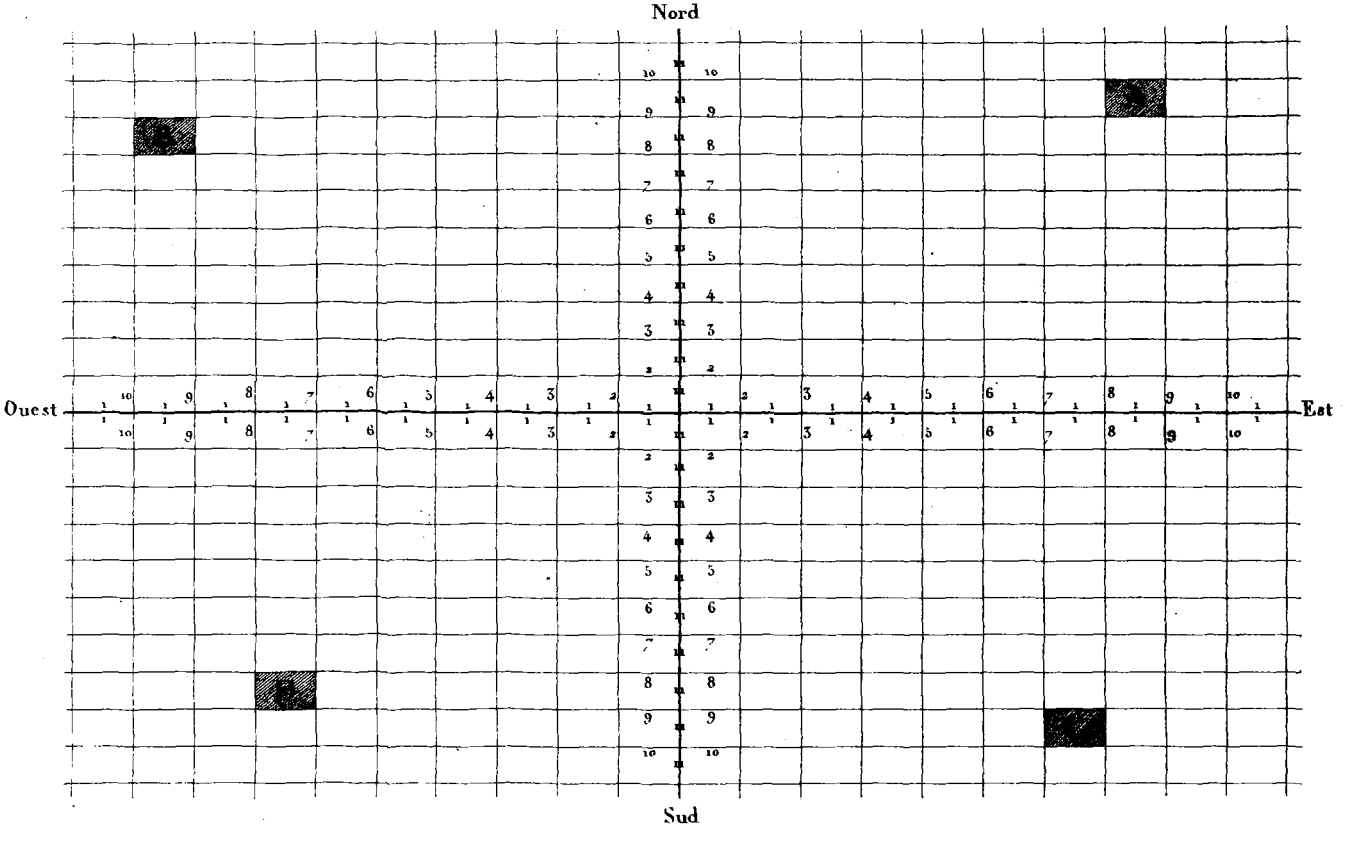
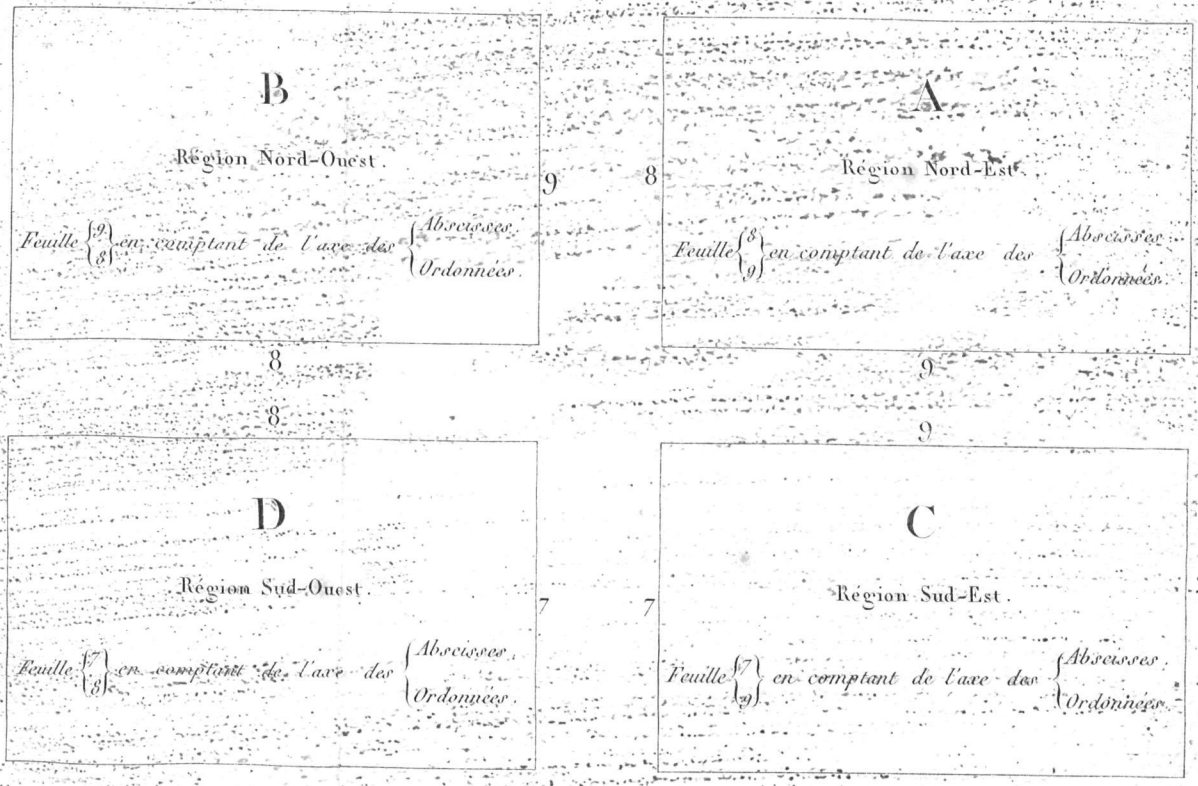
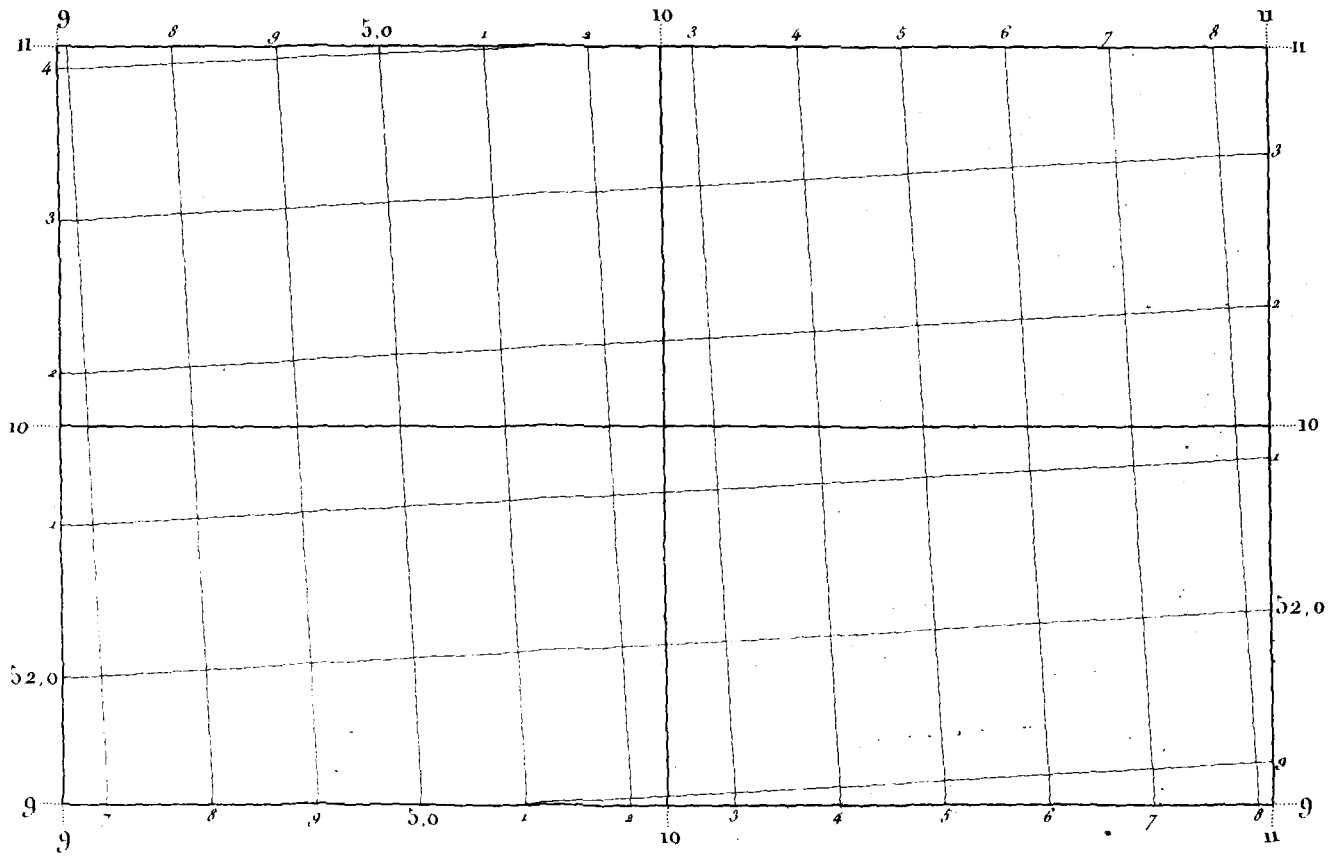


Figure 3.

Notation pour les Feuilles d'une Carte.



Notation pour les Feuilles d'une Carte.



Quatre feuilles de la Carte de l'Helvétie à l'échelle $\frac{1}{50000}$, réduites au $\frac{1}{500000}$.