97243
Rare Book
QA
308
.W35
1749

ANALYSE
DES MESURES
DES RAPPORTS ET DES ANGLES:
OU
REDUCTION DES INTEGRALES
AUX LOGARITHMES,
ET
AUX ARCS DE CERCLE.

PAR D. C. WALMESLEY, B. A.

126

U. S. C. & G. SURVEY
LIBRARY
ARC
No. 8137
Shelf 519.3
Book W

A PARIS,
Chez G. F. QUILLAU, Pere, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XLIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

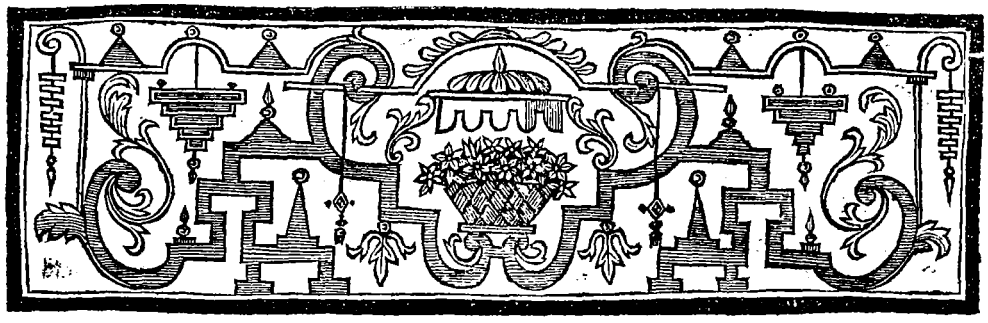
One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009

This Book is the Property of the
U. S. COAST AND GEODETIC SURVEY,
and must be carried on Book Inventory
Before the Expiration
of its Calendar Year.



A MONSEIGNEUR LE COMTE D'ARGENSON, MINISTRE ET SÉCRÉTAIRE D'ÉTAT.

MONSEIGNEUR,

LA permiſſion que vous m'avez accordée de faire paroître cet Ouvrage ſous vos auſpices,

eſt un honneur dont je ne puis être redevable qu'à votre goût pour les Sciences, & à cette bonté, qui ſe fait un devoir d'encourager tous ceux qui les cultivent. Etranger & inconnu, à quel titre pouvois-je aſpirer à un avantage ſi flateur? Mais vous penſez, MONSEIGNEUR, *que tous ceux qui s'appliquent à augmenter leurs connoiſſances, appartiennent à une même République en quelque lieu que le Ciel les ait fait naître. Ce n'eſt ni le François, ni l'Anglois que vous voyez dans un Ecrivain, mais l'homme utile, ou du moins qui s'efforce de l'être. Quel bonheur pour les Sciences de ſe voir ſous la protection d'un Miniſtre plein de ces principes? C'eſt en n'admettant point ces diſtinctions de Patrie, qu'un grand homme parvient à rendre ſon*

Pays la Patrie commune des talens. La France ſçait déja ce qu'elle vous doit dans un autre genre, & n'attribue pas moins les ſuccès de ſes Armes à votre prudence, qu'à la valeur de ſes Guerriers : Que n'a-t'elle pas droit d'attendre de Vous dans cette nouvelle partie du Miniſtére, qui vient de vous être confiée ? L'étendue de vos Lumiéres, cet Eſprit de Gouvernement, qui eſt héréditaire dans votre Illuſtre Maiſon, lui répondent que ſes eſpérances ne ſçauroient être trompées.

Qu'il eſt beau, MONSEIGNEUR, *d'être en même-temps propre & ſupérieur à tous les Emplois, & de réunir des ſoins, qui ont toujours été regardés comme incompatibles ! C'eſt ſervir & honorer doublement*

E P I T R E.

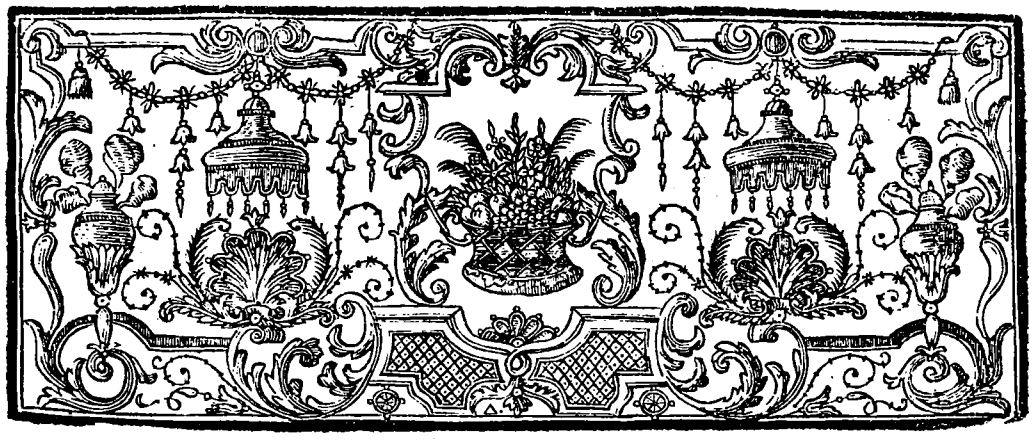
l'Etat, dont la tranquillité & la réputation dépendent également de la gloire des Armes, & de celle des Lettres.

J'ai l'honneur d'être,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble &
très-obéiſſant Serviteur,
D. C. WALMESLEY.

PREFACE.



PREFACE.

QUOIQU'IL se soit écoulé l'espace de plus de vingt ans depuis que le Public a vû paroître les fondemens de la Théorie qu'on donne ici, cependant on ne voit point qu'elle ait été reçue par tout avec le succès qu'une Théorie de cette nature semble mériter. Je parle ici du Livre de M. CÔTES, intitulé *Harmonia Mensurarum*, publié après sa mort par M. SMITH, l'an 1722 : ce Livre est si rare & si peu lû, qu'on seroit porté à en conclure son peu d'importance ; néanmoins si on consulte les Ouvrages d'un petit nombre d'Auteurs qui ont pris la peine de le lire : on trouve non-seulement qu'ils

en ont été très-ſatisfaits, mais qu'ils en parlent avec les plus grands Eloges, lui donnant à la vérité le titre d'Ouvrage d'un eſprit, qui impatient de ſuivre les pas des Sçavans qui l'avoient précédés, s'eſt frayé un chemin nouveau qu'il s'eſt contenté de s'ouvrir à lui-même ſans le rendre pratiquable aux autres ; il indique une entrée à ſes découvertes, mais qu'il laiſſe envéloppée d'une grande obſcurité ; il reſſerre ſon Ouvrage dans des bornes ſi étroites, qu'il devient difficile aux Lecteurs les plus attentifs ; & ce qui révolte davantage les eſprits, eſt qu'il débute par des choſes nouvelles ſans deſcendre à une explication ſuffiſante pour en donner une idée diſtincte.

Quoi qu'il en ſoit, pourvû qu'on jette les yeux ſur l'Ouvrage dont nous parlons, on voit à l'inſtant que les ſolutions qu'il donne d'un grand nombre de problêmes, ſont les plus ſimples dans leurs conſtructions qui ayent été données par aucun Géométre précédent, & que les calculs qu'il faudroit faire pour en tirer une valeur déterminée, ſont peu pénibles en comparaiſon de ceux qu'on

a coutume de faire dans les autres méthodes. Cette nouvelle méthode consiste à réduire les intégrales qui dépendent des sections coniques, *aux Mesures des Rapports & des Angles*, & elle doit être regardée comme la plus courte & la plus facile qu'on puisse employer dans la Théorie & dans la Pratique : car pour ce qui est des mesures des rapports, comme on peut les rapporter aux Logarithmes auxquels elles sont analogues, & comme les mesures des Angles peuvent être très-commodément exprimés par les arcs de Cercle, il suit que dans l'un & l'autre cas pour avoir la valeur d'une intégrale, il ne faut faire autre chose qu'avoir recours aux Tables des Logarithmes, des Sinus & Tangentes, dans lesquelles prenant le Logarithme du Rapport, ou le nombre des dégrés de l'Angle qu'il faut mesurer, on cherchera le quatriéme terme d'une proportion dont on connoît les trois autres.

On reconnoîtra sur-tout la facilité & la simplicité de cette méthode dans la pratique, en la comparant avec la méthode usitée de réduire les quantités en series infi-

nies, & de chercher l'intégrale demandée en prenant la ſomme d'un grand nombre de termes, ce que chacun ſçait être d'un long & pénible travail, quelquefois même preſque impoſſible à cauſe de la lenteur de la convergence des ſeries. C'eſt pour cette raiſon que le Célébre Géométre MACLAURIN, donne à ſes Lecteurs l'avis ſuivant (*Tréatiſe of Fluxions*, *art.* 755). » Toutes les fois » qu'on trouve qu'une intégrale ne peut être » exprimée par un nombre fini de termes, » il ne faut pas d'abord avoir recours à une » ſerie infinie; les Arcs de Cercle & les Lo- » garithmes ne peuvent être exprimés exa- » ctement par une formule Géométrique, » néanmoins on a trouvé des méthodes de » les calculer avec une ſi grande préciſion, » que par leur moyen il eſt facile de me- » ſurer tout ce qui ſe rapporte aux aires des » ſections coniques on Arcs de Parabole «.

On ne peut aſſez admirer la méthode de l'Illuſtre M. NEWTON, expoſée dans les excellens Traités, *de Quadraturâ curvarum*, & *Methodus Fluxionum & ſerierum infinitarum*, qui eſt de rapporter autant qu'il eſt

poſſible les intégrales aux aires des ſections coniques, & d'en exprimer la valeur par ces aires regardées comme données : les Tables qu'il a compoſées à ce ſujet, ſont ſi belles & ſi commodes, qu'il ne faut qu'en étudier la Théorie & en faire l'application pour être convaincû de ce que nous avançons ; on voit avec ſurpriſe l'uſage qu'il en a fait par les belles conſtructions qu'il donne d'un grand nombre de problêmes difficiles dans ſon Livre intitulé *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, dont à la vérité il ſupprime le calcul, en choiſiſſant plutôt de les démontrer d'une maniére Géométrique & Synthétique. Il ſembloit qu'à ce dégré de perfection auquel M. NEWTON avoit porté le calcul intégral, on ne pouvoit plus eſpérer d'ajouter quelque choſe ; cependant M. CÔTES ſentit bien que cette méthode & ces conſtructions pouvoient ſe ſimplifier en rappellant les aires des ſections coniques aux meſures des rapports & des angles, ce qu'il exécuta d'abord. Enſuite, non content de s'arrêter-là, il porta ſes vûes beaucoup plus loin, & s'ouvrit

un champ très-vaste jusques-là inconnu, trouvant moyen de réduire aux sections coniques, un nombre infini de différentielles qu'on avoit jugé jusqu'alors irréductibles, & ce qu'il n'avoit pû exécuter par les mesures des Rapports ou des Angles séparément, il en vint à bout par l'union de toutes les deux. Ce qui donna occasion à cette derniére découverte, fut une belle propriété qu'il reconnut dans le Cercle; elle lui donna moyen de résoudre les différentielles complexes dont les dénominateurs sont binômes, en plusieurs autres plus simples. Il réussit aussi dans la réduction des différentielles complexes dont les dénominateurs contiennent un nombre quelconque de termes; mais sa méthode pour ces derniéres n'étoit pas si générale que celle qu'il avoit trouvée pour les binômes. On peut voir ce même sujet traité d'une façon différente dans les Ouvrages du Célébre JEAN BERNOULLI *Tome II. N°. CXIV.* mais sa solution quoique très-élégante, n'est pas si commode que celle de M. CÔTES.

Ce qu'il y a de fâcheux est que, dans le temps

temps que M. Côtes travailloit à cette derniére découverte, qui est certainement la partie la plus belle & la plus remarquable de sa Théorie, une mort prématurée nous enleva ce grand Homme : mais M. Smith, son Successeur dans la Chaire de Professeur, eut soin de conserver & d'assortir tout ce qu'il avoit laissé d'écrits sur cette matiére ; il trouva néanmoins la Théorie à peine commencée, M. Côtes n'ayant eu que le temps d'en préparer & arranger la matiére : il y mit donc lui-même la derniére main, & l'acheva suivant les idées de l'Auteur autant qu'il s'en put instruire. Ensuite l'Illustre M. de Moivre y tournant ses Etudes parvint à rendre plus général le Théorême sur le Cercle dont on a parlé ci-dessus, & par-là trouva le moyen de résoudre les cas qui échapoient à la méthode de M. Côtes, comme on peut voir dans son Livre intitulé *Miscellanea Analytica.*

Ayant donc reconnu les avantages de cette méthode, & étant encouragé par des personnes que je respecte beaucoup, j'ai tâché de développer ses principes autant qu'il m'a été possible, de l'exposer dans toute son étendue,

me ſervant des lumiéres que j'ai tiré des Auteurs ci-devant cités & ſur-tout de MAC-LAURIN : mais comme ce qu'ils nous ont laiſſé ſur ce ſujet eſt écrit d'une maniére trop générale, & que ces grands Hommes ſe ſont contentés d'ouvrir le chemin aux calculs, on a été obligé de les développer & de les continuer à leur but. Les termes de *Meſure de Rapport* & de *Module*, ne cauſeront, je crois, aucune peine aux Lecteurs, après qu'on aura déterminé par des définitions claires les idées qu'on s'en doit former. L'obſcurité dans laquelle M. CÔTES a laiſſé cette Théorie, faiſant que peu de perſonnes peuvent donner le temps néceſſaire pour l'étudier à fond, on s'eſt efforcé d'y apporter les éclairciſſemens qui lui ſembloient convenables : elle ſera peut-être d'autant plus agréable aux Géométres qu'elle a une liaiſon étroite avec ce qui eſt le plus commun dans la Géométrie ; ſçavoir, les rapports & les angles.

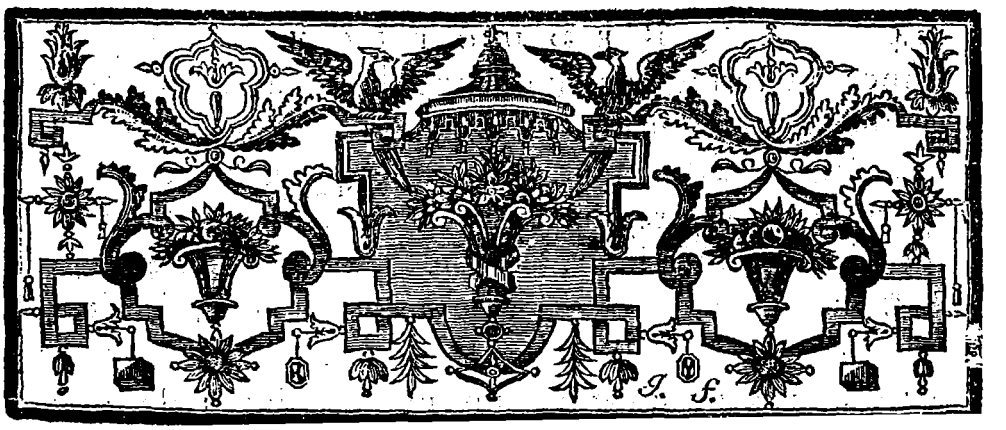
J'ai diviſé ce Traité en quatre Parties. La premiére traite des Meſures des Rapports, & enſeigne la maniére de trouver les intégrales par les Logarithmes. La ſeconde traite de la Meſure des Angles, comment on y réduit les

intégrales, en exprimant leurs valeurs par des Arcs de Cercle. La troisiéme Partie qui a beaucoup plus d'étendue que les deux précédentes, comprend la Théorie des différentielles complexes, & fait voir de quelle maniére on trouve leurs intégrales par le moyen des Logarithmes & des Arcs de Cercle; j'y ai ajouté aussi la Théorie des cas où la méthode de M. Côtes ne lui donnoit pas ces intégrales, & dont par conséquent M. Smith n'a point donné de Tables; j'ai calculé ces Tables qui manquoient afin que la suite des formes fût complette. Dans la quatriéme & derniére Partie on fait voir la simplicité & l'utilité de cette Théorie dans l'application qu'on en a fait aux problêmes de différente espéce, comme de la Rectification & de la Quadrature des courbes, & aux problêmes de Mécanique. On trouve dans le calcul intégral de M. Stone, quelques-uns de ces problêmes qui regardent la Rectification & la Quadrature des courbes, qu'il a aussi résolu en se servant des Tables de M. Côtes. Toutes les fois que dans cette application de la Théorie j'ai calculé la valeur des intégrales en nombres, je me suis servi des

Tables des Logarithmes, des Sinus & Tangentes de M. GARDINER, qui sont connues pour être les plus exactes & les plus amples.

Comme les Tables des intégrales que M. SMITH composa sur la Théorie de M. CÔTES sont très-commodes dans la solution des problêmes, j'en ai fait voir la construction & l'usage, & je les ajouterai à la fin de cet Ouvrage, omettant celles que M. CÔTES lui-même avoit composé correspondantes à celles de M. NEWTON, parce qu'elles ne s'étendent qu'aux deux premiéres parties de la Théorie, & qu'elles sont comprises dans celles de M. SMITH. On peut voir dans la troisiéme Partie de quelle maniére on peut continuer ces Tables à l'infini.

Pendant qu'on imprimoit ce Traité, j'ai reçu d'Angleterre un Livre écrit par M. SIMPSON, très-Sçavant Géométre, dont je n'ai pas eû le bonheur d'avoir connoissance plutôt à cause des fâcheux temps, qui avoient interrompu pendant plusieurs années toute communication entre les Royaumes: ce Livre contient un excellent morceau sur cette Théorie; j'en ai fait mention vers la fin de la troisiéme Partie.



REDUCTION DES INTEGRALES AUX LOGARITHMES, ET AUX ARCS DE CERCLE.

PREMIERE PARTIE.

De la Réduction des Intégrales aux Logarithmes.

ON a découvert une liaison si étroite entre les deux progressions, la Géométrique & l'Arithmétique, que la connoissance de quelque terme dans l'une de ces progressions nous conduit d'une maniére aisée à la connois-

ſance du terme correſpondant dans l'autre, & cela parce que les termes de la progreſſion arithmétique croiſſans uniformément comme les puiſſances des rapports entre le premier & les autres termes de la progreſſion geométrique, déſignent, ou pour mieux dire, meſurent la grandeur de ces puiſſances : de cette analogie nous ſont venus les *Logarithmes*. Mais parce qu'on peut imaginer un nombre infini de progreſſions arithmétiques, & par conſéquent de différentes eſpéces de Logarithmes, qui ſerviroient également pour ces ſortes de meſures, & que même les Logarithmes ne ſont que l'application d'un cas particulier qui eſt celui des nombres, tandis qu'on eſt libre de choiſir d'autres quantités de tel genre qu'on voudroit pour cet uſage : Nous allons donner une méthode générale pour trouver ces ſortes de quantités, que nous appellerons avec M. Côtes, *Meſures des rapports géométriques ;* d'où il ſera facile de retomber ſur les Logarithmes, auxquels on réduira toutes ces meſures.

DES MESURES DES RAPPORTS.

Art. 1. Soit une ſuite de rapports en progreſſion géométrique, $\frac{A}{B}$. $\frac{A^2}{B^2}$. $\frac{A^3}{B^3}$. $\frac{A^4}{B^4}$. &c. Soit auſſi une progreſſion arithmétique qui ait cette forme, a. $2a$. $3a$. $4a$. &c. dans laquelle a repréſente une quantité de telle grandeur & de telle eſpéce qu'on voudra ; ſi on ſuppoſe que a déſigne la meſure du rapport $\frac{A}{B}$, $2a$ ſera la meſure du rapport $\frac{A^2}{B^2}$, $3a$ celle du rapport $\frac{A^3}{B^3}$,

$4a$ celle du rapport $\frac{A^4}{B^4}$, & ainsi de suite, de façon que ces mesures sont proportionnelles aux exposans des puissances des rapports, le rapport doublé a une mesure double, le rapport triplé a une mesure triple, &c. Voilà ce qu'on entend par mesure de rapport, d'où l'on formera la définition suivante.

DEFINITION I.

LES Mesures des rapports sont des quantités quelconques en progression arithmétique, qui correspondent à une suite de rapports en progression géométrique, de telle sorte que ces quantités sont toujours proportionnelles aux puissances des rapports qu'elles mesurent.

2. Ces mesures, comme on voit, sont plus ou moins grandes selon la grandeur de la quantité a, qu'on peut choisir à volonté; si on augmente du double ou du triple la quantité a, toutes les mesures seront doubles ou triples de ce qu'elles étoient auparavant; d'où il suit que a peut servir de module, ou de quantité fixe qui détermine la grandeur de toute la suite des mesures: on pourra donc définir le module en cette façon.

DEFINITION II.

LE Module est une quantité fixe & constante, à laquelle se rapportent toutes les mesures des rapports, & qui en détermine la grandeur.

De l'idée qu'on vient de donner des mesures des rapports, on déduira les conséquences suivantes.

3. I. Soit donnée une progression géométrique de cette forme ∺ A. B. C. D. E. F. &c. si l'on veut que la quantité a mesure le rapport $\frac{A}{B}$, $2a$ sera la mesure du rapport $\frac{A}{C}$, $3a$ celle de $\frac{A}{D}$, $4a$ celle de $\frac{A}{E}$, & ainsi des autres; car puisque par la nature des progressions la raison de A à C est doublée de celle de A à B, c'est-à-dire, $A^2 . B^2 :: A . C$, & puisque (par l'Art. 1.) $2a$ est la mesure de la raison $\frac{A^2}{B^2}$, il mesurera aussi la raison $\frac{A}{C}$; pareillement puisque $A^3 . B^3 :: A . D$, & que $3a$ mesure la raison $\frac{A^3}{B^3}$, il mesurera aussi son égale $\frac{A}{D}$; de même on trouve que $4a$ est la mesure de $\frac{A}{E}$, & ainsi du reste.

4. II. De ce qu'on vient de faire voir dans l'article précédent, il est aisé de trouver la mesure du rapport entre deux termes quelconques de la progression ci-dessus; car pour avoir la mesure du rapport entre le premier & un autre terme quelconque, il est clair qu'il n'y a qu'à prendre la quantité a autant de fois qu'il y a de termes avant celui du rapport, qui est le dernier dans la progression; ainsi $4a$ est la mesure du rapport $\frac{A}{E}$, parce qu'il y a quatre termes devant E. On trouvera aussi de la même maniére la mesure du rapport entre deux autres termes quelconques, en supposant que la progression commence à celui de ces deux termes qui est le premier en rang: ainsi pour avoir la mesure du rapport $\frac{C}{F}$, on commencera la progression au terme C de cette façon ∺ C. D. E. F. &c. & puisque $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$, & qu'il se trouve trois termes devant F, $3a$ est la mesure du rapport $\frac{C}{F}$.

5. III.

§. III. C'eſt une propriété qu'on ſçait convenir à la progreſſion géométrique & à la progreſſion arithmétique comparées enſemble, que ce qui ſe fait par la multiplication & la diviſion dans la premiére, ſe change en l'addition & la ſouſtraction dans la ſeconde : d'où il ſuit qu'il eſt aiſé d'avoir les meſures des raiſons compoſées ; par exemple, pour avoir la meſure de la raiſon compoſée $\frac{A}{C} \times \frac{A}{E}$, il ne faut qu'ajouter enſemble les meſures, $2a$, $4a$, des raiſons compoſantes, & la ſomme $6a$ ſera la meſure cherchée ; pareillement la meſure de $\frac{A}{D} \times \frac{C}{F}$ eſt $6a$, celle de $\frac{A}{C} \times \frac{B}{E} \times \frac{D}{F}$ eſt $7a$. Cette propriété nous conduit auſſi à une autre méthode très-facile pour trouver la meſure du rapport de deux termes quelconques d'une progreſſion géométrique, & des rapports compoſés de quelque maniére que ce ſoit : ſi on demande la meſure de la raiſon $\frac{B}{F}$, on conſidérera que cette raiſon eſt le produit de toutes les raiſons intermédiaires, en y comprenant auſſi les termes B & F, c'eſt-à-dire, $\frac{B}{F} = \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} \times \frac{D}{E} \times \frac{E}{F}$; or comme toutes ces raiſons compoſantes ſont égales, & par conſéquent ont chacune la même meſure ; la ſomme des meſures de ces raiſons, ou la quantité a priſe autant de fois qu'il y a de raiſons compoſantes, ou qu'il y a de termes devant F, en commençant la progreſſion au terme B, donnera la meſure demandée, laquelle par conſéquent eſt $4a$: de même $5a$ eſt la meſure de la raiſon compoſée $\frac{A}{D} \times \frac{C}{E}$, car $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D}$, & $\frac{C}{E} = \frac{C}{D} \times \frac{D}{E}$, & la ſomme des meſures de toutes ces raiſons eſt $5a$.

Par ce même principe on trouvera la mesure d'une raison divisée par une autre raison, en ôtant la mesure de la derniére de celle de la premiére; ainsi la mesure du rapport $\frac{B}{E}$ divisé par $\frac{D}{F}$ est $3a - 2a = a$, celle de $\frac{D}{F}$ divisé par $\frac{B}{E}$ est $2a - 3a = -a$, la mesure d'un rapport divisé par le même rapport est nulle, parce qu'en ôtant la mesure d'elle-même, il ne reste rien; la mesure de $\frac{C}{E}$ divisée par $\frac{C}{E}$ est $2a - 2a = 0$: & si un rapport composé étoit divisé par un autre rapport composé, on en trouveroit la mesure de la même maniére.

De cet article on peut évidemment conclure que, si la mesure du rapport d'une quantité plus grande à une moindre est supposée positive, celle d'une quantité moindre à une plus grande sera négative, & celle du rapport des quantités égales est nulle.

6. IV. Si on suppose que le second terme B de la progression $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ A. B. C. D. E. F. &c. est égal à une puissance quelconque de A désignée par $1 - \frac{m}{n}$, alors cette progression se changera en celle-ci $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ A. $A^{1 - \frac{m}{n}}$. $A^{1 - \frac{2m}{n}}$. $A^{1 - \frac{3m}{n}}$, &c. or puisque $\frac{A}{A^{1 - \frac{m}{n}}} = A^{\frac{m}{n}}$, & $\frac{A}{A^{1 - \frac{2m}{n}}} = A^{\frac{2m}{n}}$, &c. il est clair que les exposans des puissances des raisons entre le premier & les termes suivans, composent une progression arithmétique, $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $\frac{m}{n}$. $\frac{2m}{n}$. $\frac{3m}{n}$. $\frac{4m}{n}$. &c. entiérement semblable à la progression des mesures des mêmes raisons $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ a. $2a$. $3a$. $4a$. &c. Ces exposans sont donc proportionnels aux mesures, & se trouvent de la même façon; l'exposant

d'une raiſon compoſée dans cette progreſſion géométrique eſt égal à la ſomme des expoſans de toutes les raiſons compoſantes, l'expoſant d'une raiſon diviſée par une autre eſt l'excès de l'expoſant de la premiére ſur l'expoſant de la ſeconde : ainſi parce qu'on a $\frac{A}{A^{1-\frac{3m}{n}}} = \frac{A}{A^{1-\frac{m}{n}}} \times \frac{A^{1-\frac{m}{n}}}{A^{1-\frac{2m}{n}}} \times \frac{A^{1-\frac{2m}{n}}}{A^{1-\frac{3m}{n}}}$, l'expoſant $\frac{3m}{n}$ de la raiſon $\frac{A}{A^{1-\frac{3m}{n}}} = A^{\frac{3m}{n}}$ eſt la ſomme des expoſans des trois raiſons compoſantes ; c'eſt-à-dire, à cauſe que chacune de ces raiſons eſt égale à $A^{\frac{m}{n}}$, cet expoſant eſt égal à trois fois $\frac{m}{n}$: de ſorte qu'on peut dire en général que comme la ſomme des meſures des raiſons compoſantes donne la meſure de la raiſon compoſée, de même la ſomme des expoſans de ces mêmes raiſons donne l'expoſant de la raiſon compoſée.

7. V. Les mêmes choſes étant ſuppoſées comme dans l'article précédent, on voit que, puiſque les expoſans des puiſſances des raiſons ſont proportionnels aux meſures, ces expoſans peuvent ſervir de meſures aux raiſons ; ainſi la meſure de $\frac{A}{A^{1-\frac{2m}{n}}} = A^{\frac{2m}{n}}$, ſeroit $\frac{2m}{n}$, celle de $\frac{A^{1-\frac{3m}{n}}}{A^{1-\frac{2m}{n}}} = A^{-\frac{m}{n}}$, ſeroit $-\frac{m}{n}$, & de même pour les autres. Maintenant ſi on ſuppoſe que $\frac{m}{n} = -1$, la progreſſion géométrique aura cette forme $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ A. A^2. A^3. A^4. &c. ou ſi on la continue en deſcendant, $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ &c. A^{-3}. A^{-2}. A^{-1} A^0. A^1. A^2. A^3. &c. & la ſuite des expoſans pourra encore exprimer les meſures des rapports entre les termes : tout cela ſuit clairement de la premiére définition. Mais on

ſçait que les Logarithmes ne ſont autre choſe que cette progreſſion arithmétique, &c. — 3. — 2. — 1. 0. 1. 2. 3. &c. qu'ainſi on peut ſe ſervir des Logarithmes pour meſurer les rapports. Dans les premiers articles pour repréſenter les meſures on a pris la ſuite, *a*. 2*a*. 3*a*. 4*a*. &c. dans laquelle *a* eſt une quantité quelconque, afin de faire voir que les quantités de toute eſpéce, les lignes, les eſpaces, les ſolides, les nombres, &c. peuvent également déſigner ces meſures, pourvû qu'elles correſpondent arithmétiquement aux raiſons géométriques; les Logarithmes ſont donc des meſures numériques des rapports. Or comme les Logarithmes ſont exactement exprimés par les eſpaces hyperboliques, & que c'eſt l'uſage des Logarithmes dans le calcul intégral qui fait une partie principale de notre Théorie, nous allons faire voir en particulier de quelle maniére on trouve les meſures des rapports par le moyen de l'hyperbole, ce qui ſervira auſſi beaucoup pour éclaircir l'idée que nous avons déja donnée de ces meſures.

PROBLÊME I.

8. *TROUVER les meſures des rapports par le moyen de l'hyperbole.*

Pour trouver la meſure d'un rapport donné, on tirera une ligne indéfinie AO, (*Fig.* 1.) ſur laquelle on prendra deux parties AC, AP, qui ayent entr'elles le même rapport que le donné; enſuite du point A on élévera ſur AO la perpendiculaire AG, & prenant AG, AO, pour aſymptotes on décrira

une hyperbole équilatére quelconque Dpc, & ayant mené les ordonnées Pp, Cc, on divisera la ligne PC en un nombre infini de parties PQ, QR, RS, &c. de telle sorte qu'on ait la progression géométrique ∺ AP. AQ. AR. AS..... AC; & de tous les points Q. R. S. &c. on menera aussi les ordonnées Qq, Rr, Ss, &c. cela posé; tous les petits espaces hyperboliques Pq, Qr, Rs, &c. sont égaux entr'eux; car si on ôte les termes de la progression ∺ AP, AQ. AR. AS. &c. les uns des autres, on aura les proportions suivantes PQ. AP:: QR. AQ:: RS. AR:: &c. donc $\frac{PQ}{AP} = \frac{QR}{AQ} = \frac{RS}{AR} =$ &c. & en supposant que le produit ab marque la puissance de l'hyperbole, on aura Pp = Pq × PQ $= \frac{ab \times PQ}{AP}$, de même Q$r = \frac{ab \times QR}{AQ}$, R$r = \frac{ab \times RS}{AR}$, &c. d'où il est évident que tous ces espaces sont égaux, ajoûtant les uns aux autres on formera la progression arithmétique ∺ Pq. Pr. Ps... ... Pc, qui correspond à la progression géométrique ∺ AP. AQ. AR. AS..... AC, donc cette suite d'espaces peut exprimer *(par l'art. 3.)* les mesures des rapports entre les termes de cette progression géométrique, Pq sera la mesure du rapport $\frac{AQ}{AP}$, Pr celle du rapport $\frac{AR}{AP}$, Ps celle de $\frac{AS}{AP}$, & enfin tout l'espace PpcC sera la mesure du rapport $\frac{AC}{AP}$: ou encore puisque Pq mesure le rapport $\frac{AQ}{AP}$, Qr le rapport $\frac{AR}{AQ}$, Rs le rapport $\frac{AS}{AR}$, &c. & que $\frac{AC}{AP} = \frac{AQ}{AP} \times \frac{AR}{AQ} \times \frac{AS}{AR} \times$ &c. la mesure de $\frac{AC}{AP}$ est égale *(par l'art. 5.)* à la somme des mesures de toutes ces raisons; c'est-à-dire, égale à l'espace PpcC. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

9. On voit donc que l'espace hyperbolique qui répond à la différence des termes d'une raison quelconque, est toujours la mesure de cette raison. Qu'on mene une ordonnée BD, & l'espace Bp mesurera la raison $\frac{AP}{AB}$, l'espace Bc mesurera la raison $\frac{AC}{AB}$; la mesure de la raison d'une quantité à elle-même, par exemple, $\frac{AC}{AC}$, est o.

COROLLAIRE II.

10. Il suit de ce qui est démontré dans le Problême précédent, que si on prend sur l'asymptote des parties AB, AP, AC, &c. en progression géométrique, les espaces Bp, Bc, &c. formeront une progression arithmétique; donc on pourroit ici rappeller tous les raisonnemens qu'on a fait dans les articles ci-dessus, pour exposer les propriétés & les conséquences qui suivent de l'analogie qui se trouve entre ces deux progressions; on va appliquer ici à l'hyperbole en peu de mots quelques-uns de ces raisonnemens, pour rendre plus clair ce qu'on aura à dire sur ce sujet dans la suite. La mesure d'une raison composée est égale à la somme des mesures de toutes les raisons composantes; la mesure de $\frac{AC}{AB} = \frac{AP}{AB} \times \frac{AC}{AP}$ est Bp + Pc = Bc, celle de $\frac{AP}{AB} \times \frac{AC}{AB}$ est Bp + Bc, celle de $\frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB}^2}$ est 2Bp, celle de $\frac{\overline{AP}^n}{\overline{AB}^n}$ est $n \times$ Bp. Pareillement la mesure d'une raison divisée par une autre raison est égale à la difference des mesures de ces raisons; ainsi la mesure de la raison $\frac{AC}{AB}$ divisée

par $\frac{AP}{AB}$ est $Bc - Bp = Pc$, & s'il y avoit un produit de plusieurs raisons divisé par le produit de plusieurs autres, la mesure de la fraction entiére seroit égale à la différence entre la somme des mesures de toutes les raisons qui composent le Numérateur, & la somme de toutes les raisons dans le Dénominateur ; ainsi la mesure du rapport d'une quantité plus grande à une moindre étant positive, celle du rapport d'une quantité moindre à une plus grande est négative, car $\frac{AP}{AC}$ est égal à $\frac{AC}{AP}$ divisé par $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AP}^2}$, donc la mesure de $\frac{AP}{AC}$ est $Pc - 2Pc = -Pc$. Réciproquement on peut dire que la somme de plusieurs espaces hyperboliques est la mesure de la raison composée de toutes les raisons mesurées par ces espaces, ainsi $Bp + Bc$ mesure la raison $\frac{AP}{AB} \times \frac{AC}{AB}$; & si de la somme de plusieurs espaces on ôte la somme de plusieurs autres, la différence sera la mesure de la raison composée de toutes les raisons mesurées par les premiers espaces, divisées par les raisons que les autres espaces mesurent.

COROLLAIRE III.

11. ON voit facilement que ces espaces hyperboliques, qui mesurent les rapports, ont une grandeur arbitraire : car entre les asymptotes AB, AG, (*fig.* 2.) soient décrites deux hyperboles équilatéres Dpc, $b\pi k$, & qu'on mene les ordonnées BDb, $Pp\pi$; cela posé, on pourra se servir de l'espace $BDpP$, ou $Bb\pi P$, pour mesurer le rapport $\frac{AP}{AB}$, & en général, si on décrivoit entre les mêmes asymptotes

AB, AG, une infinité d'hyperboles équilatéres, elles pourroient toutes également servir pour mesurer les rapports, puisque les mêmes propriétés leur conviennent à toutes, & qu'on pourroit leur appliquer à chacune tous les raisonnemens précédens. Mais il faut observer que ces mesures suivroient la proportion des puissances des hyperboles qu'on employeroit : car il est démontré dans les Traités des sections coniques, qu'en tirant deux ordonnées quelconques BDb, P$p\pi$, qui rencontrent deux hyperboles décrites entre les mêmes asymptotes aux points D, b, p, π, & menant DG, bH, paralléles à l'asymptote AB, les espaces BDpP, B$b\pi$P, sont entr'eux comme les parallélogrammes AD, Ab, c'est-à-dire, comme les puissances de ces deux hyperboles ; la démonstration est la même pour toutes les hyperboles qu'on voudroit y supposer : afin donc de déterminer la grandeur des mesures selon les différens cas, on doit (par l'article 2.) se servir de la puissance de l'hyperbole comme module.

COROLLAIRE IV.

12. TOUT ce qu'on a dit dans le Problême & les Corollaires précédens touchant les espaces hyperboliques, doit s'entendre des Logarithmes, puisqu'ils ne sont autre chose que ces espaces réduits en nombres ; ainsi par tout où il y a *mesure de rapport*, on peut substituer *Logarithme de rapport*, & nous nous servirons ordinairement dans la suite de cette façon de parler. Soit donc (*fig.* 2.) AB = 1,

AP

AP = 2, AC = 3, &c. & l'espace B*p* sera le Logarithme du rapport $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{1}$, l'espace B*c* le Logarithme de $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{1}$, le rapport $\frac{AC}{AB}$ divisé par $\frac{AP}{AB}$ donne $\frac{AC}{AP} = \frac{3}{2}$, ainsi ôtant le Logarithme de $\frac{2}{1}$ du Logarithme de $\frac{3}{1}$, on aura le Logarithme de $\frac{3}{2}$. Mais parce que ceux, qui ont construit les tables des Logarithmes, ont voulu prendre l'ordonnée BD pour le terme qui séparât les Logarithmes positifs des négatifs, & ainsi avoir o pour le Logarithme de l'unité; dans ce cas au lieu de dire, les Logarithmes des rapports $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, &c. on peut dire simplement, les Logarithmes des nombres, 2, 3, 4, &c.

Il est clair aussi, par ce qui a été démontré dans le Corollaire précédent, qu'on peut avoir un nombre infini de différentes espéces de Logarithmes selon la grandeur des puissances des hyperboles dont on se sert pour leur construction, & que par conséquent si on nomme L le Logarithme d'un nombre quelconque dans une espéce, M le module ou la puissance de l'hyperbole à laquelle se rapporte cette espéce, & *m* & *l* le module & le Logarithme du même nombre dans une autre espéce, on aura L. M :: *l*. *m*; NEPER en composant ses tables des Logarithmes, supposa M = 1, & de-là par le calcul trouva que le Logarithme du nombre 10 étoit 2, 30258509 &c. mais BRIGGS, pour avoir des Logarithmes plus commodes dans la pratique, choisit l'unité pour le Logarithme de 10, & par le moyen de la proportion L (2, 30258509 &c.). M (1) :: *l* (1). *m* = 0, 43429448 &c. il trouva 0, 43429448 &c.

pour ſon module. Cette même proportion fait voir auſſi que les Logarithmes d'une eſpéce ſont toujours en même raiſon que les Logarithmes correſpondans d'une autre eſpéce.

PROBLÊME II.

13. *TROUVER les différentielles logarithmiques des quantités variables.*

Soit AB, a, (*fig.* 2.) BD, b; la variable AP, x; & ſoit tirée la ligne Qq infiniment proche de Pp, & on aura $PQ = dx$, & l'eſpace $PpqQ = \frac{abdx}{x}$, qui eſt la différentielle de l'eſpace $BDpP$ Logarithme du rapport $\frac{AP}{AB}$: ſi on vouloit que BP fût la variable x, alors la différentielle logarithmique du rapport $\frac{AP}{AB}$ auroit cette forme $\frac{abdx}{a+x}$, lorſque AP eſt plus grand que AB, & cette autre $\frac{-abdx}{a-x}$ lorſque AP eſt moindre: mais comme cette différentielle, de même que le Logarithme ſon intégrale, augmente ou diminue (par l'art. 11.) en même raiſon que ſon module ab, en nommant généralement M ce module, la différentielle logarithmique du rapport $\frac{AP}{AB}$ ſera $M \times \frac{dx}{x}$, ou $M \times \frac{dx}{a-x}$, ou $M \times \frac{-dx}{a-x}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

14. SI on réduit la différentielle $\frac{dx}{a+x}$ en ſerie par la diviſion, on trouve $\frac{dx}{a+x} = \frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} +$

$\frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4} +$ &c. & pareillement $\frac{dx}{a-x} = \frac{dx}{a} + \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} + \frac{x^3dx}{a^4} +$ &c. donc l'intégrale de $M \times \frac{dx}{a+x}$ est $M \times \overline{\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}} +$ &c. & celle de $M \times \frac{-dx}{a-x}$ est $M \times \overline{-\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}}$ &c. ces deux intégrales donnent le Logarithme de $\frac{AP}{AB}$, ou de AP si on suppose $AB = 1$.

On doit remarquer ici que, quoique dans ces calculs le module M puisse avoir différentes valeurs à l'infini, cependant il est toujours le Logarithme d'une raison qui ne varie point; car puisque l'espace Bp est à l'espace $B\pi$ comme le parallélogramme AD est au parallélogramme Ab, il s'ensuit que si on suppose $Bp = AD$, on aura aussi $B\pi = Ab$, & la même égalité subsiste à l'égard de toutes les hyperboles qu'on puisse imaginer décrites entre les asymptotes AB, AG; donc le module M sera égal au Logarithme de la raison constante $\frac{AP}{AB}$: pour trouver cette raison on supposera $AB = 1$, & on nommera la variable AP, x; & l'espace Bp, z; on aura donc $M \times \frac{dx}{x} = dz$, on supposera aussi $x = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. les coefficiens A, B, C, D &c. sont indéterminés; on a donc $Mdx = xdz = dz + Azdz + Bz^2dz + Cz^3dz + Dz^4dz +$ &c. par conséquent en prenant les intégrales $Mx = z + \frac{Az^2}{2} + \frac{Bz^3}{3} + \frac{Cz^4}{4} + \frac{Dz^5}{5} +$ &c. $+ Q$, (Q est la quantité qu'il faut ajoûter pour rendre l'intégra-

le complette ;) de plus on a aussi $Mx = M + AMz + BMz^2 + CMz^3 + DMz^4 +$ &c ; en comparant ensemble les termes correspondans de ces deux suites égales, on trouve $Q = M$, $AM = 1$, $A = \frac{1}{M}$; $BM = \frac{A}{2}$, $B = \frac{1}{2M^2}$; $C = \frac{1}{2 \times 3 \times M^3}$, $D = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times M^4}$, &c. d'où l'on tire $x = 1 + \frac{z}{M} + \frac{z^2}{2M^2} + \frac{z^3}{2 \times 3 \times M^3} + \frac{z^4}{2 \times 3 \times 4 \times M^4} +$ &c. & en supposant $z = M$, on aura AP ou $x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} +$ &c. $= 2,7182818$ &c. donc le module M est le Logarithme de la raison invariable $\frac{1}{2,7182818 \text{ \&c.}}$: cette raison est appellée par M. Côtes *la raison modulaire*.

COROLLAIRE II.

15. En faisant attention à ce qu'on a démontré dans le Problême ; sçavoir, que la différentielle logarithmique de $\frac{x}{a}$ est $M \times \frac{dx}{x}$, celle de $\frac{a+x}{a}$ est $M \times \frac{dx}{a+x}$, celle de $\frac{a-x}{a}$ est $M \times \frac{-dx}{a-x}$, on voit que ces différentielles ne sont autre chose que, *la différence de la quantité proposée divisée par la quantité même & multipliée par le module* ; ce qui nous donne une méthode très-facile pour trouver la différentielle logarithmique d'une quantité quelconque. Par exemple, pour avoir la différentielle logarithmique de $\frac{e+fz^n}{e}$, on prendra sa différence $\frac{nfz^{n-1}dz}{e}$ qu'on

divisera par $\frac{e+fz^n}{e}$ & qu'on multipliera par M, ce qui donne $M \times \frac{nfz^{n-1}dz}{e+fz^n}$ pour la différentielle cherchée; ainsi en supposant que L marque le Logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$, on a $dL = M \times \frac{nfz^{n-1}dz}{e+fz^n}$; pareillement la différentielle logarithmique de $\frac{a+z^n}{a-z^n}$ est $M \times \frac{2naz^{n-1}dz}{aa-z^{2n}}$; on pourroit aussi trouver cette derniére différentielle très-facilement par l'art. 10, où nous avons démontré que le Logarithme d'une raison divisée par une autre raison est égal au Logarithme de la premiére moins le Logarithme de la seconde, donc puisque la raison $\frac{a+z^n}{a-z^n}$ est égale à la raison $\frac{a+z^n}{a}$ divisée par la raison $\frac{a-z^n}{a}$, on prendra la différentielle logarithmique de $\frac{a+z^n}{a} - \frac{a-z^n}{a}$, qui est $M \times \frac{nz^{n-1}dz}{a+z^n} + M \times \frac{nz^{n-1}dz}{a-z^n}$, dont la somme est $M \times \frac{2naz^{n-1}dz}{aa-z^{2n}}$, comme on a trouvé auparavant; & en général la différentielle logarithmique de $\frac{\overline{a+z^n}^{\lambda}}{\overline{a-z^n}^{\lambda}}$ est $M \times \frac{2n\lambda az^{n-1}dz}{aa-z^{2n}}$, ce qui est conforme à l'art. 10. où on a démontré que le Logarithme de $\frac{\overline{a+z^n}^{\lambda}}{\overline{a-z^n}^{\lambda}}$ & par conséquent aussi sa différentielle logarithmique est au Logarithme & à la différentielle logarithmique de $\frac{a+z^n}{a-z^n}$ comme λ à 1. Il est à pro-

pos de se servir de l'art. 10. pour trouver les différentielles logarithmiques des quantités composées, le calcul en devient plus simple & plus facile : ainsi soit L le logarithme du produit $x \times y \times z \times u$ &c. & que $l.x$, $l.y$, $l.z$, $l.u$ &c. signifient le logarithme de chaque quantité respective de ce produit, & on aura $L = l.x + l.y + l.z + l.u +$ &c. Donc par ce Corollaire $dL = M \times \frac{dx}{x} + M \times \frac{dy}{y} + M \times \frac{dz}{z} + M \times \frac{du}{u} +$ &c ; aussi par le même article & ce corollaire si L marque le logarithme de $\frac{x \times y \times z}{s \times t \times u}$ &c. on aura $dL = M \times \frac{dx}{x} + M \times \frac{dy}{y} + M \times \frac{dz}{z}$ &c. $- M \times \frac{ds}{s} - M \times \frac{dt}{t} - M \times \frac{du}{u}$ &c. pareillement la différentielle logarithmique de $\frac{x^n}{\overline{a+x} \times \overline{b+x} \times \overline{c+x} \times \&c.}$ est $M \times \frac{ndx}{x} - M \times \frac{dx}{a+x} - M \times \frac{dx}{b+x} - M \times \frac{dx}{c+x} -$ &c. Ces exemples donnent occasion de faire une remarque digne de notre attention, qui est, que par cette maniére d'opérer on réduit les fractions composées en plusieurs fractions simples, ce qui peut être d'usage en plusieurs cas, comme on verra ci-après.

COROLLAIRE III.

16. On doit conclure de ces calculs que la différentielle logarithmique d'une quantité variable est la même, soit que cette quantité soit multipliée par quelque grandeur constante ou non : par le corol-

laire précédent la différentielle logarithmique de x est $M \times \frac{dx}{x}$, celle de $\frac{x}{a}$ est $M \times \frac{dx}{x}$, celle de bx est aussi $M \times \frac{dx}{x}$. La raison de ceci paroîtra claire en décrivant entre les asymptotes AB, AG, (*fig.* 3.) une hyperbole équilatére Dpc, & prenant sur l'asymptote AB, la ligne AB $= 1$, AE $= b$, AP $= x$, & AC telle que AB . AE :: AP . AC, & menant de tous ces points des ordonnées BD, EF, Pp, Cc; car on aura AC $= bx$, l'espace hyperbolique BF égal à l'espace Pc, & si on méne les ordonnées Pq, gk, infiniment proches de Pp, Cc, en supposant que BD est le terme où commencent les logarithmes, la différentielle logarithmique de x est Pq différence de l'espace Bp, & celle de bx est Ck différence de l'espace Bc; mais puisque Pc = BF, Pc demeure toujours constant: donc on aura Pq = Ck, qui est ce qu'il falloit prouver. La même chose suit évidemment de l'art. 10. par lequel on a cette équation log. bx = log. b + log. x, donc les différences des deux membres sont égales, mais la différence du log. b est o, puisque c'est une quantité constante; donc la différence du log. bx est égale à celle du log. x. Ce qu'on vient de dire suppose que les logarithmes de x & de bx sont pris dans la même espéce; car s'ils sont de différentes espéces, on doit mettre $M \times \frac{bdx}{x}$ pour la différentielle logarithmique de bx.

COROLLAIRE IV.

17. LES différentielles logarithmiques $M \times \frac{dx}{x}$, $M \times \frac{dx}{a+x}$, $M \times \frac{-dx}{a-x}$ peuvent aussi nous servir de formules pour découvrir les intégrales de toutes les différentielles de cette nature ; car puisque (par l'art. 15.) elles sont divisées par les quantités dont elles sont les différentielles logarithmiques, il s'ensuit que *l'intégrale d'une de ces différentielles est le logarithme de la quantité qui la divise :* ainsi l'intégrale de $M \times \frac{dx}{x}$ est log. x, ou log. $\frac{x}{a}$ (par l'art. 9.) si cette intégrale doit s'évanouir lorsque $x = a$, ou en général log. bx par le corollaire précédent, on déterminera la quantité constante b en rendant l'intégrale complette ; si par exemple cette intégrale devient nulle lorsque $x = 1$, on aura log. $b = 0$, donc $b = 1$, puisque l'unité a zero pour son logarithme (par l'art. 9.) & généralement si cette intégrale s'évanouit, lorsque $x = Q$, on aura log. $bQ = 0$, ou $bQ = 1$, & $b = \frac{1}{Q}$: pareillement l'intégrale de $M \times \frac{dx}{a+x}$ est log. $a+x$, ou log. $\frac{a+x}{a}$, ou log. $b \times \overline{a+x}$; l'intégrale de $M \times \frac{-dx}{a-x}$ est log. $a-x$, ou log. $\frac{a-x}{a}$, ou log. $b \times \overline{a-x}$.

Maintenant pour avoir les modules qui déterminent l'espéce de ces logarithmes, on décomposera les différentielles en cette maniére ; *on multipliera la différentielle*

différentielle donnée par la quantité dont le logarithme est l'intégrale, & on la divisera par la différence de cette quantité, & le quotient sera le module cherché; car qu'on multiplie M x $\frac{dx}{x}$ par x ou bx, & qu'on le divise par dx ou bdx, le quotient donne le module M: ainsi si on demande l'intégrale de la différentielle $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$ avec son module, par la premiére régle cette intégrale est le logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$, en supposant qu'elle est nulle lorsque $z^n = 0$, & par la seconde régle multipliant la proposée par $\frac{e+fz^n}{e}$ & divisant par $\frac{nfz^{n-1}dz}{e}$, on trouve le quotient $\frac{1}{nf}$ égal au module, donc l'intégrale de $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$ est le logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$ au module $\frac{1}{nf}$, qu'on marquera de cette façon $\frac{1}{nf}\left(\frac{e+fz^n}{e}\right)$. Pour trouver l'intégrale de $\frac{z^{-1}dz}{e+fz^n}$, on multipliera le numérateur & le dénominateur par z^{-n}, ce qui donnera $\frac{z^{-n-1}dz}{ez^{-n}+f} = \frac{z^{-1}dz}{e+fz^n}$, par ce moyen cette différentielle se trouve réduite à la même forme que la précédente, si ce n'est que l'exposant n est ici négatif. Donc on trouvera de la même maniére que l'intégrale, qu'on suppose être nulle lorsque $z^{-n} = 0$, ou $z^n = \infty$, est $-\frac{1}{ne}\left(\frac{ez^{-n}+f}{f}\right) = -\frac{1}{ne}\left(\frac{e+fz^n}{fz^n}\right)$. La même méthode

nous donne aussi l'intégrale de la différentielle $\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$; car $e-fz^n=\overline{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}\times\overline{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$, & prenant la différentielle logarithmique de $\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$ & la multipliant par une quantité indéterminée A, on trouve $A\times\frac{\frac{n}{2}\sqrt{f}\times z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}+A\times\frac{\frac{n}{2}\sqrt{f}\times z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$, & la somme $A\times\frac{n\sqrt{ef}\times z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$ des deux différentielles doit être supposée égale à la proposée $\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$, ce qui donne $A=\frac{1}{n\sqrt{ef}}$: donc $\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}=\frac{1}{2\sqrt{e}}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}+\frac{1}{2\sqrt{e}}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$; or l'intégrale de $\frac{1}{2\sqrt{e}}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}$ par ce corollaire est égale au logarithme de $\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}}$ au module $\frac{1}{n\sqrt{ef}}=\frac{1}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$, & l'intégrale de $\frac{1}{2\sqrt{e}}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$ est égale au logarithme négatif de $\frac{\sqrt{e}-\sqrt{fz}}{\sqrt{e}}$ au même module, donc l'intégrale totale

de $\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$ est $\frac{1}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}}\right)-\frac{1}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}}\right)$ $=\frac{1}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}\right)$ (par l'art. 10.)

COROLLAIRE V.

18. Il suit de ce qu'on vient de dire, qu'on trouvera facilement ces sortes d'intégrales par les logarithmes de Neper, de Briggs, ou de quelque autre espéce que ce soit. Soit m le module des tables des logarithmes dont on se sert, L le logarithme véritable qui donne l'intégrale cherchée, l ce logarithme tel qu'on le trouve dans les tables, & M le module de l'intégrale, & l'article 12 nous donne $m.l$ $:: M.L = \frac{M \times l}{m} = Mlr$, en supposant $\frac{1}{m} = r$: si on se sert des tables de Briggs, qui sont les plus communes, on a $m = 0,4342944819$ &c. & $r = 2,30258509299$ &c. & si on demande l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$ qui est (par le corol. précédent) $\frac{D}{nf}\left(\frac{e+fz^n}{e}\right)$ D représentant ici une quantité donnée, l marquera le logarithme de $\frac{e+fz^n}{e}$ pris dans les tables de Briggs, & on aura $M = \frac{D}{nf}$; en mettant donc ces valeurs dans la formule $\frac{Ml}{m}$ ou Mlr, on aura l'intégrale de-

mandée : si c'étoit l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$ qui est $\frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}\right)$, qu'on demandoit, alors on a $M=\frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$, & l le logarithme de $\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}$, & la formule par le moyen de ces valeurs donne l'intégrale demandée ; il faut faire la même chose pour les autres exemples.

REMARQUE I.

19. Si on veut connoître le point B dans l'asymptote (*fig.* 2.) & l'ordonnée BD, d'où commencent les espaces hyperboliques ou logarithmes, qui expriment la valeur des intégrales dont a parlé dans les articles précédens, par exemple, le terme de l'intégrale de la différentielle $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$, il faudra supposer AB $=a$, BD $=b$, BP $=z^n$, ce qui donnera PQ $=nz^{n-1}dz$, & l'espace PpqQ $=\frac{nabz^{n-1}dz}{a+z^n}$, la comparaison de cette différentielle avec la proposée $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}=\frac{1}{f}\times\frac{z^{n-1}dz}{\frac{e}{f}+z^n}$, donnera $nab=\frac{1}{f}$, $ab=\frac{1}{nf}$, & $a=\frac{e}{f}$, d'où l'on tire aussi $b=\frac{1}{ne}$: par conséquent le rapport, dont le logarithme donne l'intégrale de la proposée, est $\frac{\frac{e}{f}+z^n}{\frac{e}{f}}=\frac{e+fz^n}{e}$.

REMARQUE II.

20. TOUT ce que nous avons démontré touchant les eſpaces hyperboliques ou Logarithmes, peut être appliqué à la courbe, qu'on appelle, *Logarithmique*; car on ſçait que les propriétés qui conviennent aux eſpaces hyperboliques, conviennent également aux abſciſſes de l'aſymptote de la logarithmique, que les ordonnées à cette courbe priſes en progreſſion géométrique, coupent les abſciſſes de telle ſorte qu'elles forment une progreſſion arithmétique, & qu'ainſi ces abſciſſes ſont les logarithmes ou meſures des rapports entre les ordonnées, que ces abſciſſes dans différentes courbes logarithmiques ſuivent la proportion des ſoûtangentes de ces courbes; or la ſoûtangente dans chaque logarithmique eſt une quantité conſtante; donc elle doit être cenſée le Module qui détermine la grandeur de ces meſures.

REMARQUE III.

21. CE que nous avons dit juſqu'ici, ſuffit pour faire voir clairement, comment les eſpaces compris entre l'hyperbole & ſes aſymptotes, peuvent être employés pour meſurer les rapports entre les abſciſſes priſes ſur les aſymptotes, ou entre les ordonnées qui bornent ces eſpaces, puiſque ces ordonnées ſont en raiſon réciproque des abſciſſes: De-là il s'enſuit qu'il ne doit reſter preſqu'aucune difficulté touchant les intégrales, qui ſe rapportent aux ſecteurs hyperboliques, ou aux eſpaces compris entre l'hyperbole

& ses axes, parce que ces espaces ne sont autre chose que la somme ou la différence d'un triangle rectiligne & d'un secteur, & le secteur est égal, comme l'on sçait, à l'espace hyperbolique compris entre deux ordonnées menées des deux extrémités du secteur sur l'asymptote. Mais parce qu'il se trouve beaucoup d'intégrales, qui se rapportent immédiatement à ces secteurs & espaces, & que les secteurs hyperboliques ont une grande analogie avec les secteurs du cercle, & par conséquent avec les arcs de cercle; on va exposer les différens rapports dont ils sont les mesures, & la maniére de les réduire aux logarithmes, ce qui apportera de l'éclaircissement à ce qu'on dira dans la suite touchant les mesures des angles.

PROBLÊME III.

22. *TROUVER les rapports dont les secteurs hyperboliques sont les mesures ou logarithmes.*

Du centre O (fig. 4.) & des demi-axes OA, AB, qu'on décrive une hyperbole équilatére AP, du centre O à un point quelconque P de l'hyperbole, qu'on tire la droite OP qui coupe AB en D, & du point P l'ordonnée PK à l'axe OA, qui étant prolongée rencontre l'asymptote OB en I; & des points A & P qu'on tire sur l'asymptote les perpendiculaires AH, PQ; cela posé: le secteur OAP est égal à l'espace HAPQ mesure du rapport $\frac{OQ}{OH}$ ou $\frac{AH}{PQ}$ (par l'art. 8.) mais les triangles semblables ABH, PIQ,

donnent AH . PQ :: AB . IP, & par la nature de l'hyperbole $\overline{KI + KP} \times IP = \overline{AB}^2$, d'où l'on tire KP + KI . AB :: AB . IP, & par la nature des progressions géométriques KI + KP . AB :: $\sqrt{KI + KP}$. $\sqrt{IP}$; donc AH . PQ :: $\sqrt{KI + KP}$. $\sqrt{IP}$. de plus à cause des triangles semblables OAD, OKP, & OAB, OKI, on trouve AB . AD :: KI . KP, d'où l'on tire AB + AD . AB :: KI + KP . KI, & AB — AD . AB :: IP . KI, & ces deux proportions donnent cette autre AB + AD . AB — AD :: KI + KP . IP ; donc on aura $\sqrt{AB + AD}$. $\sqrt{AB - AD}$ :: AH . PQ : d'où l'on voit que si on nomme OA ou AB, a ; AD, x ; OK, y ; OQ, v ; OH, c, on aura l'égalité des raisons suivantes, $\frac{v}{c} = \frac{a}{y - \sqrt{yy - aa}}$ $= \frac{y + \sqrt{yy - aa}}{a} = \sqrt{\frac{y + \sqrt{yy - aa}}{y - \sqrt{yy - aa}}} = \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$, dont la mesure commune est le secteur OAP, ou ce qui est la même chose, le secteur OAP est le logarithme de chacune de ces raisons au module $\frac{aa}{2}$ valeur du triangle OAB qui est égal à la puissance de l'hyperbole. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

23. MENANT la droite Op infiniment proche de OP, qui coupe AD en q, & tirant sur Op la perpendiculaire Dm, on formera deux triangles semblables OAD, Dmq, qui donneront, OD ($\sqrt{aa + xx}$).

OA (a) :: Dq (dx) . D$m = \frac{adx}{\sqrt{aa+xx}}$, & $\frac{\text{D}m \times \text{OD}}{2}$ $= \frac{adx}{2} =$ DOq : mais DOq est à POp différence du secteur OAP, comme $\overline{\text{OD}}^2$ est à $\overline{\text{OP}}^2$, ou comme $\overline{\text{OA}}^2$ à $\overline{\text{OK}}^2$; mais puisque $\overline{\text{OA}}^2 . \overline{\text{OK}}^2 :: \overline{\text{AD}}^2 . \overline{\text{KP}}^2$, & que par la nature de l'hyperbole $\overline{\text{KP}}^2 = \overline{\text{OK}}^2 - \overline{\text{OA}}^2$, on aura $\overline{\text{OA}}^2 . \overline{\text{AD}}^2 :: \overline{\text{OK}}^2 . \overline{\text{OK}}^2 - \overline{\text{OA}}^2$, ce qui donne $\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{AD}}^2 . \overline{\text{OA}}^2 :: \overline{\text{OA}}^2 . \text{OK}^2$; donc DOq . POp :: $\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{AD}}^2 . \overline{\text{OA}}^2$, ou $\frac{adx}{2}$. POp :: $aa - xx . aa$, & PO$p = \frac{a^3dx}{2 \times aa - xx}$, qui est la différence du secteur OAP qu'on trouve en se servant de la tangente AD, & dont l'intégrale (par l'art. précédent) est le Logarithme de $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ au module $\frac{aa}{2}$, c'est-à-dire $\frac{aa}{2}\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) = \frac{aa}{4}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, car par l'art. 10. les Logarithmes sont proportionnels aux puissances des quantités dont ils sont les Logarithmes, & il revient au même de multiplier le Logarithme ou son module par une quantité quelconque, ainsi au lieu de M $\left(\frac{\overline{a+x}^{\lambda}}{\overline{a-x}^{\lambda}}\right)$ on peut mettre $_{\lambda}$M $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$, & réciproquement.

Ce qu'on vient d'exposer fait découvrir l'intégrale de la différentielle générale $\frac{\text{D}z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e - fz^n}$ ou

Dz

$\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{f\times\overline{\frac{e}{f}-z^n}}$; car en comparant cette différentielle à celle-ci $\frac{a^3dx}{2\times\overline{aa-xx}}$, on voit que pour les rendre semblables, on n'a qu'à supposer $a=\sqrt{\frac{e}{f}}$, $x=z^{\frac{n}{2}}$, ce qui donne $\frac{ne}{4f}\sqrt{\frac{e}{f}}\times\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\frac{e}{f}-z^n}=\frac{a^3dx}{2\times\overline{aa-xx}}$, dont l'intégrale est $\frac{De}{2f}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{e}{f}}+z^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{e}{f}}-z^{\frac{n}{2}}}}\right)$; or la différentielle $\frac{ne}{4f}\sqrt{\frac{e}{f}}\times\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\frac{e}{f}-z^n}$ divisée par $\frac{ne}{4}\sqrt{\frac{e}{f}}$ donne la proposée $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{f\times\overline{\frac{e}{f}-z^n}}$, & par conséquent son intégrale est $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{e}{f}}+z^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{e}{f}}-z^{\frac{n}{2}}}}\right)$ ou $\frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{\frac{e}{f}}+z^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{e}{f}}-z^{\frac{n}{2}}}\right)$, ou enfin $\frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}\left(\frac{\sqrt{e}+\sqrt{fz^n}}{\sqrt{e}-\sqrt{fz^n}}\right)$, qui est la même qu'on a trouvé art. 17.

COROLLAIRE II.

24. Si dans la différentielle $\frac{a^3dx}{2\times\overline{aa-xx}}$ il arrive

que x ſoit plus grand que a, alors le rapport $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ devient impoſſible, & par conſéquent auſſi ſon logarithme qui donne la valeur de l'intégrale, & le cas demeure le même en ſe ſervant du rapport $\frac{a+x}{a-x}$ délivré du ſigne radical, parce que ce rapport étant une quantité négative, ſon logarithme eſt encore impoſſible : dans ce cas il faut du centre O élever la ligne OE paralléle & égale à AB, & mener parallélement à OA la ligne EF qui rencontre AP prolongée en F ; cela fait, la droite EF ſera égale à x, car à cauſe des triangles ſemblables OAD, OEF, on aura $OA + AD . OA - AD :: EF + OE . EF - OE$, donc $\sqrt{\frac{OA+AD}{OA-AD}} = \sqrt{\frac{EF+OE}{EF-OE}} = \sqrt{\frac{EF+OA}{EF-OA}} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$; or le rapport $\sqrt{\frac{EF+OA}{EF-OA}}$ eſt réel, & auſſi ſon logarithme qui donnera par conſéquent l'intégrale demandée : il eſt même évident à cauſe de la proportion $AD . AB :: OE (AB) . EF$, que lorſque AD eſt moindre ou plus grande que AB, AB eſt auſſi moindre ou plus grande que EF, & qu'ainſi lorſque l'un des deux rapports $\sqrt{\frac{OA+AD}{OA-AD}}$, $\sqrt{\frac{EF+OA}{EF-OA}}$, eſt impoſſible, l'autre eſt néceſſairement réel. L'une des valeurs de x étant connue, il eſt facile de trouver l'autre, puiſque AB ou a eſt moyen proportionnel entre ces deux valeurs. De plus on doit remarquer que, puiſqu'on a toujours

$\sqrt{\frac{OA + AD}{OA - AD}} = \sqrt{\frac{EF + OA}{EF - OA}}$, on peut se servir de celui de ces deux rapports qui est impossible sans faire aucune réduction, car il est évident qu'en prenant son logarithme comme s'il étoit réel, on aura celui qu'on cherche. Ce qu'on vient de dire dans ce corollaire doit aussi être appliqué de la même maniére à la différentielle générale $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e - fz^n}$.

COROLLAIRE III.

25. Qu'on tire une droite OA (*fig.* 5.) égale au semi-axe OA de l'hyperbole, & du centre O & du rayon OA qu'on décrive une demi circonférence de cercle ALB, ensuite prenant OC égale à la tangente AD, on menera l'ordonnée CL & le rayon OL, & on aura AC . CL :: CL . CB, ou plutôt, puisque AC = LO − OC, & CB = LO + OC, LO − OC . CL :: CL . LO + OC, & par la nature des progressions géométriques LO − OC. CL :: CL . LO + OC :: $\sqrt{LO - OC}$. $\sqrt{LO + OC}$, ce qui donne $\sqrt{\frac{LO + OC}{LO - OC}}$ ou $\sqrt{\frac{AO + AD}{AO - AD}} = \frac{LO + OC}{CL} = \frac{CL}{LO - OC}$; d'où il suit qu'en nommant OA ou LO, R; OC ou AD, T; CL, S = $\sqrt{RR - TT}$, le secteur OAP (par l'art. 23.) sera égal à $\frac{RR}{2}\left(\frac{R + T}{S}\right)$ ou $\frac{RR}{2}\left(\frac{S}{R - T}\right)$. Ces valeurs sont réelles, comme nous avons

vû, lorſque R eſt plus grand que T : mais lorſque R eſt moindre que T, & qu'on veut ſe ſervir d'un rapport réel, il faut outre la conſtruction précédente tirer la tangente L T qui rencontre le diamétre en T (*fig.* 6.), & à cauſe des triangles ſemblables OCL, LOT, on aura CO . LO :: LO . OT, ce qui donne OT = EF (*fig.* 4. *&* 6.) & $\frac{LO+OC}{CL} = \frac{LO+OT}{LT}$, auſſi $\frac{CL}{LO-OC} = \frac{LT}{OT-LO}$; donc en nommant OA, R; OT, T; LT, $S = \sqrt{TT-RR}$, le ſecteur OAP ſera égal à $\frac{RR}{2}\left(\frac{R+T}{S}\right)$, ou $\frac{RR}{2}\left(\frac{S}{T-R}\right)$ qui ſont des valeurs réelles. On aura ſouvent beſoin dans la ſolution des Problêmes des réductions des rapports dont on vient de parler. Suppoſant donc $R = \sqrt{\frac{e}{f}}$, $T = z^{\frac{n}{2}}$, ou $T = \frac{e}{fz^{\frac{n}{2}}}$, ſelon que $z^{\frac{n}{2}}$ eſt moindre ou plus grand que $\sqrt{\frac{e}{f}}$, $S = \sqrt{\frac{fz^n - e}{f}}$, ou $S = \sqrt{\frac{e \times e - fz^n}{fz^{\frac{n}{2}}}}$, on peut exprimer l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$ qu'on a trouvé article 23. de cette façon $\frac{2D}{ne} R\left(\frac{R+T}{S}\right)$, ou $\frac{2D}{ne} R\left(\frac{S}{R-T}\right)$ lorſque $z^{\frac{n}{2}}$ eſt moindre que $\sqrt{\frac{e}{f}}$, & $\frac{2D}{ne} R\left(\frac{S}{T-R}\right)$ lorſqu'il eſt plus grand.

Ce Corollaire fait voir qu'on peut exprimer les

intégrales de toutes les différentielles réduites à cette forme $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$ par le logarithme du rapport entre les trois côtés d'un triangle rectangle ; c'est de cette façon de marquer les intégrales, dont se servit M. Côtes dans les premiéres tables qu'il composa à ce sujet.

COROLLAIRE IV.

26. De ce que le secteur OAP est égal à l'espace HAPQ, il suit que leurs différences sont aussi égales, donc nommant OQ, v ; OH, c ; la puissance de l'hyperbole étant $\frac{aa}{2}$, ou aura $\frac{aa}{2} \times \frac{dv}{v} = \frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa-xx}}$; or le dernier Problême nous donne un moyen facile pour la réduction de la différentielle $\frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa-xx}}$ à cette forme simple $\frac{aa}{2} \times \frac{dv}{v}$; car par ce qui y est démontré, il faut pour cela supposer $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, ce qui donne $\frac{dv}{v} = \frac{adx}{aa-xx}$, & $\frac{aa}{2} \times \frac{dv}{v} = \frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa-xx}}$. De-là on voit qu'on n'a qu'à généralement supposer $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{e}{f}}+z^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{e}{f}}-z^{\frac{n}{2}}}}$, ou plus simplement $v = \frac{\sqrt{\frac{e}{f}}+z^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\frac{e}{f}}-z^{\frac{n}{2}}}$, & on aura $\frac{dv}{v} = n\sqrt{\frac{e}{f}} \times \frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\frac{e}{f}-z^n}$, & puisque le modu-

le eſt $\frac{e}{2f}$, ſi on multiplie les deux différentielles par $\frac{e}{2f} \times \frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{f}{e}} = \frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$, on trouve $\frac{D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}} \times \frac{dv}{v} = \frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$.

COROLLAIRE V.

27. NON ſeulement le dernier Problême fournit une méthode facile pour réduire à une expreſſion logarithmique très-ſimple la différentielle du ſecteur AOP, lorſque cette différentielle eſt tirée de la tangente, mais auſſi lorſqu'elle dépend du calcul de l'ordonnée & de l'abſciſſe qui répondent à ce ſecteur; & par ce même Problême on réduit aux logarithmes toutes les intégrales qui ſe rapportent aux eſpaces compris entre l'hyperbole & ſes axes. Soit tirée l'ordonnée pk infiniment proche de PK, & les valeurs des lignes étant ſuppoſées les mêmes que dans le Problême, le triangle OPK eſt égal à $\frac{y}{2}\sqrt{yy-aa}$, dont la différence eſt $\frac{dy\sqrt{yy-aa}}{2} + \frac{yydy}{2\sqrt{yy-aa}}$ égale à la ſomme des eſpaces POp, KPpk, donc en retranchant l'eſpace KPpk ou $dy\sqrt{yy-aa}$, il reſtera $\frac{yydy}{2\sqrt{yy-aa}} - \frac{dy\sqrt{yy-aa}}{2} = \frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$ pour la valeur de POp; par conſéquent l'intégrale de $\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$ par le Problême eſt $\frac{aa}{2}\left(\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a}\right)$, ou

$\frac{aa}{2}\left(\frac{a}{y-\sqrt{yy-aa}}\right)$ ou $\frac{aa}{2}\left(\sqrt{\frac{y+\sqrt{yy-a}}{y-\sqrt{yy-aa}}}\right)$. Maintenant pour réduire la différentielle $\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$ à une expression logarithmique simple, on voit qu'elle doit être égale à la différentielle logarithmique de $\frac{v}{c}$, comme en effet supposant $\frac{v}{c}=\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a}$, on trouve $\frac{dv}{v}=\frac{dy}{\sqrt{yy-aa}}$, & $\frac{aa}{2}\times\frac{dv}{v}=\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$; pareillement si on supposoit $\frac{v}{c}=\frac{a}{y-\sqrt{yy-aa}}$, ou $\frac{v}{c}=\sqrt{\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{y-\sqrt{yy-aa}}}$, on trouveroit encore $\frac{aa}{2}\times\frac{dv}{v}=\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}$.

Pour revenir aux intégrales, si on nomme T le triangle OPK, l'espace APK ou l'intégrale de $dy\sqrt{yy-aa}$, par ce qu'on a dit dans ce corollaire, est égale à $T-\frac{aa}{2}\left(\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a}\right)$, ou &c.

Pour étendre davantage ce corollaire, qu'on suppose $a=\sqrt{\frac{e}{f}}$, $y=z^{\frac{n}{2}}$, & l'on trouve $\frac{aady}{2\sqrt{yy-aa}}=\frac{ne}{4\sqrt{f}}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{fz^n-e}}$, donc l'intégrale de cette nouvelle différentielle sera $\frac{e}{2f}\left(\frac{\sqrt{fz^n}+\sqrt{fz^n-e}}{\sqrt{e}}\right)$, ou $\frac{e}{2f}\left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{fz^n}-\sqrt{fz^n-e}}\right)$, ou $\frac{e}{2f}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{fz^n}+\sqrt{fz^n-e}}{\sqrt{fz^n}-\sqrt{fz^n-e}}}\right)$, ou enfin $\frac{e}{4f}\left(\frac{\sqrt{fz^n}+\sqrt{fz^n-e}}{\sqrt{fz^n}-\sqrt{fz^n-e}}\right)$; d'où l'on déduira facilement l'intégrale de la diffé-

rentielle générale $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{fz^n - e}}$, qui sera $\frac{2D}{n\sqrt{f}}\left(\frac{\sqrt{fz^n}+\sqrt{fz^n-e}}{\sqrt{e}}\right)$, ou &c. & de même celle de $Dz^{\frac{n}{2}-1}dz\sqrt{fz^n - e}$ sera $\frac{2D\sqrt{f}}{n}$ T $- \frac{De}{n\sqrt{f}}\left(\frac{\sqrt{fz^n}+\sqrt{fz^n-e}}{\sqrt{e}}\right)$, ou &c. De cette maniére, si du point P on tire sur le second axe la perpendiculaire PM, l'espace OAPM étant égal à la somme du secteur OAP & du triangle OPM ou OKP, on en trouvera la valeur en logarithmes, ce qui donnera l'intégrale de $\frac{yydy}{\sqrt{yy - aa}}$, ou de $\frac{n\sqrt{f}}{2} \times \frac{z^{\frac{3n}{2}-1}dz}{\sqrt{fz^n - e}}$ différence de l'espace OAPM. On trouvera donc la valeur des intégrales de tous ces corollaires par l'article 18.

REMARQUE.

28. DANS le dernier Corollaire on a supposé $\frac{v}{c} = \frac{y+\sqrt{y - aa}}{a}$ & $\frac{v}{c} = \frac{a}{y - \sqrt{yy - aa}}$, lesquelles expressions peuvent être réduites à de plus simples; car puisque (par l'art. 16.) on trouve la même différentielle logarithmique d'une quantité variable soit qu'elle soit multipliée par une grandeur constante ou non; il s'ensuit qu'on aura la même différentielle qu'on a trouvée dans le corollaire, si on suppose simplement $v = y + \sqrt{yy - aa}$, & $v = \frac{1}{y - \sqrt{yy - aa}}$, ou

ou $y = \frac{aa + uu}{2u}$, & $y = \frac{1 + aauu}{2u}$; ceci a lieu aussi dans l'article 26.

COROLLAIRE VI.

29. OUTRE qu'on a vû dans les corollaires précédens, comment on peut par le moyen du dernier Problême transformer les différentielles complexes en d'autres très-simples, il ne sera pas inutile d'observer que le même Problême sert encore à transformer des différentielles complexes en d'autres de différente espéce, & de les délivrer du signe radical, ou réciproquement : ainsi si on vouloit changer la différentielle $\frac{dy}{\sqrt{yy - aa}}$ en une autre qui n'eût pas le signe radical, en prenant l'équation $\sqrt{\frac{y + \sqrt{yy - aa}}{y - \sqrt{yy - aa}}} = \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$ on trouve $x = \frac{a}{y}\sqrt{yy - aa}$, $y = \frac{aa}{\sqrt{aa - xx}}$, ce qui donne $dy = \frac{aaxdx}{aa - xx^{\frac{3}{2}}}$, $\sqrt{yy - aa} = \frac{ax}{\sqrt{aa - xx}}$, & $\frac{dy}{\sqrt{yy - aa}} = \frac{adx}{aa - xx}$.

REMARQUE.

30. DANS les calculs des articles précédens nous nous sommes toujours servis de l'hyperbole équilatére, parce qu'elle est la plus simple, & que toutes les autres hyperboles peuvent y être réduites : car des demi-axes conjugués OA, OH, (*fig.* 7.) soit décrite une hyperbole quelconque AC, & qu'on

mene au premier axe une ordonnée CK, & la droite OC; soit décrite aussi des demi-axes égaux OA, OB, une hyperbole équilatére AP, qui rencontre l'ordonnée CK prolongée en P, & qu'on tire OP; cela posé, on sçait par ce qui est démontré dans les traités des sections coniques, que les espaces AKC, AKP, & les secteurs OAC, OAP, sont entr'eux dans la raison constante de KC à KP ou de OH à OB. Pareillement des demi-axes conjugués OG, OB, soit décrite (*fig.* 8.) une hyperbole quelconque GC, & qu'on mene au second axe OB l'ordonnée CK, & qu'on tire OC; soit aussi décrite des demi-axes égaux OB, OA, une hyperbole équilatére AP qui rencontre en P l'ordonnée CK, qu'on tire aussi OP; & les espaces OGCK, OAPK, & les secteurs OGC, OAP, sont dans la raison constante de OG à OA: donc les secteurs & espaces compris entre les hyperboles & leurs axes ont un rapport donné avec ceux de l'hyperbole équilatére; d'où il suit que leurs différentielles s'exprimeront par les mêmes formules générales $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e-fz^n}$, $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{fz^n-e}}$, & leurs valeurs par les intégrales de ces formules.

Qu'on décrive (*fig.* 9.) une hyperbole quelconque AF qui ait pour premier demi-axe la ligne OA, & pour asymptote la ligne OK; qu'on décrive aussi une hyperbole équilatére AP sur le même demi-axe, & dont l'asymptote est OQ; du som-

met A qu'on tire la tangente commune AB, qui rencontre les deux asymptotes en E & B, & si on prend des abscisses égales OD, OC, & OQ, OK, & qu'on mene aux courbes respectives les ordonnées DG, CH, QP, KF, on peut démontrer que les espaces CHFK, DGPQ, sont entr'eux dans la raison constante du triangle OAE au triangle OAB, ou de AE à AB; par conséquent la différentielle $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^{n}}$ sert d'expression générale aux différences des espaces compris entre les hyperboles & leurs asymptotes de telle espéce que soient les hyperboles, & les différentes intégrales de cette différentielle donneront en logarithmes les valeurs de ces espaces.

Fin de la premiére Partie.

SECONDE PARTIE DE LA REDUCTION DES INTEGRALES AUX ARCS DE CERCLE.

APRES avoir parlé des différentielles les plus ſimples dont les intégrales ſe réduiſent aux Logarithmes, il reſte maintenant à parler de celles dont les intégrales peuvent s'exprimer par des Arcs de cercle ; enſuite on donnera une méthode pour transformer en ces différentielles ſimples, celles qui ſont compoſées.

La circonférence du cercle a été de tout temps regardée par les Géométres comme la plus convenable entre les lignes droites ou courbes pour meſurer les angles, & cela pour cette raiſon que les arcs de cette courbe (le cercle étant donné) ſont toujours comme les grandeurs des angles ; c'eſt cette analogie qui fournit une méthode facile, lorſque l'un des deux, l'angle ou l'arc, eſt connu, de dé-

couvrir l'autre : or puisque les angles se trouvent très-commodément par les tables des Sinus & Tangentes, lorsque les Sinus ou Tangentes en sont connus, il s'ensuit qu'on parviendra d'une maniére aisée & expéditive à la connoissance de la grandeur absolue des arcs qui mesurent ces angles. Pour cette raison on va considérer les arcs de cercle comme les mesures des angles, & de-là on déduira les intégrales des différentielles dont il s'agit ici.

DES MESURES DES ANGLES.

PROBLÊME I.

31. *TROUVER la mesure d'un angle.*

Soit proposé un angle quelconque AOC (*fig.* 10.) dont on demande la mesure. Du centre O & du rayon OA pris à volonté soit décrite une portion de circonférence de cercle ACB qui coupe OC en C, soit mené le rayon Oc infiniment proche de OC, & ayant prolongé OC & Oc jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente AD élevée du point A en D & q, on tirera sur Oq la perpendiculaire Dm, & nommant OA, a; AD, x; les triangles semblables OAD, Dmq donneront OD . OA :: Dq . Dm, & les petits secteurs COc, DOm donneront OD . OC (OA) :: Dm . Cc; en multipliant ensemble ces deux proportions, on trouve $\overline{OD}^2 (aa + xx)$. $\overline{OA}^2 (aa)$ :: Dq (dx) . Cc $= \frac{aadx}{aa + xx}$: mais Cc est la différence de l'arc AC, donc l'intégrale de

$\frac{aadx}{aa+xx}$ donnera l'arc AC qui eſt la meſure de l'angle propoſé AOC. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

32. AVANT que de tirer les conſéquences que fournit ce Problême, il eſt à propos de l'éclaircir en peu de mots. On voit que la grandeur de l'arc AC, qui meſure l'angle AOC, eſt arbitraire, & qu'on peut, en prenant des rayons de différentes longueurs, décrire une infinité de circonférences, dont les arcs compris entre les droites OA, OC, pourroient chacun également ſervir de meſure à l'angle AOC, de même qu'on a vû art. 11. qu'il y a une infinité d'eſpaces hyperboliques de différentes grandeurs, qui ſont tous les meſures d'une même raiſon : c'eſt pourquoi pour ne pas être dans le cas de trouver des intégrales indéterminées, il faut ſe ſervir de quelque module pour déterminer lequel de tous les arcs poſſibles d'être inſcrits dans le même angle eſt celui que demande l'état de la queſtion, puiſque c'eſt la longueur des arcs, & non la grandeur des angles, qui donne la valeur des intégrales cherchées ; on doit imiter en cela les anciens Géométres qui, pour fixer leurs idées touchant la grandeur des angles, trouvoient qu'il étoit néceſſaire de diviſer toutes les circonférences de Cercle en un nombre égal de parties ſans avoir égard à la différente longueur des circonférences : or puiſque les arcs ſemblables ſont en même raiſon que les rayons,

& que le rayon eſt la ligne la mieux connue dans le cercle, & entre dans tous les calculs qui regardent cette courbe, il eſt à propos qu'on le choiſiſſe pour le module auquel doivent ſe rapporter toutes les meſures des angles, d'autant plus que dans ce cas on trouve, comme on verra ci-après, les meſures des angles tout à fait analogues aux meſures des raiſons & les expreſſions ſemblables. On doit donc conclure de ce qu'on vient de dire que l'arc AC eſt la meſure de l'angle AOC au module ou au rayon a, c'eſt l'intégrale de la différentielle $\frac{aadx}{aa+xx}$, on marquera cette intégrale de la ſorte a (AOC), comme on a fait pour les meſures des rapports : ainſi cette expreſſion a (AOC) ſignifie l'arc qui meſure l'angle AOC, lequel arc eſt décrit du rayon a. Maintenant par le moyen de cette formule $\frac{aadx}{aa+xx}$, on trouvera facilement l'intégrale de la différentielle générale $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$; car ſuppoſant $a=\sqrt{\frac{e}{f}}$, $x=z^{\frac{n}{2}}$, on trouve $\frac{aadx}{aa+xx}=\frac{ne}{2}\times\frac{z^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, dont l'intégrale, comme on vient de voir, eſt $\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC); par conſéquent l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$ eſt $\frac{2D}{ne}\times\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC), c'eſt-à-dire, égale à la quantité

$\frac{2D}{ne}$ multipliée par l'arc AC décrit du rayon $\sqrt{\frac{e}{f}}$ & dont la tangente est $z^{\frac{n}{2}}$, ou ce qui revient au même, puisque les arcs semblables sont proportionnels aux rayons, cette intégrale est égale à l'arc décrit du rayon $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$, & dont le rayon est à la tangente comme $\sqrt{\frac{e}{f}}$ à $z^{\frac{n}{2}}$: généralement on dit que l'expression $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC) est la mesure de l'angle AOC au module $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$.

COROLLAIRE II.

33. L'ON sçait que le rayon du cercle est à la demi-circonférence, comme 1 à 3, 1415926535 &c. donc si on nomme R le rayon on aura cette proportion, 3, 1415926535 &c. . 1 :: 180 dégrés. R = 57, 2957795130 &c. dégrés, ou 57°. 17'. 44" environ; ce qui fait voir que le rayon dans tout cercle est égal à un arc de 57°. 17'. 44". Par ce moyen connoissant un angle, on connoîtra la longeur de l'arc qui le mesure, le rayon étant donné; car il est évident que l'arc de 57°. 17'. 44", est à la longueur du rayon, ou au nombre des parties dont on suppose le rayon composé, comme le nombre de dégrés d'un autre angle quelconque est à la longueur de l'arc qui le mesure; soit supposé 57°. 17'. 44" ou 57, 295779 &c. = m, soit N le nombre de degrés d'un angle connu

connû quelconque, Z la longueur de l'arc qui le mesure, R le rayon avec lequel cet arc est décrit, & la proportion sera $m . N :: R . Z$, donc $Z = \frac{N \times R}{m}$ $= N \times R \times r$, en supposant $\frac{1}{m} = \frac{1}{57,295779 \text{ \&c.}} = 0,0174532925$ &c. $= r$. C'est par cette formule qu'on trouve les intégrales des différentielles qui se rapportent au cercle ; par exemple si on veut avoir la valeur de l'intégrale $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC) trouvée dans le corollaire précédent, il est clair que, puisque le rayon est à la tangente de l'angle AOC comme $\sqrt{\frac{e}{f}}$ à $z^{\frac{n}{2}}$, on trouvera le nombre de degrés que contient cet angle par les tables des Sinus & Tangentes, ce qui donne la valeur de N, & puisque l'arc désigné par $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC) est décrit du rayon $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (par le corol. précédent), on a $R = \frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$; en mettant donc ces valeurs de N & R dans la formule $\frac{N \times R}{m}$, ou $N \times R \times r$, on trouvera l'arc de cercle qui est l'intégrale cherchée.

COROLLAIRE III.

34. LA valeur qu'on a donnée dans les deux Corollaires précédens à l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$ suppose

qu'elle doit s'évanouir lorſque la tangente AD ou $z^{\frac{n}{2}} = 0$; mais ſi au contraire cette intégrale doit être nulle lorſque $z^{\frac{n}{2}} = \infty$ ou $\frac{1}{z^{\frac{n}{2}}} = 0$, dans ce cas il faut élever ſur OA la perpendiculaire OB qui rencontre la circonférence en B, du point B tirer la tangente BF qui rencontre en F la ligne OC prolongée, cela fait, au lieu de l'angle AOC on ſe ſervira de ſon complement BOC, parce que la tangente du premier eſt infinie lorſque la tangente de l'autre eſt nulle; & parce que les triangles ſemblables OAD, OBF donnent AD $\left(z^{\frac{n}{2}}\right)$. OA $\left(\sqrt{\frac{e}{f}}\right)$ :: OA $\left(\sqrt{\frac{e}{f}}\right)$. BF $= \frac{e}{fz^{\frac{n}{2}}}$, ſi on ſubſtitue $\frac{e}{fz^{\frac{n}{2}}}$ au lieu de $z^{\frac{n}{2}}$ & $-\frac{ez^{-\frac{n}{2}-1}dz}{f}$ au lieu de $z^{\frac{n}{2}-1}dz$ dans la différentielle $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, elle deviendra $-\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, d'où il ſuit que l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$ dans le cas de ce corollaire eſt $-\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (BOC). Il eſt facile de trouver la tangente de l'angle BOC, celle de AOC étant donnée, puiſque la proportion ci-deſſus fait voir que le rayon eſt moyen proportionnel entre ces deux tangentes : mais pour connoître l'angle BOC, il n'eſt nullement néceſſaire de connoître ſa tangente,

puiſqu'en cherchant dans les tables l'angle AOC on aura auſſi ſon complément BOC, & enſuite par la formule du corollaire précédent on trouvera l'arc de cercle qui eſt la valeur de l'intégrale $\frac{2D}{ne}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (BOC).

Enfin ſi l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$ ne s'évanouit, ni avec la tangente AD, ni avec la tangente BF, on rendra cette intégrale compléte, comme on a coutume de faire, ſelon que l'état de la queſtion en détermine les bornes.

COROLLAIRE IV.

35. Si des point C, c, (*fig.* 11.) on mene les ordonnées CK, ck, infiniment proche l'une de l'autre, en nommant OK, y; & comme auparavant OA a; AD, x; les triangles ſemblables OKC, OAD, donneront, OK (y). KC ($\sqrt{aa-yy}$) :: OA (a). AD $= x = \frac{a}{y}\sqrt{yy-aa}$; d'où l'on tire $dx = -\frac{a^3dy}{yy\sqrt{aa-yy}}$, & en mettant ces valeurs de x & de dx dans la différentielle $\frac{aadx}{aa+xx}$ qui exprime le petit arc Cc, on trouve $\frac{aadx}{aa+xx} = -\frac{ady}{\sqrt{yy-aa}}$; de cette maniére on peut transformer une différentielle en une autre de différente eſpéce, la réduire de la tangente à l'abſciſſe, ou de l'abſciſſe à la tangente. Main-

tenant puiſque l'intégrale de $-\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$ eſt a (AOC), ſi on ſuppoſe $a=\sqrt{\frac{e}{f}}$, $z^{\frac{n}{2}}=y$, on trouve $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}=\frac{n\sqrt{e}\times z^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{e-fz^n}}$, dont l'intégrale eſt $-\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC); par conſéquent celle de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e-fz^n}}$ eſt $-\frac{2D}{n\sqrt{e}}\sqrt{\frac{e}{f}}$ (AOC) $=-\frac{2D}{n\sqrt{f}}$ (AOC), c'eſt-à-dire, égale à la meſure de l'angle AOC au module $\frac{2D}{n\sqrt{f}}$, en prenant cette intégrale négativement; & puiſque le rayon eſt au co-ſinus de cet angle comme $\sqrt{\frac{e}{f}}$ à $z^{\frac{n}{2}}$, on trouvera ſa valeur en degrés dans les tables des Sinus, enſuite avec le module $\frac{2D}{n\sqrt{f}}$ par l'art. 33. on déterminera la longueur de l'arc qui meſure cet angle & qui eſt l'intégrale cherchée. L'équation $x=\frac{a}{y}\sqrt{aa-yy}$ trouvée au commencement de ce corollaire fait voir que le rayon eſt à la tangente du même angle AOC, comme $\sqrt{\frac{e}{f}}$ à $\sqrt{\frac{e}{f}}\times\sqrt{\frac{e-fz^n}{fz^n}}$, ou comme $\sqrt{f}$ à $\sqrt{\frac{e-fz^n}{z^n}}$ en réduiſant cette raiſon aux moindres termes, ce qu'il eſt à propos de faire toujours, d'autant que par-là on abrége le calcul ſans courir riſ-

que d'erreur, puisque la raison du rayon au sinus, au co-sinus, ou à la tangente demeurant la même, on trouve toujours le même angle. On doit ici observer comme dans le corollaire précédent, que si l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e-fz^n}}$ doit devenir nulle lorsque $z^{\frac{n}{2}}=0$, elle sera exprimée par $\frac{2D}{n\sqrt{f}}$ (BOC), & le rayon sera au sinus de l'angle BOC comme $\sqrt{\frac{e}{f}}$ à $z^{\frac{n}{2}}$, & à sa tangente comme $\sqrt{f}$ à $f\sqrt{\frac{z^n}{e-fz^n}}$, ou comme 1 à $\sqrt{\frac{fz^n}{e-fz^n}}$.

On doit encore remarquer que l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e-fz^n}}$ change de signe, toutes les fois qu'elle change sa valeur à l'égard de l'angle AOC & BOC, & cela parce qu'à mesure que l'arc AC augmente, le co-sinus OK, ou $z^{\frac{n}{2}}$ diminue, & par conséquent sa différence $\frac{n}{2}z^{\frac{n}{2}-1}dz$ devient négative : ceci a lieu aussi dans le corollaire précédent.

Ce corollaire sert encore à réduire aux arcs de cercle les espaces KCA, OBCK, & par ce moyen à trouver les intégrales des différentielles qui s'y rapportent. L'espace KCA est la différence entre le secteur AOC & le triangle OKC, & sa diffé-

rentielle eſt $-dy\sqrt{aa-yy} = -\frac{nz^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{f}}\sqrt{e-fz^n}$: or le ſecteur AOC eſt égal par ce corollaire à $\frac{e}{2f}$ (AOC), donc l'intégrale de $-\frac{nz^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{f}}\sqrt{e-fz^n}$ eſt $\frac{e}{2f}$ (AOC) $-$ T, en nommant T le triangle OKC; d'où l'on tire $\frac{De}{n\sqrt{f}}$ (AOC) $-\frac{2D\sqrt{f}}{n}$ T pour l'intégrale de $-Dz^{\frac{n}{2}-1}dz\sqrt{e-fz^n}$; pareillement puiſque l'eſpace OBCK eſt égal à la ſomme du ſecteur BOC & du triangle OKC, & que ſa différentielle eſt $dy\sqrt{aa-yy} = \frac{nz^{\frac{n}{2}-1}dz}{2\sqrt{f}}\sqrt{e-fz^n}$, on trouvera que l'intégrale de $Dz^{\frac{n}{2}-1}dz\sqrt{e-fz^n}$ eſt $\frac{De}{n\sqrt{f}}$ (BOC) $+\frac{2D\sqrt{f}}{n}$ T.

COROLLAIRE V.

36. On a trouvé dans le dernier Problême $\frac{aadx}{aa-xx}$ pour la valeur de l'arc Cc, laquelle étant multipliée par $\frac{a}{2}$ donne $\frac{a^3dx}{2\times aa+xx}$, qui eſt la valeur du petit ſecteur COc : or ſi du centre O & du demi-axe OA, on décrit une hyperbole équilatére AP, & qu'on prolonge les droites OC, Oc, juſqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points P, p, on a vû

(art. 23.) que le petit secteur POp est égal à $\frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa - xx}}$; il est donc visible que les deux différentielles qui expriment les secteurs POp, COc, ne diffèrent entr'elles que par le signe — ou + qui est devant le quarré xx, & que comme on a, $aa - xx = \overline{a + \sqrt{xx}} \times \overline{a - \sqrt{xx}} = \overline{a + x} \times \overline{a - x}$, & comme aussi la différentielle logarithmique de $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ donne $\frac{adx}{aa - xx}$ qui étant multipliée par le module $\frac{aa}{2}$ donne $\frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa - xx}}$ valeur du secteur POp; pareillement on a, $aa + xx = \overline{a + \sqrt{-xx}} \times \overline{a - \sqrt{-xx}} = \overline{a + x\sqrt{-1}} \times \overline{a - x\sqrt{-1}}$, & la différentielle logarithmique de $\sqrt{\frac{a + x\sqrt{-1}}{a - x\sqrt{-1}}}$ est $\frac{adx\sqrt{-1}}{aa + xx}$, qui étant multipliée par le module $\frac{aa}{2\sqrt{-1}}$ donne $\frac{a^3dx}{2 \times \overline{aa + xx}}$ valeur du secteur COc : d'où il suit que, comme le secteur hyperbolique est égal au logarithme de $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ au module $\frac{aa}{2}$, de même le secteur circulaire AOC est égal au logarithme de $\sqrt{\frac{a + x\sqrt{-1}}{a - x\sqrt{-1}}}$ au module $\frac{aa}{2\sqrt{-1}}$; on pourra donc exprimer les secteurs de cercle par des logarithmes imaginaires, & réduire les différences de ces secteurs à la simple forme $M \times \frac{dv}{v}$ en supposant $v = \sqrt{\frac{a + x\sqrt{-1}}{a - x\sqrt{-1}}}$, car

on auroit $\frac{dv}{v} = \frac{adx\sqrt{-1}}{aa+xx}$, & $\frac{a^3dx}{2\times\overline{aa+xx}} = \frac{aa}{2\sqrt{-1}}$ $\times\frac{dv}{v}$.

On peut encore réduire à cette forme ſimple la différentielle $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, car puiſque $v = \sqrt{\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}}$, & que par le corollaire précédent $x = \frac{a}{y}\sqrt{aa-yy}$, on déduit $v = \sqrt{\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{y-\sqrt{yy-aa}}}$, ou bien pour avoir une valeur plus ſimple de v, à cauſe de l'équation $\overline{y+\sqrt{yy-aa}}\times\overline{y-\sqrt{yy-aa}} = aa$, on aura $y+\sqrt{yy-aa}\,.\,a :: a\,.\,y-\sqrt{yy-aa}$, & $\sqrt{y+\sqrt{yy-aa}}\,.\,\sqrt{y-\sqrt{yy-aa}} :: y+\sqrt{yy-aa}\,.\,a :: a\,.\,y-\sqrt{yy-aa}$, ce qui donne $v = \frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a} = \frac{a}{y-\sqrt{yy-aa}}$, comme nous avons trouvé pour l'hyperbole (art. 22.), d'où l'on tire $\frac{ady}{\sqrt{yy-aa}} = \frac{a}{\sqrt{-1}}\times\frac{dv}{v}$.

REMARQUE I.

37. IL ſeroit inutile de traiter ici en particulier des ſecteurs & eſpaces ellyptiques, puiſqu'ils ont un rapport donné avec les ſecteurs & eſpaces circulaires : car ſi du centre O (*fig.* 12.) & des demi-axes OA, OB, on décrit un quart d'ellypſe AB, & du rayon OA un quart de cercle AD, & qu'on mene une ordonnée quelconque CPK, qui coupe le cercle en C & l'ellypſe en P, & qu'on tire les lignes OC, OP;

OP ; on ſçait que les ſecteurs AOC, AOP, & COD, POB, & que les eſpaces AKC, AKP, & ODCK, OBPK, ſont tous entr'eux dans la raiſon conſtante de AO à OB : on trouvera donc la valeur de tous les ſecteurs & eſpaces ellyptiques par des arcs de cercle, en ſe ſervant des formules générales $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e-fz^n}}$, $Dz^{\frac{n}{2}-1}dz\sqrt{e-fz}$, qui ſont, comme on voit, communes au cercle & à l'ellypſe.

REMARQUE II.

38. OUTRE la grande ſimilitude, qu'on a déja remarquée dans l'art. 36. entre les calculs & les expreſſions tirées du cercle & de l'hyperbole, ſi on compare les quatre premiers corollaires du dernier Problême avec ceux du Problême troiſiéme de la premiére Partie, on trouve que les calculs qu'on y a expoſés ſont encore tout-à-fait ſemblables & analogues tant par rapport aux différentielles, que par rapport aux Intégrales. Les Intégrales qui ſe rapportent à l'hyperbole ſont des meſures de rapports, au lieu que celles qui ſe rapportent au cercle ſont des meſures d'angles, les modules dans les deux cas étant les mêmes. Tout ce qui diſtingue les différentielles qui regardent l'hyperbole d'avec celles du cercle n'eſt que la diverſité des ſignes qui ſe trouvent devant la quantité qui déſigne le rayon de l'hyperbole ou du cercle ; ainſi dans la dif-

férentielle générale $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, où le rayon est exprimé par $\sqrt{\frac{e}{f}}$, si l'une des deux quantités e, f, est négative, cette différentielle & son intégrale se rapportent à l'hyperbole, & au cercle si ces quantités sont toutes deux positives ou négatives : les différentielles $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$, $Dz^{\frac{n}{2}-1}dz\sqrt{e+fz^n}$, dans lesquelles $\sqrt{f}$ peut représenter le rayon, se rapportent à l'hyperbole lorsque f est positif, & au cercle lorsqu'il est négatif. C'est cette belle harmonie entre ces deux courbes, qui parut à M. Côtes non seulement digne d'être examinée avec une attention particuliére, & approfondie par une étude opiniâtre, mais même le détermina à donner à l'ouvrage, qu'il composa sur ces calculs, le titre de *Harmonia mensurarum.*

Réduction des Différentielles composées à celles dont on a déja parlé.

PROBLÊME.

39. Qu'il soit proposé de trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ par les logarithmes & les arcs de cercle.

Comme on a donné dans les articles précédens la

maniére de trouver l'intégrale d'une différentielle dont le dénominateur eſt binome, il ne s'agit ici que de réduire la propoſée en une autre dont le dénominateur ſeroit binome: or les ſections coniques fourniſſent une méthode fort ſimple pour parvenir à cette réduction; car en ſuppoſant $e+fz^n+gz^{2n}=yy$, on voit que cette équation marque un lieu géométrique, qui eſt toujours une ſection conique, & dont la conſtruction nous donneroit la réduction requiſe. Du centre O (*fig.* 13.) & du demi-axe OA qu'on décrive une hyperbole quelconque AD, & qu'on mene ſur l'axe OA prolongé une ordonnée DC, qui ſera nommée y, ſoit donnée une partie OB, laquelle on nommera c; OA, a; le demi-axe conjugué, b; BC, z^n; & par la nature de la courbe on a $\overline{DC}^2\ (yy) . \overline{OC}^2 - \overline{AO}^2 (\overline{c+z^n}^2 - aa) :: bb . aa$; ce qui donne $yy = \frac{bbcc}{aa} - bb + \frac{2bbc}{aa}z^n + \frac{bb}{aa}z^{2n} = e + fz^n + gz^{2n}$, & en comparant les termes correſpondans, on trouve $\frac{bbcc}{aa} - bb = e$, $\frac{2bbc}{aa} = f$, $\frac{bb}{aa} = g$, d'où l'on tire $c = \frac{\frac{1}{2}f}{g} = OB$, & $OC = \frac{\frac{1}{2}f}{g} + z^n$, il ne faudra donc que ſuppoſer $\frac{\frac{1}{2}f}{g} + z^n = x^{\frac{n}{2}}$, ou $z^n = x^{\frac{n}{2}} - \frac{\frac{1}{2}f}{g}$, & l'on déduira $e + fz^n + gz^{2n} = \frac{eg - \frac{1}{4}ff}{g} + gx^n$, & $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{D}{2} \times$

$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gz^n}$: de cette maniére la différentielle proposée est réduite à la formule générale binome $\frac{Dz^{\frac{n}{2}-1}dz}{e+fz^n}$, & se rapporte à l'hyperbole ou au cercle suivant que $\frac{1}{4}ff$ est plus grand ou moindre que eg (par l'art. 38.); si $\frac{1}{4}ff$ surpasse eg, alors $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = -\frac{D}{2} \times \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{\frac{1}{4}ff-eg}{g}+gx^n}$, dont l'intégrale (par l'art. 23.) est $-\frac{D}{2n\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}}\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}}{\frac{g}{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}}}+x^{\frac{n}{2}}\right\}$

$= -\frac{D}{2n\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}}\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}+\frac{1}{2}f+gz^n}{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}-\frac{1}{2}f-gz^n}\right\}$. Soit l le Logarithme de $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}+\frac{1}{2}f+gz^n}{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}-\frac{1}{2}f-gz^n}$ pris dans les tables de Briggs, dont m est supposé le module, & cette intégrale (par l'art. 10.) sera $-\frac{D}{2n\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}} \times \frac{l}{m}$; mais parce que cette intégrale n'est point complette, si on suppose qu'elle est nulle lorsque $z^n = 0$, soit L le logarithme de $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}+\frac{1}{2}f}{\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}-\frac{1}{2}f}$, & l'inté-

grale complette sera $\frac{D}{2n\sqrt{\frac{1}{4}ff - eg}} \times \frac{L - l}{m}$.

Si $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg, alors l'intégrale de $\frac{D}{2} \times \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{eg - \frac{1}{4}ff}{g} + gx^n}$ se trouve (par l'art. 32.) égale à $\frac{D}{n\sqrt{eg - \frac{1}{4}ff}}$ (AOC) (*fig.* 10.), le rayon étant à la tangente de l'angle AOC comme $\frac{\sqrt{eg - \frac{1}{4}ff}}{g}$ à $x^{\frac{n}{2}}$, ou comme $\sqrt{eg - \frac{1}{4}ff}$ à $\frac{1}{2}f + gz^n$: mais on voit que la tangente $\frac{1}{2}f + gz^n$ ne s'évanouit point lorsque $z^n = 0$, ni par conséquent l'angle AOC, pour rendre donc l'intégrale complette dans la supposition qu'elle est nulle lorsque $z^n = 0$, soit tirée la droite OH qui rencontre la circonférence en N & la tangente AD en H, ensorte qu'on ait OA . AH :: $\sqrt{eg - \frac{1}{4}ff} . \frac{1}{2}f$, & l'intégrale demandée sera $\frac{D}{n\sqrt{eg - \frac{1}{4}ff}}$ (NOC), dont on aura la valeur par l'art. 33. *C. Q. F. T.*

REMARQUE.

DANS la construction du lieu de l'équation $e + fz^n + gz^{2n} = yy$ donnée dans le Problême, on a omis les cas où ce lieu seroit une ellypse ou un cercle, parce que le cas seul qu'on a construit, suffit pour la réduction qu'on cherche, en prenant garde de mettre devant les termes f, g, les signes, qui leur

conviennent, c'eſt-à-dire, qu'ils ont devant eux dans la differentielle propoſée.

COROLLAIRE.

40. LA même méthode s'applique à la différentielle $\frac{Dz^{n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$; car en ſuppoſant $\frac{\frac{1}{2}f}{g}+z^n=x^{\frac{n}{2}}$, on trouve que la propoſée eſt égale à cette autre $\frac{Dx^{\frac{n}{2}-1}dx}{2\sqrt{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n}}$, qui ſe rapporte à la formule générale des binomes, & dont on trouvera l'intégrale par le moyen des logarithmes (par l'art. 27.), ou par un arc de cercle (par l'art. 35.) ſuivant que le terme gz^{2n} ou gx^n eſt précédé du ſigne + ou —; on rendra les intégrales complettes de la maniére qu'on a fait dans le Problême.

Il y a beaucoup d'autres différentielles compoſées, qu'on peut auſſi réduire aux binomes, mais parce qu'elles trouveront mieux leurs places dans la ſuite, nous omettrons d'en parler ici.

Fin de la ſeconde Partie.

TROISIEME PARTIE.

DE LA REDUCTION DES INTEGRALES AUX LOGARITHMES, ET AUX ARCS DE CERCLE PRIS ENSEMBLE.

ON a considéré jusqu'ici les Logarithmes & les Arcs de cercle séparément, ce qui ne nous a donné le moyen d'intégrer que les différentielles les plus simples de celles qui peuvent être rapportées aux sections coniques ; c'est pourquoi pour étendre la théorie en y comprenant les différentielles les plus composées qui ont rapport à ces courbes, on va maintenant faire usage des Logarithmes & Arcs de cercle conjointement ensemble ; par cette

union on parviendra à ce qui eſt propoſé; mais pour concevoir clairement les principes d'où l'on déduit cette méthode, il eſt néceſſaire de donner par avance quelques Lemmes.

LEMME I.

41. *ETANT donnés le ſinus & co-ſinus d'un arc de cercle, trouver le ſinus & co-ſinus d'un arc double, triple, &c.*

DU centre O ſur le diamétre AOB (*fig.* 14.) qu'on décrive une demi-circonférence de cercle AMB, ſur laquelle qu'on prenne un arc quelconque AM moindre qu'un quart de cercle, & MD égal à AM, des points M, D, qu'on tire les rayons MO, DO, & les ſinus MP, DH, & ſoit E le point où DH rencontre MO; cela poſé, ſi on nomme OP co-ſinus de l'arc AM, c; & le rayon AO, 1; les triangles ſemblables HEO, PMO donneront HO . HE :: OP . MP, & de ce que MO coupe l'angle AOD également en deux, on aura HE . ED :: HO . OD, ce qui donne HD . OD + HO :: HE . HO, d'où l'on tire OP . MP :: HD . OD + HO, & parce que $\overline{HD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{HO}^2 = \overline{OD + HO} \times \overline{OD - HO}$ en quarrant les termes de la derniére proportion, on trouve, $\overline{OP}^2 . \overline{MP}^2 :: OD + HO . OD - HO$, & $\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 . \overline{OP}^2 :: 2OD . OD + HO$, ou, parce que $\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OD}^2$, $\overline{OD}^2 . \overline{OP}^2 :: 2 . OD + HO$, donc en mettant les valeurs analytiques des termes de cette proportion, on a $1 . cc :: 2 .$

$1 + HO$

$1 + HO$, ce qui donne $HO = 2cc - 1$, qui est le co-sinus de l'arc AD double de AM, & $DH = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{HO}^2} = 2c\sqrt{1 - cc}$, qui est le sinus du même arc AD.

Il est donc clair que, le rayon étant supposé égal à l'unité, le co-sinus d'un arc double de celui qui a c pour son co-sinus, est égal à deux fois le quarré du co-sinus c moins l'unité, on pourra donc par cette régle sans autre calcul trouver le co-sinus d'un arc double de celui dont le co-sinus est $2cc - 1$, ce co-sinus par conséquent sera $8c^4 - 8c^2 + 1$, & appartiendra à un arc quadruple de AM, & le sinus correspondant sera $\overline{8c^3 - 4c}\sqrt{1 - cc}$. Delà on trouveroit pareillement le sinus & co-sinus d'un arc huit fois, seize fois, &c. plus grand que l'arc AM.

Maintenant pour trouver le sinus & le co-sinus d'un arc triple soit pris sur la demi-circonférence AMB, (*fig.* 15.) l'arc MF double de AM, & soient encore tirés les rayons MO, FO, & les sinus MP, FG, dont FG rencontre MO au point E, qu'on tire aussi sur MO la perpendiculaire FH, & supposant comme ci-devant $OP = c$, $AO = 1$, on aura, comme nous avons vû, $HO = 2cc - 1$, & $FH = 2c\sqrt{1 - cc}$, & les triangles semblables PMO, GEO, EFH donneront $OP\ (c) : MO\ (1) :: GO : EO = \frac{GO}{c}$, & $OP\ (c) : PM\ (\sqrt{1 - cc}) :: FH\ (2c\sqrt{1 - cc}) : HE = \frac{2c - 2c^3}{c}$, d'où l'on tire $HE + EO = \frac{GO + 2c - 2c^3}{c} = HO = 2cc - 1$, donc $GO = 4c^3 - 3c$, &

FG $= \overline{4cc - 1}\sqrt{1 - cc}$. Par le moyen du co-ſinus $4c^3 - 3c$, on trouvera comme ci-deſſus le co-ſinus d'un arc double de AF, c'eſt-à-dire, d'un arc ſix fois plus grand que AM; ce co-ſinus ſera donc $32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1$, & le ſinus $\overline{32c^5 - 32c^3 + 6c}\sqrt{1 - cc}$.

Pour trouver le ſinus & co-ſinus de l'arc quintuple de AM, il faut prendre l'arc AD double, & l'arc DL triple de AM (*fig.* 16.) & tirer encore les rayons DO, LO, & les ſinus DH, LN, dont LN rencontre DO en E, on menera auſſi la perpendiculaire LG ſur DO; cela poſé, par les calculs précédens on a déterminé les valeurs de HO, DH, GO, LG, leſquelles par un raiſonnement ſemblable à celui, qu'on a fait pour trouver le co-ſinus de l'arc triple, donneront NO $= 16c^5 - 20c^3 + 5c$, qui eſt le co-ſinus de l'arc AL quintuple de AM, & par conſéquent on aura le ſinus LN $= \overline{16c^4 - 12c^2 + 1}\sqrt{1 - cc}$.

De la même maniére par le moyen du ſinus & co-ſinus de l'arc double & de l'arc quintuple de AM, on déduira le ſinus & co-ſinus de l'arc ſeptuple, & ainſi des autres. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

42. On trouve donc par le Problême, que ſi on nomme s & c le ſinus & co-ſinus d'un arc quelconque moindre qu'un quart de cercle, & s'', s''', s^{iv}, &c. & c'', c''', c^{iv}, &c. les ſinus & co-ſinus des arcs

double, triple, quadruple, &c. on aura les équations ſuivantes

$$s = \sqrt{1 - cc}. \qquad c = c.$$

$$s'' = 2c\sqrt{1 - cc}. \qquad c'' = 2cc - 1.$$

$$s''' = \overline{4cc - 1}\sqrt{1 - cc}. \qquad c''' = 4c^3 - 3c.$$

$$s^{iv} = \overline{8c^3 - 4c}\sqrt{1 - cc}. \qquad c^{iv} = 8c^4 - 8c^2 + 1.$$

$$s^{v} = \overline{16c^4 - 12c^2 + 1}\sqrt{1 - cc}. \qquad c^{v} = 16c^5 - 20c^3 + 5c.$$

$$s^{vi} = \overline{32c^5 - 32c^3 + 6c}\sqrt{1 - cc}. \qquad c^{vi} = 32c^6 - 48c^4 + 18c^2 - 1.$$

$$s^{vii} = \overline{64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1}\sqrt{1 - cc}. \qquad c^{vii} = 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c.$$

&c. &c.

A l'égard de ces équations on doit obſerver que, ſi on décrit (*fig.* 17.) un cercle ADBEA, & qu'on tire les deux diamétres AB, DE perpendiculaires l'un à l'autre, & qu'on prenne un arc AM moindre que AD, ſi on regarde le ſinus & co-ſinus de cet arc AM comme poſitifs, qui eſt le cas des équations précédentes, tous les arcs de cercle multiples de AM, qui ſe terminent dans la demi-circonférence ADB, auront des ſinus poſitifs, & tous ceux qui ſe terminent dans la demi-circonférence AEB, auront des ſinus négatifs : de même tous les arcs multiples de AM terminés dans la demi-circonférence DAE, auront des co-ſinus poſitifs, & tous les autres terminés dans la demi-circonférence DBE, des co-ſinus négatifs.

Dans les calculs du Problême nous avons supposé que tous les arcs multiples de AM étoient compris dans le quart de cercle AD, mais si l'arc AM étoit tel que ses multiples s'étendissent dans les autres parties de la circonférence au-delà du point D, il faudroit changer les signes des équations suivant la régle qu'on vient de donner.

COROLLAIRE II.

43. Si l'arc AM est plus grand qu'un quart de cercle mais qui n'excéde pas la demi-circonférence, alors son co-sinus (par le Corol. précédent) sera $-c$, & par conséquent toutes les équations, dans lesquelles le co-sinus c se trouve avec des dimensions impaires, changeront leurs signes; donc la suite des équations dans ce cas aura cette forme.

$s = \sqrt{1 - cc}.$	$c = -c.$
$s'' = -2c\sqrt{1 - cc}.$	$c'' = 2cc - 1.$
$s''' = \overline{4cc - 1}\sqrt{1 - cc}.$	$c''' = -4c^3 + 3c.$
$s^{iv} = \overline{-8c^3 + 4c}\sqrt{1 - cc}.$	$c^{iv} = 8c^4 - 8c^2 + 1.$
$s^{v} = \overline{16c^4 - 12c^2 + 1}\sqrt{1 - cc}.$	$c^{v} = -16c^5 + 20c^3 - 5c.$
$s^{vi} = \overline{-32c^5 + 32c^3 - 6c}\sqrt{1 - cc}.$	$c^{vi} = 32c^6 - 48c^5 + 18c^2 - 1.$
$s^{vii} = \overline{64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1}\sqrt{1 - cc}.$	$c^{vii} = -64c^7 + 112c^5 - 56c^3 + 7c.$
&c.	&c.

Comme nous n'avons besoin que de ces deux cas,

il ſeroit inutile d'examiner les deux autres, où l'arc AM ſeroit ſuppoſé plus grand que la demi-circonférence mais qui ne ſurpaſſe pas les trois quarts, & plus grand que les trois quarts mais qui ne ſurpaſſe pas la circonférence entiére.

COROLLAIRE III.

44. Si on jette les yeux ſur les équations aux co-ſinus des Corollaires précédens, on voit que la racine c a toujours autant de valeurs que l'arc dont c eſt le co-ſinus contient de fois celui dont le co-ſinus eſt exprimé par l'équation entiére, par exemple, c aura cinq valeurs dans l'équation $c^v = 16cs - 20c^3 + 5c$ qui exprime le co-ſinus c^v d'un arc cinq fois plus grand que celui dont le co-ſinus eſt c. Pour trouver toutes ces valeurs de c, il faut décrire (*fig.* 18.) une circonférence de cercle ACEA, ſur laquelle on prendra l'arc AL dont le co-ſinus ſoit égal à c^v, & l'arc AB qui ſoit la cinquiéme partie de AL, dont par conſéquent le co-ſinus eſt c, ce qui donne une des valeurs de la racine c; enſuite en commençant au point B on diviſera la circonférence entiére en cinq parties égales BC, CD, DE, EF, FB, & les co-ſinus des arcs AF, AC, AE, AD, donneront les autres valeurs de la racine c (les arcs AF, AE, ſe prennent en deſcendant du point A dans la partie inférieure du cercle, & les arcs AC, AD, en montant dans la partie ſupérieure): car on ſçait qu'une équation a toujours autant de racines que le Problême qu'elle

exprime peut avoir de ſolutions, & qu'un Problême eſt ſuſceptible d'autant de ſolutions qu'il comprend de cas différens, dont l'analyſe dépend des mêmes quantités données & eſt fondée ſur des raiſonnemens tout-à-fait ſemblables : or on aura toujours les mêmes quantités données, & il faudra raiſonner d'une façon ſemblable, ſoit qu'on cherche le co-ſinus d'un arc qui ſoit la cinquiéme partie de AL, ou celui d'un arc qui ſoit la cinquiéme partie de AFDL c'eſt-à-dire de la circonférence totale moins AL, ou encore celui de la cinquiéme partie de ALDFAL c'eſt-à-dire de la circonférence totale plus AL, ou celui de la cinquiéme partie de AFDLAFDL c'eſt-à-dire de deux fois la circonférence moins AL, ou enfin celui de la cinquiéme partie de ALDFALDFAL c'eſt-à-dire de deux fois la circonférence plus AL : d'où il ſuit qu'en nommant C la circonférence & A l'arc AL, l'équation $c^v = 16c^5 - 20c^3 + 5c$ donnera les co-ſinus des cinq arcs ſuivans, $\frac{A}{5}$, $\frac{C-A}{5}$, $\frac{C+A}{5}$, $\frac{2C-A}{5}$, $\frac{2C+A}{5}$; mais on voit que $AB = \frac{A}{5}$, $AF = \frac{C-A}{5}$, $AC = \frac{C+A}{5}$, $AE = \frac{2C-A}{5}$, $AD = \frac{2C+A}{5}$, donc &c.

Il eſt clair auſſi par la diviſion du cercle qu'il ne peut avoir que cinq de ces arcs, car en prenant davantage, on reviendroit ſur les mêmes points de diviſion, l'équation donc ne pourra donner que cinq valeurs de la racine c.

On fera le même raiſonnement à l'égard de toutes les autres équations aux co-ſinus, ſoit que l'arc AL ſoit moindre ou plus grand qu'un quart de cercle, de ſorte que l'on peut dire généralement que, ſi λ marque le nombre des parties dans leſquelles l'arc AL eſt diviſé, les racines de ces équations ſeront les co-ſinus des arcs $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C-A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$; $\frac{2C-A}{\lambda}$, $\frac{2C+A}{\lambda}$, $\frac{3C-A}{\lambda}$, $\frac{3C+A}{\lambda}$, &c. & ces arcs ſe trouvent en diviſant la circonférence en autant de parties égales que λ contient d'unités, en commençant au point B, AB étant ſuppoſé égal à $\frac{AL}{\lambda}$.

COROLLAIRE IV.

45. Si dans les équations ci-deſſus on ſuppoſe que chacun des co-ſinus c, c'', c''', &c. eſt égal à $= 1$, c'eſt-à-dire, que l'arc AL devient égal à la demi-circonférence (*fig.* 19.), dans ce cas en diviſant la circonférence, comme on a enſeigné dans le Corollaire précédent, on aura $A = \frac{1}{2}C$, $BC = 2AB$, $AF = AB$, (F eſt ſuppoſé le dernier point des diviſions) & les arcs dont les co-ſinus donnent les racines des équations, ſeront $\frac{\frac{1}{2}C}{\lambda}$, $\frac{\frac{1}{2}C}{\lambda}$, $\frac{\frac{3}{2}C}{\lambda}$, $\frac{\frac{3}{2}C}{\lambda}$, $\frac{\frac{5}{2}C}{\lambda}$, $\frac{\frac{5}{2}C}{\lambda}$, c'eſt-à-dire, AB, AF, AC, AE, &c. d'où il ſuit que les arcs, & par conſéquent leurs ſinus & co-ſinus ſeront deux à deux égaux, & que

si λ est un nombre impair, le dernier de ces arcs sera $\frac{\frac{\lambda}{2}C}{\lambda} = \frac{C}{2}$, donc la valeur d'un des co-sinus sera égale à -1.

Si dans les équations on suppose chacun des co-sinus c, c'', c''', &c. égal à 1, c'est-à-dire, que l'arc AL devient égal à la circonférence entiére (*fig.* 20.), alors on aura $A = C$, $BC = AB$, & les arcs seront $\frac{C}{\lambda}$, $\frac{0}{\lambda}$, $\frac{C}{\lambda}$, $\frac{2C}{\lambda}$, $\frac{2C}{\lambda}$, $\frac{3C}{\lambda}$, $\frac{3C}{\lambda}$, &c. c'est-à-dire, AB, AE, AC, AD, &c. car à cause du terme $\frac{0}{\lambda}$, on aura AF $= 0$: d'où il suit que les arcs, & par conséquent leurs sinus & co-sinus sont encore dans ce cas-ci égaux deux à deux ; le co-sinus de l'arc désigné par $\frac{0}{\lambda}$ est égal à 1, & si λ est un nombre pair, le dernier des arcs est marqué par $\frac{C}{2}$, dont le co-sinus est -1.

COROLLAIRE V.

46. Si on suppose que les quantités, a, b, h, k, &c. marquent les co-sinus des arcs $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C-A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$, &c. ou, ce qui est la même chose, qu'elles sont les racines des équations aux co-sinus, il est clair que ces équations sont composées du produit des quantités $c-a$, $c-b$, $c-h$, $c-k$, &c; on

on connoîtra facilement le nombre des racines positives & négatives par les signes dont les termes des équations sont affectés, comme l'on sçait par les principes de l'Algébre : ainsi supposant $c^v = 1$, les racines de l'équation $16c^5 - 20c^3 + 5c - 1 = 0$, seront exprimées par les co-sinus des arcs AB, AE, AC, AD, (*fig.* 20.) lesquels étant égaux deux à deux (par le Corol. précédent), si a est le co-sinus de l'arc AB, il le sera aussi de AE, & de même si b est le co-sinus de AC, il le sera aussi de AD, & parce que cette équation a trois racines positives & deux négatives, il suit qu'elle est composée de ces équations simples, $c - 1 = 0$, $c - a = 0$, $c - a = 0$, $c + b = 0$, $c + b = 0$.

COROLLAIRE VI.

47. PUISQUE les seconds termes manquent partout dans les équations aux co-sinus, il est constant que la somme des racines ou des co-sinus positifs est égale à la somme des co-sinus négatifs; ainsi dans l'exemple du Corollaire précédent $2a + 1 = 2b$.

LEMME II.

48. *SI dans un cercle quelconque* ARQSA (fig. 21.) *décrit du centre* O *on tire deux diamétres* AQ, RS, *perpendiculaires l'un à l'autre, & qu'on prenne sur la circonférence un arc* AL, *dont le co-sinus soit nommé* t, *& l'arc* AB $= \frac{AL}{\lambda}$, *& qu'on*

divise la circonférence en commençant au point B *en un nombre de parties égales marqué par* λ, *comme* BC, CD, DE, *&c. si outre cela on prend un point quelconque* P *dans le diamétre* AQ, *duquel on mene à tous les points de division les lignes* PB, PC, PD, PE, *&c. je dis qu'on aura* $\overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2 \times$ *&c.* $= \overline{OA}^{2\lambda} - 2t \times \overline{OP}^{\lambda} + \overline{OP}^{2\lambda}$, *si l'arc* AL *est moindre que* AR; *&* $\overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2 \times$ *&c.* $= \overline{OA}^{2\lambda} + 2t \times \overline{OP}^{\lambda} + \overline{OP}^{2\lambda}$, *si l'arc* AL *est plus grand que* AR, *mais moindre que* ARQ.

DEMONSTRATION.

Du point B qu'on tire le rayon BO, & BN perpendiculaire au diamétre AQ, & supposant OA $= 1$, on nommera OP, x, &, a, b, h, k, &c. les co-sinus des arcs AB, AC, AD, AE, &c. & l'on aura $\overline{PB}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{BO}^2 - \overline{ON}^2 = 1 - 2ax + xx$, de même $\overline{PC}^2 = 1 - 2bx + xx$, si les arcs AB, AC, sont terminés dans la demi-circonférence RAS du même côté que le point P; & $\overline{PD}^2 = 1 + 2hx + xx$, $\overline{PE}^2 = 1 + 2kx + xx$, si les arcs AD, AE, sont terminés dans la demi-circonférence RQS opposée au point P, & ainsi des autres. Cela posé, pour démontrer ce Lemme, il faut transformer les équations aux co-sinus en d'autres qui se rapportent aux lignes PB, PC, PD, &c: pour cet effet on transposera tous les termes des

équations aux co-ſinus du même côté du ſigne d'égalité, en ſorte qu'elles deviennent égales à 0; on ſuppoſera auſſi $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, $1 + 2hx + xx = 0$, $1 + 2kx + xx = 0$, &c. Ce qui donne $a = \frac{1 + xx}{2x}$, $b = \frac{1 + xx}{2x}$, $-h = \frac{1 + xx}{2x}$, $-k = \frac{1 + xx}{2x}$, ou bien, parce que les co-ſinus, a, b, $-h$, $-k$, &c. expriment les différentes valeurs de la racine c, on aura généralement dans la préſente ſuppoſition $c = \frac{1 + xx}{2x}$; ſi on ſubſtitue cette valeur de c dans toutes les équations on trouve cette ſuite

$$1 - 2cx + xx = 0. \qquad 1 - 2c^{v}x^{5} + x^{10} = 0.$$
$$1 - 2c''x^{2} + x^{4} = 0. \qquad 1 - 2c^{vi}x^{6} + x^{12} = 0.$$
$$1 - 2c'''x^{3} + x^{6} = 0. \qquad 1 - 2c^{vii}x^{7} + x^{14} = 0.$$
$$1 - 2c^{iv}x^{4} + x^{8} = 0. \qquad \&c.$$

Et puiſque c, c'', c''', &c. marquent le co-ſinus de l'arc AL que nous avons nommé t dans ce Lemme, on voit qu'on aura cette équation générale $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda}$, lorſque AL eſt moindre que AR; & $1 + 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda}$, lorſque AL eſt plus grand que AR, car dans ce cas les ſeconds termes de toutes ces équations ſont précédés du ſigne $+$: or les équations aux co-ſinus ſont compoſées (par l'art. 46.) du produit des racines $c - a = 0$, $c - b = 0$, $c + h = 0$, $c + k = 0$, &c. donc il s'enſuit que les nouvelles équations qu'on vient de former, ou en général que

les équations $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 0$, $1 + 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 0$, sont composées du produit des racines $\frac{1+xx}{xx} - a = 0$, $\frac{1+xx}{2x} - b = 0$, $\frac{1+xx}{2x} + h = 0$, $\frac{1+xx}{2x} + k = 0$, &c. qui sont les mêmes que les suivantes $1 - 2ax + xx = 0$, $1 - 2bx + xx = 0$, $1 + 2hx + xx = 0$, $1 + 2kx + xx = 0$, &c. par conséquent $1 \mp 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 - 2bx + xx} \times \overline{1 + 2hx + xx} \times \overline{1 + 2kx + xx} \times$ &c. ou, puisque $1 \mp 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = \overline{AO}^{2\lambda} \mp 2t \times \overline{OP}^{\lambda} + \overline{OP}^{2\lambda}$, $\overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2$ $\overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2$ &c. $= \overline{OA}^{2\lambda} \mp 2t \times \overline{OP}^{\lambda} + \overline{OP}^{2\lambda}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

49. Si on suppose $t = -1$, l'arc AL sera égal à la demi-circonférence, on prendra donc sur la circonférence ADFHA (*fig.* 22.) l'arc $AB = \frac{\frac{1}{2}C}{\lambda}$ selon ce que nous avons fait voir dans l'article 45, & du point B on divisera la circonférence en un nombre de parties égales marqué par λ aux points D, F, H, &c. les co-sinus des arcs AB, AD, AF, AH, &c. seront exprimés par les quantités, a, b, h, k, &c. On voit donc que dans ce cas on aura $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 1 + 2x^{\lambda} + x^{2\lambda}$, dont la racine quarrée est $1 + x^{\lambda}$, ce qui donne $1 + x^{\lambda} = \sqrt{\overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 - 2bx + xx} \times \overline{1 + 2hx + xx} \times \overline{1 + 2kx + xx}}$ &c.

pour l'équation du Lemme, c'est-à-dire, $\overline{OA}^{\lambda} + \overline{OP}^{\lambda} = PB \times PD \times PF \times PH \times$ &c. Ainsi si on suppose par exemple $\lambda = 5$, la circonférence étant divisée en cinq parties égales aux points B, D, F, H, K, on aura $\overline{OA}^{5} + \overline{OP}^{5} = PB \times PD \times PF \times PH \times PK = \overline{PB}^{2} \times \overline{PD}^{2} \times PF$, à cause que $PB = PK$, & $PH = PD$, donc $1 + x^{5} = \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx} \times \overline{1 + x}$. Pareillement si $\lambda = 6$, la circonférence (*fig.* 23.) étant divisée en six parties égales aux points, B, D, F, H, K, M, l'équation ci-dessus deviendra $\overline{OA}^{6} + \overline{OP}^{6} = PB \times PD \times PF \times PH \times PK \times PM = \overline{PB}^{2} \times \overline{PD}^{2} \times \overline{PF}^{2}$, ou $1 + x^{6} = \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}$, $\overline{PD}^{2}$ étant $= 1 + xx$, parce que l'arc AB ou $\frac{\frac{1}{2}C}{6}$ est égal à la sixiéme partie de la demi-circonférence, & par conséquent l'arc AD est un quart de cercle dont le co-sinus b est nul.

Si on suppose $t = 1$, l'arc AL sera égal à la circonférence entiére, il faudra donc prendre (par l'art. 45.) l'arc $AC = \frac{C}{\lambda}$, & commençant au point C diviser la circonférence (*fig.* 22 & 23.) en un nombre de parties égales désigné par λ aux points, E, G, I, &c., A; le dernier point des divisions sera toujours le point A : si donc les co-sinus des arcs AC, AE, AG, AI, &c. & de la circonfé-

rence sont supposés égaux à, a, b, h, k, &c., 1; on aura dans ce cas $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 1 - 2x^{\lambda} + x^{2\lambda}$ dont la racine quarrée est $1 - x^{\lambda}$, ce qui donne $1 - x^{\lambda} = \sqrt{\overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 - 2bx + xx} \times \overline{1 + 2h + xx} \times \overline{1 + 2kx + xx}}$ &c. $\times \overline{1 - 2x + xx}$, c'est-à-dire, $\overline{OA}^{\lambda} - \overline{OP}^{\lambda} = PC \times PE \times PG \times PI$ &c. $\times PA$. Ainsi supposant par exemple $\lambda = 5$, & divisant la circonférence (*fig.* 22.) en cinq parties égales aux points, A, C, E, G, I, l'équation sera $\overline{OA}^{5} - \overline{OP}^{5} = PA \times PC \times PE \times PG \times PI = PA \times \overline{PC}^{2} \times \overline{PE}^{2}$, ou $1 - x^{5} = \overline{1 - x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}$; de même si $\lambda = 6$, la circonférence (*fig.* 23.) étant divisée en six parties égales aux points, A, C, E, G, I, L, on aura $\overline{OA}^{6} - \overline{OP}^{6} = PA \times PC \times PE \times PG \times PI \times PL = PA \times \overline{PC}^{2} \times \overline{PE}^{2} \times PG$, ou $1 - x^{6} = \overline{1 - x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx} \times \overline{1 + x}$.

Si donc l'on unit ensemble les deux cas qu'on vient d'examiner sçavoir de $t = 1$, & $t = -1$, il suit évidemment que, puisque l'arc AB (*fig.* 22. *&* 23.) est la moitié de AC, tous les arcs AB, BC, CD, DE, EF, &c. qui proviennent des divisions faites dans les deux cas, seront égaux entr'eux, & que par conséquent l'on peut établir le Théorême général suivant. *Si on divise une circonférence de Cercle* ADFHA (fig. 22. & 23.) *en arcs égaux* AB, BC, CD, DE, EF, *&c. dont le nombre est égal à* 2λ, *& que d'un point quelconque* P *pris dans le dia-*

métre AO *on tire à tous les points de division les lignes* PA, PB, PC, PD, PE, *&c. on aura* $\overline{OA}^{\lambda} - \overline{OP}^{\lambda} = PA \times PC \times PE \times PG \times$ *&c. &* $\overline{OA}^{\lambda} + \overline{OP}^{\lambda} = PB \times PD \times PF \times PH \times$ *&c. en prenant ainsi ces lignes alternativement.* On trouve une autre démonstration de ce Théorême dans les ouvrages de Jean Bernoulli Tome IV. N°. CLX.

REMARQUE.

50. QUOIQUE dans le Lemme précédent & son Corollaire nous ayons supposé le point P en dedans du cercle, on pourroit néanmoins en prolongeant le diamétre AO le prendre hors du cercle, & la démonstration demeureroit la même, si ce n'est qu'on auroit dans ce cas $\overline{OP}^{\lambda} - \overline{OA}^{\lambda}$, au lieu de $\overline{OA}^{\lambda} - \overline{OP}^{\lambda}$, qu'on avoit auparavant.

LEMME III.

51. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{x^{\theta}dx}{1 \pm x}$, θ *étant égal à* 0, *ou à un nombre entier positif.*

SI on suppose $\theta = 0$, la proposée est $\frac{dx}{1 \pm x}$, laquelle peut se rapporter à la formule générale $\frac{x^{n-1}dx}{e + fx^{n}}$, dont l'intégrale (par l'article 17.) est $\frac{1}{nf}\left(\frac{e+fx^{n}}{e}\right)$: on aura donc par la comparaison de ces

termes $n = 1$, $e = 1$, $f = \pm 1$, & par conséquent $\int \frac{dx}{1+x} = 1 \left(\frac{1-x}{1}\right)$, & $\int \frac{dx}{1-x} = -1 \left(\frac{1-x}{1}\right)$; qu'on tire une ligne AO $= 1$, (*fig.* 24.) & l'ayant prolongée en Q, de sorte que OQ $=$ AO, qu'on prenne la partie OP $= x$, & on aura $\int \frac{dx}{1+x} =$ AO $\left(\frac{QP}{AO}\right)$, & $\int \frac{dx}{1-x} = -$ AO $\left(\frac{AP}{AO}\right)$. Maintenant si θ est un nombre entier positif, on divisera le numerateur $x^\theta dx$ par le dénominateur $1 \pm x$ en prenant $\pm x$ pour le premier terme du diviseur, ce qui donnera $\frac{x^\theta dx}{1+x} = x^{\theta-1} dx - x^{\theta-2} dx + x^{\theta-3} dx - x^{\theta-4} dx +$ &c. $\pm \frac{dx}{1+x}$, & $\frac{x^\theta dx}{1-x} = - x^{\theta-1} dx - x^{\theta-2} dx - x^{\theta-3} dx - x^{\theta-4} dx -$ &c. $+ \frac{dx}{1-x}$; d'où l'on tire $\int \frac{x^\theta dx}{1+x} = \frac{x^\theta}{\theta} - \frac{x^{\theta-1}}{\theta-1} + \frac{x^{\theta-2}}{\theta-2} - \frac{x^{\theta-3}}{\theta-3} +$ &c. $\pm$ AO $\left(\frac{QP}{AO}\right)$, & $\int \frac{x^\theta dx}{1-x} = - \frac{x^\theta}{\theta} - \frac{x^{\theta-1}}{\theta-1} - \frac{x^{\theta-2}}{\theta-2} - \frac{x^{\theta-3}}{\theta-3} -$ &c. $-$ AO $\left(\frac{AP}{AO}\right)$; il faut continuer la suite des termes dans les deux intégrales jusqu'à ce que l'exposant de x devienne égal à l'unité ; tous les termes de la premiére intégrale ont alternativement les signes $+$ & $-$, & tous les termes

termes de la ſeconde ont le ſigne —; par ce moyen on formera facilement les deux tables ſuivantes.

θ	$\frac{x^\theta dx}{1+x}$.
0	$AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
1	$x - AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
2	$\frac{x^2}{2} - x + AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
3	$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
4	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
5	$\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
6	$\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + AO\left\{\frac{QP}{AO}\right\}$.
&c.	

θ	$\frac{x^\theta dx}{1-x}$.
0	$-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
1	$-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
2	$-\frac{x^2}{2}-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
3	$-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
4	$-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{x}-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
5	$-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
6	$-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-AO\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$.
&c.	

On ſçait par la nature des Logarithmes que $-AO\frac{AP}{AO}=AO\left\{\frac{AO}{AP}\right\}$.

LEMME IV.

52. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{x^\theta dx}{1-2tx+xx}$, θ *étant égal à* 0, *ou à un nombre entier*

positif, & t étant une quantité moindre que l'unité.

PREMIEREMENT soit $\theta = 0$, & on supposera $x - t = v$, ce qui donnera $\frac{dx}{1 - 2tx + xx} = \frac{dv}{1 - tt + vv}$: or l'intégrale de $\frac{dv}{1 - tt + vv}$ (par l'art. 22.) est égale à $\frac{1}{1 - tt}$ multiplié par l'arc de cercle décrit du rayon $\sqrt{1 - tt}$, & dont la tangente est v ou $x - t$; c'est pourquoi qu'on décrive du centre O & du rayon OA = 1, (*fig.* 25. *&* 26.) une demi-circonférence de cercle ABQ, & qu'on prenne OP = x, & ON = t, & élevant jusqu'à la circonférence la perpendiculaire BN, & tirant BP & BO, on aura $\overline{BN} = \sqrt{1 - tt}$ & $\overline{BP}^2 = 1 - 2tx + xx = 1 - tt + vv$; & si du centre B & du rayon BN on décrit l'arc de cercle CH qui rencontre BP en C & BO en H, l'intégrale de $\frac{dx}{1 - 2tx + xx}$ sera égale à $\frac{NC}{\overline{BN}^2} + Q$, (*fig.* 25.), si x est plus grand que t, (Q est la quantité qu'il faut ajoûter pour rendre cette intégrale complette); mais parce qu'en suposant $x = 0$, la tangente $x - t$ devient égale à $-t$, & que l'arc qui répond à cette tangente est NH, on aura $-\frac{NH}{\overline{BN}^2} + Q = 0$, & $Q = \frac{NH}{\overline{BN}^2}$, ce qui donne l'intégrale complette égale à $\frac{CH}{\overline{BN}^2}$, ou $\frac{1}{1 - tt}\sqrt{1 - tt}$ (PBO).

Si x eſt moindre que t, la tangente $x - t$ ou NP (*fig.* 26.) eſt négative, & par conſéquent auſſi l'arc NC, ainſi l'intégrale de $\frac{dx}{1 - 2tx + xx}$ dans ce cas ſera $-\frac{NC}{\overline{BN}^2} + Q$; mais lorſque $x = 0$, la tangente NP devient égale à NO, & l'arc NC égal à NH, on aura donc $-\frac{NH}{\overline{BN}^2} + Q = 0$, & $Q = \frac{NH}{\overline{BN}^2}$ ce qui donne l'intégrale complette égale à $\frac{CH}{\overline{BN}^2}$, ou $\frac{1}{1 - 2tt}\sqrt{1 - tt}\,(PBO)$: on a donc dans les deux cas $\frac{1}{1 - tt}\sqrt{1 - tt}\,(PBO)$ pour l'intégrale cherchée.

Maintenant ſi on ſuppoſe $\theta = 1$, puiſque $x = v + t$, on aura $\frac{x\,dx}{1 - 2tx + xx} = \frac{v\,dv}{1 - tt + vv} + \frac{t\,dv}{1 - tt + vv}$: or l'intégrale de $\frac{v\,dv}{1 - tt + vv}$ (par l'article 17.) eſt $\frac{1}{2}\left\{\frac{1 - tt + vv}{1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1 - 2tx + xx}{1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\overline{PB}^2}{\overline{BO}^2}\right\}$, mais (par l'art. 10.) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\overline{PB}^2}{\overline{BO}^2}\right\} = 1\left\{\frac{PB}{BO}\right\} = BO\left\{\frac{PB}{BO}\right\}$; & l'intégrale de $\frac{t\,dv}{1 - tt + vv}$ eſt $\frac{t}{1 - tt}\sqrt{1 - tt}\,(PBO)$,

donc l'intégrale totale de $\frac{xdx}{1-2t+xx}$ est BO $\left\{\frac{PB}{BO}\right\}$ $+\frac{t}{1-tt}\sqrt{1-tt}$ (PBO.)

Par le moyen des intégrales des deux différentielles $\frac{dx}{1-2tx+xx}$, $\frac{xdx}{1-2tx+xx}$, on trouvera facilement celle de $\frac{x^2dx}{1-2tx+xx}$, car si on divise le numérateur par le dénominateur en prenant xx pour le premier terme du diviseur, on aura $\frac{x^2dx}{1-2tx+xx}$ $=dx+\frac{2txdx-dx}{1-2tx+xx}$; & par le moyen des intégrales de $\frac{x^2dx}{1-2tx+xx}$, $\frac{xdx}{1-2tx+xx}$, on trouvera celle de $\frac{x^3dx}{1-2tx+xx}$, car la division donnera $\frac{x^3dx}{1-2tx+xx}=xdx+\frac{2tx^2dx-xdx}{1-2tx+xx}$, & ainsi des autres.

De cette façon on formera la table suivante

θ	$\dfrac{x^\theta dx}{1 - 2tx + xx}$
0	$\dfrac{1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PBO})$.
1	$\mathrm{BO}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PBO})$.
2	$x + 2t\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{2tt-1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PBO})$.
3	$\dfrac{x^2}{2} + 2tx + \overline{4tt-1}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{4t^3-3t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PBO}]$.
4	$\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2tx^2}{2} + \overline{4tt-1} \times x + \overline{8t^3-4t}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{8t^4-8tt+1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PBO}]$.
5	$\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2tx^3}{3} + \dfrac{4tt-1}{2}x^2 + \overline{8t^3-4t} \times x + \overline{16t^4-12tt+1}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{16t^5-20t^3+5t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PBO}]$.
6	$\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2tx^4}{4} + \dfrac{4tt-1}{3}x^3 + \dfrac{8t^3-4t}{4}x^2 + \overline{16t^4-12tt+1} \times x + \overline{32t^5-32t^3+6t}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{32t^6-48t^4+18tt-1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PBO}]$.
7	$\dfrac{x^6}{6} + \dfrac{2tx^5}{5} + \dfrac{4tt-1}{4}x^4 + \dfrac{8t^3-4t}{3}x^3 + \dfrac{16t^4-12tt+1}{2}x^2 + \overline{32t^5-32t^3+6t} \times x + \overline{64t^6-80t^4+24tt-1}\left\{\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{BO}}\right\} + \dfrac{64t^7-112t^5+56t^3-7t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PBO}]$.
&c.	

Qu'on ôte chacune de ces formules de sa précédente après avoir multiplié par t celle qu'on ôte, & elles auront la forme suivante

θ	$\dfrac{x^{\theta}dx - tx^{\theta+1}dx}{1 - 2tx + xx}$.
0	$-t\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \sqrt{1-tt}\,[PBO]$.
1	$-tx - \overline{2tt-1}\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + 2t\sqrt{1-tt}\,[PBO]$.
2	$-\dfrac{tx^2}{2} - \overline{2tt-1}\times x - \overline{4t^3-3t}\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \overline{4tt-1}\sqrt{1-tt}$ $[PBO]$.
3	$-\dfrac{tx^3}{3} - \dfrac{2tt-1}{2}x^2 - \overline{4t^3-3t}\times x - \overline{8t^4-8tt+1}$ $\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \overline{8t^3-4t}\sqrt{1-tt}\,[PBO]$.
4	$-\dfrac{tx^4}{4} - \dfrac{2tt-1}{3}x^3 - \dfrac{4t^3-3t}{2}x^2 - \overline{8t^4-8tt+1}\times$ $x - \overline{16t^5-20t^3+5t}\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \overline{16t^4-12tt+1}\sqrt{1-tt}$ $[PBO]$.
5	$-\dfrac{tx^5}{5} - \dfrac{2tt-1}{4}x^4 - \dfrac{4t^3-3t}{3}x^3 - \dfrac{8t^4-8tt+1}{2}$ $x^2 - \overline{16t^5-20t^3+5t}\times x - \overline{32t^6-48t^4+18tt+1}$ $\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \overline{32t^5-32t^3+6t}\sqrt{1-tt}\,[PBO]$.
6	$-\dfrac{tx^6}{6} - \dfrac{2tt-1}{5}x^5 - \dfrac{4t^3-3t}{4}x^4 - \dfrac{8t^4-8tt+1}{3}$ $x^3 - \dfrac{16t^5-20t^3+5t}{2}x^2 - \overline{32t^6-48t^4+18tt-1}$ $\times x - \overline{64t^7-112t^5+56t^3-7t}\left\{\dfrac{PB}{BO}\right\} + \overline{64t^6-80t^4+24tt-1}\sqrt{1-tt}\,[PBO]$.
&c.	

Maintenant on n'a qu'à comparer les termes de ces formules avec les équations aux ſinus & co-ſinus de

l'art. 42. & on verra clairement que tous les termes ici sont multipliés par les valeurs des sinus ou co-sinus des arcs, double, triple, quadruple, &c. de celui dont le co-sinus est t; de sorte que t étant le co-sinus de l'arc AB (*fig.* 25. & 26.) & supposant $s = \sqrt{1 - tt}$, si, comme dans l'art. 42. on nomme t'', t''', t^{iv}, &c. les cosinus, & s'', s''', s^{iv}, &c. les sinus des arcs, double, triple, quadruple, &c. de AB, on abrégera les expressions des formules précédentes, & on les réduira en cette sorte

θ	$\dfrac{x^\theta dx - tx^{\theta+1}dx}{1 - 2tx + xx}$
0	$-t\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s\,[PBO]$.
1	$-tx - t''\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s''\,[PBO]$.
2	$-\frac{tx^2}{2} - t''x - t'''\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s'''\,[PBO]$.
3	$-\frac{tx^3}{3} - \frac{t''x^2}{2} - t'''x - t^{iv}\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s^{iv}\,[PBO]$.
4	$-\frac{tx^4}{4} - \frac{t''x^3}{3} - \frac{t'''x^2}{2} - tx^{iv} - t^{v}\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s^{v}\,[PBO]$.
5	$-\frac{tx^5}{5} - \frac{t''x^4}{4} - \frac{t'''x^3}{3} - \frac{t^{iv}x^2}{2} - t^{v}x - t^{vi}\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + s^{vi}$ $[PBO]$.
6	$-\frac{tx^6}{6} - \frac{t''x^5}{5} - \frac{t'''x^4}{4} - \frac{t^{iv}x^3}{3} - \frac{t^{v}x^2}{2} - t^{vi}x - t^{vii}\left\{\frac{PB}{BO}\right\}$ $+ s^{vii}\,[PBO]$.
&c.	

LEMME

LEMME V.

53. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{x^{\theta}dx}{1+2tx+xx}$, θ *étant égal à* 0, *ou à un nombre entier positif, & t étant une quantité moindre que l'unité.*

PREMIEREMENT soit $\theta = 0$, & on supposera $x + t = v$, ce qui donnera $1 + 2tx + xx = 1 - tt + vv$, & $\frac{dx}{1+2tx+xx} = \frac{dv}{1-tt+vv}$: or l'intégrale de $\frac{dv}{1-tt+vv}$ (par l'art. 32.) est égale à la quantité $\frac{1}{1-tt}$ multipliée par l'arc de cercle décrit du rayon $\sqrt{1-tt}$, & dont la tangente est v ou $x + t$: c'est pourquoi si on suppose comme dans le Lemme précédent OA $= 1$, (*fig.* 25. *&* 26.) OP $= x$, & si on prend OM $= t$ du côté opposé au point P, & qu'on élève jusqu'à la circonférence la perpendiculaire MS, & qu'on tire SP & SO, on aura MS $= \sqrt{1-tt}$, & $\overline{PS}^2 = 1 + 2tx + xx = 1 - tt + vv$; & si du centre S & du rayon SM on décrit l'arc de cercle MR qui rencontre OS en L & PS en R, on aura $\int \frac{dx}{1+2tx+xx} = \frac{MR}{\overline{MS}^2} + Q$, mais lorsque $x = 0$, la tangente MP devient égale à MO, & l'arc MR à ML, d'où l'on déduit $\frac{ML}{\overline{MS}^2} + Q = 0$, & Q

$= -\frac{ML}{\overline{MS}^2}$, donc on aura $\int \frac{dx}{1+2tx+xx} = \frac{LR}{\overline{MS}^2} = \frac{1}{1-tt}\sqrt{1-tt}$ (PSO).

Maintenant si on suppose $\theta = 1$, puisque $x = v - t$, on aura $\frac{xdx}{1+2tx+xx} = \frac{vdv}{1-tt+vv} - \frac{tdv}{1-tt+vv}$: or l'intégrale de $\frac{vdv}{1-tt+vv}$ (par l'article 17.) est $\frac{1}{2}\left\{\frac{1-tt+vv}{1.}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+2tx+xx}{1}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\overline{PS}^2}{\overline{SO}^2}\right\} = SO\left\{\frac{PS}{SO}\right\}$; & $\int \frac{tdv}{1-tt+vv} = \frac{t}{1-tt}\sqrt{1-tt}$ (PSO); donc $\int \frac{xdx}{1+2tx+xx} = SO\left\{\frac{PS}{SO}\right\} - \frac{t}{1-tt}$ (PSO). Ayant les intégrales des différentielles $\frac{dx}{1+2tx+xx}$, $\frac{xdx}{1+2tx+xx}$, on trouvera celles de $\frac{x^2dx}{1+2tx+xx}$, $\frac{x^3dx}{1+2tx+xx}$, &c. de la même maniére que dans le lemme précédent : d'où l'on construira la table suivante

θ	$\dfrac{x^\theta dx}{1+2tx+xx}$
0	$\dfrac{1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PSO})$.
1	$\mathrm{SO}\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}-\dfrac{t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PSO})$.
2	$x-2t\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}+\dfrac{2tt-1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,(\mathrm{PSO})$.
3	$\dfrac{x^2}{2}-2tx+\overline{4tt-1}\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}-\dfrac{4t^3-3t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PSO}]$.
4	$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2tx^2}{2}+\overline{4tt-1}\times x-\overline{8t^3-4t}\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}$ $+\dfrac{8t^4-8tt+1}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PSO}]$.
5	$\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2tx^3}{3}+\dfrac{4tt-1}{2}x^2-\overline{8t^3-4t}\times x+$ $\overline{16t^4-12tt+1}\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}-\dfrac{16t^5-20t^3+5t}{1-tt}\sqrt{1-tt}$ $[\mathrm{PSO}]$.
6	$\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2tx^4}{4}+\dfrac{4tt-1}{3}x^3+\dfrac{8t^3-4t}{2}x^2+\overline{16t^4-12tt+1}$ $\times x-\overline{32t^5-32t^3+6t}\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}+\dfrac{32t^6-48t^4+18tt-1}{1-tt}$ $\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PSO}]$.
7	$\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{2tx^5}{5}+\dfrac{4tt-1}{4}x^4-\dfrac{8t^3-4t}{3}x^3+\dfrac{16t^4-12tt+1}{2}$ $x^2-\overline{32t^5-32t^3+6t}\times x+\overline{64t^6-80t^4+24tt-1}$ $\left\{\dfrac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SO}}\right\}-\dfrac{64t^7-112t^5+56t^3-7t}{1-tt}\sqrt{1-tt}\,[\mathrm{PSO}]$.
&c.	

Si on ajoûte ensemble ces formules deux à deux en multipliant toujours la seconde par t, on en for-

meroit d'autres dont les termes, comparés avec les équations aux sinus & co-sinus de l'art. 43. se trouvent multipliés par les valeurs des sinus ou co-sinus des arcs multiples de AS, comme on a trouvé à l'égard des formules du Lemme précédent : si donc l'on nomme s le sinus de l'arc AS dont le co-sinus est t, & s'', s''', s^{iv}, & t'', t''', t^{iv}, &c. les sinus & co-sinus des arcs, double, triple, quadruple, &c. de AS, on formera la table suivante semblable à la troisiéme du Lemme précédent.

θ	$\dfrac{x^{\theta}dx - tx^{\theta+1}dx}{1+2tx+xx}$
0	$-t\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s\,[PSO]$.
1	$-tx-t''\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s''\,[PSO]$.
2	$-\frac{tx^2}{2}-t''x-t'''\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s'''\,[PSO]$.
3	$-\frac{tx^3}{3}-\frac{t''x^2}{2}-t'''x-t^{iv}\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s^{iv}\,[PSO]$.
4	$-\frac{tx^4}{4}-\frac{t''x^3}{3}-\frac{t'''x^2}{2}-t^{iv}x-t^{v}\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s^{v}\,[PSO]$.
5	$-\frac{tx^5}{5}-\frac{t''x^4}{4}-\frac{t'''x^3}{3}-\frac{t^{iv}x^2}{2}-t^{v}x-t^{vi}\left\{\frac{PS}{SO}\right\}+s^{vi}$ $[PSO]$.
6	$-\frac{tx^6}{6}-\frac{t''x^5}{5}-\frac{t'''x^4}{4}-\frac{t^{iv}x^3}{3}-\frac{t^{v}x^2}{2}-t^{vi}x-t^{vii}\left\{\frac{PS}{SO}\right\}$ $+s^{vii}\,[PSO]$.
&c.	

COROLLAIRE.

34. Si on suppose le co-sinus $t = 0$, l'arc AB ou AS devient égal au quart de cercle AU, & l'angle PBO ou PSO égal à l'angle PUO; d'où il suit que les tables des formules des deux derniers Lemmes se réuniront toutes dans une seule qui est la suivante

θ	$\frac{x^\theta dx}{1+xx}$.
0	UO [PUO].
1	$UO\left\{\frac{PU}{UO}\right\}$.
2	$x - UO\,[PUO]$.
3	$\frac{x^2}{2} - UO\left\{\frac{PU}{UO}\right\}$.
4	$\frac{x^3}{3} - x + UO\,[PUO]$.
5	$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + UO\left\{\frac{PU}{UO}\right\}$.
6	$\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - UO\,[PUO]$.
7	$\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - UO\left\{\frac{PU}{UO}\right\}$.
&c.	

Après tout ce qu'on a exposé dans les Lemmes précédens, & les différentes formules qu'on y a con-

ſtruit, les calculs qu'il faudra faire pour trouver les intégrales des différentielles complexes, ſeront ſimples & faciles : on commencera par les différentielles dont les dénominateurs ſont des binomes.

Des différentielles binomes.

PROBLÊME I.

55. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ *étant une fraction poſitive pas plus grande que l'unité.*

On ſuppoſera $\sqrt[\lambda]{\frac{fz^n}{e}} = x$, ce qui donnera $e + fz^n = e \times \overline{1 + x^\lambda}$, & $z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz = \frac{1}{n}\sqrt[\lambda]{\frac{e^\delta}{f^\delta}} \times \lambda x^{\delta-1}dx$, d'où l'on aura $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D\sqrt[\lambda]{\frac{e^\delta}{f^\delta}}}{ne} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+x^\lambda} = \frac{D\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}}{nf} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+x^\lambda}$: cela poſé, il peut arriver deux cas, car ou λ eſt un nombre pair ou impair.

PREMIER CAS.

Lorſque λ eſt un nombre pair.

Du centre O & du rayon OA = 1 ayant décrit une demi-circonférence de cercle ADG, (*fig.* 23.), on la diviſera en autant d'arcs égaux AB, BC, CD, &c. que le nombre λ contient d'unités, & on prendra

OP $= x$, & du point P on tirera aux points des divisions pris alternativement les lignes PB, PD, PF, &c; & si on nomme, a, b, c, &c. les co-sinus des arcs AB, AD, AF, &c. il est clair par l'art. 49. que

$$\frac{1}{1+x^\lambda} = \frac{1}{1-2ax+xx} \times \frac{1}{1-2bx+xx} \times \frac{1}{1-2cx+xx}$$

× &c. (dans ce produit les co-sinus a, b, c, &c. sont précédés du signe — ou +, selon qu'ils s'étendent du côté de P ou du côté opposé), si donc on multiplie cette équation par x^λ, ou ce qui revient au même, qu'on multiplie le premier membre par x^λ, & chaque produit du second par xx, on aura

$$\frac{x^\lambda}{1+x^\lambda} = \frac{xx}{1-2ax+xx} \times \frac{xx}{1-2bx+xx} \times \frac{xx}{1-2cx+xx}$$

× &c. & prenant la différentielle logarithmique de cette équation (par l'art. 15.) on trouvera $\lambda x^{-1}dx - \frac{\lambda x^{\lambda-1}dx}{1+x^\lambda} = 2x^{-1}dx + \frac{2adx - 2xdx}{1-2ax+xx} + 2x^{-1}dx + \frac{2bdx - 2xdx}{1-2bx+xx} + 2x^{-1}dx + \frac{2cdx - 2xdx}{1-2cx+xx} +$ &c. mais parceque $\lambda x^{-1}dx - \frac{\lambda x^{\lambda-1}dx}{1+x^\lambda} = \frac{\lambda x^{-1}dx}{1+x^\lambda}$, & pareillement $2x^{-1}dx + \frac{2adx - 2xdx}{1-2ax+xx} = \frac{2x^{-1}dx - 2adx}{1-2ax+xx}$, & $2x^{-1}dx + \frac{2bdx - 2xdx}{1-2bx+xx} = \frac{2x^{-1}dx - 2bdx}{1-2bx+xx}$, & ainsi des autres, l'on déduit $\frac{\lambda x^{-1}dx}{1+x^\lambda} = \frac{2x^{-1}dx - 2adx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^{-1}dx - 2bdx}{1-2bx+xx} + \frac{2x^{-1}dx - 2cdx}{1-2cx+xx} +$ &c. & multi-

pliant le tout par x, $\frac{\lambda dx}{1+x^\lambda} = \frac{2dx - 2axdx}{1-2ax+xx} + \frac{2dx-2bxdx}{1-2bx+xx} + \frac{2dx-2cxdx}{1-2cx+xx} +$ &c. d'où il suit que $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}-n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+x^\lambda} = \frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{2x^{\delta-1}dx - 2ax^\delta dx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^{\delta-1}dx-2bx^\delta dx}{1-2bx+xx} + \frac{2x^{\delta-1}dx-2cx^\delta dx}{1-2cx+xx}$ + &c. or les intégrales de chacune de ces différentielles se trouvent par les deux derniers Lemmes, donc on aura l'intégrale totale. Ce qu'il falloit trouver en premier lieu.

SECOND CAS.

Lorsque λ est un nombre impair.

AYANT fait la même construction que dans le cas précédent, il est clair (par l'art. 45. & 49.) qu'on aura ici $\frac{x^\lambda}{1+x^\lambda} = \frac{xx}{1-2ax+xx} \times \frac{xx}{1-2bx+xx} \times$ &c. $\times \frac{x}{1+x}$, & parce que la différentielle logarithmique de $\frac{x}{1+x}$ est $\frac{x^{-1}dx}{1+x}$, on trouvera de la même maniére que ci-dessus $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}-n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{2x^{\delta-1}dx - 2ax^\delta dx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^{\delta-1}dx-2bx^\delta dx}{1-2bx+xx} +$ &c. $+ \frac{x^{\delta-1}dx}{1+x}$: or on aura les intégrales de toutes ces différentielles par les Lemmes précédens. Ce qu'il falloit trouver en second lieu.

PROBLEME

PROBLÊME II.

56. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e-fz^n}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ *étant une fraction positive pas plus grande que l'unité.*

On supposera comme dans le Problême précédent $\sqrt[\lambda]{\frac{fz^n}{e}}=x$, d'où l'on déduira $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e-fz^n}=\frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}\times\frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1-x^\lambda}$, & l'on voit que les deux cas du Problême précédent peuvent encore avoir lieu ici ; c'est pourquoi

PREMIER CAS.

Lorsque λ est un nombre pair.

Supposant ici encore la même construction que dans le Problême précédent, on tirera aux points A, C, E, &c. les lignes PA, PC, PE, &c. & on désignera maintenant les co-sinus des arcs AC, AE, &c. par les lettres, a, b, &c. ce qui étant supposé, on aura (par l'art. 45. & 49.) $1-x^\lambda=\overline{1-x}\times\overline{1-2ax+xx}\times\overline{1-2bx+xx}\times$ &c. $\times\overline{1+x}$, ce qui donne $\frac{x^\lambda}{1-x^\lambda}=\frac{x}{1-x}\times\frac{xx}{1-2ax+xx}\times\frac{xx}{1-2bx+xx}\times$ &c. $\times\frac{x}{1+x}$, d'où par un calcul semblable à celui

du premier cas du Problême précédent, on tire $\frac{\lambda dx}{1-x^\lambda} = \frac{dx}{1-x} + \frac{2dx - 2axdx}{1-2ax+xx} + \frac{2dx-2bxdx}{1-2bx+xx} +$ &c. $+ \frac{dx}{1-x}$ donc $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e-fz^n} = \frac{D\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}}{nf} \times \frac{x^{\delta-1}dx}{1+x}$ $+ \frac{2x^{\delta-1}dx - 2ax^\delta dx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^{\delta-1}dx - 2bx^\delta dx}{1-2bx+xx} +$ &c. $+ \frac{x^{\delta-1}dx}{1+x}$: par conséquent on trouvera par les régles déja données l'intégrale cherchée.

SECOND CAS.

Lorsque λ est un nombre impair.

TOUTE la différence de ce cas au précedent est qu'on a ici $1-x^\lambda = \overline{1-x} \times \overline{1-2ax+xx} \times \overline{1-2bx+xx} \times$ &c. & par conséquent $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e-fz^n}$ $= \frac{D\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}}{nf} \times \frac{x^{\delta-1}dx}{1-x} + \frac{2x^{\delta-1}dx - 2ax^\delta dx}{1-2ax+xx} +$ $\frac{2x^{\delta-1}dx - 2bx^\delta dx}{1-2bx+xx} +$ &c. Donc &c. *C. Q. F. T.*

Pour ce qui est de la différentielle $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{-e+fz^n}$, comme elle est égale à cette autre $-\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e-fz^n}$, on en aura l'intégrale par le Problême précedent.

COROLLAIRE

57. PUISQUE dans les calculs précédens on a pris OA $= 1$, OP $= x = \sqrt[\lambda]{\frac{fz^n}{e}}$, il s'ensuit que, OP . OA :: $\sqrt[\lambda]{\frac{fz^n}{e}} . 1 :: \sqrt[\lambda]{\frac{z^n}{f}} . \sqrt[\lambda]{\frac{e}{f}}$, cette maniére d'exprimer le rapport de OP à OA suppose qu'on y prend les quantités, e, f, pour positives, soit qu'elles soient positives ou négatives dans la différentielle $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$; mais si on veut conserver dans cette proportion les quantités avec les mêmes signes qu'elles ont dans la différentielle, il faut, lorsque l'une des deux quantités, e, f, est négative, exprimer la proportion en cette façon, OP . OA :: $\sqrt[\lambda]{z^n} . \sqrt[\lambda]{-\frac{e}{f}}$, pour que le rapport de OP à OA soit réel : c'est cette derniére maniére dont M. SMITH se sert dans les tables.

AVERTISSEMENT.

POUR éclaircir davantage la théorie qu'on vient de donner, nous allons l'appliquer à quelques exemples, lesquels nous rapporterons aux tables afin d'en faire voir en même temps la construction : mais pour entendre & comparer ensemble les exemples & les tables, il faut sçavoir que le rayon com-

mun OA de tous les cercles dont on se sert est supposé égal à l'unité & que $OP = \sqrt[\lambda]{fz^n}$, que les arcs égaux dans lesquels la circonférence est divisée sont AB, BC, CD, DE, &c. que β marque le double du co-sinus & ψ le double du sinus de l'arc AB ou des arcs qui ont le même sinus & co-sinus que AB, γ marque le double du co-sinus & χ le double du sinus de l'arc AC, c'est-à-dire de l'arc double de AB, δ marque le double du co-sinus & φ le double du sinus de l'arc triple de AB, & ainsi de suite.

PREMIER EXEMPLE.

SOIT proposé de trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n}$; dans ce cas on peut supposer $\delta = 1$, & $\lambda = 1$, on divisera donc la demi-circonférence ANB (*fig.* 27.) en une seule partie (par le second cas de l'art. 55.), c'est-à-dire, on tirera le diamétre AB, & on aura par le même article $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf} \times \frac{dx}{1+x}$, dont l'intégrale par la premiére table de l'art. 51. est $\frac{D}{nf}\left(\frac{BP}{BO}\right)$: pareillement l'intégrale de $\frac{Dz^{n-1}dz}{e-fz^n}$ par la seconde table du même art. est $-\frac{D}{nf}\left(\frac{AP}{AO}\right)$ ou $\frac{D}{nf}\left(\frac{AP}{AO}\right)$ en prenant f pour une quantité négative.

SECOND EXEMPLE.

SOIT la proposée $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n}$: on aura $\delta = 1$, $\lambda = 2$, & le premier cas de l'art. 55. fait voir qu'on aura $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \frac{2dx}{1+xx}$, & qu'il faut diviser la demi-circonférence ABC (*fig.* 28.) également en deux au point B : son intégrale donc par la table de l'art. 54. est $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times 2BO\ (PBO) = \frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \psi$ (PBO). Si la proposée étoit $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n-1}dz}{e-fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \frac{dx}{1-x} + \frac{dx}{1+x}$ (par le premier cas de l'art. 56.) son intégrale par les tables de l'article 51. seroit $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \overline{1\left(\frac{CP}{CO}\right) - 1\left(\frac{AP}{AO}\right)} = \frac{D}{nf}\left(\frac{CP}{AP}\right)$.

TROISIEME EXEMPLE.

QU'IL faille trouver l'intégrale de cette différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n}$ dans ce cas $\delta = 1$, & $\lambda = 3$; donc par le second cas de l'art. 55. $\frac{Dz^{\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times \overline{\frac{2dx - 2axdx}{1-2ax+xx} + \frac{dx}{1+x}}$, la demi-circonférence étant

ſuppoſée diviſée en trois arcs égaux AB, BC, CD, (*fig.* 29.) & a le co-ſinus de AB : or en comparant la différentielle $\frac{2dx - 2axdx}{1 - 2ax + xx}$ avec la formule de la troiſiéme table de l'art. 52, on trouve $\theta = 0$, & $t = a$, donc ſon intégrale eſt $- 2t \left(\frac{PB}{BO}\right) + 2s$ (PBO), mais $2t = \beta$, & $2s = \psi$, & $\int \frac{dx}{1 + x} = 1 \left\{\frac{DP}{DO}\right\}$ par l'art. 51 : donc $\int \frac{Dz^{\frac{1}{3}n - 1} dz}{e + fz^n} = \frac{D}{nf} \sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times - \beta \left\{\frac{BP}{BO}\right\} + 1 \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \psi$ (PBO).

Et ſi la propoſée avoit cette forme $\frac{Dz^{\frac{1}{3}n - 1} dz}{e - fz^n}$, elle eſt égale (par le ſecond cas de l'art. 56.) à cette autre $\frac{D}{nf} \sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times \frac{dx}{1 - x} + \frac{2dx + 2bxdx}{1 + 2bx + xx}$, b étant ſuppoſé le co-ſinus de l'arc AC ; donc par les tables des art. 51. & 53, on trouve que l'intégrale demandée eſt $\frac{D}{nf} \sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times \beta \left\{\frac{CP}{CO}\right\} - 1 \left\{\frac{AP}{AO}\right\} + \psi$ (PCO), puiſque l'arc AC a le même ſinus & co-ſinus que l'arc AB, ſi ce n'eſt qu'il faut prendre ſon co-ſinus négativement.

QUATRIEME EXEMPLE.

SOIT maintenant propoſée la différentielle $\frac{Dz^{\frac{3}{5}n - 1} dz}{e + fz^n}$, où $\delta = 3$, & $\lambda = 5$, ce qui fait voir

que la demi-circonférence étant divisée (*fig.* 31.) en cinq parties égales AB, BC, CD, DE, EF, & les co-sinus des arcs AB, AD étant marqués par, a, b, on aura $\frac{Dz^{\frac{3}{5}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[5]{\frac{ff}{ee}} \times \frac{2x^2dx - 2ax^3dx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^2dx+2bx^3dx}{1+2bx+xx} + \frac{x^2dx}{1+x}$: or par la table de l'art. 52, on trouve $\int \frac{2x^2dx - 2ax^3dx}{1-2ax+xx} = -ax^2 - 2a''x - 2a'''\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + 2s'''$ (PBO); & par la table de l'article 53. $\int \frac{2x^2dx+2bx^3dx}{1+2bx+xx} = -bx^2 - 2b''x - 2b'''\left\{\frac{PD}{DO}\right\} + 2s'''$ (PDO); & par la table de l'art. 51. $\int \frac{x^2dx}{1+x} = \frac{x^2}{2} - x + 1\left\{\frac{FP}{FO}\right\}$; donc l'intégrale totale sera

$$\frac{D}{nf}\sqrt[5]{\frac{ff}{ee}} \times \begin{array}{l} -ax^2 - 2a''x - 2a'''\left\{\frac{PB}{BO}\right\} + 2s''' \text{ (PBO)}. \\ -bx^2 - 2b''x - 2b'''\left\{\frac{PD}{DO}\right\} + 2s''' \text{ (PDO)}. \\ +\frac{x^2}{2} - x + 1\left\{\frac{FP}{FO}\right\}. \end{array}$$

Or observant la loi touchant les sinus & co-sinus positifs & négatifs donnée dans l'art. 42, on trouve $2a = \beta$, $2a'' = \gamma$, $2a''' = -\gamma$, $2s''' = \chi$, pareillement $2b = -\gamma$, $2b'' = -\beta$, $2b''' = \beta$, $2s''' = -\psi$, & par l'art. 47. on a $\beta - \gamma - 1 = 0$, donc on déduira $-ax^2 - bx^2 + \frac{1}{2} = -\frac{\beta x^2}{2} + \frac{\gamma x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 0$; & par la

même raison $-2a''x - 2b''x - x = -\gamma x + \beta x - \chi = 0$; par conséquent l'intégrale totale se réduit à $\frac{D}{nf}\sqrt[5]{\frac{ff}{ee}}\,x + \gamma\left\{\frac{PB}{BO}\right\} - \beta\left\{\frac{PD}{DO}\right\} + \iota\left\{\frac{PF}{FO}\right\} + \chi(PBO) - \psi(PDO)$.

On trouveroit d'une façon semblable l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{3}{5}n-1}dz}{e-fz^n}$.

CINQUIEME EXEMPLE.

SOIT proposée en dernier lieu la différentielle $\frac{Dz^{\frac{5}{6}n-1}dz}{e+fz^n}$: dans ce cas on a $\delta = 5$, $\lambda = 6$; c'est pourquoi on divisera la demi-circonférence de cercle en six parties égales aux points B, C, D, E, F, G, (*fig.* 32.) & nommant a le co-sinus de l'arc AB, b celui de l'arc AF, on aura o pour le co-sinus de l'arc AD, & le premier cas de l'art. 55. donnera $\frac{Dz^{\frac{5}{6}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{D\sqrt[6]{f}}{nf\sqrt{e}} \times \frac{2x^4dx - 2ax^5dx}{1-2ax+xx} + \frac{2x^4dx}{1+xx} + \frac{2x^4dx + 2bx^5dx}{1+2bx+xx}$ & faisant usage des tables données dans les articles 52, 53, 54, on trouvera que la somme des intégrales de ces trois différentielles est

$\frac{D}{nf}$

$$-\frac{2ax^4}{4}-\frac{2a''x^3}{3}-\frac{2a'''x^2}{2}-2a^{iv}x-2a^{v}\left\{\frac{PB}{BO}\right\}+2s^{v}(PBO)$$

$$\frac{D}{nf}\sqrt[6]{\frac{f}{e}}\times\ \ldots+\frac{2x^3}{3}\ \ldots-2x\ \ldots+2DO(PDO)$$

$$-\frac{2bx^4}{4}-\frac{2b''x^3}{3}-\frac{2b'''x^2}{2}-2b^{iv}x-2b^{v}\left\{\frac{PF}{FO}\right\}+2s^{v}(PFO).$$

Or en prenant des arcs, double, triple, quadruple, &c. des arcs AB & AF, on aura $2a=\beta$, $2a''=\gamma$, $2a'''=0$, $2a^{iv}=-\gamma$, $2a^{v}=-\beta$, $2s^{v}=\psi$, & $2b=-\beta$, $2b''=\gamma$, $2b'''=0$, $2b^{iv}=-\gamma$, $2b^{v}=\beta$, $2s^{v}=\psi$, d'où l'on déduit $-\frac{2ax^4}{4}-\frac{2bx^4}{4}=-\frac{\beta x^4}{4}+\frac{\beta x^4}{4}=0$, pareillement $-\frac{2a''x^3}{3}+\frac{2x^3}{3}-\frac{2b''x^3}{3}=-\frac{\gamma x^3}{3}+\frac{2x^3}{3}-\frac{\gamma x^3}{3}=0$ (par l'art. 47.) & $-\frac{2a'''x^2}{2}-\frac{2b'''x^2}{2}=0$, aussi $-2a^{iv}x-2x-2b^{iv}x=+\gamma x-2x+\gamma x=0$: il suit donc que l'intégrale demandée est $\frac{D}{nf}\sqrt[6]{\frac{f}{e}}\times+\beta\left\{\frac{PB}{BO}\right\}-\beta\left\{\frac{PF}{FO}\right\}+\psi(PBO)+2DO(PDO)+\psi(PFO)$.

De cette maniére on pourroit se proposer des différentielles en aussi grand nombre qu'on jugeroit à propos, & par les mêmes régles on trouveroit leurs intégrales, lesquelles ne contiendroient que des logarithmes & des arcs de cercle, puisque tous les autres termes étant multipliés par la somme des co-sinus positifs & négatifs nécessairement deviennent nuls (par l'art. 47.).

REMARQUE.

LA méthode qu'on a donnée pour trouver les intégrales des différentielles composées paroît assez simple, & une conséquence naturelle des principes & fondemens de la théorie que nous traitons, elle semble lui être tellement appropriée, qu'elle devroit se présenter à l'esprit la premiére; on ne peut juger si c'est la même dont se servit M. CÔTES ou quelque autre, parce qu'on n'a jamais rendu autre chose publique de sa méthode, que le Théoréme de la division du cercle donné dans l'article 49: Mais quelques avantages que puisse avoir cette méthode, il y en a néanmoins encore une autre qui, quoiqu'on n'y parvienne que par un plus grand nombre de principes & des détours plus recherchés, cependant emporte sur la précédente en ce qu'elle est plus générale, & donne des solutions beaucoup plus simples & plus élégantes; c'est pourquoi nous ferons nos efforts d'en donner une explication la plus claire qu'il sera possible.

Autre méthode pour trouver les intégrales des différentielles binomes.

LEMME I.

58. *REDUIRE la fraction générale* $\frac{x^{\theta}}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^{\lambda}}$ *en plusieurs fractions simples, l'exposant* θ *étant supposé moindre que* λ, *&* L, M, N, *&c. des quantités données.*

Il faut trouver les diviseurs du dénominateur $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda$, ce que l'on peut faire en supposant $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = 0$, & cherchant les racines de cette équation, puisque les racines d'une équation en sont toujours des diviseurs : si donc on suppose que ces racines sont $e + fx = 0$, $g + hx = 0$, $k + lx = 0$, &c. on aura $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = \overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. on supposera en second lieu $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx} \times \&c.} = \frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx} + \frac{C}{k+lx} +$ &c. ce qui donnera $x^\theta = A \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. $+ B \times \overline{e+fx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. $+ C \times \overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times$ &c. $+$ &c. Pour abréger les expressions, on supposera $\overline{g+hx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. $= Q$, $\overline{e+fx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. $= R$, $\overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times$ &c. $= S$, & $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = K$, on aura donc $x^\theta = AQ + BR + CS +$ &c. mais la supposition de $e + fx = 0$, donne $x = -\frac{e}{f}$, $x^\theta = -\frac{e^\theta}{f^\theta}$, & $R = 0$, & $S = 0$, &c. d'où l'on tire dans ce cas $-\frac{e^\theta}{f^\theta} = AQ$, & $A = \frac{-\frac{e^\theta}{f^\theta}}{Q}$, mais $\overline{e+fx} \times Q = K$, & prenant la différence

$fdx \times Q + dQ \times \overline{e + fx} = dK$, ou plutôt puisque $e + fx = 0$, $fdx \times Q = dK$, & ainsi $Q = \frac{dK}{fdx} = \frac{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda - 1}}{f^{\lambda - 1}}}{f}$, donc en mettant cette valeur dans l'équation $A = \frac{-\frac{e^{\theta}}{f^{\theta}}}{Q}$, on aura $A = \frac{-\frac{e^{\theta}}{f^{\theta}} \times f}{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda - 1}}{f^{\lambda - 1}}}$

Pareillement si on suppose $g + hx = 0$, on aura $x = -\frac{g}{h}$, $x^{\theta} = -\frac{g^{\theta}}{h^{\theta}}$, & $Q = 0$, & $S = 0$, par conséquent $-\frac{g^{\theta}}{h^{\theta}} = BR$, & $B = \frac{-\frac{g^{\theta}}{h^{\theta}}}{R}$, mais puisque $K = \overline{g + hx} \times R$ on aura $dK = hdx \times R + dR \times \overline{g + hx}$, & dans ce cas $dK = hdx \times R$, ce qui donne $R = \frac{dK}{hdx}$, d'où l'on tire $B = \frac{-\frac{g^{\theta}}{h^{\theta}} \times h}{dK} = \frac{-\frac{g^{\theta}}{h^{\theta}} \times h}{M - 2N \times \frac{g}{h} + 3P \times \frac{gg}{hh} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{g^{\lambda - 1}}{h^{\lambda - 1}}}$.

L'on trouveroit de la même maniére $C = \frac{-\frac{k^{\theta}}{l^{\theta}} \times l}{M - 2N \times \frac{k}{l} + 3P \times \frac{kk}{ll} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{k^{\theta - 1}}{l^{\theta - 1}}}$, & ainsi

des autres. En mettant donc ces valeurs de A, B, C, &c. on aura $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda} = \frac{A}{e + fx} + \frac{B}{g + hx} + \frac{C}{k + lx} +$ &c. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

59. Il eſt donc clair que, puiſque les valeurs de A, B, C, &c. ſont toutes ſemblables, on peut tirer une régle générale pour réſoudre une fraction compoſée $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda}$ en pluſieurs fractions ſimples telles que $\frac{A}{e + fx}$, $\frac{B}{g + hx}$, $\frac{C}{k + lx}$, &c ; car on voit que la valeur d'un terme quelconque, par exemple de B, eſt une fraction dont le numerateur eſt égal à $x^\theta \times h$, & le dénominateur égal à la différence du dénominateur de la fraction propoſée diviſée par dx, en mettant dans le numérateur & dénominateur la valeur de x tirée de l'équation reſpective $g + hx = 0$. On doit obſerver que les numérateurs des valeurs de A, B, C, &c. ont le ſigne +, lorſque θ eſt un nombre pair en y comprenant le 0 : on doit encore y ſubſtituer le ſigne + lorſque les valeurs reſpectives de x ſont poſitives, par exemple, ſi les diviſeurs du dénominateur de la fraction propoſée étoient $e - fx$, $g - hx$, $k - lx$, &c, car les valeurs de x dans ce cas ſeroient $+ \frac{e^\theta}{f^\theta}$, $+ \frac{g^\theta}{h^\theta}$, $+ \frac{k^\theta}{l^\theta}$, &c : auſſi dans ce mê-

me cas le dénominateur de la proposée auroit cette forme $L - Mx + Nx^2 - Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda$ puisque toutes ses racines sont supposées positives, d'où il est évident que les termes des dénominateurs des fractions égales à A, B, C, &c. ont toujours alternativement les signes + & —.

Ce qu'on vient de dire s'éclaircira davantage par l'application qu'on en va faire à quelques exemples. Soit proposé de décomposer la fraction $\frac{1}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}}$ en ces deux autres $\frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx}$; dans ce cas on a $x^\theta = 1$, donc $\theta = 0$, & supposant $e + fx = 0$, on tire $x = -\frac{e}{f}$ donc par la régle donnée ci-dessus le numérateur de la fraction égale à A est $-\frac{e^0}{f^0} \times f = f$, & puisque la différence de $\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}$ est $fdx \times \overline{g+hx} + hdx \times \overline{e+fx} = fg - eh$ en divisant par dx & mettant $-\frac{e}{f}$ au lieu de x, donc le dénominateur de la fraction égale à A est $fg - eh$; par conséquent $A = \frac{f}{fg-eh}$; on trouve de la même maniére, en supposant $g + hx = 0$, $B = \frac{h}{eh-fg}$, donc $\frac{1}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}} = \frac{f}{fg-eh} \times \frac{1}{e+fx} - \frac{h}{fg-eh} \times \frac{1}{g+hx}$.

Pareillement pour réduire la fraction $\frac{zz}{hz^3 - gz^2 + fz - e^3}$

on ſuppoſera que les diviſeurs du dénominateur $hz^3 - gz^2 + fz - e$ ſont $\varkappa z - k$, $\lambda z - l$, $\mu z - m$, & que $\frac{zz}{hz^3 - gz^2 + fz - e} = \frac{A}{\varkappa z - k} + \frac{B}{\lambda z - l} + \frac{C}{\mu z - m}$, on a donc ici $\theta = 2$, & la ſuppoſition de $\varkappa z - k = 0$ donne $z = \frac{k}{\varkappa}$, & la différence de $hz^3 - gz^2 + fz - e$ ou de $\overline{\varkappa z - k} \times \overline{\lambda z - l} \times \overline{\mu z - m}$ diviſée par dz en y ſubſtituant $\frac{k}{\varkappa}$ au lieu de z eſt égale à

$$\frac{kk\lambda\mu - k\varkappa l\mu - k\varkappa\lambda m + \varkappa\varkappa lm}{\varkappa} = \frac{\overline{k\lambda - \varkappa l} \times \overline{k\mu - \varkappa m}}{\varkappa},$$

d'où l'on déduit $A = \frac{kk}{\overline{k\lambda - \varkappa l} \times \overline{k\mu - \varkappa m}}$; par un calcul ſemblable en ſuppoſant $\lambda z - l = 0$ on trouve $B = -\frac{ll}{\overline{k\lambda - \varkappa l} \times \overline{l\mu - \lambda m}}$; & en ſuppoſant $\mu z - m = 0$, $C = \frac{mm}{\overline{k\mu - \varkappa m} \times \overline{l\mu - \lambda m}}$: ſi on ſubſtitue ces valeurs dans les fractions ſimples ci-deſſus, la ſomme de ces fractions égalera la propoſée.

REMARQUE.

60. Nous avons ſuppoſé dans le Lemme que l'expoſant θ de x dans le numérateur de la fraction propoſée eſt moindre que l'expoſant λ de x dans le dénominateur, ce qu'il eſt néceſſaire d'obſerver; & la raiſon en eſt que dans la ſomme des fractions ſimples auxquelles la propoſée eſt réduite, la va-

riable x ne peut avoir un exposant égal ou plus grand que celui qu'elle a au dénominateur : par exemple, qu'on suppose une fraction donnée réduite en ces trois $\frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx} + \frac{C}{k+lx}$, puisque les quantités A, B, C, sont données, il est clair qu'en prenant la somme de cette maniére - -

$$\frac{A \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx} + B \times \overline{e+fx} \times \overline{k+lx} + C \times \overline{e+fx} \times \overline{g+hx}}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx}},$$

x ne peut monter qu'au quarré dans le numérateur, au lieu que dans le dénominateur elle monte au cube. On voit que le même raisonnement a lieu dans toutes les autres fractions auxquelles on suppose qu'une fraction donnée est réduite. C'est pourquoi s'il arrive que dans la proposée - - -

$$\frac{x^{\theta}}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^{\lambda}}$$

l'exposant θ soit égal ou plus grand que λ, il faut préparer la fraction en divisant le numérateur par le dénominateur ensorte qu'on prenne Ux^{λ} pour le premier terme du diviseur, & continuant la division jusqu'à ce qu'on vienne à une fraction, dans le numérateur de laquelle l'exposant de x est moindre que λ, & cette derniére fraction se résoudra par la régle précédente.

COROLLAIRE II.

61. Si la fraction proposée avoit cette forme $\frac{a + bx + cx^2 + \delta x^3 + \&c.}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^{\lambda}}$, l'exposant de x dans

le

le numérateur étant supposé moindre que λ, on la résoudroit en plusieurs fractions simples de cette nature $\frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx} + \frac{C}{k+lx} +$ &c. par la même méthode dont on s'est servi dans le Lemme : car supposant $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = \overline{e+fx} \times \overline{g+hx} \times \overline{k+lx} \times$ &c. $= K$, & donnant ici les mêmes valeurs à Q, R, S, qu'on leur a donné dans le Lemme, on aura $a + bx + cx^2 + \delta x^3 +$ &c. $= AQ + BR + CS +$ &c. & lorsque $e + fx = 0$, ou $x = -\frac{e}{f}$, $a - b\frac{e}{f} + c\frac{ee}{ff} - \delta\frac{e^3}{f^3} +$ &c. $= AQ$, & puisque $Q = \frac{dK}{f\,dx} = \frac{M - 2N\frac{e}{f} + 3P\frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U\frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}{f}$ on déduit $A = \frac{a - b\frac{e}{f} + c\frac{ee}{ff} - \delta\frac{e^3}{f^3} + \&c. \times f}{M - 2N\frac{e}{f} + 3P\frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U\frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}$; de la même maniére en supposant $g + hx = 0$, on trouve $B = \frac{a - b\frac{g}{h} + c\frac{gg}{hh} - \delta\frac{g^3}{h^3} + \&c. \times h}{M - 2N\frac{g}{h} + 3P\frac{gg}{hh} \ldots\ldots - \lambda U\frac{g^{\lambda-1}}{h^{\lambda-1}}}$ & supposant $k + lx = 0$, $C = \frac{a - b\frac{k}{l} + c\frac{kk}{ll} - \delta\frac{k^3}{l^3} + \&c. \times l}{M - 2N\frac{k}{l} + 3P\frac{kk}{ll} \ldots\ldots - \lambda U\frac{k^{\theta-1}}{l^{\theta-1}}}$;

& ainsi des autres. L'on voit donc que les valeurs de A, B, C, &c. dans ce cas sont semblables à celles qu'on a trouvées dans le cas du Lemme, & qu'il n'y a de différence que dans les numérateurs qui changent suivant les numérateurs des fractions proposées.

LEMME II.

62. *SOIT proposé de réduire la fraction* $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda}$ *en plusieurs fractions dont les dénominateurs soient trinomes, comme* $\frac{A + Bx}{a + bx + cxx} + \frac{C + Dx}{e + fx + gxx} + \frac{E + Fx}{h + kx + lxx} +$ *&c. on suppose encore que* θ *est un nombre moindre que* λ.

Il faut supposer $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = \overline{a + bx + cxx} \times \overline{e + fx + gxx} \times \overline{h + kx + lxx} \times$ &c. on supposera aussi $\overline{e + fx + gxx} \times \overline{h + kx + lxx} \times$ &c. $= Q$, $\overline{a + bx + cxx} \times \overline{h + kx + lxx} \times$ &c. $= R$, $\overline{a + bx + cxx} \times \overline{e + fx + gxx} \times$ &c. $= S$; cela posé, on aura $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda} = \frac{A + Bx}{a + bx + cxx} + \frac{C + Dx}{e + fx + gxx} + \frac{E + Fx}{h + kx + lxx} +$ &c. & $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q + \overline{C + Dx} \times R + \overline{E + Fx} \times S +$ &c. mais si on suppose $a + bx + cxx = 0$, alors on a $R = 0$, $S = 0$, &c, & par conséquent $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q$; & si les racines de l'équation $a + bx + cxx = 0$ sont $m + nx = 0$, $p + qx = 0$, on

aura $x = -\frac{m}{n}$, & $x = -\frac{p}{q}$; lorſque $x = -\frac{m}{n}$, on a $Q = \overline{e - f\frac{m}{n} + g\frac{m^2}{n^2}} \times \overline{h - k\frac{m}{n} + l\frac{m^2}{n^2}} \times$ &c. & lorſque $x = -\frac{p}{q}$, $Q = \overline{e - f\frac{p}{q} + g\frac{p^2}{q^2}} \times \overline{h - k\frac{p}{q} + l\frac{p^2}{q^2}} \times$ &c. pour diſtinguer cette derniére valeur de Q de la premiére, nous la marquerons par Q″; ainſi pour les deux différentes valeurs de x, l'équation $x^\theta = \overline{A + Bx} \times Q$ ſe réſoudra en les deux ſuivantes $-\frac{m^\theta}{n^\theta} = \overline{A - B\frac{m}{n}} \times Q$, $-\frac{p^\theta}{q^\theta} = \overline{A - B\frac{p}{q}} \times Q''$, d'où l'on déduit $A = \frac{Q''\frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q\frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''}$ & $B = \frac{Q''\frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}} - Q\frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''}$; ces valeurs ſuppoſent que θ eſt un nombre impair : mais lorſque θ eſt égal à o, ou à un nombre pair, alors on aura les valeurs ſuivantes $A = \frac{Q\frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q''\frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{m}{n}} \times QQ''}$ & $B = \frac{Q\frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}} - Q''\frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''}$.

Pareillement en ſuppoſant $e + fx + gxx = 0$, on a $Q = 0$, $S = 0$ &c. & $x^\theta = \overline{C + Dx} \times R$, & ſi $r + sx = 0$, $t + vx = 0$, ſont les racines de l'équation $e + fx + gxx = 0$, on aura $x = -\frac{r}{s}$, & $x = -\frac{t}{v}$; d'où par un calcul ſemblable à celui qu'on vient de faire pour A & B, on trouvera $C = \frac{\pm R\frac{t^{\theta-1}}{v^{\theta-1}} \mp R''\frac{r^{\theta-1}}{s^{\theta-1}}}{\overline{\frac{v}{t} - \frac{s}{r}} \times RR''}$, & $D = \frac{\pm R\frac{st^{\theta-1}}{rv^{\theta-1}} \mp R''\frac{vr^{\theta-1}}{ts^{\theta-1}}}{\overline{\frac{v}{t} - \frac{s}{r}} \times RR''}$; il faut ſe ſervir des ſignes + — lorſque θ eſt un nombre pair en y comprenant le 0, & des ſignes — + lorſque c'eſt un nombre impair. Les valeurs de E, F, &c. ſont ſemblables. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

63. DANS le premier Lemme on a réſolu une fraction compoſée en pluſieurs fractions dont les dénominateurs étoient des diviſeurs ſimples du dénominateur de la propoſée : mais quelquefois il arrive que ces diviſeurs ſimples deviennent impoſſibles, ou ce qui eſt la même choſe, que l'équation $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = 0$ eſt compoſée de racines imaginaires : or puiſque l'on ſçait que le produit de deux racines imaginaires correſpondantes donne une quantité réelle, & que ces racines ſont toujours un nombre pair dans une équation où il

n'y a point de quantités incommensurables ; il suit que dans ce cas, où le premier Lemme ne peut avoir lieu, le second donnera la réduction de la fraction proposée.

COROLLAIRE II.

64. Si l'équation $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = 0$, a des racines imaginaires & d'autres réelles, on la résoudra encore comme dans le dernier Lemme : car supposons $\frac{x^\theta}{L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda} = \frac{A + Bx}{a + bx + cxx} + \frac{C + Dx}{e + fx + gxx}$ &c. $+ \frac{H}{k + lx}$. Alors on aura $Q = \overline{e + fx + gxx} \times$ &c. $\times \overline{k + lx}$, $R = \overline{a + bx + cxx} \times$ &c. $\times \overline{k + lx}$, $S = \overline{a + bx + cxx} \times \overline{e + fx + gxx} \times$ &c. or ayant égard à ces valeurs on voit que les quantités A, B, C, D, &c. seront exprimées par les mêmes formules ; & la supposition de $k + lx = 0$ donne $Q = 0$, $R = 0$ &c. & $-\frac{k}{l} = x$, & $-\frac{k^\theta}{l^\theta} = H \times S$, & $H = -\frac{k^\theta}{l^\theta} \times \frac{1}{S}$, S étant $= \overline{a - b\frac{k}{l} + c\frac{kk}{ll}} \times \overline{e - f\frac{k}{l} + g\frac{kk}{ll}} \times$ &c. Ce cas a lieu aussi, lorsque l'exposant λ est un nombre impair.

Pour faciliter davantage la réduction des fractions composées, nous allons appliquer les formules précédentes à un ou deux exemples : mais afin d'obvier

à quelques difficultés qui pourroient se présenter dans le calcul, on mettra ici trois remarques.

I.

QUOIQUE nous ayons observé que les racines $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ &c. sont quelquefois imaginaires, cependant il n'y a pas lieu de craindre que les valeurs de A, B, C, D, &c. soient embarrassées de quantités impossibles, parce que les termes du numérateur, par exemple de la formule égale à A, se trouvent toujours divisibles par le diviseur $\frac{q}{p} - \frac{n}{m}$, & que le quotient aussi bien que la valeur du produit QQ'' n'est composé que de la somme & du produit des racines $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$: or on sçait que la somme & le produit de deux racines impossibles correspondantes sont des quantités réelles. La même chose doit s'entendre des autres formules.

I I.

UNE quantité telle que $a^n - b^n$ peut toujours être divisée par $a - b$; pour avoir une formule générale qui en représente le quotient, on n'a qu'à faire la division, & on trouve $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 +$ &c. le dernier terme du quotient est celui où l'exposant de a est égal à o, ainsi $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = aa + ab + bb$: cette

formule fait voir que le quotient de $a^n - b^n$ divisé par $a - b$ est toujours égal à $a + b$ élevé à la puissance marquée par $n - 1$ en ôtant les coëfficiens de tous les termes.

III.

QUAND on connoît la somme s & le produit r de deux quantités a & b, il est facile de trouver une valeur de $a^n + b^n$ qui ne contienne d'autres quantités que s & r : car puisque $a + b = s$, & $ab = r$, on aura $aa + 2ab + bb = ss$, & $aa + bb = ss - 2r$, pareillement $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 = s^3$, mais $3aab + 3abb = 3ab \times \overline{a + b} = 3rs$ par conséquent $a^3 + b^3 = s^3 - 3rs$; de la même maniére on trouve $a^4 + b^4 = s^4 - 4rss + 2rr$, & ainsi on peut continuer ces valeurs autant qu'on juge à propos. Ces préparations étant supposées.

ETANT donnée l'équation $L + Mx + Nx^2 + Px^3 = \overline{e + fx + gxx} \times \overline{k + lx}$, soit proposé de réduire la fraction $\frac{1}{L + Mx + Nx^2 + Px^3}$ en ces deux autres $\frac{A + Bx}{e + fx + gxx} + \frac{C}{k + lx}$: on supposera donc $e + fx + gxx = \overline{m + nx} \times \overline{p + qx} = mp + mqx + npx + nqxx$, ce qui donne $mp = e$, $mq + np = f$, $nq = g$, d'où l'on tire $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{f}{g}$. Maintenant pour se servir des formules données ci-dessus, on

voit qu'on a dans cet exemple $\theta = 0$, & par conséquent $A = \frac{Q\frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q''\frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''} = \frac{Q\frac{q}{p} - Q''\frac{n}{m}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''}$;

mais l'exemple donne $Q = k - l\frac{m}{n}$, $Q'' = k - l\frac{p}{q}$,

& $Q\frac{q}{p} - Q''\frac{n}{m} = k \times \overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} - \frac{m^2q^2 - n^2p^2}{mp \times nq}l$, or cette quantité étant divisée par $\frac{q}{p} - \frac{n}{m}$ ou $\frac{mq - np}{mp}$ donnera pour quotient $k - \frac{mq + np}{nq}l = k - l\frac{f}{g}$, & puisque $QQ'' = kk - kl \times \overline{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} + \frac{mp}{nq}ll = kk - \frac{fkl}{g} + \frac{ell}{g}$, on déduit $A = \frac{gk - fl}{gkk - fkl + ell}$: par un semblable calcul on trouveroit $B = \frac{Q\frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}} - Q''\frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}} \times QQ''}$

$\frac{-gl}{gkk - fkl + ell}$. Pour trouver la valeur de C il faut se servir de la formule $C = \frac{k^\theta}{l^\theta} \times \frac{1}{S}$ du Corol. 2. on a donc ici $\frac{k^\theta}{l^\theta} = 1$, & $S = e - f\frac{k}{l} + g\frac{kk}{ll}$, ce qui donne $C = \frac{ll}{gkk - fkl + ell}$, par conséquent on aura

$L + Mx$

$$\frac{1}{L + Mx + Nx^2 + Px^3} = \frac{gk - fl - glx}{\overline{gkk - fkl + ell} \times \overline{e + fx + gxx}}$$

$$+ \frac{ll}{\overline{gkk - fkl + ell} \times \overline{k + lx}}.$$

Si la fraction proposée étoit celle-ci $\frac{x^3}{\overline{a + bx + cxx} \times \overline{e + fx + gxx}}$, pour la résoudre on la supposera égale à la somme des deux suivantes $\frac{A + Bx}{a + bx + cxx} + \frac{C + Dx}{e + fx + gxx}$; & puisque $\theta = 3$ qui est un nombre impair, on aura $A = \frac{Q''\frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q\frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ''}$

$= \frac{Q\frac{m^2}{n^2} - Q''\frac{p^2}{q^2}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ''}$, & si on suppose $a + bx + cxx$

$= \overline{m + nx} \times \overline{p + qx} = mp + mqx + npx + nqxx$, on aura $mp = a$, $mq + np = b$, $nq = c$, $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{b}{c}$, & (par la troisiéme remarque) $\frac{m^2}{n^2} + \frac{p^2}{q^2} = \frac{bb}{cc} - \frac{2a}{c}$, on aura aussi $Q = e - f\frac{m}{n} + g\frac{m^2}{n^2}$, $Q'' = e - f\frac{p}{q} + g\frac{pp}{qq}$, d'où l'on déduit $Q''\frac{m^2}{n^2} - Q\frac{p^2}{q^2}$

$$= \frac{\frac{m^2}{n^2}e - \frac{m^2p}{n^2q}f + \frac{m^2p^2}{n^2p^2}g}{-\frac{p^2}{q^2}e + \frac{mp^2}{nq^2}f - \frac{m^2p^2}{n^2q^2}g} = \frac{m^2q^2 - n^2p^2}{n^2q^2}e - \frac{m^2pq - mnp^2}{n^2q^2}f,$$

& si on divise cette derniére quantité par $\frac{q}{p} - \frac{n}{m} = \frac{mq - np}{mp}$, le quotient est $\frac{mp \times \overline{mq + np}}{n^2 q^2} e - \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} f = \frac{ab}{cc} e - \frac{aa}{cc} f$: en cherchant de la même maniére la valeur de QQ'', on trouve $A = \frac{abe - aaf}{ccee - bcef + bbeg - 2aceg + acff - abfg + aagg} = \frac{abe - aaf}{\overline{ec - ag}^2 + \overline{bg - cf} \times \overline{be - af}}$. Pareillement en substituant ces valeurs dans la formule $B = \frac{Q''^{\frac{qm^\theta - 1}{pn^\theta - 1}} - Q^{\frac{np^\theta - 1}{mq^\theta - 1}}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ''}$ on trouve $B = \frac{bbe - ace - abf + aag}{\overline{cc - ag}^2 + \overline{bg - cf} \times \overline{be - af}}$.

Pour trouver les valeurs de C & D, il n'est pas nécessaire de faire un calcul comme celui qu'on vient de faire pour A & B, car en comparant ensemble les formules il est facile de voir que la formule qui donne la valeur de C est semblable à celle de A, & la formule de D à celle de B, & que tout le changement qu'il y a à faire consiste à substituer respectivement, a, b, c, à la place de, e, f, g; par conséquent on aura $C = \frac{acf - bee}{\overline{ec - ag}^2 + \overline{bg - cf} \times \overline{be - af}}$, & $D = \frac{aff - bef - aeg + eec}{\overline{ec - ag}^2 + \overline{bg - cf} \times \overline{be - af}}$; on a donc toutes les valeurs des indéterminées, ce qui donne la réduction requise.

COROLLAIRE III.

65. Si la fraction proposée étoit de cette nature $\frac{x^\theta}{1+x^\lambda}$, ensorte que $L + Mx + Nx^2 + Px^3, \ldots\ldots + Ux^\lambda = 1 + x^\lambda$, on auroit $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, &c. $U = 1$, & si on suppose $1 + x^\lambda = \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 - 2bx + xx} \times \overline{1 - 2cx + xx} \times$ &c. on auroit $\frac{x^\theta}{1+x^\lambda} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx} + \frac{E + Fx}{1 - 2cx + xx} +$ &c. Dans ce cas on peut abréger les formules de A, B, C, D, &c. de la maniére suivante : Qu'on suppose $1 - 2ax + xx = 0$, & on déduira $x = a + \sqrt{aa - 1}$, & $x = a - \sqrt{aa - 1}$, soit $a + \sqrt{aa - 1} = l$, & $a - \sqrt{aa - 1} = m$, & on aura $l + m = 2a$, $lm = 1$; maintenant par ce qu'on a fait voir dans le Lemme on aura $l^\theta = \overline{A + lB} \times Q$, & $m^\theta = \overline{A + mB} \times Q''$, ce qui donne $A = \frac{l^{\theta - 1}}{Q \times \overline{m - l}} - \frac{m^{\theta - 1}}{Q'' \times \overline{m - l}}$, & $B = \frac{l^\theta}{Q \times \overline{l - m}} - \frac{m^\theta}{Q'' \times \overline{l - m}}$: mais puisque $1 + x^\lambda = Q \times \overline{1 - 2ax + xx}$, on aura $\lambda x^{\lambda - 1} dx = dQ \times \overline{1 - 2ax + xx} + Q \times \overline{2xdx - 2adx}$, & dans la supposition de $1 - 2ax + xx = 0$ & $x = l$, $\lambda l^{\lambda - 1} = Q \times \overline{2l - 2a}$; & lorsque $x = m$, $\lambda m^{\lambda - 1} = Q'' \times \overline{2m - 2a}$: or de ce que $l + m = 2a$,

on a $2l - 2a = l - m$, & $2m - 2a = m - l$, d'où l'on tire $\lambda l^{\lambda-1} = Q \times \overline{l - m}$, & $\lambda m^{\lambda-1} = Q'' \times \overline{m - l}$: de plus puisque la supposition de $1 - 2ax + xx = 0$, donne aussi $1 + x^{\lambda} = 0$, on aura $x^{\lambda} = -1$, ou $l^{\lambda} = -1$ & $m^{\lambda} = -1$, & par conséquent $Q \times \overline{l - m} = \lambda l^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{l}$, & $Q'' \times \overline{m - l} = \lambda m^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{m}$; qu'on mette ces valeurs dans les formules de A, & B, & l'on trouvera $A = \frac{l^{\theta} + m^{\theta}}{\lambda}$, $B = -\frac{l^{\theta+1} + m^{\theta+1}}{\lambda}$. Par un calcul semblable en supposant que p & q sont les racines de l'équation $1 - 2bx + xx = 0$ on auroit $C = \frac{p^{\theta} + q^{\theta}}{\lambda}$, $D = -\frac{p^{\theta+1} + q^{\theta+1}}{\lambda}$: les valeurs des autres termes E, F, &c. sont semblables.

Si l'exposant λ est un nombre impair, on a $\frac{x^{\theta}}{1 + x^{\lambda}}$ $\frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx}$ &c. $+ \frac{H}{1 + x}$; & les valeurs de A, B, C, &c. étant déterminées telles qu'on vient de le voir, on trouvera de la même façon la valeur de H; car suivant la méthode donnée dans le Lemme on aura ici $x^{\theta} = H \times S$, & supposant $1 + x = 0$ ou $x = -1$, $1 = H \times S$ lorsque θ est égal à 0 ou à un nombre pair, & $-1 = H \times S$ lorsque θ est un nombre impair; mais puisque $1 + x^{\lambda} = S \times \overline{1 + x}$, on a $\lambda x^{\lambda-1} dx = dS \times \overline{1 + x} + S dx$, ce qui donne $S = \lambda$ lorsque

$1 + x = 0$, d'où l'on déduit $H = \frac{1}{\lambda}$ lorſque θ eſt un nombre pair, & $H = -\frac{1}{\lambda}$ lorſque θ eſt un nombre impair.

Si le dénominateur de la fraction propoſée étoit $1 - x^{\lambda}$, on auroit $\frac{x^{\theta}}{1 - x^{\lambda}} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx}$ &c. $+ \frac{G}{1 - x} + \frac{H}{1 + x}$, lorſque λ eſt un nombre pair; & $\frac{x^{\theta}}{1 - x^{\lambda}} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx}$ &c. $+ \frac{G}{1 - x}$, lorſque λ eſt un nombre impair; & faiſant le calcul comme dans le cas précédent on trouve encore $A = \frac{l^{\theta} + m^{\theta}}{\lambda}$, $B = -\frac{l^{\theta+1} + m^{\theta+1}}{\lambda}$, $C = \frac{p^{\theta} + q^{\theta}}{\lambda}$, $D = -\frac{p^{\theta+1} + q^{+1}}{\lambda}$, &c; auſſi $G = \frac{1}{\lambda}$, θ & λ étant des nombres pairs ou impairs; & $H = \frac{1}{\lambda}$ lorſque θ eſt un nombre pair, & $H = -\frac{1}{\lambda}$ lorſque θ eſt un nombre impair.

Si on avoit eû $\frac{A + Bx}{1 + 2ax + xx}$, $\frac{C + Dx}{1 + 2bx + xx}$, &c. dans ce Corollaire, en ſuppoſant encore $x = l$, $x = m$, $x = p$, $x = q$, &c. on auroit trouvé les mêmes valeurs de A, B, C, D, &c.

COROLLAIRE IV.

66. Si la fraction proposée avoit cette forme $\frac{x^\theta}{1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}$, & qu'on suppose $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 - 2bx + xx} \times \overline{1 - 2cx + xx} \times$ &c. on auroit $\frac{x^\theta}{1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda}} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx} + \frac{E + Fx}{1 - 2cx + xx} +$ &c. Maintenant on voit qu'on auroit ici comme dans le Corollaire précédent $A = \frac{l^\theta - 1}{Q \times \overline{m - l}} - \frac{m^\theta - 1}{Q'' \times \overline{m - l}}$, $B = \frac{l^\theta}{Q \times \overline{l - m}} - \frac{m^\theta}{Q'' \times \overline{l - m}}$, mais parce que $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = Q \times \overline{1 - 2ax + xx}$, on aura $-2t\lambda x^{\lambda - 1}dx + 2\lambda x^{2\lambda - 1}dx = dQ \times \overline{1 - 2ax + xx} + Q \times \overline{2xdx - 2adx}$, cette équation, lorsque $1 - 2ax + xx = 0$ & $x = l$, se change en $\lambda l^{\lambda - 1} \times \overline{-2t - 2l^\lambda} = Q \times \overline{2l - 2a} = Q \times \overline{l - m}$; & lorsque $x = m$, $\lambda m^{\lambda - 1} \overline{-2t - 2m^\lambda} = Q'' \times \overline{2m - 2a} = Q'' \times \overline{m - l}$; mais puisque la supposition de $1 - 2ax + xx = 0$ donne aussi $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = 0$, on en tire $2t = x^\lambda + \frac{1}{x^\lambda} = l^\lambda + \frac{1}{l^\lambda} = l^\lambda + m^\lambda$, & $2t = x^\lambda + \frac{1}{x^\lambda} = m^\lambda + \frac{1}{m^\lambda} = m^\lambda + l^\lambda$, parce que $lm = 1$ & par conséquent

$l^\lambda = \frac{1}{m^\lambda}$ & $m^\lambda = \frac{1}{l^\lambda}$: qu'on substitue cette valeur de $2t$ dans les deux équations ci-dessus, & l'on trouve $\lambda l^{\lambda-1} \times \overline{l^\lambda - m^\lambda} = Q \times \overline{l - m}$, & $\lambda m^{\lambda-1} \times \overline{m^\lambda - l^\lambda} = Q'' \times \overline{m - l}$, ce qui donne $A = \frac{1}{\lambda m^{\lambda-\theta} \times \overline{l^\lambda - m^\lambda}} - \frac{1}{\lambda l^{\lambda-\theta} \times \overline{l^\lambda - m^\lambda}} = \frac{l^{\lambda-\theta} - m^{\lambda-\theta}}{\lambda \times \overline{l^\lambda - m^\lambda}}$, & $B = -\frac{l^{\lambda-\theta-1} - m^{\lambda-\theta-1}}{\lambda \times \overline{l^\lambda - m^\lambda}}$. On voit que le calcul pour C, D, E, &c. est tout-à-fait semblable, & par conséquent on aura $C = \frac{p^{\lambda-\theta} - q^{\lambda-\theta}}{\lambda \times \overline{p^\lambda - q^\lambda}}$, $D = -\frac{p^{\lambda-\theta-1} - m^{\lambda-\theta-1}}{\lambda \times \overline{p^\lambda - q^\lambda}}$, &c.

On trouveroit encore les mêmes valeurs pour A, B, C, &c, si au lieu de $\frac{x^\theta}{1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}$ la fraction étoit $\frac{x^\theta}{1 + 2tx^\lambda + x^{2\lambda}}$.

Les régles qu'on a données jusqu'ici pour la réduction des fractions composées supposent que le dénominateur de la fraction proposée est composé du produit de quantités inégales, mais dans les cas où il s'en trouve d'égales, il faut se servir de la méthode suivante.

LEMME III.

67. *REDUIRE la fraction* $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx}^\delta \times \overline{g+hx}^\lambda \times \overline{k+lx}^\mu \times \&c.}$ *en plusieurs fractions simples, l'exposant* θ *étant supposé moindre que la somme des quantités* $\delta + \lambda + \mu +$ *&c.*

On supposera la proposée égale à cette somme $\frac{A + Bx + Cx^2 \ldots + Fx^{\delta-1}}{\overline{e+fx}^\delta} + \frac{G + Hx + Ix^2 \ldots + Mx^{\lambda-1}}{\overline{g+hx}^\lambda} + \frac{N + Px + Qx^2 \ldots + Tx^{\mu-1}}{\overline{k+lx}^\mu} + \&c$; ce qui donnera $x^\theta =$ $\overline{A + Bx + Cx^2 \ldots + Fx^{\delta-1}} \times \overline{g+hx}^\lambda \times \overline{k+lx}^\mu \&c. + \overline{G + Hx + Ix^2 \ldots + Mx^{\lambda-1}} \times \overline{e+fx}^\delta \times \overline{k+lx}^\mu \&c. + \overline{N + Px + Qx^2 \ldots + Tx^{\mu-1}} \times \overline{e+fx}^\delta \times \overline{g+hx}^\lambda \&c$; Pour trouver les valeurs des indéterminées A, B, C, &c. on voit que la nature de cette derniére équation demande qu'on égale à zero la somme de tous les termes qui sont multipliés par la grandeur x élevée à une autre puissance que θ, & qu'on égale à x^θ la somme des autres termes qui sont multipliés par x^θ; par cette méthode on aura autant d'équations qu'il y a de quantités indéterminées A, B, C, &c. & par le moyen de ces équations on trouvera les valeurs cherchées, ce qui donnera la solution du Problême.

Par exemple soit proposée la fraction $\frac{xx}{\overline{e+fx}^2 \times \overline{g+hx}^1}$ à résoudre;

à résoudre ; en supposant $\frac{xx}{\overline{e+fx}^2 \times \overline{g+hx}^2} = \frac{A+Bx}{\overline{e+fx}^2}$ $+ \frac{C+Dx}{\overline{g+hx}^2}$, on aura

$$\begin{aligned} xx = {} & Agg + 2Aghx + Ahhxx \\ & + Bggx + 2Bghxx + Bhhx^3 \\ & Cee + 2Cefx + Cffxx \\ & + Deex + 2Defxx + Dffx^3. \end{aligned}$$

maintenant il faut supposer selon ce qu'on vient de dire,

$$\begin{aligned} & Agg + Cee = 0. \\ & 2Aghx + Bggx + 2Cefx + Deex = 0. \\ & Ahhxx + 2Bghxx + Cfxx + 2Defxx = xx. \\ & Bhhx^3 + Dffx^3 = 0. \end{aligned}$$

& par la résolution de ces quatre équations on trouvera les valeurs de A, B, C, D.

Il faut se servir de la même méthode pour résoudre les fractions de cette sorte $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx+gxx}^\delta \times \overline{h+kx+lxx}^\lambda \times \&c.}$

COROLLAIRE.

68. Il y a de certains cas où on peut abréger la méthode donnée dans ce Lemme, par exemple lorsque la fraction donnée a cette forme $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}^\lambda}$; car en supposant $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}^\lambda} = \frac{A}{e+fx} +$

$\frac{B + Cx + Dx^2 \ldots\ldots + Gx^{\lambda-1}}{\overline{g+hx}^{\lambda}}$, on aura $x^{\theta} = A \times \overline{g+hx}^{\lambda} + \overline{B + Cx + Dx^2 \ldots\ldots + Gx^{\lambda-1}} \times \overline{e+fx}$; mais la supposition de $e + fx = 0$, donne $x = -\frac{e}{f}$ & $\pm \frac{e^{\theta}}{f^{\theta}} = A \times \overline{g - \frac{eh}{f}}^{\lambda}$, & $A = \frac{\pm \frac{e^{\theta}}{f^{\theta}} \times f^{\lambda}}{\overline{fg-eh}^{\lambda}}$, en prenant le signe + lorsque θ est égal à 0 ou à un nombre pair, & le signe — lorsque θ est un nombre impair : La valeur de A étant ainsi trouvée, on aura facilement les valeurs de B, C, D, &c. par la méthode du dernier Lemme ; car comme nous y avons vû, on aura $Ag^{\lambda} + Be = 0$, lorsque θ est un nombre entier positif, donc $B = -\frac{g^{\lambda}}{e} A = \mp \frac{g^{\lambda} e^{\theta-1} f^{\lambda-\theta}}{\overline{fg-he}^{\lambda}}$; de même puisque $\lambda g^{\lambda-1} hx$ est le second terme de la quantité $g + hx$ élevée à la puissance λ, on aura $\lambda g^{\lambda-1} hA + Bf + Ce = 0$, lorsque θ est plus grand que l'unité, ou $\lambda g^{\lambda-1} hA + Bf + Ce = 1$, lorsque $\theta = 1$, on trouvera donc l'indéterminée C, & ainsi de suite les autres.

La fraction $\frac{a + bx + cx^2 + \&c.}{\overline{e+fx} \times \overline{g+hx}^{\lambda}}$ se résoudra par la même méthode, en la supposant égale à $\frac{A}{e+fx} + \frac{B + Cx + Dx^2 + \ldots\ldots + Gx^{\lambda-1}}{\overline{g+hx}^{\lambda}}$, ainsi on trouve A =

$\frac{af^{\lambda} - bef^{\lambda-1} + cef^{\lambda-2} - \&c.}{\overline{fg - eh}^{\lambda}}$; ensuite on aura $Ag^{\lambda} + Be = a$, d'où l'on déterminera B, & ensuite C, D, &c.

Cette méthode peut aussi s'appliquer à la fraction $\frac{x^{\theta}}{\overline{e + fx + gxx} \times \overline{h + kx + lxx}^{\lambda}}$ en la supposant égale à $\frac{A + Bx}{e + fx + gxx} + \frac{C + Dx + Ex^2 \ldots\ldots Hx^{\lambda-1}}{\overline{h + kx + lxx}^{\lambda}}$: il est [illegible] après tout ce que nous avons dit d'appliquer le calcul à cet exemple, sans qu'il soit nécessaire de le mettre ici.

LEMME IV.

69. TROUVER une expression générale des sinus & co-sinus des arcs de cercle multiples d'un arc donné.

Du centre O & du rayon OA = 1 qu'on décrive une demi-circonférence de cercle ABQ, (*fig.* 35.) d'un point B soit menée sur le diamétre la perpendiculaire BD, & *mq* infiniment proche de BD, & sur *mq* la perpendiculaire B*p*, & si on tire le rayon BO, & qu'on nomme *c* le co-sinus OD qu'on regarde comme variable, les triangles semblables ODB, B*pm* donneront BD ($\sqrt{1 - cc}$) . BO(1) :: B*p* ($-dc$) . B*m* = $\frac{-dc}{\sqrt{1 - cc}}$ différence de l'arc AB : maintenant qu'on prenne l'arc AL qui soit à AB

comme λ à 1, & en nommant son co-sinus t sa différence sera $\frac{-dt}{\sqrt{1-tt}}$; donc puisque ces arcs sont en raison donnée, leurs différences seront en même raison, ce qui donne $\frac{-dc}{\sqrt{1-cc}} . \frac{-dt}{\sqrt{1-tt}} :: 1 . \lambda$; qu'on suppose selon ce qui a été remarqué dans l'art. 36, $z = c + \sqrt{cc-1}$, ou $c = \frac{1+xx}{2x}$, & on aura $-dc = \frac{\overline{1-xx} \times dz}{2xx}$, $\sqrt{1-cc} = \frac{\sqrt{-1+2xx-x^4}}{2x}$ $= \frac{\overline{1-xx}\sqrt{-1}}{2x}$, ce qui donne $\frac{-dc}{\sqrt{1-cc}} = \frac{dx}{x\sqrt{-1}}$; pareillement en supposant $t = \frac{1+yy}{2y}$, on aura $\frac{-dt}{\sqrt{1-tt}} = \frac{dy}{y\sqrt{-1}}$ & par conséquent $\frac{dx}{x\sqrt{-1}} : \frac{dy}{y\sqrt{-1}}$ $:: 1 . \lambda$, donc $\frac{\lambda dx}{x} = \frac{dy}{y}$: or puisque les arcs AB, AL s'évanouissent lorsque $c = 1$, & par conséquent lorsque $x = 1$ & $y = 1$, en prenant l'intégrale de l'équation $\frac{\lambda dx}{x} = \frac{dy}{y}$, on aura (par l'art. 17.) log. $x^\lambda =$ log. y, & par conséquent $x^\lambda = y$: delà on tire $t = \frac{1+x^{2\lambda}}{2x^\lambda}$, mais parce que $z = c + \sqrt{cc-1}$, & $z = c - \sqrt{cc-1}$, on aura $t = \frac{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^\lambda}{2} + \frac{\overline{\frac{1}{2}}}{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^\lambda} =$ $\frac{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^\lambda + \overline{c-\sqrt{cc-1}}^\lambda}{2}$ à cause que $\overline{c+\sqrt{cc-1}}$

$\times \overline{c - \sqrt{cc-1}} = 1$ & ainsi $c - \sqrt{cc-1} = \frac{1}{c+\sqrt{cc-1}}$; qu'on suppose $\sqrt{cc-1} = u$, & on aura $\overline{c+\sqrt{cc=1}}^{\lambda}$ $= c^{\lambda} + \lambda c^{\lambda-1} u + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times c^{\lambda-2} u^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times c^{\lambda-3} u^3 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times \frac{\lambda-3}{4} \times c^{\lambda-4} u^4 +$ &c. $\overline{c-\sqrt{cc-1}}^{\lambda} = c^{\lambda} - \lambda c^{\lambda-1} u + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times c^{\lambda-2} u^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times c^{\lambda-3} u^3 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times \frac{\lambda-3}{4} \times c^{\lambda-4} u^4 -$ &c. d'où l'on tire $t = c^{\lambda} + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times c^{\lambda-2} u^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times \frac{\lambda-3}{4} \times c^{\lambda-4} u^4 +$ &c.

Si on nomme s le sinus de l'arc AL, on aura $s = \sqrt{1-tt} = \frac{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^{\lambda} - \overline{c-\sqrt{cc-1}}^{\lambda}}{2} \sqrt{-1}$; cette valeur étant réduite en serie & mettant u pour $\sqrt{cc-1}$, & $\sqrt{1-cc}$ pour $\sqrt{cc-1} \times \sqrt{-1}$, on trouve $s = \sqrt{1-cc} \times + \lambda c^{\lambda-1} + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times c^{\lambda-3} u^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} \times \frac{\lambda-3}{4} \times \frac{\lambda-4}{5} \times c^{\lambda-5} u^4 +$ &c.

C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

70. Si au contraire on avoit nommé c & t les ſinus des arcs AB, AL, & s le co-ſinus du dernier, il eſt facile de voir qu'on auroit trouvé les mêmes valeurs de t & s, car dans ce cas on auroit $BD(c) . BO(1) :: Bp \left\{ \frac{-cdc}{\sqrt{1-cc}} \right\} . Bm = \frac{-dc}{\sqrt{1-cc}}$ comme dans le Lemme, & de même la différence de l'arc AL ſeroit $\frac{-dt}{\sqrt{1-tt}}$; d'où il eſt clair que le reſte du calcul ſeroit le même que dans le Lemme, & par conſéquent le ſinus d'un arc étant donné on trouvera par les formules ci-deſſus les ſinus & co-ſinus des arcs multiples.

REMARQUE.

71. On peut ſe ſervir des mêmes formules pour trouver les ſinus & co-ſinus, ou plûtôt les ordonnées & les abſciſſes qui répondent aux ſecteurs hyperboliques : car qu'on décrive du centre O (*fig.* 36.) & du demi-axe OA une hyperbole équilatére AB, & qu'on prenne un ſecteur quelconque OAB & un autre ſecteur OAL qui ſoit à OAB comme λ à 1, & ayant tiré ſur l'axe les perpendiculaires BD, LN, ſi on nomme OA, 1; OD, c; ON, t; LN, s; la différence du ſecteur OAB (par l'art. 27.) ſera $\frac{dc}{2\sqrt{cc-1}}$, & la différence du ſecteur OAL ſera

$\frac{dt}{2\sqrt{tt-1}}$, & si on suppose $c = \frac{1+xx}{2x}$, $t = \frac{1+yy}{2y}$, on déduira $\frac{dc}{2\sqrt{cc-1}} = \frac{dx}{2x}$, & $\frac{dt}{2\sqrt{tt-1}} = \frac{dy}{2y}$, ce qui donne $\frac{dx}{2x} . \frac{dy}{2y} :: 1 . \lambda$, & $\frac{\lambda dx}{x} = \frac{dy}{y}$, donc $x^\lambda = y$: on voit de-là que tout le reste du calcul seroit ici le même que dans le Lemme, excepté que dans la valeur de s, il faut substituer $\sqrt{cc-1}$ au lieu de $\sqrt{1-cc}$, parce qu'ici on a $s = \sqrt{tt-1}$.

On doit encore observer que ce qu'on n'a trouvé que par induction dans l'art. 41, est résolu dans ce dernier Lemme d'une maniére générale, mais peut-être moins propre au cercle, puisque dans cette derniére solution on a été obligé d'introduire l'hyperbole afin d'avoir l'intégrale de l'équation $\frac{\lambda dx}{x} = \frac{dy}{y}$; néanmoins ceci fait encore voir le merveilleux rapport qui est entre le cercle & l'hyperbole, & la similitude des calculs qu'il faut faire pour découvrir leurs propriétés.

COROLLAIRE II.

72. Nous avions dans le Lemme $c = \frac{1+xx}{xx}$, ou $1 - 2cx + xx = 0$, & $t = \frac{1+x^{2\lambda}}{2x^\lambda}$ ou $1 - 2tx^\lambda + x^{2\lambda} = 0$; & puisque $x = c + \sqrt{cc-1}$, & $x = c -$

$\sqrt{cc-1}$, si on suppose $c+\sqrt{cc-1}=l$, $c-\sqrt{cc-1}$ $=m$, on aura $\frac{l+m}{2}=c$, & $lm=1$, & $t=$ $\frac{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^{\lambda}+\overline{c-\sqrt{cc-1}}^{\lambda}}{2}=\frac{l^{\lambda}+m^{\lambda}}{2}$, $s=$ $\frac{\overline{c+\sqrt{cc-1}}^{\lambda}-\overline{c-\sqrt{cc-1}}^{\lambda}}{2}\sqrt{-1}=\frac{l^{\lambda}-m^{\lambda}}{2}\sqrt{-1}$;

d'où il est clair que si $\frac{l+m}{2}$ marque le co-sinus d'un arc quelconque AB, $\frac{l^{\lambda}+m^{\lambda}}{2}$ marquera le co-sinus d'un arc AL qui est à AB comme λ à 1, & $\frac{l^{\lambda}-m^{\lambda}}{2}\sqrt{-1}$ en marquera le sinus. Outre cela nous avons démontré (art. 48.) qu'une quantité telle que $1\mp 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}$ est composée du produit des quantités $1-2ax+xx$, $1-2bx+xx$, $1-2cx+xx$, &c; nous avons aussi enseigné dans l'art. 66. la maniére de réduire la fraction $\frac{x^{\theta}}{1\mp 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}$ à toutes ses fractions composantes $\frac{A+Bx}{1-2ax+xx}+\frac{C+Dx}{1-2bx+xx}+$ $\frac{E+Fx}{1-2cx+xx}+$ &c, mais les valeurs que nous y avons trouvé de A, B, C, D, &c. s'éclaircissent parfaitement par ce Corollaire; car on voit que la valeur de A qui est $\frac{l^{\lambda-\theta}-m^{\lambda-\theta}}{\lambda\times\overline{l^{\lambda}-m^{\lambda}}}$ ou $\frac{\overline{l^{\lambda-\theta}-m^{\lambda-\theta}}\sqrt{-1}}{\lambda\times\overline{l^{\lambda}-m^{\lambda}}\sqrt{-1}}$

est

est égale au sinus d'un arc, qui est à celui dont a ou $\frac{l+m}{2}$ est le co-sinus comme $\lambda - \theta$ à 1, divisé par le sinus d'un arc qui est à celui dont a est le co-sinus comme λ à 1, le tout divisé par λ; de sorte que si l'on prend un arc AB (*fig.* 35.) dont le co-sinus OD est égal à a, & ensuite un arc AC qui soit à AB comme $\lambda - \theta$ à 1, & un arc AL qui soit au même arc AB comme λ à 1, & qu'on tire les sinus de ces arcs CG, LN, on aura $A = \frac{l^{\lambda-\theta} - m^{\lambda-\theta}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}} = \frac{CG}{\lambda \times LN}$: pareillement si on prend l'arc AE qui soit à AB comme $\lambda - \theta - 1$ à 1, & qu'on tire le sinus EF, on aura $B = -\frac{l^{\lambda-\theta-1} - m^{\lambda-\theta-1}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}} = -\frac{EF}{\lambda \times LN}$: on fera la même chose pour les autres indéterminées C, D, E, F, &c. c'est-à-dire, qu'il n'y a qu'à prendre des arcs dont les co-sinus sont égaux à b, c, &c. & prendre d'autres qui soient en même raison à ces arcs, que les arcs AC, AE, sont à AB, & tirant les sinus on aura les valeurs de, C, D, E, F, &c. qui, comme on voit, seront tout-à-fait semblables à celles de A & B.

COROLLAIRE III.

73. En reprenant les deux équations qu'on avoit au commencement du Corol. précédent, $1 - 2cx + xx = 0$, $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 0$, & supposant $t = \mp 1$, c'est-à-dire,

ſuppoſant que l'arc AL devient égal à la demi-circonférence ou à la circonférence entiére, on aura $1 \mp 2x^{\lambda} + x^{2\lambda} = 0$, & $1 - x^{\lambda} = 0$, ou $1 + x^{\lambda} = 0$; & puiſque $\frac{x^{\theta}}{1 \mp x^{\lambda}} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx} + \frac{E + Fx}{1 - 2cx + xx}$ + &c. où l'on a (par l'art. 65.) $A = \frac{l^{\theta} + m^{\theta}}{\lambda}$, $B = -\frac{l^{\theta+1} + m^{\theta+1}}{\lambda}$; or $l^{\theta} + m^{\theta}$, par ce qui eſt démontré dans le Corollaire précédent, eſt égal au double du co-ſinus d'un arc qui eſt à l'arc, dont a ou $\frac{l+m}{2}$ eſt le co-ſinus, comme θ à 1, & de même $l^{\theta+1} + m^{\theta+1}$ eſt le double du co-ſinus d'un arc qui eſt à l'arc, dont a eſt le co-ſinus, comme $\theta + 1$ à 1; ainſi ſuppoſant que l'arc AE eſt à AB comme θ à 1, & l'arc AC à AB comme $\theta + 1$ à 1, & tirant EK & CH paralléles à AO, & qui rencontrent la circonférence aux points K, H, ces lignes ſeront les doubles des co-ſinus des arcs AE, AC, & par conſéquent on aura $A = \frac{EK}{\lambda}$, $B = -\frac{CH}{\lambda}$. On trouvera par la même méthode les valeurs de C, D, en prenant un arc dont le co-ſinus eſt b, & les valeurs de E, F, en prenant un arc dont le co-ſinus eſt c, & enſuite d'autres arcs qui ſoient à ceux-ci dans la raiſon de θ à 1, & de $\theta + 1$ à 1, & leurs co-ſinus donneront les valeurs cherchées qui ſeront, comme il eſt évident, tout-à-fait ſemblables à celles

de A & B : on fera la même chose pour tous les autres termes.

Ces choses supposées il sera très-facile de trouver les intégrales des différentielles binomes, comme on verra dans le Problême suivant.

PROBLÊME II.

74. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ *étant une fraction positive moindre que l'unité.*

En supposant $\sqrt[\lambda]{\frac{fz^n}{e}} = x$, on a vû (art. 55.) que la proposée se change en cette autre $\frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+x^\lambda}$ lorsque f est une quantité positive, & en celle-ci $\frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1-x^\lambda}$ (par l'art. 56.) lorsque f est négative : encore par ce qu'on a fait voir dans les articles précédens & l'art 49., on a $\frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1 \pm x^\lambda} = \frac{D}{nf}\sqrt[\lambda]{\frac{f^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}} \times + \frac{\lambda A dx + \lambda B x dx}{1-2ax+xx} + \frac{\lambda C dx + \lambda D x dx}{1-2bx+xx} +$ &c. & si on suppose que l & m sont les racines de l'équation $1-2ax+xx=0$; on aura (par l'art. 65.) $A = \frac{l^{\delta-1}+m^{\delta-1}}{\lambda}$, $B =$ —

$\frac{l^{\delta} + m^{\delta}}{\lambda}$, & ayant divisé la circonférence du cercle & fait le reste de la construction comme dans l'art. 55, l'intégrale de $\frac{dx}{1 - 2ax + xx}$ (par l'art. 52.) est égale à $\frac{1}{\sqrt{1 - aa}}$ (PBO) *fig.* 23. ou (par l'art. 72.) $\frac{2}{l - m\sqrt{-1}}$ (PBO), & par la même raison on aura $\int \frac{xdx}{1 - 2ax + xx} = 1 \left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l + m}{l - m\sqrt{-1}}$ (PBO); d'où l'on déduit $\int \frac{\lambda A dx + \lambda B x dx}{1 - 2ax + xx} = -\overline{l^{\delta} + m^{\delta}} \left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^{\delta - 1} + m^{\delta - 1} - l^{\delta + 1} - m^{\delta + 1}}{l - m\sqrt{-1}}$ (PBO); mais $\frac{l^{\delta - 1} + m^{\delta - 1} - l^{\delta + 1} - m^{\delta + 1}}{l - m\sqrt{-1}} = \overline{l^{\delta} - m^{\delta}}\sqrt{-1}$, par conséquent $\int \frac{\lambda A dx + \lambda B x dx}{1 - 2ax + xx} = -\overline{l^{\delta} + m^{\delta}} \left\{\frac{PB}{BO}\right\} + \overline{l^{\delta} - m^{\delta}}\sqrt{-1}$ (PBO). Cette maniére d'exprimer l'intégrale est très-claire, puisque par les art. 72, 73, $l^{\delta} + m^{\delta}$ dénote le double du co-sinus d'un arc qui est à l'arc AB, dont on suppose que a ou $\frac{l + m}{2}$ est le co-sinus, comme δ à 1; & $\overline{l^{\delta} - m^{\delta}}\sqrt{-1}$ en marque le double du sinus.

Pareillement si p & q sont les racines de l'équation $1 - 2bx + xx = 0$, b étant le co-sinus

de l'arc AD, on aura $\frac{p+q}{2} = b$, $pq = 1$, & $\int \frac{\lambda C dx + \lambda D x dx}{1 - 2bx + xx} = -\overline{p^\delta + q^\delta} \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \overline{p^\delta - q^\delta}\sqrt{-1}$ (PDO), ou $p^\delta + q^\delta$ marque le double du co-ſinus, & $\overline{p^\delta - q^\delta}\sqrt{-1}$ le double du ſinus d'un arc qui eſt à l'arc AD comme δ à 1. Les intégrales des autres termes s'il y en avoit ſeroient ſemblables.

On auroit encore les mêmes expreſſions des intégrales, ſi quelques-uns des co-ſinus, a, b, c, &c. étoient négatifs, c'eſt-à-dire, ſi les arcs dont ils ſont les co-ſinus, étoient plus grands qu'un quart de cercle.

Il faut obſerver de joindre ici les diviſeurs ſimples $1 + x$, $1 - x$, toutes les fois que les dénominateurs $1 + x^\lambda$, $1 - x^\lambda$, contiennent ces diviſeurs. *C. Q. F. D.*

Pour faire voir davantage la ſimplicité de cette méthode nous allons l'appliquer à quelques exemples, nous y ſuppoſerons toujours que la demi-circonférence de cercle eſt diviſée en autant de parties égales que λ contient d'unités, & le reſte de la conſtruction expoſée dans l'Avertiſſement qui ſuit l'art. 57.

PREMIER EXEMPLE.

Soit donnée la différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n}$ dont on demande l'intégrale : on aura $\delta = 1$, & $\lambda = 2$, &

la proposée se changera en cette autre $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \frac{2Adx + 2Bxdx}{1 - 2ax + xx}$, dont l'intégrale selon le Problême est $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times -\overline{l + m}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \overline{l - m}\sqrt{-1}$ (PBO) (*fig.* 28.) mais puisque l'arc AB est un quart de cercle, son co-sinus est nul, par conséquent on aura $l + m = 0$, & $\overline{l - m}\sqrt{-1} = \psi$, l'intégrale demandée est donc $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}} \times \psi$ (PBO).

SECOND EXEMPLE.

SOIT demandée l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{3}{7}n - 1}dz}{e + fz^n}$: dans cet exemple on a $\delta = 3$, $\lambda = 7$, & la proposée sera égale à $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f^4}{e^4}} \times + \frac{7Adx + 7Bxdx}{1 - 2ax + xx} + \frac{7Cdx + 7Dxdx}{1 - 2bx + xx} + \frac{7Edx + 7Fxdx}{1 + 2cx + xx} + \frac{7Gdx}{1 + x}$, a, b, c, étant les co-sinus des arcs AB, AD, AF, (*fig.* 33.) (par l'art. 49.) : or par ce dernier Problême on a $\int \frac{7Adx + 7Bxdx}{1 - 2ax + xx} = -\overline{l^3 + m^3}\left(\frac{BP}{BO}\right) + \overline{l^3 - m^3}\sqrt{-1}$ (PBO) ; mais $l^3 + m^3$ & $\overline{l^3 - m^3}\sqrt{-1}$ étant les doubles du co-sinus & sinus d'un arc triple de AB, c'est-à-dire de l'arc AD, on a $l^3 + m^3 = \delta$, & $\overline{l^3 - m^3}\sqrt{-1} = \varphi$, donc $\int \frac{7Adx + 7Bxdx}{1 - 2ax + xx} = -\delta\left(\frac{BP}{BO}\right) + \varphi$ (PBO). pareille-

ment on aura $\int \frac{7Cdx + 7Dxdx}{1 - 2bx + xx} = -\overline{p^3 + q^3} \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \overline{p^3 - q^3}\sqrt{-1}\,(PDO) = +\gamma \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \chi\,(PDO)$, puisque l'arc triple de AD a $-\gamma$ pour le double de son co-sinus, & $-\chi$ (par l'art. 42.) pour le double de son sinus : de même $\int \frac{7Edx + 7Fxdx}{1 + 2cx + xx} = -\beta \left\{\frac{PF}{FO}\right\} + \psi$ (PFO): enfin la différentielle $\frac{7Gdx}{1+x}$ (par l'art. 65.) est égale à $\frac{dx}{1+x}$ dont l'intégrale (par l'art. 51.) est $1\left\{\frac{HP}{HO}\right\}$ donc l'intégrale totale de $\frac{Dz^{\frac{3}{7}n - 1}dz}{e + fz^n}$ est $\frac{D}{nf}\sqrt[7]{\frac{f^4}{e^4}}\,x - \delta\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \gamma\left\{\frac{DP}{DO}\right\} - \beta\left\{\frac{FP}{FO}\right\} + 1\left\{\frac{HP}{HO}\right\} + \varphi\,(PBO) - \chi\,(PDO) + \psi\,(PFO)$.

Et si la proposée étoit $\frac{Dz^{\frac{3}{7}n - 1}dz}{e - fz^n}$, on trouveroit son intégrale de la même maniére, car dans ce cas on aura $\frac{Dz^{\frac{3}{7}n - 1}dz}{e - fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[7]{\frac{f^4}{e^4}} \times + \frac{7Adx}{1-x} + \frac{7Bdx + 7Cxdx}{1 - 2ax + xx} + \frac{7Ddx + 7Exdx}{1 + 2bx + xx} + \frac{7Fdx + 7Gxdx}{1 + 2cx + xx}$ (par l'art. 49.), a, b, c, étant les co-sinus des arcs AC, AE, AG, & puisque par les art. 65. & 51, $\int \frac{A7dx}{1-x} = -1\left\{\frac{AP}{AO}\right\}$, & puisque le double du co-sinus de l'arc triple de AC est $-\beta$, & ψ le double du sinus,

on aura $\int \frac{7Bdx + 7Cxdx}{1 - 2ax + xx} = -\overline{l^3 + m^3}\left\{\frac{CP}{CO}\right\} + \overline{l^3 - m^3}\cdot\sqrt{-1}\,(PCO) = \beta\left\{\frac{CP}{CO}\right\} + \psi\,(PCO)$. Pareillement on trouve que γ est le co-sinus d'un arc triple de AE, & $-\chi$ le double du sinus, donc $\int \frac{7Ddx + 7Exdx}{1 + 2ax + xx} = -\gamma\left\{\frac{EP}{EO}\right\} - \chi\,(PEO)$; & ainsi en cherchant le double du sinus & co-sinus de l'arc triple de l'arc AG, on aura l'intégrale de $\frac{7Fdx + 7Gxdx}{1 + 2cx + xx}$, & la somme de toutes ces intégrales multipliées par $\frac{D}{nf}\sqrt[7]{\frac{f^4}{e^4}}$ donnera l'intégrale demandée.

TROISIEME EXEMPLE.

SOIT enfin proposée la différentielle $\frac{Dz^{\frac{7}{8}n-1}dz}{e + fz^n}$ dont il faut trouver l'intégrale. Puisque l'on a ici $\delta = 7$, & $\lambda = 8$, on aura $\frac{Dz^{\frac{7}{8}n-1}dz}{e + fz^n} = \frac{D}{nf}\sqrt[8]{\frac{f}{e}} \times + \frac{8Adx + 8Bxdx}{1 - 2ax + xx} + \frac{8Cdx + 8Dxdx}{1 - 2bx + xx} + \frac{8Edx + 8Fxdx}{1 + 2cx + xx} + \frac{8Gdx + 8Hxdx}{1 + 2hx + xx}$ (par les art. 49. & 65.), a, b, c, h, étant supposées égales aux co-sinus des arcs AB, AD, AF, AH: mais l'intégrale de $\frac{8Adx + 8Bxdx}{1 - 2ax + xx}$ est $-\overline{l^7 + m^7}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \overline{l^7 - m^7}\sqrt{-1}\,(PBO) = \beta$

(BP)

$\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \psi$ (PBO), puisque $-\beta$ est le double du co-sinus de l'arc AH c'est-à-dire de l'arc sept fois plus grand que l'arc AB, & ψ en est le double du sinus. On trouve aussi que $-\delta$ est le double du co-sinus de l'arc sept fois plus grand que AD, & φ le double du sinus, donc $\int \frac{8Cdx + 8Dxdx}{1 - 2bx + xx} = \delta \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \varphi$ (PDO) : pareillement en comptant un arc sept fois plus grand que AF, on trouve que le double de son co-sinus & sinus est δ & φ, ce qui donne $\int \frac{8Edx + 8Fxdx}{1 + 2cx + xx} = -\delta \left\{\frac{FP}{FO}\right\} + \varphi$ (PFO) ; & faisant la même chose pour l'arc AH, on aura l'intégrale totale.

Si la proposée avoit cette forme $\frac{Dz^{\frac{7}{8}n-1}dz}{e - fz^n}$, elle se changeroit (par l'art. 49.) en celle-ci $\frac{D}{nf}\sqrt[8]{\frac{f}{e}} \times$ $+ \frac{8Adx}{1-x} + \frac{8Bdx + 8Cxdx}{1 - 2ax + xx} + \frac{8Ddx}{1+xx} + \frac{8Edx + 8Fxdx}{1 + 2bx + xx}$ $+ \frac{8Gdx}{1+x}$; or par l'art. 65. on aura $A = \frac{1}{8}$; & $G = \frac{1}{8}$, à cause que $\delta - 1 = 6$ est un nombre pair, ce qui donne $\int \frac{8Adx}{1-x} = \int \frac{dx}{1-x} = -1 \left(\frac{AP}{AO}\right)$; & $\int \frac{8Gdx}{1+x}$ $= \int \frac{dx}{1+x} = 1 \left(\frac{IP}{IO}\right)$. On trouvera l'intégrale de $\frac{8Ddx}{1+xx}$ comme dans le premier exemple, ainsi puisque le co-sinus d'un arc sept fois plus grand que AE

eſt nul, & que le ſinus eſt le rayon même dont le double eſt marqué dans les tables par v, qui étant ici négatif donnera $\int \frac{8Ddx}{1+xx} = -v$ (PEO) : on trouvera les intégrales des deux autres différentielles de la même maniére que dans le premier cas, en prenant garde que, a, b, marquent ici les co-ſinus des arcs AC, AG.

Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la grande étendue du dernier Problême, qui eſt telle qu'on pourroit très-facilement pouſſer la recherche de ces ſortes d'intégrales même juſqu'à l'infini.

REMARQUE I.

75. PUISQU'IL eſt clair par la théorie précédente que les différentes intégrales que peut avoir la différentielle générale $\frac{Dz^{\frac{s}{n}-1}dz}{e+fz^n}$ ne contiennent que des logarithmes & des meſures d'angles dont les modules ne ſont que des ſinus ou co-ſinus d'arcs de cercle connus, il ſuit que ſi on peut déterminer la grandeur des modules, & des lignes dont il faut prendre les logarithmes, & des angles qu'il faut meſurer, on pourra par les régles données dans la premiére & ſeconde parties évaluer les intégrales trouvées.

Or la diviſion du cercle faiſant connoître les angles AOB, AOC, AOD, &c. on connoîtra les modules par les tables des ſinus : on trouvera auſſi par

la trigonométrie les lignes BP, CP, &c. & les angles PBO, PCO, &c : car tirant le sinus BN (*fig.* 25. & 26.) puisque OP ou $\sqrt[\lambda]{\frac{fz''}{c}}$ & ON sont connues, on connoîtra PN, & puisque l'angle AOB est connu, on connoîtra aussi son complement NBO, & par le moyen du triangle NBP, on trouvera le côté BP & l'angle NBP, d'où l'on aura l'angle PBO.

REMARQUE II.

76. IL est facile de voir qu'on peut en quelques occasions abréger les expressions des intégrales que donnent les tables, en réduisant à un seul (par l'art. 10.) les termes qui ont le même module : par exemple au lieu $-1\left(\frac{AP}{AO}\right)+1\left(\frac{CP}{CO}\right)$, on peut écrire $1\left(\frac{CP}{AP}\right)$; de même dans le premier cas des formes cinquiéme & sixiéme on aura $-\beta\left(\frac{BP}{BO}\right)+\beta\left(\frac{DP}{DO}\right)=\beta\left(\frac{DP}{BP}\right)$, & $\beta\left(\frac{BP}{BO}\right)-\beta\left(\frac{DP}{DO}\right)=\beta\left(\frac{BP}{DP}\right)=-\beta\left(\frac{DP}{BP}\right)$, & ainsi pour d'autres exemples. De plus puisque dans ces intégrales on trouve que la somme des termes qui marquent des logarithmes est toujours multipliée par la somme des co-sinus positifs & négatifs laquelle (par l'art. 47.) est égale à 0, cela donne encore lieu d'abréger les expressions ; par

exemple l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{n}-1}dz}{e+fz^n}$ contient entr'autres ces termes $-\beta\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma\left\{\frac{DP}{DO}\right\}+1\left\{\frac{FP}{FO}\right\}$: or si on suppose que $\frac{DP}{BP}=Q$ ou $DP=Q\times BP$, & $\frac{FP}{BP}=R$ ou $FP=R\times BP$, on aura $-\beta\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma\left\{\frac{DP}{DO}\right\}+1\left\{\frac{FP}{FO}\right\}=-\beta\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma(Q)+1\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+1(R)$ mais l'article 47 donne $-\beta+\gamma+1=0$, donc $-\beta\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+1\left\{\frac{BP}{BO}\right\}=0$, & par conséquent on aura $-\beta\left\{\frac{BP}{BO}\right\}+\gamma\left\{\frac{DP}{DO}\right\}+1\left\{\frac{FP}{FO}\right\}=\gamma(Q)+1(R)$. On appliquera le même raisonnement aux autres formes. Il faut encore observer que de même qu'on a rendu les intégrales plus concises en réunissant à un seul tous les termes qui expriment des logarithmes & qui ont le même module, on peut aussi trouver moyen de réunir ensemble les angles dont les modules sont les mêmes, & ainsi de diminuer le nombre d'arcs de cercle qui entrent dans les intégrales ; pour cela on va mettre les deux Lemmes suivans.

LEMME V.

77. *ETANT donnés les sinus & co-sinus de deux arcs, trouver le sinus & co-sinus de la différence de ces arcs.*

AYANT décrit du centre O (*fig.* 37.) & du rayon OA une portion de circonférence de cercle ADE, on prendra deux arcs AD, AE, & on tirera les sinus DB, EF, dont EF rencontre le rayon DO en H, on tirera aussi le sinus EG de l'arc DE; cela posé, puisque les sinus DB, EF, & les co-sinus OB, OF, sont donnés, on nommera le rayon OA, r; OB, t; OF, s; DB, p; EF, q; il s'agit de trouver le co-sinus OG & le sinus EG de l'arc DE différence des deux arcs AE, AD: or les triangles semblables OBD, OFH, EGH donneront OB (t). DB (p) :: OF (s) . FH $= \frac{ps}{t}$, & OB (t) . OD (r) :: OF (s) . OH $= \frac{rs}{t}$, & OD (r) . DB (p) :: EH $\left(q - \frac{ps}{t}\right)$. HG $= \frac{pq}{r} - \frac{pps}{rt}$; d'où l'on tire OG $=$ OH $+$ HG $= \frac{rrs + pqt - pps}{rt} = \frac{pq + st}{r}$ à cause que $rr - pp = tt$; on a aussi OD (r) . OB (t) :: EH $\left(q - \frac{ps}{t}\right)$. EG $= \frac{qt - ps}{r}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

78. DE ce que EG $= \frac{qt - ps}{r} = \frac{\text{OB} \times \text{EF}}{\text{OD}} -$

$\frac{OF \times DB}{OD}$, on déduit $OF = \frac{OB \times EF}{DB} - \frac{EG \times OD}{DB}$, ce qu'on a aussi trouvé par induction en transformant la premiére table des formules de l'art. 52. en la seconde, on aura donc $OF = \frac{OB \times OG}{OD} - \frac{DB \times EG}{OD}$. Aussi de ce que $OG = \frac{pq + st}{r} = \frac{DB \times EF}{OD} + \frac{OB \times OF}{OD}$, on tire $EF = \frac{OG \times OD}{DB} - \frac{OB \times OF}{DB}$, ce qu'on a encore trouvé dans la même transformation, & d'une façon toute différente dans l'art. 74 ; on aura donc $EF = \frac{DB \times OG}{OD} + \frac{OB \times EG}{OD}$.

LEMME VI.

79. *ETANT données les tangentes de deux arcs, trouver la tangente de la différence de ces arcs.*

SOIENT AL, AM, (*fig.* 38.) les deux arcs dont on connoît les tangentes AP, AQ, terminées par les rayons OL, OM prolongés : qu'on tire LN tangente de l'arc LM différence des deux arcs AM, AL, & QR parallèle à LN qui rencontre OL prolongée en R, & nommant le rayon OA, r; AP, s; AQ, t; les triangles semblables AOP, PQR, & OLN, ORQ, donneront $OP\ (\sqrt{rr + ss}) . AO\ (r) :: PQ\ (t - s) . QR = \frac{r \times \overline{t - s}}{\sqrt{rr + ss}}$, & $OP\ (\sqrt{rr + ss})$

: AP (s) :: PQ ($t - s$) . RP $= \frac{st - ss}{\sqrt{rr + ss}}$; & ensuite

OR ou OP + PR $\left\{\frac{rr + ts}{\sqrt{rr + ss}}\right\}$. QR $\left\{\frac{r \times \overline{t - s}}{\sqrt{rr + ss}}\right\}$ :: OL (r) . LN $= \frac{rr \times \overline{t - s}}{rr + ts}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

80. On peut se servir de l'un ou l'autre de ces deux Lemmes pour réduire en une somme les angles qui ont le même module ; nous allons faire usage du dernier. Il suit donc que si s marque la tangente d'un arc de cercle dont r est le rayon, & t la tangente d'un arc plus grand, m la tangente de la différence de ces deux arcs ; on aura les deux formules suivantes $m = \frac{rr \times \overline{t - s}}{rr + st}$, $t = \frac{rr \times \overline{m + s}}{rr - ms}$; cela posé, qu'on suppose l'arc AB (*fig.* 25. *&* 26.) égal à l'arc QS, & pour trouver à la fois la somme des deux angles PBO, PSO, qui ont un module commun, on nommera OA, 1 ; OP, x ; ON ou OM, a ; & on réduira premiérement en une somme les deux angles NBO, PBN, (*fig.* 25.) par la seconde formule, on aura donc $rr = 1 - aa$, $m = a$, $s = x - a$; ce qui donnera $t = \frac{\overline{1 - aa} \times x}{1 - ax}$ égale à la tangente de l'angle PBO ; si OP est moindre que ON (*fig.* 26.) on trouvera la tangente de l'angle PBO différence des angles NBO, PBN, par la premiére

formule, dans laquelle on aura $t = a$, $s = a - x$, d'où l'on tire $m = \frac{\overline{1 - aa \times xx}}{1 - ax}$ égale à la tangente de l'angle PBO. On trouvera aussi par la premiére formule la tangente de l'angle PSO, ainsi on aura dans ce cas $t = a + x$, $s = a$, & $\frac{\overline{1 - aa \times xx}}{1 + ax}$ pour la valeur de cette tangente. Ayant donc les tangentes des angles PBO; PSO, on trouvera encore par la seconde formule la tangente de la somme de ces deux angles; ainsi on aura ici $m = \frac{\overline{1 - aa \times xx}}{1 - ax}$, $s = \frac{\overline{1 - aa \times xx}}{1 + ax}$, & la tangente de cette somme sera $\frac{\overline{1 - aa \times 2x}}{1 - xx}$. De cette maniére au lieu de chercher chaque angle séparément, on s'épargnera du travail en cherchant par une seule opération la somme des angles qui ont le même module, laquelle étant trouvée on déterminera par le moyen du module la grandeur de l'arc qui convient à cette somme. On trouvera donc facilement par les tables des sinus & tangentes ce qu'on cherche; car soit L le logarithme de $\frac{\sqrt{1 - aa \times 2x}}{1 - xx}$, & L + 10000000 marquera dans les tables le logarithme de la tangente de la somme des angles PBO, PSO; par conséquent cette somme sera connue.

PROBLEME

PROBLÊME III.

81. *ETANT donnée l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$, *trouver l'ingrale de* $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$, θ *étant un nombre entier positif ou négatif.*

PREMIER CAS.

Lorsque θ *est un nombre entier positif.*

IL faut diviser le numérateur $Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz$ de la proposée par le dénominateur $e+fz^n$, en prenant fz^n pour premier terme du diviseur, & l'on trouvera $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{Dz^{\overline{\theta-1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{f}$ $- \frac{Dez^{\overline{\theta-2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{ff} + \frac{Deez^{\overline{\theta-3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{f^3}$ $- \frac{De^3z^{\overline{\theta-4}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{f^4}$ &c. $\pm \frac{De^\theta z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{f^\theta\times\overline{e+fz^n}}$: il faut continuer les termes de cette suite, jusqu'à ce qu'on trouve que l'exposant de la variable z qui va toujours en diminuant, devient égal à $\frac{\delta}{\lambda}n-1$, c'est-à-dire qu'il faut autant de termes qu'il y a d'unités dans le nombre θ outre le terme $\frac{De^\theta z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{f^\theta\times\overline{e+fz^n}}$ qui,

comme on voit par la nature de la division, sera toujours le dernier ; il faut observer que tous les termes ont alternativement les signes + & —. Maintenant si Q désigne l'intégrale de $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$, l'intégrale totale sera $\frac{Dz^{\overline{\theta-1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\theta-1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n\times f} - \frac{Dez^{\overline{\theta-2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\theta-2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n\times ff}$ $+ \frac{De^2z^{\overline{\theta-3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\theta-3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n\times f^3} - \frac{De^3z^{\overline{\theta-4}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\theta-4}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n\times f^4}$ &c. $\pm \frac{De^\theta}{f^\theta}Q$. Soit donc proposé de trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{4n+\frac{4}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$; l'on aura dans cet exemple $\theta=4$, $\delta=4$, $\lambda=5$, & mettant ces valeurs dans la formule donnée, l'intégrale demandée qui ne doit avoir en tout que cinq termes sera $\frac{5Dz^{\frac{19}{5}n}}{19nf} - \frac{5Dez^{\frac{14}{5}n}}{14nff} + \frac{5De^2z^{\frac{9}{5}n}}{9nf^3} - \frac{5De^3z^{\frac{4}{5}n}}{4nf^4} + \frac{De^4}{f^4}Q$.

Si on avoit $\frac{\delta}{\lambda}=0$, c'est-à-dire, si on cherchoit l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n}$, étant donnée celle de $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n}$; alors on voit que, puisque

les deux derniers termes de la division qu'on a fait ci-dessus doivent avoir z^{n-1} au numérateur, il y aura un terme de moins dans la suite de la division, & par conséquent l'intégrale dans ce cas aura cette forme $\frac{Dz^{\overline{\theta-1}\times n}}{\overline{\theta-1}\times n\times f} - \frac{Dez^{\overline{\theta-2}\times n}}{\overline{\theta-2}\times n\times ff} + \frac{De^2z^{\overline{\theta-3}\times n}}{\overline{\theta-3}\times n\times f^3} - \frac{De^3z^{\overline{\theta-4}\times n}}{\overline{\theta-4}\times n\times f^4}$ &c. $\pm \frac{De^{\theta-1}}{f^{\theta-1}}Q$; Q marque ici l'intégrale de $\frac{z^{n-1}dz}{e+fz^n}$. Ainsi si on demande l'intégrale de $\frac{Dz^{4n-1}dz}{e+fz^n}$, on aura $\theta = 4$, & cette intégrale qui ne doit avoir en tout que quatre termes sera $\frac{Dz^{3n}}{3nf} - \frac{Dez^{2n}}{2nff} + \frac{De^2z^n}{nf^3} - \frac{De^3}{f^3}Q$.

SECOND CAS.

Lorsque θ est un nombre entier négatif.

IL faut encore dans ce cas diviser le numérateur $Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz$ par le dénominatur $e+fz^n$, mais en prenant e pour premier terme du diviseur, & l'on trouvera $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n} = \frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e} - \frac{Dfz^{\overline{\theta+1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{ee} + \frac{Df^2z^{\overline{\theta+2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e^3}$

$$-\frac{Df^3 z^{\overline{\theta+3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e^4}\ \&c.\ \pm\frac{Df^\theta z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e^\theta\times\overline{e+fz^n}},$$

dont l'intégrale sera $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n}\times e}-\frac{Dfz^{\overline{\theta+1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\overline{\theta+1}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}\times ee}$

$+\frac{Df^2 z^{\overline{\theta+2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\overline{\theta+2}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}\times e^3}-\frac{Df^3 z^{\overline{\theta+3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}}{\overline{\overline{\theta+3}\times n+\frac{\delta}{\lambda}n}\times e^4}$ &c. $\pm$ $\frac{Df^\theta}{e^\theta}Q$. On voit que dans ce cas-ci comme dans le précédent l'intégrale aura autant de termes que θ contient d'unités outre le terme $\frac{Df^\theta}{e^\theta}Q$, & que tous les termes auroient par la division alternativement les signes $+$ & $-$; mais parce que la fraction $\frac{\delta}{\lambda}$ est supposée moindre que l'unité, il est évident que l'exposant de z est toujours négatif, & que comme chaque terme est divisé par cet exposant, le signe en sera changé, & ainsi tous les termes auront alternativement les signes $-$ & $+$, excepté le dernier $\frac{Df^\theta}{e^\theta}Q$, qui n'étant point divisé par une quantité négative, ne changera point de signe, c'est-à-dire, qu'il aura dans ce cas le même signe que le terme qui le précéde. Ainsi si on demandoit l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{-3n+\frac{5}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$, on auroit

$\theta = -3$, $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{5}{7}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule, on trouve que l'intégrale cherchée qui doit conſiſter en quatre termes eſt $-\frac{7D}{16nez^{\frac{16}{7}n}} + \frac{7Df}{9nee z^{\frac{9}{7}n}} - \frac{7Dff}{2ne^3 z^{\frac{2}{7}n}} - \frac{Df^3}{e^3}Q$.

Si on avoit encore ici $\frac{\delta}{\lambda} = 0$, il eſt clair que la même formule donneroit l'intégrale demandée pourvû que Q exprimât l'intégrale de la différentielle $\frac{z^{-1}dz}{e+fz^n}$: en rejettant dans ce cas toutes les quantités qui ſont nulles, la formule s'exprimera de cette façon $\frac{Dz^{\theta n}}{\theta ne} - \frac{Dz^{\overline{\theta+1}\times n}}{\overline{\theta+1}\times nee} + \frac{Dz^{\overline{\theta+2}\times n}}{\overline{\theta+2}\times ne^3} - \frac{Dz^{\overline{\theta+3}\times n}}{\overline{\theta+3}\times ne^4}$ &c. $\pm \frac{Df^\theta}{e^\theta}Q$.

Si on demande l'intégrale de $\frac{Dz^{-3n-1}dz}{e+fz^n}$, en ſubſtituant dans la formule -3 au lieu de θ, on trouve $-\frac{D}{3nez^{3n}} + \frac{Df}{2ne^2z^{2n}} - \frac{Dff}{ne^3z^n} - \frac{Df^3}{e^3}Q$.

PROBLÊME IV.

82. *ETANT donnée l'intégrale de la différentielle*

$\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n}$ *trouver l'intégrale de cette autre* $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$.

On supposera $z^n = x$, ce qui donne $z^{n-1}dx = \frac{dx}{n}$, $z^{\theta n-1}dz = \frac{x^{\theta-1}dx}{n}$, & $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}} = \frac{D}{n}\times\frac{x^{\theta+1}dx}{\overline{e+fx}\times\overline{g+hx}}$; & si on suppose $\theta = 1$, on trouve (par l'art. 59.) $\frac{Dz^{n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hx^n}} = \frac{D}{n}\times\frac{dx}{\overline{e+fx}\times\overline{g+hx}}$ $= \frac{f}{fg-eh}\times\frac{Ddx}{n\times\overline{e+fx}} - \frac{h}{fg-eh}\times\frac{Ddx}{n\times\overline{g+hx}}$: pareillement si $\theta = 2$, on aura par le même article $\frac{Dz^{2n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}} = \frac{D}{n}\times\frac{xdx}{\overline{e+fx}\times\overline{g+hx}} = -\frac{e}{fg-eh}\times\frac{Ddx}{n\times\overline{e+fx}} + \frac{g}{fg-eh}\times\frac{Ddx}{n\times\overline{g+hx}}$; & en remettant dans ces différentielles z^n au lieu de x, & $z^{n-1}dz$ au lieu de $\frac{dx}{n}$, & les multipliant par $z^{\frac{\delta}{\lambda}n}$, on trouve $\frac{Dz^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}} = \frac{f}{fg-eh}\times\frac{Dz^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n} - \frac{h}{fg-eh}\times\frac{Dz^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{g+hz^n}$, & $\frac{Dz^{2n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$

$= - \frac{e}{fg - eh} \times \frac{Dz^{n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1} dz}{e + fz^n} + \frac{g}{fg - eh} \times \frac{Dz^{n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1} dz}{g + hz^n}$; si θ est égal à 3, 4, 5, &c. on multipliera cette derniére équation par z^n, z^{2n}, z^{3n}, &c. & l'on trouvera toujours que la proposée est égale à la somme de deux différentielles dont on trouvera les intégrales de la maniére qu'on a enseigné dans le Problême précédent.

On aura surtout ces intégrales très-facilement en se servant des tables construites par le Problême précédent telles que sont les premiéres que nous donne M. SMITH. Ainsi qu'il faille trouver l'intégrale de $\frac{Dz^{3n + \frac{1}{4} n - 1} dz}{\overline{e + fz^n} \times \overline{g + hz^n}}$, on aura $\theta = 3$, $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{4}$, & la proposée sera égale à ces deux autres $- \frac{e}{fg - eh} \times \frac{Dz^{2n + \frac{1}{4} n - 1} dz}{e + fz^n} + \frac{g}{fg - eh} \times \frac{Dz^{2n + \frac{1}{4} n + 1} dz}{g + hz^n}$ qui se rapportent à la forme cinquiéme, par laquelle on trouve $\int - \frac{e}{fg - eh} \times \frac{Dz^{2n + \frac{1}{4} n - 1} dz}{e + fz^n} = - \frac{4Dez^{\frac{5}{4} n}}{5nf \times \overline{fg - eh}} + \frac{4Deez^{\frac{1}{4} n}}{nff \times \overline{fg - eh}} - \frac{4De^3}{nf^3 \times \overline{fg - eh}}$ (1); & par la même en substituant partout, g, h, au lieu

de, e, f, on trouve $\int \frac{g}{fg-eh} \times \frac{Dz^{2n+\frac{1}{4}n-1}dz}{g+hz^n} =$

$$\frac{4Dgz^{\frac{5}{4}n}}{5nh \times \overline{fg-eh}} - \frac{4Dggz^{\frac{1}{4}n}}{nhh \times \overline{fg-eh}} + \frac{4Dg^3}{nh^3 \times \overline{fg-eh}} ②.$$

D'où en prenant la somme on déduit $\frac{4Dz^{\frac{5}{4}n}}{5nfh} -$

$$\frac{4D \times \overline{fg+eh} \times z^{\frac{1}{4}n}}{nffhh} - \frac{4De^3}{nf^3 \times \overline{fg-eh}} ① + \frac{4Dg^3}{nh^3 \times \overline{fg-eh}} ②$$

pour l'intégrale totale de la proposée.

LEMME VII.

83. *ETANT donnée l'intégrale* A *de la différentielle* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$, *trouver l'intégrale de cette autre* $z^{\vartheta n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$, ϑ *représentant un nombre entier positif ou négatif, & δ & μ des nombres quelconques.*

On cherchera premiérement l'intégrale de $z^{n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$, ou $\vartheta = 1$, pour cela on prendra la différence de cette quantité $Mz^{\delta} \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}$ (M est une quantité indéterminée) de laquelle on ôtera la différentielle $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$, ce que donne $\overline{M\delta e-1} \times z^{\delta-1}dz + Mf \times \overline{\delta+n+n\mu} \times z^{n+\delta-1}dz\} \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$. dont l'intégrale est $Mz^{\delta} \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1} - A$: ensuite on supposera le premier terme $M\delta e - 1 = 0$, d'où

d'où l'on tirera $M = \frac{1}{\delta e}$, & mettant cette valeur de M dans le ſecond terme & dans l'intégrale on aura $\int \frac{f}{\delta e} \times \overline{\delta + n + n\mu} \times z^{n+\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu} = \frac{\overline{z^\delta \times e + fz^n}^{\mu+1}}{\delta e} - A$, & par conſéquent $\int z^{n+\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu} = \frac{z^\delta \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}}{f \times \overline{\delta + n + n\mu}} - \frac{\delta e}{f \times \overline{\delta + n + n\mu}} A.$

Maintenant ſi on nomme B cette intégrale qu'on vient de trouver, & qu'on prenne la différentielle de $Mz^{\delta+n} \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}$, en faiſant le calcul comme ci-devant, on trouve $M = \frac{1}{e \times \overline{\delta + n}}$, & $\int z^{2n+\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu} = \frac{z^{\delta+n} \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}}{f \times \overline{\delta + 2n + n\mu}} - \frac{e \times \overline{\delta + n}}{f \times \overline{\delta + 2n + n\mu}} B = C.$

De la même maniére par le moyen de l'intégrale C, & de $Mz^{\delta+2n} \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}$, on trouveroit celle de $z^{3n+\delta-1} dz \times \overline{e + fz}^{\mu}$, & ainſi de ſuite. Même on voit facilement que les intégrales A, B, C, &c. ſont entiérement ſemblables en y ſubſtituant les quantités δ, $\delta + n$, $\delta + 2n$, $\delta + 3n$, &c. lorſqu'elles ſont les expoſans de z dans la quantité $Mz^{\delta n+\delta} \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}$.

Pour trouver l'intégrale de $z^{-n+\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu}$, on prendra la différence de la quantité $Mz^{-n+\delta}$

$\times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}$, & on en ôtera la différentielle donnée $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu}$, ce qui donnera -

$$Me \times \overline{\delta-n} \times z^{-n+\delta-1}dz + Mf \times \overline{\delta+n\mu-1} \times z^{\delta-1}dz \} \times \overline{e+fz^n}^{\mu}.$$

dont l'intégrale est $Mz^{-n+\delta} \times \overline{e+fz}^{\mu+1} - A$; ensuite on supposera $Mf \times \overline{\delta+n\mu-1} = 0$, d'où l'on tire $M = \frac{1}{f \times \overline{\delta+n\mu}}$, & mettant cette valeur de M dans la différentielle & l'intégrale ci-dessus on trouve

$$\int z^{-n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu} = \frac{z^{-n+\delta} \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta-n}} - \frac{f \times \overline{\delta+n\mu}}{e \times \overline{\delta-n}} A.$$

Si on nomme B cette intégrale, & qu'en se servant de la quantité $Mz^{-2n+\delta} \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}$ on fait un calcul semblable à celui qu'on vient de faire, on trouve dans ce cas $M = \frac{1}{\delta-n+n\mu}$, & $\int z^{-2n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu} = \frac{z^{-2n+\delta} \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta-2n}} - \frac{f \times \overline{\delta-n+n\mu}}{e \times \overline{\delta-2n}} B$; & de cette façon chaque intégrale fait découvrir la suivante : de sorte que si, pour abréger on suppose $e+fz^n = R$, $\delta+n+n\mu = p$, $\delta+2n+n\mu = p+n = q$, $\delta+3n+n\mu = q+n = r$, $\delta+4n+n\mu = r+n = s$; & $\delta+n\mu = h$, $\delta-n+n\mu = h-n = k$, $\delta-2n+n\mu = k-n = l$, $\delta-3n+n\mu = l-n = m$, & qu'au lieu de B, C, &c. on remet leurs valeurs, on formera la table suivante qui sera d'usage dans la suite.

9	$z^{\delta n + \delta - 1} dz \times \overline{e + fz^{n}}^{\mu}.$
&c.	
4	$\frac{z^{\delta + 3n} R^{\mu+1}}{fs} - \frac{e \times \overline{\delta + 3n} \times z^{\delta + 2n} R^{\mu+1}}{ffrs}$
	$+ \frac{ee \times \overline{\delta + 2n} \times \overline{\delta + 3n} \times z^{\delta + n} R^{\mu+1}}{f^3 qrs} -$
	$\frac{e^3 \times \overline{\delta + n} \times \overline{\delta + 2n} \times \overline{\delta + 3n} \times z^{\delta} R^{\mu+1}}{f^4 pqrs} +$
	$\frac{\delta e^4 \times \overline{\delta + n} \times \overline{\delta + 2n} \times \overline{\delta + 3n}}{f^4 pqrs} A.$
3	$\frac{z^{\delta + 2n} R^{\mu+1}}{fr} - \frac{e \times \overline{\delta + 2n} \times z^{\delta + n} R^{\mu+1}}{ffqr} +$
	$\frac{ee \times \overline{\delta + n} \times \overline{\delta + 2n} \times z^{\delta} R^{\mu+1}}{f^3 pqr} - \frac{\delta e^3 \times \overline{\delta + n} \times \overline{\delta + 2n}}{f^3 pqr} A.$
2	$\frac{z^{\delta + n} R^{\mu+1}}{fq} - \frac{e \times \overline{\delta + n} \times z^{\delta} R^{\mu+1}}{ffpq} + \frac{\delta ee \times \overline{\delta + n}}{ffpq} A.$
1	$\frac{z^{\delta} R^{\mu+1}}{fp} - \frac{\delta e}{fp} A.$
0	$A.$
−1	$\frac{z^{\delta - n} R^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta - n}} - \frac{fh}{e \times \overline{\delta - n}} A.$
−2	$\frac{z^{\delta - 2n} R^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta - 2n}} - \frac{fkz^{\delta - n} R^{\mu+1}}{ee \times \overline{\delta - n} \times \overline{\delta - 2n}} + \frac{ffhk}{ee \times \overline{\delta - n} \times \overline{\delta - 2n}} A.$
−3	$\frac{z^{\delta - 3n} R^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta - 3n}} - \frac{flz^{\delta - 2n} R^{\mu+1}}{ee \times \overline{\delta - 2n} \times \overline{\delta - 3n}} +$
	$\frac{ffklz^{\delta - n} R^{\mu+1}}{e^3 \times \overline{\delta - n} \times \overline{\delta - 2n} \times \overline{\delta - 3n}} - \frac{f^3 hkl}{e^3 \times \overline{\delta - n} \times \overline{\delta - 2n} \times \overline{\delta - 3n}} A.$
&c.	

LEMME VIII.

84. *ETANT données les intégrales* A, B, *des différentielles* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}^{\mu}$, $z^{n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n+gz}^{\mu}$, *trouver l'intégrale de la différentielle générale* $z^{\vartheta n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}^{\mu}$, ϑ *étant un nombre entier positif ou négatif.*

On commencera par chercher l'intégrale de $z^{2n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$; (on suppose $e+fz^n+gz^{2n}=R$) pour cela on multipliera chacune des deux différentielles données par une quantité indéterminée H & K, & on aura $Hz^{\delta-1}dz \times R^{\mu}$, $Kz^{n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$, dont les intégrales sont $H \times A$, & $K \times B$, ensuite on ôtera ces différentielles de la différentielle de cette quantité $Mz^{\delta} \times R^{\mu+1}$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} M\delta e + Mf \times \overline{\delta+n+n\mu} \times z^n + Mg \times \overline{\delta+2n+n\mu} \times z^{2n} \\ -H - K \times z^n \end{array}\right\} \times R^{\mu} z^{\delta-1}dz$$

& en supposant les deux premiers termes égaux à zero, on tire $M = \frac{H}{\delta e}$, $K = \frac{Hf \times \overline{\delta+n+n\mu}}{\delta e}$; d'où l'on déduira en substituant ces valeurs dans cette derniére différentielle & son intégrale $Mz^{\delta} \times R^{\mu+1} - K \times B - H \times A$, $\int z^{2n+\delta-1}dz \times R^{\mu} =$

$$\frac{z^{\delta} R^{\mu+1}}{g \times \overline{\delta+2n+2n\mu}} - \frac{f \times \overline{\delta+n+n\mu}}{g \times \overline{\delta+2n+2n\mu}} B - \frac{\delta e}{g \times \overline{\delta+2n+2n\mu}} A;$$

il est indifférent, comme on voit, quelle valeur on donne à H.

Par le moyen de cette intégrale, de l'intégrale B, &

de $Mz^{n+\delta} \times R^{\mu+1}$, on trouvera par un calcul tout-à-fait ſemblable à celui qu'on vient de faire, l'intégrale de $z^{3n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$, & ainſi on peut continuer ces intégrales auſſi loin qu'on juge à propos, comme dans le Lemme précédent.

Maintenant ſi δ eſt un nombre négatif, on commencera par chercher l'intégrale de $z^{-n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$, pour cela on prendra la différence de $Mz^{-n+\delta}R^{\mu+1}$, & on en ôtera les deux différentielles $Hz^{\delta-1}dz \times R^{\mu}$, $Kz^{n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} Me \times \overline{\delta - n} \times z^{-n} + Mf \times \overline{\delta + n\mu} + Mg \times \overline{\delta + n + 2n\mu} \times z^{n} \\ \qquad\qquad - H \qquad\qquad - K \times z^{n} \end{array}\right\} \times R^{\mu} z^{\delta-1}dz$$

dont l'intégrale eſt $Mz^{-n+\delta} \times R^{\mu+1} - KB - HA$: on ſuppoſera les deux derniers termes, chacun égal à zero, d'où l'on tirera $M = \frac{H}{f \times \overline{\delta + n\mu}}$, $K = \frac{Hg \times \overline{\delta + n + 2n\mu}}{f \times \overline{\delta + n\mu}}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la différentielle & l'intégrale, on trouve $\int z^{-n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$

$$= \frac{z^{-n+\delta}R^{\mu+1}}{e \times \overline{\delta - n}} - \frac{g \times \overline{\delta + n + 2n\mu}}{e \times \overline{\delta - n}} B - \frac{f \times \overline{\delta + n\mu}}{e \times \overline{\delta - n}} A.$$

Par le moyen de cette intégrale, & de l'intégrale A, & de la quantité $Mz^{-2n+\delta}R^{\mu+1}$, on trouvera celle de $z^{-2n+\delta-1}dz \times R^{\mu}$; & de cette façon on continuera la recherche de ces intégrales, mais pour abréger on ſuppoſera $\delta + n + 2n\mu = h$, $h - n = k$, $k - n = l$, $h + n = s$, $s + n = t$, $t + n = \tau$; & $\delta + n + n\mu = p$, $p + n = q$, $q + n = r$, $p - n = \varkappa$, $\varkappa - n = \lambda$, $\lambda - n = \varpi$; d'où l'on conſtruira la table ſuivante.

ϑ	$z^{\delta n+\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}}^{\mu}$
&c.	
4.	$\frac{z^{2n+\delta}R^{\mu+1}}{g\tau} - \frac{frz^{n+\delta}R^{\mu+1}}{gg\tau t} + \frac{\overline{ffgr-egt\times\overline{\delta+2n}}\times z^{\delta}R^{\mu+1}}{g^{3}st\tau}$
	$-\frac{f^{3}pqr-efgrs\times\overline{\delta+n}-efgpt\times\overline{\delta+2n}}{g^{3}st\tau}\,B +$
	$\frac{\delta eegt\times\overline{\delta+2n}-\delta effqr}{g^{3}st\tau}\,A.$
3.	$\frac{z^{n+\delta}R^{\mu+1}}{gt} - \frac{fgz^{\delta}R^{\mu+1}}{ggst} + \frac{ffpq-egs\times\overline{\delta+n}}{ggst}\,B + \frac{\delta efq}{ggst}\,A.$
2.	$\frac{z^{\delta}R^{\mu+1}}{gs} - \frac{fp}{gs}\,B - \frac{\delta e}{gs}\,A.$
1.	B.
0.	A.
− 1.	$\frac{z^{-n+\delta}R^{\mu+1}}{e\times\overline{\delta-n}} - \frac{gh}{e\times\overline{\delta-n}}\,B - \frac{f\varkappa}{e\times\overline{\delta-n}}\,A.$
− 2.	$\frac{z^{-2n+\delta}R^{\mu+1}}{e\times\overline{\delta-2n}} - \frac{f\lambda z^{-n+\delta}R^{\mu+1}}{ee\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}} + \frac{fgh\lambda}{ee\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}}\,B +$
	$\frac{ff\varkappa\lambda-egk\times\overline{\delta-n}}{ee\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}}\,A.$
− 3.	$\frac{z^{-3n+\delta}R^{\mu+1}}{e\times\overline{\delta-3n}} - \frac{f\varpi z^{-2n+\delta}R^{\mu+1}}{ee\times\overline{\delta-2n}\times\overline{\delta-3n}} +$
	$\frac{ff\lambda\varpi-egl\times\overline{\delta-2n}}{e^{3}\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}\times\overline{\delta-3n}}\,z^{-n+\delta}R^{\mu+1} - \frac{ffgh\lambda\varpi-egghl\times\overline{\delta-2n}}{e^{3}\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}\times\overline{\delta-3n}}\,B$
	$-\frac{f^{3}\varkappa\lambda\varpi-efgk\times\overline{\delta-n}-efgl\varkappa\times\overline{\delta-2n}}{e^{3}\times\overline{\delta-n}\times\overline{\delta-2n}\times\overline{\delta-3n}}\,A.$
&c.	

REMARQUE.

85. On doit obſerver que lorſqu'on a $\vartheta n + \delta = 0$, la table ne donne pas d'abord l'intégrale, à cauſe que les termes en deviennent infinis; dans ce cas il ne faut que changer la différentielle donnée en une autre en ſuppoſant $z^n = x^{-n}$, par exemple ſi on demande l'intégrale de $\frac{z^{-n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, δ étant $= n$, la ſuppoſition de $z^n = x^{-n}$, donnera $\frac{z^{-n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = -\frac{x^{3n-1}dx}{g+fx^n+ex^{2n}}$; or cette derniére différentielle ſe rapporte à la table, & on en trouvera l'intégrale, pourvû que les intégrales de $\frac{x^{n-1}dz}{g+fx^n+ex^{2n}}$, $\frac{x^{2n-1}dx}{g+fx^n+ex^{2n}}$ ſoient données. Ou bien on multipliera la donnée $\frac{z^{-n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, & on la diviſera par z^{-2n}, ce qui donnera $\frac{z^{-3n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}$ qui ſe rapporte à la table, en prenant n pour un expoſant négatif, & $\delta = -n$, & on en trouvera l'intégrale cherchée, pourvû que les intégrales de $\frac{z^{-n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}$, $\frac{z^{-2n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}$ ſoient données. On doit auſſi faire

la même, remarque à l'égard de la table donnée dans le Lemme précédent.

LEMME IX.

86. *ETANT donnée l'intégrale* A *de la différentielle* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu}$, *trouver l'intégrale de la différentielle* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu+\tau}$, δ *&* μ *représentans des nombres quelconques &* τ *un nombre entier positif ou négatif.*

Soit nommée B l'intégrale de $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu+1}$ laquelle on cherchera en premier lieu : on réduira premiérement cette différentielle sous une autre forme telle que $\overline{ez^{\delta-1}dz \mp fz^{\delta+n-1}dz} \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu}$, ensuite on l'ajoutera à la différence de la quantité $Mz^{\delta} \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu+1}$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} M\delta ez^{\delta-1}dz + M \times \overline{\delta f + \overline{\mu+1} \times nf} \times z^{\delta+n-1}dz \\ + ez^{\delta-1}dz + fz^{\delta+n-1}dz \end{array}\right\} \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu}$$

dont l'intégrale est $B + Mz^{\delta} \times \overline{e+fz^{n}}^{\mu+1}$; & pour faire évanouir le terme qui est multiplié par $z^{\delta+n-1}dz$, on supposera $f + M \times \overline{\delta f + \overline{\mu+1} \times nf} = 0$, d'où l'on tire $M = -\frac{1}{\delta+n+n\mu}$, & en substituant cette valeur de M dans la différentielle

&

& son intégrale, l'on trouve $\int \frac{ne + n\mu e}{\delta + n + n\mu} z^{\delta - 1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu} = B - \frac{z^\delta \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}}{\delta + n + n\mu}$; mais puisque $\int z^{\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu} = A$, on déduira $B = \frac{ne + n\mu e}{\delta + n + n\mu} A + \frac{z^\delta \times \overline{e + fz^n}^{\mu+1}}{\delta + n + n\mu} = \frac{ne + n\mu e}{\delta + n + n\mu} A + \frac{ez^\delta + fz^{\delta+n}}{\delta + n + n\mu} \times \overline{e + fz^n}^{\mu}$.

On voit que le calcul est semblable pour les autres cas, où $\tau = 2$, $\tau = 3$, $\tau = 4$, &c. & que par conséquent en substituant successivement les quantités $\mu + 2, \mu + 3, \mu + 4$, &c. on aura $\int z^{\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu+2} = \frac{ne \times \overline{\mu + 2}}{\delta + n \times \overline{\mu + 2}} B + \frac{z^\delta \times \overline{e + fz^n}^{\mu+2}}{\delta + n \times \overline{\mu + 2}}$, &c.

Maintenant pour trouver l'intégrale de $z^{\delta - 1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu + \tau}$ lorque τ est un nombre entier négatif, on nommera B l'intégrale de $z^{\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu-1}$, & on transformera la différentielle $z^{\delta-1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\mu}$ en cette autre $\overline{ez^{\delta-1} dz + fz^{\delta+n-1} dz} \times \overline{e + fz^n}^{\mu-1}$ laquelle on ajoutera à la différence de $Mz^\delta \times \overline{e + fz^n}^{\mu}$ ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} M\delta ez^{\delta-1} dz + Mf \times \overline{\delta + n\mu} \times z^{\delta+n-1} dz \\ + ez^{\delta-1} dz + fz^{\delta+n-1} dz \end{array}\right\} \times \overline{e + fz^n}^{\mu-1},$$

dont l'intégrale eſt $A + Mz^{\delta} \times \overline{e + fz^{n}}^{\mu}$, enſuite faiſant $f + Mf \times \overline{\delta + n\mu} = 0$, on tire $M = -\frac{1}{\delta + n\mu}$, & ſubſtituant cette valeur on trouve $\int z^{\delta - 1} dz \times \overline{e + fz^{n}}^{\mu - 1} = B = -\frac{z^{\delta} \times \overline{e + fz^{n}}^{\mu}}{en\mu} + \frac{\delta + n\mu}{en\mu} A$. On trouvera les intégrales des autres différentielles lorſque $\tau = -2$, $\tau = -3$, &c. en faiſant les ſubſtitutions néceſſaires, de ſorte que ſi on ſuppoſe $\mu + 1 = p$, $\mu + 2 = q$, $\mu + 3 = r$, $\mu + 4 = s$; & $\mu - 1 = h$, $\mu - 2 = k$, $\mu - 3 = m$, on pourra conſtruire la table ſuivante

τ	$z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\mu+\tau}$.
&c.	
4.	$\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+4}}{\delta+ns} + \frac{ensz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+3}}{\overline{\delta+nr} \times \overline{\delta+ns}} + \frac{e^2n^2rsz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+2}}{\overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr} \times \overline{\delta+ns}} + \frac{e^3n^3qrsz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr} \times \overline{\delta+ns}} + \frac{e^4n^4pqrs}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr} \times \overline{\delta+ns}}$ A.
3.	$\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+3}}{\delta+nr} + \frac{enrz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+2}}{\overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr}} + \frac{e^2n^2qrz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr}} + \frac{e^3n^3pqr}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq} \times \overline{\delta+nr}}$ A.
2.	$\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+2}}{\delta+nq} + \frac{enqz^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq}} + \frac{e^2n^2pq}{\overline{\delta+np} \times \overline{\delta+nq}}$ A.
1.	$\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu+1}}{\delta+np} + \frac{enp}{\delta+np}$ A.
0.	A.
−1.	$-\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu}}{enp} + \frac{\delta+n\mu}{enp}$ A.
−2.	$-\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu-1}}{enh} - \frac{\overline{\delta+nh} \times z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu}}{e^2n^2h\mu} + \frac{\overline{\delta+n\mu} \times \overline{\delta+nh}}{e^2n^2h\mu}$ A.
−3.	$-\frac{z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu-2}}{enk} - \frac{\overline{\delta+nk} \times z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu-1}}{e^2n^2hk} - \frac{\overline{\delta+nh} \times \overline{\delta+nk} \times z^\delta \times \overline{e+fz^n}^{\mu}}{e^3n^3hk\mu} + \frac{\overline{\delta+n\mu} \times \overline{\delta+nh} \times \overline{\delta+nk}}{e^3n^3hk\mu}$ A.
&c.	

LEMME X.

87. *ETANT données les intégrales des deux différentielles* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}}^{\mu}$, $z^{\delta+n-1}dz \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}}^{\mu}$, *trouver l'intégrale de la différentielle* $z^{\delta-1}dz \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}}^{\mu+\tau}$, τ *marquant un nombre entier positif ou négatif, ou de cette autre* $z^{\delta+n-1}dz \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}}^{\mu+\tau}$.

PREMIER CAS.

Lorsque τ *est un nombre entier négatif.*

POUR abréger mettant R au lieu de $e+fz^{n}+gz^{2n}$, on multipliera chacune des différentielles données $z^{\delta-1}dz \times R^{\mu}$, $z^{\delta+n-1}dz \times R^{\mu}$, par une quantité indéterminée H & K, & on les réduira à cette forme $\overline{eHz^{\delta-1}dz+fHz^{\delta+n-1}dz+gHz^{\delta+2n-1}dz} \times R^{\mu-1}$, & $\overline{eKz^{\delta+n-1}dz+fKz^{\delta+2n-1}dz+gKz^{\delta+3n-1}dz} \times R^{\mu-1}$; leurs intégrales seront supposées égales à $H \times A$, & $K \times B$, ensuite on prendra les différences des quantités $Mz^{\delta} \times R^{\mu}$, $Nz^{\delta+n} \times R^{\mu}$, lesquelles on ajoûtera aux différentielles précédentes, & la somme sera

$$\left.\begin{array}{l} eH + fH\,z^{n} + gH\,z^{2n} \\ \quad + eK\,z^{n} + fK\,z^{2n} + gK\,z^{3n} \\ \delta eM + \delta fM\,z^{n} + \delta gM\,z^{2n} \\ \quad + \eta\mu fM\,z^{n} + 2\eta\mu gM\,z^{2n} \\ \quad + \delta eN\,z^{n} + \delta fN\,z^{2n} + \delta gN\,z^{3n} \\ \quad + e\eta N\,z^{n} + \eta fN\,z^{2n} + \eta gN\,z^{3n} \\ \qquad + \eta\mu fN + 2\eta\mu gN \end{array}\right\} \times R^{\mu+1} z^{\delta-1} dz$$

& l'intégrale de cette somme est $H \times A + K \times B + Mz^{\delta} R^{\mu} + Nz^{\delta+\eta} R^{\mu}$, maintenant pour trouver l'intégrale de $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu-1}$, on égalera à zero tous les termes de la somme ci-dessus excepté le premier, ce qui donnera les trois équations suivantes

1. $fH + eK + \delta fM + \eta\mu fM + \delta eN + e\eta N = 0.$
2. $gH + fK + \delta gM + 2\eta\mu gM + \delta fN + \eta fN + \eta\mu fN = 0.$
3. $gK + \delta gN + \eta gN + 2\eta\mu gN = 0.$

De la troisiéme équation on tire $N = \frac{-K}{\delta + \eta + 2\eta\mu}$, de la seconde en y mettant la valeur de N, on trouve $H = -\frac{\eta\mu fK}{g \times \overline{\delta + \eta + 2\eta\mu}} - \delta M - 2\eta\mu M$, de la premiére en y substituant les valeurs de N, H, on déduit $M = \frac{\overline{2eg - ff} \times K}{fg \times \overline{\delta + \eta + 2\eta\mu}}$, qu'on mette cette valeur de M dans celle de H, & on aura $H = \frac{\overline{\delta ff - 2\delta eg - 4eg\eta\mu + \eta\mu ff} \times K}{fg \times \overline{\delta + \eta + 2\eta\mu}}$; delà on tire la valeur du premier terme qu'on cherche, sçavoir, $eH + \delta eM = \frac{\overline{e\eta\mu ff - 4ee\eta\mu g} \times K}{fg \times \overline{\delta + \eta + 2\eta\mu}}$, on peut supposer K

égale à l'unité ou à telle autre grandeur qu'on voudra : donc si on met toutes ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, on aura l'intégrale cherchée, nous y laisserons les lettres pour abréger l'expression, ainsi $\int z^{\delta-1} \times R^{\mu-1} = \frac{H \times A + K \times B + Mz^{\delta} R^{\mu} + Nz^{\delta+\eta} R^{\mu}}{eH + \delta eM} = C.$

Pour avoir l'intégrale de $z^{\delta+\eta-1} dz \times R^{\mu-1}$, il faut égaler à zero le premier terme, le troisiéme & quatriéme, & on aura

1. $eH + \delta eM = 0.$
2. $gH + fK + \delta gM + 2\eta\mu gM + \delta fN + \eta fN + \eta\mu fN = 0.$
3. $gK + \delta gN + \eta gN + 2\eta\mu gN = 0.$

De la troisiéme on tire encore $N = \frac{-K}{\delta + \eta + 2\eta\mu}$, & des deux autres $M = \frac{-fK}{2g \times \delta + \eta + 2\eta\mu}$, $H = \frac{\delta fK}{2g \times \delta + \eta + 2\eta\mu}$, d'où l'on déduira la valeur du second terme, qui sera $fH + eK + \delta fM + \eta\mu fM + \delta eN + e\eta N = \frac{\overline{4eg\eta\mu - \eta\mu ff} \times K}{2g \times \delta + \eta + 2\eta\mu}$ que nous nommerons L, on déterminera l'indéterminée K comme on jugera à propos, on aura donc par le moyen de ces valeurs $\int z^{\delta+\eta-1} dz \times R^{\mu-1} = \frac{H \times A + K \times B + Mz^{\delta} R^{\mu} + Nz^{\delta+\eta} R^{\mu}}{L} = D.$

Par le moyen des deux intégrales C & D, on trouvera celles des deux différentielles $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu-2}$, $z^{\delta+\eta-1} dz \times R^{\mu-2}$, le calcul ne différeroit de ce-

lui qu'on vient de faire qu'en ce qu'il faudroit ici se servir des quantités $Mz^{\delta} R^{\mu-1}$, $Nz^{\delta+n} R^{\mu-1}$, & substituer partout $\mu - 1$ au lieu de μ, & C, D, au lieu de A, B, pareillement si on nommoit E & F les intégrales de $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu-2}$, & $z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu-2}$, & qu'on voulût avoir celles de $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu-3}$, $z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu-3}$, il faudroit se servir des quantités $Mz^{\delta} R^{\mu-2}$, $Nz^{\delta+n} R^{\mu-2}$, & substituer dans le calcul ci-dessus E, F, au lieu de A, B, & $\mu - 2$ au lieu de μ, & ainsi on pourra continuer les intégrales tant qu'on juge à propos.

On voit que par le moyen de la somme des différentielles données ci-dessus, on trouveroit aussi les intégrales de $z^{\delta+2n-1} dz \times R^{\mu-1}$, $z^{\delta+3n-1} dz \times R^{\mu-1}$, & ensuite de $z^{\delta+2n-1} dz \times R^{\mu-2}$, $z^{\delta+3n-1} dz \times R^{\mu-2}$, &c. par un calcul semblable à celui qu'on vient d'exposer.

SECOND CAS.

Lorsque τ est un nombre entier positif.

POUR trouver les intégrales de $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu+1}$, $z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu+1}$, on multipliera les deux différentielles $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu}$, $z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu}$, par RR, ou $\overline{e + fz^{n} + gz^{2n}} \times R$, & chacune par une quantité indéterminée H & K, & on les ajoutera aux différences des quantités $Mz^{\delta} \times R^{\mu+2}$, $Nz^{\delta+n} \times R^{\mu+1}$, ce qui donnera, en supposant $\mu + 2 = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} eH + fH\,z^{n} + gH\,z^{2n} \\ \quad + eK\,z^{n} + fK\,z^{2n} + gK z^{3n} \\ \delta eM + \delta fM\,z^{n} + \delta gM\,z^{2n} \\ \quad + \lambda n fM\,z^{n} + 2n\lambda gM\,z^{2n} \\ \quad + \delta eN\,z^{n} + \delta fN\,z^{2n} + \delta gN\,z^{3n} \\ \quad + en N\,z^{n} + nfN\,z^{3n} + ngN\,z^{3n} \\ \qquad\qquad + n\lambda fN + 2n\lambda gN \end{array}\right\} \times R^{\mu+1} z^{\delta-1} dz$$

& en ajoutant ensemble les intégrales, la somme sera $H \times A \times RR + K \times B \times RR + Mz^{\delta} \times R^{\mu+2} + Nz^{\delta+n} \times R^{\mu+2}$.

Mais puisque cette somme de différentielles se trouve la même que celle qu'on avoit dans le premier cas, excepté qu'il y a ici $\mu + 2$ ou le premier cas avoit μ, il n'y aura d'autre changement à faire dans les valeurs de H, M, N, que de mettre $\mu + 2$ à la place de μ, ce qui étant supposé on aura

$$\int z^{\delta-1} dz \times R^{\mu+1} = \frac{H \times A \times RR + K \times B \times RR + Mz^{\delta} \times R^{\mu+2} + Nz^{\delta+n} \times R^{\mu+2}}{eH + \delta eM}$$

$$\int z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu+1} = \frac{H \times A \times RR + K \times B \times RR + Mz^{\delta} \times R^{\mu+2} + Nz^{\delta+n} \times R^{\mu+2}}{L}$$

De la même maniére qu'on a trouvé ces deux intégrales, on trouvera aussi par leur moyen celles de $z^{\delta-1} dz \times R^{\mu+2}$, $z^{\delta+n-1} dz \times R^{\mu+2}$, & ainsi de suite. Nous ne mettrons point une table de ces sortes d'intégrales, comme on a fait dans les trois Lemmes précédens, parce que les formules en seroient trop compliquées.

PROBLEME

PROBLÈME V.

88. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $z^{\theta n-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}$ *: on suppose que* θ *est un nombre entier positif ou négatif, & π un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif.*

Il faut supposer $e+fz^n = x^n$, & l'on déduira

$$\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}} = x^{\frac{1}{\pi}n},\ z^n = \frac{x^n-e}{f},\ z^{\theta n} = \frac{\overline{x^n-e}^{\theta}}{f^{\theta}},$$

$$z^{\theta n-1}dz = \frac{x^{n-1}dx}{f^{\theta}} \times \overline{x^n-e}^{\theta-1}, \text{ ce qui donne}$$

$$z^{\theta n-1}dz \times \overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}} = \frac{x^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx}{f^{\theta}} \times \overline{x^n-e}^{\theta-1} :$$

d'où il est clair que si θ est égal à un des nombres de cette suite 1, 2, 3, 4, &c. on trouvera exactement l'intégrale demandée ; mais si θ marque un des nombres de cette autre suite, 0, -1, -2, -3, -4, alors l'intégrale dépendra des sections coniques, & on la trouvera par les régles déja données : car si $\theta = 0$, la proposée est égale à celle-ci $\frac{x^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx}{x^n-e}$, dont l'intégrale se trouve par l'art. 81 ; & si θ est égal à -1, -2, &c. la proposée sera égale à $\frac{fx^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx}{\overline{x^n-e}^2}$, ou $\frac{ffx^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx}{\overline{x^n-e}^3}$, ou &c. dont les intégrales se

trouvent par l'art. 81, & les formules de l'art. 86. On trouvera plus promptement ces intégrales par les tables qu'on auroit construit par l'art. 81, telles que celles de M. SMITH. Pour faciliter davantage les régles d'où dépendent la recherche de ces intégrales, on apportera ici deux ou trois exemples.

I. Soit proposé de trouver l'intégrale de cette différentielle $Dz^{2n-1}dz\sqrt{e+fz^n}$: dans ce cas on a $\theta = 2$, & $\pi = 2$, $\sqrt{e+fz^n} = x^{\frac{n}{2}}$, & la proposée égale à celle-ci $\frac{Dx^{\frac{3}{2}n-1}dx}{ff} \times \overline{x^n - e}$, ou $\frac{Dx^{\frac{5}{2}n-1}dx}{ff} - \frac{Dex^{\frac{3}{2}n-1}dx}{ff}$, on en aura donc une intégrale exacte qui est $\frac{2Dx^{\frac{5}{2}n}}{5nff} - \frac{2Dx^{\frac{3}{2}n}}{3nff} = \frac{6Dx^{2n} - 10Dx^n}{15nff}x^{\frac{n}{2}}$, laquelle, si on y substitue les valeurs de $x^{\frac{n}{2}}$, x^n, x^{2n}, se change en $\frac{-4ee + 2efz^n + 6ffz^{2n}}{15nff}D\sqrt{e+fz^n}$.

II. Si on demandoit l'intégrale de $\frac{Dz^{-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$, l'on auroit $\theta = 0$, $\pi = -3$, $\sqrt[3]{e+fz^n} = x^{\frac{1}{3}n}$, & $\frac{Dz^{-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}} = \frac{Dx^{\frac{2}{3}n-1}dz}{x^n - e}$; pour en trouver l'intégrale, on aura recours à la quatriéme forme des tables, dans laquelle on substituera $-e$ à la place de e, & 1 à la

place de f, & prenant le second cas à cause de $x^n - e$, on trouve OP . OA :: $\sqrt[3]{e + fz^n}$. $\sqrt[3]{e}$, & l'intégrale demandée $-\frac{D}{n}\sqrt[3]{\frac{1}{e}} \times -1 \left\{\frac{AP}{AO}\right\} + \beta \left\{\frac{CP}{CO}\right\}$ $+ \psi$ (PCO).

III. Soit maintenant proposée la différentielle $\frac{Dz^{-3n-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$, qui par ce Problême est égale à cette autre $\frac{Df^3 x^{\frac{2}{3}n-1}dx}{\overline{x^n - e}^4}$; pour en avoir l'intégrale on la rapportera à la table de l'art. 86, dans laquelle on voit qu'on aura $A = \int \frac{x^{\frac{2}{3}n-1}dx}{x^n - e}$ qui est connue par l'exemple précédent, & $\mu = -1$, $\tau = -3$, $\delta = \frac{2}{3}n$, $f = 1$, $e = -e$, $h = -2$, $k = -3$, & prenant l'intégrale par la formule qui répond à $\tau = -3$, on la trouve égale à $-\frac{Df^3 x^{\frac{2}{3}n}}{3ne \times \overline{x^n - e}^3} + \frac{7Df^3 x^{\frac{2}{3}n}}{18ne^2 \times \overline{x^n - e}^2} - \frac{14Df^3 x^{\frac{2}{3}n}}{27ne^3 \times \overline{x^n - e}} - \frac{14Df^3}{81e^3}A$; mais puisque $e + fz^n = x^n$, $\overline{e + fz^n}^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2n}{3}}$ $x^n - e = fz^n$, en remettant ces valeurs, l'intégrale cherchée est $\frac{-18ee + 21efz^n - 28ffz^{2n}}{54nef^3 z^{3n}}$ $\times D \times \overline{e + fz^n}^{\frac{n}{3}} - \frac{14Df^3}{81e^3}A$.

Delà on voit qu'on pourroit construire des tables

fort étendues de ces sortes de différentielles & de leurs intégrales.

COROLLAIRE.

89. Si la différentielle proposée dans le Problême étoit multipliée ou divisée par une autre quantité telle que $g + hz^n$, on en trouveroit encore l'intégrale : pour la multiplication il n'y peut avoir aucune difficulté, car $z^{\theta n - 1} dz \times \overline{g + hz^n} \times \overline{e + fx^n}^{\frac{1}{\pi}}$ $= \overline{gz^{\theta n - 1} dz + hz^{\theta n + n - 1} dz} \times \overline{e + fz^n}^{\frac{1}{\pi}}$, or cette différentielle a la même forme que celle du Problême, donc on trouvera l'intégrale de la maniére qu'on y a enseigné. Si la proposée étoit $\frac{z^{\theta n - 1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\frac{1}{\pi}}}{g + hz^n}$, puisque par la supposition du Problême on a $z^n = \frac{x^n - e}{f}$, on aura $g + hz^n = \frac{fg - eh + hx^n}{f} = \frac{p + hx^n}{f}$ en mettant p pour $fg - eh$, ce qui donne $\frac{z^{\theta n - 1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\frac{1}{\pi}}}{g + hz^n} = \frac{x^{n + \frac{1}{\pi} n - 1} dx}{f^{\theta - 1} \times \overline{p + hx^n}} \times \overline{x^n - e}^{\theta - 1}$: ainsi si on se propose de chercher l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{-n-1} dz}{\overline{g + hz^n} \sqrt[3]{e + fz^n}}$, on la changera en cette autre $\frac{Dffx^{\frac{2}{3}n - 1} dx}{\overline{p + hx^n} \times \overline{x^n - e}^2}$: or par l'art.

ticle 68. on a $\frac{1}{\overline{p+hx^n} \times \overline{x^n-e}^2} = \frac{hh}{ffgg \times \overline{p+hx^n}} + \frac{fg+eh-hx^n}{ffgg \times \overline{x^n-e}^2}$, donc $\frac{Dffx^{\frac{2}{3}n-1}dx}{\overline{p+hx^n} \times \overline{x^n-e}^2} = \frac{Dhhx^{\frac{2}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{p+hx^n}} + \frac{\overline{fg+eh} \times Dx^{\frac{2}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{x^n-e}^2} - \frac{Dhx^{\frac{5}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{x^n-e}^2}$, & si on se sert des premiéres tables de M. SMITH, on trouvera par la quatriéme forme $\int \frac{Dhhx^{\frac{2}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{p+hx^n}} = \frac{Dh\sqrt{h}}{ngg\sqrt{p}} \times - \beta \left\{\frac{BP}{BO}\right\} - 1 \left\{\frac{DP}{DO}\right\} + \psi\,(PBO)$; & si on nomme A l'intégrale de $\frac{x^{\frac{2}{3}n-1}dx}{x^n-e}$ qu'on trouve par le second cas de la même forme, on aura par l'art. 86. $\int \frac{\overline{fg+eh} \times Dx^{\frac{2}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{x^n-e}^2} = -\frac{\overline{fg+eh} \times Dx^{\frac{2}{3}n}}{negg \times \overline{x^n-e}} - \frac{\overline{fg+eh} \times D}{3egg}A$: pareillement puisque par la table de l'article 83, ou par la quatriéme forme on trouve $\int \frac{x^{\frac{5}{3}n-1}dx}{x^n-e} = \frac{3x^{\frac{2}{3}n}}{2n} + e \times A$, on aura $-\int \frac{Dhx^{\frac{5}{3}n-1}dx}{gg \times \overline{x^n-e}^2} = \frac{Dhx^{\frac{5}{3}n}}{negg \times \overline{x^n-e}} - \frac{Dhx^{\frac{2}{3}n}}{negg} - \frac{2Dh}{3gg}A$; en prenant la somme de ces intégrales, & y substituant au lieu de $x^{\frac{2}{3}n}$, $x^{\frac{5}{3}n}$, x^n-e, leurs valeurs $\overline{e+fz^n}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{e+fz^n}^{\frac{5}{3}}$, fz^n, on trouve en mettant Q pour l'intégrale de

$\frac{x^{\frac{2}{3}n-1}dx}{p+hx^n}$, $-\frac{D\times\overline{e+fz^n}^{\frac{2}{3}}}{negz^n}+\frac{Dhh}{gg}Q-\frac{\overline{fg+3eh}\times D}{3egg}A$ pour l'intégrale de $\frac{Dz^{-n-1}dz}{\overline{g+hz^n}\sqrt[3]{e+fz^n}}$. On pourroit encore par un calcul semblable trouver les intégrales de ces autres différentielles $\frac{z^{\theta n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}}{\overline{g+hz^n}^2}$, $\frac{z^{\theta n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}}{\overline{g+hz^n}^3}$, &c.

PROBLÊME VI.

20. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}$ *ou de cette autre* $Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}$, θ *marquant un nombre entier positif ou négatif, & $\frac{\delta}{\lambda}$, $\frac{1}{\pi}$, des fractions.*

On supposera $\frac{e+fz^n}{z^n}=x^n$, ce qui donnera $z^n=\frac{e}{x^n-f}$, $e+fz^n=\frac{ex^n}{x^n-f}$, $z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz=-\frac{e^{\frac{\delta}{\lambda}}x^{n-1}dz}{\overline{x^n-f}^{\frac{\delta}{\lambda}+1}}$, d'où l'on tire $Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}=-\frac{e^{\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\pi}}Dx^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx}{\overline{x^n-f}^{\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\pi}+1}}$, & $Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz\times\overline{e+fz^n}^{\frac{1}{\pi}}$

$= - \frac{e^{\theta + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi}} D x^{\theta + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi} n - 1} dx}{\overline{x^n - f}^{\theta + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi} + 1}}$; d'où il eſt clair que ſi $\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi}$ eſt égal à un nombre entier poſitif ou négatif, on trouvera toujours l'intégrale demandée, ou exactement lorſque $\theta + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi}$ eſt égal à un nombre de cette ſuite $-1, -2, -3, -4$, &c. ou par les logarithmes & arcs de cercle lorſque $\theta + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi}$ marque un nombre de cette autre ſuite, $0, 1, 2, 3$, &c.

Par exemple qu'on veuille avoir l'intégrale de la différentielle $\frac{D z^{\frac{1}{4} n - 1} dz}{\sqrt[4]{e + f z^n}}$; dans ce cas on a $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{4}$, $\theta = 0$, $\pi = -4$, $\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\pi} = 0$, & la propoſée égale à cette autre $- \frac{D x^{\frac{3}{4} n - 1} dx}{\overline{x^n - f}}$, dont on trouvera facilement l'intégrale par les régles qu'on a donné ci-devant, ou par le ſecond Cas de la ſixiéme forme des tables de M. SMITH.

COROLLAIRE

91. En ſuivant la même méthode & employant le ſecours de l'art. 86. on trouvera les intégrales des différentielles $D z^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1} dz \times \overline{e + f z^n}^{\frac{1}{\pi} + 1}$,

$Dz^{\theta n + \frac{1}{\pi} n - 1} dz \times \overline{e + fz^n}^{\frac{1}{\pi} + 2}$, &c. Et si la proposée étoit multipliée ou divisée par une autre quantité telle que $g + hz^n$, on en trouveroit l'intégrale de la maniére qu'on a enseigné dans le Corollaire du Problême précédent.

PROBLÊME VII.

92. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $Dz^{\theta n - 1} dz \times \overline{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}\Big|^{\frac{1}{\pi}}$, θ *étant un nombre entier positif ou négatif, & $\frac{1}{\pi}$ une fraction quelconque.*

On supposera $\frac{e + fz^n}{g + hz^n} = x^n$, d'où l'on tirera $z^n = \frac{e - gx^n}{hx^n - f}$, & $z^{\theta n - 1} dz = \frac{\overline{fg - eh} \times x^{n-1} dx \times \overline{e - gx^n}^{\theta - 1}}{\overline{hx^n - f}^{\theta + 1}}$;

& par conséquent $Dz^{\theta n - 1} dz \times \overline{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}\Big|^{\frac{1}{\pi}} = \frac{\overline{fg - eh} \times Dx^{n + \frac{1}{\pi} n - 1} dx \times \overline{e - gx^n}^{\theta - 1}}{\overline{hx^n - f}^{\theta + 1}}$; ainsi la proposée est réduite à la forme qu'éxigent les principes déja posés. Qu'on demande, par exemple, l'intégrale de la différentielle $Dz^{-1} dz \sqrt[4]{\frac{e + fz^n}{g + hz^n}}$, on aura $\theta = 0$, $\pi = 4$, & la donnée égale à $\frac{\overline{fg - eg} \times Dz^{n + \frac{1}{4} n - 1} dz}{\overline{hx^n - f} \times \overline{e - gx^n}}$;

on décomposera (par l'art. 59.) cette différentielle en ces deux autres $-\frac{hDx^{n+\frac{1}{4}n-1}dx}{hx^n-f}-\frac{gDx^{n+\frac{1}{4}n-1}dx}{e-gx^n}$: or on trouvera facilement les intégrales de ces deux différentielles par les art. 74 & 81, ou bien par la cinquiéme forme des tables, & la somme sera la requise.

Si outre cela la différentielle $Dz^{\theta n-1}dz \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}\Big|^{\frac{1}{\pi}}$ étoit multipliée par une quantité telle que $\overline{k+lz^n}^{\mu}$, l'exposant μ étant un nombre entier positif ou négatif, puisque $z^n=\frac{e-gx^n}{hx^n-f}$, on auroit $k+lz^n=\frac{el-fk+hkx^n-glx^n}{hx^n-f}$, & en supposant $el-fk=p$, $hk-gl=q$, $\overline{k+lz^n}^{\mu}=\frac{\overline{p+qx^n}^{\mu}}{\overline{hx+f}^{n\mu}}$, ce qui donne $Dz^{\theta n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\mu} \times \overline{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}\Big|^{\frac{1}{\pi}} = \frac{\overline{fg-eh} \times Dx^{n+\frac{1}{\pi}n-1}dx \times \overline{e-gx^n}^{\theta-1} \times \overline{p+qx^n}^{\mu}}{\overline{hx^n-f}^{\theta+\mu+1}}$, donc la proposée par cette réduction se trouve comprise dans l'étendue de la théorie précédente, & par conséquent assujettie à ses calculs.

Des différentielles trinomes.

PROBLÊME VIII.

93. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, θ *étant un nombre entier positif ou négatif.*

On a trouvé (art. 39.) en supposant $z^n = x^{\frac{n}{2}} - \frac{\frac{1}{2}f}{g}$, $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{D}{2} \times \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n}$ dont on y a aussi déterminé l'intégrale ; on la trouveroit très-facilement par la seconde forme des tables, car en y substituant, $\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}$, g, au lieu de, e, f, on auroit $\frac{D}{2n}\sqrt{\frac{1}{eg-\frac{1}{4}ff}} \times \downarrow$ (PBO) pour son intégrale lorsque $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg, OP étant à OA, comme $\frac{1}{2}f+gz^n$ à $\sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$; & $-\frac{D}{2n}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ff-eg}} \times 1 \left\{\frac{CP}{AP}\right\}$ lorsque $\frac{1}{4}ff$ est plus grand que eg, OP étant à OA, comme $\frac{1}{2}f+gz^n$ à $\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$. Ensuite si $\theta = 2$, on aura $\frac{Dz^{2n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{D}{2} \times \frac{x^{n-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n} - \frac{\frac{1}{2}fD}{2g}$

$\times \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n}$, mais par la premiére forme on a $\int \frac{D}{2} \times \frac{x^{n-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n} = \frac{D}{2ng}\left\{\frac{BP}{BO}\right\}$, OP étant à OA comme x^n à $\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{gg}$, ou comme $\frac{\frac{1}{2}f}{g}+z^n$ à $\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{gg}$, donc $\frac{D}{2ng}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} = \frac{D}{2ng}\left\{\frac{g \times \overline{e+fz^n+gz^{2n}}}{eg-\frac{1}{4}ff}\right\}$ ou plûtôt $= \frac{D}{2ng}\left\{\frac{e+fz^n+gz^{2n}}{e}\right\}$ dans la ſuppoſition que cette intégrale s'évanouit lorſque $z^n = 0$; l'intégrale de $\frac{\frac{1}{2}fD}{2g} \times \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{\frac{eg-\frac{1}{4}ff}{g}+gx^n}$ ſe trouve comme ci-devant. Pour trouver l'intégrale de la propoſée lorſque θ eſt un nombre poſitif plus grand que 2, on diviſera le numérateur par le dénominateur en prenant z^{2n} pour premier terme du diviſeur, & on continuera la diviſion juſqu'à ce qu'on ait réduit l'expoſant de z à $2n-1$, ce qui étant fait on prendra l'intégrale de chaque terme, & la ſomme ſera l'intégrale cherchée: on trouveroit encore facilement ces intégrales par la table qu'on a donnée dans l'article 84.

Maintenant ſi θ eſt égal à 0, ou à un nombre négatif, on ſuppoſera $z^n = \frac{1}{u^n}$, ce qui donnera

$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fx^n+gz^{2n}} = -\frac{Du^{2n-\theta n-1}du}{g+fu^n+eu^{2n}}$, or l'exposant $2n-\theta n-1$ est nécessairement positif, & par conséquent la proposée se rapporte au cas précédent. On trouvera aussi ces intégrales très-commodément de la maniére suivante : on cherchera premiérement l'intégrale de $\frac{Dz^{-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, ce qui se fait en multipliant le numérateur & le dénominateur de cette différentielle par z^{-2n}, ce qui donnera $\frac{Dz^{-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{Dz^{-2n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}$; or cette différentielle a la même forme que cette autre $\frac{Dz^{2n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ qu'on a considéré dans le premier cas, toute la différence est que l'exposant de positif est changé en négatif, l'intégrale donc dans ce cas sera semblable à celle du cas précédent, on aura donc $\int\frac{Dz^{-2n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}} = -\frac{D}{2ne}\left\{\frac{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}{g}\right\}+\frac{Df}{2ne}A$, OP étant à OA, comme $\frac{1}{2}f+ez^{-n}$ à $\sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$; & $A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{eg-\frac{1}{4}ff}}\times\downarrow(PBO)$, ou $= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ff-eg}}\left\{\frac{CP}{AP}\right\}$. Par la même raison si on suppose $\int\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{D}{n}B$, on aura $\int\frac{Dz^{n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}} = -\frac{D}{n}A$; qu'on

multiplie par z^{-2n} le numérateur & le dénominateur de la différentielle $\frac{Dz^{n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ & on aura $\frac{Dz^{-n-1}dz}{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}$ dont l'intégrale demeure égale à $\frac{D}{n}B$; par conséquent $\frac{D}{n}B = -\frac{D}{n}A$, & $A = -B$, d'où l'on déduit $\int\frac{Dz^{-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = -\frac{D}{2ne}\left\{\frac{g+fz^{-n}+ez^{-2n}}{g}\right\} - \frac{Df}{2ne}B = -\frac{D}{2ne}\left\{\frac{e+fz^n+gz^{2n}}{gz^{2n}}\right\} - \frac{Df}{2ne}B$, OP étant à OA, comme $\frac{1}{2}f+gz^n$ à $\sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$, de même que dans le premier cas.

On trouvera par la même méthode les intégrales des autres différentielles lorsque θ est un nombre négatif : où si l'on aime mieux, on les trouvera par la division faite comme dans le premier cas mais en prenant ici e pour premier terme du diviseur. De cette maniére on pourroit construire une table de ces sortes d'intégrales telle que la forme 29me. de M. SMITH, & qui seroit d'un grand avantage pour la construction de plusieurs autres, comme on verra ci-après.

COROLLAIRE.

94. ON peut rapporter à ce Problême la différen-

tielle $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$; car supposant $k+lz^n = x^n$, on déduit $z^n = \frac{x^n-k}{l}$, $z^{\theta n-1}dz = \frac{x^{n-1}dx}{l^\theta}\times\overline{x^n-k}^{\theta-1}$, $e+fz^n+gz^{2n} = \frac{ell-fkl+gkk+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}}{ll}$, donc

$$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}} = \frac{Dl^{2-\theta}x^{-1}dx\times\overline{x^n-k}^{\theta-1}}{ell-fkl+gkk+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}};$$

par conséquent si θ est un nombre entier positif, cette différentielle sera semblable à celle proposée dans le Lemme précédent, ainsi mettant, $ell-fkl+gkk$, $fl-2gk$, au lieu de, e, f, on aura ici OP. OA :: $\frac{1}{2}fl-gk+gx^n.\sqrt{\overline{\frac{1}{2}fl-gk}^2-egll+fgkl+ggkk}$ :: $\frac{1}{2}f+gz^n.\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$, & OP, OA :: $\frac{1}{2}f+gz^n.\sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$, en remettant $k+lz^n$ au lieu de x^n; & les intégrales se tirent de la forme 29. Qu'on demande l'intégrale de $\frac{Dz^{n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$, on aura $\theta=1$, & supposant $t=ell-fkl+gkk$, la proposée se changera en cette autre $\frac{Dlx^{-1}dx}{t+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}}$ dont l'intégrale se trouve égale à $-\frac{Dl}{2nt}\left\{\frac{t+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}}{gx^{2n}}\right\}$ $-\frac{Dfl-2Dgk}{2nt}$ ① $=-\frac{Dl}{2nt}\left\{\frac{ll\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}}{g\times\overline{k+lz^n}^2}\right\}-$

$\frac{Dfl - 2Dgk}{2nt}$ ①, on ne doit mettre $\frac{ll \times \overline{e + fz^n + gz^{2n}}}{g \times \overline{k + lz^n}^2}$ que dans la supposition que l'intégrale devient nulle lorsque $x^n = \infty$, ou $\frac{1}{x^n} = 0$; mais si on veut que l'intégrale s'évanouisse lorsque $z^n = 0$, on voit qu'il faudroit mettre $\frac{kk \times \overline{e + fz^n + gz^{2n}}}{e \times \overline{k + lz^n}^2}$.

Si θ est égal à 0, ou à un nombre entier négatif, il n'y a qu'à supposer $k + lz^n = \frac{1}{x^n}$, & on trouvera

$$\frac{Dz^{\theta n - 1}dz}{\overline{e + fz^n + gz^{2n}} \times \overline{k + lz^n}} = -\frac{Dlx^{2n-1}dx \times \overline{\frac{1}{lx^n} - \frac{k}{l}}\Big|^{\theta - 1}}{g + flx^n - 2gkx^n + tx^{2n}}:$$

or cette différentielle se rapporte à ce dernier Problême; donc &c.

On pourroit encore trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\theta n - 1}dz}{\overline{e + fz^n + gz^{2n}} \times \overline{k + lz^n}}$ en la réduisant en deux autres par l'article 64, qui auroit par là une forme plus simple.

REMARQUE.

IL paroît par ce qui a été dit qu'il n'est pas difficile de trouver l'intégrale d'une différentielle trinome telle que $\frac{Dz^{\theta n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}}$, θ étant un nombre entier, parce qu'on peut la réduire en une autre qui n'est que binome; mais lorsque la proposée est de cette

nature $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ étant une fraction moindre que l'unité, alors on ne voit pas si facilement de quelle maniére il en faut découvrir l'intégrale, parce que la méthode donnée dans le dernier Problême ne peut être d'usage ici. Néanmoins dans le cas où la quantité $\frac{1}{4}ff$ surpasse eg, on verra que la proposée peut être réduite en deux binomes, ce qui donnera l'intégrale demandée : mais si $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg, cette méthode n'aura même plus lieu, puisque la quantité $\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$ qui entre dans toutes ces intégrales devenant dans ce cas impossible, les intégrales seront aussi impossibles. C'est pour remédier à cet inconvénient que M. Côtes fit ses efforts pour trouver moyen de décomposer la différentielle $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ en plusieurs différentielles trinomes, ce qu'il exécuta en effet, mais sa méthode fut restreinte aux cas où λ marqueroit un des nombres de cette suite, 2, 4, 8, 16, &c. M. de Moivre dans la suite étendit cette théorie plus loin, & trouva une méthode générale qui donnât l'intégrale de la proposée, λ marquant un nombre entier quelconque : on verra que cette méthode est semblable à celle dont on s'est servi pour les binomes. Nous donnerons premiérement la méthode de M. Côtes, étant celle qu'a suivi M. Smith dans la construction des tables ; & ensuite nous

nous tâcherons de développer celle que M. DE MOIVRE a indiquée.

PROBLÊME IX.

95. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ *étant une fraction positive moindre que l'unité.*

PREMIER CAS.

Lorsque $\frac{1}{4}ff$ *est une quantité plus grande que* eg.

ON supposera $e+fz^n+gz^{2n}=\overline{p+\sqrt{g}\times z^n}\times\overline{q+\sqrt{g}\times z^n}$, ou plutôt pour se débarasser des quantités incommensurables, on supposera $eg+fgz^n+ggz^{2n}=\overline{p+gz^n}\times\overline{q+gz^n}=pq+pgz^n+qgz^n+ggz^{2n}$, d'où par la comparaison des termes on tire $pq=eg$, $p+q=f$, ce qui donne $p=\frac{1}{2}f+\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$, $q=\frac{1}{2}f-\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$. Ensuite on supposera $\frac{g}{eg+fgz^n+ggz^{2n}}=\frac{A}{p+gz^n}+\frac{B}{q+gz^n}$, ou, en réduisant les deux fractions à une seule, $\frac{Aq+Bp+Agz^n+Bgz^n}{\overline{p+gz^n}\times\overline{q+gz^n}}$; ainsi pour déterminer les quantités A & B, on voit qu'il faudra mettre $Aq+Bp=g$, $Ag+Bg=0$, d'où l'on déduit $A=\frac{g}{q-p}$, $B=$

$\frac{g}{p-q}$, ce qui donne $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{g}{q-p} \times \frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{p+gz^n} + \frac{g}{p-q} \times \frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{q+gz^n}$; or ces différentielles se rapportant à la partie de la théorie déja suffisamment expliquée, on en trouvera les intégrales sans aucune peine par les premiéres tables.

SECOND CAS.

Lorsque $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg, & λ égal à un des nombres de cette suite, 2, 4, 8, 16, &c.

Qu'on suppose $\sqrt[\lambda]{z^n} = x^n$, & on aura $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{\lambda Dx^{\delta n-1}dx}{e+fx^{\lambda n}+gx^{2\lambda n}}$; maintenant on commencera par la différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, laquelle se change en cette autre $\frac{2Dx^{n-1}dx}{e+fx^{2n}+gx^{4n}}$; ensuite on supposera $eg + fgx^{2n} + ggx^{4n} = \overline{p+qx^n+gx^{2n}} \times \overline{r+sx^n+gx^{2n}} = pr + qrx^n + grx^{2n} + psx^n + gsx^{2n} + gsx^{3n} + pgx^{2n} + gqx^{3n} + ggx^{4n}$, & par la comparaison des termes, on trouve $pr = eg$, $qr + ps = 0$, $gr + qs + pg = fg$, $gs + gq = 0$; par la derniére de ces équations on trouve $q = -s$, &

par la ſeconde $p = r$, donc par la premiére $r = \sqrt{eg}$, & par la troiſiéme $s = \sqrt{-fg + 2\sqrt{eg^3}}$; ces valeurs de r & s étant ainſi déterminées, on a $eg + fgx^{2n} + ggx^{4n} = \overline{r + sx^n + gx^{2n}} \times \overline{r - sx^n + gx^{2n}}$, enſuite on ſuppoſera $\frac{g}{eg + fgx^{2n} + ggx^{4n}} = \frac{A + Bx^n}{r + sx^n + gx^{2n}} + \frac{C + Ex^n}{r - sx^n + gx^{2n}} = Ar - Asx^n + Agx^{2n}$

$$+ Brx^n - Bsx^{2n} + Bgx^{3n}$$
$$Cr + Csx^n + Cgx^{2n}$$
$$+ Erx^n + Esx^{2n} + Egx^{3n}$$

donc $Ar + Cr = g$, $-As + Br + Cs + Er = 0$, $Ag - Bs + Cg + Es = 0$, $Bg + Eg = 0$; par cette derniére équation on a $E = -B$, par la ſeconde $C = A$, donc par la premiére $A = \frac{g}{2r} = C$, & par la troiſiéme $B = \frac{gg}{2rs} = -E$: par le moyen de ces valeurs on déduira $\frac{2Dx^{n-1}dx}{e + fx^{2n} + gx^{4n}} = \frac{g}{r} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{r + sx^n + gx^{2n}} + \frac{gg}{rs} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{r + sx^n + gx^{2n}} + \frac{g}{r} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{r - sx^n + gx^{2n}} - \frac{gg}{rs} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{r - sx^n + gx^{2n}}$; en rapportant ces différentielles à la forme 29, on trouve pour les deux premiéres OP . AO :: $\frac{1}{2}s + gz^{\frac{1}{2}n}$. $\sqrt{\frac{1}{4}ss - gr}$ ou $\sqrt{gr - \frac{1}{4}ss}$, & pour les deux autres OP . OA :: $-\frac{1}{2}s + gz^{\frac{1}{2}n}$.

$\sqrt{\frac{1}{4}ss - gr}$ ou $\sqrt{gr - \frac{1}{4}ss}$, & la ſomme des intégrales des deux premiéres égale à $\frac{Dg}{2nrs}$ M $+ \frac{Dg}{2nr}$ ①, M étant égale à $1\left\{\frac{r + sz^{\frac{1}{2}n} + z^n}{r}\right\}$, & la ſomme des intégrales des deux autres égale à $-\frac{Dg}{2nrs}$ N $+ \frac{Dg}{2nr}$ ②, ſuppoſant $N = 1\left\{\frac{r - sz^{\frac{1}{2}n} + gz^n}{r}\right\}$, donc l'intégrale totale de $\frac{Dz^{\frac{1}{2}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}}$ eſt $\frac{Dg}{2nrs}\left\{\frac{r + sz^{\frac{1}{2}n} + gz^n}{r - sz^{\frac{1}{2}n} + gz^n}\right\} + \frac{Dg}{2nr}$ ① $+ \frac{Dg}{2nr}$ ②, ayant ſoin de donner aux ſymboles, ①, ②, leurs valeurs reſpectives ſelon les différens cas, & les différentes différentielles auxquelles ils appartiennent.

Maintenant ſoit propoſée la différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{4}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}}$ qui eſt égale à cette autre $\frac{4Dx^{n-1}dx}{e + fx^{4n} + gx^{8n}}$: on voit par l'exemple précédent qu'on peut ici ſuppoſer $eg + fgx^{4n} + ggx^{8n} = \overline{r + sx^{2n} + gx^{4n}} \times \overline{r - sx^{2n} + gx^{4n}}$, & qu'on aura encore $r = \sqrt{eg}$, $s = \sqrt{-fg + 2\sqrt{eg^3}}$: par la même raiſon on ſuppoſera $rg + sgx^{2n} + ggx^{4n} = \overline{a + cx^n + gx^{2n}} \times \overline{a - cx^n + gx^{2n}}$, & $rg - sgx^{2n} + ggx^{4n} = \overline{a + bx^n + gx^{2n}} \times \overline{a - bx^n + gx^{2n}}$, & le calcul pour

trouver les valeurs de, a, b, c, étant ſemblable à celui par lequel on a trouvé celles de, r, s; on aura $a = \sqrt{rg} = \sqrt[4]{eg^3}$, $b = \sqrt{sg + 2\sqrt{rg^3}} = \sqrt{+\sqrt{-fg^3 + 2\sqrt{eg^7}} + 2\sqrt[4]{eg^7}}$, $c = \sqrt{-sg + 2\sqrt{rg^3}} = \sqrt{-\sqrt{-fg^3 + 2\sqrt{eg^7}} + 2\sqrt[4]{eg^7}}$. Enſuite on ſuppoſera $\frac{g}{eg + fgx^{4n} + ggx^{8n}} = \frac{A + Bx^{2n}}{r + sx^{2n} + gx^{4n}} + \frac{C + Ex^{2n}}{r - sx^{2n} + gx^{4n}}$, & le calcul ici étant ſemblable à celui de l'exemple précédent, on aura encore $A = \frac{g}{2r} = C$, $B = \frac{gg}{2rs} = -E$, ce qui donne $\frac{4Dx^{n-1}dx}{e + fx^{4n} + gx^{8n}} = \frac{g}{2r} \times \frac{4Dx^{n-1}dx}{r + sx^{2n} + gx^{4n}} + \frac{gg}{2rs} \times \frac{4Dx^{3n-1}dx}{r + sx^{2n} + gx^{4n}} + \frac{g}{2r} \times \frac{4Dx^{n-1}dx}{r - sx^{2n} + gx^{4n}} - \frac{gg}{2rs} \times \frac{4Dx^{3n-1}dx}{r - sx^{2n} + gx^{4n}}$; de la même maniére on décompoſera chacune de ces différentielles en quatre autres, ainſi on ſuppoſera $\frac{g}{rg + sgx^{2n} + ggx^{4n}} = \frac{F + Gx^n}{a + cx^n + gx^{2n}} + \frac{H + Kx^n}{a - cx^n + gx^{2n}}$, & comme les valeurs de F, G, H, K, ſont ſemblables à celles de, A, B, C, E, on aura $F = \frac{g}{2a} = H$, $G = \frac{gg}{2ac} = -K$, ce qui donne $\frac{g}{2r} \times \frac{4Dx^{n-1}dx}{r + sx^{2n} + gx^{4n}} = \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a + cx^n + gx^{2n}} + \frac{g^3}{acr} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{a + cx^n + gx^{2n}} + \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a - cx^n + gx^{2n}} - \frac{g^3}{acr} \times$

$\frac{Dx^{2n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}}$; & $\frac{gg}{2rs} \times \frac{4Dx^{3n-1}dx}{r+sx^n+gx^{2n}} = \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^4}{acrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}} - \frac{g^4}{acrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}}$: on réduira les deux autres différentielles de la même manière en supposant $\frac{g}{rg-sgx^{2n}+ggx^{4n}} = \frac{L+Mx^n}{a+bx^n+gx^{2n}} + \frac{N+Px^n}{a-bx^n+gx^{2n}}$, où il est clair qu'on aura $L = \frac{g}{2a} = N$, $M = \frac{gg}{2ab} = -P$; de sorte qu'en prenant la somme de toutes ces différentielles, on aura $\frac{Dz^{\frac{1}{4}n-1}dx}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{4Dx^{n-1}dx}{e+fx^{4n}+gx^{8n}}$

$= \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^3}{acr} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^4}{acrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a+cx^n+gx^{2n}} + \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}} - \frac{g^3}{acr} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}} + \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}} - \frac{g^4}{acrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a-cx^n+gx^{2n}} + \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a+bx^n+gx^{2n}} + \frac{g^3}{abr} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{a+bx^n+gx^{2n}} - \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a+bx^n+gx^{2n}} - \frac{g^4}{abrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a+bx^n+gx^{2n}} + \frac{gg}{ar} \times \frac{Dx^{n-1}dx}{a-bx^n+gx^{2n}} - \frac{g^3}{abr} \times \frac{Dx^{2n-1}dx}{a-bx^n+gx^{2n}} - \frac{g^3}{ars} \times \frac{Dx^{3n-1}dx}{a-bx^n+gx^{2n}} + \frac{g^4}{abrs} \times \frac{Dx^{4n-1}dx}{a-bx^n+gx^{2n}}$. En rapportant donc ces dif-

férentielles à la forme 29, & y substituant pour chaque différentielle les quantités qui lui conviennent, on trouve que l'intégrale de la somme des quatre premiéres différentielles, est $\frac{Dg^3x^{2n}}{2nacrs} + \frac{Dggs - Dagg}{2nacrs}$ $\left\{\frac{a + cx^n + gx^{2n}}{a}\right\} + \frac{Dggs + Dagg}{2nars}$ ①, & l'intégrale de la somme des quatre suivantes $-\frac{Dg^3x^{2n}}{2nacrs} - \frac{Dggs - Dagg}{2nacrs}$ $\left\{\frac{a - cx^n + gx^{2n}}{a}\right\} + \frac{Dggs + Dagg}{2nars}$ ②; d'où il suit que puisque $z^{\frac{1}{4}n} = x^n$, $aa = rg$, $aar = egg$, l'intégrale des huit premiéres différentielles est $\frac{Das + Dgr}{2nes}$ $\left\{\frac{a + cz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n}}{a - cz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n}}\right\} + \frac{Das + Dgr}{2nes} \times \overline{① + ②}$: pareillement on trouvera que la somme des huit autres différentielles a pour intégrale $\frac{Das - Dgr}{2nes}$ $\left\{\frac{a + bz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n}}{a - bz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n}}\right\} + \frac{Das - Dgr}{2nes} \times \overline{③ + ④}$: on a donc l'intégrale totale. On trouveroit de la même maniére l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{3}{4}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}}$ en supposant $\frac{gx^{2n}}{eg + fgx^{2n} + ggx^{4n}}$ $= \frac{A + Bx^n}{r + sx^n + gx^{2n}} + \frac{C + Ex^n}{r - sx^n + gx^{2n}}$.

Les deux exemples qu'on vient de résoudre font assez voir que le calcul qu'il faudroit appliquer à la

différentielle $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, lorsque la fraction $\frac{\delta}{\lambda}$ est égale à $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}$, &c, est entiérement semblable. *C. Q. F. T.*

REMARQUE.

96. LORSQUE e ou g est une quantité négative, la différentielle proposée se rapporte au premier cas. L'on voit que la méthode qu'on vient d'exposer donne la solution du second cas lorsque λ marque un des nombres de cette suite, 2, 4, 8, 16, &c. puisque dans cette supposition on n'est point embarassé de quantités impossibles, les valeurs des quantités, s, b, c, &c. étant toutes réelles, & que la proposée peut être réduite en plusieurs différentielles trinomes dont on peut facilement trouver les intégrales : mais lorsque λ marque un autre nombre entier quelconque, alors cette méthode de réduire le dénominateur $e+fx^{\lambda n}+gx^{2\lambda n}$ en deux trinomes, & chacun de ces deux en deux autres & ainsi de suite, ne peut être d'usage, parce que de cette maniére on ne parviendroit jamais à des trinomes de cette forme $r+sx^n+gx^{2n}$; par exemple on ne peut résoudre le trinome $e+fx^{3n}+gx^{6n}$ en deux autres trinomes, car pour cela il faudroit supposer $e+fx^{3n}+gx^{6n} = \overline{r+sx^{\frac{3}{2}n}+gx^{3n}} \times \overline{r-sx^{\frac{3}{2}n}+gx^{3n}}$, or cette supposition devient inutile, puisqu'il n'y a point de méthode pour trouver l'intégrale d'une différentielle de

de cette nature $\frac{Dx^{n-1}dx}{r+sx^{\frac{3}{2}n}+gx^{3n}}$: pour avoir donc une ſolution de ce cas, on ſe ſervira de la méthode générale ſuivante.

PROBLÊME X.

97. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^{n}+gz^{2n}}$, $\frac{1}{4}ff$ *étant moindre que* eg, *&* $\frac{\delta}{\lambda}$ *une fraction moindre que l'unité.*

Il faut ſuppoſer $\sqrt[2\lambda]{\frac{g}{e}} \times z^{\frac{n}{\lambda}} = x$, ce qui donnera $z^{n} = x^{\lambda} \times \sqrt{\frac{e}{g}}$, $z^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz = \frac{\lambda}{n}\sqrt[2\lambda]{\frac{e^{\delta}}{g^{\delta}}} \times x^{\delta-1}dx$, & $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^{n}+gz^{2n}} = \frac{D}{n}\sqrt[2\lambda]{\frac{e^{\delta}}{g^{\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{e+fx^{\lambda}\times\sqrt{\frac{e}{g}}+ex^{2\lambda}} = \frac{D}{ng}\sqrt[2\lambda]{\frac{g^{2\lambda-\delta}}{e^{2\lambda-\delta}}}$ $\times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}$ en ſuppoſant $f\sqrt{\frac{1}{eg}} = 2t$: mais on a vû (art. 48. & 66.) qu'en prenant ſur une circonférence de cercle un arc AL (*fig.* 18.) dont le co-ſinus eſt t, & enſuite un autre arc AB $= \frac{AL}{\lambda}$, & que ſi du point B on diviſe la circonférence en un nombre de parties égales déſigné par λ, comme BC, CD, DE, EF, FB, & que ſi on ſuppoſe le rayon OA $= 1$, OP $= x$, & que, a, b, c, &c. marquent les co-ſinus des arcs AB, AC, AF, &c. on a vû, dis-je, qu'on a

toujours cette équation $\frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}} = \frac{\lambda A dx + \lambda B x dx}{1-2ax+xx}$ $\frac{\lambda C dx + \lambda D x dx}{1-2bx+xx} + \frac{\lambda E dx + \lambda F x dx}{1-2cx+xx} +$ &c. & qu'en supposant $\frac{l+m}{2} = a$, & $lm = 1$, on a $A = \frac{l^{\lambda-\theta} - m^{\lambda-\theta}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}}$, $B = -\frac{l^{\lambda-\theta-1} - m^{\lambda-\theta-1}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}}$, ou plutôt puisqu'on a ici $\theta = \delta - 1$, $A = \frac{l^{\lambda-\delta+1} - m^{\lambda-\delta+1}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}}$, $B = -\frac{l^{\lambda-\delta} - m^{\lambda-\delta}}{\lambda \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}}$. Maintenant puisque l'intégrale de $\frac{dx}{1-2ax+xx}$ est $\frac{2}{\overline{l-m}\sqrt{-1}}$ (PBO), & celle de $\frac{xdx}{1-2ax+xx}$ est $1\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l+m}{\overline{l-m}\sqrt{-1}}$ (PBO), on tire $\int \frac{\lambda A dx + \lambda B x dx}{1-2ax+xx} = -\frac{l^{\lambda-\delta} - m^{\lambda-\delta}}{l^{\lambda} - m^{\lambda}}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^{\lambda-\delta+1} - m^{\lambda-\delta+1} - l^{\lambda-\delta-1} + m^{\lambda-\delta-1}}{\overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}} \times \overline{l-m}\sqrt{-1}}$ (PBO); mais $\frac{l^{\lambda-\delta+1} + m^{\lambda-\delta+1} - l^{\lambda-\delta-1} - m^{\lambda-\delta-1}}{l-m}$ $= l^{\lambda-\delta} + m^{\lambda-\delta}$, par conséquent cette intégrale sera $-\frac{\overline{l^{\lambda-\delta} - m^{\lambda-\delta}} \times \sqrt{-1}}{\overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}} \times \sqrt{-1}}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^{\lambda-\delta} + m^{\lambda-\delta}}{\overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}}\sqrt{-1}}$ (PBO). Mais on a démontré dans l'art. 72, que a ou

$\frac{l+m}{2}$ étant le co-ſinus de l'arc AB, $\frac{\overline{l^{\lambda-\delta}-m^{\lambda-\delta}}\sqrt{-1}}{2}$ ſera le ſinus & $\frac{l^{\lambda-\delta}-m^{\lambda-\delta}}{2}$ le co-ſinus d'un arc qui eſt à AB comme $\lambda-\delta$ à 1, & $\frac{l^{\lambda}-m^{\lambda}}{2}\sqrt{-1}$ le ſinus d'un arc qui eſt à AB comme λ à 1, par conſéquent il ſera facile de déterminer ces modules. Pareillement ſi $\frac{p+q}{2}=b$, & $pq=1$; & $\frac{r+s}{2}=c$, & $rs=1$, on aura $\int\frac{\lambda Cdx+\lambda Dxdx}{1-2bx+xx}=-\frac{\overline{p^{\lambda-\delta}-q^{\lambda-\delta}}\times\sqrt{-1}}{\overline{p^{\lambda}-q^{\lambda}}\times\sqrt{-1}}\left\{\frac{CP}{CO}\right\}+\frac{p^{\lambda-\delta}+q^{\lambda-\delta}}{\overline{p^{\lambda}-q^{\lambda}}\times\sqrt{-1}}(PCO)$, & $\int\frac{\lambda Edx+\lambda Fxdx}{1-2cx+xx}=-\frac{\overline{r^{\lambda-\delta}-s^{\lambda-\delta}}\times\sqrt{-1}}{\overline{r^{\lambda}-s^{\lambda}}\times\sqrt{-1}}\left\{\frac{FP}{FO}\right\}+\frac{r^{\lambda-\delta}+s^{\lambda-\delta}}{\overline{r^{\lambda}-s^{\lambda}}\times\sqrt{-1}}(PFO)$; on voit encore ici que $\frac{\overline{p^{\lambda-\delta}-q^{\lambda-\delta}}\times\sqrt{-1}}{2}$ eſt le ſinus & $\frac{p^{\lambda-\delta}+q^{\lambda-\delta}}{2}$ le co-ſinus d'un arc qui eſt à l'arc AC comme $\lambda-\delta$ à 1 : il faut appliquer le même raiſonnement à toutes les autres intégrales. De plus puiſque t eſt le co-ſinus de l'arc AL $=\lambda\times$ AB, & que $\frac{\overline{l^{\lambda}-m^{\lambda}}\sqrt{-1}}{2}$ en eſt le ſinus, on a $\frac{\overline{l^{\lambda}-m^{\lambda}}\sqrt{-1}}{2}=\sqrt{1-tt}$: & en général on a vû (art. 44.) qu'en

nommant C la circonférence, & l'arc AL, A, les arcs AB, AC, AF, AD, AE, &c. ſont exprimés de cette maniére $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$, $\frac{C-A}{\lambda}$, $\frac{2C+A}{\lambda}$, $\frac{2C-A}{\lambda}$, &c. d'où il ſuit que les quantités $\frac{l^\lambda - m^\lambda}{2}\sqrt{-1}$, $\frac{p^\lambda - q^\lambda}{2}\sqrt{-1}$, $\frac{r^\lambda - s^\lambda}{2}\sqrt{-1}$, &c. exprimeront les ſinus des arcs A, C + A, C — A, &c. or on voit clairement que tous ces arcs aboutiſſent au point L, donc ils ont tous le même ſinus que l'arc AL, ce qui donne $\sqrt{1-tt} = \frac{l^\lambda - m^\lambda}{2}\sqrt{-1} = \frac{p^\lambda - q^\lambda}{2}\sqrt{-1} = \frac{r^\lambda - s^\lambda}{2}\sqrt{-1}$ = &c. par conſéquent en mettant π pour $\sqrt{1-tt}$, l'intégrale de $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda n}-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ ou de $\frac{D}{ng}\sqrt[2\lambda]{\frac{g^{2\lambda-\delta}}{e^{2\lambda-\delta}}} \times \frac{\lambda x^{\delta-1}dx}{1+2tx^\lambda+x^{2\lambda}}$ eſt égale à la quantité $\frac{D}{ng\pi}\sqrt[2\lambda]{\frac{g^{2\lambda-\delta}}{e^{2\lambda-\delta}}}$ multipliée par les quantités ſuivantes — $\frac{l^{\lambda-\delta} - m^{\lambda-\delta}}{2}\sqrt{-1}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^{\lambda-\delta} + m^{\lambda-\delta}}{2}(PBO)$ — $\frac{p^{\lambda-\delta} - q^{\lambda-\delta}}{2}\sqrt{-1}\left\{\frac{CP}{CO}\right\} + \frac{p^{\lambda-\delta} + q^{\lambda-\delta}}{2}(PCO)$ — $\frac{r^{\lambda-\delta} - s^{\lambda-\delta}}{2}\sqrt{-1}\left\{\frac{FP}{FO}\right\} + \frac{r^{\lambda-\delta} + s^{\lambda-\delta}}{2}(PBO)$ — &c. & l'on aura OP . OA :: x . 1 :: $\sqrt[\lambda]{z^n}$. $\sqrt[2\lambda]{\frac{e}{g}}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

98. Si la proposée étoit $\frac{Dz^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, par le Problême elle sera égale à celle-ci $\frac{D_{2\lambda}\sqrt{\frac{g^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}}{ng} \times \frac{\lambda x^{\lambda+\delta-1}dx}{1+2tx^\lambda+x^{2\lambda}}$: or comme $\lambda+\delta-1$ est moindre que 2λ, on aura encore (par l'art. 66.) $\frac{\lambda x^{\lambda+\delta-1}dx}{1+2tx^\lambda+x^{2\lambda}} = \frac{\lambda Adx+\lambda Bxdx}{1-2ax+xx} + \frac{\lambda Cdx+\lambda Dxdx}{1-2bx+xx} + \frac{\lambda Edx+\lambda Fxdx}{1-2cx+xx} +$ &c. & par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans le cas du Problême, on trouve $A = -\frac{l^{\delta-1}-m^{\delta-1}}{\lambda \times \overline{l^\lambda-m^\lambda}}$, $B = \frac{l^\delta-m^\delta}{\lambda \times \overline{l^\lambda-m^\lambda}}$, $C = -\frac{p^{\delta-1}-q^{\delta-1}}{\lambda \times \overline{p^\lambda-q^\lambda}}$, $D = \frac{p^\delta-q^\delta}{\lambda \times \overline{p^\lambda-q^\lambda}}$, &c. d'où l'on déduit $\int \frac{\lambda Adx+\lambda Bxdx}{1-2ax+xx} = \frac{l^\delta-m^\delta}{\pi}\sqrt{-1}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^\delta+m^\delta}{\pi}$ (PBO), & $\int \frac{\lambda Cdx+\lambda Dxdx}{1-2bx+xx} = \frac{p^\delta-q^\delta}{\pi}\sqrt{-1}\left\{\frac{CP}{CO}\right\}$ $\frac{p^\delta+q^\delta}{\pi}$ (PCO), & ainsi des autres termes: de sorte que l'intégrale de $\frac{Dz^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ est égale à la quantité $\frac{D_{2\lambda}\sqrt{\frac{g^{\lambda-\delta}}{e^{\lambda-\delta}}}}{ng\pi}$ multipliée par les quantités sui-

vantes $+ \frac{l^{\delta} - m^{\delta}}{2}\sqrt{-1}\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + \frac{l^{\delta} + m^{\delta}}{2}(PBO) + \frac{p^{\delta} - q^{\delta}}{2}\sqrt{-1}\left\{\frac{CP}{CO}\right\} + \frac{p^{\delta} + q^{\delta}}{2}(PCO) +$ &c. les quantités $\frac{l^{\delta} - m^{\delta}}{2}\sqrt{-1}$, $\frac{l^{\delta} + m^{\delta}}{2}$, sont le sinus & le co-sinus d'un arc qui est à l'arc AB comme δ à 1, & $\frac{p^{\delta} - q^{\delta}}{2}\sqrt{-1}$, $\frac{p^{\delta} + q^{\delta}}{2}$ sont le sinus & le co-sinus d'un arc qui est à l'arc AC comme δ à 1, & ainsi du reste.

COROLLAIRE II.

99. MAINTENANT si la proposée étoit $\frac{Dz^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1}dz}{e + fz^{n} + gz^{2n}}$, étant un nombre entier positif ou négatif, & plus grand que l'unité lorsqu'il est positif, on en trouveroit l'intégrale par la table donnée dans l'art. 84, ou par les méthodes expliquées dans l'art. 93.

M. SIMPSON dans ses *Essais* a aussi donné une méthode élégante pour intégrer les différentielles de cette espéce; je n'ai pas eu connoissance de son livre qu'après avoir entiérement achevé cette théorie, néanmoins on peut voir que la solution que j'ai donnée s'accorde avec celle de ce célébre Géométre. On en trouve encore une autre solution de M. KLINGENSTIERNA insérée dans les Transactions Philosophiques num. 417, mais elle n'est pas si simple.

Par ce qui a été dit dans le dernier Problême & son premier Corollaire, il est clair que la Théorie pour les différentielles trinomes est semblable à celle qu'on a donnée pour les binomes, & que les formules qu'on a déduites de ces deux théories pour représenter les intégrales sont peu différentes : c'est pourquoi il seroit inutile de faire voir au long l'application de cette derniére méthode après tous les exemples qu'on a donné ci-devant pour les binomes; comme les formes 31 & 32 ne donnent les intégrales des différentielles $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, que dans le cas où la quantité $\frac{1}{4}ff$ est plus grande que eg, on se contentera d'appliquer les régles précédentes à ces deux différentielles, & par-là on rendra les deux formes complettes en ajoûtant le second cas où $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg.

EXEMPLE.

ETANT donc proposée la différentielle $\frac{Dz^{\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, on aura $\delta = 1$, $\lambda = 3$, & par le Problême précédent elle se changera en cette autre $\frac{D}{ng}\sqrt[6]{\frac{g^5}{e^5}} \times \frac{3dx}{1+2tx^3+x^6}$: ensuite on décrira du centre O (*fig.* 39.) & du rayon OA = 1, une circonférence de cercle sur laquelle on prendra l'arc AL plus grand que 90 dégrés à cause qu'on a ici $+2t$, & dont le co-sinus soit égal à t; on prendra aussi l'arc AB $= \frac{AL}{3}$, & du point B on divi-

ſera la circonférence en trois parties égales, BC, CD, DB; & ayant pris ſur le diamétre la partie OP $= x$, on tirera les lignes PB, PC, PD, BO, CO, DO, & nommant a le co-ſinus de l'arc AB, b celui de AC, c celui de AD, on aura $\frac{3dx}{1+2t^3+x^6} = \frac{3Adx+3Bxdx}{1-2ax+xx} + \frac{3Cdx+3Dxdx}{1+2bx+xx} + \frac{3Edx+3Fxdx}{1+2cx+xx}$: & ſi on nomme $\int$ le ſinus de l'arc AB, $\int''$ le ſinus & a'' le co-ſinus du double de cet arc; s le ſinus de l'arc AC, s'' le ſinus & b'' le co-ſinus du double de cet arc; σ le ſinus de l'arc AD, σ'' le ſinus & c'' le co-ſinus du double de cet arc, en leur donnant les ſignes qui leur conviennent ſelon l'art. 42, on trouve par la formule du dernier Problême $\int \frac{3Adx+3Bxdx}{1-2ax+xx} = -\int''\left\{\frac{BP}{BO}\right\} + a''$ (PBO), $\int \frac{3Cdx+3Dxdx}{1+2bx+xx} = s''\left\{\frac{CP}{CO}\right\} + b''$ (PCO), & $\int \frac{3Edx+3Fxdx}{1+2cx+xx} = \sigma''\left\{\frac{PF}{FO}\right\} - c''$ (PFO): on aura donc l'intégrale totale demandée. On trouvera de la même maniére l'intégrale de $\frac{Dz^{n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ par le premier Corollaire: & par les mêmes formules auſſi les intégrales de $\frac{Dz^{\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$, $\frac{Dz^{n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$; enſuite par le ſecond Corollaire on peut continuer les intégrales auſſi loin qu'on juge à propos. C'eſt de cette maniére que nous avons conſtruit les deux tables ſuivantes.

FORME

θ	FORME XXXI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3	$\frac{3Dz^{\frac{4}{3}n}}{4ng}-\frac{3Dfz^{\frac{1}{3}n}}{ngg}+\frac{3Def}{ng^3}$ ① $+\frac{3Dff-3Deg}{ng^3}$ ②.
2	$\frac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{ng}-\frac{3De}{ngg}$ ① $-\frac{3Df}{ngg}$ ②.
1	$\frac{3D}{ng}$ ②. Voyez fig. 39.
0	$\frac{3D}{ng}$ ①.
1	$-\frac{3D}{2nez^{\frac{2}{3}n}}-\frac{3Df}{neg}$ ① $-\frac{3D}{ne}$ ②.
2	$-\frac{3D}{5nez^{\frac{5}{3}n}}+\frac{3Df}{2neez^{\frac{2}{3}n}}+\frac{3Dff-3Deg}{neeg}$ ① $+\frac{3Df}{nee}$ ②.
&c.	

$$OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{e}{g}}. \qquad \pi = \sqrt{\frac{4eg-ff}{4eg}}.$$

① $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g^5}{e^5}} \times -f''(BP:BO) + s''(CP:CO) + \sigma''(DP:DO) + a''(PBO) + b''(PCO) - c''(PDO).$

② $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{gg}{ee}} \times +f(BP:BO) + s(CP:CO) - \sigma(DP:DO) + a(PBO) - b(PCO) + c(PDO).$

θ	FORME XXXII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3	$\frac{3Dz^{\frac{5}{3}n}}{5ng}-\frac{3Dfz^{\frac{2}{3}n}}{2ngg}+\frac{3Def}{ng^3}$ ① $+\frac{3Dff-3Deg}{ng^3}$ ②.
2	$\frac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2ng}-\frac{3De}{ngg}$ ① $-\frac{3Df}{ngg}$ ②.
1	$\frac{3D}{ng}$ ②. Voyez fig. 39.
0	$\frac{3D}{ng}$ ①.
1	$-\frac{3D}{nez^{\frac{1}{3}n}}-\frac{3Df}{neg}$ ① $-\frac{3D}{ne}$ ②.
2	$-\frac{3D}{4nez^{\frac{4}{3}n}}+\frac{3Df}{neez^{\frac{1}{3}n}}+\frac{3Dff-3Deg}{neeg}$ ① $+\frac{3Df}{nee}$ ②.
&c.	

$$OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{e}{g}} \qquad \pi = \sqrt{\frac{4eg-ff}{4eg}}.$$

① $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g^4}{e^4}} \times -f\,(BP : BO) - s\,(CP : CO) + \sigma\,(DP : DO) + a\,(PBO) - b\,(PCO) + c\,(PDO).$

② $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g}{e}} \times +f''(BP : BO) - s''(CP : CO) - \sigma''(DP : DO) + a''(PBO) + b''(PCO) - c''(PDO).$

On doit obſerver qu'on a pris comme poſitif le co-ſinus du double de l'arc AB, quoiqu'il puiſſe devenir négatif dans le cas où l'arc AL ſeroit beaucoup plus grand qu'un quart de cercle. Si dans cet exemple on avoit ſuppoſé que f étoit une quantité négative, ce qui auroit donné $1 - 2tx^3 + x^6$ pour le dénominateur de la propoſée, alors l'arc AL auroit été moindre qu'un quart de cercle, le co-ſinus de l'arc AD négatif, le double du co-ſinus de l'arc AC poſitif ou négatif ſelon la grandeur de l'arc AL : enfin connoiſſant la grandeur de l'arc AL, il ſera facile de connoître les ſignes qu'il faudra donner aux ſinus & co-ſinus qui entrent dans les intégrales.

COROLLAIRE III.

100. PAR les deux derniers Problêmes on trouvera auſſi l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\theta n + \frac{\delta}{\alpha} n - 1} dz}{\overline{e + fz^n + gz^{2n}} \times \overline{k + lz^n}}$ ſoit que $\frac{1}{4}ff$ ſoit une quantité plus grande ou moindre que eg : pour cela on ſuppoſera $\frac{z^{\theta n}}{\overline{e + fz^n + gz^{2n}} \times \overline{k + lz^n}}$ $= \frac{A + Bz^n}{e + fz^n + gz^{2n}} + \frac{C}{k + lz^n}$ lorſque θ eſt égal à zero ou à un nombre entier poſitif qui ne ſurpaſſe pas 2, & par l'art. 64, on trouve en mettant t pour $ell - fkl + gkk$,

lorſque $\theta = 0$, $A = \frac{gk - fl}{t}$, $B = -\frac{gl}{t}$, $C = \frac{ll}{t}$.

lorſque $\theta = 1$, $A = \frac{el}{t}$, $B = \frac{gk}{t}$, $C = -\frac{kl}{t}$.

lorſque $\theta = 2$, $A = -\frac{ek}{t}$, $B = \frac{el - fk}{t}$, $C = \frac{kk}{t}$.

Les valeurs de A, B, C, étant ainſi déterminées, on multipliera les fractions $\frac{A + Bz^n}{e + fz^n + gz^{2n}} + \frac{C}{k + lz^n}$ par $z^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz$, ce qui réduira la différentielle propoſée en pluſieurs qui ſe rapporteront aux méthodes déja données : par conſéquent puiſqu'on a $\frac{z^{2n + \frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n} \times k + lz^n}$ $= -\frac{ekz^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz + \overline{el - fk} \times z^{n + \frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{t \times e + fz^n + gz^{2n}} + \frac{kkz^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{t \times k + lz^n}$, lorſque θ eſt égal aux nombres, 3, 4, 5, on multipliera cette équation par z^n, z^{2n}, z^{3n}, &c ; & puiſqu'on a auſſi $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n} \times k + lz^n} =$ $\frac{\overline{gk - fl} \times z^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz - glz^{n + \frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{t \times e + fz^n + gz^{2n}} + \frac{llz^{\frac{\delta}{\lambda}n - 1}dz}{k + lz^n}$; lorſque θ eſt un des nombres -1, -2, -3, &c, on multipliera cette équation par z^{-n}, z^{-2n}, z^{-3n}, &c, & ainſi on trouvera par les régles précédentes les intégrales de toutes ces différentielles ; lorſque $\frac{1}{4}ff$ eſt une quantité plus grande que eg, on aura recours au Problême IX ; & lorſque $\frac{1}{4}ff$ eſt moindre que eg, on ſe ſervira du Problême X ; c'eſt ainſi que nous avons calculé le ſecond cas des formes 37 & 38.

θ	FORME XXXVII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times\overline{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{ngl}-\dfrac{3Dk^3}{nll}$ ① $+\dfrac{3De\times\overline{fk-el}}{ngg}$ ② $+\dfrac{3Dk\times\overline{ff-eg}-3Defl}{ngg}$ ③.
2.	$\dfrac{3Dkk}{nl}$ ① $-\dfrac{3Dek}{ng}$ ② $+\dfrac{3D\times\overline{el-fk}}{ng}$ ③.
1.	$-\dfrac{3Dk}{n}$ ① $+\dfrac{3Del}{ng}$ ② $+\dfrac{3Dk}{n}$ ③.
0.	$\dfrac{3Dl}{n}$ ① $+\dfrac{3D\times\overline{gk-fl}}{ng}$ ② $-\dfrac{3Dl}{n}$ ③.
1.	$-\dfrac{3D}{2nekz^{\frac{2}{3}n}}-\dfrac{3Dll}{nk}$ ① $+\dfrac{3Dl\times\overline{ff-eg}-3Dfgk}{neg}$ ② $+\dfrac{3D\times\overline{fl-gk}}{ne}$ ③.
&c.	

$$t=ell-fkl+gkk$$

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{k}{l}}$. ① $=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-\beta$ (BP : BO) $+$ (DP : DO) $+\psi$ (PBO).

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{-k}{l}}$. ① $=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-$ (AP : AO) $+\beta$ (CP : CO) $+\psi$ (PCO). Voyez fig. 29.

OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[6]{\frac{e}{g}}$. $\pi=\sqrt{\frac{4eg-ff}{4eg}}$.

② $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{g^5}{e^5}}\times-f''$ (BP : BO) $+s''$ (CP : CO) $+\sigma''$ (DP : DO) $+a''$ (PBO) $+b''$ (PCO) $-c''$ (PDO).

③ $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{gg}{ee}}\times+f$ (BP : BO) $+s$ (CP : CO) $-\sigma$ (DP : DO) $+a$ (PBO) $-b$ (PCO) $+c$ (PDO). Voyez fig. 39.

θ	FORME XXXVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times\overline{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2ngl}-\dfrac{3Dk^3}{nll}$ ① $+\dfrac{3De\times\overline{fk-el}}{ngg}$ ② $+\dfrac{3Dk\times\overline{ff-eg}-3Defl}{ngg}$ ③.
2.	$\dfrac{3Dkk}{nl}$ ① $-\dfrac{3Dek}{ng}$ ② $+\dfrac{3D\times\overline{fk-el}}{ng}$ ③.
1.	$-\dfrac{3Dk}{n}$ ① $+\dfrac{3Del}{ng}$ ② $+\dfrac{3Dk}{n}$ ③.
0.	$\dfrac{3Dl}{n}$ ① $-\dfrac{3D\times\overline{fl-gk}}{ng}$ ② $-\dfrac{3Dl}{n}$ ③.
1.	$-\dfrac{3D}{nekz^{\frac{1}{3}n}}-\dfrac{3Dll}{nk}$ ① $+\dfrac{3Dl\times\overline{ff-eg}-3Dfgk}{neg}$ ② $+\dfrac{3D\times\overline{fl-gk}}{ne}$ ③.
&c.	

$$t=ell-fkl+gkk$$

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}\,.\,\sqrt[3]{\frac{k}{l}}$. ① $=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{l}{k}}\times+\beta$ (BP : BO) $-$ (DP : DO) $+\psi$ (PBO).

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}\,.\,\sqrt[3]{\frac{-k}{l}}$. ① $=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{-l}{k}}\times-$ (AP : AO) $+\beta$ (CP : CO) $-\psi$ (PCO). Voyez fig. 29.

OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}\,.\,\sqrt[6]{\frac{e}{g}}$. $\pi=\sqrt{\frac{4eg-ff}{4eg}}$.

② $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{g^4}{e^4}}\times-\int$ (BP : BO) $-s$ (CP : CO) $+\sigma$ (DP : DO) $+a$ (PBO) $-b$ (PCO) $+c$ (PDO).

③ $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{g}{e}}\times+\int''$ (BP : BO) $-s''$ (CP : CO) $-\sigma''$ (DP : DO) $+a''$ (PBO) $+b''$ (PCO) $-c''$ (PDO). Voyez fig. 39.

COROLLAIRE IV.

101. Si la proposée avoit cette forme $\frac{Dz^{\theta n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}}$, ou cette autre $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}}$, $\frac{1}{r}$ étant une fraction quelconque, on supposera pour la premiére $k+lz^n = x^n$, d'où l'on tire $z^n = \frac{x^n-k}{l}$, $z^{n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}} = \frac{x^{n+\frac{1}{r}n-1}dx}{l}$, $e+fz^n+gz^{2n} = \frac{ell-fkl+gkk+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}}{ll}$, ce qui donne $\frac{Dz^{\theta n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}} = \frac{D}{l^{\theta-2}} \times \frac{x^{n+\frac{1}{r}n-1}dx \times \overline{x^n-k}^{\theta-1}}{ell-fkl+gkk+flx^n-2gkx^n+gx^{2n}}$; par conséquent θ étant un nombre entier positif ou négatif, cette différentielle se rapportera aux deux derniers Problêmes ou aux Corollaires précédens.

Pour la seconde différentielle il faut supposer $\frac{k+lz^n}{z^n} = x^n$, ce qui donne $z^n = \frac{k}{x^n-l}$, $e+fz^n+gz^{2n} = \frac{ell-fkl+gkk+fkx^n-2elx^n+ex^{2n}}{\overline{x^n-l}^2}$, $z^{n-1}dz =$

$\frac{kx^{n-1}dx}{\overline{x^n - l}^2}$, d'où l'on tire $\frac{Dz^{\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}} =$

$-\frac{Dk^{\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{r}}x^{n+\frac{1}{r}n-1}dx \times \overline{x^n - l}^{-\frac{\delta}{\lambda}-\frac{1}{r}+1}}{ell - fkl + gkk + fkx^n - 2elx^n + ex^{2n}}$; cette différentielle fait voir que toutes les fois que l'exposant $-\frac{\delta}{\lambda} - \frac{1}{r} + 1$ est égal à zero ou à un nombre entier positif ou négatif, on trouvera par les régles précédentes l'intégrale de la proposée, & par conséquent aussi celle de $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz \times \overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}}$: d'où il suit que les tables qu'on auroit construit suivant les articles précédens, seroient d'une grande commodité pour la construction des nouvelles qui représentassent les intégrales des différentielles considérées dans ce Corollaire; nous nous sommes servi des quatre formes données ci-dessus, pour construire le second cas (c'est-à-dire, le cas ou $\frac{1}{4}ff$ est moindre que eg) des formes 75, 76, 77, 78, qui manquent dans les tables de M. SMITH.

FORME

θ	FORME LXXV. $\dfrac{Dz^{\theta n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}\sqrt[3]{k + lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3	$\dfrac{3D}{2ngl}PP + \dfrac{3D \times \overline{fk - el}}{ngg}$ ① $- \dfrac{3Df}{ngg}$ ②.
2	$-\dfrac{3Dk}{ng}$ ① $+ \dfrac{3D}{ng}$ ②.
1	$\dfrac{3Dl}{ng}$ ①.
0	$-\dfrac{3D}{ne}$ ⊙ $+ \dfrac{3D \times \overline{gk - fl}}{neg}$ ① $- \dfrac{3D}{ne}$ ②.
&c.	

$$P = \sqrt[3]{k + lz^n} \,.\, t = ell - fkl + gkk.$$

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{k + lz^n} \,.\, \sqrt[3]{k}$. ⊙ $= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{k}} \times -$ (AP : AO) $+ \beta$ (CP : CO) $- \downarrow$ (PCO).

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{k + lz^n} \,.\, \sqrt[3]{-k}$. ⊙ $= \frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{-1}{k}} \times + \beta$ (BP : BO) $-$ (DP . DO) $+ \downarrow$ (PBO). Voyez fig. 29.

$$\pi = \sqrt{\frac{4eell - ffll}{4tg}}.$$

OP . OA :: $\sqrt[3]{k + lz^n} \,.\, \sqrt[6]{\frac{t}{g}}$. ① $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g^4}{t^4}} \times - \int$ (BP : BO) $- s$ (CP : CO) $+ \sigma$ DP : DO) $+ a$ (PBO) $- b$ (PCO) $+ c$ (PDO).

② $= \frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g}{t}} \times + \int''$ (BP : BO) $- s''$ (CP : CO) $- \sigma''$ (DP : DO) $+ a''$ (PBO) $+ b''$ (PCO) $- c''$ (PDO). Voyez fig. 39.

θ	FORME LXXVI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[3]{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2	$\frac{3D}{ng}$ ◎ $-\frac{3D\times\overline{el-fk}}{neg}$ ① $+\frac{3D}{ng}$ ②.
1	$-\frac{3Dk}{ne}$ ①.
0	$\frac{3Dl}{ne}$ ① $-\frac{3D}{ne}$ ②;
1	$-\frac{3D}{2nek}$ PP $-\frac{3D\times\overline{fl-gk}}{nee}$ ① $+\frac{3Df}{nee}$ ②.
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad t=ell-fkl+gkk.$$

1. *Cas.* OP . OA :: P . $\sqrt[3]{l}$; ◎ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{l}}\times-(AP:AO)+\beta$ (CP : CO) $-\psi$ (PCO).

2. *Cas.* OP . OA :: P . $\sqrt[3]{-l}$; ◎ $=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{-1}{l}}\times+\beta$ (BP : BO) $-$ (DP : DO) $+\psi$ (PBO). Voyez fig. 29.

OP . OA :: P . $\sqrt[6]{\frac{t}{e}}$. $\pi=\sqrt{\frac{4egkk-ffkk}{4te}}$.

① $=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{e^4}{t^4}}\times-\int$ (BP : BO) $-s$ (CP : CO) $+\sigma$ (DP : DO) $+a$ (PBO) $-b$ (PCO) $+c$ (PDO).

② $=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{e}{t}}\times+\int''$ (BP : BO) $-s''$ (CP : CO) $-\sigma''$ (DP : DO) $+a''$ (PBO) $+b''$ (PCO) $-c''$ (PDO). Voyez fig. 39.

θ	FORME LXXVII. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\frac{-12f+3gk+3glz^n}{4ngg\,l}DP+\frac{3Dft}{ng^3}①+\frac{3Dl\times\overline{ff-eg}-3Dfgk}{ng^3}②.$
2.	$\frac{3D}{ng}P-\frac{3Dt}{ngg}①+\frac{3D\times\overline{gk-fl}}{ngg}②.$
1.	$\frac{3Dl}{ng}①.$
0.	$-\frac{3Dk}{ne}◎+\frac{3Dt}{neg}①-\frac{3Dk}{ne}②.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{k+lz^n}\,.\;t=ell-fkl+gkk.$$

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{k+lz^n}\,.\,\sqrt[3]{k}$; $◎=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{kk}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO)$.

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{k+lz^n}\,.\,\sqrt[3]{-k}$. $◎=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{kk}}\times-\beta(BP:BO)+(DP.DO)+\psi(PBO)$. Voyez fig. 29.

$$OP.OA::P.\sqrt[6]{\frac{t}{g}}.\qquad \pi=\sqrt{\frac{4egll-ffll}{4tg}}.$$

$①=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{g^5}{t^5}}\times-\int''(BP:BO)+s''(CP:CO)+\sigma''(DP:DO)+a''(PBO)+b''(PCO)-c''(PDO)$.

$②=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{gg}{tt}}\times+\int(BP:BO)+s(CP:CO)-\sigma(DP:DO)+a(PBO)-b(PCO)+c(PDO)$. Voyez fig. 39.

θ	FORME LXXVIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
1.	$\frac{3Dl}{ng}$ ⓪ $-\frac{3Dt}{neg}$ ① $+\frac{3Dl}{ng}$ ②.
0.	$-\frac{3Dk}{ne}$ ②.
1.	$-\frac{3D}{ne}P+\frac{3Dt}{nee}$ ① $+\frac{3D\times\overline{fk-el}}{nee}$ ②.
2.	$\frac{-3ek-3elz^n+12fkz^n}{4neekz^n}DP-\frac{3Dft}{ne^3}$ ① $-\frac{3Dk\times\overline{ff-eg}-3Defl}{ne^3}$ ②.
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad t=ell-fkl+gkk.$$

1. *Cas.* OP . OA :: P . $\sqrt[3]{l}$; ⓪ $=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ll}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO)$.

2. *Cas.* OP . OA :: P . $\sqrt[3]{-l}$; ⓪ $=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ll}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO)$. Voyez fig. 29.

OP . OA :: P . $\sqrt[6]{\frac{t}{e}}$. $\pi=\sqrt{\frac{4egkk-ffkk}{4te}}$.

① $=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{e^5}{t^5}}\times-\int''(BP:BO)+s''(CP:CO)+\sigma''(DP:DO)+a''(PBO)+b''(PCO)-c''(PDO)$.

② $=\frac{1}{3\pi}\sqrt[6]{\frac{ee}{tt}}\times+\int(BP:BO)+s(CP:CO)-\sigma(DP:DO)+a(PBO)-b(PCO)+c(PDO)$. Voyez fig. 39.

COROLLAIRE V.

102. On peut encore rapporter à ces sortes de différentielles cette autre $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} \times \frac{k+lz^n}{p+qz^n}\Big|\frac{\delta}{\lambda}$ qui peut représenter généralement un grand nombre : pour cela on supposera $\frac{k+lz^n}{p+qz^n} = x^n$, ce qui donnera $z^n = \frac{k-px^n}{qx^n-l}$, & mettant t pour $\overline{ell-fkl+gkk}$, $e+\overline{fz^n+gz^{2n}} = \frac{t+\overline{fkq-2eql+fpl-2gkp}\times x^n+\overline{eqq-fpq+gpp}\times x^{2n}}{\overline{qx^n-l}^2}$, $z^{n-1}dz = \frac{\overline{pl-kq}\times x^{n-1}dx}{\overline{qx^n-l}^2}$, d'où l'on tire

$$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}} \times \frac{k+lz^n}{p+qz^n}\Big|\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\overline{pl-qk}\times Dx^{n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dx \times \frac{k-px^n}{qx^n-l}\Big|\theta-1}{t+\overline{fkq-2eql+fpl-2gkp}\times x^n+\overline{eqq-fpq+gpp}\times x^{2n}}$$

ainsi θ étant égal à o ou à un nombre entier positif ou négatif, on trouvera l'intégrale de cette différentielle.

PROBLÊME XI.

103. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt{+fz^n+gz^{2n}}}$ θ *étant égal à zero ou à un nombre entier quelconque.*

On supposera, comme il a été remarqué dans l'art. 40. $\frac{\frac{1}{2}f}{g} + z^n = x^{\frac{n}{2}}$, & l'on aura $z^n = x^{\frac{n}{2}} - \frac{\frac{1}{2}f}{g}$, $e + fz^n + gz^{2n} = \frac{eg - \frac{1}{4}ff}{g} + gx^n$, & $z^{n-1}dz = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}dx}{2}$, ce qui donne $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}} = \frac{Dx^{\frac{n}{2}-1}dx \times \overline{x^{\frac{n}{2}} - \frac{\frac{1}{2}f}{g}}^{\theta-1}}{2\sqrt{\frac{eg - \frac{1}{4}ff}{g} + gx^n}}$; on en trouvera l'intégrale par l'art. 88. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

104. Si la proposée étoit $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k + lz^n} \times \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$, on supposeroit $k + lz^n = x^n$, & delà on déduiroit $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k + lz^n}\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}} = \frac{D}{l^{\theta-1}} \times \frac{x^{-1}dx \times \overline{x^n - k}^{\theta-1}}{\sqrt{ell - fkl + gkk + flx^n - 2gkx^n + gx^{2n}}}$; par ce moyen la proposée est réduite au cas du Problême; & par conséquent l'intégrale de $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$ donnera facilement celle de $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k + lz^n}\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$.

COROLLAIRE II.

105. MAINTENANT si la proposée étoit de cette nature $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$, il faudroit supposer $k+lz^n+mz^{2n}=0$, ce qui donneroit $z^n=\frac{1}{2}l\pm\sqrt{\frac{1}{4}ll-km}$, & mettant p au lieu de $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll-km}$, & q au lieu de $\frac{1}{2}l-\sqrt{\frac{1}{4}ll-km}$ on supposeroit $\frac{m}{mk+mlz^n+m^2z^{2n}}=\frac{A}{p+mz^n}+\frac{B}{q+mz^n}$, & delà on tire $A=\frac{m}{q-p}$, $B=\frac{m}{p-q}$, & ainsi la proposée sera égale à la somme des deux suivantes $\frac{m}{q-p}\times\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{p+mz^n}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}+\frac{m}{p-q}\times\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{q+mz^n}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$ lesquelles se rapportent au Corollaire précédent.

Et généralement si la proposée étoit - - - $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$ on réduiroit (par l'art. 59.) la fraction $\frac{z^{\theta n-1}}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.}}$ en plusieurs fractions simples, pourvû que la quantité $k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.$ soit composée du produit de plusieurs quantités simples telles que, $a+bz^n$, $e+fz^n$, $g+hz^n$, &c. ce qui résoudra la différentielle proposée en plusieurs différentielles qui

se rapporteront toutes au Corollaire précédent : en réduisant ainsi les différentielles aux précédentes, on trouvera facilement les intégrales cherchées par le moyen de celles qu'on a déja trouvées, & les tables construites pour un cas servent à en construire avec peu de peine pour plusieurs autres.

De-là on tirera facilement l'intégrale de $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.}$ soit en se servant de l'article 87, soit en multipliant le numérateur & le dénominateur de cette différentielle par $\sqrt{e+fz^n+gz^n}$, ce qui la réduiroit à cette forme - - -

$$\frac{Dez^{\theta n-1}dz+Dfz^{\theta n+n-1}dz+Dgz^{\theta n+2n-1}dz}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}\ \&c.}\ \sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$$

qui est celle qu'on vient d'examiner ; cette intégrale étant connue, on trouveroit celle de $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}^{\frac{3}{2}}}{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.}$, & par le moyen de celle-ci on auroit celle de $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\times\overline{e+fz^n+gz^{2n}}^{\frac{5}{2}}}{k+lz^n+mz^{2n}+nz^{3n}+\&c.}$, & ainsi de suite.

Des différentielles quadrinomes & autres.

COMME on peut réduire ces sortes de différentielles aux différentielles binomes ou trinomes, & par

conséquent les assujettir aux mêmes loix, il suffira d'en dire ici un mot.

PROBLÊME XII.

106. *TROUVER l'intégrale de la différentielle* $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$, θ *étant un nombre entier quelconque.*

IL peut arriver deux cas ; car ou la quantité $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}$ est composée du produit de trois quantités simples binomes, ou de deux quantités dont l'une est binome & l'autre trinome ; ou ce qui est la même chose l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles, ou seulement une.

PREMIER CAS.

Lorsque $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}$ *a trois diviseurs simples.*

QU'ON suppose que ces trois diviseurs sont $\varkappa z^n-k$, λz^n-l, μz^n-m, & lorsque $\theta n-1$ est moindre que $3n$, on réduira (par l'art. 59.) la différentielle proposée en trois différentielles simples de cette forme $\frac{A\times Dz^{n-1}dz}{\varkappa z^n-k}+\frac{B\times Dz^{n-1}dz}{\lambda z^n-l}+\frac{C\times Dz^{n-1}dz}{\mu z^n-m}$; nous avons trouvé les valeurs des indéterminées A, B, C, pour un cas dans l'application de cet article, on en trouvera les valeurs pour les autres cas

de la même maniére. Lorſque $\theta n - 1$ eſt un nombre poſitif plus grand que $3n$, ou que θ eſt égal à zero ou à un nombre négatif, on réduira la propoſée par la diviſion ou par les autres méthodes qu'on a données.

SECOND CAS.

Lorſque $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n}$ *n'a qu'un diviſeur ſimple.*

QU'ON ſuppoſe que ce diviſeur eſt $z^n - \frac{k}{l}$, & qu'on faſſe la diviſion en prenant hz^{3n} pour premier terme du dividende & z^n pour premier terme du diviſeur, & on trouvera $hz^{2n} + \overline{g + h\frac{k}{l}} \times z^n + f + g\frac{k}{l} + h\frac{kk}{ll}$ pour quotient, puiſqu'on ſuppoſe la diviſion exacte; ſi on prend e & $-\frac{k}{l}$ pour premiers termes du dividende & du diviſeur, on trouvera le quotient $-e\frac{l}{k} - \overline{e\frac{ll}{kk} + f\frac{l}{k}} \times z^n - hz^{2n}$: d'où il ſuit qu'en ſuppoſant $f + g\frac{k}{l} + h\frac{kk}{ll} = p$, ou $-e\frac{l}{k} = p$; & $g + h\frac{k}{l} = q$, ou $-e\frac{ll}{kk} - f\frac{l}{k} = q$, on aura $\frac{Dz^{\theta n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n}} = \frac{Dlz^{\theta n - 1}dz}{\overline{p + qz^n + hz^{2n}} \times \overline{lz^n - k}}$, on trouvera l'intégrale de

cette différentielle par l'art. 94, ou par la forme 35 des tables. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

107. On se servira de la même méthode pour trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$; ainsi on la réduira ou en trois différentielles simples ou en une seule comme $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{\overline{p+qz^n+hz^{2n}}\times\overline{lz^n-k}}$, dont on trouvera les intégrales de la maniére qu'on a enseigné ci-devant. Par ce moyen nous allons ajoûter ici le second cas (c'est-à-dire, le cas ou la quantité $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}$ n'a qu'un diviseur simple) des formes, 43, 44, qui par les raisons que nous avons vûes échappoit à la méthode de M. Côtes.

θ	FORME XLIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{nh}-\dfrac{3Dk^3}{nl}$ ① $-\dfrac{3Dpl\times\overline{pl+qk}}{nhh}$ ② $+\dfrac{3Dkl\times\overline{hp-qq}-3Dpqll}{nhh}$ ③.
2	$-\dfrac{3Dkk}{n}$ ① $+\dfrac{3Dpkl}{nh}$ ② $+\dfrac{3Dl\times\overline{pl+qk}}{nh}$ ③.
1	$-\dfrac{3Dkl}{n}$ ① $+\dfrac{3Dpll}{nh}$ ② $-\dfrac{3Dkl}{n}$ ③.
0	$-\dfrac{3Dll}{n}$ ① $-\dfrac{3Dl\times\overline{hk+ql}}{nh}$ ② $-\dfrac{3Dll}{n}$ ③.
1	$\dfrac{3Dl}{2npkz^{\frac{2}{3}n}}-\dfrac{3Dl^3}{nk}$ ① $+\dfrac{3Dil\times\overline{qq-hp}+3Dqhkl}{nhp}$ ② $+\dfrac{3Dl\times\overline{hk+ql}}{np}$ ③.
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ n'a qu'une racine réelle $\frac{k}{l}$ qui soit la valeur de z^n, les deux autres racines étant imaginaires, on supposera $t=pll+qkl+hkk$, $p=-e\frac{l}{k}$, $q=-e\frac{ll}{kk}-f\frac{l}{k}$, ou $p=f+g\frac{k}{l}+h\frac{kk}{ll}$, $q=g+h\frac{k}{l}$. $\pi=\sqrt{\frac{4ph-qq}{4ph}}$.

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{k}{l}}$; ① $=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO)$.

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{-k}{l}}$; ① $=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO)$. Voyez fig. 29.

OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[6]{\frac{p}{h}}$; ② $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{h^5}{p^5}}\times-\int''(BP:BO)+s''(CP:CO)+\sigma''(DP:DO)+a''(PBO)+b''(PCO)-c''(PDO)$.

③ $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{hh}{pp}}\times+\int(BP:BO)+s(CP:CO)-\sigma(DP:DO)+a(PBO)-b(PCO)+c(PDO)$. Voyez fig. 39.

θ	FORME XLIV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\frac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2nh}-\frac{3Dk^3}{nl}$ ① $-\frac{3Dpl\times\overline{pl+qk}}{nhh}$ ② $+\frac{3Dkl\times\overline{hp-qq}-3Dpqkl}{nhh}$ ③.
2.	$-\frac{3Dkk}{n}$ ① $+\frac{3Dpkl}{nh}$ ② $+\frac{3Dl\times\overline{pl+qk}}{nh}$ ③.
1.	$-\frac{3Dkl}{n}$ ① $+\frac{3Dpll}{nh}$ ② $-\frac{3Dkl}{n}$ ③.
0.	$-\frac{3Dll}{n}$ ① $-\frac{3Dl\times\overline{hk+ql}}{nh}$ ② $-\frac{3Dll}{n}$ ③.
1.	$\frac{3Dl}{npkz^{\frac{1}{3}n}}-\frac{3Dl^3}{nk}$ ① $-\frac{3Dll\times\overline{hp-qq}-3Dqhkl}{nhp}$ ② $+\frac{3Dl\times\overline{hk+ql}}{np}$ ③.
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ n'a qu'une racine réelle $\frac{k}{l}$ qui soit la valeur de z^n, les deux autres racines étant imaginaires, on supposera $t=pll+qkl+hkk$, $p=-e\frac{l}{k}$, $q=-e\frac{ll}{kk}-f\frac{l}{k}$, ou $p=f+g\frac{k}{l}+h\frac{kk}{ll}$, $q=g+h\frac{k}{l}$. $\pi=\sqrt{\frac{4ph-qq}{4ph}}$.

1. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{k}{l}}$; ① $=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{l}{k}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\psi(PCO)$.

2. *Cas.* OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[3]{\frac{-k}{l}}$; ① $=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{-l}{k}}\times+\beta(BP:BO)-(DP.DO)+\psi(PBO)$. Voyez fig. 29.

OP . OA :: $\sqrt[3]{z^n}$. $\sqrt[6]{\frac{p}{h}}$; ② $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{h^4}{p^4}}\times-\int(BP:BO)-s(CP:CO)+\sigma(DP:DO)+a(PBO)-b(PCO)+c(PDO)$.

◎ $=\frac{1}{3\pi t}\sqrt[6]{\frac{h}{p}}\times+\int''(BP:BO)-s''(CP:CO)-\sigma''(DP:DO)+a''(PBO)+b''(PCO)-c''(PDO)$. Voyez fig. 39.

COROLLAIRE II.

108. ETANT donnée l'intégrale de $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$, on trouvera les intégrales des différentielles $\frac{Dz^{\theta n+\frac{\delta}{\lambda}n-1}dz\times\overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$, $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\times\overline{k+lz^n}^{\frac{1}{r}}}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$, $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}\times\frac{k+lz^n}{p+qz^n}\Big|^{\frac{\delta}{\lambda}}$, par la même méthode dont on s'est servi pour les différentielles trinomes semblables.

COROLLAIRE III.

109. IL est clair que tout ce qu'on vient de dire touchant les différentielles quadrinomes, doit aussi s'entendre des autres différentielles dont les dénominateurs contiendroient un plus grand nombre de termes, & que, quelque fût le nombre de ces termes, il ne faudroit pour trouver les intégrales qu'appliquer les mêmes régles en faisant des calculs semblables.

De cette maniére on voit qu'on pourroit construire des tables en aussi grand nombre & aussi étendues qu'on voudroit se donner la peine de pousser les calculs.

Fin de la troisiéme Partie.

QUATRIEME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

110. APRÈS avoir exposé les principes & l'étendue de la théorie, & fait voir la construction des tables qu'on en tire; il ne reste plus qu'à faire connoître l'avantage qui résulte de cette méthode par la simplicité des solutions qu'elle donne des Problêmes, & à montrer combien ces tables sont commodes dans la pratique pour trouver les intégrales des différentielles qui s'y rapportent.

Une différentielle étant donnée, il sera facile de connoître la forme à laquelle elle se rapporte, on y prendra son intégrale dont la valeur se déduira des formules données dans les articles 18 & 33. Les valeurs des termes qui marquent des logarithmes se tirent de la formule $M \times l \times r$, dans laquelle M marque le module, l le logarithme du terme pris dans les tables ordinaires, & $r = 2,30258509$: les valeurs des termes qui expriment un arc de cercle

se trouvent par la formule $N \times R \times r$, dans laquelle R marque le rayon avec lequel cet arc est décrit, N le nombre de dégrés qu'il contient trouvé dans les tables des sinus, tangentes, &c. & $r = 0,01745329$.

Usage de la Théorie pour trouver la rectification des Courbes.

PROBLÊME I.

111. *TROUVER la longueur d'un arc quelconque de la Parabole.*

SOIT donnée une parabole AP (*fig.* 40.) dont le paramétre est a, l'abscisse AQ prise sur l'axe soit nommée x, l'ordonnée QP, y; & l'intégrale de la différentielle $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ donnera la longueur de l'arc AP; ainsi puisque $ax = yy$, on tire $dy^2 = \frac{adx^2}{4x}$, & $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{a+4x}{4x}} = \frac{x - \frac{1}{2}dx}{2}\sqrt{a+4x}$. Maintenant pour voir plus sensiblement l'avantage de cette méthode, nous allons comparer la solution qu'elle donne de ce Problême avec celle que donne la méthode commune, qui consiste à réduire cette différentielle en une série infinie, & à prendre séparément l'intégrale de chaque terme, ce qui étant fait, la somme de toutes les intégrales particuliéres donne la longueur de l'arc cherché. En tirant donc la racine quarrée de la quantité $a + 4x$, on trouve

$x - \frac{1}{2}dx$

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}\sqrt{a+4x} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}dx}{a^{\frac{5}{2}}} - \frac{5x^{\frac{7}{2}}dx}{a^{\frac{7}{2}}} + \text{\&c. d'où l'on tire} \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}\sqrt{a+4x}$$

$$= a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7a^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{9a^{\frac{7}{2}}} + \text{\&c.} = \sqrt{ax} \times 1 + \frac{2x}{3a} - \frac{2x^2}{5a^2} + \frac{4x^3}{7a^3} - \frac{10x^4}{9a^4} + \text{\&c.}$$

Ainsi si on demande la longueur de l'arc qui répond à l'abscisse $x = \frac{1}{2}$, supposant $a = 1$, elle sera égale à $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 7} - \frac{5}{8 \times 9} + \text{\&c.}$ mais on voit que la convergence de cette série est assez lente, ce qui obligeroit de prendre la somme d'un grand nombre de termes, qui est une opération très-pénible, d'autant plus que l'on ne voit pas la suite progressive des termes sans continuer très-loin l'extraction de la racine quarrée. On trouvera facilement l'intégrale de $\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}\sqrt{a+4x}$ par le moyen des logarithmes, car en rapportant cette différentielle aux tables, on voit que $n = 1$, & que supposant $\theta n + \frac{1}{2}n - 1 = -\frac{1}{2}$ on tire $\theta = 0$; cette différentielle donc appartient au premier cas de la forme 50, & la comparaison des termes donne $z^n = x$, $e = a$, $f = 4$, $D = \frac{1}{2}$, & $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}\sqrt{a+4x} = \frac{x}{2} \times$

$\sqrt{\frac{a+4x}{x}} - \frac{a}{8}\left\{\frac{AP}{AO}\right\} + \frac{a}{8}\left\{\frac{CP}{CO}\right\} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{a+4x}{x}} + \frac{a}{8}$ $\left\{\frac{CP}{AP}\right\}$, OP étant à OA, comme $\sqrt{\frac{a+4x}{x}}$ à 2; ou bien on exprimera l'intégrale de cette façon $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{a+4x} + \frac{a}{8}\left\{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}}\right\}$, ou par l'art. 10. $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{a+4x} + \frac{a}{4}\left\{\sqrt{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}}}\right\}$ & quoique $2x^{\frac{1}{2}}$ soit moindre que $\sqrt{a+4x}$, on regardera la quantité $\sqrt{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}}}$ comme réelle suivant ce qu'on a remarqué dans l'art. 24: mais puisque $\overline{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}} \times \overline{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}} = -a$, on aura $2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x} \cdot \sqrt{-a} :: \sqrt{-a} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}$; ce qui donne $\sqrt{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{-a}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}$ ou $\frac{\sqrt{a}}{2x^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a+4x}}$, sans s'embarrasser des quantités imaginaires comme nous venons de dire; par conséquent $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{2}\sqrt{a+4x}$ $= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{a+4x} + \frac{a}{4}\left\{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}\right\}$; dans notre exemple ou $x = \frac{1}{2}$, cette intégrale ou l'arc AP devient

égal à $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Mais $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0,6123724$, & se servant de la formule M lr on a M $= \frac{1}{4}$, l égale au logarithme de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, c'est-à-dire puisque $\sqrt{2} = 1,4142136$, & $\sqrt{3} = 1,7320508$, on aura $l = 0,4977952$, donc M $\times l = 0,12444488$; on multipliera cette quantité par $2,30258509 = r$ ce qui se fera facilement si on construit une petite table qui contient les produits de ce nombre par les nombres, 1, 2, 3, 4, &c. de cette façon

1	- - -	= 2, 30258509.
2	- - -	= 4, 60517018.
3	- - -	= 6, 90775527.
4	- - -	= 9, 21034036.
5	× 2, 30258509 -	= 11, 51292545.
6	- - -	= 13, 81551054.
7	- - -	= 16, 11809563.
8	- - -	= 18, 42068072.
9	- - -	= 20, 72326581.

On aura donc 0, 12444488 × 2, 30258509 = 1842

```
      18420
      92103
     921034
    9210340
   46051701
  230258509
  ---------
  0, 286553242
```

& en ajoutant à ce produit le nombre 0, 6123724,

la somme 0, 8989263 en prenant huit rangs de chiffres sera égale à l'arc AP dont l'abscisse AQ $= \frac{1}{2}$. On pourroit encore abréger ce calcul en se servant des logarithmes ; ainsi puisque le logarithme de 2, 30258509 est 0, 36221569, & celui de 0, 1244488 est $\overline{1}$, 0949906, leur somme donne $\overline{1}$, 4572063, qui correspond au nombre 0, 2865539 comme on vient de trouver par la multiplication. Et de cette façon, si on demandoit encore l'arc dont l'abscisse est égale à l'unité, on auroit $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}(2 + \sqrt{5})$ pour sa valeur : or $\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1, 1180339\frac{1}{2}$, & le logarithme de $2 + \sqrt{5}$ est 0, 6269629, d'où l'on tire 0, 6269629 × 2, 30258509 =

```
2072
 4605
138155
2072326
13815510
46051701
13 81551054
-----------
1,443635423
```

Ce produit divisé par 4 donne la valeur de la formule $M \times l \times r$, laquelle étant ajoutée à $1, 1180339\frac{1}{2}$ donne 1, 4789428 pour la longueur de l'arc cherché. Si on se sert des logarithmes, on trouve $\overline{1}$, 7972418 pour le logarithme de 0, 6269629, auquel si on ajoute 0, 3622157, & qu'on ôte 0, 6020600 logarithme de 4, le reste est $\overline{1}$, 5573975 qui répond au nombre $0, 3609088\frac{1}{2}$, ce qui don-

ne l'arc égal à 1, 4789428 comme auparavant.

En se servant ainsi des logarithmes on voit que, si on veut se contenter de prendre des nombres qui contiennent moins que huit rangs de chifres, il ne faudra que quelques momens de temps pour trouver par ce calcul les intégrales cherchées, surtout lorsqu'on a devant soi des tables de logarithmes un peu étendues comme sont celles de M. GARDINER.

Si en outre on demandoit une construction géométrique qui en quelque façon représentât généralement cette intégrale $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{a+4x}+\frac{a}{4}\left\{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}\right\}$, on pourroit donner la suivante : mais pour voir plus clairement comment on peut la trouver, il faut réduire les termes sous une autre forme, ainsi le premier terme étant réduit tout sous le signe sera $\sqrt{\frac{ax}{4}+xx}=\sqrt{\frac{yy}{4}+xx}$, d'où l'on voit que si on tire AL qui coupe l'ordonnée PQ en deux parties égales au point L, on aura $AL=\sqrt{\frac{yy}{4}+xx}$; ensuite si on multiplie le numérateur & le dénominateur du rapport $\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}$ par $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}$, on aura $\frac{a}{4}\left\{\frac{2x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{a+4x}}{\sqrt{a}}\right\}$ $=\frac{a}{4}\left\{\frac{x+\sqrt{\frac{ax}{4}+xx}}{\sqrt{\frac{ax}{4}}}\right\}=\frac{a}{4}\left\{\frac{x+\sqrt{\frac{yy}{4}+xx}}{\frac{y}{2}}\right\}$ & par conséquent si F est le foyer de la parabole ;

$\frac{a}{4}\left\{\frac{x+\sqrt{\frac{yy}{4}+xx}}{\frac{y}{2}}\right\} = AF\left\{\frac{AQ+AL}{QL}\right\}$: mais comme tous les trois termes AQ, AL, QL, ſont variables, pour en avoir le moins qu'il eſt poſſible, on tirera ſur AL la perpendiculaire LH qui rencontre l'axe en H, & le triangle LQH ſera ſemblable au triangle LQA, & comme l'on ſçait par la nature de la parabole que la ſoûtangente de l'arc AP eſt double de l'abſciſſe AQ, la ligne AL ſera paralléle à la tangente au point P, & LH paralléle à PS tirée perpendiculairement ſur la courbe au point P, donc puiſque QS eſt la moitié du paramétre, QH en eſt le quart, & par conſéquent QH = AF, ce qui donne $AF\left\{\frac{AQ+AL}{QL}\right\} = QH\left\{\frac{QL+LH}{QH}\right\}$: d'où il ſuit que ſi à AL on ajoute $LM = QH\left\{\frac{QL+LH}{QH}\right\}$ c'eſt-à-dire la meſure ou le logarithme du rapport $\frac{QL+LH}{QH}$ au module QH, la toute AM ſera égale à l'arc AP. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME II.

112. *TROUVER la longueur d'un arc quelconque de la ſpirale d'*Archiméde.

SOIT tirée la droite QA (*fig.* 41.) tangente au point Q commencement de la ſpirale donnée QPA,

ſoit A le point où elle coupe la ſpirale, & du centre Q & du rayon QA on décrira le cercle ACA; & ayant mené une ordonnée QPC qui coupe la ſpirale en P & le cercle en C, & une autre ordonnée Qpc infiniment proche de l'autre, on décrira du centre Q le petit arc de cercle Pn, & nommant AQ, a; QP, y; AC, x; & la circonférence entiére c, les ſecteurs ſemblables CQc, PQn donneront, AC (a) . Cc (dx) :: QP (y) . Pn $= \frac{ydx}{a}$; & parce que la nature de la courbe donne $ax = cy$, on tire Pp $= \sqrt{\frac{y^2 dx^2}{a^2} + dy^2} = \frac{dy}{aa}\sqrt{a^4 + ccyy}$. Cette différentielle ſe rapporte à la forme 50 puiſque $n = 2$, & la comparaiſon des termes donne $\theta = 0$, $D = \frac{1}{aa}$, $e = a^4$, $f = cc$, & l'intégrale ou l'arc QP égal à $\frac{yy}{2aa}\sqrt{\frac{a^4 + ccyy}{yy}} + \frac{aa}{4c}\left\{\frac{CP}{AP}\right\} = \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + ccyy} + \frac{aa}{2c}\left\{\sqrt{\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{cy - \sqrt{a^4 + ccyy}}}\right\}$: mais parce que $\overline{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}} \times \overline{cy - \sqrt{a^4 + ccyy}} = -a^4$, en regardant comme réels les rapports imaginaires on aura $\sqrt{\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{cy - \sqrt{a^4 + ccyy}}}$ $= \frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}$ ou $\frac{aa}{cy - \sqrt{a^4 + ccyy}}$; par conſé-

quent QP $= \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + ccyy} + \frac{aa}{2c}\left\{\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}\right\}$; on trouvera donc cet arc de la maniére qu'on a fait voir dans le Problême précédent. On en peut donner aussi une construction géométrique semblable à celle du Problême précédent : car menant la tangente PT qui rencontre en T la ligne QT tirée perpendiculairement sur l'ordonnée QP on aura suivant ce qui est démontré par *Archiméde* QT $= \frac{xy}{a} = \frac{cyy}{aa}$ ce qui donne PT $= \frac{y}{aa}\sqrt{a^4 + ccyy}$, & en divisant QT en deux également au point F, & menant FL parallèle à TP, LF $= \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + ccyy}$ qui est le premier terme de l'intégrale : pour construire le second terme $\frac{aa}{2c}\left\{\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}\right\}$ on tirera sur FL la perpendiculaire LH qui rencontre en H la ligne FQ prolongée, & les triangles semblables FQL, LQH donnent FQ $\left\{\frac{cyy}{2aa}\right\}$. QL $\left\{\frac{y}{2}\right\}$ :: QL $\left\{\frac{y}{2}\right\}$. QH $= \frac{aa}{2c}$ qui est le module cherché ; ensuite multipliant & divisant par $\frac{y}{2aa}$ le rapport $\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}$, on aura $\frac{\frac{cyy}{2aa} + \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + ccyy}}{\frac{y}{2}} = \frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}$, or on vient

de

de voir que $\frac{cyy}{2aa} = FQ$, & $\frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + ccyy} = FL$, par conséquent $\frac{aa}{2c}\left\{\frac{cy + \sqrt{a^4 + ccyy}}{aa}\right\} = QH\left\{\frac{FQ + FL}{QL}\right\}$ ou $QH\left\{\frac{QL + LH}{QH}\right\}$ à cause de la similitude des triangles FQL, LQH; si donc à FL on ajoute LM égale à la mesure ou au logarithme du rapport $\frac{QL + LH}{QH}$ au module QH, la toute FM égalera l'arc QP. *C. Q. F. T.*

De ce qu'on vient de faire voir dans ces deux Problêmes on découvre une grande analogie entre la parabole & la spirale d'*Archiméde*, ce qu'on peut remarquer en passant.

On voit que comme dans la parabole, QH (*fig.* 40.) est le quart du paramétre, de même QH (*fig.* 41.) dans la spirale est une quantité constante, qu'on peut regarder comme le quart de son paramétre, surtout puisqu'en supposant que le paramétre commun de ces deux courbes est $4QH = \frac{2aa}{c}$, & qu'en prenant deux ordonnées égales QP, QP, on trouve que les soûtangentes des arcs, AP, QP, sont égales, leur valeur commune étant $\frac{cyy}{aa}$, & qu'ainsi l'abscisse AQ dans la parabole est égale à FQ dans la spirale, & comme dans la parabole on a $\overline{QP}^2 =$

$AQ \times \frac{2aa}{c}$, de même dans la ſpirale le triangle rectangle FLH donne $\overline{QP}^2 = FQ \times \frac{2aa}{c}$; de plus puiſque les triangles ALH & FLH ſont égaux en tout, l'arc AP de la parabole eſt égal à l'arc QP de la ſpirale.

PROBLÊME III.

113. *TROUVER la longueur d'un arc quelconque de la courbe* logarithmique.

SOIT donnée la logarithmique EM*em*, (*fig.* 42.) dont l'aſymptote eſt la ligne AF*af*; pour avoir la longueur d'un arc E*e*, on tirera les ordonnées EA, *ea*, & les tangentes EF, *ef*, & une autre ordonnée *gb* infiniment proche de *ea*, ſur laquelle on tirera la perpendiculaire *en*, & ſi on nomme *a* la ſoûtangente *af* qui par la nature de la courbe eſt une quantité conſtante, l'ordonnée *ae*, *y*, les deux triangles ſemblables, *eaf*, *enb*, donneront, $ae\ (y) . ef\ (\sqrt{aa+yy}) :: bn\ (dy) . be = \frac{dy}{y}\sqrt{aa+yy}$: or cette différentielle ſe rapporte à la forme 49, puiſque $n = 2$, & la comparaiſon des termes donne $\theta = 0$, $D = 1$, $z^n = yy$, $e = aa$, $f = 1$, & $\int \frac{dy}{y}\sqrt{aa+yy} = \sqrt{aa+yy} - \frac{a}{2}\left\{\frac{CP}{AP}\right\} = \sqrt{aa+yy} - a\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa+yy}}{a-\sqrt{aa+yy}}}\right\}$, OP

étant à OA, comme $\sqrt{aa+yy}$ à a : mais parceque $\overline{a+\sqrt{aa+yy}} \times \overline{a-\sqrt{aa+yy}} = -yy$, on aura $\sqrt{\frac{a+\sqrt{aa+yy}}{a-\sqrt{aa+yy}}} = \frac{a+\sqrt{aa+yy}}{y} = \frac{y}{a-\sqrt{aa+yy}}$; en choisissant cette derniére valeur comme étant la plus commode dans cet exemple, l'intégrale est $\sqrt{aa+yy} - a\left\{\frac{y}{a-\sqrt{aa+yy}}\right\} = ef - af\left\{\frac{ea}{af-ef}\right\}$, ou plûtôt $ef - af\left\{\frac{ea}{ef-af}\right\}$ suivant ce qui a été remarqué dans l'art. 24. Par la même raison pour le point E on auroit l'intégrale $EF - AF\left\{\frac{AE}{EF-AF}\right\}$, & de cette intégrale ôtant la précédente, on trouve pour reste $EF - ef + af\left\{\frac{ae}{ef-af}\right\} - AF\left\{\frac{AE}{EF-AF}\right\}$ qui est la valeur de l'arc Ee ; cet arc sera donc connu en évaluant les termes $af\left\{\frac{ae}{ef-af}\right\}$, $AF\left\{\frac{AE}{EF-AF}\right\}$ par le moyen de la formule $M \times l \times r$, comme dans le premier Problême. On peut donner à cette intégrale la construction générale suivante.

Ayant pris sur EA la partie $AL = EF - AF$, on tirera LM paralléle à l'asymptote qui rencontre la courbe au point M, & puisque l'on sçait que la partie de l'asymptote comprise entre deux ordonnées

eſt le logarithme du rapport qui eſt entr'elles en prenant la ſoûtangente pour module, il s'enſuit que $LM = AF \left\{ \frac{AE}{EF - AF} \right\}$: on prendra pareillement ſur ea la partie $al = ef - af$, & tirant lm parallèle à l'aſymptote qui rencontre la courbe en m, on aura $lm = af \left\{ \frac{ae}{ef - af} \right\}$, ce qui donne l'arc $Ee = EF - ef + lm - LM$. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME IV.

114. *TROUVER la longueur d'un arc de la* Ciſſoïde.

SOIT A le ſommet de la Ciſſoïde AP (*fig.* 43.), AB le diamétre du cercle générateur, & BE ſon aſymptote ; tirant une ordonnée quelconque PQ, & nommant AB, a ; BQ, x ; PQ, y ; la nature de la courbe donne $y = \overline{a - x}\sqrt{\frac{a - x}{x}}$, d'où l'on tire $dy = -\frac{adx + 2xdx}{2x}\sqrt{\frac{a - x}{x}}$, & $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ax - \frac{3}{2}dx}{2} \times \sqrt{a + 3x}$ ou plutôt $-\frac{ax - \frac{3}{2}dx}{2}\sqrt{a + 3x}$, parce qu'on cherche l'arc AP & non pas l'arc infini PO. Cette différentielle comme on voit ſe rapporte à la forme 50, parce que $n = 1$, & en comparant les termes on trouve $\theta = -1$, $D = \frac{a}{2}$, $e = a$, $f = 3$, & $\int -\frac{ax - \frac{3}{2}dx}{2}\sqrt{a + 3x} = a\sqrt{\frac{a + 3x}{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$

$\left\{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}\right\}$, ou plutôt, parce que $\overline{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}$ $\times\overline{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}=-\frac{a}{x}$, $a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}-a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{a+3x}}{\sqrt{a}}\right\}$; mais parce que cette intégrale doit être nulle lorsque $x=a$, on voit qu'il en faut retrancher $2a-a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right\}$; par conséquent l'intégrale complette est $a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}-2a+a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right\}-a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{a+3x}}{\sqrt{a}}\right\}=a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}-2a+a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{3x}+\sqrt{a+3x}}\right\}$ par l'article 10. on trouvera donc l'arc AP par le moyen des logarithmes. Pour donner une construction géométrique de la solution de ce Problême, il faut tirer par le milieu L de l'ordonnée PQ la ligne ALE qui rencontre l'asymptote au point E, & la similitude des triangles AQL, ABE, donne, AQ $(a-x)$.AL $\left\{\sqrt{a-x^2}+\frac{yy}{4}\right\}$ :: AB(a) . AE $=\frac{a}{a-x}\times\sqrt{a-x^2}+\frac{yy}{4}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a+3x}{x}}$, ce qui donne $a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}-2a=2$AE -2AB, qui sont les deux premiers termes de l'intégrale : on appercevra plus aisément de quelle maniére on doit construire le terme $a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{3x}+\sqrt{a+3x}}\right\}$ en le multipliant & le divisant par

$\sqrt{a}$, ce qui donne $a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3aa}+2a}{\sqrt{3ax}+\sqrt{aa+3ax}}\right\}$; on tirera donc la ligne AF qui rencontre l'asymptote en F, & qui fasse avec BA l'angle BAF de 60 degrés, ou, ce qui revient au même, du centre A & du rayon 2AB on décrira un arc de cercle qui coupera l'asymptote en F, & on aura $AF = 2a$, $BF = \sqrt{3aa} = a\sqrt{3}$: on prendra aussi BD en sorte que BQ . BD :: BD . BA, ce qui donnera $BD = \sqrt{ax}$, & tirant DG parallèle à AF, les triangles semblables AFB, DGB donneront $BG = \sqrt{3ax}$, & menant AG, on aura $AG = \sqrt{aa+3ax}$; par conséquent $a\sqrt{3}\left\{\frac{\sqrt{3aa}+2a}{\sqrt{3ax}+\sqrt{aa+3ax}}\right\} = BF\left\{\frac{BF+AF}{BG+AG}\right\}$.

Si l'on veut se servir de la construction de M. Côtes on multipliera & on divisera le terme $3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left\{\frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{3x}+\sqrt{a+3x}}\right\}$ par $\sqrt{\frac{a}{3}}$, ce qui le réduira à cette forme $3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left\{\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}\right\}$, & tirant la droite AC qui rencontre l'asymptote en C, & qui fasse avec AB l'angle BAC de 30 degrés, BC sera la moitié de AC, & par conséquent $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 3\overline{BC}^2 = aa$, & $BC = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, & $AC = \sqrt{\frac{4}{3}aa}$, ensuite prenant $BD = \sqrt{ax}$ comme dans la construction précédente, & menant DC, on aura $DC = \sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}$, d'où

l'on trouve $3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\left\{\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}\right\}=3BC\left\{\frac{AB+AC}{BD+DC}\right\}$ $=BC\left\{\frac{\overline{AB+AC}^{3}}{\overline{BD+DC}^{3}}\right\}$, donc l'intégrale totale ou l'arc Ee est égal à $2AE-2AB+BC\left\{\frac{\overline{AB+AC}^{3}}{\overline{BD+DC}^{3}}\right\}$.

C. Q. F. T.

Usage de la Théorie pour la quadrature des Courbes.

ENTRE le grand nombre des lignes courbes dont on peut trouver la surface par cette théorie, il suffira d'en apporter quelques-unes pour en faire connoître l'usage.

PROBLÈME V.

115. *TROUVER la surface de la courbe appellée* la figure des Secantes.

DANS un cercle donné QS (*fig.* 44.) décrit du centre O & du rayon OQ qu'on tire la tangente infinie QP, & par tous les points S de la circonférence les sécantes OP; tirant aussi la droite AR égale au quart de la circonférence, & élevant la perpendiculaire AD = QO, on prendra AB = QS, & on menera BC = OP, & ainsi on formera la courbe DC: si maintenant on tire la sécante Op infiniment proche de OP, qui rencontre la circonférence en s,

& Pϖ perpendiculaire ſur Op, & qu'en prenant Bb = Ss, on méne l'ordonnée bc, nommant OQ ou AD, r; QS ou AB, x; OP ou BC, y; les triangles ſemblables OQP, Pϖp donneront, QP $(\sqrt{yy - rr})$ OQ (r) :: ϖp (dy) . P$\varpi = \frac{rdy}{\sqrt{yy - rr}}$; & les ſecteurs ſemblables POϖ, SOs, OP (y) . OS (r) :: Pϖ $\left\{\frac{rdy}{\sqrt{yy - rr}}\right\}$. S$s = \frac{rrdy}{y\sqrt{yy - rr}}$ = Bb = dx, ce qui donne $ydx = \frac{rrdy}{\sqrt{yy - rr}}$ = BbcC différence de l'eſpace ADCB.

Cette différentielle ſe rapporte à la forme 48, & la comparaiſon des termes donne $n = 2$, $\theta = 0$, D = rr, $e = -rr$, $f = 1$, $z^n = yy$, & $\int \frac{rrdy}{\sqrt{yy - rr}} = \frac{rr}{2}\left\{\frac{CP}{AP}\right\} = rr\left\{\sqrt{\frac{y + \sqrt{yy - rr}}{y - \sqrt{yy - rr}}}\right\}$; mais parce que $\overline{y + \sqrt{yy - rr}} \times \overline{y - \sqrt{yy - rr}} = rr$, on aura $rr\left\{\sqrt{\frac{y + \sqrt{yy - rr}}{y - \sqrt{yy - rr}}}\right\} = rr\left\{\frac{y + \sqrt{yy - rr}}{r}\right\}$ ou $rr\left\{\frac{r}{y - \sqrt{yy - rr}}\right\}$, c'eſt-à-dire, l'eſpace ADCB = $\overline{OQ}^2 \left\{\frac{OP + PQ}{OQ}\right\}$ ou $\overline{OQ}^2 \left\{\frac{OQ}{OP - QP}\right\}$. *C. Q. F. T.*

Ce Problême eſt d'uſage dans la navigation,

PROBLEME

PROBLÊME VI.

116. *TROUVER la quadrature de l'espace* OAQP *de la courbe* AQ (fig. 45.) *dont la nature, en nommant* OA, a; *l'abscisse* AP, x; *l'ordonnée* PQ, y; *est exprimée par cette équation* aay + xxy = a^3.

De l'équation de la courbe on tire $y = \frac{a^3}{aa + xx}$, ce qui donne $ydx = \frac{a^3dx}{aa + xx}$ pour la différence de l'espace variable OAQP. On voit que cette différentielle appartient à la seconde forme, & que $n = 2$, $\theta = 0$, $D = a^3$, $e = aa$, $f = 1$, $z^n = xx$, d'où par le premier cas de cette forme on a $\int \frac{a^3dx}{aa + xx} = \frac{a^3}{2}\sqrt{\frac{1}{aa}} \times \psi(PBO) = aa\,(PBO)$, puisque $\psi = 2BO = 2$: ainsi cette intégrale dépend de la mesure d'un angle, dont le rayon est à la tangente comme OA à OP, ou comme a à x, d'où il est clair qu'en tirant AP, l'angle PBO de la forme est le même qu'ici l'angle OAP, & que par conséquent $\int \frac{a^3dx}{aa + xx} = aa\,(OAP) = \overline{AO}^2\,(OAP)$.

On trouvera la valeur de cette intégrale par la formule N × R × r: par exemple si on veut que a = AO = 1, x = OP = $\frac{1}{2}$, on aura R = aa = 1, & puisque le rayon est à la tangente de l'angle OAP comme 2 à 1, on trouvera par les tables des sinus

& tangentes que cet angle eſt de 26°. 33'. 54" = 26, 565, ce qui donne N = 26, 565, & ſi pour la commodité de ces ſortes de calculs on fait une petite table des produits de 0, 01745329 par les nombres 1, 2, 3, &c.

1	- - -	= 0, 01745329.
2	- - -	= 0, 03490658.
3	- - -	= 0, 05235987.
4	- - -	= 0, 06981316.
5	× 0, 01745329 -	= 0, 08726645.
6	- - -	= 0, 10471974.
7	- - -	= 0, 12217303.
8	- - -	= 0, 13962632.
9	- - -	= 0, 15707961.

On aura N × R × r = 26,565 × 0,01745329 = 008726645

```
  010471974
 008726645
010471974
003490658
---------
0,46364664885
```

qui eſt la valeur de l'eſpace OAQP lorſque OP = $\frac{1}{2}$.

On trouveroit encore la même choſe très-facilement en ſe ſervant des logarithmes : car puiſque le logarithme du nombre 0, 01745329 eſt $\bar{2}$, 24187735, & 1, 4243098 celui de 26, 565, la ſomme $\bar{1}$, 66618715 répond au nombre 0, 4636466$\frac{1}{2}$, comme on vient de trouver.

Ce calcul deviendroit beaucoup plus pénible si suivant la méthode ordinaire on cherchoit l'intégrale de la différentielle $\frac{a^3dx}{aa+xx}$ par une serie infinie.

La construction géométrique de l'intégrale $\frac{\overline{AO}^2}{2}$ (OAP) est très-simple; car si du centre A & du rayon AO on décrit le quart de cercle OB, qui coupe AP en C, l'arc OC est la mesure de l'angle AOP au module AO, c'est-à-dire OC = AO (OAP), ce qui donne le secteur OAC = $\frac{\overline{AO}^2}{2}$ (OAP), & par conséquent l'espace OAQP est égal au double du secteur OAC, & l'espace total AEEO compris entre la courbe AE & son asymptote OE est le double du quart de cercle OAB. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME VII.

117. *TROUVER la surface d'une partie quelconque de la courbe* OBCLO (fig. 46.) *le rapport des abscisses* AF *ou* NH, x; *& des ordonnées* FH *ou* AN, y, *étant exprimé par cette équation* $x^4 - 6aaxx + 4xxyy + a^4 = 0$, *dans laquelle* a = QB, *qu'on suppose parallèle à* AN.

L'EQUATION de la courbe $x^4 - 6aaxx + 4xxyy + a^4 = 0$, ou $x^4 - 2aaxx + a^4 = 4aaxx - 4xxyy$, donne $aa - xx = \pm 2x\sqrt{aa - yy}$, d'où l'on tire

$x = \pm \sqrt{2aa - yy} \mp \sqrt{aa - yy}$, par conséquent on aura $xdy = dy\sqrt{2aa - yy} - dy\sqrt{aa - yy} =$ NHhn différence de l'espace AOHN, & $xdy = dy\sqrt{2aa - yy} + dy\sqrt{aa - yy} =$ NSsn différence de l'espace ACSN. Ces différentielles étant rapportées à la forme 50, on en trouvera les intégrales par des arcs de cercle de la maniére qu'on a vu dans le Problême précédent ; si on en veut une construction géométrique, il n'est nullement nécessaire d'avoir recours aux tables, les différentielles sont si simples d'elles-mêmes qu'elles en indiquent clairement la construction : car puisque l'équation de la courbe donne QA = QB, il n'y a qu'à décrire du centre A & des rayons AQ = a, AM = $a\sqrt{2}$, les quarts de cercle QD, MG, qui rencontrent les lignes NS, ns, en P, p, & E, e, & on aura NE = $\sqrt{2aa - yy}$, NP = $\sqrt{aa - yy}$, & EP = $\sqrt{2aa - yy} - \sqrt{aa - yy}$, ce qui donne EP$pe$ = $dy\sqrt{2aa - yy} - dy\sqrt{aa - yy}$; d'où l'on voit que EP est toujours égale à NH, & que les élémens EPpe sont tous égaux aux élémens NHhn, & par conséquent MQPE = AOHN, d'où il suit qu'en tirant BD paralléle à QA & tangente aux points B & D, on aura OADB = QMBD. De la même maniére on voit que ACSN = AQPN + AMEN, ACBD = 2AQD + QMBD, & puisque QMBD = OADB, il s'ensuit que OCBO =

2AQD = AMG. On peut voir aussi la quadrature de cette courbe (*de Methodo Integ. J. Bernoulli Lect.* 3ª.) & (*Anal. Dem. du P. Reyneau art.* 810.) *C. Q. F. T.*

PROBLÊME VIII.

118. *TROUVER la surface de la* Conchoïde de Nicomede.

SOIENT AE, Bk, (*fig.* 47.) les deux courbes qui composent la Conchoïde décrites du pole P, dont l'asymptote commun est CD perpendiculaire sur PC. Du pole P qu'on tire une ligne PD qui coupe les deux courbes en k & E, & l'asymptote en D, qu'on tire aussi une autre ligne Pm infiniment proche de PD, & du centre P ayant décrit le petit arc Dp, nommant AB, a; PC, b; CD, x; les triangles semblables PCD, Dpm donneront, PD $(\sqrt{bb+xx})$. PC (b) :: Dm (dx) . Dp $= \frac{bdx}{\sqrt{bb+xx}}$: or on sçait par la nature de la courbe que Ek = AB, & qu'ainsi Ek × Dp $= \frac{abdx}{\sqrt{bb+xx}}$ qui est la différence de l'espace AEkB. Cette différentielle se rapporte à la forme 48, & la comparaison des termes donne $n = 2$, $\theta = 0$, D $= ab$, $e = bb$, $f = 1$, $z^n = xx$, & $\int \frac{abdx}{\sqrt{bb+xx}}$

$$= \frac{ab}{2}\left\{\frac{CP}{AP}\right\} = ab\left\{\sqrt{\frac{x+\sqrt{bb+xx}}{x-\sqrt{bb+xx}}}\right\}$$: mais parce que

$\overline{x + \sqrt{bb + xx}} \times \overline{x - \sqrt{bb + xx}} = -bb$, on aura ab $\left\{\sqrt{\frac{x + \sqrt{bb + xx}}{x - \sqrt{bb + xx}}}\right\} = ab \left\{\frac{x + \sqrt{bb + xx}}{b}\right\} =$ AB × PC $\left\{\frac{CD + PD}{PC}\right\}$; on trouvera donc la valeur de cette intégrale par le moyen des logarithmes. Si l'on prend CM = PC $\left\{\frac{CD + PD}{PC}\right\}$, & qu'on tire par le point M la droite GML parallèle à AB & qui rencontre en G & L les lignes AG, BL perpendiculaires sur AB, il est clair que le parallélogramme AL est égal à l'espace Conchoïdal AEkB.

Si on veut avoir l'espace AEDC, on décrira du centre P & du rayon PE le petit arc Ee & puisque ED = AC les secteurs semblables DPp, EPe donne DP $(\sqrt{bb + xx})$. Dp $\left\{\frac{bdx}{\sqrt{bb + xx}}\right\}$ :: EP $\left\{\sqrt{bb + xx} + \frac{a}{2}\right\}$: Ee = $\frac{bdx}{\sqrt{bb + xx}} + \frac{ab}{2} \times \frac{dx}{bb + xx}$; d'où l'on tire $\overline{Ee + Dp} \times \frac{ED}{2} = \frac{abdx}{2\sqrt{bb + xx}} + \frac{aab}{8} \times \frac{dx}{bb + xx} =$ EepD différence de l'espace EDCA; mais on vient de voir que $\int \frac{abdx}{2\sqrt{bb + xx}} =$ ACMG, & rapportant la différentielle $\frac{aab}{8} \times \frac{dx}{bb + xx}$ à la seconde forme, on trouve que son intégrale est $\frac{aa}{2 \times 8} \times \psi$ (PBO) =

$\frac{aa}{8}$ (PBO), OP étant à OA, ou le rayon à la tangente comme b à x, ce qui fait voir que l'angle PBO est le même qu'ici l'angle DPC, donc l'espace AEDC est égal à AGMC $+ \frac{aa}{8}$ (DPC); si donc l'on prend sur l'asymptote la partie CN = CP (DPC), c'est-à-dire CN égale à l'arc CH décrit du centre P & du rayon PC & terminé par la ligne PD, & qu'on tire PN & par le point M la droite MF parallèle à PN, à cause des triangles semblables CPN, GMF; puisque CN est égale à l'arc CH mesure de l'angle DPC, GF sera égale à l'arc, qui mesure le même angle, décrit du rayon MG ou AC, & par conséquent GF $= \frac{a}{2}$ (DPC), & GF $\times \frac{GM}{2} = \frac{aa}{8}$ (DPC); donc le trapéze AFMC est égal à l'espace AEDC; d'où il suit aussi qu'en prolongeant la ligne FM jusqu'à ce qu'elle rencontre Bk en f, le trapéze CMfB est égal à l'espace CDkB. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME IX.

119. *TROUVER la quadrature de la courbe dont le rapport entre les abscisses* x, *& les ordonnées* y, *est généralement exprimé par cette équation* $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$.

On supposera que la surface de la courbe proposée est égale à la surface d'une autre courbe dont les ordonnées sont u & les abscisses z, d'où il suit

que leurs différences seront égales, c'est-à-dire $ydx = udz$; ensuite on supposera $\frac{x^s}{s} = z$, (s est un exposant indéterminé), ce qui donne $x = s^{\frac{1}{s}} z^{\frac{1}{s}}$, $x^\lambda = s^{\frac{\lambda}{s}} z^{\frac{\lambda}{s}}$, $x^\mu = s^{\frac{\mu}{s}} z^{\frac{\mu}{s}}$, $x^{s-1}dx = dz$, d'où l'on tire $y = \frac{udz}{dx} = ux^{s-1} = u \times s^{\frac{s-1}{s}} z^{\frac{s-1}{s}}$, & delà $ax^\lambda + bx^\mu y^\sigma + cy^\tau = as^{\frac{\lambda}{s}} z^{\frac{\lambda}{s}} + bu^\sigma \times s^{\frac{\overline{\mu + s - 1} \times \sigma}{s}} \times z^{\frac{\overline{\mu + s - 1} \times \sigma}{s}} + cu^\tau \times s^{\frac{\overline{s-1} \times \tau}{s}} z^{\frac{\overline{s-1} \times \tau}{s}} = 0$, & en divisant l'équation par $s^{\frac{\overline{\mu + s - 1} \times \sigma}{s}} \times z^{\frac{\overline{\mu + s - 1} \times \sigma}{s}}$, on aura $as^{\frac{\lambda - \mu - \overline{s-1} \times \sigma}{s}} z^{\frac{\lambda - \mu - \overline{s-1} \times \sigma}{s}} + bu^\sigma + cu^\tau \times s^{\frac{\overline{s-1} \times \overline{\tau - \sigma} - \mu}{s}} z^{\frac{\overline{s-1} \times \overline{\tau - \sigma} - \mu}{s}} = 0$: afin donc de faire ensorte que le troisiéme terme de cette équation ne soit point embarrassé du produit uz, on supposera l'exposant $\frac{\overline{s-1} \times \overline{\tau - \sigma} - \mu}{s} = 0$. Ce qui donne $s = \frac{\tau + \mu - \sigma}{\tau - \sigma}$, & $\frac{\lambda - \mu - \overline{s-1} \times \sigma}{s} = \frac{\lambda\tau - \mu\tau - \lambda\sigma}{\tau - \sigma + \mu}$: pour abréger, on supposera $\frac{\lambda\tau - \mu\tau - \lambda\sigma}{\tau - \sigma + \mu} = \beta$, & ainsi l'équation trouvée ci-dessus

ſus deviendra $as^{\beta}z^{\beta} + bu^{\sigma} + cu^{\tau} = 0$, ce qui donne $sz = \overline{-\frac{b}{a}u^{\sigma} - \frac{c}{a}u^{\tau}}^{\frac{1}{\beta}}$, & parce que $\int \overline{udz + zdu} = uz$, & $\int udz = uz - \int zdu = uz - \int \frac{du}{s} \times \overline{-\frac{b}{a}u^{\sigma} - \frac{c}{a}u^{\tau}}^{\frac{1}{\beta}}$, & que $udz = ydx$, & $uz = \frac{xy}{s}$, on aura $\int ydx = \frac{xy}{s} - \int \frac{du}{s} \times \overline{-\frac{b}{a}u^{\sigma} - \frac{c}{a}u^{\tau}}^{\frac{1}{\beta}}$.

Il eſt facile de connoître ſur le champ ſi la différentielle $\frac{du}{s} \times \overline{-\frac{b}{a}u^{\sigma} - \frac{c}{a}u^{\tau}}^{\frac{1}{\beta}}$ eſt compriſe dans la théorie qu'on a donnée, & par conſéquent ſi la courbe propoſée eſt exactement quarrable, ou ſi ſa quadrature dépend des ſections coniques, ou de quelqu'autre courbe d'un dégré plus élevé : c'eſt ce que M. NEWTON avoit découvert autrefois, comme il l'aſſure dans une lettre qu'il écrivit à M. COLLINS datée du 8 Novembre 1676.

Soit donc l'équation de la courbe dont il faut trouver la ſurface, $x^3 - axy + y^3 = 0$, & on aura $a = 1$, $b = -a$, $c = 1$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $\sigma = 1$, $\tau = 3$, $s = \frac{3}{2}$, $\beta = 1$, ce qui donne $\int ydx = \frac{2xy}{3} - \int \frac{2du}{3} \times \overline{au - u^3} = \frac{2xy}{3} - \frac{auu}{3} + \frac{u^4}{6}$, ou plutôt $\frac{2xy}{3} - \frac{ayy}{3x} + \frac{y^4}{6xx}$ en mettant au lieu de u ſa valeur $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$, mais

à cause de l'équation $x^3 - axy + y^3 = 0$, la quantité $\frac{2xy}{3} - \frac{ayy}{3x} + \frac{y^4}{6xx}$ se réduit à $\frac{xy}{2} - \frac{ayy}{6x}$; on trouvera donc exactement la surface de cette courbe.

Si l'équation de la courbe étoit $x^5 - x^3yy + ggy^4 = 0$, dans ce cas on auroit $\lambda = 5$, $\mu = 3$, $\sigma = 2$, $\tau = 3$, $a = 1$, $b = -1$, $c = gg$, d'où l'on tire $s = 4$, $\beta = -1$, & par conséquent la surface de la courbe égale à $\frac{xy}{4} - \int \frac{du}{4} \times \overline{u^2 - ggu^3}^{-1} = \frac{xy}{4} - \int \frac{u^{-2}du}{4 \times \overline{1 - ggu}}$: or la différentielle $\frac{u^{-2}du}{4 \times \overline{1 - ggu}}$ se rapporte à la premiére forme, son intégrale donc se trouvera par la mesure d'un rapport, & ainsi la quadrature de la courbe proposée dépend de celle de l'hyperbole. De cette maniére on peut chercher la quadrature de toute autre courbe dont l'équation se rapporte à celle du Problême. *C. Q. F. T.*

La méthode qu'on a donnée dans ce Problême pour réduire l'équation de la courbe en une nouvelle, dont la forme soit propre à faire connoître la nouvelle courbe de laquelle dépend sa quadrature, est principalement d'usage pour les équations où les deux variables x & y sont tellement mêlées ensemble, qu'on ne peut commodément les séparer par les méthodes ordinaires de résoudre les équations. Si l'équation de la courbe a plus de trois termes, on la reduira en une nouvelle d'une maniére tout-à-fait semblable à celle de ce Problême, comme on peut

voir *dans les coroll.* 7. *&* 8. *de la prop.* 9. *de Quadrat. Curv. Newt.*

PROBLÊME X.

120. *DANS une portion donnée* BD (fig. 48.) *d'une parabole quelconque dont l'axe est* AP, *ayant mené une ordonnée* PD, *& l'indéfinie* BO *paralléle à* PD, *qu'on tire la droite* AD *qui coupe* BO *en* C, *& qu'on tire* CQ *paralléle à* BP *qui coupe* PD *en* Q; *cela posé, qu'il faille trouver l'aire de la courbe* BQ *qui passe par tous les points* Q *ainsi déterminés.*

NOMMANT la donnée AB, a; BP, x; PD, y; la nature de toutes les paraboles peut généralement être exprimée par cette équation $y^m = x$, l'exposant m étant un nombre positif entier ou rompu; & à cause des triangles semblables APD, ABC, on a AP $(a+x)$. PD (y) ou $(x^{\frac{1}{m}})$ :: AB (a). BC $= \frac{ax^{\frac{1}{m}}}{a+x} =$ PQ, donc $ydx = \frac{ax^{\frac{1}{m}}dx}{a+x}$, or l'on voit que cette différentielle se rapporte aux tables, & qu'on en trouvera toujours l'intégrale. Par exemple si BD est la premiére parabole cubique, son équation est $y^3 = x$, & l'espace BQP $= \int \frac{ax^{\frac{1}{3}}dx}{a+x}$: en rapportant la différentielle $\frac{ax^{\frac{1}{3}}dx}{a+x}$ aux tables, on voit

qu'on a premiérement $n = 1$, & ensuite faisant $\theta n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1 = \frac{1}{3}$, l'on tire $\theta + \frac{\delta}{\lambda} = 1 + \frac{1}{3}$, ce qui fait voir que $\theta = 1$, & $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{3}$, & par conséquent cette différentielle appartient à la troisiéme forme ; & puisque $D = a$, $e = a$, $f = 1$, $z'' = x$, l'intégrale par le premier cas de cette forme est $3ax^{\frac{1}{3}} - 3aa \times \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{aa}} \times - \beta\,(BP : BO) + 1\,(DP : DO) + \psi\,(PBO)$; mais parce que β est la corde de la sixiéme partie de la circonférence dont le rayon est l'unité, & ψ la corde du double de cet arc, on aura $\beta = 1$, & $\psi = 1,7320508$, & l'intégrale sera $3ax^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}} \left\{\frac{DP}{BP}\right\} - a^{\frac{4}{3}} \times 1,7320508\,(PBO)$ ou bien $3ax^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}} \left\{\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}}\right\} - a^{\frac{4}{3}}, \times 1,7320508\,(PBO)$ à cause que $OP . OA :: x^{\frac{1}{3}} . a^{\frac{1}{3}}$: la valeur de cette intégrale se trouvera par les régles déja employées dans les Problêmes précédens. Si on veut que $x = 1$, & $a = 2$, & qu'on demande l'espace BQP ; dans ce cas on aura $3ax^{\frac{1}{3}} = 6$, & $a^{\frac{4}{3}} \left\{\frac{a^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}}\right\} = \sqrt[3]{16} \left\{\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}}\right\}$ on cherchera la valeur de cette expression par la formule $M \times l \times r$, le calcul en est facile si on le fait par les logarithmes ; on

trouve donc $\sqrt[3]{16}\left\{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}}\right\} = 1,697588$; ensuite cherchant l'angle PBO de la maniére qu'on a enseigné dans l'art. 75, on le trouve de 48°. 44'. 1", ou 48, 73361, & ainsi la formule N × R × r donne $\sqrt[3]{16} \times 1,7320508$ (PBO) $= 3,712272$, d'où l'on tire $6 - 1,697588 - 3,712272 = 0,590140$ qui est l'espace demandé. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME XI.

121. *TROUVER la quadrature des ellypses & des hyperboles de tous les genres.*

Soit une ellypse & une hyperbole quelconque AQ, (*fig.* 49. & 50.) dont l'abscisse AP est x, l'ordonnée PQ, y, & l'axe AB, a: par la nature de ces courbes le produit $\overline{AP}^m \times \overline{PB}^n$ est à $\overline{PQ}^{m+n}$ en raison donnée, comme de a à b, les exposans m & n étant des nombres positifs entiers ou rompus; ce qui donne $y^{m+n} = \frac{b}{a} x^m \times \overline{a \mp x}^n$, & $y\,dx = \sqrt[m+n]{\frac{b}{a}} \times x^{\frac{m}{m+n}} dx \times \overline{a \mp x}^{\frac{n}{m+n}}$: or puisque $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$, il est clair par l'art. 90. qu'on trouvera toujours l'intégrale de cette différentielle. Soit $m = 2$, & $n = 1$, & on aura $y\,dx = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \times x^{\frac{2}{3}} dx \times \overline{a \mp x}^{\frac{1}{3}}$, on trouvera l'intégrale dans ce cas par la forme 54.

Soit $m = 3$, & $n = 1$, & la différentielle ydx sera égale à celle-ci $\sqrt[4]{\frac{b}{a}} \times x^{\frac{1}{4}}dx \times \overline{a \mp x}^{\frac{1}{4}}$, laquelle se rapporte à la forme 58. Si $m = 3$ & $n = 2$, il viendra $ydx = \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \times x^{\frac{3}{5}}dx \times \overline{a \mp x}^{\frac{2}{5}}$: cette différentielle ne se trouve pas dans les tables parce qu'elles n'ont point été continuées jusqu'à ce point, on en aura l'intégrale par l'art. 90. & ainsi des autres suppositions. *C. Q. F. T.*

PROBLÈME XII.

122. *TROUVER la superficie d'un Sphéroïde formé par la révolution d'une ellypse autour de son axe.*

SOIT ANB (*fig.* 51.) la moitié d'une ellypse, dont le premier axe est AC, le second CB, le foyer F: tirant une ordonnée XN, & nommant CA, a; CB, b; CX, x; XN, y, on aura $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx}$, $dy = -\frac{bxdx}{a\sqrt{aa - xx}}$, & si l'on mene l'ordonnée xn infiniment proche de XN, la différence de la surface formée par la révolution de l'arc BN sera égale au petit arc Nn multiplié par la circonférence décrite du rayon XN, c'est-à-dire, si $\frac{1}{p}$ marque le rapport du rayon à la circonférence, cette petite surface sera $py\sqrt{dx^2 + dy^2}$: si on veut avoir un cercle dont la surface soit égale à celle du Sphéroïde, nommant z le rayon de ce cercle, pz en sera la circonférence, donc par l'hy-

pothése $\int py\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{pzz}{2}$, ce qui donne $\int 2y\sqrt{dx^2 + dy^2} = zz$: mais on a $2y\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2bdx}{aa}\sqrt{a^4 - \overline{aa - bb} \times xx} = \frac{2bdx}{aa}\sqrt{a^4 - ccxx}$ en supposant $cc = aa - bb = \overline{CF}^2$, & supposant encore $c . a :: a . m = \frac{aa}{c}$, on déduit $\frac{2bdx}{aa}\sqrt{a^4 - ccxx} = \frac{2bdx}{m}\sqrt{mm - xx}$: cette différentielle, comme on voit, se rapporte à la forme 50, par laquelle on trouve que son intégrale est $\frac{bx}{m}\sqrt{mm - xx} - bm$ (PBO), donc si dans XN prolongée on prend le point E ensorte que CE $= m$, on aura XE $= \sqrt{mm - xx}$, & tirant sur CE la perpendiculaire XL, les triangles semblables CEX, CXL donneront CE (m) . XE ($\sqrt{mm - xx}$) :: CX (x) . XL $= \frac{x}{m}\sqrt{mm - xx}$. De plus puisque dans la forme OP est à OA, c'est-à-dire, la tangente au rayon, ou bien le sinus au co-sinus de l'angle PBO comme $\sqrt{mm - xx}$ à x, ou si l'on veut le rayon au co-sinus comme m à x ou CE à CX, il est clair que si du centre C & du rayon CE on décrit le quart de cercle QEZ, on aura l'angle PBO = l'angle XCE, & EQ $= m$ (PBO) $= m$ (XCE) : mais parce que l'intégrale qu'on cherche doit s'évanouir lorsque $x = 0$, on voit que pour la

rendre complette il faut se servir de l'arc EZ, & ainsi au lieu de l'intégrale CB × XL — CB × EQ, on aura CB × XL + CB × EZ; si donc à XL on ajoute LM = EZ, on aura $z = \sqrt{CB \times XM}$, qui est le rayon du cercle dont la surface est égale à celle du Sphéroïde comprise entre les lignes CB & XN: delà il suit que cette surface est à celle du cercle dont le rayon est CB, comme XM à CB. Si l'ellypse ANB faisoit sa révolution autour du second axe CB, on trouveroit par un semblable calcul la surface du Sphéroïde, qui dans ce cas dépendroit de la mesure d'un rapport. *C. Q. F. T.*

De cette maniére on trouveroit aussi la superficie de l'hyperboloïde, & d'une infinité d'autres corps solides.

On peut aussi appliquer cette Théorie à la recherche de la solidité des corps.

Usage de la Théorie dans la solution des Problêmes de Méchanique.

QUOIQU'IL y ait un grand nombre de Problêmes de Méchanique qui se rapportent à la Théorie présente, cependant comme ils dépendent pour la plûpart d'un trop grand nombre de principes qu'on seroit obligé de supposer ici, j'ai crû qu'il suffiroit de n'en apporter que quelques-uns dont les solutions ne demandent que des principes assez connus; ceux qui voudront une application plus ample, pourront se satisfaire

ſatisfaire par la lecture de MM. CÔTES & MACLAURIN, & en s'exerçant eux-mêmes à réſoudre des Problêmes qu'ils ſe propoſeront ou qu'ils trouveront dans les ouvrages de Mécanique comme ceux de MM. NEWTON, EULER, &c.

PROBLEME XIII.

123. *ETANT donnée la hauteur du Mercure dans le Barométre ſur la ſurface de la Terre, trouver cette hauteur à une diſtance quelconque; la loi de la peſanteur étant en raiſon inverſe d'une puiſſance quelconque* n *de la diſtance au centre.*

SOIT S le centre de la Terre, (*fig.* 52.) A un point de ſa ſurface, & ſur SA prolongée prenant un point quelconque F, & nommant SA, r; SF, x; P la force de la peſanteur au point A, D la denſité connue de l'air en ce point; v ſa denſité en F; par l'hypothéſe on a $\frac{1}{r^n} . \frac{1}{x^n} :: P . \frac{r^n}{x^n} P =$ à la peſanteur en F, enſuite multipliant cette peſanteur par la denſité v, & par dx qui eſt en même raiſon que le petit volume d'air dont la hauteur eſt meſurée par dx, on aura $\frac{Pvr^n dx}{x^n}$ pour la différence de la preſſion que toute la colomne d'air au-deſſus du point F exerce ſur ce point; & puiſqu'on a trouvé par expérience que la denſité de l'air eſt proportionnelle à la force de la compreſſion, il s'enſuit que dv eſt en même

raiſon que $\frac{Pvr^n dx}{x^n}$, & qu'ainſi b étant une quantité conſtante, on aura $bdv = \frac{Pvr^n dx}{x^n}$, ou plutôt $-bdv = \frac{Pvr^n dx}{x^n}$ parce que la denſité diminue à meſure que la diſtance augmente. Donc $bv = \int \frac{Pvr^n dx}{x^n}$, & au point A, $bD = \int \frac{Pvr^n dx}{x^n}$. Maintenant on dira, la denſité du Mercure eſt à la denſité de l'air, comme l'élévation du Mercure dans le Barométre eſt à un quatriéme terme AC qui ſeroit la hauteur de l'Atmoſphére, ſi elle avoit par tout la même denſité qu'au point A; & dans cette hypothéſe la compreſſion que ſouffriroit le point A ſeroit comme la quantité d'air compris dans la colomne AC multipliée par ſa peſanteur, c'eſt-à-dire, cette compreſſion s'exprimeroit par $P \times D \times AC$; d'où l'on aura $P \times D \times AC = bD$, ce qui donne $b = P \times AC$, & ſubſtituant cette valeur de b, on a $-P \times AC \times dv = \frac{Pvr^n dx}{x^n}$, ou $-AC \times \frac{dv}{v} = \frac{r^n dx}{x^n}$; d'où (par l'art. 17.) l'on tire $-AC \times \log. v = -\frac{1}{n-1} \times \frac{r^n}{x^{n-1}}$, & au point A, $-AC \times \log. D = -\frac{r}{n-1}$, ôtant cette derniére équation de la précédente il vient $AC \times \log. D - AC \times \log. v = \frac{r}{n-1} - \frac{1}{n-1} \times \frac{r^n}{x^{n-1}}$, ou AC

$\times \log. \frac{D}{v} = -\frac{1}{n-1} \times \overline{\frac{r^n}{x^{n-1}} - r} = -\frac{1}{n-1} \times \overline{\frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^{n-1}} - SA}$: donc la quantité $-\frac{1}{n-1} \times \overline{\frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^{n-1}} - SA}$ est la mesure ou le logarithme du rapport entre les densités D & v au module AC. Soit l le logarithme de $\frac{D}{v}$ tel que le donnent les tables ordinaires, & par l'art. 18, on aura $AC \times \frac{l}{m} = -\frac{1}{n-1} \times \overline{\frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^{n-1}} - SA}$, ce qui donne $l = -\frac{m}{\overline{n-1} \times AC} \times \overline{\frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^{n-1}} - SA}$. Si la pesanteur est uniforme & constante, c'est-à-dire, si $n = 0$, alors on a $l = m \times \frac{AF}{AC}$; si elle est en raison inverse des quarrés des distances au centre S, qu'on sçait être la loi de la nature, la formule devient $l = \frac{m}{AC} \times \frac{SA \times AF}{SF}$. On appliquera cette formule à un ou deux exemples après qu'on aura déterminé les valeurs de SA & AC. Suivant les derniéres mesures faites par M. CASSINI le fils & M. LA CAILLE, le degré moyen d'un méridien de la Terre contient 57050 toises, & par conséquent le contour de la Terre supposée sphérique contient 20538000 toises (*la Méridienne de Paris, pag.* 114.) d'où il suit

que le rayon de la Terre eſt de 3268723 toiſes, qui eſt la valeur de SA. M. Côtes trouva par expérience que la denſité de l'air eſt à celle du mercure comme 1 à 11900, & que le mercure dans le Barométre ſe tient à la hauteur de $29\frac{1}{2}$ pouces, d'où par la proportion $1 . 11900 :: 29\frac{1}{2} . AC$, on trouve $AC = 29254$ pieds d'Angleterre ou 27469 pieds de France, ou bien 4578 toiſes. Ces valeurs ſuppoſées, on prendra l'obſervation faite ſur la montagne du *Puy de Domme* par M. Cassini de Thury & M. le Monnier, dont le premier détermina par des opérations géométriques la hauteur de cette montagne au-deſſus du Jardin des Minimes de 560 toiſes (*obſervations d'Hiſtoire Naturelle, à la fin de la méridienne de Paris, pag.* CLXXIV.)

Hauteur du mercure	aux Minimes	27 pouces	0 l. $\frac{6}{12}$.
	au *Puy de Domme*	23	9 $\frac{6}{12}$.

Pour chercher par la formule $l = \frac{m}{AC} \times \frac{SA \times AF}{SF}$ la hauteur du mercure ſur le *Puy de Domme*, on aura en ſe ſervant des logarithmes.

6, 5143782	6, 5144525	9, 2625662
2, 7481880	3, 6606758	— 10, 5373440.
9, 2625662	0, 3622157	$\bar{2}$, 7252222
	10, 5373440	

le logarithme $\bar{2}$, 7252222 correſpond au nombre 0, 0531156 qui eſt la valeur de l, c'eſt-à-dire, le logarithme de $\frac{D}{v}$: or l'élévation du mercure dans

le Barométre eſt proportionnelle à la denſité de l'air; d'où, en mettant 27 P. 0 l. $\frac{6}{12}$ pour D, l'on déduit $v =$ 23 P. 11 l. qui eſt l'élévation du mercure que donne le calcul pour la hauteur de 560 toiſes: la différence d'avec l'obſervation eſt de $1\frac{1}{2}$ ligne.

La ſeconde obſervation eſt tirée de l'*Hydrodynamique* de DANIEL BERNOULLI, où il rapporte pag. 214. que la hauteur de la montagne du *Pic de Tenerif* au-deſſus du niveau de la mer ayant été déterminée de 13158 pieds de *Paris* ou de 2193 toiſes on trouva la hauteur du Mercure { au niveau de la mer - - 27 P. 10 l. / au ſommet du *Pic* - - - 17 P. 5 l.

Faiſant un calcul ſemblable au précédent on trouve 17 P. 3 l. pour l'élévation du mercure, qui différe de l'obſervée de 2 lignes. On ne ſera point ſurpris de trouver ces différences entre le calcul & les obſervations, ſi on fait attention à toutes les variations qui ſurviennent dans l'Atmoſphére cauſées par les vapeurs & exhalaiſons, & ſurtout du froid & du chaud qui ſelon M. BERNOULLI dérangent beaucoup l'état naturel de l'air.

Pour avoir une conſtruction géométrique de ce Problême on prendra S*f* qui ſoit le dernier terme de la progreſſion géométrique ∺ SF . SA ..... S*f*, dont le nombre des termes eſt égal à $n + 1$, & prenant la partie infiniment petite FM on ſera comme auparavant ∺ SM . SA ..... S*m* : or la nature des progreſſions donne $\overline{SF}^{n} . \overline{SA}^{n} :: SF . Sf$, & $\overline{SM}^{n}$.

$\overline{SA}^n :: SM . Sm$, d'où l'on tire $\overline{SF}^{n-1} . \overline{SM}^{n-1} :: Sm . Sf$, & puisque $\overline{SM}^{n-1} = \overline{SF}^{n-1} + \overline{n-1} \times FM \times \overline{SF}^{n-2}$, on aura $\overline{SM}^{n-1} - \overline{SF}^{n-1}$, ou $(\overline{n-1} \times FM \times \overline{SF}^{n-2}) . \overline{SM}^{n-1} :: Sf - Sm$, ou $fm . Sf$, & mettant SF au lieu de SM, $\overline{n-1} \times FM . fm :: SF . Sf :: \overline{SF}^n . \overline{SA}^n$, ce qui donne $fm = \overline{n-1} \times FM \times \frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^n}$: donc sur Sf élevant la perpendiculaire fh qui soit proportionnelle à la densité au point F, & mp proportionnelle à la densité en M, ou ce qui est la même chose $fh = \frac{v}{n-1}$ & $mp = \frac{v}{n-1}$, on aura $fm \times fh = fh \times FM \times \frac{\overline{SA}^n}{\overline{SF}^n} = \frac{vr^n dx}{x^n}$; d'où il est clair suivant ce qu'on a fait voir au commencement du Problême que le petit espace $fhpm$ est comme la différence de la densité ou de la pression de l'air au point F, & si on fait de même pour tous les points M pris dans la ligne SF prolongée à l'infini, & qu'on tire la courbe BhpO qui passe par tous les points, h, p, &c. l'espace SfhO composé de tous les espaces $fhpm$ est proportionnel à la densité ou la pression de l'air au point F, & l'espace SABO à la densité en A : par conséquent puisque l'ordonnée fh a été prise proportionnelle à cette même densité, il s'ensuit que l'es-

pace $SfhO$ eſt toujours comme l'ordonnée fh, & qu'ainſi la courbe BhO eſt la *logarithmique*, puiſque l'on ſçait que l'eſpace compris entre la logarithmique & ſon aſymptote eſt égal au rectangle de l'ordonnée qui le termine multipliée par la ſoûtangente qui eſt conſtante, & puiſque dans notre conſtruction l'ordonnée au point S eſt infiniment petite. Qu'on tire la tangente ht qui rencontre l'aſymptote en t, & ſur fh la perpendiculaire pq, & les triangles pqh, tfh, donneront pq ou $fm = \frac{ft \times gh}{fh} = \frac{ft \times dv}{v}$, donc $fm \times fh = ft \times dv = \frac{vr^n dx}{x^n}$; en comparant cette équation avec cette autre $AC \times dv = \frac{vr^n dx}{x^n}$, on voit que $ft = AC$, c'eſt-à-dire, que la ſoûtangente de la logarithmique eſt égale à la hauteur de l'atmoſphére ſi elle avoit partout la même denſité qu'au point A.

Si la loi de la peſanteur étoit en raiſon directe d'une fonction quelconque de la diſtance au centre S, la logarithmique s'étendroit du point B vers le point F, & la conſtruction ſeroit à peu-près ſemblable à celle de l'autre cas. *C. Q. F. T.*

PROBLÊME XIV.

124. *LA loi de la peſanteur étant comme une puiſſance quelconque* n *de la diſtance au centre, déterminer le temps de la chûte d'un corps qui tombe en ligne droite.*

SOIT S (*fig.* 53.) le centre ; SA une droite donnée par laquelle on suppose qu'un corps tombe librement ; prenant un point quelconque P, & nommant SA, a ; SP, x ; le temps de la chûte par AP, t ; la vitesse du corps au point P, v ; la vitesse, qu'on peut regarder comme uniforme pour un intervalle de temps infiniment petit, est en raison directe de l'espace parcouru, & inverse du temps, c'est-à-dire, $v = \frac{dx}{dt}$ ou plutôt $v = \frac{-dx}{dt}$; & la force accélératrice étant par l'hypothése comme x^n, est aussi en raison directe de la vitesse qu'elle produit durant un instant infiniment petit, & en raison réciproque de cet instant, ce qui donne $x^n = \frac{dv}{dt}$: de ces deux équations l'on tire $vdv = -x^n dx$ & delà $\frac{vv}{2} = -\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ou plutôt, comme cette vitesse est nulle lorsque $x = a$, $\frac{vv}{2} = \frac{1}{n+1} \times \overline{a^{n+1} - x^{n+1}}$, c'est-à-dire que v est proportionnelle à $\sqrt{\frac{1}{n+1} \times \overline{a^{n+1} - x^{n+1}}}$; mettant donc cette valeur dans l'équation $v = \frac{-dx}{dt}$, on a $dt = \frac{-dx}{\sqrt{\frac{1}{n+1} \times \overline{a^{n+1} - x^{n+1}}}}$.

Si la pesanteur est réciproquement comme le quarré de la distance, c'est-à-dire si $n = -2$, alors on

on a $dt = \frac{-dx}{\sqrt{-a^{-1} + x^{-1}}} = \frac{-\sqrt{a} \times x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a - x}}$: cette différentielle se rapporte à la forme 48, par laquelle on trouve $t = \sqrt{ax - xx} + a$ (PBO) négligeant la constante $\sqrt{a}$; d'où il est clair qu'en décrivant sur le diamétre SA (*fig.* 53.) la demi-circonférence ADS, & tirant l'ordonnée PD, on aura PD $= \sqrt{aa - xx}$, & puisque le rayon est à la tangente ou le co-sinus au sinus de l'angle PBO, comme x à $\sqrt{ax - xx}$, le module étant SA, il n'y a qu'à décrire du centre S avec le rayon SA l'arc AN, & mener la droite SDN, & l'on voit que l'angle PBO de la forme est ici PSD, & a (PBO) = AS (PSD) = AN, mais l'arc AN est égal à l'arc AD, donc t = PD + AD, c'est-à-dire que le temps de la chûte par AP est proportionnel à PD + AD.

Maintenant qu'on prenne la partie AC infiniment petite, & tirant la perpendiculaire CBM qui coupe les deux circonférences en B & M, l'on voit que pendant que le corps tombe de A en C, un autre corps faisant sa révolution dans le cercle AN autour du centre S décriroit l'arc AM, mais puisque AC $= \frac{\overline{AB}^2}{AS} = \frac{\overline{AM}^2}{2AS}$, on tire AM $=$ AB$\sqrt{2}$; & puisque l'arc infiniment petit AB se confond avec son sinus CB, le temps de la chûte par AC sera représenté par 2AB : de plus, l'on sçait que les vitesses des corps

qui font leurs révolutions dans des cercles concentriques ſont en raiſon réciproque des racines quarrées des rayons, d'où il ſuit que, r marquant le rayon du cercle dans lequel un corps décriroit un arc égal à 2AB tandis qu'un autre corps décrit dans le cercle AN l'arc AM, on aura $AB\sqrt{2} . 2AB :: \sqrt{r} . \sqrt{a}$, ce qui donne $r = \frac{a}{2}$, par conſéquent décrivant du centre S avec le rayon $SO = \frac{AS}{2}$ la demi-circonférence OFH, & prenant l'arc $OF = PD + AD$, pendant qu'un corps tomberoit de A en P, un autre corps décriroit uniformement l'arc OF, & ainſi le temps de la chûte par la ligne entiére AS eſt égal à la moitié du temps périodique du corps qui décrit le cercle OFH. C'eſt auſſi la conſtruction qu'en donne M. *Nevvton prop.* 35. *&* 36. *du premier livre des Princ. Mathem.*

Delà il eſt facile de ſupputer le temps qu'il faudroit à une planéte pour tomber de ſon orbite au centre du mouvement : car les temps périodiques dans différens cercles étant comme les racines quarrées des cubes des rayons, le temps de la révolution dans le cercle AN eſt à celui de la révolution dans le cercle OFH comme $\sqrt{8}$ à 1, ou $2\sqrt{2}$ à 1; donc ſi T dénote le temps de la révolution dans le cercle AN, le temps de la chûte par AS ſera $\frac{T}{4\sqrt{2}}$. Si on veut appliquer ce calcul à la Lune, on aura $T = 27^{j}$.

$7^h. 43'$, ce qui donne $\frac{T}{4\sqrt{2}} = 4^j. 19^h. 55'$, qui eſt l'intervalle du temps que la Lune employeroit à tomber de ſon orbite juſqu'au centre de la Terre dans l'hypothéſe que la peſanteur eſt partout réciproquement comme le quarré de la diſtance à ce centre.

Si la peſanteur eſt proportionnelle à la diſtance SP, alors $n = 1$, & $dt = \frac{-dx}{\sqrt{\frac{1}{2} \times aa - xx}}$, ou ſimplement $dt = \frac{-dx}{\sqrt{aa - xx}}$, & par la forme $48\,t = 1$ (PBO) ou a (PBO) en multipliant l'intégrale par la donnée a; d'où il ſuit que puiſque le ſinus eſt au co-ſinus de l'angle PBO comme $\sqrt{aa - xx}$ à x, ou bien le rayon au co-ſinus comme a à x, il ne faut que du centre S avec le rayon SA décrire le quart de cercle AEQ *(fig. 54.)*, & tirant le ſinus PE, on aura l'arc AE $= a$ (PBO); donc le temps de la chûte par AP eſt proportionnel à l'arc AE. Enſuite prenant la partie AC infiniment petite, & menant le ſinus CM, puiſqu'un corps tomberoit de A en C dans le temps qu'un autre décriroit l'arc AM, & puiſque le temps de la chûte par AC eſt au temps de la chûte par AS comme AM à AQ, & que le temps qu'un corps employeroit à décrire l'arc AM eſt à celui qu'il employeroit à décrire le quart de cercle AMQ, comme AM à AQ, il eſt évident que le temps de la chûte par AS eſt égal au temps

qu'un autre corps employeroit à décrire le quart de cercle AMQ.

Delà il eſt facile dans cette hypothéſe de trouver le temps de la chûte des corps : ainſi puiſque cette loi a lieu dans l'intérieur de la terre, & puiſque le temps périodique de la Lune eſt à celui d'une Planéte qui feroit ſa révolution à la diſtance du rayon de la Terre, comme $60^{\frac{3}{2}}$ à 1, on trouve que le temps périodique de cette nouvelle Planéte ſeroit de $1^{h}. 24\frac{1}{2}'$, dont le quart, ſçavoir 21 minutes, eſt le temps qu'il faudroit à un corps pour tomber de la ſurface de la Terre au centre. Ceci s'accorde avec *la prop.* 38. *lib.* 1. *Princ. Mathem. Newt. C. Q. F. T.*

PROBLEME XV.

125. *LA gravité étant ſuppoſée uniforme, déterminer le mouvement d'un corps qui tombe ou qui monte dans un milieu dont la denſité eſt partout égale, & dont la réſiſtance eſt comme une puiſſance quelconque* n *de la viteſſe du corps qui le traverſe.*

SOIT nommée p la peſanteur, r la réſiſtance du milieu, & lorſque le corps tombe, x l'eſpace parcouru par le corps depuis le commencement de ſa chûte, t le temps qu'il a employé à le parcourir, & v la viteſſe acquiſe pendant le temps t. Cela poſé, on peut regarder le mouvement du corps comme uniforme pendant un inſtant infiniment petit, & par conſéquent durant cet inſtant l'eſpace

parcouru eſt en raiſon compoſée de la viteſſe & du temps, c'eſt-à-dire $dx = vdt$. Puiſque la peſanteur accélére le mouvement du corps, & que la réſiſtance du milieu le retarde, la premiére étant ſuppoſée plus forte que la ſeconde, il n'y a que leur différence $p - r$ qui accélére le mouvement du corps; or toute force accélératrice eſt meſurée par la viteſſe qu'elle produit pendant un inſtant diviſée par ce même inſtant, ainſi $p - r = \frac{dv}{dt}$: de ces deux équations ou proportions on tire $dx = \frac{vdv}{p-r}$; mais puiſque par l'hypothéſe r eſt en même raiſon que v^n ou plutôt $\frac{v^n}{p^{n-1}}$, mettant cette valeur de r dans la formule, il vient $dx = \frac{p^{n-1}vdv}{p^n - v^n}$, & $dt = \frac{p^{n-1}dv}{p^n - v^n}$.

Si la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe, on aura $n = 2$, & $dx = \frac{pvdv}{pp - vv}$, & $dt = \frac{pdv}{pp - vv}$: par la premiére forme on trouve $x = -\frac{p}{2}\left\{\frac{pp - vv}{pp}\right\} = \frac{p}{2}\left\{\frac{pp}{pp - vv}\right\}$: mais de ce que $r = \frac{vv}{p}$, on déduit $pp \cdot vv :: p \cdot r$, & $pp \cdot pp - vv :: p \cdot p - r$, ce qui donne $x = \frac{p}{2}\left\{\frac{p}{p-r}\right\}$: par la ſeconde forme on trouve $t = \frac{1}{2}\left\{\frac{p+v}{p-v}\right\}$; donc l'eſpace x eſt proportionnel à la meſure ou au logarithme du rapport

$\frac{p}{p-r}$, & le temps t à la mesure ou au logarithme du rapport $\frac{p+v}{p-v}$: c'est pourquoi pour en avoir une construction géométrique, on tirera la droite CA (*fig.* 55.) qui représentera la pesanteur p, on prendra AK pour marquer la résistance r, & AP ensorte qu'on ait AC . AP :: AP . AK ; d'où il est clair que AP marque la vitesse v ; ensuite élevant la perpendiculaire CH, on décrira entre les asymptotes CH, CA, une hyperbole quelconque NB, & menant les ordonnées KN, AB, on aura l'espace ABNK pour la mesure ou le logarithme du rapport $\frac{CA}{CK} = \frac{p}{p-r}$, donc l'espace x est proportionnel à l'espace ABNK : prenant aussi dans CA prolongée Ap = AP, & menant les ordonnées PM, pm, l'espace hyperbolique PMmp est la mesure du rapport $\frac{Cp}{CP} = \frac{p+v}{p-v}$, donc le temps t est proportionnel à l'espace PMmp.

Si le corps est jetté en haut, dans ce cas la pesanteur & la résistance du milieu concourent toutes deux pour retarder le mouvement du corps, ce qui fait qu'on a $p + r = \frac{-dv}{dt}$, & $dx = vdt$, d'où l'on tire $dx = \frac{-vdv}{p+r} = \frac{-p^{n-1}vdv}{p^n+v^n}$, & $dt = \frac{-dv}{p+r} = \frac{-p^{n-1}dv}{p^n+v^n}$: si $n = 2$, alors il vient $dx =$

$\frac{-pvdv}{pp+vv}$, & $dt = \frac{-pdv}{pp+vv}$; par la premiére forme on a $x = -\frac{p}{2}\left\{\frac{pp+vv}{pp}\right\} = -\frac{p}{2}\left\{\frac{p+r}{p}\right\}$, & par la ſeconde forme $t = -1$ (PBO) le rayon étant à la tangente de l'angle PBO comme p à v: d'où il eſt clair qu'en prenant de l'autre côté du point A, Ak = AK, Ap = AP, & tirant l'ordonnée kl, l'eſpace hyperbolique ABlk eſt la meſure du rapport $\frac{Ck}{CA} = \frac{p+r}{p}$, (on a pris les points k & p de l'autre côté du point A à cauſe qu'on a $-\left\{\frac{p+r}{p}\right\}$), donc l'eſpace x qui reſte à parcourir juſqu'à ce que le corps ait perdu tout ſon mouvement eſt proportionnel à l'eſpace ABlk. Enſuite prolongeant la ligne BA enſorte que AD = AC, & du centre D avec le rayon DA décrivant un arc de cercle AE, & tirant la ſécante Dp qui coupe le cercle en t, l'arc At eſt la meſure de l'angle ADt dont le rayon eſt à la tangente comme AD à Ap, ou comme p à v, par conſéquent l'angle ADt eſt égal à l'angle PBO, & l'arc At proportionnel au temps qui reſte au mobile pour monter avant que de perdre tout ſon mouvement.

Et ſi l'expoſant n étoit égal à un autre nombre quelconque poſitif ou négatif, entier ou rompu, on trouveroit toujours la ſolution du Problême par les autres formes des tables. *C. Q. F. T.*

Delà on peut trouver l'eſpace parcouru dans un temps donné par un corps qui deſcend ou monte dans un milieu réſiſtant. Soit AB, b; & l'eſpace que le corps parcourt en deſcendant étant exprimé par ABNK, la différence de cet eſpace eſt $\frac{bpdr}{p-r}$ ou $\frac{2bpvdv}{pp-vv}$, dans l'hypothéſe que la réſiſtance eſt comme le quarré de la viteſſe : enſuite nommant s l'eſpace que le corps décriroit uniformement dans un temps quelconque avec la viteſſe AC qui eſt la plus grande que le corps puiſſe acquérir en tombant dans le milieu réſiſtant, les différences des eſpaces parcourus dans un temps donné infiniment petit ſont comme les viteſſes, donc on aura $ds \,.\, dx$ ou $\frac{2bpvdv}{pp-vv}$ :: AC ou p . AP ou v; ce qui donne $ds = \frac{2bp^2dv}{pp-vv}$, & par la ſeconde forme on tire $s = bp\left\{\frac{p+v}{p-v}\right\} =$ PMmp; donc les temps étant ſuppoſés égaux, on a $x \,.\, s$ :: ABNK . PMmp.

Si le corps montoit, on auroit $ds \,.\, dx$ ou $\frac{-2bpvdv}{pp+vv}$ :: $p \,.\, v$, ce qui donneroit $s = -2b \times At$, & ſi on prend AB $= \frac{AC}{4}$, on aura $2b \times At = \frac{p}{2} \times At =$ au ſecteur ADt, d'où l'on tire $x \,.\, s$ :: ABlk . ADt.

Maintenant ſoit P le temps que le corps employe en

en descendant dans le milieu résistant pour acquérir la vitesse AP, ce temps, comme nous avons vû, est exprimé par l'espace PM*mp*; soit *t* le temps que le corps employeroit à acquérir cette même vitesse AP en tombant librement, & si on mene infiniment proche de BA les deux ordonnées *ba*, *eq*, également éloignées de BA, & qu'on tire BD paralléle à AC; *dt* représentera le temps que le corps employe à acquérir la vitesse infiniment petite A*a* soit qu'il tombe librement ou dans le milieu résistant; ainsi on aura *dt* . *t* :: A*a* . AP :: AB*ba* . ABQP; & aussi *dt* . P :: *abeq* . PM*mp*; par conséquent, puisque *abeq* = 2AB*ba*, il vient *t* . P :: 2ABQP . PM*mp* : & si G marque le temps qu'il faudroit au corps pour acquérir la vitesse AC en tombant librement, on aura G . P :: 2CABD . PM*mp*.

Si le corps monte, & que P dénote le temps à la fin duquel le corps aura perdu le reste A*p* de sa vitesse, & *t* le temps qui resteroit au corps, qui monteroit librement, pour perdre la même vitesse A*p*, on auroit *dt* . *t* :: A*q* . A*p*, & *dt* . P :: A*r* ou A*q* . A*t*; donc *t* . P :: A*p* . A*t*.

De ce qu'on vient de démontrer on déduira la formule que donne M. *Nevvton*, *prop.* 40. *lib.* 2. *Phil. Nat. Princ. Math.* pour trouver l'espace parcouru pendant un temps donné par un corps qui tombe dans un fluide : car nommant H la plus grande vitesse que le corps puisse acquérir en tombant & qui est représentée par AC, on a G . P ::

$2CA \times AB \,.\, PMmp$ ou $CA \times AB \left\{\frac{H+v}{H-v}\right\} :: 2 \,.\, 1 \left\{\frac{H+v}{H-v}\right\}$, ce qui donne en ſuppoſant $m = 0$, 43429448 &c. $\log. \frac{H+v}{H-v} = \frac{2mP}{G}$ (par l'art. 18.); ſoit $\frac{H+v}{H-v} = N$, & on aura $v = \frac{N-1}{N+1} H$, & $AK = \frac{vv}{H} = \frac{\overline{N-1}^2}{\overline{N+1}^2} H$ & par conſéquent $CK = \frac{4N \times H}{\overline{N+1}^2}$ & $\frac{CA}{CK} = \frac{\overline{N+1}^2}{4N}$; d'où en reprenant la proportion trouvée ci-deſſus, on a $x \,.\, s :: ABNK$ ou $\log. \frac{\overline{N+1}^2}{4N} \,.\, PMmp$ ou $\log. N$; ſoit F l'eſpace que parcourroit un corps en tombant librement pendant le temps G, & 2F ſera l'eſpace qu'il parcourroit uniformement durant le même temps avec la viteſſe H acquiſe à la fin de ce temps, ce qui donne $G \,.\, P :: 2F \,.\, s = \frac{2PF}{G}$, donc on aura $x = \frac{2PF}{G} \times \log. \frac{\overline{N+1}^2}{4N} \times \frac{1}{\log. N}$, mais $\frac{\overline{N+1}^2}{4N} = \frac{N \times \overline{N+1}^2}{4NN}$, & ſi on nomme L le logarithme de $\frac{N+1}{N}$ pris dans les tables ordinaires, on aura $2L = \log. \frac{\overline{N+1}^2}{NN}$ & $\log. \frac{N \times \overline{N+1}^2}{4NN} = 2L + \log. N - \log. 4$, & cette équation étant diviſée par

le log. N donne $\log. \frac{\overline{N+1}^2}{4N} \times \frac{1}{\log. N} = \frac{2L}{\log. N} + 1 - \frac{\log. 4}{\log. N}$; d'où en substituant au lieu du log. N sa valeur $\frac{2mP}{G}$, l'on trouve $x = \frac{2LF}{m} + \frac{2PF}{G} - \frac{F \times \log. 4}{m}$, ou puisque $\frac{2}{m} = 4,6051702$, & $\frac{\log. 4}{m} = \frac{0,60205999}{m} = 1,3862944$, on aura $x = 4,6051702\,LF + \frac{2PF}{G} - 1,3862944\,F$.

PROBLÊME XVI.

126. *L'ATTRACTION qu'exercent les particules de la matiére étant supposée en raison réciproque des quarrés des distances, trouver la force avec laquelle un sphéroide homogéne attire un corpuscule, placé sur l'extrémité de son axe.*

On suivra ici le raisonnement de M. Newton, & on donnera deux solutions de ce Problême, la premiére suivant la méthode de Newton, & l'autre suivant celle de M. Côtes, afin qu'en les comparant ensemble on voye que, quoique toutes les deux soient très-élégantes, la seconde néanmoins est plus simple dans sa construction & abrége beaucoup le calcul dans la pratique. Pour trouver l'attraction d'un solide, il faut auparavant déterminer celle d'une surface; c'est pourquoi sur la ligne PA (*fig.* 56.) soit élevée la perpendiculaire AE, laquelle si on suppose qu'elle tourne autour

de PA lui demeurant toujours perpendiculaire, décrira une surface circulaire; cela posé, si on suppose un corpuscule placé au point P, & qu'on tire à un point quelconque C la ligne PC & Pc infiniment proche de PC, & sur Pc la perpendiculaire Cm, nommant PA, a; PC, x; & l'attraction que le point A exerce sur le corpuscule étant supposée égale à l'unité, celle que le point C exerce sur le même corpuscule dans la direction PC sera $\frac{aa}{xx}$, & dans la direction PA $\frac{aa}{xx} \times \frac{a}{x}$; & puisque l'anneau circulaire compris entre les circonférences décrites des rayons AC, Ac, est proportionnel au produit AC $\times$ Cc, il s'ensuit que cet anneau attire le corpuscule P dans la direction PA avec une force proportionnelle à $\frac{a^3}{x^3} \times$ AC $\times$ Cc, mais à cause des triangles semblables PAC, Cmc, on a PC . AC :: Cc . mc, ce qui donne AC $\times$ Cc = PC $\times$ $mc = xdx$, par conséquent l'attraction de l'anneau est exprimée par $\frac{a^3dx}{xx}$ dont l'intégrale complette est $a^3 \times \overline{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}} = a^3 \times \frac{x-a}{ax}$, donc la force avec laquelle la surface du cercle décrit du rayon AC attire le corpuscule P dans la direction PA est proportionnelle à $\frac{PC - PA}{PC}$ ou à $1 - \frac{PA}{PC}$.

Maintenant ſoit une ligne courbe ACB (*fig.* 57.) qui faiſant ſa révolution autour de l'axe AB forme un corps ſolide, & qu'on tire une ordonnée quelconque ED, & ſi on ſuppoſe un corpuſcule placé au point P pris dans l'axe prolongé & qu'on tire PD, la force avec laquelle la ſurface du cercle décrit du rayon ED attire le corpuſcule P eſt proportionnelle, comme nous venons de voir, à $1 - \frac{PE}{PD}$, c'eſt-à-dire, nommant PA, a; AE, x; ED, y; à $1 - \frac{a+x}{\sqrt{a+x^2+yy}}$; multipliant cette quantité par dx, on voit que la différentielle $dx - \frac{adx+xdx}{\sqrt{a+x^2+yy}}$ exprime la différence de la force avec laquelle la partie du ſolide formée par la révolution de l'arc AD attire le corpuſcule P. Soit donc ACB une circonférence de cercle dont le centre eſt S, & nommant AS, b, la différentielle précédente deviendra $dx - \frac{adx}{\sqrt{aa+\overline{2a+2b}\times x}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa+\overline{2a+2b}\times x}}$, dont l'intégrale complette trouvée par la forme 47 eſt $x - \frac{2aa+3ab+\overline{a+b}\times x}{3\times\overline{a+b}^2}\times\sqrt{aa+\overline{2a+2b}\times x} + \frac{2a^3+3aab}{3\times\overline{a+b}^2}$; & lorſque $x = 2b$, alors $\sqrt{aa+\overline{2a+2b}\times x} = a+2b$, & l'intégrale dans

ce cas se réduit à $\frac{2b^3}{3 \times \overline{a+b}^2} = \frac{2\overline{AS}^3}{3\overline{PS}^2}$ qui marque l'attraction du corpuscule P vers la sphére ACBG.

Si la courbe ACB est une ellypse, dont les deux axes sont AB, GC; nommant AS, b; CS, r; le paramétre p; on aura $yy = px - \frac{p}{2b}xx$, & la différence de la force avec laquelle la portion du sphéroïde formée par la révolution de l'arc AD attire le corpuscule P est $dx - \frac{adx}{\sqrt{aa + \overline{2a+p} \times x + \frac{2b-p}{2b}xx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa + \overline{2a+p} \times x + \frac{2b-p}{2b}xx}}$: on trouvera facilement les intégrales des deux derniéres différentielles par la huitiéme forme des tables que donne M. NEWTON à la fin de son Traité *de Quadr. Curv.* ou bien on les trouvera encore par les articles 87 & 103 ci-devant, étant supposée connue l'intégrale de $dx\sqrt{aa + \overline{2a+p} \times x + \frac{2b-p}{2b}xx}$: or il est clair qu'en prolongeant ED en R ensorte que ER = PD = $\sqrt{aa + \overline{2a+p} \times x + \frac{2b-p}{2b}xx}$, & nommant PD ou ER, u, on aura $uu = aa + \overline{2a+p} \times x + \frac{2b-p}{2b}xx$, ce qui fait voir que la courbe MRKN qui passe par

tous les points R eſt une ſection conique, & que l'intégrale de $dx\sqrt{aa + \overline{2a + p} \times x + \frac{2b - p}{2b} xx}$ eſt l'eſpace AKRE, AK étant égale à PA & paralléle à ER; pour ce qui eſt de la courbe NKRM, on voit que c'eſt une hyperbole lorſque $2b > p$, une ellypſe lorſque $2b < p$, & une parabole lorſque $2b = p$; ce dernier cas n'a lieu que lorſque la courbe ACB eſt un cercle, lequel cas nous avons déja réſolu : nommant donc A l'eſpace AKRE, on trouve par les articles déja cités que l'intégrale de $\frac{adx}{\sqrt{aa + \overline{2a + p} \times x + \frac{2b - p}{2b} xx}}$ eſt

$$\frac{-\sqrt{8ab - 4ap} \times A + \sqrt{4ab - 2ap} \times ux + \sqrt{4aab + 2abp} \times u}{2aap + 4abp + bpp},$$

& celle de $\frac{xdx}{\sqrt{aa + \overline{2a + p} \times x + \frac{2b - p}{2b} xx}}$ eſt

$$\frac{\sqrt{8ab + 4bp} \times A - \sqrt{4ab + 2bp} \times ux - \sqrt{4aab} \times u}{2aap + 4abp + bpp};$$

& comme ces intégrales doivent s'évanouir lorſque $x = 0$, en les rendant complettes, on trouve que leur ſomme eſt $\frac{\sqrt{4a + 4b} \times A - \sqrt{2a + 2b} \times ux + \sqrt{2ab} \times u - \sqrt{2aab}}{2aa + 4ab + bp}$: enſuite faiſant $x = 2b$, $u = a + 2b$, A marquera l'eſ-

pace AKMB, & mettant aussi $2rr$ au lieu de bp à cause de la proportion $b . r :: 2r . p$, la somme ci-dessus deviendra $\frac{\overline{2a+2b} \times A - 2aab - 4abb - 4b^3}{aa+2ab+rr}$ laquelle étant ôtée de $2b$, on trouve pour reste $\frac{4aab + 8abb + 4b^3 + 2brr - \overline{2a+2b} \times A}{aa+2ab+rr} = \frac{2brr + \overline{2a+2b} \times \overline{2ab+2bb} - A}{aa+2ab+rr}$; mais si on tire la ligne KM le trapéze AKMB est égal à $2ab + 2bb$, par conséquent l'intégrale précédente se change en celle-ci $\frac{2brr - \overline{2a+2b} \times KMRK}{aa+2ab+rr} = \frac{2AS \times \overline{CS}^2 - 2PS \times KMRK}{\overline{PS}^2 + \overline{CS}^2 - \overline{AS}^2}$ qui exprime l'attraction que le sphéroïde homogéne exerce sur le corpuscule P: donc la force avec laquelle le corpuscule P est attiré par le sphéroïde est à celle avec laquelle il est attiré par la sphére dont le diamétre est AB comme $\frac{AS \times \overline{CS}^2 - PS \times KMRK}{\overline{PS}^2 + \overline{CS}^2 - \overline{AS}^2}$ à $\frac{\overline{AS}^3}{3\overline{PS}^2}$, qui est la proportion marquée par M. *Nevvton Coroll.* 2. *prop.* 91. *lib.* 1. *Phil. Nat. Princ. Math.*

Maintenant pour venir au cas que nous nous sommes principalement proposé, qui est celui où le corpuscule P est placé à l'extrémité de l'axe en A, parce qu'il

qu'il ſert pour déterminer la figure de la terre, on voit que dans ce cas l'attraction du ſphéroïde ſera à celle de la ſphére, comme $\frac{\overline{CS}^2 - PMRP}{\overline{CS}^2}$ à $\frac{1}{3}$ (*fig.* 58.) ou comme $\overline{CS}^2 - PMRP$ à $\frac{1}{3}\overline{CS}^2$.

Pour réſoudre ce cas par la méthode de M. Côtes; puiſque PA $= a = 0$, GC étant le premier axe, la formule de l'attraction vers le ſphéroïde ſera $dx - \frac{xdx}{\sqrt{px + \frac{2b-p}{2b}xx}}$ ou $dx - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\frac{2rr}{b} - \frac{ccx}{bb}}}$ en mettant cc au lieu de $rr - bb$; en comparant la derniére différentielle à la forme 48 on trouve que ſon intégrale eſt $-\frac{bb}{cc}\sqrt{\frac{2rrx}{b} - \frac{ccxx}{bb}} - \frac{2bbrr}{c^3}$ (PBO), le rayon étant à la tangente de l'angle PBO comme $\frac{c}{b}$ à $\sqrt{\frac{2rr}{bx} - \frac{cc}{bb}}$, mais parce que cette tangente ne s'évanouit point lorſque $x = 0$, mais au contraire devient infinie, il eſt clair qu'elle dénote le complement de l'angle qu'on cherche, & par conſéquent puiſque le rayon eſt moyen proportionnel entre la tangente d'un angle & la tangente de ſon complement, la tangente de l'angle véritable PBO eſt $\frac{ccx^{\frac{1}{2}}}{bb\sqrt{\frac{2rr}{b} - \frac{ccx}{bb}}}$, donc le rayon eſt à la tangente de

l'angle BPO comme $\frac{c}{b}$ à $\frac{ccx^{\frac{1}{2}}}{bb\sqrt{\frac{2rr}{b} - \frac{ccx}{bb}}}$ ou comme b à $\frac{cx}{\sqrt{\frac{2rrx}{b} - \frac{ccxx}{bb}}}$, & l'intégrale complette $-\frac{bb}{cc}\sqrt{\frac{2rrx}{b} - \frac{ccxx}{bb}} + \frac{2bbrr}{c^3}$ (PBO) : ensuite faisant $x = 2b$, l'intégrale totale de $dx - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\frac{2rr}{b} - \frac{ccx}{bb}}}$ est $\frac{2brr}{cc} - \frac{2bbrr}{c^3}$ (PBO) le rayon étant à la tangente dans ce cas comme b à c ; d'où l'on voit qu'en décrivant du centre P avec le rayon PS un arc de cercle, & tirant au foyer F de l'ellypse la ligne PF qui coupe le cercle en N, on aura SF $= c$, & PBO $=$ SPF, & l'arc SN égal à la mesure de l'angle SPF au module PS, c'est-à-dire SN $= b$ (SPF), & puisque la force avec laquelle la sphére dont le diamétre est PB attire le corpuscule P est exprimée par $\frac{2b}{3}$, il s'ensuit que cette attraction de la sphére est à celle du sphéroïde, comme c^3 à $3rr \times \overline{c - \text{SN}}$, c'est-à-dire, comme $\overline{\text{SF}}^3$ à $3\overline{\text{CS}}^2 \times \overline{\text{SF} - \text{SN}}$.

Si l'ellypse ACBG faisoit sa révolution autour du premier axe GC, la formule de l'attraction devien-

droit $dx - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\frac{2bb}{r} + \frac{ccx}{rr}}}$ & en prenant l'intégrale par la même forme 48, on trouve que la force avec laquelle la sphére dont le diamétre est GC attire un corpuscule placé en G est à celle avec laquelle le sphéroïde l'attire comme c^3 à $3bbr\left\{\frac{r+c}{b}\right\} - 3bbc$, donc si on prend sur l'axe SG la partie $SL = r\left\{\frac{r+c}{b}\right\} = PF\left\{\frac{PF+FS}{PS}\right\}$, l'attraction de la sphére sera à celle du sphéroïde comme $\overline{CF}^3$ à $3\overline{AS}^2 \times FL$. *C. Q. F. T.*

Il est facile, comme on voit, d'appliquer le calcul à cette derniére solution, lequel deviendroit fort pénible en se servant de la premiére, surtout si on vouloit déterminer la valeur de l'espace conique PMRP par le moyen d'une série. Qu'on suppose donc que PS est à CS comme 100 à 101, & on aura SF = 14, 177447, & puisque PS est à SF, comme le rayon est à la tangente de l'angle SPF, on trouve que cet angle est de $8^\circ. 4'. 9''.^{1''} = 8,06930$, ce qui donne l'arc SN = 14,083584, d'où l'on tire SF — SN = 0,093863 dont le logarithme est $\bar{2}$, 9724944; le logarithme donc de $3\overline{CS}^2 \times \overline{SF - SN}$ est 3, 4582583 duquel ôtant 3, 4547941 logarithme de $\overline{SF}^3$ la différence est 34642 qui est à peu près égale à la différence des logarithmes des nombres 125 & 126; par conséquent

la force d'attraction que le sphéroïde formé par la révolution de l'ellypse PCB autour du petit axe PB exerce sur le corpuscule P, est à celle de la sphére dont le diamétre est PB sur le même corpuscule à peu-près comme 126 à 125.

Pareillement puisque $\frac{PF + SF}{PS} = 1, 15177447$ dont le logarithme est $0, 0613674\frac{1}{2}$, on trouve PF $\left\{\frac{PF + SF}{PS}\right\} = 14, 271681$, de ce nombre ôtant SF, il vient $FL = 0, 094234$, & $3\overline{PS}^2 \times FL = 2827, 02$ dont le logarithme est 3, 4513289 lequel étant ôté du logarithme 3, 4547941 on trouve la différence 34652 qui est encore à peu-près égale à la différence des logarithmes des nombres 125 & 126 : par conséquent le sphéroïde formé par la révolution de l'ellypse GBC autour du premier axe GC attire le corpuscule en G avec une force, qui est à celle avec laquelle la sphére dont le diamétre est GC l'attire, à peu-près comme 125 est à 126. Ces proportions sont les mêmes que M. NEWTON trouve par la premiére construction *prop.* 19. *lib.* 3. *Phil. Nat. Princ. Math.*

AVERTISSEMENT.

AFIN qu'on puiſſe entendre ſans peine l'uſage des tables, j'ai cru qu'il ſeroit à propos d'en expliquer ici l'ordre & les termes.

On voit clairement que chaque table contient les différentes intégrales de la différentielle qui eſt miſe ſous le titre de Forme ſuivant les différentes valeurs de la quantité variable z : les nombres qui ſe trouvent dans la colomne θ ſont en deſcendant poſitifs juſqu'à o, enſuite ils ſont négatifs. Les modules β, γ, δ, &c. marquent le double des co-ſinus, & ψ, χ, φ, &c. le double des ſinus des arcs AB, AC, AD, & de tous les arcs qui ont ces mêmes ſinus & co-ſinus, le rayon AO étant $= 1$. Une telle expreſſion β (BP : BO) marque la meſure ou le logarithme du rapport $\frac{BP}{BO}$ à module β, ou le logarithme de $\frac{BP}{BO}$ pris dans les tables ordinaires & multiplié par $\beta \times 2,30258509$; cette autre expreſſion ψ (PBO) marque la meſure de l'angle PBO au module ψ, ou ce qui revient au même, l'arc de cercle décrit du centre B & du rayon ψ & compris dans l'angle PBO, ou bien le nombre de dégrés de l'angle PBO multiplié par $\psi \times 0.01745329$. Dans les endroits où il n'y a point de module marqué, il faut y ſous-entendre l'unité pour module.

θ	FORME I. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
5.	$\frac{Dz^{4n}}{4nf} - \frac{Dez^{3n}}{3nff} + \frac{Deez^{2n}}{2nf^3} - \frac{De^3z^n}{nf^4} + \frac{De^4}{nf^5}$ ①
4.	$\frac{Dz^{3n}}{3nf} - \frac{Dez^{2n}}{2nff} + \frac{Deez^n}{nf^3} - \frac{De^3}{nf^4}$ ①
3.	$\frac{Dz^{2n}}{2nf} - \frac{Dez^n}{nff} + \frac{Dee}{nf^3}$ ①
2.	$\frac{Dz^n}{nf} - \frac{De}{nff}$ ①
1.	$\frac{D}{nf}$ ① Voyez fig. 27.
0.	$\frac{-D}{ne}$ ②
-1.	$\frac{-D}{nez^n} + \frac{Df}{nee}$ ②
-2.	$\frac{-D}{2nez^{2n}} + \frac{Df}{neez^n} - \frac{Dff}{ne^3}$ ②
-3.	$\frac{-D}{3nez^{3n}} + \frac{Df}{2neez^{2n}} - \frac{Dff}{ne^3z^n} + \frac{Df^3}{ne^4}$ ②
-4.	$\frac{-D}{4nez^{4n}} + \frac{Df}{3neez^{3n}} - \frac{Dff}{2ne^3z^{2n}} + \frac{Df^3}{ne^4z^n} - \frac{Df^4}{ne^5}$ ②
&c.	

1. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: z^n : \frac{e}{f}; & ① = 1\ (BP : BO) \\ OP : OA :: \frac{1}{z^n} : \frac{f}{e}; & ② = 1\ (BP : BO) \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: z^n : \frac{-e}{f}; & ① = 1\ (AP : AO) \\ OP : OA :: \frac{1}{z^n} : \frac{-f}{e}; & ② = 1\ (AP : AO) \end{cases}$

θ	FORME II. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{2Dz^{\frac{7}{2}n}}{7nf} - \frac{2Dez^{\frac{5}{2}n}}{5nff} + \frac{2Deez^{\frac{3}{2}n}}{3nf^3} - \frac{2De^3z^{\frac{1}{2}n}}{nf^4} + \frac{2De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{2Dz^{\frac{5}{2}n}}{5nf} - \frac{2Dez^{\frac{3}{2}n}}{3nff} + \frac{2Deez^{\frac{1}{2}n}}{nf^3} - \frac{2De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{2Dz^{\frac{3}{2}n}}{3nf} - \frac{2Dez^{\frac{1}{2}n}}{nff} + \frac{2Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{nf} - \frac{2De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{2D}{nf}$ (I) Voyez fig. 28.
— 1.	$\frac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}} - \frac{2D}{ne}$ (I)
— 2.	$\frac{-2D}{3nez^{\frac{3}{2}n}} + \frac{2Df}{neez^{\frac{1}{2}n}} + \frac{2Df}{nee}$ (I)
— 3.	$\frac{-2D}{5nez^{\frac{5}{2}n}} + \frac{2Df}{3neez^{\frac{3}{2}n}} - \frac{2Dff}{ne^3z^{\frac{1}{2}n}} - \frac{2Dff}{ne^3}$ (I)
— 4.	$\frac{-2D}{7nez^{\frac{7}{2}n}} + \frac{2Df}{5neez^{\frac{5}{2}n}} - \frac{2Dff}{3ne^3z^{\frac{3}{2}n}} + \frac{2Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{2}n}} + \frac{2Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{f}{e}} \times \downarrow (PBO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{2}\sqrt[2]{\frac{-f}{e}} \times -(AP : AO) + (CP : CO)$$

θ	FORME III. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{3Dz^{\frac{10}{3}n}}{10nf}-\frac{3Dez^{\frac{7}{3}n}}{7nff}+\frac{3Deez^{\frac{4}{3}n}}{4nf^3}-\frac{3De^3z^{\frac{1}{3}n}}{nf^4}+\frac{3De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{3Dz^{\frac{7}{3}n}}{7nf}-\frac{3Dez^{\frac{4}{3}n}}{4nff}+\frac{3Deez^{\frac{1}{3}n}}{nf^3}-\frac{3De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{3Dz^{\frac{4}{3}n}}{4nf}-\frac{3Dez^{\frac{1}{3}n}}{nff}+\frac{3Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{nf}-\frac{3De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{3D}{nf}$ (I) Voyez fig. 29.
$-$ 1.	$\frac{-3D}{2nez^{\frac{2}{3}n}}-\frac{3D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-3D}{5nez^{\frac{5}{3}n}}+\frac{3Df}{2neez^{\frac{2}{3}n}}+\frac{3Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-3D}{8nez^{\frac{8}{3}n}}+\frac{3Df}{5neez^{\frac{5}{3}n}}-\frac{3Dff}{2ne^3z^{\frac{2}{3}n}}-\frac{3Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-3D}{11nez^{\frac{11}{3}n}}+\frac{3Df}{8neez^{\frac{8}{3}n}}-\frac{3Dff}{5ne^3z^{\frac{5}{3}n}}+\frac{3Df^3}{2ne^4z^{\frac{2}{3}n}}+\frac{3Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times -\beta(BP:BO) + (DP:DO) + \psi(PBO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{ff}{ee}} \times -(AP:AO) + \beta(CP:CO) + \psi(PCO)$$

FORME

θ	FORME IV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{3Dz^{\frac{11}{3}n}}{11nf}-\frac{3Dez^{\frac{8}{3}n}}{8nff}+\frac{3Deez^{\frac{5}{3}n}}{5nf^3}-\frac{3De^3z^{\frac{2}{3}n}}{2nf^4}+\frac{3De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{3Dz^{\frac{8}{3}n}}{8nf}-\frac{3Dez^{\frac{5}{3}n}}{5nff}+\frac{3Deez^{\frac{2}{3}n}}{2nf^3}-\frac{3De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{3Dz^{\frac{5}{3}n}}{5nf}-\frac{3Dez^{\frac{2}{3}n}}{2nff}+\frac{3Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2nf}-\frac{3De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{3D}{nf}$ (I) Voyez fig. 29.
-1.	$\frac{-3D}{nez^{\frac{1}{3}n}}-\frac{3D}{ne}$ (I)
-2.	$\frac{-3D}{4nez^{\frac{4}{3}n}}+\frac{3Df}{neez^{\frac{1}{3}n}}+\frac{3Df}{nee}$ (I)
-3.	$\frac{-3D}{7nez^{\frac{7}{3}n}}+\frac{3Df}{4neez^{\frac{4}{3}n}}-\frac{3Dff}{ne^3z^{\frac{1}{3}n}}-\frac{3Dff}{ne^3}$ (I)
-4.	$\frac{-3D}{10nez^{\frac{10}{3}n}}+\frac{3Df}{7neez^{\frac{7}{3}n}}-\frac{3Dff}{4ne^3z^{\frac{4}{3}n}}+\frac{3Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{3}n}}+\frac{3Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{f}{e}}\,x + \beta\,(BP : BO) - (DP : DO) + \psi\,(PBO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{-f}{e}}\,x - (AP : AO) + \beta\,(CP : CO) - \psi\,(PCO)$$

θ	FORME V. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{4Dz^{\frac{13}{4}n}}{13nf}-\frac{4Dez^{\frac{9}{4}n}}{9nff}+\frac{4Deez^{\frac{5}{4}n}}{5nf^3}-\frac{4De^3z^{\frac{1}{4}n}}{nf^4}+\frac{4De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{4Dz^{\frac{9}{4}n}}{9nf}-\frac{4Dez^{\frac{5}{4}n}}{5nff}+\frac{4Deez^{\frac{1}{4}n}}{nf^3}-\frac{4De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{4Dz^{\frac{5}{4}n}}{5nf}-\frac{4Dez^{\frac{1}{4}n}}{nff}+\frac{4Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{4Dz^{\frac{1}{4}n}}{nf}-\frac{4De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{4D}{nf}$ (I) Voyez fig. 30.
-1.	$\frac{-4D}{3nez^{\frac{3}{4}n}}-\frac{4D}{ne}$ (I)
-2.	$\frac{-4D}{7nez^{\frac{7}{4}n}}+\frac{4Df}{3neez^{\frac{3}{4}n}}+\frac{4Df}{nee}$ (I)
-3.	$\frac{-4D}{11nez^{\frac{11}{4}n}}+\frac{4Df}{7neez^{\frac{7}{4}n}}-\frac{4Dff}{3ne^3z^{\frac{3}{4}n}}-\frac{4Dff}{ne^3}$ (I)
-4.	$\frac{-4D}{15nez^{\frac{15}{4}n}}+\frac{4Df}{11neez^{\frac{11}{4}n}}-\frac{4Dff}{7ne^3z^{\frac{7}{4}n}}+\frac{4Df^3}{3ne^4z^{\frac{3}{4}n}}+\frac{4Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{f^3}{e^3}} \times -\beta(BP:BO) + \beta(DP:DO) + \psi(PBO) + \psi(PDO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-f^3}{e^3}} \times -(AP:AO) + (EP:EO) + \chi(PCO))$$

θ	FORME VI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{4Dz^{\frac{15}{4}n}}{15nf} - \frac{4Dez^{\frac{11}{4}n}}{11nff} + \frac{4Deez^{\frac{7}{4}n}}{7nf^3} - \frac{4De^3z^{\frac{3}{4}n}}{3nf^4} + \frac{4De^4}{nf^5}$ (1)
3.	$\frac{4Dz^{\frac{11}{4}n}}{11nf} - \frac{4Dez^{\frac{7}{4}n}}{7nff} + \frac{4Deez^{\frac{3}{4}n}}{3nf^3} - \frac{4De^3}{nf^4}$ (1)
2.	$\frac{4Dz^{\frac{7}{4}n}}{7nf} - \frac{4Dez^{\frac{3}{4}n}}{3nff} + \frac{4Dee}{nf^3}$ (1)
1.	$\frac{4Dz^{\frac{3}{4}n}}{3nf} - \frac{4De}{nff}$ (1)
0.	$\frac{4D}{nf}$ (1) Voyez fig. 30.
$\overline{1}$.	$\frac{-4D}{nez^{\frac{1}{4}n}} - \frac{4D}{ne}$ (1)
$\overline{2}$.	$\frac{-4D}{5nez^{\frac{5}{4}n}} + \frac{4Df}{neez^{\frac{1}{4}n}} + \frac{4Df}{nee}$ (1)
$\overline{3}$.	$\frac{-4D}{9nez^{\frac{9}{4}n}} + \frac{4Df}{5neez^{\frac{5}{4}n}} - \frac{4Dff}{ne^3z^{\frac{1}{4}n}} - \frac{4Dff}{ne^3}$ (1)
$\overline{4}$.	$\frac{-4D}{13nez^{\frac{13}{4}n}} + \frac{4Df}{9neez^{\frac{9}{4}n}} - \frac{4Dff}{5ne^3z^{\frac{5}{4}n}} + \frac{4Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{4}n}} + \frac{4Df^3}{ne^4}$ (1)
&c.	

1. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{e}{f}}$;

(1) $= \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{f}{e}} \times + \beta\,(BP:BO) - \beta\,(DP:DO) + \psi\,(PBO) + \psi\,(PDO)$

2. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-e}{f}}$;

(1) $= \frac{-1}{4}\sqrt[4]{\frac{-f}{e}} \times - (AP:AO) + (EP:EO) - \chi\,(PCO)$

θ	FORME VII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{5Dz^{\frac{16}{5}n}}{16nf} - \frac{5Dez^{\frac{11}{5}n}}{11nff} + \frac{5Deez^{\frac{6}{5}n}}{6nf^3} - \frac{5De^3z^{\frac{1}{5}n}}{nf^4} + \frac{5De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{5Dz^{\frac{11}{5}n}}{11nf} - \frac{5Dez^{\frac{6}{5}n}}{6nff} + \frac{5Deez^{\frac{1}{5}n}}{nf^3} - \frac{5De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{5Dz^{\frac{6}{5}n}}{6nf} - \frac{5Dez^{\frac{1}{5}n}}{nff} + \frac{5Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{5Dz^{\frac{1}{5}n}}{nf} - \frac{5De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{5D}{nf}$ (I) Voyez fig. 31.
$-$ 1.	$\frac{-5D}{4nez^{\frac{4}{5}n}} - \frac{5D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-5D}{9nez^{\frac{9}{5}n}} + \frac{5Df}{4neez^{\frac{4}{5}n}} + \frac{5Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-5D}{14nez^{\frac{14}{5}n}} + \frac{5Df}{9neez^{\frac{9}{5}n}} - \frac{5Dff}{4ne^3z^{\frac{4}{5}n}} - \frac{5Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-5D}{19nez^{\frac{19}{5}n}} + \frac{5Df}{14neez^{\frac{14}{5}n}} - \frac{5Dff}{9ne^3z^{\frac{9}{5}n}} + \frac{5Df^3}{4ne^4z^{\frac{4}{5}n}} + \frac{5Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{f^4}{e^4}} \times -\beta(BP:BO) + \gamma(DP:DO) + (FP:FO) + \psi(PBO) + \chi(PDO)$.

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= \frac{-1}{5}\sqrt[5]{\frac{f^4}{e^4}} \times -(AP:AO) - \gamma(CP:CO) + \beta(EP:EO) + \chi(PCO) + \psi(PEO)$

θ	FORME VIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{4}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{5Dz^{\frac{19}{5}n}}{19nf}-\frac{5Dez^{\frac{14}{5}n}}{14nff}+\frac{5Deez^{\frac{9}{5}n}}{9nf^3}-\frac{5De^3z^{\frac{4}{5}n}}{4nf^4}+\frac{5De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{5Dz^{\frac{14}{5}n}}{14nf}-\frac{5Dez^{\frac{9}{5}n}}{9nff}+\frac{5Deez^{\frac{4}{5}n}}{4nf^3}-\frac{5De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{5Dz^{\frac{9}{5}n}}{9nf}-\frac{5Dez^{\frac{4}{5}n}}{4nff}+\frac{5Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{5Dz^{\frac{4}{5}n}}{4nf}-\frac{5De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{5D}{nf}$ (I) Voyez fig. 31.
$-$ 1.	$\frac{-5D}{nez^{\frac{1}{5}n}}-\frac{5D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-5D}{6nez^{\frac{6}{5}n}}+\frac{5Df}{neez^{\frac{1}{5}n}}+\frac{5Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-5D}{11nez^{\frac{11}{5}n}}+\frac{5Df}{6neez^{\frac{6}{5}n}}-\frac{5Dff}{ne^3z^{\frac{1}{5}n}}-\frac{5Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-5D}{16nez^{\frac{16}{5}n}}+\frac{5Df}{11neez^{\frac{11}{5}n}}-\frac{5Dff}{6ne^3z^{\frac{6}{5}n}}+\frac{5Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{5}n}}+\frac{5Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{f}{e}}\times + \beta(BP:BO) - \gamma(DP:DO) - (FP:FO) + \psi(PBO) + \chi(PDO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= \frac{-1}{5}\sqrt[5]{\frac{-f}{e}}\times - (AP:AO) - \gamma(CP:CO) + \beta(EP:EO) - \chi(PCO) - \psi(PEO)$

θ	FORME IX. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{5Dz^{\frac{17}{5}n}}{17nf}-\frac{5Dez^{\frac{12}{5}n}}{12nff}+\frac{5Deez^{\frac{7}{5}n}}{7nf^3}-\frac{5De^3z^{\frac{2}{5}n}}{2nf^4}+\frac{5De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{5Dz^{\frac{12}{5}n}}{12nf}-\frac{5Dez^{\frac{7}{5}n}}{7nff}+\frac{5Deez^{\frac{2}{5}n}}{2nf^3}-\frac{5De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{5Dz^{\frac{7}{5}n}}{7nf}-\frac{5Dez^{\frac{2}{5}n}}{2nff}+\frac{5Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{5Dz^{\frac{2}{5}n}}{2nf}-\frac{5De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{5D}{nf}$ (I) Voyez fig. 31.
$-$ 1.	$\frac{-5D}{3nez^{\frac{3}{5}n}}-\frac{5D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-5D}{8nez^{\frac{8}{5}n}}+\frac{5Df}{3neez^{\frac{3}{5}n}}+\frac{5Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-5D}{13nez^{\frac{13}{5}n}}+\frac{5Df}{8neez^{\frac{8}{5}n}}-\frac{5Dff}{3ne^3z^{\frac{3}{5}n}}-\frac{5Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-5D}{18nez^{\frac{18}{5}n}}+\frac{5Df}{13neez^{\frac{13}{5}n}}-\frac{5Dff}{8ne^3z^{\frac{8}{5}n}}+\frac{5Df^3}{3ne^4z^{\frac{3}{5}n}}+\frac{5Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{f^3}{e^3}} \times -\gamma(BP:BO) + \beta(DP:DO) - (FP:FO) + \chi(PBO) - \psi(PDO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \frac{-1}{5}\sqrt[5]{\frac{-f^3}{e^3}} \times -(AP:AO) + \beta(CP:CO) - \gamma(EP:EO) + \psi(PCO) - \chi(PEO)$$

θ	FORME X. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{5Dz^{\frac{18}{5}n}}{18nf} - \frac{5Dez^{\frac{13}{5}n}}{13nff} + \frac{5Deez^{\frac{8}{5}n}}{8nf^3} - \frac{5De^3z^{\frac{3}{5}n}}{3nf^4} + \frac{5De^4}{nf^5}$ (1)
3.	$\frac{5Dz^{\frac{13}{5}n}}{13nf} - \frac{5Dez^{\frac{8}{5}n}}{8nff} + \frac{5Deez^{\frac{3}{5}n}}{3nf^3} - \frac{5De^3}{nf^4}$ (1)
2.	$\frac{5Dz^{\frac{8}{5}n}}{8nf} - \frac{5Dez^{\frac{3}{5}n}}{3nff} + \frac{5Dee}{nf^3}$ (1)
1.	$\frac{5Dz^{\frac{3}{5}n}}{3nf} - \frac{5De}{nff}$ (1)
0.	$\frac{5D}{nf}$ (1) Voyez fig. 31.
— 1.	$\frac{-5D}{2nez^{\frac{2}{5}n}} - \frac{5D}{ne}$ (1)
— 2.	$\frac{-5D}{7nez^{\frac{7}{5}n}} + \frac{5Df}{2neez^{\frac{2}{5}n}} + \frac{5Df}{nee}$ (1)
— 3.	$\frac{-5D}{12nez^{\frac{12}{5}n}} + \frac{5Df}{7neez^{\frac{7}{5}n}} - \frac{5Dff}{2ne^3z^{\frac{2}{5}n}} - \frac{5Dff}{ne^3}$ (1)
— 4.	$\frac{-5D}{17nez^{\frac{17}{5}n}} + \frac{5Df}{12neez^{\frac{12}{5}n}} - \frac{5Dff}{7ne^3z^{\frac{7}{5}n}} + \frac{5Df^3}{2ne^4z^{\frac{2}{5}n}} + \frac{5Df^3}{ne^4}$ (1)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{e}{f}}$;

(1) $= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{ff}{ee}}\times + \gamma(BP:BO) - \beta(DP:DO) + (FP:FO) + \chi(PBO) - \psi(PDO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[5]{z^n} : \sqrt[5]{\frac{-e}{f}}$;

(1) $= -\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{ff}{ee}}\times - (AP:AO) + \beta(CP:CO) - \gamma(EP:EO) - \psi(PCO) + \chi(PEO)$

θ	FORME XI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{6}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{6Dz^{\frac{19}{6}n}}{19nf} - \frac{6Dez^{\frac{13}{6}n}}{13nff} + \frac{6Deez^{\frac{7}{6}n}}{7nf^3} - \frac{6De^3z^{\frac{1}{6}n}}{nf^4} + \frac{6De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{6Dz^{\frac{13}{6}n}}{13nf} - \frac{6Dez^{\frac{7}{6}n}}{7nff} + \frac{6Deez^{\frac{1}{6}n}}{nf^3} - \frac{6De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{6Dz^{\frac{7}{6}n}}{6nf} - \frac{6Dez^{\frac{1}{6}n}}{nff} + \frac{6Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{6Dz^{\frac{1}{6}n}}{nf} - \frac{6De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{6D}{nf}$ (I) Voyez fig. 32.
— 1.	$\frac{-6D}{5nez^{\frac{5}{6}n}} - \frac{6D}{ne}$ (I)
— 2.	$\frac{-6D}{11nez^{\frac{11}{6}n}} + \frac{6Df}{5neez^{\frac{5}{6}n}} + \frac{6Df}{nee}$ (I)
— 3.	$\frac{-6D}{17nez^{\frac{17}{6}n}} + \frac{6Df}{11neez^{\frac{11}{6}n}} - \frac{6Dff}{5ne^3z^{\frac{5}{6}n}} - \frac{6Dff}{ne^3}$ (I)
— 4.	$\frac{-6D}{23nez^{\frac{23}{6}n}} + \frac{6Df}{17neez^{\frac{17}{6}n}} - \frac{6Dff}{11ne^3z^{\frac{11}{6}n}} + \frac{6Df^3}{5ne^4z^{\frac{5}{6}n}} + \frac{6Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[6]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{f^5}{e^5}} \times -\beta(BP:BO) + \beta(FP:FO) + \psi(PBO) + \varphi(PDO) + \psi(PFO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[6]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= -\frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{-f^5}{e^5}} \times -(AP:AO) - \gamma(CP:CO) + \gamma(EP:EO) + (GP:GO) + \chi(PCO) + \chi(PEO)$

FORME

θ	FORME XII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{6}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{6Dz^{\frac{23}{6}n}}{23nf} - \frac{6Dez^{\frac{17}{6}n}}{17nff} + \frac{6Deez^{\frac{11}{6}n}}{11nf^3} - \frac{6De^3z^{\frac{5}{6}n}}{5nf^4} + \frac{6De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{6Dz^{\frac{17}{6}n}}{17nf} - \frac{6Dez^{\frac{11}{6}n}}{11nff} + \frac{6Deez^{\frac{5}{6}n}}{5nf^3} - \frac{6De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{6Dz^{\frac{11}{6}n}}{11nf} - \frac{6Dez^{\frac{5}{6}n}}{5nff} + \frac{6Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{6Dz^{\frac{5}{6}n}}{5nf} - \frac{6De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{6D}{nf}$ (I) Voyez fig. 32.
$-1.$	$\frac{-6D}{nez^{\frac{1}{6}n}} - \frac{6D}{ne}$ (I)
$-2.$	$\frac{-6D}{7nez^{\frac{7}{6}n}} + \frac{6Df}{neez^{\frac{1}{6}n}} + \frac{6Df}{nee}$ (I)
$-3.$	$\frac{-6D}{13nez^{\frac{13}{6}n}} + \frac{6Df}{7neez^{\frac{7}{6}n}} - \frac{6Dff}{ne^3z^{\frac{1}{6}n}} - \frac{6Dff}{ne^3}$ (I)
$-4.$	$\frac{-6D}{19nez^{\frac{19}{6}n}} + \frac{6Df}{13neez^{\frac{13}{6}n}} - \frac{6Dff}{7ne^3z^{\frac{7}{6}n}} + \frac{6Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{6}n}} + \frac{6Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[6]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{6}\sqrt[6]{\frac{f}{e}} \times + \beta\,(BP : BO) - \beta\,(FP : FO) + \downarrow(PBO) + \varphi\,(PDO) + \downarrow(PFO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[6]{z^n} : \sqrt[6]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= \frac{-1}{6}\sqrt[6]{\frac{-f}{e}} \times - (AP : AO) - \gamma\,(CP : CO) + \gamma\,(EP : EO) + (GP : GO) - \chi\,(PCO) - \chi\,(PEO)$

θ	FORME XIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{22}{7}n}}{22nf} - \frac{7Dez^{\frac{15}{7}n}}{15nff} + \frac{7Deez^{\frac{8}{7}n}}{8nf^3} - \frac{7De^3z^{\frac{1}{7}n}}{nf^4} + \frac{7De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{15}{7}n}}{15nf} - \frac{7Dez^{\frac{8}{7}n}}{8nff} + \frac{7Deez^{\frac{1}{7}n}}{nf^3} - \frac{7De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{8}{7}n}}{8nf} - \frac{7Dez^{\frac{1}{7}n}}{nff} + \frac{7Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{1}{7}n}}{nf} - \frac{7De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (I) Voyez fig. 33.
$-$ 1.	$\frac{-7D}{6nez^{\frac{6}{7}n}} - \frac{7D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-7D}{13nez^{\frac{13}{7}n}} + \frac{7Df}{6neez^{\frac{6}{7}n}} + \frac{7Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-7D}{20nez^{\frac{20}{7}n}} + \frac{7Df}{13nez^{\frac{13}{7}n}} - \frac{7Dff}{6ne^3z^{\frac{6}{7}n}} - \frac{7Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-7D}{27nez^{\frac{27}{7}n}} + \frac{7Df}{20neez^{\frac{20}{7}n}} - \frac{7Dff}{13ne^3z^{\frac{13}{7}n}} + \frac{7Df^3}{6ne^4z^{\frac{6}{7}n}} + \frac{7Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \frac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^6}{e^6}} \times - \beta\,(BP:BO) - \delta\,(DP:DO) + \gamma\,(FP:FO) + (HP:HO) + \psi\,(PBO) + \varphi\,(PDO) + \chi\,(PFO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \frac{-1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^6}{e^6}} \times - (AP:AO) - \gamma\,(CP:CO) + \delta\,(EP:EO) + \beta\,(GP:GO) + \chi\,(PCO) + \varphi\,(PEO) + \psi\,(PGO).$$

θ	FORME XIV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{6}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{27}{7}n}}{27nf}-\frac{7Dez^{\frac{20}{7}n}}{20nff}+\frac{7Deez^{\frac{13}{7}n}}{13nf^3}-\frac{7De^3z^{\frac{6}{7}n}}{6nf^4}+\frac{7De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{20}{7}n}}{20nf}-\frac{7Dez^{\frac{13}{7}n}}{13nff}+\frac{7Deez^{\frac{6}{7}n}}{6nf^3}-\frac{7De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{13}{7}n}}{13nf}-\frac{7Dez^{\frac{6}{7}n}}{6nff}+\frac{7Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{6}{7}n}}{6nf}-\frac{7De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (I) Voyez fig. 33.
$-$ 1.	$\frac{-7D}{nez^{\frac{1}{7}n}}-\frac{7D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-7D}{8nez^{\frac{8}{7}n}}+\frac{7Df}{neez^{\frac{1}{7}n}}+\frac{7Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-7D}{15nez^{\frac{15}{7}n}}+\frac{7Df}{8neez^{\frac{8}{7}n}}-\frac{7Dff}{ne^3z^{\frac{1}{7}n}}-\frac{7Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-7D}{22nez^{\frac{22}{7}n}}+\frac{7Df}{15neez^{\frac{15}{7}n}}-\frac{7Dff}{8ne^3z^{\frac{8}{7}n}}+\frac{7Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{7}n}}+\frac{7Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f}{e}}\times + \beta(BP:BO) + \delta(DP:DO) - \gamma(FP:FO) - (HP:HO) + \psi(PBO) + \varphi(PDO) + \chi(PFO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{7}\sqrt[7]{\frac{-f}{e}}\times - (AP:AO) - \gamma(CP:CO) + \delta(EP:EO) + \beta(GP:GO) - \chi(PCO) - \varphi(PEO) - \psi(PGO)$$

θ	FORME XV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{23}{7}n}}{23nf}-\frac{7Dez^{\frac{16}{7}n}}{16nff}+\frac{7Deez^{\frac{9}{7}n}}{9nf^3}-\frac{7De^3z^{\frac{2}{7}n}}{2nf^4}+\frac{7De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{16}{7}n}}{16nf}-\frac{7Dez^{\frac{9}{7}n}}{9nff}+\frac{7Deez^{\frac{2}{7}n}}{2nf^3}-\frac{7De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{9}{7}n}}{9nf}-\frac{7Dez^{\frac{2}{7}n}}{2nff}+\frac{7Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{2}{7}n}}{2nf}-\frac{7De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (I) Voyez fig. 33.
$-$ 1.	$\frac{-7D}{5nez^{\frac{5}{7}n}}-\frac{7D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-7D}{12nez^{\frac{12}{7}n}}+\frac{7Df}{5neez^{\frac{5}{7}n}}+\frac{7Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-7D}{19nez^{\frac{19}{7}n}}+\frac{7Df}{12neez^{\frac{12}{7}n}}-\frac{7Dff}{5ne^3z^{\frac{5}{7}n}}-\frac{7Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-7D}{26nez^{\frac{26}{7}n}}+\frac{7Df}{19neez^{\frac{19}{7}n}}-\frac{7Dff}{12ne^3z^{\frac{12}{7}n}}+\frac{7Df^3}{5ne^4z^{\frac{5}{7}n}}+\frac{7Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^5}{e^5}} \times -\gamma(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\delta(FP:FO)-(HP:HO)+\chi(PBO)+\psi(PDO)-\varphi(PFO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= \frac{-1}{7}\sqrt[7]{\frac{-f^5}{e^5}} \times -(AP:AO)+\delta(CP:CO)+\beta(EP:EO)-\gamma(GP:GO)+\varphi(PCO)-\psi(PEO)-\chi(PGO)$.

θ	FORME XVI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{26}{7}n}}{26nf}-\frac{7Dez^{\frac{19}{7}n}}{19nff}+\frac{7Deez^{\frac{12}{7}n}}{12nf^3}-\frac{7De^3z^{\frac{5}{7}n}}{5nf^4}+\frac{7De^4}{nf^5}$ (1)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{19}{7}n}}{19nf}-\frac{7Dez^{\frac{12}{7}n}}{12nff}+\frac{7Deez^{\frac{5}{7}n}}{5nf^3}-\frac{7De^3}{nf^4}$ (1)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{12}{7}n}}{12nf}-\frac{7Dez^{\frac{5}{7}n}}{5nff}+\frac{7Dee}{nf^3}$ (1)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{5}{7}n}}{5nf}-\frac{7De}{nff}$ (1)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (1) Voyez fig. 33.
$-$ 1.	$\frac{-7D}{2nez^{\frac{2}{7}n}}-\frac{7D}{ne}$ (1)
$-$ 2.	$\frac{-7D}{9nez^{\frac{9}{7}n}}+\frac{7Df}{2neez^{\frac{2}{7}n}}+\frac{7Df}{nee}$ (1)
$-$ 3.	$\frac{-7D}{16nez^{\frac{16}{7}n}}+\frac{7Df}{9neez^{\frac{9}{7}n}}-\frac{7Dff}{2ne^3z^{\frac{2}{7}n}}-\frac{7Dff}{ne^3}$ (1)
$-$ 4.	$\frac{-7D}{23nez^{\frac{23}{7}n}}+\frac{7Df}{16neez^{\frac{16}{7}n}}-\frac{7Dff}{9ne^3z^{\frac{9}{7}n}}+\frac{7Df^3}{2ne^4z^{\frac{2}{7}n}}+\frac{7Df^3}{ne^4}$ (1)
&c.	

1. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

(1) $= \frac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{ff}{ee}} \times + \gamma$ (BP : BO) $- \beta$ (DP : DO) $- \delta$ (FP : FO) $+$ (HP : HO) $+ \chi$ (PBO) $+ \psi$ (PDO) $- \varphi$ (PFO)

2. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

(1) $= \frac{-1}{7}\sqrt[7]{\frac{ff}{ee}} \times -$ (AP : AO) $+ \delta$ (CP : CO) $+ \beta$ (EP : EO) $-$ γ (GP : GO) $- \varphi$ (PCO) $+ \psi$ (PEO) $+ \chi$ (PGO)

θ	FORME XVII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$.
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{24}{7}n}}{24nf}-\frac{7Dez^{\frac{17}{7}n}}{17nff}+\frac{7Deez^{\frac{10}{7}n}}{10nf^3}-\frac{7De^3z^{\frac{3}{7}n}}{3nf^4}+\frac{7De^4}{nf^5}$ (1)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{17}{7}n}}{17nf}-\frac{7Dez^{\frac{10}{7}n}}{10nff}+\frac{7Deez^{\frac{3}{7}n}}{3nf^3}-\frac{7De^3}{nf^4}$ (1)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{10}{7}n}}{10nf}-\frac{7Dez^{\frac{3}{7}n}}{3nff}+\frac{7Dee}{nf^3}$ (1)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{3}{7}n}}{3nf}-\frac{7De}{nff}$ (1)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (1) Voyez fig. 33.
$\overline{1}$.	$\frac{-7D}{4nez^{\frac{4}{7}n}}-\frac{7D}{ne}$ (1)
$\overline{2}$.	$\frac{-7D}{11nez^{\frac{11}{7}n}}+\frac{7Df}{4neez^{\frac{4}{7}n}}+\frac{7Df}{nee}$ (1)
$\overline{3}$.	$\frac{-7D}{18nez^{\frac{18}{7}n}}+\frac{7Df}{11neez^{\frac{11}{7}n}}-\frac{7Dff}{4ne^3z^{\frac{4}{7}n}}-\frac{7Dff}{ne^3}$ (1)
$\overline{4}$.	$\frac{-7D}{25nez^{\frac{25}{7}n}}+\frac{7Df}{18neez^{\frac{18}{7}n}}-\frac{7Dff}{11ne^3z^{\frac{11}{7}n}}+\frac{7Df^3}{4ne^4z^{\frac{4}{7}n}}+\frac{7Df^3}{ne^4}$ (1)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

$$(1) = \tfrac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^4}{e^4}} \times -\delta(BP:BO) + \gamma(DP:DO) - \beta(FP:FO) + (HP:HO) + \varphi(PBO) - \chi(PDO) + \psi(PFO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

$$(1) = -\tfrac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^4}{e^4}} \times -(AP:AO) + \beta(CP:CO) - \gamma(EP:EO) + \delta(GP:GO) + \psi(PCO) - \chi(PEO) + \varphi(PGO)$$

θ	FORME XVIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{4}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{7Dz^{\frac{25}{7}n}}{25nf} - \frac{7Dez^{\frac{18}{7}n}}{18nff} + \frac{7Deez^{\frac{11}{7}n}}{11nf^3} - \frac{7De^3z^{\frac{4}{7}n}}{4nf^4} + \frac{7De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{7Dz^{\frac{18}{7}n}}{18nf} - \frac{7Dez^{\frac{11}{7}n}}{11nff} + \frac{7Deez^{\frac{4}{7}n}}{4nf^3} - \frac{7De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{7Dz^{\frac{11}{7}n}}{11nf} - \frac{7Dez^{\frac{4}{7}n}}{4nff} + \frac{7Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{7Dz^{\frac{4}{7}n}}{4nf} - \frac{7De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{7D}{nf}$ (I) Voyez fig. 33.
— 1.	$\frac{-7D}{3nez^{\frac{3}{7}n}} - \frac{7D}{ne}$ (I)
— 2.	$\frac{-7D}{10nez^{\frac{10}{7}n}} + \frac{7Df}{3neez^{\frac{3}{7}n}} + \frac{7Df}{nee}$ (I)
— 3.	$\frac{-7D}{17nez^{\frac{17}{7}n}} + \frac{7Df}{10neez^{\frac{10}{7}n}} - \frac{7Dff}{3ne^3z^{\frac{3}{7}n}} - \frac{7Dff}{ne^3}$ (I)
— 4.	$\frac{-7D}{24nez^{\frac{24}{7}n}} + \frac{7Df}{17neez^{\frac{17}{7}n}} - \frac{7Dff}{10ne^3z^{\frac{10}{7}n}} + \frac{7Df^3}{3ne^4z^{\frac{3}{7}n}} + \frac{7Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{f^3}{e^3}}\,\times + \delta\,(BP : BO) - \gamma\,(DP : DO) + \beta\,(FP : FO) - (HP : HO) + \varphi\,(PBO) - \chi\,(PDO) + \psi\,(PFO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[7]{z^n} : \sqrt[7]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{-1}{7}\sqrt[7]{\frac{-f^3}{e^3}}\,\times - (AP : AO) + \beta\,(CP : CO) - \gamma\,(EP : EO) + \delta\,(GP : GO) - \psi\,(PCO) + \chi\,(PEO) - \varphi\,(PGO)$$

θ	FORME XIX. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{8Dz^{\frac{25}{8}n}}{25nf}-\frac{8Dez^{\frac{17}{8}n}}{17nff}+\frac{8Dcez^{\frac{9}{8}n}}{9nf^3}-\frac{8De^3z^{\frac{1}{8}n}}{nf^4}+\frac{8De^4}{nf^5}$ (1)
3.	$\frac{8Dz^{\frac{17}{8}n}}{17nf}-\frac{8Dez^{\frac{9}{8}n}}{9nff}+\frac{8Deez^{\frac{1}{8}n}}{nf^3}-\frac{8De^3}{nf^4}$ (1)
2.	$\frac{8Dz^{\frac{9}{8}n}}{9nf}-\frac{8Dez^{\frac{1}{8}n}}{nff}+\frac{8Dee}{nf^3}$ (1)
1.	$\frac{8Dz^{\frac{1}{8}n}}{nf}-\frac{8De}{nff}$ (1)
0.	$\frac{8D}{nf}$ (1) Voyez fig. 34.
$-$ 1.	$\frac{-8D}{7ncz^{\frac{7}{8}n}}-\frac{8D}{ne}$ (1)
$-$ 2.	$\frac{-8D}{15nez^{\frac{15}{8}n}}+\frac{8Df}{7neez^{\frac{7}{8}n}}+\frac{8Df}{nee}$ (1)
$-$ 3.	$\frac{-8D}{23nez^{\frac{23}{8}n}}+\frac{8Df}{15neez^{\frac{15}{8}n}}-\frac{8Dff}{7ne^3z^{\frac{7}{8}n}}-\frac{8Dff}{ne^3}$ (1)
$-$ 4.	$\frac{-8D}{31nez^{\frac{31}{8}n}}+\frac{8Df}{23neez^{\frac{23}{8}n}}-\frac{8Dff}{15ne^3z^{\frac{15}{8}n}}+\frac{8Df^3}{7ne^4z^{\frac{7}{8}n}}+\frac{8Df^3}{ne^4}$ (1)
&c.	

1. *Cas.* OP : OA : : $\sqrt[8]{z^n}$: $\sqrt[8]{\frac{e}{f}}$;

(1) $= \frac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{f^7}{e^7}} \times -\beta$ (BP : BO) $-$ ♪ (DP : DO) $+$ ♪ (FP : FO) $+\beta$ (HP : HO) $+$ ↓ (PBO) $+\varphi$ (PDO) $+\varphi$ (PFO) $+$ ↓ (PHO)

2. *Cas.* OP : OA : : $\sqrt[8]{z^n}$: $\sqrt[8]{\frac{-e}{f}}$;

(1) $= -\frac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{-f^7}{e^7}} \times -$ (AP : AO) $-\gamma$ (CP : CO) $+\gamma$ (GP : GO) $+$ (IP : IO) $+\chi$ (PCO) $+\upsilon$ (PEO) $+\chi$ (PGO)

FORME

θ	FORME XX. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{7}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{8Dz^{\frac{31}{8}n}}{31nf} - \frac{8Dez^{\frac{23}{8}n}}{23nff} + \frac{8Deez^{\frac{15}{8}n}}{15nf^3} - \frac{8De^3z^{\frac{7}{8}n}}{7nf^4} + \frac{8De^4}{nf^5}$ ①
3.	$\frac{8Dz^{\frac{23}{8}n}}{23nf} - \frac{8Dez^{\frac{15}{8}n}}{15nff} + \frac{8Deez^{\frac{7}{8}n}}{7nf^3} - \frac{8De^3}{nf^4}$ ①
2.	$\frac{8Dz^{\frac{15}{8}n}}{15nf} - \frac{8Dez^{\frac{7}{8}n}}{7nff} + \frac{8Dee}{nf^3}$ ①
1.	$\frac{8Dz^{\frac{7}{8}n}}{7nf} - \frac{8De}{nff}$ ①
0.	$\frac{8D}{nf}$ ① Voyez fig. 34.
— 1.	$\frac{-8D}{nez^{\frac{1}{8}n}} - \frac{8D}{ne}$ ①
— 2.	$\frac{-8D}{9nez^{\frac{9}{8}n}} + \frac{8Df}{neez^{\frac{1}{8}n}} + \frac{8Df}{nee}$ ①
— 3.	$\frac{-8D}{17nez^{\frac{17}{8}n}} + \frac{8Df}{9neez^{\frac{9}{8}n}} - \frac{8Dff}{ne^3z^{\frac{1}{8}n}} - \frac{8Dff}{ne^3}$ ①
— 4.	$\frac{-8D}{25nez^{\frac{25}{8}n}} + \frac{8Df}{17neez^{\frac{17}{8}n}} - \frac{8Dff}{9ne^3z^{\frac{9}{8}n}} + \frac{8Df^3}{ne^4z^{\frac{1}{8}n}} + \frac{8Df^3}{ne^4}$ ①
&c.	

1. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{e}{f}}$;

① $= \frac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{f}{e}} \times + \beta$ (BP : BO) $+ \delta$ (DP : DO) $- \delta$ (FP : FO) $-$ β (HP : HO) $+ \psi$ (PBO) $+ \varphi$ (PDO) $+ \varphi$ (PFO) $+ \psi$ (PHO)

2. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{-e}{f}}$;

① $= \frac{-1}{8}\sqrt[8]{\frac{-f}{e}} \times -$ (AP : AO) $- \gamma$ (CP : CO) $+ \gamma$ (GP : GO) $+$ (IP : IO) $- \chi$ (PCO) $- \upsilon$ (PEO) $- \chi$ (PGO)

θ	FORME XXI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\dfrac{8Dz^{\frac{27}{8}n}}{27nf} - \dfrac{8Dez^{\frac{19}{8}n}}{19nff} + \dfrac{8Deez^{\frac{11}{8}n}}{11nf^3} - \dfrac{8De^3z^{\frac{3}{8}n}}{3nf^4} + \dfrac{8De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\dfrac{8Dz^{\frac{19}{8}n}}{19nf} - \dfrac{8Dez^{\frac{11}{8}n}}{11nff} + \dfrac{8Deez^{\frac{3}{8}n}}{3nf^3} - \dfrac{8De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\dfrac{8Dz^{\frac{11}{8}n}}{11nf} - \dfrac{8Dez^{\frac{3}{8}n}}{3nff} + \dfrac{8Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\dfrac{8Dz^{\frac{3}{8}n}}{3nf} - \dfrac{8De}{nff}$ (I)
0.	$\dfrac{8D}{nf}$ (I) Voyez fig. 34.
— 1.	$\dfrac{-8D}{5necz^{\frac{5}{8}n}} - \dfrac{8D}{ne}$ (I)
— 2.	$\dfrac{-8D}{13nez^{\frac{13}{8}n}} + \dfrac{8Df}{5neez^{\frac{5}{8}n}} + \dfrac{8Df}{nee}$ (I)
— 3.	$\dfrac{-8D}{21nez^{\frac{21}{8}n}} + \dfrac{8Df}{13neez^{\frac{13}{8}n}} - \dfrac{8Dff}{5ne^3z^{\frac{5}{8}n}} - \dfrac{8Dff}{ne^3}$ (I)
— 4.	$\dfrac{-8D}{29nez^{\frac{29}{8}n}} + \dfrac{8Df}{21neez^{\frac{21}{8}n}} - \dfrac{8Dff}{13ne^3z^{\frac{13}{8}n}} + \dfrac{8Df^3}{5ne^4z^{\frac{5}{8}n}} + \dfrac{8Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{e}{f}}$;

$$(I) = \tfrac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{f^5}{e^5}} \times -\delta\,(BP : BO) + \beta\,(DP : DO) - \beta\,(FP : FO) + \delta\,(HP : HO) + \varphi\,(PBO) - \psi\,(PDO) - \psi\,(PFO) + \varphi\,(PHO)$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{-e}{f}}$;

$$(I) = -\tfrac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{-f^5}{e^5}} \times -(AP : AO) + \gamma\,(CP : CO) - \gamma\,(GP : GO) + (IP : IO) + \chi\,(PCO) - \upsilon\,(PEO) + \chi\,(PGO)$$

θ	FORME XXII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$
&c.	
4.	$\frac{8Dz^{\frac{29}{8}n}}{29nf} - \frac{8Dez^{\frac{21}{8}n}}{21nff} + \frac{8Deez^{\frac{13}{8}n}}{13nf^3} - \frac{8De^3z^{\frac{5}{8}n}}{5nf^4} + \frac{8De^4}{nf^5}$ (I)
3.	$\frac{8Dz^{\frac{21}{8}n}}{21nf} - \frac{8Dez^{\frac{13}{8}n}}{13nff} + \frac{8Deez^{\frac{5}{8}n}}{5nf^3} - \frac{8De^3}{nf^4}$ (I)
2.	$\frac{8Dz^{\frac{13}{8}n}}{13nf} - \frac{8Dez^{\frac{5}{8}n}}{5nff} + \frac{8Dee}{nf^3}$ (I)
1.	$\frac{8Dz^{\frac{5}{8}n}}{5nf} - \frac{8De}{nff}$ (I)
0.	$\frac{8D}{nf}$ (I) Voyez fig. 34.
$-$ 1.	$\frac{-8D}{3nez^{\frac{3}{8}n}} - \frac{8D}{ne}$ (I)
$-$ 2.	$\frac{-8D}{11nez^{\frac{11}{8}n}} + \frac{8Df}{3neez^{\frac{3}{8}n}} + \frac{8Df}{nee}$ (I)
$-$ 3.	$\frac{-8D}{19nez^{\frac{19}{8}n}} + \frac{8Df}{11neez^{\frac{11}{8}n}} - \frac{8Dff}{3ne^3z^{\frac{3}{8}n}} - \frac{8Dff}{ne^3}$ (I)
$-$ 4.	$\frac{-8D}{27nez^{\frac{27}{8}n}} + \frac{8Df}{19neez^{\frac{19}{8}n}} - \frac{8Dff}{11ne^3z^{\frac{11}{8}n}} + \frac{8Df^3}{3ne^4z^{\frac{3}{8}n}} + \frac{8Df^3}{ne^4}$ (I)
&c.	

1. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{e}{f}}$;

(I) $= \frac{1}{8}\sqrt[8]{\frac{f^3}{e^3}} \times + \delta(BP:BO) - \beta(DP:DO) + \beta(FP:FO) - \delta(HP:HO) + \varphi(PBO) - \psi(PDO) - \psi(PFO) + \varphi(PHO)$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[8]{z^n} : \sqrt[8]{\frac{-e}{f}}$;

(I) $= \frac{-1}{8}\sqrt[8]{\frac{-f^3}{e^3}} \times - (AP:AO) + \gamma(CP:CO) - \gamma(GP:GO) + (IP:IO) - \chi(PGO) + \upsilon(PEO) - \chi(PGO)$

θ	FORME XXIII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
4.	$\dfrac{Dz^{2n}}{2nfh}+\dfrac{-Dehz^n-Dfgz^n}{nffhh}-\dfrac{De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{Dg^3}{nh^3}\,②$
3.	$\dfrac{Dz^n}{nfh}+\dfrac{Dee}{nff}\,①-\dfrac{Dgg}{nhh}\,②$
2.	$\dfrac{-De}{nf}\,①+\dfrac{Dg}{nh}\,②$
1.	$\dfrac{D}{n}\,①-\dfrac{D}{n}\,②$ Voyez fig. 27.
0.	$\dfrac{-Df}{ne}\,③+\dfrac{Dh}{ng}\,④$
-1.	$\dfrac{-D}{negz^n}+\dfrac{Dff}{nee}\,③-\dfrac{Dhh}{ngg}\,④$
-2.	$\dfrac{-D}{2negz^{2n}}+\dfrac{+Deh+Dfg}{neeggz^n}-\dfrac{Df^3}{ne^3}\,③+\dfrac{Dh^3}{ng^3}\,④$
&c.	

$p=fg-eh$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::z^n:\dfrac{e}{f}; & ①=\dfrac{1}{p}(BP:BO)\\ OP:OA::z^n:\dfrac{g}{h}; & ②=\dfrac{1}{p}(BP:BO)\\ OP:OA::\dfrac{1}{z^n}:\dfrac{f}{e}; & ③=\dfrac{1}{p}(BP:BO)\\ OP:OA::\dfrac{1}{z^n}:\dfrac{h}{g}; & ④=\dfrac{1}{p}(BP:BO)\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::z^n:\dfrac{-e}{f}; & ①=\dfrac{1}{p}(AP:AO)\\ OP:OA::z^n:\dfrac{-g}{h}; & ②=\dfrac{1}{p}(AP:AO)\\ OP:OA::\dfrac{1}{z^n}:\dfrac{-f}{e}; & ③=\dfrac{1}{p}(AP:AO)\\ OP:OA::\dfrac{1}{z^n}:\dfrac{-h}{g}; & ④=\dfrac{1}{p}(AP:AO)\end{cases}$$

θ	FORME XXIV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{2Dz^{\frac{3}{2}n}}{3nfh}-\dfrac{+2Dfgz^{\frac{1}{2}n}+2Dehz^{\frac{1}{2}n}}{nffhh}-\dfrac{2De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{2Dg^3}{nh^3}\,②$
2.	$\dfrac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{nfh}+\dfrac{2Dee}{nff}\,①-\dfrac{2Dgg}{nhh}\,②$
1.	$\dfrac{-2De}{nf}\,①+\dfrac{2Dg}{nh}\,②$
0.	$\dfrac{+2D}{n}\,①-\dfrac{2D}{n}\,②$ Voyez fig. 28.
-1.	$\dfrac{-2D}{negz^{\frac{1}{2}n}}-\dfrac{2Df}{ne}\,①+\dfrac{2Dh}{ng}\,②$
-2.	$\dfrac{-2D}{3negz^{\frac{3}{2}n}}+\dfrac{+2Dfg+2Deh}{neeggz^{\frac{1}{2}n}}+\dfrac{2Dff}{nee}\,①-\dfrac{2Dhh}{ngg}\,②$
&c.	

$$p=fg-eh$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{e}{f}}; & ①=\frac{1}{2p}\sqrt[2]{\frac{f}{e}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{g}{h}}; & ②=\frac{1}{2p}\sqrt[2]{\frac{h}{g}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-e}{f}}+(CP:CO); & ①=\frac{-1}{2p}\sqrt[2]{\frac{-f}{e}}\times-(AP:AO). \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-g}{h}}+(CP:CO); & ②=\frac{-1}{2p}\sqrt[2]{\frac{-h}{g}}\times-(AP:AO) \end{cases}$

θ	FORME XXV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{4}{3}n}}{4nfh}-\dfrac{+3Dehz^{\frac{1}{3}n}+3Dfgz^{\frac{1}{3}n}}{nffhh}-\dfrac{3De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{3Dg^3}{nh^3}\,②$
2.	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{nfh}+\dfrac{3Dee}{nff}\,①-\dfrac{3Dgg}{nhh}\,②$
2.	$\dfrac{-3De}{nf}\,①+\dfrac{3Dg}{nh}\,②$
0.	$\dfrac{+3D}{n}\,①-\dfrac{3D}{n}\,②$ Voyez fig. 29.
$\overline{1}$.	$\dfrac{-3D}{2negz^{\frac{2}{3}n}}-\dfrac{3Df}{ne}\,①+\dfrac{3Dh}{ng}\,②$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-3D}{5negz^{\frac{5}{3}n}}+\dfrac{+3Deh+3Dfg}{2neeggz^{\frac{2}{3}n}}+\dfrac{3Dff}{nee}\,①-\dfrac{3Dhh}{ngg}\,②$
&c.	

$$p = fg - eh$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\dfrac{e}{f}}\,; \quad ① = \dfrac{1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{ff}{ee}} \times -\beta\,(BP : BO) + (DP : DO) + \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\dfrac{g}{h}}\,; \quad ② = \dfrac{1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{hh}{gg}} \times -\beta\,(BP : BO) + (DP : DO) + \downarrow (PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\dfrac{-e}{f}}\,; \quad ① = \dfrac{-1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{ff}{ee}} \times -(AP : AO) + \beta\,(CP : CO) + \downarrow (PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[3]{z^n} : \sqrt[3]{\dfrac{-g}{h}}\,; \quad ② = \dfrac{-1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{hh}{gg}} \times -(AP : AO) + \beta\,(CP : CO) + \downarrow (PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XXVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{5}{3}n}}{5nfh}-\dfrac{+3Dfgz^{\frac{2}{3}n}+3Dehz^{\frac{2}{3}n}}{2nffhh}-\dfrac{3De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{3Dg^3}{nh^3}\,②$
2.	$\dfrac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2nfh}+\dfrac{3Dee}{nff}\,①-\dfrac{3Dgg}{nhh}\,②$
1.	$\dfrac{-3De}{nf}\,①+\dfrac{3Dg}{nh}\,②$
0.	$\dfrac{+3D}{n}\,①-\dfrac{3D}{n}\,②$ Voyez fig. 29.
$\overline{1}$.	$\dfrac{-3D}{negz^{\frac{1}{3}n}}-\dfrac{3Df}{ne}\,①+\dfrac{3Dh}{ng}\,②$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-3D}{4negz^{\frac{4}{3}n}}+\dfrac{+3Dfg+3Deh}{neeggz^{\frac{1}{3}n}}+\dfrac{3Dff}{nee}\,①-\dfrac{3Dhh}{ngg}\,②$
&c.	

$$p=fg-eh$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\dfrac{e}{f}};\quad ①=\dfrac{1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{f}{e}}\times\beta\,(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\psi\,(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\dfrac{g}{h}};\quad ②=\dfrac{1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{h}{g}}\times\beta\,(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\psi\,(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\dfrac{-e}{f}};\quad ①=\dfrac{-1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{-f}{e}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta\,(CP:CO)-\psi\,(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\dfrac{-g}{h}};\quad ②=\dfrac{-1}{3p}\sqrt[3]{\dfrac{-h}{g}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta\,(CP:CO)-\psi\,(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME XXVII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{4Dz^{\frac{5}{4}n}}{5nfh}-\dfrac{+4Dehz^{\frac{1}{4}n}+4Dfgz^{\frac{1}{4}n}}{nffhh}-\dfrac{4De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{4Dg^3}{nh^3}\,②$
2.	$\dfrac{4Dz^{\frac{1}{4}n}}{nfh}+\dfrac{4Dee}{nff}\,①-\dfrac{4Dgg}{nhh}\,②$
2.	$\dfrac{-4De}{nf}\,①+\dfrac{4Dg}{nh}\,②$
0.	$\dfrac{+4D}{n}\,①-\dfrac{4D}{n}\,②$ Voyez fig. 30.
$\overline{1}$.	$\dfrac{-4D}{3negz^{\frac{3}{4}n}}-\dfrac{4Df}{ne}\,①+\dfrac{4Dh}{ng}\,②$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-4D}{7negz^{\frac{7}{4}n}}+\dfrac{+4Deh+4Dfg}{3neeggz^{\frac{3}{4}n}}+\dfrac{4Dff}{nee}\,①-\dfrac{4Dhh}{ngg}\,②$
&c.	

$$p = fg - eh$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\dfrac{e}{f}}; \quad ① = \dfrac{1}{4p}\sqrt[4]{\dfrac{f^3}{e^3}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \quad +\beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\dfrac{g}{h}}; \quad ② = \dfrac{1}{4p}\sqrt[4]{\dfrac{h^3}{g^3}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \quad +\beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\dfrac{-e}{f}}; \quad ① = \dfrac{-1}{4p}\sqrt[4]{\dfrac{-f^3}{e^3}} \times -(AP : AO) \\ \quad +(EP : EO) + \chi(PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\dfrac{-g}{h}}; \quad ② = \dfrac{-1}{4p}\sqrt[4]{\dfrac{-h^3}{g^3}} \times -(AP : AO) \\ \quad +(EP : EO) + \chi(PCO). \end{cases}$$

FORME

θ	FORME XXVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{4Dz^{\frac{7}{4}n}}{7nfh}-\dfrac{+4Dehz^{\frac{3}{4}n}+4Dfgz^{\frac{3}{4}n}}{3nffhh}-\dfrac{4De^3}{nf^3}\,①+\dfrac{4Dg^3}{nh^3}\,②$
2.	$\dfrac{4Dz^{\frac{3}{4}n}}{3nfh}+\dfrac{4Dee}{nff}\,①-\dfrac{4Dgg}{nhh}\,②$
1.	$\dfrac{-4De}{nf}\,①+\dfrac{4Dg}{nh}\,②$
0.	$\dfrac{+4D}{n}\,①-\dfrac{4D}{n}\,②$ Voyez fig. 30.
-1.	$\dfrac{-4D}{negz^{\frac{1}{4}n}}-\dfrac{4Df}{ne}\,①+\dfrac{4Dh}{ng}\,②$
-2.	$\dfrac{-4D}{5negz^{\frac{5}{4}n}}+\dfrac{+4Deh+4Dfg}{neegg z^{\frac{1}{4}n}}+\dfrac{4Dff}{nee}\,①-\dfrac{4Dhh}{ngg}\,②$
&c.	

$$p = fg - eh$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{e}{f}}\,; \quad ① = \frac{1}{4p}\sqrt[4]{\frac{f}{e}} \times \beta\,(BP : BO) \\ \quad -\beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{g}{h}}\,; \quad ② = \frac{1}{4p}\sqrt[4]{\frac{h}{g}} \times \beta\,(BP : BO) \\ \quad -\beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-e}{f}}\,; \quad ① = \frac{-1}{4p}\sqrt[4]{\frac{-f}{e}} \times -(AP : AO) \\ \quad +(EP : EO) - \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-g}{h}}\,; \quad ② = \frac{-1}{4p}\sqrt[4]{\frac{-h}{g}} \times -(AP : AO) \\ \quad +(EP : EO) - \chi\,(PCO). \end{cases}$$

Blank page retained for pagination

θ	FORME XXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$
&c.	
4.	$\dfrac{Dz^{2n}}{2ng} - \dfrac{Dfz^n}{ngg} + \dfrac{+Dff - Deg}{2ng^3}M + \dfrac{-Df^3 + 3Defg}{2ng^3}\textcircled{1}$
3.	$\dfrac{Dz^n}{ng} - \dfrac{Df}{2ngg}M + \dfrac{+Dff - 2Deg}{2ngg}\textcircled{1}$
2.	$\dfrac{D}{2ng}M - \dfrac{Df}{2ng}\textcircled{1}$
1.	$\dfrac{D}{n}\textcircled{1}$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-D}{2ne}m - \dfrac{Df}{2ne}\textcircled{1}$
$\overline{1}$.	$\dfrac{-D}{nez^n} + \dfrac{Df}{2nee}m + \dfrac{+Dff - 2Deg}{2nee}\textcircled{1}$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-D}{2nez^{2n}} + \dfrac{Df}{neez^n} + \dfrac{+Dff - Deg}{2ne^3}m + \dfrac{-Df^3 + 3Defg}{2ne^3}\textcircled{1}$
&c.	.....

$M = 1\,(e+fz^n+gz^{2n} : e)$. $m = 1\,(e+fz^n+gz^{2n} : gz^{2n})$.

1. *Cas.* $OP : OA :: \frac{1}{2}f+gz : \sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$;

$\textcircled{1} = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ff-eg}} \times (CP : AP)$.

2. *Cas.* $OP : OA :: \frac{1}{2}f+gz^n : \sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$;

$\textcircled{1} = \frac{+1}{2}\sqrt{\frac{1}{eg-\frac{1}{4}ff}} \times \psi\,(PBO)$.

θ	FORME XXX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
4.	$\dfrac{2Dz^{\frac{5}{2}n}}{5ng} - \dfrac{2Dfz^{\frac{3}{2}n}}{3ngg} + \dfrac{+Dff - 2Deg}{ng^3}z^{\frac{1}{2}n} - \dfrac{2Dp^4}{ng^4}\,①\, + \dfrac{2Dq^4}{ng^4}\,②$
3.	$\dfrac{2Dz^{\frac{3}{2}n}}{3ng} - \dfrac{2Dfz^{\frac{1}{2}n}}{ngg} + \dfrac{2Dp^3}{ng^3}\,①\, - \dfrac{2Dq^3}{ng^3}\,②$
2.	$\dfrac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{ng} - \dfrac{2Dpp}{ngg}\,①\, + \dfrac{2Dqq}{ngg}\,②$
1.	$\dfrac{2Dp}{ng}\,①\, - \dfrac{2Dq}{ng}\,②$
0.	$\dfrac{-2D}{n}\,①\, + \dfrac{2D}{n}\,②$ Voyez fig. 28.
-1.	$\dfrac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}} + \dfrac{2Dg}{np}\,①\, - \dfrac{2Dg}{nq}\,②$
-2.	$\dfrac{-2D}{3nez^{\frac{3}{2}n}} + \dfrac{2Df}{neez^{\frac{1}{2}n}} - \dfrac{2Dgg}{npp}\,①\, + \dfrac{2Dgg}{nqq}\,②$
-3.	$\dfrac{-2D}{5nez^{\frac{5}{2}n}} + \dfrac{2Df}{3neez^{\frac{3}{2}n}} - \dfrac{-2Deg + 2Dff}{ne^3z^{\frac{1}{2}n}} + \dfrac{2Dg^3}{np^3}\,①\, - \dfrac{2Dg^3}{nq^3}\,②$
&c.	

$$a = \sqrt{ff - 4eg}\,; \quad p = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}a\,; \quad q = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\dfrac{p}{g}}\,; & ① = \dfrac{1}{2a}\sqrt[2]{\dfrac{g}{p}} \times \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\dfrac{q}{g}}\,; & ② = \dfrac{1}{2a}\sqrt[2]{\dfrac{g}{q}} \times \downarrow (PBO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\dfrac{-p}{g}}\,; & ① = \dfrac{-1}{2a}\sqrt[2]{\dfrac{-g}{p}} \times (CP : AP) \\ OP : OA :: \sqrt[2]{z^n} : \sqrt[2]{\dfrac{-q}{g}}\,; & ② = \dfrac{-1}{2a}\sqrt[2]{\dfrac{-g}{q}} \times (CP : AP) \end{cases}$

θ	FORME XXX. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. Cas.
&c.	
3.	$\frac{2Dz^{\frac{3}{2}n}}{3ng}-\frac{2Dfz^{\frac{1}{2}n}}{ngg}+\frac{\overline{r-f},f+eg}{2ngg}DM+\frac{\overline{r+f},f-eg}{2ngg}D\times①+②$
2.	$\frac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{ng}+\frac{f-r}{2ng}DM-\frac{+f+r}{2ng}D\times①+②$
1.	$\frac{-1}{2n}DM+\frac{1}{2n}D\times①+②$
0.	$\frac{g}{2nr}DM+\frac{g}{2nr}D\times①+②$ Voyez fig. 28.
$\overline{1}$.	$\frac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}}+\frac{r-f}{2ner}gDM-\frac{+r+f}{2ner}gD\times①+②$
$\overline{2}$.	$\frac{-2D}{3nez^{\frac{3}{2}n}}+\frac{2Df}{neez^{\frac{1}{2}n}}+\frac{\overline{f-r},f-eg}{2neer}gDM+\frac{\overline{f+r},f-eg}{2neer}gD\times①+②$
&c.	

$r=\sqrt{eg}$, $s=\sqrt{-fg+2\sqrt{eg^3}}$, $M=\frac{1}{2}(r+sz^{\frac{1}{2}n}+gz^n:r-sz^{\frac{1}{2}n}+gz^n)$.

1. Cas.
- OP : OA :: $\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{\frac{1}{4}ss-gr}$; ① $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times$ (CP : AP).
- OP : OA : $\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{\frac{1}{4}ss-gr}$; ② $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times$ (CP : AP).

2. Cas.
- OP : OA :: $\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{gr-\frac{1}{4}ss}$; ① $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times$ ⊥ (PBO).
- OP : OA :: $\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{gr-\frac{1}{4}ss}$; ② $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times$ ⊥ (PBO).

θ	FORME XXXI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^{n}+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{4}{3}n}}{4ng} - \dfrac{3Dfz^{\frac{1}{3}n}}{ngg} + \dfrac{3Dp^{3}}{ng^{3}}\,(1) - \dfrac{3Dq^{3}}{ng^{3}}\,(2)$
2.	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{ng} - \dfrac{3Dpp}{ngg}\,(1) + \dfrac{3Dqq}{ngg}\,(2)$
1.	$\dfrac{3Dp}{ng}\,(1) - \dfrac{3Dq}{ng}\,(2)$
0.	$\dfrac{-3D}{n}\,(1) + \dfrac{3D}{n}\,(2)$ Voyez fig. 29.
-1.	$\dfrac{-3D}{2nez^{\frac{2}{3}n}} + \dfrac{3Dg}{np}\,(1) - \dfrac{3Dg}{nq}\,(2)$
-2.	$\dfrac{-3D}{5nez^{\frac{5}{3}n}} + \dfrac{3Df}{2nez^{\frac{2}{3}n}} + \dfrac{3Dgg}{npp}\,(1) + \dfrac{3Dgg}{nqq}\,(2)$
&c.	

$$a = \sqrt{ff - 4eg}\,;\quad p = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}a\,;\quad q = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[3]{z^{n}} : \sqrt[3]{\dfrac{p}{g}}\,; \quad (1) = \dfrac{1}{3a}\sqrt[3]{\dfrac{gg}{pp}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \qquad + (DP : DO) + \psi\,(PBO). \\ OP : OA :: \sqrt[3]{z^{n}} : \sqrt[3]{\dfrac{q}{g}}\,; \quad (2) = \dfrac{1}{3a}\sqrt[3]{\dfrac{gg}{qq}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \qquad + (DP : DO) + \psi\,(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[3]{z^{n}} : \sqrt[3]{\dfrac{-p}{g}}\,; \quad (1) = \dfrac{-1}{3a}\sqrt[3]{\dfrac{gg}{pp}} \times -(AP : AO) \\ \qquad + \beta\,(CP : CO) + \psi\,(PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[3]{z^{n}} : \sqrt[3]{\dfrac{-q}{g}}\,; \quad (2) = \dfrac{-1}{3a}\sqrt[3]{\dfrac{gg}{qq}} \times -(AP : AO) \\ \qquad + \beta\,(CP : CO) + \psi\,(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XXXII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^{n}+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\frac{3Dz^{\frac{5}{3}n}}{5ng}-\frac{3Dfz^{\frac{2}{3}n}}{2ngg}+\frac{3Dp^{3}}{ng^{3}}\,①-\frac{3Dq^{3}}{ng^{3}}\,②$
2.	$\frac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2ng}-\frac{3Dpp}{ngg}\,①+\frac{2Dqq}{ngg}\,②$
1.	$\frac{3Dp}{ng}\,①-\frac{3Dq}{ng}\,②$
0.	$\frac{-3D}{n}\,①+\frac{3D}{n}\,②$ Voyez fig. 29.
$-$ 1.	$\frac{-3D}{nez^{\frac{1}{3}n}}+\frac{3Dg}{np}\,①-\frac{3Dg}{nq}\,②$
$-$ 2.	$\frac{-3D}{4nez^{\frac{4}{3}n}}+\frac{3Df}{neez^{\frac{1}{3}n}}-\frac{3Dgg}{npp}\,①+\frac{3Dgg}{nqq}\,②$
&c.	

$$a=\sqrt{ff-4eg};\quad p=\tfrac{1}{2}f+\tfrac{1}{2}a;\quad q=\tfrac{1}{2}f-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^{n}}:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\quad ①=\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{g}{p}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^{n}}:\sqrt[3]{\frac{q}{g}};\quad ②=\frac{1}{3a}\sqrt[3]{\frac{g}{q}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^{n}}:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\quad ①=\frac{-1}{3a}\sqrt[3]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^{n}}:\sqrt[3]{\frac{-q}{g}};\quad ②=\frac{-1}{3a}\sqrt[3]{\frac{-g}{q}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME XXXIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\frac{4Dz^{\frac{5}{4}n}}{5ng} - \frac{4Dfz^{\frac{1}{4}n}}{ngg} + \frac{4Dp^3}{ng^3}$ ① $- \frac{4Dq^3}{ng^3}$ ②
2.	$\frac{4Dz^{\frac{1}{4}n}}{ng} - \frac{4Dpp}{ngg}$ ① $+ \frac{4Dqq}{ngg}$ ②
1.	$\frac{4Dp}{ng}$ ① $- \frac{4Dq}{ng}$ ②
0.	$\frac{-4D}{n}$ ① $+ \frac{4D}{n}$ ② Voyez fig. 30.
-1.	$\frac{-4D}{3nez^{\frac{3}{4}n}} + \frac{4Dg}{np}$ ① $- \frac{4Dg}{nq}$ ②
-2.	$\frac{-4D}{7nez^{\frac{7}{4}n}} + \frac{4Df}{3neez^{\frac{3}{4}n}} - \frac{4Dgg}{npp}$ ① $+ \frac{4Dgg}{nqq}$ ②
&c.	

$$a = \sqrt{ff - 4eg}\,; \quad p = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}a\,; \quad q = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{p}{g}}\,; \quad ① = \frac{1}{4a}\sqrt[4]{\frac{g^3}{p^3}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \quad + \beta\,(DP : DO) + \psi\,(PBO) + \psi\,(PDO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{q}{g}}\,; \quad ② = \frac{1}{4a}\sqrt[4]{\frac{g^3}{q^3}} \times -\beta\,(BP : BO) \\ \quad + \beta\,(DP : DO) + \psi\,(PBO) + \psi\,(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-p}{g}}\,; \quad ① = \frac{-1}{4a}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{p^3}} \times -(AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) + \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-q}{g}}\,; \quad ② = \frac{-1}{4a}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{q^3}} \times -(AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) + \chi\,(PCO). \end{cases}$$

FORME

θ	FORME XXXIV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\frac{4Dz^{\frac{7}{4}n}}{7ng} - \frac{4Dfz^{\frac{3}{4}n}}{3ngg} + \frac{4Dp^3}{ng^3}\,①\, - \frac{4Dq^3}{ng^3}\,②$
2.	$\frac{4Dz^{\frac{3}{4}n}}{3ng} - \frac{4Dpp}{ngg}\,① + \frac{4Dqq}{ngg}\,②$
1.	$\frac{4Dp}{ng}\,① - \frac{4Dq}{ng}\,②$
0.	$\frac{-4D}{n}\,① + \frac{4D}{n}\,②$ Voyez fig. 30.
$-$ 1.	$\frac{-4D}{nez^{\frac{1}{4}n}} + \frac{4Dg}{np}\,① - \frac{4Dg}{nq}\,②$
$-$ 2.	$\frac{-4D}{5nez^{\frac{5}{4}n}} + \frac{4Df}{neez^{\frac{1}{4}n}} - \frac{4Dgg}{npp}\,① + \frac{4Dgg}{nqq}\,②$
&c.	

$$a = \sqrt{ff - 4eg}\,;\quad p = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}a\,;\quad q = \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{p}{g}}\,; \quad ① = \frac{1}{4a}\sqrt[4]{\frac{g}{p}}\,x + \beta\,(BP : BO) \\ \quad - \beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{q}{g}}\,; \quad ② = \frac{1}{4a}\sqrt[4]{\frac{g}{q}}\,x + \beta\,(BP : BO) \\ \quad - \beta\,(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-p}{g}}\,; \quad ① = \frac{-1}{4a}\sqrt[4]{\frac{-g}{p}}\,x - (AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) - \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-q}{g}}\,; \quad ② = \frac{-1}{4a}\sqrt[4]{\frac{-g}{q}}\,x - (AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) - \chi\,(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XXXIII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\frac{4Dz^{\frac{1}{4}n}}{ng}+\frac{fg-as-gr}{2ngs}D\times ① + ② + M; + \frac{gr-as-fg}{2ngs}D \times ③ + ④ + N.$
1.	$\frac{-g}{2ns}D\times ① + ② + M; + \frac{g}{2ns}D\times ③ + ④ + N.$ Voyez fig. 28.
0.	$\frac{as+gr}{2nes}D\times ① + ② + M; + \frac{as-gr}{2nes}D\times ③ + ④ + N.$
-1.	$\frac{-4D}{3nez^{\frac{3}{4}n}}+\frac{egg-afs-fgr}{2nees}D\times ① + ② + M; + \frac{fgr-afs-egg}{2nees}D \times ③ + ④ + N.$
&c.	

$$r=\sqrt{eg};\quad s=\sqrt{-fg+2\sqrt{eg^3}};\quad a=\sqrt[4]{eg^3};$$

$$b=\sqrt{+\sqrt{-fg^3+2\sqrt{eg^7}}+2\sqrt[4]{eg^7}};\quad c=\sqrt{-\sqrt{-fg^3+2\sqrt{eg^7}}+2\sqrt[4]{eg^7}}.$$

1. *Cas.*

OP : OA :: $\pm\frac{1}{2}c+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{\frac{1}{4}cc-ag}$; ① $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc-ag}}\times$ (CP : AP).

OP : OA :: $\mp\frac{1}{2}c+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{\frac{1}{4}cc-ag}$; ② $=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc-ag}}\times$ (CP : AP).

OP : OA :: $\pm\frac{1}{2}b+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{\frac{1}{4}bb-ag}$; ③ $=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb-ag}}\times$ (CP : AP).

OP : OA :: $-\frac{1}{2}b+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{\frac{1}{4}bb-ag}$; ④ $=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb-ag}}\times$ (CP : AP).

2. *Cas.*

OP : OA :: $+\frac{1}{2}c+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{ag-\frac{1}{4}cc}$; ① $=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{ag-\frac{1}{4}cc}}\times$ ⊥ (PBO).

OP : OA :: $-\frac{1}{2}c+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{ag-\frac{1}{4}cc}$; ② $=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{ag-\frac{1}{4}cc}}\times$ ⊥ (PBO).

OP : OA :: $+\frac{1}{2}b+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{ag-\frac{1}{4}bb}$; ③ $=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{ag-\frac{1}{4}bb}}\times$ ⊥ (PBO).

OP : OA :: $-\frac{1}{2}b+gz^{\frac{1}{4}n}$: $\sqrt{ag-\frac{1}{4}bb}$; ④ $=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{ag-\frac{1}{4}bb}}\times$ ⊥ (PBO).

θ	FORME XXXIV. $\frac{Dz^{\theta n + \frac{3}{4}n - 1}dz}{e + fz^n + gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\frac{4Dz^{\frac{3}{4}n}}{3ng} + \frac{ar - fs - af}{2ngs} D \times ① + ② - M ; + \frac{af - fs - ar}{2ngs} D \times ③ + ④ - N.$
1.	$\frac{s + a}{2ns} D \times ① + ② - M ; + \frac{s - a}{2ns} D \times ③ + ④ - N.$ V. fig. 28.
0.	$\frac{-ar}{2nes} D \times ① + ② - M ; + \frac{ar}{2nes} D \times ③ + ④ - N.$
-1.	$\frac{-4D}{nez^{\frac{1}{4}n}} + \frac{afr - egs - aeg}{2nees} D \times ① + ② - M ; + \frac{aeg - egs - afr}{2nees} D \times ③ + ④ - N.$
&c.	

$$M = \frac{1}{c}\left(a + cz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n} : a - cz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n}\right).$$
$$N = \frac{1}{b}\left(a + bz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{2}n} : a - bz^{\frac{1}{4}n} + gz^{\frac{1}{4}n}\right).$$

Les valeurs des quantités, r, s, a, b, c, ①, ②, ③, ④, M, N, sont les mêmes pour les deux formes.

Blank page retained for pagination

θ	FORME XXXV. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times k+lz^n}$
&c.	
4.	$\dfrac{Dz^n}{ngl}-\dfrac{+fl+gk}{2ngll}DM+\dfrac{Dk^3}{2nll}N+\dfrac{+effl-f^3k-2eegl+3efgk}{2ngg}D\,\textcircled{1}$
3.	$\dfrac{D}{2ngl}M-\dfrac{Dkk}{2nl}N+\dfrac{ffk-2egk-efl}{2ng}D\,\textcircled{1}$
2.	$\dfrac{Dk}{2n}N+\dfrac{2el-fk}{2n}D\,\textcircled{1}$
1.	$\dfrac{-Dl}{2n}N+\dfrac{2gk-fl}{2n}D\,\textcircled{1}$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-D}{2nek}m+\dfrac{Dll}{2nk}N+\dfrac{ffl-2egl-fgk}{2ne}D\,\textcircled{1}$
-1.	$\dfrac{-D}{nekz^n}+\dfrac{+el+fk}{2neekk}Dm-\dfrac{Dl^3}{2nkk}N+\dfrac{+ffgk-f^3l-2eggk+3efgl}{2nee}D\,\textcircled{1}$
&c.	

$M=1\,(e+fz^n+gz^{2n}:e)$. $m=1\,(e+fz^n+gz^{2n}:gz^{2n})$.

$l=ell-fkl+gkk$; $N=\frac{1}{l}(e+fz^n+gz^{2n}:\overline{k+lz^n}|^2)$.

1. *Cas.* OP : OA :: $\frac{1}{2}f+gz^n:\sqrt{\frac{1}{4}ff-eg}$; $\textcircled{1}=\frac{-1}{2l}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ff-eg}}\times$ (CP : AP).

2. *Cas.* OP : OA :: $\frac{1}{2}f+gz^n:\sqrt{eg-\frac{1}{4}ff}$; $\textcircled{1}=\frac{+1}{2l}\sqrt{\frac{1}{eg-\frac{1}{4}ff}}\times$ ⊥ (PBO).

θ	FORME XXXVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n},\ k+lz^n}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{ngl} - \dfrac{2Dk^3}{nll}\,①+\dfrac{2kp^3-2elpp}{ngg}D\,②+\dfrac{2elqq-2kq^3}{ngg}D\,③$
2.	$\dfrac{2Dkk}{nl}\,①+\dfrac{2elp-2kpp}{ng}D\,②+\dfrac{2kqq-2elq}{ng}D\,③$
1.	$\dfrac{-2Dk}{n}\,①+\dfrac{2kp-2el}{n}D\,②+\dfrac{2el-2kq}{n}D\,③$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{2Dl}{n}\,①+\dfrac{2lq-2gk}{n}D\,②+\dfrac{2gk-2lp}{n}D\,③$
-1.	$\dfrac{-2D}{nekz^{\frac{1}{2}n}} - \dfrac{2Dll}{nk}\,①+\dfrac{2ggk-2glq}{np}D\,②+\dfrac{2glp-2ggk}{nq}D\,③$
&c.	

$a=\sqrt{ff-4eg}$; $p=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}a$; $q=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$; $t=ell-fkl+gkk$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{k}{l}}; & ① = \frac{1}{2t}\sqrt[2]{\frac{l}{k}}\times\psi\,(PBO). \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{p}{g}}; & ② = \frac{1}{2at}\sqrt[2]{\frac{g}{p}}\times\psi\,(PBO). \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{q}{g}}; & ③ = \frac{1}{2at}\sqrt[2]{\frac{g}{q}}\times\psi\,(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-k}{l}}; & ① = \frac{-1}{2t}\sqrt[2]{\frac{-l}{k}}\times(CP:AP) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-p}{g}}; & ② = \frac{-1}{2at}\sqrt[2]{\frac{-g}{p}}\times(CP:AP) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-q}{g}}; & ③ = \frac{-1}{2at}\sqrt[2]{\frac{-g}{q}}\times(CP:AP). \end{cases}$$

θ	FORME XXXVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{ngl}-\dfrac{2k^3}{nll}D\,①+\dfrac{\overline{el-fk},\overline{f-r}+egk}{2ng}DM+\dfrac{\overline{el-fk},\overline{f+r}+egk}{2ng}D\times②+③$
2.	$\dfrac{2kk}{nl}D\,①+\dfrac{-el+k,\overline{f-r}}{2n}DM+\dfrac{-el+k,\overline{f+r}}{2n}D\times②+③$
1.	$\dfrac{-2k}{n}D\,①+\dfrac{rl-gk}{2n}DM-\dfrac{+rl+gk}{2n}D\times②+③$ Voy. fig. 28.
0.	$\dfrac{2l}{n}D\,①+\dfrac{ggk-gl,\overline{f-r}}{2nr}DM+\dfrac{-ggk+gl,\overline{f+r}}{2nr}D\times②+③$
-1.	$\dfrac{-2D}{nekz^{\frac{1}{2}n}}-\dfrac{2ll}{nk}D\,①+\dfrac{\overline{fgl-ggk},\overline{f-r}-eggl}{2ner}DM+\dfrac{\overline{ggk-fgl},\overline{f+r}+eggl}{2ner}D\times②+③$
&c.	

$r=\sqrt{eg}.\quad s=\sqrt{-fg+2\sqrt{eg^3}}.\quad t=ell-fkl+gkk.$

$M=\frac{1}{st}(r+sz^{\frac{1}{2}n}+gz^n:r-sz^{\frac{1}{2}n}+gz^n).$

1. *Cas.*

$OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{k}{l}};\ \ldots\ ①=\frac{+1}{2t}\sqrt[2]{\frac{l}{k}}\times\downarrow(PBO).$

$OP:OA::\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{\frac{1}{4}ss-gr};\ ②=\frac{\pm 1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times(CP:AP).$

$OP:OA:\mp\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{\frac{1}{4}ss-gr};\ ③=\frac{\pm 1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times(CP:AP).$

2. *Cas.*

$OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-k}{l}};\ \ldots\ ①=\frac{-1}{2t}\sqrt[2]{\frac{-l}{k}}\times(CP:AP).$

$OP:OA::\pm\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{gr-\frac{1}{4}ss};\ ②=\frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO).$

$OP:OA::\mp\frac{1}{2}s+gz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt{gr-\frac{1}{4}ss};\ ③=\frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO).$

θ	FORME XXXVII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}},\ \overline{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{ngl} - \dfrac{3Dk^3}{nll}\,①+\dfrac{3kp^3-3elpp}{ngg}D\,②+\dfrac{3elqq-3kq^3}{ngg}D\,③$
2.	$\dfrac{3Dkk}{nl}\,①+\dfrac{3elp-3kpp}{ng}D\,②+\dfrac{3kqq-3elq}{ng}D\,③$
1.	$\dfrac{-3Dk}{n}\,①+\dfrac{3kp-3el}{n}D\,②+\dfrac{3el-3kq}{n}D\,③$ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{3Dl}{n}\,①+\dfrac{3lq-3gk}{n}D\,②+\dfrac{3gk-3lp}{n}D\,③$
-1.	$\dfrac{-3D}{2nekz^{\frac{2}{3}n}} - \dfrac{3Dll}{nk}\,①+\dfrac{3ggk-3glq}{np}D\,②+\dfrac{3glp-3ggk}{nq}D\,③$
&c.	

$a=\sqrt{ff-4eg}$; $p=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}a$; $q=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$; $t=ell-fkl+gkk$;

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{k}{l}};\quad ①=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-\beta\,(BP:BO)\\ \qquad +(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\quad ②=\frac{1}{3at}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-\beta\,(BP:BO)\\ \qquad +(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{q}{g}};\quad ③=\frac{1}{3at}\sqrt[3]{\frac{gg}{qq}}\times-\beta\,(BP:BO)\\ \qquad +(DP:DO)+\downarrow(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-k}{l}};\quad ①=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{ll}{kk}}\times-(AP:AO)\\ \qquad +\beta\,(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\quad ②=\frac{-1}{3at}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-(AP:AO)\\ \qquad +\beta\,(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-q}{g}};\quad ③=\frac{-1}{3at}\sqrt[3]{\frac{gg}{qq}}\times-(AP:AO)\\ \qquad +\beta\,(CP:CO)+\downarrow(PCO). \end{cases}$$

FORME

θ	FORME XXXVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times k+lz^n}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2ngl}-\dfrac{3Dk^3}{nll}\,①+\dfrac{3kp^3-3elpp}{ngg}D\,②+\dfrac{3elqq-3kq^3}{ngg}D\,③$
2.	$\dfrac{3Dkk}{nl}\,①+\dfrac{3elp-3kpp}{ng}D\,②+\dfrac{3kqq-3elq}{ng}D\,③$
1.	$\dfrac{-3Dk}{n}\,①+\dfrac{3kp-3el}{n}D\,②+\dfrac{3el-3kq}{n}D\,③$ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{3Dl}{n}\,①+\dfrac{3lq-3gk}{n}D\,②+\dfrac{3gk-3lp}{n}D\,③$
-1.	$\dfrac{-3D}{nekz^{\frac{1}{3}n}}-\dfrac{3Dll}{nk}\,①+\dfrac{3ggk-3glq}{np}D\,②+\dfrac{3glp-3ggk}{nq}D\,③$
&c.	

$a=\sqrt{ff-4eg}$; $p=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}a$; $q=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$; $t=ell-fkl+gkk$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{k}{l}};\quad ①=\frac{1}{3t}\sqrt[3]{\frac{l}{k}}\times\beta\,(BP:BO)-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\quad ②=\frac{1}{3at}\sqrt[3]{\frac{g}{p}}\times\beta\,(BP:BO)-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{q}{g}};\quad ③=\frac{1}{3at}\sqrt[3]{\frac{g}{q}}\times\beta\,(BP:BO)-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-k}{l}};\quad ①=\frac{-1}{3t}\sqrt[3]{\frac{-l}{k}}\times-(AP:AO)+\beta\,(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\quad ②=\frac{-1}{3at}\sqrt[3]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO)+\beta\,(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-q}{g}};\quad ③=\frac{-1}{3at}\sqrt[3]{\frac{-g}{q}}\times-(AP:AO)+\beta\,(CP:CO)-\downarrow(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME XXXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times\overline{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{4elp-4kpp}{ng}$ D ② $+\dfrac{4kqq-4elq}{ng}$ D ③
1.	$\dfrac{-4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{4kp-4el}{n}$ D ② $+\dfrac{4el-4kq}{n}$ D ③ Voy. fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{4lq-4gk}{n}$ D ② $+\dfrac{4gk-4lp}{n}$ D ③
&c.	

$a=\sqrt{ff-4eg}$, $p=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}a$, $q=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$, $t=ell-fkl+gkk$.

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}::\sqrt[4]{\frac{k}{l}};\quad ① = \frac{1}{4t}\sqrt[4]{\frac{l^3}{k^3}}\times -\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{p}{g}};\quad ② = \frac{1}{4at}\sqrt[4]{\frac{g^3}{p^3}}\times -\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{q}{g}};\quad ③ = \frac{1}{4at}\sqrt[4]{\frac{g^3}{q^3}}\times -\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{l}};\quad ① = \frac{-1}{4t}\sqrt[4]{\frac{-l^3}{k^3}}\times -(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-p}{g}};\quad ② = \frac{-1}{4at}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{p^3}}\times -(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-q}{g}};\quad ③ = \frac{-1}{4at}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{q^3}}\times -(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XL. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times\overline{k+lz^n}}$ 1.*Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{4elp-4kpp}{ng}$ D ② $+\dfrac{4kqq-4elq}{ng}$ D ③
1.	$\dfrac{-4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{4kp-4el}{n}$ D ② $+\dfrac{4el-4kq}{n}$ D ③ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{4lq-4gk}{n}$ D ② $+\dfrac{4gk-4lp}{n}$ D ③
&c.	

$a=\sqrt{ff-4eg}$; $p=\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}a$, $q=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$, $t=ell-fkl+gkk$.

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{k}{l}}; \quad ① = \frac{1}{4t}\sqrt[4]{\frac{l}{k}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{p}{g}}; \quad ② = \frac{1}{4at}\sqrt[4]{\frac{g}{p}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{q}{g}}; \quad ③ = \frac{1}{4at}\sqrt[4]{\frac{g}{q}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{l}}; \quad ① = \frac{-1}{4t}\sqrt[4]{\frac{-l}{k}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-p}{g}}; \quad ② = \frac{-1}{4at}\sqrt[4]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-q}{g}}; \quad ③ = \frac{-1}{4at}\sqrt[4]{\frac{-g}{q}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XXXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{c+fz^n+gz^{2n}\times k+lz^n}$ 2. Cas.
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{-k,\overline{as+gr}}{+g,\overline{fk-el}}$ $\dfrac{}{2ns}$ D × ② + ③ + M; $+\dfrac{-k,\overline{as-gr}}{-g,\overline{fk-el}}$ $\dfrac{}{2ns}$ D × ④ + ⑤ + N.
1.	$\dfrac{-4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{+l,\overline{as+gr}}{-ggk}$ $\dfrac{}{2ns}$ D × ② + ③ + M; $+\dfrac{+l,\overline{as-gr}}{+ggk}$ $\dfrac{}{2ns}$ D × ④ + ⑤ + N. Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{\overline{gk-fl},\overline{as+gr}}{+eggl}$ $\dfrac{}{2nes}$ D × ② + ③ + M; $+\dfrac{\overline{gk-fl},\overline{as-gr}}{-eggl}$ $\dfrac{}{2nes}$ D × ④ + ⑤ + N.
&c.	

Les valeurs des quantités r, s, t, a, b, c, M, N, se trouvent dans la pag. suiv.

1. Cas.

$$\begin{cases} OP:OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{k}{l}}; \quad ① = \frac{+1}{4^t}\sqrt[4]{\frac{l^3}{k^3}} \times -\beta(BP:BO) + \beta(DP:DO) \\ \quad + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP:OA :: \pm\frac{1}{2}c + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}cc - ag}; \quad ② = \frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc - ag}} \times (EP:AP). \\ OP:OA :: \pm\frac{1}{2}c + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}cc - ag}; \quad ③ = \frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc - ag}} \times (EP:AP). \\ OP:OA :: \pm\frac{1}{2}b + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}bb - ag}; \quad ④ = \frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb - ag}} \times (EP:AP). \\ OP:OA :: -\frac{1}{2}b + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}bb - ag}; \quad ⑤ = \frac{-1}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb - ag}} \times (EP:AP). \end{cases}$$

2. Cas.

$$\begin{cases} OP:OA :: \sqrt[4]{z^n} : \sqrt[4]{\frac{-k}{l}}; \quad ① = \frac{-1}{4^t}\sqrt[4]{\frac{-l^3}{k^3}} \times -(AP:AO) + (EP:EO) \\ \quad + \chi(PCO) \\ OP:OA :: +\frac{1}{2}c + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ag - \frac{1}{4}cc}; \quad ② = \frac{+1}{2t}\sqrt{\frac{1}{ag - \frac{1}{4}cc}} \times \chi(PCO). \\ OP:OA :: -\frac{1}{2}c + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ag - \frac{1}{4}cc}; \quad ③ = \frac{+1}{2t}\sqrt{\frac{1}{ag - \frac{1}{4}cc}} \times \chi(PCO). \\ OP:OA :: +\frac{1}{2}b + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ag - \frac{1}{4}bb}; \quad ④ = \frac{+1}{2t}\sqrt{\frac{1}{ag - \frac{1}{4}bb}} \times \chi(PCO). \\ OP:OA :: -\frac{1}{2}b + gz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ag - \frac{1}{4}bb}; \quad ⑤ = \frac{+1}{2t}\sqrt{\frac{1}{ag - \frac{1}{4}bb}} \times \chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME XL. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\times k+lz^n}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{\overline{el-fk},\overline{s+a}+akr}{2ns}$ D × ② + ③ − M ; $+\dfrac{\overline{el-fk},\overline{s-a}-akr}{2ns}$ D × ④ + ⑤ − N.
1.	$\dfrac{-4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{\overline{+gk},\overline{s+a}-alr}{2ns}$ D × ② + ③ − M ; $+\dfrac{\overline{+gk},\overline{s-a}+alr}{2ns}$ D × ④ + ⑤ − N. Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{\overline{-egl},\overline{s+a}-ar,\overline{gk-fl}}{2nes}$ D × ② + ③ − M ; $+\dfrac{\overline{-egl},\overline{s-a}+ar,\overline{gk-fl}}{2nes}$ D × ④ + ⑤ − N.
&c.	

$r=\sqrt{eg}$, $s=\sqrt{-fg+2\sqrt{eg^3}}$, $t=ell-fkl+gkk$; $a=\sqrt[4]{eg^3}$,

$b=\sqrt{+\sqrt{-fg^3+2\sqrt{eg^7}}+2\sqrt[4]{eg^7}}$; $c=\sqrt{-\sqrt{-fg^3+2\sqrt{eg^7}}+2\sqrt[4]{eg^7}}$.

$$M=\tfrac{1}{ct}\left(a+cz^{\frac{1}{4}n}+gz^{\frac{1}{2}n}:a-cz^{\frac{1}{4}n}+gz^{\frac{1}{2}n}\right).$$

$$N=\tfrac{1}{bt}\left(a+bz^{\frac{1}{4}n}+gz^{\frac{1}{2}n}:a-bz^{\frac{1}{4}n}+gz^{\frac{1}{4}n}\right).$$

1. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{k}{l}}$; ① $=\frac{+1}{4t}\sqrt[4]{\frac{l}{k}}\times\beta$ (BP : BO) − β (DP : DO) + ↓ (PBO) + ↓ (PDO).

2. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{l}}$; ① $=\frac{-1}{4t}\sqrt[4]{\frac{-l}{k}}\times-$ (AP : AO) + (EP : EO) − χ (PCO).

Les valeurs des quantités, ②, ③, ④, ⑤, se trouvent dans la page précédente.

θ.	FORME XLI. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$
&c.	
4.	$\dfrac{Dz^n}{nh}+\dfrac{\begin{matrix}+hk\\-lq\end{matrix}}{2nhhl}DM-\dfrac{Dk^3}{2nl}N+\dfrac{\begin{matrix}+llpqq+klq^3\\-2hllpp+3ehllq\end{matrix}}{2nhh}D\,①$
3.	$\dfrac{D}{2nh}M-\dfrac{Dkk}{2n}N-\dfrac{+klqq+2ehll+llpq}{2nh}D\,①$
2.	$\dfrac{-Dkl}{2n}N+\dfrac{2llp+klq}{2n}D\,①$
1.	$\dfrac{-Dll}{2n}N+\dfrac{-2hkl-llq}{2n}D\,①$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-D}{2ne}m-\dfrac{Dl^3}{nk}N+\dfrac{llqq-2hllp+hklq}{2np}D\,①$
-1.	$\dfrac{-D}{nez^n}+\dfrac{\begin{matrix}+lp\\-kq\end{matrix}}{2neel}Dm-\dfrac{Dl^4}{2nkk}N-\dfrac{\begin{matrix}+hklqq+llq^3\\+2ehhll-3hllpq\end{matrix}}{2npp}D\,①$
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a une racine réelle $\frac{k}{l}$ qui soit la valeur de z^n, soit que les autres racines soient réelles ou imaginaires, on supposera, $p=-e\frac{l}{k}$, $q=-e\frac{ll}{kk}-f\frac{l}{k}$; ou $p=f+g\frac{k}{l}+h\frac{kk}{ll}$, $q=g+h\frac{k}{l}$;

$M=1\,(p+qz^n+hz^{2n}:p)$. $m=1\,(p+qz^n+hz^{2n}:hz^{2n})$.

$t=pll+qkl+hkk$; $N=\frac{1}{t}(p+qz^n+hz^{2n}:\overline{lz^n-k}|^2)$;

1. *Cas.* OP : OA :: $\frac{1}{2}q+hz^n:\sqrt[2]{\frac{1}{4}qq-hp}$; $① = \frac{-1}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{\frac{1}{4}qq-hp}}\times$ (CP : AP).

2. *Cas.* OP : OA :: $\frac{1}{2}q+hz^n:\sqrt[2]{hp-\frac{1}{4}qq}$; $① = \frac{+1}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{hp-\frac{1}{4}qq}}\times$ ⸸ (PBO).

θ	FORME XLI. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ *autre Cas.*
&c.	
4.	$\frac{Dz^n}{nh} + \frac{Dk^3}{n\varkappa\varkappa}$ ① $- \frac{Dl^3}{n\lambda\lambda}$ ② $+ \frac{Dm^3}{n\mu\mu}$ ③
3.	$\frac{Dkk}{n\varkappa}$ ① $- \frac{Dll}{n\lambda}$ ② $+ \frac{Dm^2}{n\mu}$ ③
2.	$\frac{Dk}{n}$ ① $- \frac{Dl}{n}$ ② $+ \frac{Dm}{n}$ ③
1.	$\frac{D\varkappa}{n}$ ① $- \frac{D\lambda}{n}$ ② $+ \frac{D\mu}{n}$ ③
0.	$\frac{D\varkappa\varkappa}{nk}$ ⓪ $- \frac{D\lambda\lambda}{nl}$ ④ $+ \frac{D\mu\mu}{nm}$ ⑤
-1.	$\frac{-D}{nez^n} + \frac{D\varkappa^3}{nkk}$ ⓪ $- \frac{D\lambda^3}{nll}$ ④ $+ \frac{D\mu^3}{nm^2}$ ⑤
&c.	

Si l'équation $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} = 0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p = k\lambda - \varkappa l$; $q = k\mu - \varkappa m$; $r = l\mu - \lambda m$;

① $= \frac{1}{pq}(\varkappa z^n - k : k)$; ② $= \frac{1}{pr}(\lambda z^n - l : l)$; ③ $= \frac{1}{qr}(\mu z^n - m : m)$;

⓪ $= \frac{1}{pq}(\varkappa z^n - k : \varkappa z^n)$; ④ $= \frac{1}{pr}(\lambda z^n - l : \lambda z^n)$;

⑤ $= \frac{1}{qr}(\mu z^n - m : \mu z^n)$.

θ	FORME XLII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{nh}+\dfrac{2Dk^3}{n\varkappa\varkappa}\,①-\dfrac{2Dl^3}{n\lambda\lambda}\,②+\dfrac{2Dm^3}{n\mu\mu}\,③$
2.	$\dfrac{2Dkk}{n\varkappa}\,①-\dfrac{2Dll}{n\lambda}\,②+\dfrac{2Dmm}{n\mu}\,③$
1.	$\dfrac{2Dk}{n}\,①-\dfrac{2Dl}{n}\,②+\dfrac{2Dm}{n}\,③$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{2D\varkappa}{n}\,①-\dfrac{2D\lambda}{n}\,②+\dfrac{2D\mu}{n}\,③$
— 1.	$\dfrac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}}+\dfrac{2D\varkappa\varkappa}{nk}\,①-\dfrac{2D\lambda\lambda}{nl}\,②+\dfrac{2D\mu\mu}{nm}\,③$
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p=k\lambda-\varkappa l$; $q=k\mu-\varkappa m$; $r=l\mu-\lambda m$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{k}{\varkappa}}; & ①=\frac{-1}{2pq}\sqrt[2]{\frac{\varkappa}{k}}\times(CP:AP) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{l}{\lambda}}; & ②=\frac{-1}{2pr}\sqrt[2]{\frac{\lambda}{l}}\times(CP:AP) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{m}{\mu}}; & ③=\frac{-1}{2qr}\sqrt[2]{\frac{\mu}{m}}\times(CP:AP) \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-k}{\varkappa}}; & ①=\frac{+1}{2pq}\sqrt[2]{\frac{-\varkappa}{k}}\times\downarrow(PBO) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-l}{\lambda}}; & ②=\frac{+1}{2pr}\sqrt[2]{\frac{-\lambda}{l}}\times\downarrow(PBO) \\ OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-m}{\mu}}; & ③=\frac{+1}{2qr}\sqrt[2]{\frac{-\mu}{m}}\times\downarrow(PBO) \end{cases}$$

FORME

θ	FORME XLII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 2. *Cas.*
&c.	$\overline{kq+lp}, \overline{q-r}$ $\quad$ $-\overline{kq-lp}, \overline{q+r}$
3.	$\frac{2Dz^{\frac{1}{2}n}}{nh}+\frac{2Dk^3}{nll}\,①+\frac{-hkp}{2nh}DM+\frac{+khp}{2nh}D\times②+③$
2.	$\frac{2Dkk}{nl}\,①+\frac{kr-kq-lp}{2n}DM+\frac{kr+kq+lp}{2n}D\times②+③$
1	$\frac{2Dk}{n}\,①+\frac{lr+hk}{2n}DM+\frac{lr-hk}{2n}D\times②+③$ Voy. fig. 28.
0.	$\frac{2Dl}{n}\,①+\frac{hlp-hkr-lqr}{2np}DM+\frac{-hlp-hkr-lqr}{2np}D\times②+③$
	$\overline{hk+lq}, \overline{qr-hp}$ $\quad$ $\overline{hk+lq}, \overline{qr+hp}$
1.	$\frac{-2D}{ne^{\frac{1}{2}n}}+\frac{2Dll}{nk}\,①+\frac{-hlpr}{2npp}DM+\frac{-hlpr}{2npp}D\times②+③$
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ n'a qu'une racine réelle $\frac{k}{l}$, les deux autres racines étant imaginaires, on supposera, $p=-e\frac{l}{k}$; $q=-e\frac{ll}{kk}-f\frac{l}{k}$; ou $p=f+g\frac{k}{l}+h\frac{kk}{ll}$, $q=g+h\frac{k}{l}$; $r=\sqrt{hp}$, $s=\sqrt{-hp+2\sqrt{h^3p}}$, $t=pll+qkl+hkk$;

$$M=\frac{l}{st}(r+sz^{\frac{1}{2}n}+hz^n : r-sz^{\frac{1}{2}n}+hz^n).$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{k}{l}};\ \ldots\ ① = \frac{-l}{2t}\sqrt[2]{\frac{l}{k}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::\pm\frac{1}{2}s+hz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt[2]{\frac{1}{4}ss-hr};\ ② = \frac{-l}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-hr}}\times(CP:AP). \\ OP:OA:\frac{-1}{2}s+hz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt[2]{\frac{1}{4}ss-hr};\ ③ = \frac{-l}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{\frac{1}{4}ss-hr}}\times(CP:AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[2]{z^n}:\sqrt[2]{\frac{-k}{l}};\ \ldots\ ① = \frac{+l}{2t}\sqrt[2]{\frac{-l}{k}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\pm\frac{1}{2}s+hz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt[2]{hr-\frac{1}{4}ss};\ ② = \frac{+l}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{hr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\frac{-1}{2}s+hz^{\frac{1}{2}n}:\sqrt[2]{hr-\frac{1}{4}ss};\ ③ = \frac{+l}{2t}\sqrt[2]{\frac{1}{hr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME XLIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{1}{3}n}}{nh}+\dfrac{3Dk^3}{n\varkappa\varkappa}$ ① $-\dfrac{3Dl^3}{n\lambda\lambda}$ ② $+\dfrac{3Dm^3}{n\mu\mu}$ ③
2.	$\dfrac{3Dkk}{n\varkappa}$ ① $-\dfrac{3Dll}{n\lambda}$ ② $+\dfrac{3Dmm}{n\mu}$ ③
1.	$\dfrac{3Dk}{n}$ ① $-\dfrac{3Dl}{n}$ ② $+\dfrac{3Dm}{n}$ ③ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{3D\varkappa}{n}$ ① $-\dfrac{3D\lambda}{n}$ ② $+\dfrac{3D\mu}{n}$ ③
-1.	$\dfrac{-3D}{nez^{\frac{1}{3}n}}+\dfrac{3D\varkappa\varkappa}{nk}$ ① $-\dfrac{3D\lambda\lambda}{nl}$ ② $+\dfrac{3D\mu\mu}{nm}$ ③
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p=k\lambda-\varkappa l$; $q=k\mu-\varkappa m$; $r=l\mu-\lambda m$;

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{-1}{3pq}\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa}{kk}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{l}{\lambda}};\quad ②=\frac{-1}{3pr}\sqrt[3]{\frac{\lambda\lambda}{ll}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{m}{\mu}};\quad ③=\frac{-1}{3qr}\sqrt[3]{\frac{\mu\mu}{mm}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{1}{3pq}\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa}{kk}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-l}{\lambda}};\quad ②=\frac{1}{3pr}\sqrt[3]{\frac{\lambda\lambda}{ll}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-m}{\mu}};\quad ③=\frac{1}{3qr}\sqrt[3]{\frac{\mu\mu}{mm}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME XLIV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3Dz^{\frac{2}{3}n}}{2nh}+\dfrac{3Dk^3}{n\varkappa\varkappa}\,①-\dfrac{3Dl^3}{n\lambda\lambda}\,②+\dfrac{3Dm^3}{n\mu\mu}\,③$
2.	$\dfrac{3Dkk}{n\varkappa}\,①-\dfrac{3Dll}{n\lambda}\,②+\dfrac{3Dmm}{n\mu}\,③$
1.	$\dfrac{3Dk}{n}\,①-\dfrac{4Dl}{n}\,②+\dfrac{3Dm}{n}\,③$ Voyez. fig. 29.
0.	$\dfrac{3D\varkappa}{n}\,①-\dfrac{3D\lambda}{n}\,②+\dfrac{3D\mu}{n}\,③$
-1.	$\dfrac{-3D}{2nez^{\frac{2}{3}n}}+\dfrac{3D\varkappa\varkappa}{nk}\,①-\dfrac{3D\lambda\lambda}{nl}\,②+\dfrac{3D\mu\mu}{nm}\,③$
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p=k\lambda-\varkappa l$, $q=k\mu-\varkappa m$, $r=l\mu-\lambda m$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{-1}{3pq}\sqrt[3]{\frac{\varkappa}{k}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\psi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{l}{\lambda}};\quad ②=\frac{-1}{3pr}\sqrt[3]{\frac{\lambda}{l}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\psi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{m}{\mu}};\quad ③=\frac{-1}{3qr}\sqrt[3]{\frac{\mu}{m}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\chi(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{1}{3pq}\sqrt[3]{\frac{-\varkappa}{k}}\times\beta(BP:BO)-(DP:DO)+\psi(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-l}{\lambda}};\quad ②=\frac{1}{3pr}\sqrt[3]{\frac{-\lambda}{l}}\times\beta(BP:BO)-(DP:DO)+\psi(PBO).\\ OP:OA::\sqrt[3]{z^n}:\sqrt[3]{\frac{-m}{\mu}};\quad ③=\frac{1}{3qr}\sqrt[3]{\frac{-\mu}{m}}\times\beta(BP:BO)-(DP:DO)+\psi(PBO).\end{cases}$$

θ	FORME XLV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{n\varkappa}$ ① $-\dfrac{4Dll}{n\lambda}$ ② $+\dfrac{4Dmm}{n\mu}$ ③
1.	$\dfrac{4Dk}{n}$ ① $-\dfrac{4Dl}{n}$ ② $+\dfrac{4Dm}{n}$ ③ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4D\varkappa}{n}$ ① $-\dfrac{4D\lambda}{n}$ ② $+\dfrac{4D\mu}{n}$ ③
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p=k\lambda-\varkappa l$; $q=k\mu-\varkappa m$; $r=l\mu-\lambda m$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{-1}{4pq}\sqrt[4]{\frac{\varkappa^3}{k^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{l}{\lambda}};\quad ②=\frac{-1}{4pr}\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{l^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{m}{\mu}};\quad ③=\frac{-1}{4qr}\sqrt[4]{\frac{\mu^3}{m^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{1}{4p}\sqrt[4]{\frac{-\varkappa^3}{k^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-l}{\lambda}};\quad ②=\frac{1}{4pr}\sqrt[4]{\frac{-\lambda^3}{l^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-m}{\mu}};\quad ③=\frac{1}{4qr}\sqrt[4]{\frac{-\mu^3}{3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME XLVI. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 1. *Cas.*	
&c.		
2.	$\frac{4Dkk}{n\varkappa}$ ① $-\frac{4Dll}{n\lambda}$ ② $+\frac{4Dmm}{n\mu}$ ③	
1.	$\frac{4Dk}{n}$ ① $-\frac{4Dl}{n}$ ② $+\frac{4Dm}{n}$ ③	Voyez. fig. 30.
0.	$\frac{4D\varkappa}{n}$ ① $-\frac{4D\lambda}{n}$ ② $+\frac{4D\mu}{n}$ ③	
&c.		

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ a trois racines réelles $\frac{k}{\varkappa}$, $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{m}{\mu}$, qui soient les valeurs de z^n, on supposera $p=k\lambda-\varkappa l$, $q=k\mu-\varkappa m$, $r=l\mu-\lambda m$;

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{-1}{4pq}\sqrt[4]{\frac{l}{k}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{l}{\lambda}};\quad ②=\frac{-1}{4pr}\sqrt[4]{\frac{\lambda}{l}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{m}{\mu}};\quad ③=\frac{-1}{4qr}\sqrt[4]{\frac{\mu}{m}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{\varkappa}};\quad ①=\frac{+1}{4pq}\sqrt[4]{\frac{-\varkappa}{k}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-l}{\lambda}};\quad ②=\frac{+1}{4pr}\sqrt[4]{\frac{-\lambda}{l}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-m}{\mu}};\quad ③=\frac{+1}{4qr}\sqrt[4]{\frac{-\mu}{m}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME XLV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^{n}+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{\begin{matrix}+k,\overline{as+hr}\\-h,\overline{kq+lp}\end{matrix}}{2ns}$ D × ② + ③ + M ; $+\dfrac{\begin{matrix}+k,\overline{as-hr}\\+h,\overline{kq+lp}\end{matrix}}{2ns}$ D × ④ + ⑤ + N.
1.	$-\dfrac{4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{\begin{matrix}+l,\overline{as+hr}\\+hhk\end{matrix}}{2ns}$ D × ② + ③ + M ; $+\dfrac{\begin{matrix}+l,\overline{as-hr}\\-hhk\end{matrix}}{2ns}$ D × ④ + ⑤ + N. Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{\begin{matrix}-hk-lq,\overline{as+hr}\\+hhlp\end{matrix}}{2nps}$ D × ② + ③ + M ; $+\dfrac{\begin{matrix}-hk-lq,\overline{as-hr}\\-hhlp\end{matrix}}{2nps}$ D × ④ + ⑤ + N.
&c.	

Les valeurs des quantités $k, l, p, q, r, s, t, a, b, c$, M, N, se trouvent dans la pag. suiv.

1. *Cas.*

$$\left\{\begin{array}{l}
OP : OA :: \sqrt[4]{z^{n}} : \sqrt[4]{\frac{k}{l}}; \quad ① = \frac{-l}{4t}\sqrt[4]{\frac{l^{3}}{k^{3}}} \times -(AP : AO) + (EP : EO) \\
\qquad + \chi(PCO). \\
OP : OA :: \pm\frac{1}{2}c + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}cc - ah}; \quad ② = \frac{-l}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc - ah}} \times (EP : AP). \\
OP : OA :: -\frac{1}{2}c + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}cc - ah}; \quad ③ = \frac{-l}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}cc - ah}} \times (EP : AP). \\
OP : OA :: \pm\frac{1}{2}b + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}bb - ah}; \quad ④ = \frac{-l}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb - ah}} \times (EP : AP). \\
OP : OA :: -\frac{1}{2}b + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{\frac{1}{4}bb - ah}; \quad ⑤ = \frac{-l}{2t}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}bb - ah}} \times (EP : AP).
\end{array}\right.$$

2. *Cas.*

$$\left\{\begin{array}{l}
OP : OA :: \sqrt[4]{z^{n}} : \sqrt[4]{\frac{-k}{l}}; \quad ① = \frac{+l}{4t}\sqrt[4]{\frac{-l^{3}}{k^{3}}} \times -\beta(BP : BO) + \beta(DP : DO) \\
\qquad + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO) \\
OP : OA :: +\frac{1}{2}c + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ah - \frac{1}{4}cc}; \quad ② = \frac{+l}{2t}\sqrt{\frac{1}{ah - \frac{1}{4}cc}} \times \chi(PCO). \\
OP : OA :: -\frac{1}{2}c + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ah - \frac{1}{4}cc}; \quad ③ = \frac{+l}{2t}\sqrt{\frac{1}{ah - \frac{1}{4}cc}} \times \chi(PCO). \\
OP : OA :: +\frac{1}{2}b + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ah - \frac{1}{4}bb}; \quad ④ = \frac{+l}{2t}\sqrt{\frac{1}{ah - \frac{1}{4}bb}} \times \chi(PCO). \\
OP : OA :: -\frac{1}{2}b + hz^{\frac{1}{4}n} : \sqrt{ah - \frac{1}{4}bb}; \quad ⑤ = \frac{+l}{2t}\sqrt{\frac{1}{ah - \frac{1}{4}bb}} \times \chi(PCO).
\end{array}\right.$$

θ	FORME XLVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4Dkk}{nl}$ ① $+\dfrac{\overline{lp+kq},\overline{s+a}-akr}{2ns}$ D × ② + ③ − M; $+\dfrac{\overline{lp+kq},\overline{s-a}+akr}{2ns}$ D × ④ + ⑤ − N.
1.	$\dfrac{4Dk}{n}$ ① $+\dfrac{-hk,\overline{s+a}-alr}{2ns}$ D × ② + ③ − M; $+\dfrac{-hk,\overline{s-a}+alr}{2ns}$ D × ④ + ⑤ − N. Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{4Dl}{n}$ ① $+\dfrac{-hlp,\overline{s+a}+ar,\overline{hk+lq}}{2nps}$ D × ② + ③ − M; $+\dfrac{-hlp,\overline{s-a}-ar,\overline{hk+lq}}{2nps}$ D × ④ + ⑤ − N.
&c.	

Si l'équation $e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}=0$ n'a qu'une racine réelle $\frac{k}{l}$ qui soit la valeur de z^n, les deux autres racines étant imaginaires, on supposera, $p=-e\frac{l}{k}$, $q=-e\frac{ll}{kk}-f\frac{l}{k}$; ou $p=f+g\frac{k}{l}+h\frac{kk}{ll}$, $q=g+h\frac{k}{l}$;

$r=\sqrt{hp}$, $s=\sqrt{-hq+2\sqrt{h^3p}}$, $t=pll+qkl+hkk$; $a=\sqrt[4]{h^3p}$,

$b=\sqrt{+\sqrt{-h^3q+2\sqrt{h^7p}}+2\sqrt[4]{h^7p}}$; $c=\sqrt{-\sqrt{-h^3q+2\sqrt{h^7p}}+2\sqrt[4]{h^7p}}$.

$$M=\tfrac{l}{ct}\left(a+cz^{\frac{1}{4}n}+hz^{\frac{1}{2}n}:a-cz^{\frac{1}{4}n}+hz^{\frac{1}{2}n}\right).$$

$$N=\tfrac{l}{bt}\left(a+bz^{\frac{1}{4}n}+hz^{\frac{1}{2}n}:a-bz^{\frac{1}{4}n}+hz^{\frac{1}{2}n}\right).$$

1. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{k}{l}}$; ① $=\frac{-l}{4t}\sqrt[4]{\frac{l}{k}}\times-(AP:AO)$ $+(EP:EO)-\chi(PCO)$.

2. *Cas.* OP : OA :: $\sqrt[4]{z^n}:\sqrt[4]{\frac{-k}{l}}$; ① $=\frac{+l}{4t}\sqrt[4]{\frac{-l}{k}}\times\beta(BP:BO)$ $-\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO)$.

Les valeurs des quantités, ②, ③, ④, ⑤, se trouvent dans la page précédente.

θ	FORME XLVII. $\frac{Dz^{\theta n - 1}dz}{\sqrt[2]{e + fz^n}}$
&c.	
4.	$\frac{-96e^3 + 48eefz^n - 36effz^{2n} + 30f^3z^{3n}}{105nf^4}$ DP.
3.	$\frac{+16ee - 8efz^n + 6ffz^{2n}}{15nf^3}$ DP.
2.	$\frac{-4e + 2fz^n}{3nff}$ DP.
1.	$\frac{+2}{nf}$ DP.
0.	$\frac{+2}{n}$ D (I) Voyez fig. 28.
$\overline{1}$.	$\frac{-1}{nez^n}$ DP $- \frac{f}{ne}$ D (I).
$\overline{2}$.	$\frac{-2e + 3fz^n}{4neez^{2n}}$ DP $+ \frac{3ff}{4nee}$ D (I)
$\overline{3}$.	$\frac{-8ee + 10efz^n - 15ffz^{2n}}{24ne^3z^{3n}}$ DP $- \frac{5f^3}{8ne^3}$ D (I);
&c.	

$$P = \sqrt[2]{e + fz^n}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{e}$;

$$(I) = \frac{-1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{e}} \times -(AP : AO) + (CP : CO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-e}$;

$$(I) = +\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{e}} \times \downarrow (PBO).$$

FORME

θ	FORME XLVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt[2]{e+fz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{+15eez^n-10efz^{2n}+8ffz^{3n}}{24nf^3}DP+\dfrac{5e^3}{8nf^3}D\textcircled{1}.$
2.	$\dfrac{-3ez^n+2fz^{2n}}{4nff}DP-\dfrac{3ee}{4nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\dfrac{+z^n}{nf}DP+\dfrac{e}{nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\dfrac{-2}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 28.
$-1.$	$\dfrac{-2}{ne}DP.$
$-2.$	$\dfrac{-2e+4fz^n}{3neez^n}DP.$
$-3.$	$\dfrac{-6ee+8efz^n-16ffz^{2n}}{15ne^3z^{2n}}DP.$
$-4.$	$\dfrac{-30e^3+36eefz^n-48effz^{2n}+96f^3z^{3n}}{105ne^4z^{3n}}DP.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{f}$;

$$\textcircled{1}=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO)+(CP:CO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-f}$;

$$\textcircled{1}=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{f}}\times\downarrow(PBO).$$

θ	FORME XLIX. $Dz^{\theta n - 1} dz \sqrt[2]{e + fz^n}$
&c.	
3.	$\dfrac{+16e^3 - 8eefz^n + 6effz^{2n} + 30f^3z^{3n}}{105nf^3}$ DP.
2.	$\dfrac{-4ee + 2efz^n + 6ffz^{2n}}{15nff}$ DP.
1.	$\dfrac{+2e + 2fz^n}{3nf}$ DP.
0.	$\dfrac{+2}{n}$ DP $+ \dfrac{2e}{n}$ D ①. Voyez fig. 28.
-1.	$\dfrac{-1}{nz^n}$ DP $+ \dfrac{f}{n}$ D ①.
-2.	$\dfrac{-2e - fz^n}{4nez^{2n}}$ DP $- \dfrac{ff}{4ne}$ D ①.
-3.	$\dfrac{-8ee - 2efz^n + 3ffz^{2n}}{24neez^{3n}}$ DP $+ \dfrac{f^3}{8nee}$ D ①.
&c.	

$$P = \sqrt[2]{e + fz^n}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{e}$;

$$① = \tfrac{-1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{e}} \times -(AP : AO) + (CP : CO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-e}$;

$$① = \tfrac{+1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{e}} \times \downarrow (PBO).$$

θ	FORMEL. $Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt[2]{e+fz^n}$
&c.	
2.	$\frac{-3eez^n+2efz^{2n}+8ffz^{3n}}{24nff}DP-\frac{e^3}{8nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\frac{+ez^n+2fz^{2n}}{4nf}DP+\frac{ee}{4nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\frac{+z^n}{n}DP-\frac{e}{n}D\textcircled{1}.$
$-1.$	$\frac{-2}{n}DP-\frac{2f}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 28.
$-2.$	$\frac{-2e-2fz^n}{3nez^n}DP.$
$-3.$	$\frac{-6ee-2efz^n+4ffz^{2n}}{15nez^{2n}}DP.$
$-4.$	$\frac{-30e^3-6eefz^n+8effz^{2n}-16f^3z^{3n}}{105ne^3z^{3n}}DP.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{f}$;

$$\textcircled{1}=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO)+(CP:CO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-f}$;

$$\textcircled{1}=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{f}}\times\downarrow(PBO).$$

θ	FORME LI. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$
&c.	
4.	$\frac{-243e^3+162eefz^n-135effz^{2n}+120f^3z^{3n}}{440nf^4}$ DPP.
3.	$\frac{+27ee-18efz^n+15ffz^{2n}}{40nf^3}$ DPP.
2.	$\frac{-9e+6fz^n}{10nff}$ DPP.
1.	$\frac{+3}{2nf}$ DPP.
0.	$\frac{+3}{n}$ D ①. Voyez fig. 29.
-1.	$\frac{-1}{nez^n}$ D PP $-\frac{f}{ne}$ D ①.
-2.	$\frac{-3e+4fz^n}{6neez^{2n}}$ D PP $+\frac{2ff}{3nee}$ D ①.
-3.	$\frac{-18ee+21efz^n-28ffz^{2n}}{54ne^3z^{3n}}$ DPP $-\frac{14f^3}{17ne^3}$ D ①.
&c.	

$$P = \sqrt[3]{e+fz^n}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{e}$;

$$① = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{1}{e}}\times -(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{-e}$;

$$② = +\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{-1}{e}}\times +\beta(BP:BO)-(DP:DO)+\downarrow(PBO).$$

θ	FORME LII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$
&c.	
3.	$\frac{+28eez^n-21efz^{2n}+18ffz^{3n}}{54nf^3}DPP+\frac{14e^3}{27nf^3}D\textcircled{1}.$
2.	$\frac{-4ez^n+3fz^{2n}}{6nff}DPP-\frac{2ee}{3nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\frac{+z^n}{nf}DPP+\frac{e}{nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\frac{-3}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 29.
$-1.$	$\frac{-3}{2ne}DPP.$
$-2.$	$\frac{-6e+9fz^n}{10neez^n}DPP.$
$-3.$	$\frac{-15ee+18efz^n-27ffz^{2n}}{40ne^3z^{2n}}DPP.$
$-4.$	$\frac{-120e^3+135eefz^n-162effz^{2n}+243f^3z^{3n}}{440ne^4z^{3n}}DPP.$
&c.	

$$P = \sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{f}$;

$$\textcircled{1} = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{f}} \times -(AP:AO)+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{-f}$;

$$\textcircled{1} = +\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-1}{f}} \times +\beta(BP:BO)-(DP:DO)+\downarrow(PBO).$$

θ	FORME LIII. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}$
&c.	
3.	$\dfrac{+27e^3-9eefz^n+6effz^{2n}+42f^3z^{3n}}{140nf^3}\,DP.$
2.	$\dfrac{-9ee+3efz^n+12ffz^{2n}}{28nff}\,DP.$
1.	$\dfrac{+3e+3fz^n}{4nf}\,DP.$
0.	$\dfrac{+3}{n}\,DP+\dfrac{3e}{n}\,D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 29.
$-1.$	$\dfrac{-1}{nz^n}\,DP+\dfrac{f}{n}\,D\textcircled{1}.$
$-2.$	$\dfrac{-3e-fz^n}{6nez^{2n}}\,DP-\dfrac{ff}{3ne}\,D\textcircled{1}.$
$-3.$	$\dfrac{-18ee-3efz^n+5ffz^{2n}}{54nee z^{3n}}\,DP+\dfrac{5f^3}{27nee}\,D\textcircled{1}.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{e+fz^n}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{e}$.

$$\textcircled{1}=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{1}{ee}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[3]{-e}$,

$$\textcircled{1}=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\tfrac{1}{ee}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO).$$

θ	FORME LIV. $Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}$
&c.	
2.	$\frac{-5eez^n+3efz^{2n}+18ffz^{3n}}{54nff}DP-\frac{5e^3}{27nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\frac{+ez^n+3fz^{2n}}{6nf}DP+\frac{ee}{3nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\frac{+z^n}{n}DP-\frac{e}{n}D\textcircled{1}.$
$-1.$	$\frac{-3}{n}DP-\frac{3f}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 29.
$-2.$	$\frac{-3e-3fz^n}{4nez^n}DP.$
$-3.$	$\frac{-12ee-3efz^n+9ffz^{2n}}{28neez^{2n}}DP.$
$-4.$	$\frac{-42e^3-6eefz^n+9effz^{2n}-27f^3z^{3n}}{140ne^3z^{3n}}DP.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* $OP:OA::P:\sqrt[3]{f}$,

$$\textcircled{1}=\frac{-1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ff}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO).$$

2. *Cas.* $OP:OA::P:\sqrt[3]{-f}$,

$$\textcircled{1}=\frac{+1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ff}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO).$$

θ	FORME LV. $\dfrac{Dz^{\theta n - 1}dz}{\sqrt[4]{e + fz^n}}$
&c.	
4.	$\dfrac{-512e^3 + 384eefz^n - 336effz^{2n} + 308f^3z^{3n}}{1155nf^4} DP^3.$
3.	$\dfrac{+128ee - 96efz^n + 84ffz^{2n}}{231nfz^n} DP^3.$
2.	$\dfrac{-16e + 12fz^n}{21nff} DP^3.$
1.	$\dfrac{+4}{3nf} DP^3.$ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{+4}{n} D\textcircled{1}.$
-1.	$\dfrac{-1}{nez^n} DP^3 - \dfrac{f}{ne} D\textcircled{1}.$
-2.	$\dfrac{-4e + 5fz^n}{8neez^{2n}} DP^3 + \dfrac{5ff}{8nee} D\textcircled{1}.$
-3.	$\dfrac{-32ee + 36efz^n - 45ffz^{2n}}{96ne^3z^{3n}} DP^3 - \dfrac{15f^3}{32ne^3} D\textcircled{1}.$
&c.	

$$P = \sqrt[4]{e + fz^n}.$$

1. *Cas.* $OP : OA :: P : \sqrt[4]{e}$.

$$\textcircled{1} = -\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{e}}\,x - (AP : AO) + (EP : EO) - \chi(PCO).$$

2. *Cas.* $OP : OA :: \sqrt[4]{-e}$,

$$\textcircled{1} = +\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{e}}\,x + \beta(BP : BO) - \beta(DP : DO) + \psi(PBO) + \psi(PDO).$$

FORME

θ	FORME LVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\sqrt[4]{e+fz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{+45eez^n-36efz^{2n}+32ffz^{3n}}{96nf^3}DP^3+\dfrac{15e^3}{32nf^3}D\textcircled{1}.$
2.	$\dfrac{-5ez^n+4fz^{2n}}{8nff}DP^3-\dfrac{5ee}{8nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\dfrac{+z^n}{nf}DP^3+\dfrac{e}{nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\dfrac{-4}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 30.
$-1.$	$\dfrac{-4}{3ne}DP^3.$
$-2.$	$\dfrac{-12e+16fz^n}{21neez^n}DP^3.$
$-3.$	$\dfrac{-84ee+96efz^n-128ffz^{2n}}{231ne^3z^{2n}}DP^3.$
$-4.$	$\dfrac{-308e^3+336eefz^n-384effz^{2n}+512f^3z^{3n}}{1155ne^4z^{3n}}DP^3.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* $OP:OA::P:\sqrt[4]{f}$;

$$\textcircled{1}=\frac{-1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)-\chi(PCO).$$

2. *Cas.* $OP:OA::P:\sqrt[4]{-f}$;

$$\textcircled{1}=\frac{+1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{f}}\times+\beta(BP:BO)-\beta(DP:DO)+\psi(PBO)$$
$$+\psi(PDO).$$

θ	FORME LVII. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}$
&c.	
3.	$\dfrac{+128e^3-32eefz^n+20effz^{2n}+180f^3z^{3n}}{585nf^3}\,DP.$
2.	$\dfrac{-16ee+4efz^n+20ffz^{2n}}{45nff}\,DP.$
1.	$\dfrac{+4e+4fz^n}{5nf}\,DP.$
0.	$\dfrac{+4}{n}\,DP+\dfrac{4e}{n}\,D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 30.
$-1.$	$\dfrac{-1}{nz^n}\,DP+\dfrac{f}{n}\,D\textcircled{1}.$
$-2.$	$\dfrac{-4e-fz^n}{8nez^{2n}}\,DP-\dfrac{3ff}{8ne}\,D\textcircled{1}.$
$-3.$	$\dfrac{-32ee-4efz^n+7ffz^{2n}}{96neez^{3n}}\,DP+\dfrac{7f^3}{32nee}\,D\textcircled{1}.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{e+fz^n}.$$

1. *Cas.* $OP : OA :: P : \sqrt[4]{e}.$

$$\textcircled{1}=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{e^3}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)+\chi(PCO).$$

2. *Cas.* $OP : OA :: P : \sqrt[4]{-e}.$

$$\textcircled{1}=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{e^3}}\times-\beta(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)$$
$$+\psi(PDO).$$

θ	FORME LVIII. $Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}$
&c.	
2.	$\frac{-7eez^n+4efz^{2n}+32ffz^{3n}}{96nff}DP-\frac{7e^3}{32nff}D\textcircled{1}.$
1.	$\frac{+ez^n+4fz^{2n}}{8nf}DP+\frac{3ee}{8nf}D\textcircled{1}.$
0.	$\frac{+z^n}{n}DP-\frac{e}{n}D\textcircled{1}.$
$-1.$	$\frac{-4}{n}DP-\frac{4f}{n}D\textcircled{1}.$ Voyez fig. 30.
$-2.$	$\frac{-4e-4fz^n}{5nez^n}DP.$
$-3.$	$\frac{-20ee-4efz^n+16ffz^{2n}}{45nez^{2n}}DP.$
$-4.$	$\frac{-180e^3-20efz^n+32eeffz^{2n}-128f^3z^{3n}}{585ne^3z^{3n}}DP.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.$$

1. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[4]{f}$;

$$\textcircled{1}=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{f^3}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)+\chi(PCO).$$

2. *Cas.* OP : OA :: P : $\sqrt[4]{-f}$;

$$\textcircled{1}=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{f^3}}\times-\beta(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)$$
$$+\downarrow(PDO).$$

θ	FORME LIX. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[2]{e+fz^n}}$
&c.	
3.	$\dfrac{-6fg-4eh+2fhz^n}{3nffhh}DP+\dfrac{2gg}{nh^3}D①.$
2.	$\dfrac{+2}{nfh}DP-\dfrac{2g}{nhh}D①.$
1.	$\dfrac{+2}{nh}D①.$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-2}{ng}D①-\dfrac{2}{ng}D②.$
$-1.$	$\dfrac{-1}{negz^n}DP+\dfrac{2h}{ngg}D①+\dfrac{+fg\ 2eh}{negg}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{e+fz^n},\quad p=fg-eh.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\dfrac{p}{h}}; & ①=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{h}{p}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{e}; & ②=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{1}{e}}\times-(AP:AO)+(CP:CO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\dfrac{-p}{h}}; & ①=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-h}{p}}\times-(AP:AO)+(CP:CO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{-e}; & ②=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-1}{e}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$

θ	FORME LX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{g+hz^n}\sqrt[2]{\overline{e+fz^n}}}$
&c.	
2.	$\dfrac{+z^n}{nfh}DP-\dfrac{2g}{nhh}D\textcircled{1}+\dfrac{\overset{-eh}{-2fg}}{nfhh}D\textcircled{2}.$
1.	$\dfrac{+2}{nh}D\textcircled{1}+\dfrac{2}{nh}D\textcircled{2}.$
0.	$\dfrac{-2}{ng}D\textcircled{1}.$ Voyez. fig. 28.
$\overline{1}$.	$\dfrac{-2}{neg}DP+\dfrac{2h}{ngg}D\textcircled{1}.$
$\overline{2}$. &c.	$\dfrac{\overset{+6ehz^n}{-2eg+4fgz^n}}{3neeggz^n}DP-\dfrac{2hh}{ngg}D\textcircled{1}.$

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{p}{g}};\quad \textcircled{1}=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{p}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{f};\quad \textcircled{2}=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO)+ \\ \quad (CP:CO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-p}{g}};\quad \textcircled{1}=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO)+ \\ \quad (CP:CO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{-f};\quad \textcircled{2}=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{f}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$

θ	FORME LXI. $\frac{D z^{\theta n - 1} dz \sqrt[2]{e + f z^n}}{g + h z^n}$
&c.	
2.	$\frac{-6fg + 2eh + 2fhz^n}{3nfhh} DP + \frac{2zp}{nh^3} D①.$
1.	$\frac{+2}{nh} DP - \frac{2p}{nhh} D①.$
0.	$\frac{+2p}{ngh} D① - \frac{2e}{ng} D②.$
$\overline{1}$.	$\frac{-1}{ngz^n} DP - \frac{2p}{ngg} D① + \frac{-fg + 2eh}{ngg} D②.$
&c.	

Voyez fig. 28.

$$P = \sqrt[2]{e + f z^n}, \quad p = fg - eh.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{\frac{p}{h}}; & ① = +\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{h}{p}} \times \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{e}; & ② = +\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{e}} \times - (AP : AO) + (CP : CO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{\frac{-p}{h}}; & ① = -\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-h}{p}} \times - (AP : AO) + (CP : CO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{-e}; & ② = -\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{e}} \times \downarrow (PBO). \end{cases}$

	FORME LXII. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt[2]{e+fz^n}}{g+hz^n}$
8 &c.	
1.	$\frac{+z^n}{nh}DP+\frac{2p}{nhh}D①-\frac{\overset{-eh}{+2fg}}{nhh}D②.$
0.	$\frac{-2p}{ngh}D①+\frac{2f}{nh}D②.$
$\frac{-}{1}$.	$\frac{-2}{ng}DP+\frac{2p}{ngg}D①.$
$\frac{-}{2}$. &c.	$\frac{-2eg-2fg\overset{+6ehz^n}{z^n}}{3negg\,z^n}DP-\frac{2hp}{ng^3}D①.$

Voyez. fig. 28.

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{p}{g}};\quad ①=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{p}}\times\psi(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{f};\quad ②=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO)+ \\ \quad (CP:CO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-p}{g}};\quad ①=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO)+ \\ \quad (CP:CO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{-f};\quad ②=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{f}}\times\psi(PBO). \end{cases}$

θ	FORME LXIII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[3]{e+fz^n}}$
&c.	$-15fg$
3.	$\dfrac{-9eh+6fhz^n}{10nffhh}\,DPP+\dfrac{3gg}{nh^3}\,D\,①.$
2.	$\dfrac{+3}{2nfh}\,DPP-\dfrac{3g}{nnh}\,D\,①.$
1.	$\dfrac{+3}{nh}\,D\,①.$ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{-3}{ng}\,D\,①-\dfrac{3}{ng}\,D\,②.$
$\overline{1}$. &c.	$\dfrac{-1}{negz^n}\,DPP+\dfrac{3h}{ngg}\,D\,①+\dfrac{3eh+fg}{negg}\,D\,②.$

$$P=\sqrt[3]{e+fz^n}.\quad p=fg-eh.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{p}{h}};\quad ①=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{h}{p}}\times+\beta(BP:BO)\\ \qquad -(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{e};\quad ②=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{e}}\times-(AP:AO)\\ \qquad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{-p}{h}};\quad ③=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{-h}{p}}\times-(AP:AO)\\ \qquad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{-e};\quad ②=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{-1}{e}}\times+\beta(BP:BO)\\ \qquad -(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

FORME

θ	FORME LXIV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[3]{e+fz^n}}$
&c.	
2.	$\dfrac{+z^n}{nfh}\,DPP-\dfrac{3g}{nhh}D\,①+\dfrac{\overset{-eh}{-3fg}}{nfhh}D\,②.$
1.	$\dfrac{+3}{nh}D\,①+\dfrac{3}{nh}D\,②.$
0.	$\dfrac{-3}{ng}D\,①.$ Voyez fig. 29.
— 1.	$\dfrac{-3}{2neg}DPP+\dfrac{3h}{ngg}D\,①.$
— 2.	$\dfrac{\overset{+15ehz^n}{-6eg+9fgz^n}}{10neeggz^n}DPP-\dfrac{3hh}{ng^3}D\,①.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\ ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{g}{p}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -(DP:DO)+\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{f};\ ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{f}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\ ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-g}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{-f};\ ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-1}{f}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -(DP:DO)+\downarrow(PBO). \end{cases}$

θ	FORME LXV. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}}{g+hz^n}$
&c.	
2.	$\frac{-12fg+3eh+3fhz^n}{4nfhh}DP+\frac{3gp}{nh^3}D①.$
1.	$\frac{+3}{nh}DP-\frac{3p}{nhh}D①.$
0.	$\frac{+3p}{ngh}D①-\frac{3e}{ng}D②.$
$\overline{1}$.	$\frac{-1}{ngz^n}DP-\frac{3p}{ngg}D①+\frac{-fg\ 3eh}{ngg}D②.$
&c.	

Voyez fig. 29.

$$P=\sqrt[3]{e+fz^n}.\quad p=fg-eh.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{h}};\quad ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{pp}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{e};\quad ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ee}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{h}};\quad ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{pp}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{-e};\quad ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ee}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

θ	FORME LXVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}}{g+hz^n}$
&c.	
1.	$\dfrac{+z^n}{nh}DP+\dfrac{3p}{nhh}D①-\dfrac{-eh+3fg}{nhh}D②.$
0.	$\dfrac{-3p}{ngh}D①+\dfrac{3f}{nh}D②.$
$\frac{-}{1}$.	$\dfrac{-3}{ng}DP+\dfrac{3p}{ngg}D①.$
$\frac{-}{2}$.	$\dfrac{-3eg-3fgz^n+12ehz^n}{4neggz^n}DP-\dfrac{3hp}{ng^3}D①.$
&c.	

Voyez fig. 29.

$$P=\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\ ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{f};\ ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ff}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\ ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{-f};\ ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ff}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

θ	FORME LXVII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[4]{e+fz^n}}$
&c.	$-28fg$
3.	$\dfrac{-16eh+12fhz^n}{21nffhh}DP^3+\dfrac{4gg}{nh^3}D①.$
2.	$\dfrac{+4}{3nfh}DP^3-\dfrac{4g}{nhh}D①.$
1.	$\dfrac{+4}{nh}D①.$ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{-4}{ng}D①-\dfrac{4}{ng}D②.$
1. &c.	$\dfrac{-1}{negz^n}DP^3+\dfrac{4h}{ngg}D①+\dfrac{4eh+fg}{negg}D②.$

$$P=\sqrt[4]{e+fz^n},\quad p=fg-eh.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{p}{h}};\quad ①=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{h}{p}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{e};\quad ②=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{1}{e}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{-p}{h}};\quad ①=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-h}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{-e};\quad ②=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-1}{e}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME LXVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\overline{g+hz^n}\sqrt[4]{\overline{e+fz^n}}}$.
&c.	
2.	$\dfrac{+z^n}{nfh}DP^3-\dfrac{4g}{nhh}D\textcircled{1}+\dfrac{\overset{-eh}{-4fg}}{nhh}D\textcircled{2}$.
1.	$\dfrac{+4}{nh}D\textcircled{1}+\dfrac{4}{nh}D\textcircled{2}$.
0.	$\dfrac{-4}{ng}D\textcircled{1}$. Voyez fig. 30.
$\overline{1}$.	$\dfrac{-4}{3neg}DP^3+\dfrac{4h}{ngg}D\textcircled{1}$.
$\overline{2}$.	$\dfrac{\overset{+28ehz^n}{-12eg+16fgz^n}}{21neeggz^n}DP^3-\dfrac{4hh}{ng^3}D\textcircled{1}$.
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{p}{g}};\quad \textcircled{1}=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{g}{p}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{f};\quad \textcircled{2}=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{1}{f}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{-p}{g}};\quad \textcircled{1}=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-g}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)-\chi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{-f};\quad \textcircled{2}=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-1}{f}}\times+\beta(BP:BO) \\ \quad -\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME LXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}}{g+hz^n}$
&c.	
2.	$\dfrac{-20fg+4eh+4fhz^n}{5nfhh}DP+\dfrac{4zp}{nh^3}D①.$
1.	$\dfrac{+4}{nh}DP-\dfrac{4p}{nhh}D①.$
0.	$\dfrac{+4p}{ngh}D①-\dfrac{4e}{ng}D②.$
$\overline{1}$.	$\dfrac{-1}{ngz^n}DP-\dfrac{4p}{ngg}D①+\dfrac{4eh-fg}{ngg}D②.$
&c.	

Voyez fig. 30.

$$P=\sqrt[4]{e+fz^n},\quad p=fg-eh.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{p}{h}};\quad ①=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{h^3}{p^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{e};\quad ②=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{1}{e^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\dfrac{-p}{h}};\quad ①=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-h^3}{p^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{-e};\quad ②=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{-1}{e^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\end{cases}$$

θ	FORME LXX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}}{g+hz^n}$
&c.	
1.	$\dfrac{+z^n}{nh}DP+\dfrac{4p}{nhh}D\textcircled{1}-\dfrac{\overset{-eh}{+4fg}}{nhh}D\textcircled{2}.$
0.	$\dfrac{-4p}{ngh}D\textcircled{1}+\dfrac{4f}{nh}D\textcircled{2}.$
$\overline{1}$.	$\dfrac{-4}{ng}DP+\dfrac{4p}{ngg}D\textcircled{1}.$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-4eg\overset{+20ehz^n}{-4fgz^n}}{5neggz^n}DP-\dfrac{4hp}{ng^3}D\textcircled{1}.$
&c.	

Voyez. fig. 30.

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{z^n}}.\quad p=eh-fg.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{p}{g}};\quad \textcircled{1}=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{g^3}{p^3}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{f};\quad \textcircled{2}=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{f^3}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-p}{g}};\quad \textcircled{1}=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{p^3}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{-f};\quad \textcircled{2}=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{f^3}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXI. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[2]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{2}{ngl}DP-\dfrac{+\overline{fl+a}\|^2}{2nggla}D①+\dfrac{+\overline{fl-a}\|^2}{2nggla}D②.$
2.	$\dfrac{a+fl}{nga}D①+\dfrac{a-fl}{nga}D②.$
1.	$\dfrac{-2l}{na}D①+\dfrac{2l}{na}D②.$
0.	$\dfrac{-2}{ne}D◎+\dfrac{fl-a}{nea}D①-\dfrac{+fl+a}{nea}D②.$
&c.	

Voyez fig. 28.

$$P=\sqrt[2]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\tfrac{1}{2}fl-gk+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fl-gk-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
- OP : OA : P :: $\sqrt[2]{k}$; ◎ $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{k}}\times-$ (AP : AO) + (CP : CO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[4]{\frac{p}{g}}$; ① $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{p}}\times\downarrow$ (PBO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{q}{g}}$; ② $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{q}}\times\downarrow$ (PBO).

2. *Cas.*
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-k}$; ◎ $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{k}}\times\downarrow$ (PBO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{-p}{g}}$; ① $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{p}}\times-$ (AP : AO) + (CP : CO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{-q}{g}}$; ② $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{q}}\times-$ (AP : AO) (CP : CO).

FORME

θ	FORME LXXII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[2]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{+2}{ng}\,D\,\textcircled{\circ} - \dfrac{+fk-a}{nga}\,D\,\textcircled{1} + \dfrac{fk+a}{nga}\,D\,\textcircled{2}.$
1.	$\dfrac{+2k}{na}\,D\,\textcircled{1} - \dfrac{2k}{na}\,D\,\textcircled{2}.$
	Voyez fig. 28.
0.	$-\dfrac{+fk+a}{nea}\,D\,\textcircled{1} + \dfrac{fk-a}{nea}\,D\,\textcircled{2}.$
$\overline{1}$.	$\dfrac{2}{nek}\,DP + \dfrac{\overline{fk+a}\|^2}{2neeka}\,D\,\textcircled{1} - \dfrac{+\overline{fk-a}\|^2}{2neeka}\,D\,\textcircled{2}.$
&c.	

$$P = \sqrt[2]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a = \sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p = \tfrac{1}{2}fk - el. + \tfrac{1}{2}a.$$
$$q = \tfrac{1}{2}fk - el - \tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{l};\quad \textcircled{\circ} = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{1}{l}} \times -(AP:AO) + (CP:CO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{\dfrac{p}{e}};\quad \textcircled{1} = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{e}{p}} \times \downarrow(PBO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{\dfrac{q}{e}};\quad \textcircled{2} = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{e}{q}} \times \downarrow(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{-l};\quad \textcircled{\circ} = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-1}{l}} \times \downarrow(PBO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{\dfrac{-p}{e}};\quad \textcircled{1} = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-e}{p}} \times -(AP:AO) + (CP:CO). \\ OP : OA :: P : \sqrt[2]{\dfrac{-q}{e}};\quad \textcircled{2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-e}{q}} \times -(AP:AO) + (CP:CO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXI. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[2]{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{2}{ngl}DP+\dfrac{f,\overline{r+gk}-egl}{2ngr}DM+\dfrac{f,\overline{r-gk}+egl}{2ngr}D\times①+②.$
2.	$-\dfrac{+r+gk}{2nr}DM-\dfrac{+r-gk}{2nr}D\times①+②.$
	Voyez fig. 28.
1.	$\dfrac{+gl}{2nr}DM-\dfrac{gl}{2nr}D\times①+②.$
0.	$\dfrac{-2}{ne}D\,◎+\dfrac{g,\overline{r-fl}+ggk}{2ner}DM+\dfrac{g,\overline{r+fl}-ggk}{2ner}D\times①+②.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{k+lz^n}.\quad q=ell-fkl+gkk.\quad r=\sqrt{gq}.$$

$$s=\sqrt{-fgl+2ggk+2\sqrt{g^3q}}.$$

$$M=\tfrac{1}{r}(r+sP+gPP:r-sP+gPP).$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{k};\ \ldots\quad ◎=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{k}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::\pm\tfrac{1}{2}s+gP:\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-gr};\ ①=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::-\tfrac{1}{2}s+gP:\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-gr};\ ②=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{\frac{1}{4}ss-gr}}\times(CP:AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{-k};\ \ldots\quad ◎=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{-1}{k}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\pm\tfrac{1}{2}s+gP:\sqrt{gr-\tfrac{1}{4}ss};\ ①=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::-\tfrac{1}{2}s+gP:\sqrt{gr-\tfrac{1}{4}ss};\ ②=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{gr-\frac{1}{4}ss}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[2]{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{2}{ng}D\,◎+\dfrac{-eel}{2ngr}DM+\dfrac{+eel}{2ngr}D\times①+②.$ $\quad -e,\overline{r-fk}\quad -e,\overline{r+fk}$
1.	$\dfrac{-ek}{2nr}DM+\dfrac{ek}{2nr}D\times①+②.$
	Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{r+el}{2nr}DM+\dfrac{r-el}{2nr}D\times①+②.$
$\overline{1}$.	$\dfrac{-2}{nek}DP+\dfrac{+egk}{2ner}DM+\dfrac{-egk}{2ner}D\times①+②.$ $\quad -f,\overline{r+el}\quad -f,\overline{r-el}$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad q=ell-fkl+gkk.\quad r=\sqrt{eq}.$$

$$s=\sqrt{-efk+2eel+2\sqrt{e^3q}}.$$

$$M=\tfrac{1}{s}\,(r+sP+ePP:r-sP+ePP).$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{l};\ldots\quad ◎=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{l}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::+\tfrac{1}{2}s+eP:\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-er};\ ①=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{4}ss-er}}\times \\ \quad (CP:AP). \\ OP:OA::-\tfrac{1}{2}s+eP:\sqrt{\tfrac{1}{4}ss-er};\ ②=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{4}ss-er}}\times \\ \quad (CP:AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{-l};\ldots\quad ◎=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{l}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::+\tfrac{1}{2}s+eP:\sqrt{er-\tfrac{1}{4}ss};\ ①=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{er-\frac{1}{4}ss}}\times \\ \quad \downarrow(PBO). \\ OP:OA::-\tfrac{1}{2}s+eP:\sqrt{er-\tfrac{1}{4}ss};\ ②=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{er-\frac{1}{4}ss}}\times \\ \quad \downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXIII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[2]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	$-6fl$
3.	$\dfrac{+2gk+2glz^n}{3ngg l}\,D\,P+\dfrac{p,\overline{fl+a}\|^2}{2ng^3la}D\,①+\dfrac{-q,\overline{fl-a}\|^2}{2ng^3la}D\,②.$
2.	$\dfrac{+2}{ng}\,D\,P+\dfrac{-p,\overline{fl+a}}{ngga}D\,①+\dfrac{q,\overline{fl-a}}{ngga}D\,②.$
1.	$\dfrac{+2pl}{nga}\,D\,①-\dfrac{2ql}{nga}D\,②.$ Voyez fig. 28.
0. &c.	$\dfrac{-2k}{ne}\,D\,◎+\dfrac{\begin{matrix}+k,\overline{fl-a}\\-2ell\end{matrix}}{nea}\,D\,①+\dfrac{\begin{matrix}-k,\overline{fl+a}\\+2ell\end{matrix}}{nea}D\,②.$

$$P=\sqrt[2]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\tfrac{1}{2}fl-gk+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fl-gk-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{k};\quad ◎=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{k}}\times-(AP:AO)+(CP:CO).\\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\tfrac{p}{g}};\quad ①=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{g}{p}}\times\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\tfrac{q}{g}};\quad ②=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{g}{q}}\times\downarrow(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{-k};\quad ◎=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{-1}{k}}\times\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\tfrac{-p}{g}};\quad ①=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{-g}{p}}\times-(AP:AO)+(CP:CO).\\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\tfrac{-q}{g}};\quad ②=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{-g}{q}}\times-(AP:AO)+(CP:CO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXIV. $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt[2]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
1.	$\frac{+2l}{ng}D\,⊙+\frac{+2gkk}{nga}D\,①+\frac{-2gkk}{nga}D\,②.$ ($-l,\overline{fk-a}$; $+l,\overline{fl+a}$)
0.	$\frac{-2pk}{nea}D\,①+\frac{2qk}{nea}D\,②.$ Voyez fig. 28.
$\overline{1}$.	$\frac{-2}{ne}DP+\frac{p,\overline{fk+a}}{neea}D\,①+\frac{-q,\overline{fl+a}}{neea}D\,②.$
$\overline{2}$.	$\frac{-2ek-2elz^n+6fkz^n}{3neekz^n}DP+\frac{-p,\overline{fk+a}\|^2}{2ne^3ka}D\,①+\frac{+q,\overline{fk-a}\|^2}{2ne^3ka}D\,②.$
&c.	

$P=\sqrt[2]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a=\sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p=\frac{1}{2}fk-el+\frac{1}{2}a.$

$q=\frac{1}{2}fk-el-\frac{1}{2}a.$

1. *Cas.*
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{l}$; ⊙ $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{l}}\times-$ (AP : AO) + (CP : CO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{p}{e}}$; ① $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{e}{p}}\times\downarrow$ (PBO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{q}{e}}$; ② $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{e}{q}}\times\downarrow$ (PBO).

2. *Cas.*
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{-l}$; ⊙ $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-1}{l}}\times\downarrow$ (PBO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{-p}{e}}$; ① $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-e}{p}}\times-$ (AP : AO) + (CP : CO).
- OP : OA :: P : $\sqrt[2]{\frac{-q}{e}}$; ② $=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-e}{q}}\times-$ (AP : AO) + (CP : CO).

θ	FORME LXXIII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[2]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	$-6fl \qquad +l,\overline{eg-ff} \qquad +l,\overline{eg-ff}$
3.	$\dfrac{+2gk+2glz^n}{3ngg\,l}\,D\,P+\dfrac{f,\overline{r+gk}}{2ngg}\,D\,M+\dfrac{-f,\overline{r-gk}}{2ngg}\,D\times ① + ②.$
2.	$\dfrac{2}{ng}\,D\,P+\dfrac{fl-r-gk}{2ng}\,D\,M+\dfrac{fl+r-gk}{2ng}\,D\times ① + ②.$ Voyez fig. 28.
1.	$\dfrac{-l}{2n}\,D\,M-\dfrac{l}{2n}\,D\times ① + ②.$
0.	$\dfrac{-2k}{ne}\,D\,◎+\dfrac{r+gk}{2ne}\,D\,M-\dfrac{+r-gk}{2ne}\,D\times ① + ②.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{k+lz^n}.\quad q=ell-fkl+gkk.\quad r=\sqrt{gq}.$$

$$s=\sqrt{-fgl+2ggk+2\sqrt{g^3q}}.$$

$$M=\tfrac{1}{s}(r+sP+gPP : r-sP+gPP).$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{k};\ldots\ ◎=+\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{k}}\times(CP:AP). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}s+gP : \sqrt{\tfrac{1}{4}ss-gr};\ ①=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\tfrac{1}{4}ss-gr}}\times (CP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}s+gP : \sqrt{\tfrac{1}{4}ss-gr};\ ②=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\tfrac{1}{4}ss-gr}}\times (CP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{-k};\ldots\ ◎=-\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{-1}{k}}\times \downarrow(PBO). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}s+gP : \sqrt{gr-\tfrac{1}{4}ss};\ ①=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{gr-\tfrac{1}{4}ss}}\times \downarrow(PBO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}s+gP : \sqrt{gr-\tfrac{1}{4}ss};\ ②=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{gr-\tfrac{1}{4}ss}}\times \downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXIV. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt[2]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
1.	$\dfrac{+2l}{ng}\,D\,◎ - \dfrac{+r+el}{2ng}\,DM + \dfrac{r-el}{2ng}\,D\times ① + ②.$
0.	$\dfrac{+k}{2n}\,DM + \dfrac{k}{2n}\,D\times ① + ②.$
	Voyez fig. 28.
$-$ 1.	$\dfrac{-2}{ne}\,DP + \dfrac{r+el-fk}{2ne}\,DM - \dfrac{+r-el+fk}{2ne}\,D\times ① + ②.$
$-$ 2.	$\dfrac{+6fkz^n \quad -2ek-2elz^n}{3neekz^n}\,DP + \dfrac{+k,\overline{ff-eg} \quad -f,\overline{r+el}}{2nee}\,DM + \dfrac{+k,\overline{ff-eg} \quad f,\overline{r-el}}{2nee}\,D\times ① + ②.$
&c.	

$$P = \sqrt[2]{\frac{k+lz^n}{z^n}}. \quad q = ell - fkl + gkk. \quad r = \sqrt{eq}.$$

$$s = \sqrt{-efk + 2eel + 2\sqrt{e^3q}}.$$

$$M = \tfrac{1}{2}(r + sP + ePP : r - sP + ePP.$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{l};\ldots\ ◎ = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{1}{l}} \times (CP : AP). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}s + eP : \sqrt{\tfrac{1}{4}ss - er};\ ① = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\tfrac{1}{4}ss - er}} \times (CP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}s + eP : \sqrt{\tfrac{1}{4}ss - er};\ ② = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\tfrac{1}{4}ss - er}} \times (CP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[2]{-l};\ldots\ ◎ = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\dfrac{-1}{l}} \times ⊥(PBO). \\ OP : OA :: \pm\tfrac{1}{2}s + eP : \sqrt{er - \tfrac{1}{4}ss};\ ① = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{er - \tfrac{1}{4}ss}} \times ⊥(PBO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}s + eP : \sqrt{er - \tfrac{1}{4}ss};\ ② = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{er - \tfrac{1}{4}ss}} \times ⊥(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXV. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[3]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{3}{2ngl}DPP-3\times\dfrac{+\overline{fl+a}\|^2}{4nggla}D①+3\times\dfrac{+\overline{fl-a}\|^2}{4nggla}D②.$
2.	$\dfrac{3a+3fl}{2nga}D①+\dfrac{3a-3fl}{2nga}D②.$
1.	$\dfrac{-3l}{na}D①+\dfrac{3l}{na}D②.$ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{-3}{ne}D◎+\dfrac{3fl-3a}{2nea}D①-\dfrac{+3fl+3a}{2nea}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\tfrac{1}{2}fl-gk+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fl-gk-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{k};\quad ◎=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{k}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{p}{g}};\quad ①=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{g}{p}}\times\beta(BP:BO) \\ \quad -(DP:DO)+\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{q}{g}};\quad ②=+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{g}{q}}\times\beta(BP:BO) \\ \quad -(DP:DO)+\downarrow(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{-k};\quad ◎=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{-1}{k}}\times\beta(BP:BO) \\ \quad -(DP:DO)+\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{-p}{g}};\quad ①=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{-g}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\dfrac{-q}{g}};\quad ②=-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{-g}{q}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO). \end{cases}$$

FORME

θ	FORME LXXVI. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[3]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
2.	$+\dfrac{2}{ng}D\,⊙-\dfrac{+3fk-3a}{2nga}D\,①+\dfrac{3fk+3a}{2nga}D\,②.$
1.	$\dfrac{+3k}{na}D\,①-\dfrac{3k}{na}D\,②.$ Voyez fig. 29.
0.	$-\dfrac{+3fk+3a}{2nea}D\,①+\dfrac{3fk-3a}{2nea}D\,②.$
$-1.$	$\dfrac{-3}{2nek}DPP+3\times\dfrac{\overline{fk+a}\|^2}{4neeka}D\,①-3\times\dfrac{+\overline{fk-a}\|^2}{4neeka}D\,②.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a=\sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p=\tfrac{1}{2}fk-el+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fk-el-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{l};\quad ⊙=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{l}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{e}};\quad ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{e}{p}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{q}{e}};\quad ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{e}{q}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{-l};\quad ⊙=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-1}{l}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{e}};\quad ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-e}{p}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-q}{e}};\quad ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{-e}{q}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)-\downarrow(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXVII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	$-12fl$
3.	$\dfrac{+3gk+3glz^n}{4ngg\,l}DP+\dfrac{3p,\overline{fl+a}\|^2}{4ng^3la}D①+\dfrac{-3q,\overline{fl-a}\|^2}{4ng^3la}D②.$
2.	$\dfrac{+3}{ng}DP+\dfrac{-3p,\overline{fl+a}}{2ngga}D①+\dfrac{3q,\overline{fl-a}}{2ngga}D②.$
1.	$\dfrac{+3pl}{nga}D①-\dfrac{3ql}{nga}D②.$ Voyez fig. 29.
0.	$\dfrac{-3k}{ne}D◎+\dfrac{+3k,\overline{fl-a}}{-6ell\;2nea}D①+\dfrac{-3k,\overline{fl+a}}{+6ell\;2nea}D②.$
&c.	

$P=\sqrt[3]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\frac{1}{2}fl-gk+\frac{1}{2}a.$

$q=\frac{1}{2}fl-gk-\frac{1}{2}a.$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{k};\quad ◎=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{kk}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{g}};\quad ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{q}{g}};\quad ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{qq}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{-k};\quad ◎=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{kk}}\times-\beta(BP:BO)+(DP:DO)+\psi(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{g}};\quad ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{pp}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-q}{g}};\quad ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{qq}}\times-(AP:AO)+\beta(CP:CO)+\psi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXVIII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
1.	$\dfrac{+3l}{ng}D\,◎+\dfrac{\overset{-3l,\overline{fk-a}}{+6gkk}}{2nga}D\,①+\dfrac{\overset{+3l,\overline{fk+a}}{-6gkk}}{2nga}D\,②.$
0.	$\dfrac{-3pk}{nea}D\,①+\dfrac{3qk}{nea}D\,②.$ Voyez fig. 29.
$\frac{-}{1}$.	$\dfrac{-3}{ne}DP+\dfrac{3p,\overline{fk+a}}{2neea}D\,①+\dfrac{-3q,\overline{fk-a}}{2neea}D\,②.$
$\frac{-}{2}$.	$\dfrac{\overset{+12fkz^n}{-3ek-3elz^n}}{4neekz^n}DP+\dfrac{-3p,\overline{fk+a}\|^2}{4ne^3ka}D\,①+\dfrac{+3q,\overline{fk-a}\|^2}{4ne^3ka}D\,②.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a=\sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p=\tfrac{1}{2}fk-el+\tfrac{1}{2}a.$$

$$q=\tfrac{1}{2}fk-el-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{l};\quad ◎=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ll}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{e}};\quad ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{ee}{pp}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{q}{e}};\quad ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{ee}{qq}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{-l};\quad ◎=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{ll}}\times-\beta(BP:BO).\\ \quad+(DP:DO)+\downarrow(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{e}};\quad ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{ee}{pp}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-q}{e}};\quad ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{ee}{qq}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[4]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
3.	$\dfrac{4}{3ngl}DP^3-\dfrac{+\overline{fl+a}\|^2}{nggla}D①+\dfrac{\overline{fl-a}\|^2}{nggla}D②.$
2.	$\dfrac{2a+2fl}{nga}D①+\dfrac{2a-2fl}{nga}D②.$
1.	$\dfrac{-4l}{na}D①+\dfrac{4l}{na}D②.$ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{-4}{ne}D◎+\dfrac{2fl-2a}{nea}D①-\dfrac{+2fl+2a}{nea}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\tfrac{1}{2}fl-gk+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fl-gk-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{l};\quad ◎=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{k}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\tfrac{p}{g}};\quad ①=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{g}{p}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\tfrac{q}{g}};\quad ②=+\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{g}{q}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{-k};\quad ◎=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{k}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\tfrac{-p}{g}};\quad ①=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-g}{p}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\tfrac{-q}{g}};\quad ②=-\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-g}{q}}\times-(BP:BO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[4]{k+lz^n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{+4}{ng}D\,⊙ - \dfrac{+2fk-2a}{nga}D\,①+\dfrac{2fk+2a}{nga}D\,②.$
1.	$\dfrac{+4k}{na}D\,① - \dfrac{4k}{na}D\,②.$ Voyez fig. 30.
0.	$-\dfrac{+2fk+2a}{nea}D\,① + \dfrac{2fk-2a}{nea}D\,②.$
$-1.$	$\dfrac{-4}{3nek}DP^3 + \dfrac{\overline{fk+a}\|^2}{neeka}D\,① - \dfrac{+\overline{fk-a}\|^2}{neeka}D\,②.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a=\sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p=\tfrac{1}{2}fk-el+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fk-el-\tfrac{1}{2}a$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{l};\quad ⊙=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{l}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO)\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{p}{e}};\quad ①=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{e}{p}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{q}{e}};\quad ②=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{e}{q}}\times\beta(BP:BO).\\ \quad-\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{-l};\quad ⊙=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{l}}\times\beta(BP:BO)\\ \quad-\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-p}{e}};\quad ①=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-e}{p}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-q}{e}};\quad ②=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-e}{q}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)-\chi(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[4]{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{-akr}{2nqs}D\times①+②+M;+\dfrac{+akr}{2nqs}D\times③+④+N.$ $\quad -q,\overline{s+a} \qquad -q,\overline{s-a}$
	Voyez fig. 30.
1.	$\dfrac{+alr}{2nqs}D\times①+②+M;+\dfrac{-alr}{2nqs}D\times③+④+N.$
0.	$\dfrac{-4}{ne}D\,⓪+\dfrac{-ar,\overline{fl-gk}}{2neqs}D\times①+②+M;+\dfrac{ar,\overline{fl-gk}}{2neqs}D\times③+④+N.$ $\quad +gq,\overline{s+a} \qquad +gq,\overline{s-a}$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{k+lz^n}.\quad q=ell-fkl+gkk.$$

$$r=\sqrt{gq}.\quad s=\sqrt{-fgl+2ggk+2\sqrt{qg^3}}.\quad a=\sqrt[4]{qg^3}.$$

$$b=\sqrt{+\sqrt{-fg^3l+2g^4k+2\sqrt{qg^7}}+2\sqrt[4]{qg^7}}.$$

$$c=\sqrt{-\sqrt{fg^3l+2g^4k+2\sqrt{qg^7}}+2\sqrt[4]{qg^7}}.$$

$$M=\tfrac{1}{c}(a+cP+gPP:a-cP+gPP).$$

$$N=\tfrac{1}{b}(a+bP+gPP:a-bP+gPP.$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{k}\,; \ldots \quad ◎ = {}^{+}\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{k}} \times -(AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) - \chi(PCO). \\ OP : OA :: {}^{\pm}\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ag}\,; \; ① = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ag}\,; \; ② = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{\pm}\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ag}\,; \; ③ = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{\mp}\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt{\tfrac{1}{4}bb - ag}\,; \; ④ = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{-k}\,; \ldots \quad ◎ = {}^{-}\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{k}} \times + \beta(BP : BO) \\ \quad - \beta(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP : OA :: {}^{+}\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}cc}\,; \; ① = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}cc}\,; \; ② = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: {}^{\pm}\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}bb}\,; \; ③ = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: {}^{\mp}\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}bb}\,; \; ④ = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXX. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}\sqrt[4]{k+lz^n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\dfrac{4}{ng}D\,⊙+\dfrac{ar,\overline{fk-el}^{-eq,\overline{s+a}}}{2ngqs}D\times①+②+M;+\dfrac{-ar,\overline{fk-el}^{-eq,\overline{s-a}}}{2ngqs}D\times③+④+N.$
	Voyez fig. 30.
1.	$\dfrac{-akr}{2nqs}D\times①+②+M;+\dfrac{akr}{2nqs}D\times③+④+N.$
0.	$\dfrac{+alr}{2nqs}^{+q,\overline{s+a}}D\times①+②+M;+\dfrac{-alr}{2nqs}^{+q,\overline{s-a}}D\times③+④+N.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad q=ell-fkl+gkk.$$

$$r=\sqrt{eq}.\quad s=\sqrt{-efk+2eel+2\sqrt{qe^3}}.\quad a=\sqrt[4]{qe^3}.$$

$$b=\sqrt{+\sqrt{-e^3fk+2e^4l+2\sqrt{qe^7}}+2\sqrt[4]{qe^7}}.$$

$$c=\sqrt{-\sqrt{-e^3fk+2e^4l+2\sqrt{qe^7}}+2\sqrt[4]{qe^7}}.$$

$$M=\tfrac{1}{c}(a+cP+ePP:a-cP+ePP).$$

$$N=\tfrac{1}{b}(a+bP+ePP:a-bP+ePP).$$

OP :

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{l}; \therefore \quad ◎ = +\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{l}} \times - (AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) - \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ae}; \quad ① = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ae}; \quad ② = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ae}; \quad ③ = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ae}; \quad ④ = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{-l}; \therefore \quad ◎ = -\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{l}} \times + \beta\,(BP : BO) \\ \quad - \beta\,(DP : DO) + \psi\,(PBO) + \psi\,(PDO). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}cc}; \quad ① = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}cc}; \quad ② = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}bb}; \quad ③ = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi\,(PCO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}bb}; \quad ④ = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi\,(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXI. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	$-20fl$
3.	$\dfrac{+4gk+4glz^n}{5ngg l}DP+\dfrac{p,\overline{fl+a}\|^2}{ng^3la}D①+\dfrac{-q,\overline{fl-a}\|^2}{ng^3la}D②.$
2.	$\dfrac{+4}{ng}DP+\dfrac{-2p,\overline{fl+a}}{ngga}D①+\dfrac{2q,\overline{fl-a}}{ngga}D②.$
1.	$\dfrac{+4pl}{nga}D①-\dfrac{4ql}{nga}D②.$ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{-4k}{ne}D◎+\dfrac{2k,\overline{fl-a}\ -4ell}{nea}D①+\dfrac{-2k,\overline{fl+a}\ +4ell}{nea}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{k+lz^n}.\quad a=\sqrt[2]{ffll-4egll}.\quad p=\tfrac{1}{2}fl-gk+\tfrac{1}{2}a.$$
$$q=\tfrac{1}{2}fl-gk-\tfrac{1}{2}a.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{k};\quad ◎=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{k^3}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{p}{g}};\quad ①=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{g^3}{p^3}}\times-\beta(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(DPO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{q}{g}};\quad ②=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{g^3}{q^3}}\times-\beta(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{-k};\quad ◎=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{k^3}}\times-\beta(BP:BO)+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-p}{g}};\quad ①=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{p^3}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-q}{g}};\quad ②=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{q^3}}\times-(AP:AO)+(EP:EO)+\chi(PCO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXXII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 1. *Cas.*
&c.	
1.	$\dfrac{+4l}{ng}D\,◎+\dfrac{\overset{-2l,\overline{fk-a}}{+4gkk}}{nga}D\,①+\dfrac{\overset{+2l,\overline{fk+a}}{-4gkk}}{nga}D\,②.$
0.	$\dfrac{-4pk}{nea}D\,①+\dfrac{4qk}{nea}D\,②.$ Voyez fig. 30.
— 1.	$\dfrac{-4}{ne}DP+\dfrac{2p,\overline{fk+a}}{neea}D\,①+\dfrac{-2q,\overline{fk-a}}{neea}D\,②.$
— 2.	$\dfrac{\overset{+20fkz^n}{-4ek-4elz^n}}{5neekz^n}DP+\dfrac{-p,\overline{fk+a}\|^2}{ne^3ka}D\,①+\dfrac{q,\overline{fk-a}\|^2}{ne^3ka}D\,②.$
&c.	

$P=\sqrt[4]{\dfrac{k+lz^n}{z^n}}.\quad a=\sqrt[2]{ffkk-4egkk}.\quad p=\frac{1}{2}fk-el+\frac{1}{2}a.$

$q=\frac{1}{2}fk-el-\frac{1}{2}a.$

1. *Cas.*

$OP:OA::P:\sqrt[4]{l};\quad ◎=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{l^3}}\times-(AP:AO)$
$+(EP:EO)+\chi(PCO).$

$OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{p}{e}};\quad ①=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{e^3}{p^3}}\times-\beta(BP:BO)$
$+\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).$

$OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{q}{e}};\quad ②=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{e^3}{q^3}}\times-\beta(BP:BO)$
$+\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).$

2. *Cas.*

$OP:OA::P:\sqrt[4]{-l};\quad ◎=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-1}{l^3}}\times-\beta(BP:BO).$
$+\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO).$

$OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-p}{e}};\quad ①=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-e^3}{p^3}}\times-(AP:AO)$
$+(EP:EO)+\chi(PCO).$

$OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-q}{e}};\quad ②=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-e^3}{q^3}}\times-(AP:AO)$
$+(EP:EO)+\chi(PCO).$

θ	FORME LXXXI. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
2.	$\frac{4}{ng}DP+\frac{\overset{-g,\overline{fl-gk}}{as+gr}}{2ngs}D\times①+②-M;+\frac{\overset{+g,\overline{fl-gk}}{as-gr}}{2ngs}D\times③+④-N.$ Voyez fig. 30.
1.	$\frac{gl}{2ns}D\times①+②-M;+\frac{-gl}{2ns}D\times③+④-N.$
0.	$\frac{-4k}{ne}D\,⊙+\frac{\overset{-gr-as}{-ggk}}{2nes}D\times①+②-M;+\frac{\overset{+gr-as}{ggk}}{2nes}D\times③+④-N.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{k+lz^n}.\quad q=ell-fkl+gkk.$$

$$r=\sqrt{gq}.\quad s=\sqrt{-fgl+2ggk+2\sqrt{qg^3}}.\quad a=\sqrt[4]{qg^3}.$$

$$b=\sqrt{+\sqrt{-fg^3l+2g^4k+2\sqrt{qg^7}}+2\sqrt[4]{qg^7}}.$$

$$c=\sqrt{-\sqrt{-fg^3l+2g^4k+2\sqrt{qg^7}}+2\sqrt[4]{qg^7}}.$$

$$M=\tfrac{1}{c}(a+cP+gPP:a-cP+gPP).$$

$$N=\tfrac{1}{b}(a+bP+gPP:a-bP+gPP).$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{k}; \ldots \quad ◎ = +\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{k^3}} \times -(AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) + \chi(PCO). \\ OP : OA :: \pm\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ag}; \ ① = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\tfrac{1}{4}cc - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ag}; \ ② = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\tfrac{1}{4}cc - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: \pm\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ag}; \ ③ = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\tfrac{1}{4}bb - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ag}; \ ④ = +\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\tfrac{1}{4}bb - ag}} \times \\ \quad (EP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{-k}; \ldots \quad ◎ = -\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{k^3}} \times -\beta(BP : BO) \\ \quad + \beta(DP : DO) + \downarrow(PBO) + \downarrow(PDO). \\ OP : OA :: +\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}cc}; \ ① = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \tfrac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}c + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}cc}; \ ② = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \tfrac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: \pm\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}bb}; \ ③ = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \tfrac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi(PCO). \\ OP : OA :: -\tfrac{1}{2}b + gP : \sqrt[2]{ag - \tfrac{1}{4}bb}; \ ④ = -\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ag - \tfrac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi(PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXII. $\dfrac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$ 2. *Cas.*
&c.	
1.	$\dfrac{4l}{ng}D\,⓪+\dfrac{\overset{+er+as}{+eel}}{2ngs}D\times①+②-M;+\dfrac{\overset{-er+as}{-eel}}{2ngs}D\times③+④-N.$ Voyez fig. 30.
0.	$\dfrac{-ek}{2ns}D\times①+②-M;+\dfrac{ek}{2ns}D\times③+④-N.$
$\frac{-}{1}$.	$\dfrac{-4}{ne}DP+\dfrac{\overset{+e,\overline{fk-el}}{-as-er}}{2nes}D\times①+②-M;+\dfrac{\overset{-e,\overline{fk-el}}{-as+er}}{2nes}D\times③+④-N.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{k+lz^n}{z^n}}.\quad q=ell-fkl+gkk.$$

$$r=\sqrt{eq}.\quad s=\sqrt{-efk+2eel+2\sqrt{qe^3}}.\quad a=\sqrt[4]{qe^3}.$$

$$b=\sqrt{+\sqrt{-e^3fk+2e^4l+2\sqrt{qe^7}}+2\sqrt[4]{qe^7}}.$$

$$c=\sqrt{-\sqrt{-e^3fk+2e^4l+2\sqrt{qe^7}}+2\sqrt[4]{qe^7}}.$$

$$M=\tfrac{1}{c}(a+cP+ePP:a-cP+ePP).$$

$$N=\tfrac{1}{b}(a+bP+ePP:a-bP+ePP).$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{l}; \quad ◎ = {}^{+}\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{1}{l^3}} \times - (AP : AO) \\ \quad + (EP : EO) + \chi (PCO). \\ OP : OA :: {}^{+}\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ae}; \quad ① = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}cc - ae}; \quad ② = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}cc - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{+}\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ae}; \quad ③ = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}bb - ae}; \quad ④ = {}^{+}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{\frac{1}{4}bb - ae}} \times \\ \quad (EP : AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: P : \sqrt[4]{-l}; \quad ◎ = {}^{-}\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{\tfrac{-1}{l^3}} \times - \beta (BP : BO) \\ \quad + \beta (DP : DO) + \downarrow (PBO) + \downarrow (PDO). \\ OP : OA :: {}^{+}\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}cc}; \quad ① = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi (PCO). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}c + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}cc}; \quad ② = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}cc}} \times \\ \quad \chi (PCO). \\ OP : OA :: {}^{+}\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}bb}; \quad ③ = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi (PCO). \\ OP : OA :: {}^{-}\tfrac{1}{2}b + eP : \sqrt[2]{ae - \tfrac{1}{4}bb}; \quad ④ = {}^{-}\tfrac{1}{2}\sqrt[2]{\tfrac{1}{ae - \frac{1}{4}bb}} \times \\ \quad \chi (PCO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXIII. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	
2.	$\frac{\overset{+eh}{-3fg+2fhz^n}\times\overline{g+hz^n}}{4nfhh}DP+\frac{\overset{-eh}{-3fg}\times\overline{eh-fg}}{4nfh^3}D①.$
1.	$+\frac{g+hz^n}{nh}DP+\frac{eh-fg}{nhh}D①.$
0.	$+\frac{2f}{nh}D①-\frac{2e}{ng}D②.$ Voyez fig. 28.
$\overline{1}$.	$-\frac{+g+hz^n}{ngz^n}DP-\frac{+fg-eh}{ngg}D②.$
$\overline{2}$.	$\frac{\overset{-fgz^n}{-2eg+3ehz^n}\times\overline{g+hz^n}}{4negg z^{2n}}DP+\frac{\overset{+fg}{+3eh}\times\overline{fg-eh}}{4neg^3}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{f}{h}};\ ①=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{h}{f}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(CP:CO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{e}{g}};\ ②=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{e}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(CP:CO). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-f}{h}};\ ①=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-h}{f}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-e}{g}};\ ②=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{e}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$

FORME

θ	FORME LXXXIV. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	
2.	$\frac{\overset{+eh}{-}4fg+3fhz^n\times\overline{g+hz^n}}{6nfhh}DP+\frac{\overset{-eh}{-}2fg\times\overline{eh-fg}}{3nfh^3}D①.$
1.	$+\frac{g+hz^n}{nh}DP+\frac{eh-fg}{nhh}D①.$
0.	$+\frac{3f}{nh}D①-\frac{3e}{ng}D②.$ Voyez fig. 29.
$\overline{1}$.	$-\frac{+g+hz^n}{ngz^n}DP-\frac{+fg-eh}{ngg}D②.$
$\overline{2}$.	$\frac{\overset{-fgz^n}{-}3eg+4ehz^n\times\overline{g+hz^n}}{6negg z^{2n}}DP+\frac{\overset{+fg}{+}2eh\times\overline{fg-eh}}{3neg^3}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{f}{h}};\ ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{ff}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{e}{g}};\ ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{ee}}\times-(AP:AO) \\ \quad +\beta(CP:CO)+\downarrow(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-f}{h}};\ ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{ff}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +(DP:DO)+\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-e}{g}};\ ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{ee}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +(DP:DO)+\downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXV. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	$+eh$ $\qquad\qquad\qquad\qquad -3eh$
2.	$\frac{-5fg+4fhz^n\times\overline{g+hz^n}}{8nfhh}DP+\frac{-5fg\times\overline{eh-fg}}{8nfh^3}D①.$
1.	$+\frac{g+hz^n}{nh}DP+\frac{eh-fg}{nhh}D①.$
0.	$+\frac{4f}{nh}D①-\frac{4e}{ng}D②.$ Voyez fig. 30.
-1.	$-\frac{+g+hz^n}{ngz^n}DP-\frac{+fg-eh}{ngg}D②.$
-2.	$\frac{-4eg+5ehz^n\times\overline{g+hz^n}}{8negg z^{2n}}DP+\frac{+5eh\times\overline{fg-eh}}{8neg^3}D②.$ $\qquad -fgz^n \qquad +3fg$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{f}{h}};\ ①=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{h^3}{f^3}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{e}{g}};\ ②=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{g^3}{e^3}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(EP:EO)+\chi(PCO). \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-f}{h}};\ ①=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-h^3}{f^3}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +\beta(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-e}{g}};\ ②=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{e^3}}\times-\beta(BP:BO) \\ \quad +(DP:DO)+\downarrow(PBO)+\downarrow(PDO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXVI. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	
2.	$+\frac{g+hz^n}{nhl}DP+\frac{2kp}{nllq}D①+\frac{ehl-fgl-2fhk}{nhhll}D②.$
1.	$\frac{-2p}{nlq}D①+\frac{2f}{nhl}D②.$
	Voyez fig. 28.
0.	$\frac{+2p}{nkq}D①-\frac{2e}{ngk}D③.$
$\overline{1}$.	$-\frac{+g+hz^n}{ngkz^n}DP-\frac{2lp}{nkkq}D①+\frac{ehk-fgk+2egl}{nggkk}D③.$
&c.	

$$P=\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.\quad p=el-fk.\quad q=hk-gl.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{p}{q}}; & ①=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{q}{p}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{f}{h}}; & ②=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{h}{f}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(CP:CO). & \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{e}{g}}; & ③=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{g}{e}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(CP:CO). & \end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-p}{q}}; & ①=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-q}{p}}\times-(AP:AO) \\ \quad +(CP:CO). & \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-f}{h}}; & ②=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-h}{f}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::P:\sqrt[2]{\frac{-e}{g}}; & ③=-\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{-g}{e}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$$

θ	FORME LXXXVII. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	
2.	$+\frac{g+hz^n}{nhl}DP+\frac{3kp}{nllq}D①+\frac{chl-fgl-3fhk}{nhhll}D②.$
1.	$\frac{-3p}{nlq}D①+\frac{3f}{nhl}D②.$
	Voyez fig. 29.
0.	$\frac{+3p}{nkq}D①-\frac{3e}{ngk}D③.$
$-1.$	$-\frac{+g+hz^n}{ngkz^n}DP-\frac{3lp}{nkkq}D①+\frac{ehk-fgk+3egl}{nggkk}D③.$
&c.	

$$P=\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.\quad p=el-fk.\quad q=hk-gl.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{p}{q}};\quad ①=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{qq}{pp}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\psi(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{f}{h}};\quad ②=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{ff}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\psi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{e}{g}};\quad ③=+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{ee}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\psi(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-p}{q}};\quad ①=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{qq}{pp}}\times-(AP:AO)\\ \quad+\beta(CP:CO)+\psi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-f}{h}};\quad ②=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{hh}{ff}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\psi(PBO).\\ OP:OA::P:\sqrt[3]{\frac{-e}{g}};\quad ③=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{gg}{ee}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+(DP:DO)+\psi(PBO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXXVIII. $\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$
&c.	
2.	$+\frac{g+hz^n}{nhl}DP+\frac{4kp}{nllq}D①+\frac{ehl-fgl-4fhk}{nhhll}D②.$
1.	$\frac{-4p}{nlq}D①+\frac{4f}{nhl}D②.$
	Voyez fig. 30.
0.	$\frac{+4p}{nkq}D①-\frac{4e}{ngk}D③.$
$-$ 1.	$-\frac{+g+hz^n}{ngkz^n}DP-\frac{4lp}{nkkq}D①+\frac{ehk-fgk+4egl}{nggkk}D③.$
&c.	

$$P=\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}.\quad p=el-fk.\quad q=hk-gl.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{p}{q}};\quad ①=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{q^3}{p^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{f}{h}};\quad ②=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{h^3}{f^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{e}{g}};\quad ③=+\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{g^3}{e^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-p}{q}};\quad ①=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-q^3}{p^3}}\times-(AP:AO)\\ \quad+(EP:EO)+\chi(PCO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-f}{h}};\quad ②=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-h^3}{f^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\\ OP:OA::P:\sqrt[4]{\frac{-e}{g}};\quad ③=-\frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{-g^3}{e^3}}\times-\beta(BP:BO)\\ \quad+\beta(DP:DO)+\psi(PBO)+\psi(PDO).\end{cases}$$

θ	FORME LXXXIX. $\dfrac{Dz^{\theta n - 1}dz}{\sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}}$
&c.	
3.	$\dfrac{-3f + 2gz^n}{4ngg} DP + \dfrac{3ff - 4eg}{8ngg} D①.$
2.	$\dfrac{+1}{ng} DP - \dfrac{f}{2ng} D①.$
1.	$\dfrac{+1}{n} D①.$ Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-1}{n} D②.$
$\overline{1}$.	$\dfrac{-1}{nez^n} DP + \dfrac{f}{2ne} D②.$
$\overline{2}$.	$\dfrac{-2e + 3fz^n}{4neez^{2n}} DP + \dfrac{4eg - 3ff}{8nee} D②.$
&c.	

$$P = \sqrt{e + fz^n + gz^{2n}}.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: \dfrac{\frac{1}{2}f + gz^n}{P} : \sqrt{g}; & ① = +\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{g}} \times (CP : AP). \\ OP : OA :: \dfrac{e + \frac{1}{2}fz^n}{P} : \sqrt{e}; & ② = +\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{e}} \times (CP : AP). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP : OA :: \dfrac{\frac{1}{2}f + gz^n}{P} : \sqrt{-g}; & ① = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{g}} \times \psi\,(PBO). \\ OP : OA :: \dfrac{e + \frac{1}{2}fz^n}{P} : \sqrt{-e}; & ② = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{e}} \times \psi\,(PBO). \end{cases}$

θ	FORME XC. $Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$.
&c.	$+8eg$
2.	$\dfrac{-3ff+2fgz^n+8ggz^{2n}}{24ngg}DP+\dfrac{f^3-4efg}{16ngg}D①.$
1.	$\dfrac{f+2gz^n}{4ng}DP+\dfrac{4eg-ff}{8ng}D①.$
0.	$\dfrac{+1}{n}DP+\dfrac{f}{2n}D①-\dfrac{e}{n}D②.$ Voyez fig. 28.
-1.	$\dfrac{-1}{nz^n}DP-\dfrac{f}{2n}D②+\dfrac{g}{n}D①.$
-2.	$\dfrac{-2e-fz^n}{4nez^{2n}}DP+\dfrac{ff-4eg}{8ne}D②.$
-3.	$+8egz^{2n}$ $\dfrac{-8ee-2efz^n+3ffz^{2n}}{24neez^{3n}}DP+\dfrac{4efg-f^3}{16nee}D②.$
&c.	

$$P=\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}.$$

1. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{g}; & ①=+\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{g}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{e}; & ②=+\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{e}}\times(CP:AP). \end{cases}$

2. *Cas.* $\begin{cases} OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{-g}; & ①=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{g}}\times\psi(PBO) \\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{-e}; & ②=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{e}}\times\psi(PBO). \end{cases}$

θ	FORME XCI. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$
&c.	
3.	$\dfrac{+1}{ngl}$ D P $-\dfrac{kk}{nll}$ D ① $+\dfrac{-fl-2gk}{2ngll}$ D ②.
2.	$\dfrac{+k}{nl}$ D ① $+\dfrac{1}{nl}$ D ②.
1.	$\dfrac{-1}{n}$ D ①. Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{+l}{nk}$ D ① $-\dfrac{1}{nk}$ D ③.
-1.	$\dfrac{-1}{nekz^n}$ D P $-\dfrac{ll}{nkk}$ D ① $+\dfrac{fk+2el}{2nekk}$ D ③.
&c.	

$$P=\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}.\quad p=ell-fkl+gkk.$$

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\dfrac{l,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-k,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{p}; \\ \qquad ①=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{g};\quad ②=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{g}}\times(CP:AP). \\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{e};\quad ③=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e}}\times(CP:AP). \end{cases}$$

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA::\dfrac{l,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-k,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{-p}; \\ \qquad ①=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{p}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{-g};\quad ②=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{g}}\times\downarrow(PBO). \\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{-e};\quad ③=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-1}{e}}\times\downarrow(PBO). \end{cases}$$

FORME

θ	FORME XCII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}{k+lz^n}$
&c.	$+fl$
2.	$\dfrac{-4gk+2glz^n}{4ngll}DP+\dfrac{kp}{nl^3}D①+\dfrac{\begin{matrix}-ffll-4fgkl\\+4egll+8ggkk\end{matrix}}{8ngl^3}D②.$
1.	$\dfrac{+1}{nl}DP-\dfrac{p}{nll}D①+\dfrac{fl-2gk}{2nll}D②.$
0.	$\dfrac{+p}{nkl}D①+\dfrac{g}{nl}D②-\dfrac{e}{nk}D③.$ Voyez fig. 28.
-1.	$\dfrac{-1}{nkz^n}DP-\dfrac{p}{nkk}D①+\dfrac{2el-fk}{2nkk}D③.$
-2.	$\dfrac{\begin{matrix}-fkz^n\\-2ek+4elz^n\end{matrix}}{4nekkz^{2n}}DP+\dfrac{lp}{nk^3}D①+\dfrac{\begin{matrix}+ffkk+4efkl\\-4egkk-8eell\end{matrix}}{8nek^3}D③.$
&c.	

$$P=\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}.\quad p=ell-fkl+gkk.$$

1. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\dfrac{l,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-k,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{p};\\ \qquad ①=+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p}}\times(CP:AP).\\ OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{g};\quad ②=+\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{g}}\times(CP:AP).\\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{e};\quad ③=+\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{e}}\times(CP:AP).\end{cases}$$

2. *Cas.*
$$\begin{cases} OP:OA::\dfrac{l,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-k,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{-p};\\ \qquad ①=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{p}}\times\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{-g};\quad ②=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{g}}\times\downarrow(PBO).\\ OP:OA::\dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{-e};\quad ③=-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{e}}\times\downarrow(PBO).\end{cases}$$

θ	FORME XCIII. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$
&c.	
3.	$\dfrac{pp}{nam}$ D ① $-\dfrac{qq}{nam}$ D ② $+\dfrac{1}{nm}$ D ③.
2.	$\dfrac{-p}{na}$ D ① $+\dfrac{q}{na}$ D ②.
	Voyez fig. 28.
1.	$\dfrac{m}{na}$ D ① $-\dfrac{m}{na}$ D ②.
0.	$\dfrac{-mm}{nap}$ D ① $+\dfrac{mm}{naq}$ D ② $-\dfrac{1}{nk}$ D ④.
&c.	

$a=\sqrt{ll-4km}$. $p=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}a$. $q=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}a$. $P=\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$.

$r=emm-fmp+gpp$. $s=emm-fmq+gqq$.

1. *Cas.*

$$\begin{cases} OP:OA :: \dfrac{m,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-p,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{r}; \\ \quad ① = {}^{+}_{-}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}}\times(CP:AP). \\ OP:OA :: \dfrac{m,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-q,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P}:\sqrt{s}; \\ \quad ② = {}^{+}_{-}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{s}}\times(CP:AP). \\ OP:OA :: \dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P}:\sqrt{g}; \quad ③ = {}^{+}_{-}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{g}}\times(CP:AP). \\ OP:OA :: \dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P}:\sqrt{e}; \quad ④ = {}^{+}_{-}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e}}\times(CP:AP). \end{cases}$$

θ	FORME XCIV. $\dfrac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}{k+lz^n+mz^{2n}}$
&c.	
2.	$\dfrac{1}{nm}DP-\dfrac{pr}{namm}D①+\dfrac{qs}{namm}D②+\dfrac{fm-2gl}{2nmm}D③.$
1.	$\dfrac{r}{nam}D①-\dfrac{s}{nam}D②+\dfrac{g}{nm}D③.$
	Voyez fig. 28.
0.	$\dfrac{-r}{nap}D①+\dfrac{s}{naq}D②-\dfrac{e}{nk}D④.$
$-1.$	$\dfrac{-1}{nkz^n}DP+\dfrac{rm}{napp}D①-\dfrac{sm}{naqq}D②+\dfrac{2el-fk}{2nkk}D④.$
&c.	

Les valeurs des quantités a, p, q; P, r, s, se trouvent dans la page précédente.

2. *Cas.*

$$\begin{cases} OP : OA :: \dfrac{m,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-p,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P} : \sqrt{-r}; \\ \quad ① = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{r}} \times \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: \dfrac{m,\overline{e+\frac{1}{2}fz^n}-q,\overline{\frac{1}{2}f+gz^n}}{P} : \sqrt{-s}; \\ \quad ② = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{s}} \times \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: \dfrac{\frac{1}{2}f+gz^n}{P} : \sqrt{-g}; \quad ③ = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{g}} \times \downarrow (PBO). \\ OP : OA :: \dfrac{e+\frac{1}{2}fz^n}{P} : \sqrt{-e}; \quad ④ = -\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{e}} \times \downarrow (PBO). \end{cases}$$

TABLE DES FORMES.

PREMIERE SUITE.

Formes			Pag.
1. 2.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n}$	302
3. 4.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n}$	304
5. 6.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n}$	306
7. 8.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{4}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$	308
9. 10.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{5}n-1}dz}{e+fz^n}$	310
11. 12.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{6}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{6}n-1}dz}{e+fz^n}$	312
13. 14.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{6}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	314
15. 16.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	316
17. 18.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{4}{7}n-1}dz}{e+fz^n}$	318
19. 20.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{7}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$	320
21. 22.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{5}{8}n-1}dz}{e+fz^n}$	322

SECONDE SUITE.

Formes			Pag.
23. 24.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	324
25. 26.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	326
27. 28.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n}\times\overline{g+hz^n}}$	328

TROISIE'ME SUITE.

29. 30.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	331
31. 32.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	217 & 334
33. 34.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}}$	336

QUATRIE'ME SUITE.

35. 36.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	341
37. 38.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	221 & 344
39. 40.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\times\overline{k+lz^n}}$	346

CINQUIEME SUITE.

41. 42.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	350
43. 44.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	236 & 354

Formes			Pag.
45. 46.	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz}{e+fz^n+gz^{2n}+hz^{3n}}$	356

SIXIEME SUITE.

47. 48.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n}}$	360
49. 50.	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n}$	$Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt{e+fz^n}$	362
51. 52.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\sqrt[3]{e+fz^n}}$	364
53. 54.	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}$	$Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}$	366
55. 56.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt[4]{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\sqrt[4]{e+fz^n}}$	368
57. 58.	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}$	$Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}$	370

SEPTIEME SUITE.

59. 60.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}$	372
61. 62.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}$	374
63. 64.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[3]{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[3]{e+fz^n}}$	376
65. 66.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}}{g+hz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{e+fz^n}}{g+hz^n}$	378
67. 68.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[4]{e+fz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{g+hz^n\sqrt[4]{e+fz^n}}$	380
69. 70.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}}{g+hz^n}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{e+fz^n}}{g+hz^n}$	382

HUITIEME SUITE.

Formes			Pag.
71. 72.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt{k+lz^n}}$	384
73. 74.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}dz\sqrt{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	388
75. 76.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt[3]{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{3}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt[3]{k+lz^n}}$	225 & 392
77. 78.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{2}{3}n-1}dz\sqrt[3]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	227, 394
79. 80.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt[4]{k+lz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{4}n-1}dz}{\overline{e+fz^n+gz^{2n}}\sqrt[4]{k+lz^n}}$	396
81. 82.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	$\frac{Dz^{\theta n+\frac{3}{4}n-1}dz\sqrt[4]{k+lz^n}}{e+fz^n+gz^{2n}}$	402

NEUVIEME ET DIXIEME SUITE.

83. 84.	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	408
85. 86.	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[2]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	410
87. 88.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[3]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{k+lz^n}\sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}$	412

DERNIERE SUITE.

89. 90.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$	$Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}$	414
91. 92.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}{k+lz^n}$	416
93. 94.	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz}{\overline{k+lz^n+mz^{2n}}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}$	$\frac{Dz^{\theta n-1}dz\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}{k+lz^n+mz^{2n}}$	418

AVERTISSEMENT.

PLUSIEURS perſonnes m'ayant demandé le Mémoire ſur la Théorie des Cométes que je préſentai à l'Académie des Sciences en 1747, j'ai cru qu'il ſeroit à propos de le joindre ici : J'y ai ajouté les Elémens de l'orbite décrite par la Cométe qui a parue depuis en 1748.

LA

LA THÉORIE DU MOUVEMENT DES COMÉTES.

LE mouvement des Cométes, qui parut si surprenant & si irrégulier aux Anciens, a été déterminé & fixé dans le dernier siécle par M. NEWTON. Ce célébre Géométre ayant développé le vrai principe qui fait le ressort de la Nature & modére tous les mouvemens célestes, a démontré que toutes les Planétes & Cométes décrivent des sections coniques dont le Soleil occupe le foyer commun, & comme il est très-vraisemblable que les Cométes ont leurs temps périodiques de même que les Planetes, il s'ensuit que leurs orbites sont des Ellipses très-excentriques, dont les petites portions que nous leur voyons décrire ne diffèrent pas sensiblement d'arcs de Paraboles. Par ce moyen il a ouvert le chemin pour assujettir à la Géométrie & au calcul ces mouvemens qui paroissoient auparavant n'être réglés par aucune loi constante. La vérité de cette théorie fut premiérement confirmée par la Cométe de l'année

1680. dont il détermina lui-même l'orbite, & ensuite par les orbites de toutes les Cométes qui ont été obſervées, leſquelles ayant été calculées par pluſieurs Aſtronomes, on a toujours trouvé les réſultats entiérement d'accord avec les obſervations. La méthode Trigonométrique dont je me ſers pour déterminer la grandeur & la poſition de ces Trajectoires par rapport à l'Ecliptique eſt fondée ſur des fauſſes poſitions par leſquelles on commence le calcul, mais qu'enſuite on réduit aux véritables par une régle très-ſimple.

Comme les ſuppoſitions qu'on eſt obligé de faire regardent les diſtances de la Cométe au Soleil, il ſeroit à propos de connoître à peu-près ces diſtances : pour cet effet on peut ſe ſervir du Problême LVI. de l'Arithmétique univerſelle de M. NEWTON, par lequel au moyen de quatre obſervations on trouvera la diſtance de la Cométe au Soleil pour un temps donné ; j'employai cette méthode pour la Cométe de 1706 ; mais on peut ſe diſpenſer de ce calcul qui eſt aſſez pénible, parce qu'il ſera facile de corriger les diſtances qu'on n'aura priſes que par conjecture, comme on verra ci-après.

Pour faire mieux comprendre la théorie, & faciliter davantage le calcul du mouvement des Cométes, il eſt à propos de mettre ici quelques propoſitions.

PROPOSITION I.

SI d'un point quelconque pris dans le périmétre d'une parabole on tire une ligne au foyer de cette parabole, on aura cette proportion : comme le quarré du rayon eſt au quarré du ſinus de la moitié du ſupplement de l'angle qui s'étend depuis le ſommet de la parabole, ainſi la ligne tirée eſt à la quatriéme partie du paramétre.

DEMONSTRATION.

SOIT donnée une parabole AOP (*fig.* 59.) qui ait pour axe la ligne AS, le ſommet en A, & le foyer en S; qu'on prenne dans le périmétre un point P & qu'on tire PS; enſuite qu'on tire par le point P une tangente PM qui rencontre l'axe prolongé en M, & du foyer S une perpendiculaire SN à la tangente, & du point N une perpendiculaire NA à l'axe. Maintenant par la propriété de la parabole SM eſt égale à SP, par conſéquent SN coupe en deux également l'angle ASP, & l'angle ANS eſt égal à l'angle NPS; on ſçait encore que la perpendiculaire NA doit tomber ſur le ſommet A; ainſi nommant R le rayon, & S le ſinus de l'angle SPN qui eſt la moitié du ſupplement de l'angle ASP, on aura dans le triangle SPN, R . S :: SP . SN, & dans le triangle ANS, R . S :: SN . AS: donc en multipliant ces deux proportions on trouve, RR . SS :: SP . AS. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

COMME dans les tables que M. HALLEY a dressées pour calculer le mouvement des Cométes, les différences des logarithmes qui expriment les distances de la Cométe au Soleil sont fort considérables, & ne croissent pas uniformement, si on veut avoir plus exactement les distances intermédiaires, on les trouvera par cette proposition : pareillement la distance SP & l'angle ASP étant connus, on trouvera la distance périhelie AS.

PROPOSITION II.

LES temps qu'employent deux corps à parcourir des angles égaux dans deux paraboles quelconques, sont comme les racines quarrées des cubes des paramétres.

DÉMONSTRATION.

DANS les paraboles égales les aires décrites sont proportionnelles aux temps, & dans différentes paraboles, les temps étant égaux, les aires sont comme les racines quarrées des paramétres (*par la prop.* 14. *du* 1. *livre des Principes de M. Nevvton*) : donc si on suppose les paraboles différentes & les temps inégaux, les aires décrites seront en raison composée des temps & des racines quarrées des paramétres ; ainsi en nommant A & *a* les aires, T & *t* les temps, P & *p* les paramétres, on aura, $A . a :: T\sqrt{P} . t\sqrt{p}$; mais parce que les paraboles sont des courbes sem-

blables, & que les angles ſont ſuppoſés égaux, on a, A . a :: PP . pp; donc T$\sqrt{P}$. $t\sqrt{p}$ :: PP . pp, d'où l'on tire T . t :: $P^{\frac{3}{2}}$. $p^{\frac{3}{2}}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

IL ſuit de cette propoſition qu'ayant une table telle que celle qui a été conſtruite par M. HALLEY, dans laquelle ſe trouvent calculés pour une parabole donnée les angles formés par l'axe & les lignes tirées du foyer à la parabole, au côté deſquels ſoient marqués les temps qui y répondent, on peut facilement trouver le temps qu'une Cométe employeroit à décrire un angle quelconque dans toute autre parabole; ou, le temps étant donné on peut trouver l'angle : car le moyen mouvement marqué dans la table pouvant être regardé comme la meſure du temps, on n'a qu'à le réduire en jours réels, ce qui eſt facile puiſque l'on ſçait que 100 parties de ce mouvement répondent à 109, 6154 jours réels, & enſuite ſe ſervir de la proportion marquée ci-deſſus.

Par exemple. Le 25 Février 1744 à 5 ^{h}. 35$\frac{1}{2}$$'$ temps moyen à Paris, la Cométe étant éloignée de ſon périhelie de 56°. 28$'$. 6$''$, on demande le temps qu'elle doit employer pour parcourir cet angle; pour le trouver, il faut prendre dans la table le temps ou le moyen mouvement qui y répond, on le trouve de 44, 144 dont le logarithme eſt 1, 644871, auquel ajoutant le logarithme 0, 039872, on aura 1, 684743 pour le logarithme des jours réels; enſuite ſuppoſant la diſtance moyenne de la Terre au

égale à 100000, & par conséquent son logarithme égal à 5, 000000, ôtant 4, 349749 logarithme de la distance périhelie de la Cométe du logarithme 5, 000000, & prenant la $\frac{3}{2}$me partie de cette différence, on trouvera 0, 975376, lequel étant ôté du logarithme 1, 684743 laisse 0, 709367, pour le logarithme du temps cherché; ce logarithme répond à 5, 121 jours, qui étant ajoutés au temps de l'observation, on aura l'instant du périhelie le 1 Mars à 8^{h}. 30'.

PROPOSITION III.

SI dans deux paraboles BDE, ANO (fig. 60.) *qui ont le même axe* BAS *& le même foyer* S, *on prend un angle quelconque* BSD, *& si on divise les deux aires* BSD *&* ASN *comprises dans cet angle en un nombre égal de parties; le nombre de ces parties décrit en temps égaux par deux corps qui se meuvent dans ces paraboles est en raison réciproque des racines quarrées des cubes des paramétres.*

DEMONSTRATION.

SI les parties dont les aires BSD & ASN sont composées, étoient supposées égales, le nombre des parties parcourues seroit comme les racines quarrées des paramétres (*par la prop.* 14. *du* 1. *liv. des Principes de M. Nevvton.*): mais puisque dans la supposition présente la grandeur des parties augmente comme les quarrés des paramétres, & qu'ainsi le nombre qui en est parcouru diminue dans la même raison, on aura en nommant N & *n* les nombres des parties

décrites, & P & p les paramétres, $N . n :: \frac{\sqrt{P}}{PP} . \frac{\sqrt{p}}{pp} :: p^{\frac{3}{2}} . P^{\frac{3}{2}}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

IL suit de cette proposition que si on suppose un angle BSD de telle grandeur qu'on voudra, par exemple de 90 dégrés, divisé en un certain nombre de parties comme en 100, & qu'on ait une table dans laquelle on trouve calculé l'angle au foyer qui répond à chacune de ces parties dans une parabole donnée, puisque les paraboles sont des figures semblables, les mêmes angles dans toutes les paraboles contiendront le même nombre de ces parties; & par conséquent l'angle étant donné, on trouvera le nombre des parties qu'il contient. De plus comme dans une même parabole les aires parcourues sont proportionnelles aux temps, & que dans les paraboles différentes en temps égaux elles sont par cette proposition en raison réciproque des racines quarrées des cubes des paramétres, par la composition de ces raisons, & supposant le rayon de l'orbite Terrestre égal à l'unité, nommant L le logarithme du nombre des parties décrites, M le logarithme du nombre des jours écoulés depuis le périhelie, & D le logarithme de la distance périhelie, sçachant aussi que 0,039872 est le logarithme du nombre des parties parcourues dans l'espace d'un jour, on tirera la formule suivante

$$L = M - 0,039872 \pm \tfrac{3}{2}D.$$

Dans cette formule c'eſt le ſigne + qu'il faut ſuppoſer devant D lorſque la diſtance périhelie eſt moindre que le rayon de l'orbite terreſtre, & le ſigne — lorſqu'elle eſt plus grande.

Par cette formule, des trois termes L, M, D, deux étant donnés, on trouvera facilement le troiſiéme.

Ces préparations étant ſuppoſées, il ſera plus aiſé de calculer les Elémens des orbites paraboliques, & de trouver les lieux des Cométes dans ces orbites pour des temps donnés, en faiſant uſage des tables que M. HALLEY donne dans ſa Cométographie. Pour ce qui regarde les élémens, on pourra les trouver en cette ſorte.

PROBLÊME I.

ETANT données trois obſervations d'une Cométe éloignées d'un aſſez grand intervalle les unes des autres, trouver la grandeur & la poſition de l'orbe parabolique qu'elle décrit.

SOLUTION.

PREMIEREMENT il faut calculer les diſtances accourcies de la Cométe au Soleil, ou les ſuppoſer d'une telle grandeur qu'on voudra pour la premiére & la derniére obſervation; par le moyen de ces diſtances on fera tout le calcul des triangles rectilignes & ſphériques très-connu des Aſtronomes, juſqu'à ce qu'on ait trouvé les diſtances vrayes de la Cométe au Soleil & l'angle compris entre ces diſtan-

ces,

ces, d'où par une propriété de la parabole assez connue on déterminera la position de l'axe ; ensuite par la proposition premiére on trouvera la distance périhelie, & par le Corollaire de la seconde ou celui de la troisiéme le temps que doit employer la Cométe à décrire l'angle compris entre les distances vrayes de la Cométe au Soleil : si le temps trouvé n'est point égal au temps écoulé entre la premiére & la derniére observation, il faut recommencer le calcul en gardant constante une des distances premiérement supposées, & changeant l'autre jusqu'à ce qu'on trouve une parabole qui répond au temps entre les deux observations : lorsqu'on aura rempli cette condition, on poursuivra le calcul jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous les élémens de l'orbite ; ensuite on calculera pour le temps de la seconde observation le lieu de la Cométe dans cette orbite, & si le lieu calculé est conforme à l'observation, on a trouvé la véritable orbite, mais s'il y a une différence considérable, il faut

Secondement recommencer le calcul en augmentant ou diminuant de telle grandeur qu'on jugera à propos la distance qu'on avoit gardée constante dans la premiére supposition, (on pourra souvent distinguer s'il faut l'augmenter ou la diminuer,) & en la gardant encore constante on changera l'autre jusqu'à ce qu'on ait trouvé comme ci-dessus une nouvelle orbite, & le lieu de la Cométe dans cette orbite au temps de la seconde observation ; s'il différe encore trop du lieu observé, il faut

Troisiémement prendre la différence entre les lieux calculés de la Cométe dans les deux suppositions précédentes, & prendre aussi la quantité dont on a augmenté ou diminué dans la seconde supposition la distance qu'on avoit premiérement supposée, & ensuite faire cette proportion : comme cette différence est à cette quantité, ainsi la différence entre le lieu observé & celui des deux lieux calculés qui approche le plus de l'observation, est à une nouvelle quantité, qu'il faut ajouter ou soustraire de la distance supposée dans le cas où on a le plus approché de l'observation, & on aura une nouvelle distance qui donnera à peu-près l'orbite cherchée.

Il peut arriver qu'après ce troisiéme essai il reste quelque légére correction à faire, ce qu'on pourra facilement exécuter par le moyen des suppositions précédentes.

Exemple de la Cométe de l'année 1707.

AYANT choisi trois observations, dont M. DE LA CAILLE m'a fait l'honneur de me communiquer la premiére ; il l'a tirée par le moyen des interpolations de plusieurs observations faites en Italie pendant que la Cométe étoit proche de l'Eclyptique, & l'a réduit au nœud : le 25 Novembre à 20 ^{h}. 44$'$. temps moyen à Paris la Cométe étoit dans 4°. 46$'$. 20$''$. ♒ sans latitude. Les deux autres observations sont tirées des Mémoires de l'Académie, sçavoir le

10. Décembre à 7 h. 13′ T. M. la Cométe étoit dans 8°. 33′. 40″. ♒ avec une latitude Boréale de 39°. 36′; & le 25. Décembre à 7 h. 32′. la Cométe étoit dans 7°. 37′. 40″. ♒ avec une latitude Boréale de 46°. 34′. 20″. Maintenant ſuppoſant le demi-diamétre de l'orbite Terreſtre de 10000 parties, je prends pour la premiére obſervation la diſtance accourcie de la Cométe au Soleil de 8920 que je garde conſtante, tandis que je cherche pour la troiſiéme obſervation une autre diſtance que je trouve après pluſieurs eſſais devoir être de 5748 pour que l'aire décrite par la Cométe ſoit proportionnelle au temps entre les deux obſervations. Ayant donc déterminé dans cette ſuppoſition tous les Elémens de l'orbite, je trouve qu'ils donneroient pour le temps de la ſeconde obſervation la longitude de la Cométe de 8°. 27′. 58″. ♒ avec une latitude Boréale de 37°. 32′. 16″.

Enſuite pour la ſeconde ſuppoſition au lieu de 8920 je prends 9050 pour la diſtance accourcie au temps de la premiére obſervation, & pour avoir une aire proportionnelle au temps je trouve que l'autre diſtance doit être de 5763, & par le moyen de ces nouvelles diſtances ayant déterminé une ſeconde orbite, je trouve qu'elle donne pour le temps de la ſeconde obſervation la longitude de la Cométe de 8°. 31′. 16″. ♒ & ſa latitude Boréale de 39°. 6′. 6″.

Maintenant voyant que le mouvement de la Cométe ſe faiſoit preſque tout en latitude, je me ſers des latitudes pour corriger les ſuppoſitions précéden-

tes ; ainsi prenant, comme j'ai dit, la différence des latitudes calculées ci-dessus, qui est de 1°. 33'. 50", & la quantité 130 dont j'ai augmenté la distance 8920 prise dans la premiére supposition, je prends aussi la différence entre la latitude trouvée dans la seconde supposition & la latitude observée, qui est de 29'. 54" : je fais donc cette proportion, 1°. 33'. 50" : 29'. 54" :: 130 : 42 ; j'ajoute donc 42 à 9050, ce qui donne 9092 : mais comme cette proportion n'est qu'approchante du vrai, & non pas géométriquement exacte, le calcul m'a fait sçavoir qu'il faut ajouter 43 au lieu de 42, ce qui donne 9093 pour la distance accourcie, & prenant pour la troisiéme observation la distance de 5769½, on trouve une nouvelle orbite dont l'aire décrite est proportionnelle au temps, & les élémens sont tels que j'ai mis ci-après.

C'est de cette maniére que j'ai calculé les orbites de deux autres Cométes, sçavoir de 1706 & 1744. Comme les observations qui ont été faites sur la derniére sont plus exactes que celles qu'on a fait sur les Cométes de 1706 & 1707, M. CASSINI DE THURY m'ayant fait l'honneur de me les communiquer, j'ai calculé les lieux de la Cométe dans l'orbite parabolique pour les instans de toutes les observations ; la différence entre le calcul & l'observation ne monte jamais à une minute & demi, comme on peut voir par la table.

Quoiqu'il soit très-vraisemblable que le mouvement des Cométes se fait dans des ellipses très-excentri-

ques & non dans des paraboles, cependant comme elles ne sont visibles que pendant un petit espace de temps, il est très-difficile de pouvoir déterminer les temps de leurs révolutions, il faudroit pour cela s'assurer de certaines conditions, que peut-être on ne peut attendre d'un si petit nombre d'observations: néanmoins j'espére qu'on ne trouvera pas mauvais que j'insére ici deux Problêmes, qui y ont rapport, & qui pourront être peutêtre de quelque usage; surtout puisqu'ils sont applicables aussi aux Planetes.

PROBLÊME II.

SUPPOSE' qu'on puisse connoître la distance périhelie AS (fig. 61.) *d'un corps qui se meut dans une ellipse*, (*le Soleil étant supposé en* S,) *& une autre distance quelconque* SP *avec l'angle* ASP, *trouver le temps de la révolution & déterminer l'ellipse.*

SOLUTION.

QU'ON prenne sur l'axe prolongé la partie SB égale à SP, & du côté du point A opposé à celui de B, AD égale à AB; qu'on tire DP & la divisant également en deux au point M, si de ce point on éléve la perpendiculaire MF, le point F ou elle coupe l'axe AS sera l'autre foyer de l'ellipse cherchée. Car par la construction FP = FD, & SP = SB, donc FP + SP = FD + SB = FS + SD + SB = FS + 2SD + 2AD = FS + 2AS, ainsi FP + SP = FS + 2AS, qui est la propriété connue de l'ellipse. On connoît donc la position des

deux foyers, & l'axe de l'ellipse, par conséquent on peut la décrire; & puisque dans différentes ellipses les temps périodiques sont comme les racines quarrées des cubes des premiers axes, on connoîtra le temps de la révolution. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

IL suit donc de ce Problême, que si on trouve qu'une Cométe lorsqu'elle est éloignée de son périhelie ne décrit point la même courbe qu'elle décrivoit dans le temps du périhelie; en cherchant quelle doit être la distance de la Cométe au Soleil & l'angle depuis le périhelie pour répondre à une observation exacte; on pourra déterminer l'ellipse qu'elle décrit, & le temps de sa révolution.

PROBLÊME III.

SUPPOSE' qu'on puisse connoître pour deux instans donnés les distances au soleil d'un corps qui se meut dans une ellipse, & le rapport des vîtesses de son mouvement pour ces deux instans; déterminer l'ellipse & le temps de la révolution.

SOLUTION.

SOIT une orbe elliptique ABD, (*fig.* 62.) le grand axe AD, la moitié du petit axe OB, les foyers en S & F, le Soleil dans le foyer S; & soient connues deux distances quelconques, SP, SN; soit U la vîtesse du corps au point P, u sa vîtesse en N, & v celle en B. Maintenant par ce qui a été démontré

par M. DE MOIVRE, on a, $U . v :: \sqrt{FP} . \sqrt{SP}$, & $v . u :: \sqrt{SN} . \sqrt{FN}$; en multipliant donc terme par terme ces deux proportions, on trouve, $UU . uu :: FP \times SN . SP \times FN :: \frac{SN}{SP} . \frac{FN}{FP}$; or la raison de U à u est supposée connue, donc $\frac{FN}{FP}$ sera une quantité donnée; par conséquent supposant $\frac{FN}{FP} = a$, on aura $FN = a \times FP$, mais l'ellipse donne $SN + NF = SP + PF$, ce qui donne $FP = \frac{SP - SN}{a - 1}$, & $FP + SP = AD = \frac{a \times SP - SN}{a - 1}$. Ayant aussi trouvé FN, des centres P, N, & des rayons PF, NF, décrivant deux arcs de cercle, le point d'intersection F sera l'autre foyer; mais la position des deux foyers & l'axe étant donnés, l'ellipse & le temps de la révolution sont déterminés. *C. Q. F. T.*

Les Elémens de l'orbite décrite par la Cométe de l'année 1706.

EN prenant deux observations comme elles sont marquées dans les Mémoires de l'Académie, sçavoir celle du 20 Mars à $11^h. 38'$. temps vrai, la Cométe étant dans $1°. 49'. 48''$ ♏ avec une latitude boréale de $49°. 44'$; & celle du 13 Avril à $9^h. 21'$, la Cométe étant dans $23°. 22'. 48''$ ♍ avec une latitude boréale de $5°. 26'. 58''$; en supposant la distance accourcie de

la Cométe au Soleil au temps de la premiére obſervation de $11722\frac{1}{2}$ parties dont le rayon de l'orbite Terreſtre contient 10000, & de 16049 au temps de la ſeconde obſervation, on trouve les élémens ſuivans.

Le nœud aſcendant dans 13°. 12'. 26" ♎.

L'inclinaiſon de l'orbite au plan de l'Ecliptique de 55°. 5'. 12".

Le lieu du périhelie dans l'orbite, 12°. 14'. 30" ♓.

Le lieu du périhelie dans l'Ecliptique, 26°. 51'. 11" ♉.

La latitude Boréale du Périhélie, 44°. 40'. 48".

Le Logarithme de la diſtance périhelie, 9,626327.

Le temps du périhelie le 30 Janvier à 7h. 7'. temps moyen à Paris.

Le mouvement de la Cométe direct.

Ces élémens donnent pour le 1. Avril à 8h. 18'. temps vrai la longitude de la Cométe de 1°. 53'. 17". ♎, la longitude obſervée étoit de 1°. 54'. 18", la différence eſt de 1'. 1"; & la latitude boréale de 20°. 47'. 5", la latitude obſervée étoit de 20°. 46'. 18", la différence eſt de 47".

Les Elémens de l'orbite décrite par la Cométe de l'année 1707.

En prenant l'obſervation du 25 Novembre à 20^{h}. 44$'$. temps moyen, la Cométe étant dans 4°. 46$'$. 20$''$. ♒ ſans latitude, & l'obſervation du 25 Décembre à 7^{h}. 32$'$, la Cométe étant dans 7°. 37$'$. 40$''$ ♒ avec une latitude Boréale de 46°. 34$'$. 20$''$; en ſuppoſant la diſtance accourcie de la Cométe au Soleil au temps de la premiére obſervation de 9093 parties dont le rayon de l'orbite Terreſtre contient 10000, & de 5769$\frac{1}{2}$ au temps de la ſeconde obſervation, on trouve les élémens ſuivans.

Le nœud deſcendant dans 22°. 46$'$. 35$''$ ♉.

L'inclinaiſon de l'orbite de 88°. 37$'$. 53$''$.

Le lieu du périhelie dans l'orbite, 19°. 51$'$. 14$''$ ♊.

Le lieu du périhelie dans l'Ecliptique, 23°. 28$'$. 33$''$ ♉.

La latitude Boréale du Périhélie, 27°. 4$'$. 10$''$.

Le Logarithme de la diſtance périhelie, 9, 934228.

Le temps du périhelie le 11 Décembre à 22^{h}. 38$'$. temps moyen à Paris.

Le mouvement de la Cométe direct.

Ces élémens donnent pour l'obſervation du 10 Décembre à 7^{h}. 13$'$. 20$''$. temps moyen la longitude de la Cométe de 8°. 33$'$. 10$''$. ♒, la longitude obſervée étoit de 8°. 33$'$. 40$''$, la différence eſt de 30$''$; & la latitude boréale de 39°. 35$'$. 10$''$, elle étoit obſervée de 39°. 36$'$, la différence eſt de 50$''$.

Si au lieu de l'obſervation du 25. Novembre on ſe ſert de celle qui eſt marquée dans les Mémoires de l'Académie pour le 29. du même mois, prenant encore comme ci-deſſus l'obſervation du 25. Décembre, & ſuppoſant pour la premiére la diſtance accourcie de la Cométe de 8867, & de $5770\frac{1}{2}$ pour la ſeconde, on trouve les Elémens ſuivans.

Le nœud deſcendant dans 22°. 49'. 23" ♉.

L'inclinaiſon de l'orbite de 8[illegible]°. 37'. 8'.

Le lieu du Périhelie dans l'orbite, 19°. 57'. 50" ♊.

Le lieu du Périhelie dans l'Ecliptique, 23°. 31'. 50" ♉.

La latitude Boréale du Périhelie de 27°. 7'. 56".

Le logarithme de la diſtance Périhelie, 9,934187.

Le temps du Périhelie le 12. Décembre à 0^h. 8'. temps moyen.

Ces Elémens donnent pour le temps de l'obſervation du 10. Décembre la longitude de la Cométe de 8°. 34'. 10". ≈ avec une latitude Boréale de 39°. 34'. 35". la longitude obſervée étoit de 8°. 33'. 40", ou plutôt de 8°. 33'. 50", & la latitude obſervée étoit de 39°. 36', ou plutôt de 39°. 35'. 20", comme il réſulte des aſcenſions droites & déclinaiſons marquées dans les Mémoires de l'Académie, ce qui donne 20" pour la différence en longitude, & 45" pour la différence en latitude.

Les Elémens de l'orbite de la Cométe de l'année 1744.

En prenant l'obſervation du 7 Janvier, au temps de laquelle la longitude de la Cométe étoit de 12°. 3'. 21". ♈, & ſa latitude Boréale de 17°. 51'. 17"; & celle du 25 Février, au temps de laquelle la longitude de la Cométe étoit de 9°. 54'. 10" ♓; & ſa latitude boréale de 14°. 40'. 36"; en ſuppoſant la diſtance accourcie de la Cométe au Soleil au temps de la premiére des deux obſervations de 134693 parties dont le demi-diamétre de l'orbite Terreſtre contient 100000, & de 19798 au temps de la ſeconde obſervation, on trouve les Elémens ſuivans.

Le nœud deſcendant dans 15°. 40'. 53" ♉.

L'inclinaiſon de l'orbite de 46°. 50'. 5".

Le lieu du Périhelie dans l'orbite, 17°. 00'. 00" ♎.

Le lieu du périhelie dans l'Eclyptique, 25°. 9'. 47" ♎.

La latitude Boréale du périhelie de 20°. 29'. 27".

Le logarithme de la diſtance périhelie, 9, 349749.

Le temps du périhélie le 1. Mars à 8^{h}. 30' temps moyen à Paris.

Le mouvement de la Cométe direct, quoiqu'il ait paru pendant tout le temps retrograde.

Comparaison des lieux calculés avec les lieux observés.

Jours des mois.	Temps vrai.	Longitude observée.	Longitude calculée.	Différence.	Latitude observée.	Latitude calculée.	Différence
1743.							
Déc. 21.	6 h. 58′	♈. 22°. 23′. 4″.	♈. 22°. 22′. 12″.	— 0′. 52″.	16°. 18′. 58″. B.	16°. 19′. 23″. B.	+ 0′. 25″.
30.	5. 54½	16. 29. 41.	16. 28. 40.	— 1. 1.	17. 12. 57.	17. 12. 57.	0. 0
31.	10. 39.	15. 45. 58.	15. 46. 0.	+ 0. 2.	17. 19. 29.	17. 19. 10.	— 0. 19.
1744.							
Janvier 1.	5. 41.	15. 19. 30.	15. 18. 10.	— 1. 20.	17. 23. 22.	17. 23. 2.	— 0. 20.
3.	5. 27½	14. 11. 16.	14. 10. 30.	— 0. 46.	17. 32. 40.	17. 32. 42.	+ 0. 2.
4.	5. 21.	13. 38. 1.	13. 37. 49.	— 0. 12.	17. 37. 33.	17. 37. 24.	— 0. 9.
5.	5. 14½	13. 5. 48.	13. 5. 33.	— 0. 15.	17. 42. 21.	17. 42. 3.	— 0. 18.
6.	5. 8.	12. 34. 17.	12. 34. 6.	— 0. 11.	17. 46. 27.	17. 46. 34.	+ 0. 7.
7.	5. 1½	12. 3. 21.	12. 3. 16.	— 0. 5.	17. 51. 17.	17. 51. 1.	— 0. 16.
8.	4. 55.	11. 33. 9.	11. 33. 12.	+ 0. 3.	17. 55. 46.	17. 55. 23.	— 0. 23.
11.	8. 59.	9. 59. 53.	10. 1. 21.	+ 1. 28.	18. 9. 29.	18. 9. 1.	— 0. 28.
12.	9. 11½	9. 32. 26.	9. 33. 11.	+ 0. 45.	18. 14. 0.	18. 13. 19.	— 0. 41.
13.	7. 53.	9. 6. 40.	9. 7. 14.	+ 0. 34.	18. 18. 34.	18. 17. 21.	— 1. 13.
16.	8. 42.	7. 47. 16.	7. 47. 13.	— 0. 3.	18. 30. 45.	18. 30. 2.	— 0. 43.
17.	7. 40½	7. 21. 45.	7. 22. 53.	+ 1. 8.	18. 35. 4.	18. 33. 57.	— 1. 7.
18.	7. 0.	6. 57. 34.	6. 58. 20.	+ 0. 46.	18. 38. 54.	18. 38. 1.	— 0. 53.
Février 7.	7. 55.	☊. 28. 18. 16.	☊. 28. 18. 42.	+ 0. 26.	19. 54. 10.	19. 54. 22.	+ 0. 12.
10.	7. 17.	26. 33. 14.	26. 33. 45.	+ 0. 31.	19. 57. 53.	19. 58. 7.	+ 0. 14.
11.	6. 54½	25. 56. 8.	25. 55. 6.	— 1. 2.	19. 57. 41.	19. 57. 51.	+ 0. 10.
12.	5. 51.	25. 14. 7.	25. 15. 10.	+ 1. 3.	19. 56. 32.	19. 56. 40.	+ 0. 8.
13.	5. 39.	24. 31. 52.	24. 30. 43.	— 1. 9.	19. 54. 39.	19. 55. 9.	+ 0. 30.
15.	6. 46.	22. 49. 41.	22. 50. 18.	+ 0. 37.	19. 44. 11.	19. 44. 13.	+ 0. 2.
16.	6. 19.	21. 56. 25.	21. 55. 58.	— 0. 27.	19. 36. 38.	19. 36. 1.	— 0. 37.
17.	6. 30½	20. 57. 41.	20. 57. 7.	— 0. 34.	19. 24. 34.	19. 25. 44.	+ 1. 10.
18.	6. 3.	19. 54. 50.	19. 54. 11.	— 0. 39.	19. 11. 21.	19. 11. 38.	+ 0. 17.
23.	5. 34.	13. 15. 17.	13. 13. 48.	— 1. 29.	16. 41. 5.	16. 42. 6.	+ 1. 1.
25.	5. 22.	9. 54. 10.	9. 54. 9.	— 0. 1.	14. 40. 36.	14. 40. 35.	— 0. 1.
29.	18 43.	2. 32. 16.	2. 32. 43.	+ 0. 27.	6. 32. 29.	6. 32. 47.	+ 0. 18.

Les Elémens de l'orbite décrite par la Cométe de l'année 1748.

En suivant la même méthode & me servant des observations faites à l'Observatoire Royal, j'ai trouvé pour l'orbite de cette Cométe les Elémens suivans.

Le nœud descendant dans 22°. 51′. 20″ m.

L'inclinaison de l'orbite de 85°. 27′. 50″.

Le lieu du Périhelie dans l'orbite, 4°. 47′. 55″ m.

Le lieu du périhelie dans l'Ecliptique, 21°. 22′. 44″ m.

La latitude Boréale du périhelie de 17°. 59′. 54″.

Le logarithme de la distance périhelie, 9, 9251189.

Le temps du périhelie le 28 Avril à 23 h. 55′. temps moyen à Paris.

Le mouvement de la Cométe rétrograde.

F I N.

TABLE

De ce qui eſt contenu dans cet Ouvrage.

PREMIERE PARTIE.

DE la Réduction des Intégrales aux Logarithmes. Pag. 13
Des Meſures des Rapports. 14

SECONDE PARTIE.

De la Réduction des Intégrales aux arcs de Cercle. 52
Des Meſures des Angles. 53
De la Réduction des Différentielles compoſées. 66

TROISIEME PARTIE.

De la Réduction des Intégrales aux Logarithmes & aux arcs de Cercle pris enſemble. 71
Des Différentielles binomes. 102
Autre méthode pour les Différentielles binomes. 114
Des Différentielles trinomes. 194
Des Différentielles quadrinomes & autres. 232

QUATRIEME PARTIE.

Application de la Théorie. 239
Uſage de la Théorie dans la rectification des courbes. 240
Uſage de la Théorie dans la Quadrature des courbes. 255
Uſage de la Théorie dans la ſolution des Problèmes de Méchanique. 272
Théorie du mouvement des Cométes. 425

Fin de la Table.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 22. Mars 1747.

MESSIEURS MARALDI & DE LA CAILLE, qui avoient été nommés pour examiner un Mémoire de *D. C. Walmesley*, ſur la *Théorie du mouvement des Cométes*, en ayant fait leur rapport; l'Académie a jugé que cet Ouvrage étoit très-clair & très-méthodique, & qu'il marquoit dans l'Auteur une grande connoiſſance non ſeulement de la Théorie des Cométes & du calcul Aſtronomique, mais encore des autres parties de l'Aſtronomie Phyſique, en foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat: A Paris, ce dix-neuviéme Avril 1747.

GRANDJEAN DE FOUCHY,

Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 21. Août 1748.

MESSIEURS CLAIRAULT & D'ALEMBERT, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de *D. C. Walmesley*: intitulé, *Analyſe des Meſures des Rapports & des Angles, &c.* en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet Ouvrage étoit fait avec beaucoup d'intelligence & de clarté, qu'il marque dans l'Auteur une connoiſſance très-étendue du calcul infinitéſimal, & qu'il ſera très-utile à ceux qui voudront s'inſtruire de ce Calcul. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat; à Paris, ce 13 Septembre 1748.

GRANDJEAN DE FOUCHY,

Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

APPROBATION.

J'AI lu par l'Ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé, *Analyse des Mesures des Rapports & des Angles, &c.* & j'ai cru cet Ouvrage très digne de l'impression. A Paris ce 26 Septembre 1748.

CLAIRAUT.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos Amés & Féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : notre amé GABRIEL-FRANÇOIS QUILLAU, Pere, Imprimeur-Libraire à Paris, Ancien Adjoint de sa Communauté, Nous a fait exposer qu'il désireroit imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre, *Analyse des Mesures, des Rapports & des Angles*, ou *Reduction des Intégrales aux Logarithmes & aux Arcs de Cercle*, s'il nous plaisoit lui accorder nos lettres de Permission pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'exposant, nous lui avons permis & permettons par ces Présentes d'imprimer ledit Ouvrage, en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera ; & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaûme, pendant le temps de trois années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient d'en introduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance ; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractéres, conformément à la feuille imprimée attachée pour modéle sous le contre-scel desdites Présentes ; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de l'exposer en vente le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher féal Chevalier le sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France,

ce, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: voulons qu'à la copie desdites Présentes, qui sera imprimées tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi soit ajoutée comme à l'original; commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'éxécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-neuviéme jour du mois de Novembre l'an de grace mil sept quarante-huit, & de notre Régne le trente-quatriéme.

PAR LE ROY en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre XII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, Num. 48. *fol.* 40. *conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du* 28. *Février* 1723. *A Paris le* 3. *Décembre* 1748.

G. CAVELIER, *Syndic.*

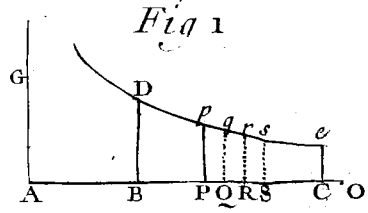
Fautes à corriger dans la Matière.

PAge 39. ligne 14. $\frac{v}{e}$ lisez $\frac{v}{c}$. Pag. 72. lig. 21. HD . OD + HO lis. OD + HO . HD. Pag. 79. lig. 15. = 1 lis. — 1. Pag. 109. lig. 11. $\frac{D}{nf}\left\{\frac{CP}{AP}\right\}$ lis. $\frac{D}{nf}\sqrt{\frac{f}{e}}\left\{\frac{CP}{AP}\right\}$. Pag. 132. lig. 13. $\frac{x^{\theta}}{1+x^{\lambda}}$ lis. $\frac{x^{\theta}}{1+x^{\lambda}}$ =. Pag. 137. lig. 11. $Cfxx$ lis. $Cffxx$. Pag. 140. lig. 6. 7. & 16. z lis. x. Pag. 141. lig. 2. $c+\sqrt{cc}=1$ lis. $c+\sqrt{cc-1}$. Pag. 143. lig. 19. $\frac{1+xx}{xx}$ lis. $\frac{1+xx}{2x}$. Pag. 151. lig. 2. + χ (PDO) lis. — χ (PDO). Pag. 166. lig. 3. $z^{n-1}dx$ lis. $z^{n-1}dz$, lig. 5. $x^{\theta+1}dx$ lis. $x^{\theta-1}dx$. Pag. 174. lig. 3. $ffgr$ lis. $ffqr$. Pag. 183. lig. dern. $R^{\mu+1}$ lis. $R^{\mu+2}$. Pag. 204. lig. 3. $c+sz^{\frac{1}{2}n}+z^{n}$ lis. $c+sz^{\frac{1}{2}n}+gz^{n}$. Pag. 206. lig. 1. $\frac{4Dx^{3n-1}dx}{r+sx^{n}+gx^{2n}}$ lis. $\frac{4Dx^{3n-1}dx}{r+sx^{2n}+gx^{4n}}$. Pag. 210. lig. 11. $+m^{\lambda-\delta+1}\ldots-m^{\lambda-\delta-1}$ lis. $-m^{\lambda-\delta+1}\ldots+m^{\lambda-\delta-1}$. Pag. 214. lig. 10. *étant* lis. θ *étant*.

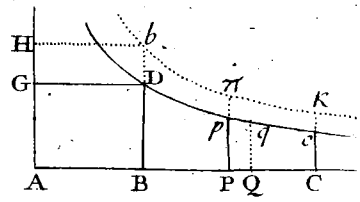
Fautes à corriger dans les Tables.

Pag. 222. lig. 3. $+\frac{3D\times\overline{fk-el}}{ng}$ ③ lis. $-\frac{3D\times\overline{fk-el}}{ng}$ ③. Pag. 326. & 328. lig. 4. |2| lis. |1|. Pag. 355. lig. 4. $\frac{4Dl}{n}$ ② lis. $\frac{3Dl}{n}$ ②. Pag. 363. lig. 7. $15nez^{2n}$ lis. $15neez^{2n}$. Pag. 364. lig. 9. $17ne^{3}$ lis. $27ne^{3}$. Pag. 368. lig. 3. $231nfz^{n}$ lis. $231nf^{3}$. & lig. 13. $\sqrt[4]{-e}$ lis. P : $\sqrt[4]{-e}$. Pag. 384. lig. dern. (CP : CO) lis. + (CP : CO). Pag. 396. lig. pénult. (BP : BO) lis. (AP : AO). Pag. 397. lig. 11. ψ (PBO) lis. + ψ (PBO). Pag. 410. lin. dern. (DP : DO) lis. β (DP : DO).

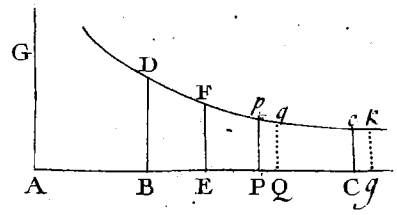
Fig 1



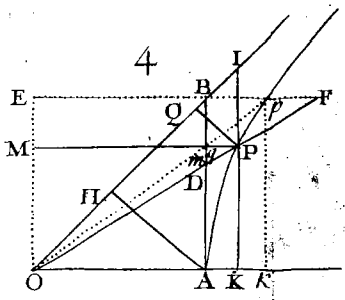
2



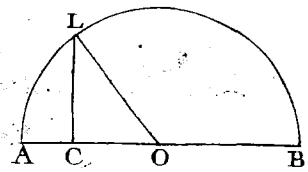
3



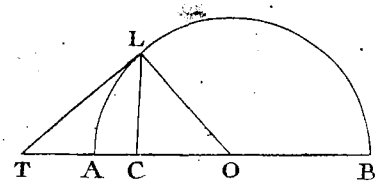
4



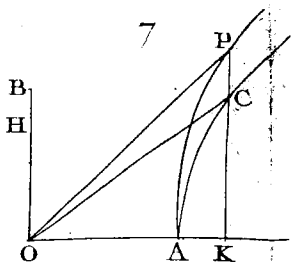
5



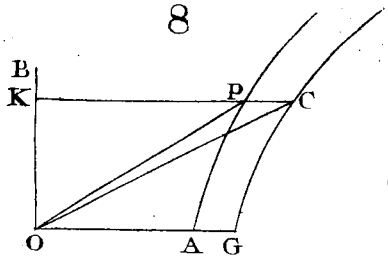
6



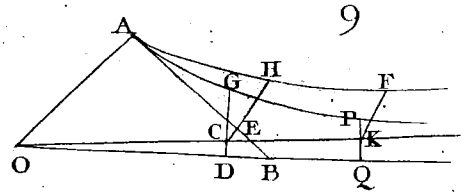
7



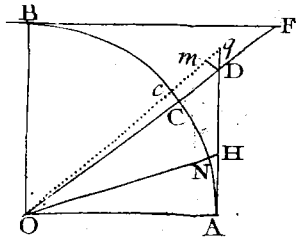
8



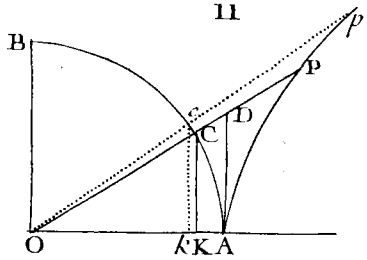
9



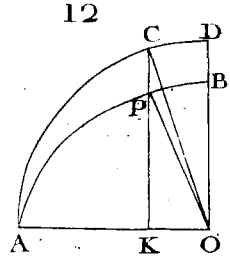
10



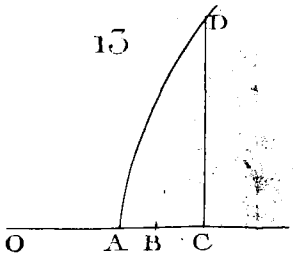
11



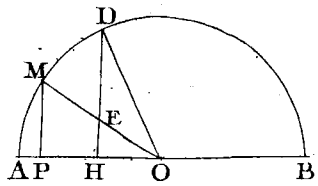
12



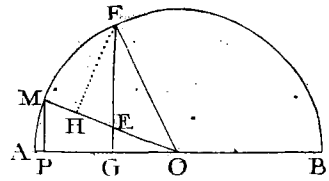
13



14

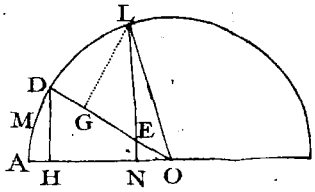


15

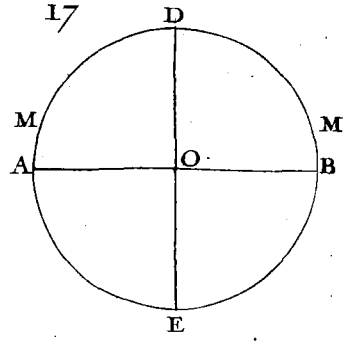


P.L. Charpentier sculp.

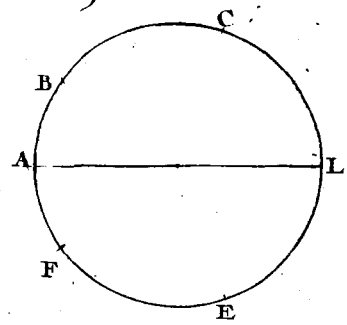
Fig 16



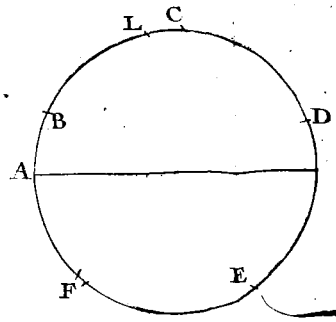
17

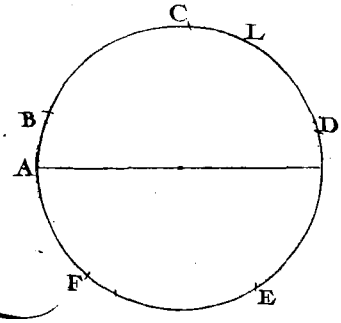


19

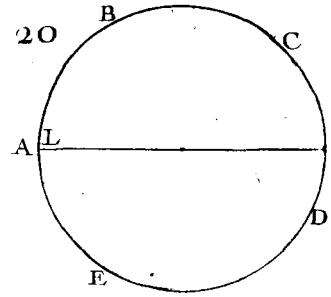


18

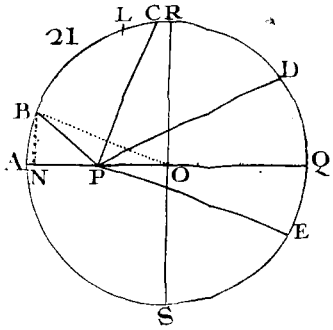




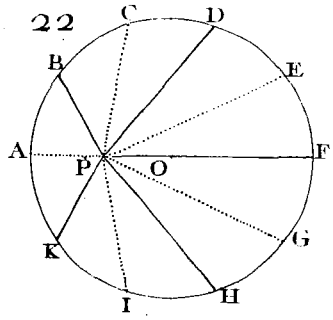
20



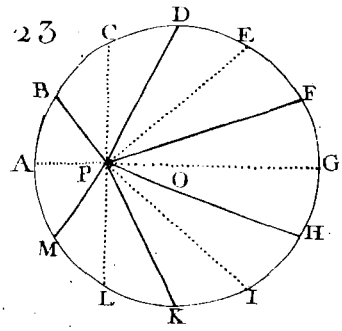
21



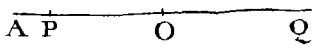
22



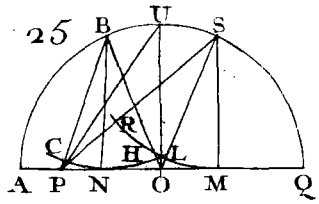
23



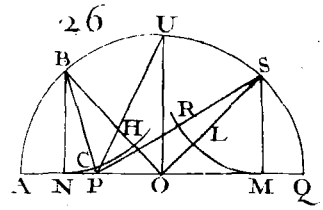
24



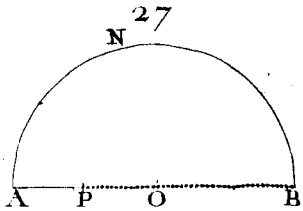
25



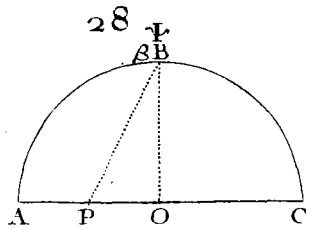
26



27



28



29

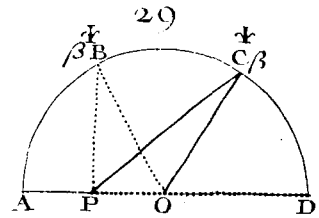
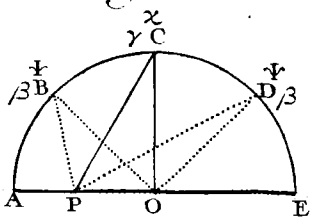
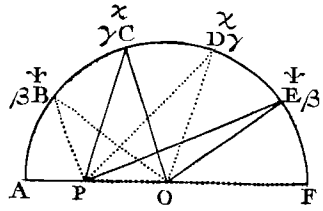


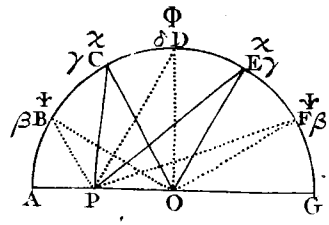
Fig 30



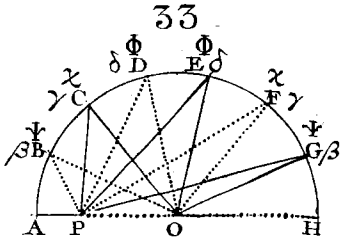
31



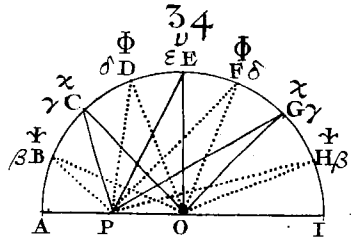
32



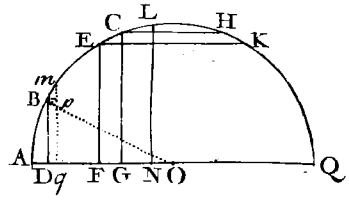
33



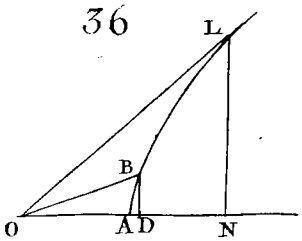
34



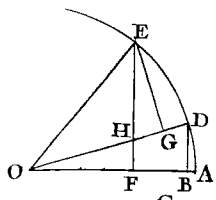
35



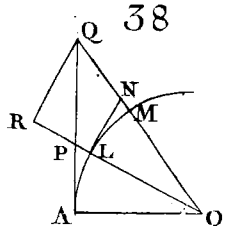
36



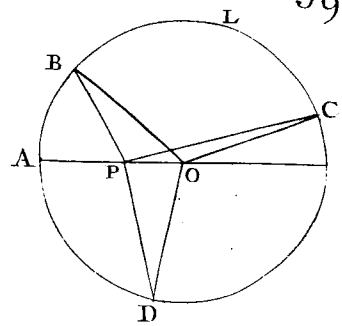
37



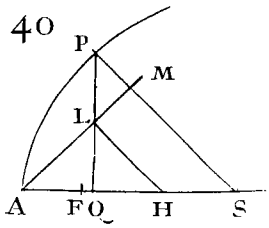
38



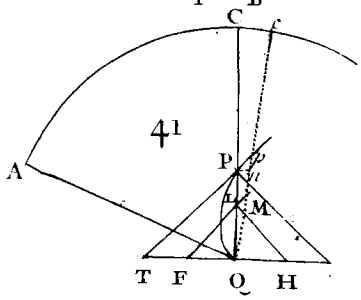
39



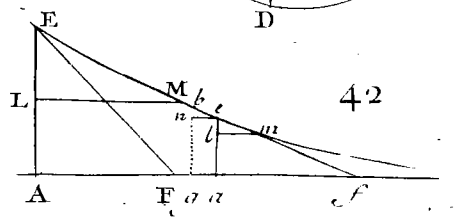
40



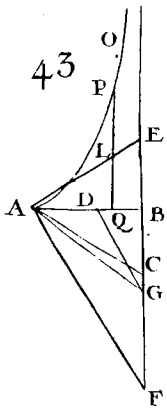
41



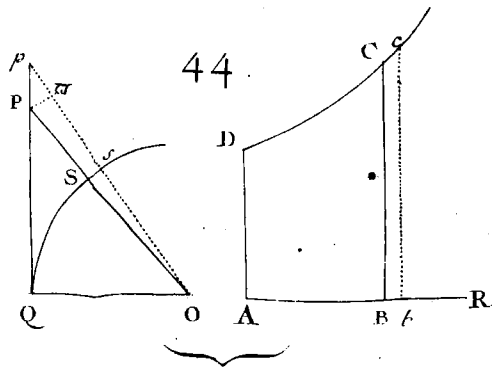
42



43



44



45

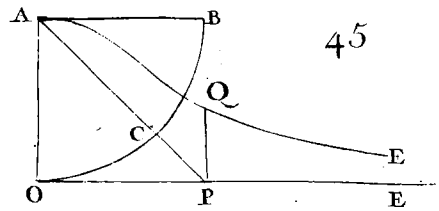
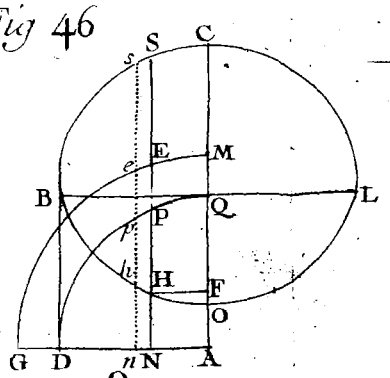
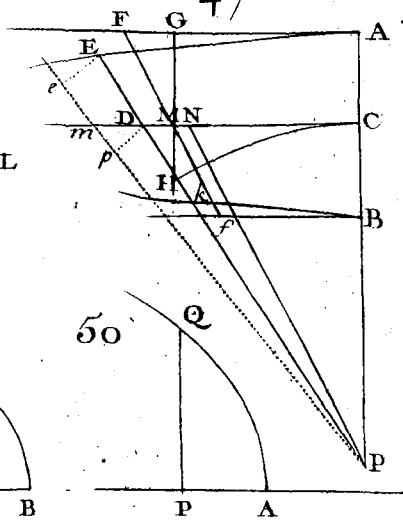


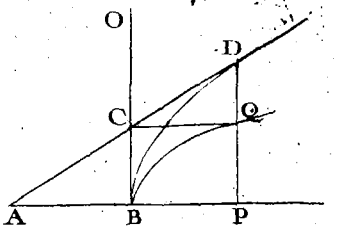
Fig 46



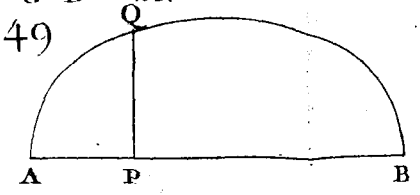
47



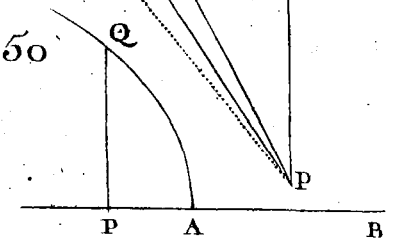
48



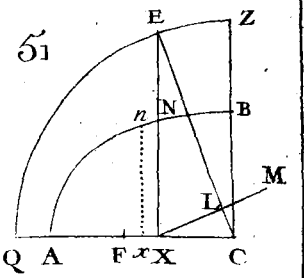
49



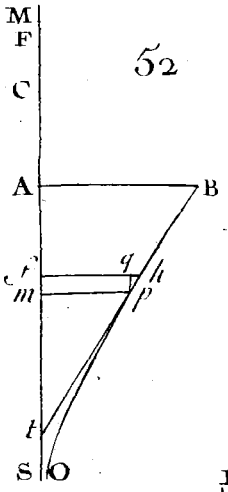
50



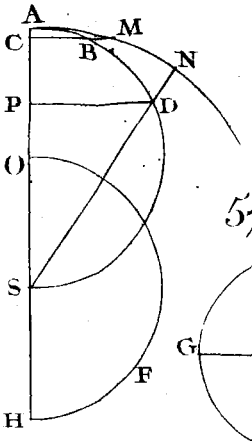
51



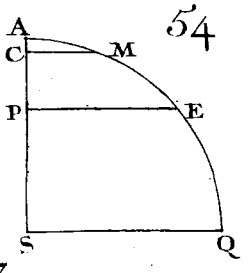
52



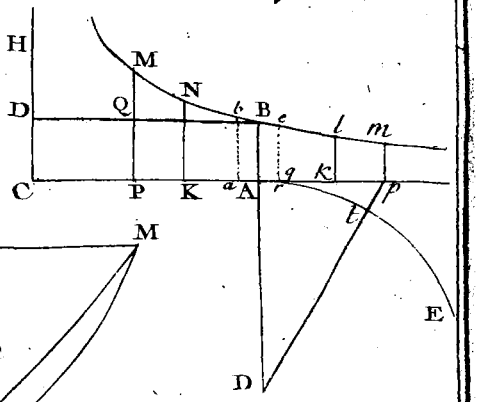
53



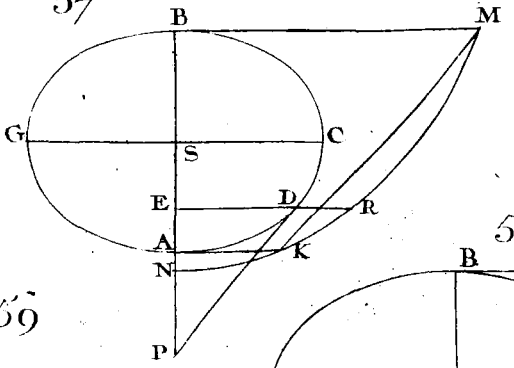
54



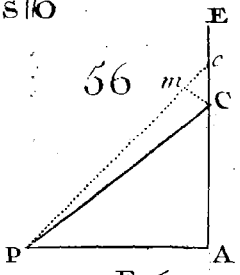
55



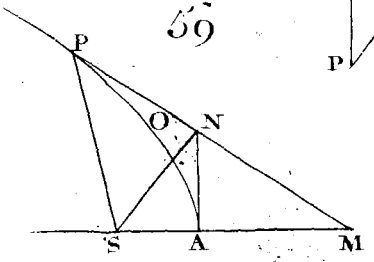
57



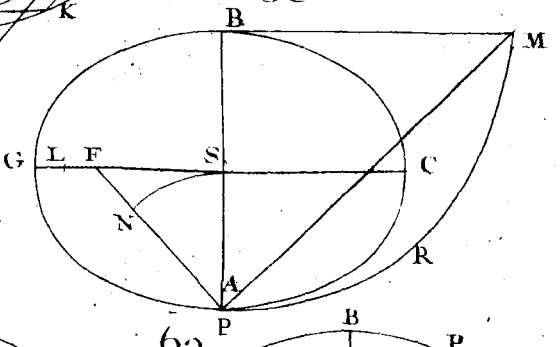
56



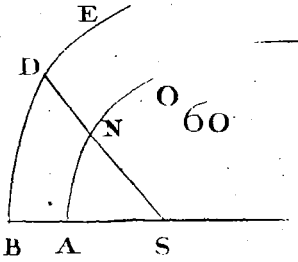
59



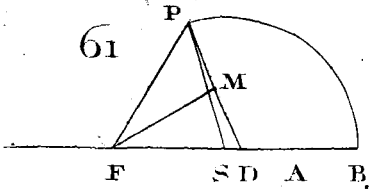
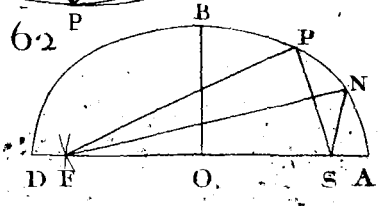
58



60



61



62