CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

U.S.C. AND G. SURVEY,
LIBRARY AND ARCHIVES
Acc. No. 8318

GEOMETRIA PRACTICA.

U.S. C. & GEODETIC
SURVEY
MAY 24 1879
LIBRARY.

117
QA
33
C63
1606

Cum gratia & Priuilegio Sac. Cæs. Maiestat.

Superiorum Permissu.

MOGVNTIÆ,
Ex Typographeo IOANNIS ALBINI.
ANNO M. DC. VI.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Binding intrudes into the text

This has been a co-operative project between the NOAA Central Library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 14, 2008

This Book is the Property of the
U. S. COAST AND GEODETIC SURVEY,
and must be entered on Book Inventory
if not returned before the Expiration
of the Calendar Year.

Q
33
Q2
Inv

PERILLVSTRI AC GENEROSO D.

GEORGIO FVGGERO

SENIORI

BARONI IN KIRCHBERG, ET VVEISSENHORN.

BIBLIOTHECA BENEDICTINA
MAY 1973
LIBRARY

Christophorus Clauius è Societate IESV S. P. D.

VT VENIET IN MANVS TVAS liber hic meus, Generose Domine, veniet & in mentē, vt opinor, Theocriteum illud, βάρδιστος μακάρων ὄρεσι φίλοις: cum lentissimo gradu, quo mira celeritate aduolare debuerat, vix aliquando peruenerit. Serius omnino merito tuo, & voto meo partus hic noster properat ad Patronum suum: verum si editum illum iam grauibus annis reputaueris, facile apud te constitues, à tarda senectute non nisi fœtum tardum expectari potuisse. Nunquam alias tam frequentibus, molestisque morbis conflictatus, nunquā tanto arsi desiderio, vt quod iam diu conceperam, aliquando in lucem exponerē,

experientia, & Pindarica voce doctus, ἀπεσσίκτων ἐρώτων ὀξυτέρας εἶναι μανίας. Obuersabaris enim noctes, diesque óculis meis, vir amplissimè: & iure tuo, vt iam affecta perfecta tibi traderem, flagitare videbaris. Non exiguam vim pecuniæ gentilitia liberalitate ad mensas deposueras, paratam in vsus, expensasq; cudendi libri: res monebat, vt diligentia mea minus prompta non esset munificentia tua. Accedebat quod onus Ætna grauius imposuerat obseruantia tua singularis in me: quo aliqua ex parte qua ratione leuari possem alia, non videbam. Vir enim in Mathematicis non vulgari cum laude exercitatissimus, tanto in honore habuisti semper labores, & libros meos, vt ijs, qui te probe, meque norunt penè miraculo possis esse. Si enim Clauij libros in manibus haberes eo consilio: vt amici tui scripta, quod potes, redderes meliora: doctrinam tuam omnes agnoscerent, laudarēt beneuolentiā; Sed à te tanto viro in Mathematicis partus tenues, nec operæ multæ assidua versari manu, hoc illud est, quod jure mirari quis possit: hoc non obscurum indicium, à te mea, quasi egregium, eximiumque aliquid sint, existimari. A qua præstantia quantum absim, quia video: ideo intelligo maximum esse studium in me tuum: à quo si præter meritum honestor, pro merito certe ita obstringor, vt quæ maxima est viribus meis grati animi testificatio, minima sit pro beneficio tuo. Hanc tamen qualemcunque gratæ mentis in te significationē extare quam primum volebam, cum præsertim ad has rationes accessio fieret aliarum, quæ apud optimum quemq; plurimum semper valere cō-

sueue-

sueuerunt. Ego enim has viuendi rationes, & institutа secutus, ad cuius alterius patrocinium meos libros adlegarem, nisi ad illum, quem vniuersus nostræ Societatis ordo acerrimũ sui propugnatorem, & amantissimum patronum semper expertus est? Familiaris igitur tibi cum sit tutela nostrum, mea hæc ab inuidorum, ignarorumq; morsibus vindicabis, non auctoritate modo vrgens aduersarios, sed etiam doctrina. Qua cogitatione sum permotus, vt tibi præcipuè Geometriam Practicam destinarem. Iis etenim, qui nostris in studiis non admodum desudarunt, si quid offeras tale, magna cura explicanda prius est, & commendanda per epistolam libri doctrina, ne se contemptos humilitate muneris arbitrentur. Tu, vt hoc duntaxat vnum legis, Geometria Practica; quantum vtilitatis, voluptatisque lateat in toto libro, optimè peruides. His igitur assiduis cogitationibus, quasi tot facibus inflammatus, ætatem, valetudinemq; aduersam, Deo propitio, tandem vici; & per hæc locorum interualla opus ad te tuũ venire iubeo. Tuum, inquam: & quia virtus, liberalitasque tua illud asseruere tibi: & quia ab eo scriptum est, qui tuus est. Quod si gratum fuisse tibi intelligam, laborum meorum fructum cumulatum feram, cum amantissimum mei re non ingrata donauerim. Vale.

ROMÆ PRIDIE IDVS SEPTEMB.
cIↃ. cI. CIIII.

CLAVDIVS AQVAVIVA SOCIETATIS IESV Præpositus Generalis.

CVM opus hoc Geometriæ Practicæ, à P. Christophoro Clauio Societatis nostræ Theologo compositum, & in octo libros distributum, tres eiusdem Societatis Theologi, quibus id commisimus, recognouerint, ac in lucem edi posse probauerint; facultatem concedimus, vt typis mandetur, si ita Reuerendissimo D. Vicesgerenti, ac Reuerendiss. P. M. sacri Palatij videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ 23. Maij 1604.

Claudius Aquauiua Societatis IESV Præp. Gen.

Imprimatur si placet R. P. M. S. Palatii.

B. Gypsius Vicesgerens.

EGO Theodosius Rubeus Priuernas S. Theol. & I. V. D. ex commissione Reuerendiss. P. M. Ioannis Mariæ Brasichellens. Sac. Palat. Apost. Mag. sedula, qua potui diligentia, euolui Geometriæ Practicæ libros octo, grauissimi, & doctissimi viri Christophori Clauii Bambergensis Societatis IESV, in qua talis inuentionum vbertas, & subtilissima inuentorum demonstratio elucet, vt tanto viro, tantoque ingenio digna censeatur. Ex quo facilè deprehendi potest, in ea nihil Catholicæ Religioni, bonisque moribus dissonum inueniri, eamque in lucem non edere, esset patrisfamilias creditum talentum in terra defodere. Et ita ego censeo, saluo semper saniori iudicio. Dat. ex meo studio hac die 16. Iulii 1604.

Ego Theodosius Rubeus, qui supra, manu propria.

Imprimatur.

Fr. Paulus de Francis de Neap. socius Reuerendiss. P. Magistri sacri Palatii Apost.

INDEX

INDEX
CAPITVM, PROBLEMATVM, AC PROPOSITIONVM HORVM VIII. LIBRORVM.

PRIMI LIBRI CAPITA.

I. INSTRVMENTI *partium constructio, atque vsus multiplex.* 4. vsq; ad 14

II. *Constructio Quadrantis, in quo Minuta quoque ac Secunda deprehendantur, etiamsi gradus in ea secti non sint. Et quo pacto eadem Min. & Sec. obtineri possint in Quadrante in 90. gradus distributo. Ac denique qua ratione ex data recta in paucissimas partes aequales diuisa abscindi possint partes millesimæ, &c.* 14. vsq; ad 44

III. *Problemata varia triangulorum rectilineorum.* 44. vsque ad 50

SECVNDI LIBRI PROBLEMATA.

I. DISTANTIAM *in plano, sive accessibilis ea sit, sive inaccessibilis, per duas stationes in eodem plano factas, per quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipsam elicere.* 51

LEMMA. Datis duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire. 55

II. *Altitudinem inaccessibilem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoque ipsam eruere, etiamsi extremus eius terminus non cernatur.* 57

III. *Ex vertice montis, aut turris, in cuius summitate duæ stationes fieri possint, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipsius montis turrisve dimetiri. Atque hinc ipsam quoque distantiam à turris basi perpendiculo montis ad signum illud inuestigare.* 59

IV. *Ex vertice montis, vel turris, per duas stationes in aliqua hasta erecta, vel in duabus fenestris turris, quarum vna supra aliam existat, factas, è quibus signum aliquod in Horizonte videri possit, altitudinem ipsius montis, aut turris per quadrantem metiri. Atq; hinc distantiam quoque a perpendiculo montis, vel turris, vsque ad signum visum cognoscere.* 62

V. *Ex vertice montis, aut turris, altitudinem ipsius, si in plano, cui insistit, spatium aliquod è directo mensoris notum sit, per quadrantem deprehendere.*

VI. *Distantiam ab oculo, vel pede mensoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas stationes in plano factas, per quadrantem metiri.*

VII. *Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, sive illud ad Horizontem rectum sit, sive inclinatum, per quadrantem metiri.*

VII

VIII. *Longitudinem lineæ rectæ, quando mensor in uno eius extremo; vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis sit in eo extremo ad planum in quo linea iacet, existens alterum extremum videre potest, per Quadrantem comprehendere.* 68

IX. *Longitudinem ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota per quadrantem dimetiri.* 68

X. *Longitudinem transuersam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inspici potest, notam efficere per quadrantem.* 69

XI. *Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna sit sub altera ad perpendiculum, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.* 70

XII. *Longitudinem rectæ è directo mensoris positæ, cuius extremum vtrumq;, vel alterum non appareat, nisi ad dexteram, vel sinistram recedat mensor, per quadrantem comprehendere.* 71

XIII. *Distantiam alicuius signi in Horizonte positi à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere.* 72

XIIII. *Altitudinem inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dexteram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per quadrantem explorare.* 72

XV. *Altitudinem inaccessibilem, quando neque distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neque è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere.* 73

XVI. *Altitudinem maiorem ex minori cognita per duas stationes in summitate, vel in duabus fenestris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines colligere.* 74

XVII. *Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo basis maioris cerni possit, per quadrantem perscrutari.* 75

XVIII. *Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris non cerni possit, ope quadrantis peruestigare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines eruere.* 75

XIX. *Altitu[illegible]norem ex maiori incognita, dummodo basis minoris videri possit per quadra[illegible]rare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines coniicere.* 76

XX. *Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadrantem cognoscere.* 76

XXI. *Altitudinem, cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.* 77

XXII. *Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum beneficio quadrantis efficere cognitam.* 79

XXIII. *Profunditatem putei, vel ædificii cuiuscunque ad perpendiculum erecti,*

si modo

si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadrantem reperire. 80

XXIV. *Profunditatem vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valdè inaequalis, eiusque terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per quadrantem scrutari.* 82

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

Quadrati Geometrici constructio. 84

I. *Altitudinem Solis, vel stellae cuiusuis per quadratum Geometricum obseruare.* 87

Tabula Gnomonica. 91

II. *Distantiam inter te, & signum quodcunque in plano Horizontis positum, per quadratum perueſtigare.* 96

Eandem beneficio baculi, vel arundinis cognoscere. 100

III. *Distantiam in plano per duas stationes in eodem plano factas, per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiam si infimum eius extremum non cernatur.* 100

IIII. *Distantiam eandem per duas stationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perscrutari.* 103

V. *Altitudinem cuiuslibet rei erectae per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati coniicere.* 106

VI. *Altitudinem eandem, etiamsi eius distantia ab oculo mensoris neque data sit, neque inuenta, per duas stationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere.* 107

VII. *Altitudinem eandem, quando distantia ab oculo mensoris neque data est, neque inuenta, neque è directo altitudinis duae stationes fieri possunt, per duas stationes in hasta aliqua erecta factas, per quadratum indagare.* 111

SCHOLIVM. Eandem altitudinem, eiusque distantiam ab oculo mensoris, vna cum hypotenusa ab oculo ad fastigium altitudinis extensa, ope quadrati stabilis per vnicam stationem venari, etiamsi solum fastigium rei erectae cernatur adeò vt scholium hoc omnia praestet, quae in problem. 3. 4. 5. 6. & 7. per plures stationes inuestigauimus. 112

VIII. *Altitudinem turris, aut montis, ex eius summitate per quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti aequidistante duae stationes fieri possunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur.* 114

IX. *Altitudinem turris, vel montis, ex eius summitate per duas stationes in hasta aliqua erecta factas per quadratum inuestigare, quando signum aliquod in Horizonte positum videri potest.* 116

SCHOLIVM. Eandem altitudinem ex eius vertice per vnicam stationem, vna cum distantia à turre vel perpendiculo montis ad signum in Horizonte positum, per quadratum stabile metiri. 117

X. *Ex summitate turris, vel aliqua eius fenestra, distantiam à base turris ad signum propositum in Horizonte per quadratum cognoscere.* 119

XI. *Ex altitudinis alicuius fastigio, etiamsi altitudo sit mensoris statura, distantiam*

tiam inter duo signa in plano, cui altitudo insistit, si ea distantia è directo mensoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni possit, per quadratum comprehendere. 121

XII. *Longitudinem in Horizonte extensam, per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem recedere potest ad locum, è quo alterum extremum appareat.* 121

XIII. *Longitudinem in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri, neque vlla adsit altitudo, dummodo ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumque extremum appareat.* 122

XIV. *Altitudinem montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam, ac turrim cognitum est, per quadratum coniicere.* 122

XV. *Distantiam ab oculo, vel pede mensoris, (vbicunque existat,) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per quadratum exquirere.* 123

XVI. *Interuallum inter duo signa, vel puncta in quolibet plano, siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri.* 126

XVII. *Interuallum transuersum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri potest, per quadratum metiri.* 127

XVIII. *Distantiam alicuius signi in Horizonte positi à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque mensor existat.* 128

XIX. *Altitudinem inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum rectam lineam accedere possit mensor aut recedere, vt duo stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare.* 128

XX. *Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.* 129

XXI. *Altitudinem maiorem ex minori incognita, si tamen basis maioris cerni possit, per quadratum venari.* 130

XXII. *Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris cerni non possit, per quadratum scrutari.* 130

XXIII. *Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris appareat, per quadratum elicere.* 130

XXIV. *Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.* 131

XXV. *Altitudinem cuius basis imposita sit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.* 131

XXVI. *Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsq; ad basem altitudinis monti imposita, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam.* 132

XXVII. *Pro-*

XXVII. *Profunditatem putei, vel edificii cuiusuis ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratum efficere notam.* 134

XXVIII. *Profunditatem vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valdè inaequalis, & eius terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per quadratum cognoscere.* 135

XXIX. *Distantiam inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantia videri potest.* 137

XXX. *Altitudinem turris, aut alterius rei, per baculum indagare.* 137

XXXI. *Distantiam in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis, beneficio Normae adinuenire.* 138

XXXII. *Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inuestigare.* 139

XXXIII. *Distantiam in plano Horizontis, quae non sit valdè magna, alio modo facillimo dimetiri* 139

XXXIV. *Altitudinem cuiusque rei erectae ex eius umbra, quam, Sole lucente, proiicit, si nota fuerit, per quadratum deprehendere.* 140

XXXV. *Longitudinem umbrae ab altitudine, Sole lucente, proiectae, quando altitudo est cognita ope quadrati apertam, & manifestam facere.* 141

XXXVI. *Distantiam in Horizonte inter mensorem, & signum aliquod visum beneficio simplicissimi cuiusdam instrumenti comperire.* 141

XXXVII. *Distantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, ope predicti instrumenti coniicere.* 142

XXXVIII. *Longitudinem ascensus alicuius montis, si eius cacumen ab oculo in radice constituto videatur, eiusdem instrumenti beneficio cognoscere.* 143

XXXIX. *Altitudinem, ad cuius basem pateat accessus, beneficio speculi plani, una cum distantia speculi a cacumine altitudinis deprehendere.* 144

XL. *Altitudinem inaccessibilem beneficio speculi plani, vnà cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quam a cacumine altitudinis, cognoscere.* 145

XLI. *Altitudinem monti impositam, si modo altitudinis basis possit conspici; vel portionem superiorem alicuius turris, beneficio speculi plani efficere notam.* 147

XLII. *Situm cuiusliber campi, aut atrii, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiusuis in plano describere, si è duobus locis intra ipsum situm assumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certè ipsi anguli in aedificio, aut vrbe, vel loca regionis videri possint: simulque latitudines laterum campi, vel aedificii, nec non distantias inter angulos, & vtrumuis locorum assumptorum, in data mensura cognoscere. Quod si talia duo loca intra situm eligi nequeant, idem efficere, dummodo situm possimus circumire.* 147

XLIII. *Longitudinem trabis ad Horizontem inclinata, cuius portio superior tantum conspiciatur, vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigii supra Horizontem, per quadratum metiri.* 151

XLIV. *Visis duarum turrium summitatibus, etiamsi bases propter aedificia interiecta occultentur, distantiam tam inter earum bases, quam inter earundem fastigia, vnà cum ipsarum altitudinibus, ac distantiis à mensore coniicere.* 151

SCHOLIVM. Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas quando earum extrema videntur. 152

XLV. *Spatium terræ inæquale pro diuendis aquis librare: aut etiam, si libet, Horizonti æquidistans efficere.* 153

QVARTI LIBRI CAPITA.

I. *De area Rectangulorum.* 157
II. *De area Triangulorum.* 158
III. *De area Quadrilaterorum non rectangulorum.* 169
IIII. *De area multilaterarum figurarum irregularium.* 171
V. *De area multilaterarum figurarum regularium.* 175
VI. *De dimensione circuli ex Archimede.* 181

PROPOSITIO I. Area cuiuslibet circuli æqualis est triangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum semidiametrum circuli, alterum verò peripheriæ eiusdem circuli æquale est. 182

IOSEPHI Scaligeri error hoc in loco. 184

PROPOSITIO II. Cuiuslibet circuli peripheria tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ quidem minor est decem septuagesimis, hoc est, septima parte diametri, maior verò decem septuagesimis primis. 185

COROLLARIVM. Diameter per $3\frac{1}{7}$. multiplicata gignit numerum maiorem circumferentia: multiplicata verò per $3\frac{10}{71}$. facit numerum circumferentia minorem. E contrario circumferentia diuisa per $3\frac{1}{7}$. procreat numerum minorem diametro: diuisa verò per $3\frac{10}{71}$. producit numerum diametro maiorem. 191

PROPOSITIO III. Circulus quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proximè. 191

VII. *De area circuli, inuentioneque circumferentiæ ex diametro & diametri ex circumferentia.* 192

PROPOSITIO I. Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ. 194

PROPOSITIO II. Proportio quadrati ex diametro cuiuslibet circuli descripti ad circuli aream maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. 195

PROPOSITIO III. Proportio quadrati à circumferentia circuli cuiusuis descripti ad circuli aream maior est, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7. 196

VIII. *De area segmentorum circuli.* 199

I. Data circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoscere. 201

II. Dato arcu cuiusuis circuli, diametrũ circuli in numeris inuestigare. 201

III. Datis diametris duorum circulorum, vel circumferentiis: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum similium, similiterque positarum; quam proportionem circuli, vel figuræ inter se habeant, cognoscere. 201

IIII. Datis pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ sint: Item pluribus figuris similibus, similiterque positis, quarum latera homologa sint nota; inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propositis æqualis sit: Item latus reperire, cuius figura similis, similiterque posita, æqualis sit omnibus propositis figuris. 202

V. Aream

V. *Aream propositæ Ellipsis indagare.* 202
VI. *Aream propositæ Parabolæ inuestigare.* 213

QVINTI LIBRI CAPITA.

I. *De area Parallelepipedorum, Prismatum, & Cylindrorum.* 204
II. *De area Pyramidum, & Conorum.* 206
III. *De Area frusti Pyramidis, & Coni.* 207
SCHOLIVM. De area variorum solidorum. 209
IV. *De Area quinque corporum Regularium.* 210
V. *De Area sphæræ, inuentioneque superficiei conuexæ eiusdem sphæræ.* 218
PROPOSITIO I. Quam proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuscunque, eandem habent duæ similes partes alterius cuiusuis magnitudinis. 218
PROPOSITIO II. Rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra comprehensum, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdem sphæræ æquale. 219
PROPOSITIO III. Eadem est proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem sphæræ, quæ circumferentiæ maximi circuli ad diametrum. Item eadem est proportio quadrati diametri maximi circuli in sphæra ad superficiem sphæræ, quæ diametri ad circumferentiam eiusdem circuli maximi. 220
PROPOSITIO IV. Quadratum circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 221
PROPOSITIO V. Quadratum diametri circuli in sphæra maximi ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 221
PROPOSITIO VI. Proportio cubi ex circumferentia maximi in sphæra circuli descripti ad sphæram, maior est, quam 29837 4. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49. 221
PROPOSITIO VII. Cubus diametri sphæræ ad sphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem verò, quam 426. ad 223. 222
VI. *De Area segmentorum sphæræ.* 229
VII. *De Area sphæroidis, eiusdemque portionum.* 232
VIII. *De Area Conoidis Parabolici.* 232
IX. *De Area Conoidis Hyperbolici.* 233
X. *De Area Doliorum.* 233
XI. *De Area corporum omnino regularium.* 234
XII. *De superficie conuexa coni, & cylindri recti.* 235

SEXTI LIBRI PROPOSITIONES.

I. *Si magnitudo in quotuis partes secetur vtcunque, & alia quapiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales; habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis simul ad reliquas omnes partes simul, eandem proportionem, quam totidem partes posterioris magnitudinis simul, ad reliquas omnes partes simul. Et si qualibet pars prioris magnitudinis secetur in duas partes vtcunque, secetur autem & pars posterioris magnitudinis illi parti respondens in alias duas partes duabus illis proportionales; erunt quoque ibidem tota magnitudines secta proportionaliter.* 237

II. *Dato rectilineo, super datam rectam inter alias duas interceptam, constituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppositum inter duas easdem rectas interceptum, data recta sit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuscunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri potest: quod ex ipsa problematis solutione cognoscetur.* 239

III. *Diuiso rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto; rectas lineas ipsis triangulis ordine proportionales inuenire.* 246

IV. *Datum rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis in quam malueris partem vergat.* 248

SCHOLIVM. Datum rectilineum ex dato angulo, vel puncto in latere, in quotuis partes æquales secare. 252

V. *Datum rectilineum per rectam lineam data recta parallelam, in datam proportionem diuidere: ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.* 258

SCHOLIVM. Datum rectilineum in quotuis partes æquales per lineas cuilibet rectæ parallelas distribuere. 260

VI. *Si duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuersas partes vergant: Recta oppositos angulos connectens à latere illo communi bifariam secatur.* 260

VII. *Si in triangulo basi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur sese intersecantibus: Habebit vtrinque harum rectarum segmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum, eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuisum ad partem eius superiorem. Recta autem ex tertio angulo per intersectionem dictarum rectarum extensa secabit vtramque parallelam bifariam.* 261

VIII. *Si in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppositorum laterum: Recta ex angulo reliquo per intersectionem earum deducta secat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum segmentum prope angulum ad reliquum segmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab intersectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.* 261

IX. *Si in triangulo ducatur recta vtcunque duo latera secans: Erit totum triangulum ad abscissum triangulum, vt rectangulum sub duobus lateribus sectis totius trianguli comprehensum, ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi, quæ priorum segmenta sunt, comprehensum.* 262

X. *Datum triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.* 262

XI. *Datum triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.* 263

XII. *Datum triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.* 264

XIII. *Datum parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppositis æquidistantes diuidere.* 265

XIV. *Datum parallelogrammum per rectam ex puncto sive extra, sive intra ipsum, sive in aliquo latere dato ductam bifariam diuidere.* 265

XV. *Inter duas rectas, duas medias proportionales, prope verum, inuenire: ex Herone & Apollonio Pergæo: ex Philone Byzantio, ac Philopono: ex Diocle: ac postremo ex Nicomede per lineam conchoideos.* 266. *vsque ad* 272.

XVI. *Datam figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.* 272

XVII. *Datam figuram solidam qualemcunque ex ijs, de quibus Eucl. in libris Stereometria agit, augere, vel minuere in proportione data.* 273

XVIII. *Inter duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.* 274

LEMMA. Si sint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum sub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehensum, æquale est cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ propinquior est. 275

XIX. *Radicem cuiuslibet generis extrahere.* 276

EXTRACTIO radicis quadratæ. 279

EXTRACTIO radicis cubicæ. 280

EXTRACTIO radicis surdesolidæ. 281

REGVLA propria extractionis radicis cubicæ. 283

XX. *In numeris non quadratis, non cubis, non zensizensis, non surdesolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.* 284

XXI. *Radicem cuiusque generis ex data minutia extrahere.* 286

XXII. *Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometricè inuenire.* 289

SEPTIMI LIBRI
Propositiones.

I. *Area cuiuslibet trianguli æqualis est rectangulo comprehenso sub perpendiculari à vertice ad basem protracta, & dimidia parte basis. Item rectangulo comprehenso sub semisse perpendicularis, & tota base. Vel denique semisse rectanguli sub tota perpendiculari, & tota base comprehensi.* 292

II. Area

II. *Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.* 293

III. *Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale est perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterum verò æquale ambitui eiusdem figuræ.* 294

IV. *Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.* 294

V. *In omni triangulo rectangulo, si ab vno acutorum angulorum vtcumque ad latus oppositum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius segmentum, quod prope angulum rectum existit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto segmento lateris oppositam.* 295

VI. *Isoperimetrarum figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.* 296

VII. *Proposito triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum priori Isoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, describere.* 297

VIII. *Duorum triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basem, quorum vnius duo latera sint æqualia, alterius verò inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia sunt.* 297

IX. *In similibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, tanquam ab vna linea, descriptum, æquale est quadratis duobus simul, quæ à reliquis homologis lateribus, tanquam ex duabus lineis, ita vt qualibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, describuntur.* 298

X. *Datis duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant, duoque latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius; super eisdem basibus duo alia triangula Isoscelia inter se quidem similia, prioribus verò simul sumptis Isoperimetra simul sumpta, constituere.* 299

XI. *Duo triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, vtraque simul maiora sunt duobus triangulis Isoscelibus, vtrisque simul, quæ habeant easdem bases cum prioribus, sintque dissimilia quidem inter se, at Isoperimetra prioribus duobus, necnon quatuor latera inter se habeant æqualia.* 300

XII. *Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula.* 303

XIII. *Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus sibi Isoperimetris maior est.* 306

COROLLARIVM. Circulus absolute omnium figurarum rectilinearum sibi Isoperimetrarum maximus est. 306

XIV. *Area cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo contento sub perpendiculari à vertice ad basem protracta, & tertia parte basis.* 307

XV. *Area cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, & circa sphæram aliquã circumscriptibilis, hoc est, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad eius bases productæ sunt æquales, æqualis est solido rectangulo contento sub vna perpendiculariũ, & tertia parte ambitus corporis.* 307

XVI. *Area cuiuslibet sphæræ æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphæræ, & tertia parte ambitus sphæræ.* 308

XVII. *Sphæræ omnibus corporibus sibi Isoperimetris, quæ planis superficiebus continentur, circaque alias sphæras circumscriptibilia sint, hoc est, quorum omnes perpendiculares*

culares ad basis productæ ab aliquo puncto medio sint æquales, maior est. 310

XVIII. *Sphæra omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ superficiebus conicis continentur, ita vt latera omnia conica sint æqualia, maior est.* 311

XIX. *Sphæra quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est.* 313

XX. *Dato semicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæ sextæ, &c. rectangulum constituere Isoperimetrum, & æquale, si linea recta peripheriæ detur æqualis.* 313

XXI. *Dato triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque Isoperimetrum constituere.* 314

XXII. *Dato rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis maius non esse semisse dimidiati ambitus dati rectilinei.* 316

APPENDIX De circulo per lineas quadrando. 317

QVADRATVRA Arabum, quam Iosephus Scaliger in suis cyclometricis approbat, Alberti Dureri, & quæ Campano perperam ascribitur, falsa est. 318

QVADRATVRA Hipocratis Chij per lunulas, acuta quidē, sed falsa quoque est. 318

I. QVADRATRICEM lineam describere. 320

COROLLARIVM. Si ex centro Quadratricis recta ducatur secans quadrantem, & quadratricem: ita se habebit arcus quadrantis ad eius arcum abscissum, vt semidiameter ad perpendicularem ex puncto quadratricis demissam. 323

II. Si quadrantis, & quadratricis idem centrum sit: erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis quadratricis continuè proportionales. 324

COROLLARIVM I. Rectam reperire arcui quadrātis, ac proinde & semicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem. 325

COROLLARIVM II. Si basis Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli: erit eius latus quartæ parti circumferentiæ illius circuli æquale, &c. 326

COROLLARIVM III. Si duæ lineæ eandem proportionem habeant, quam latus Quadratricis, eiusque basis, minor autem fiat semidiameter alicuius circuli: erit maior quartæ parti circumferentiæ illius circuli æqualis, &c. 326

III. Dato circulo quadratum æquale constituere. 327

FACILIS inuentio rectæ lineæ, quæ quartæ parti circumferentiæ dati circuli sit æqualis. 327

FACILIS inuentio quadrati dato circulo æqualis. 328

IV. Dato quadrato circulum æqualem describere. 329

COROLLARIVM. Circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem: Et contra, cuicunque circulo figuram rectilineam qualemcunq; æqualem constituere. 329

V. Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem. 329

OCTAVI LIBRI
Propositiones.

I. *Figura regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus.* 330

LEMMA I. Si fuerint quatuor quantitates, & minor sit excessus inter primam & secundam, quam inter tertiam & quartam, sitque prima non minor, quam tertia, maior verò, quam secunda, itē tertia maior, quam quarta: Erit minor proportio primæ quantitatis ad secundam, quam tertiæ ad quartam. 331

LEMMA II. Si circuli arcum duæ rectæ tangant, in vno puncto coeuntes, & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipsum in partes totidem æquales: Erunt duæ illæ tangentes omnibus hisce chordis simul maiores. 332

LEMMA III. Si circuli arcum tres rectæ tangant, in duobus punctis coeuntes, ita vt contactus punctum medium diuidat arcum bifariam, in eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter se æquales; Erunt tres illæ tangentes omnibus his simul sumptis maiores. 332

CARDANI demonstratio figuræ regularis circulo circumscriptæ ambitum maiorem esse, quam circuli ambitum. 333

II. *Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ Ex Pappo.* 334

III. *Arcus cuiusuis circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra, arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, similes sunt.* 335

IV. *Dato quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo, facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Eucl. constituere.* 336

V. *Dato Rectangulo supra datam rectam æquale rectangulum, facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.* 339

VI. *Dato rectilineo æquale rectangulum, facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.* 339

VII. *Si ex duobus punctis ad vnum punctum cuiusuis linea recta, quæ communis sectio sit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectæ breuiores quibuscunque alijs duabus rectis, quæ ex ijsdem duobus punctis ad aliud punctum eiusdem lineæ rectæ ducuntur.* 340

SCHO-

SCHOLIVM. Angulus incidentię apud Perspectiuos angulo reflexionis æqualis est. 340

VIII. *Si quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates post tres operationes imperatas reliqua sint, conijcere.* 341

IX. *Datum numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.* 342

X. *Propositis duabus minutijs inæqualibus: minutia cuius numerator ex illorum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem est minore, minor vero maiore.* 343

XI. *Si duo numeri inter se primi non sint ambo quadrati, aut cubi: Neque eorum aquè multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et si eorum aquè multiplices aliqui sint ambo quadrati, aut cubi: etiam ipsi erunt quadrati, aut cubi.* 343

XII. *In omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere.* 344

XIII. *Datis tribus punctis, per qua circulus describendus sit, inuenire alia puncta, per qua idem circulus transire debeat.* 344

XIV. *Dato excessu diametri Quadrati supra latus: Item dato excessu diametri Rhombi supra latus, vel lateris supra diametrum, vna cum vno Rhombi angulo: Dato praterea excessu diametri Rectanguli supra vtrumlibet laterum inaqualium, vnà cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vnà cum proportione eorundem inaqualium laterum: Dato denique excessu diametri Rhomboidis supra vtrumuis laterum inaqualium, vel vtriusuis inaqualium laterum supra diametrum, vnà cum angulo Rhomboidis, & insuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel insuper cum proportione duorum laterum inaqualium: Quadratum ipsum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides constituere.* 345

XV. *In rectangulo parallelogrammo sumptis excessibus, quibus diameter duo latera superat: Rectangulum sub differentia excessuum, & minore excessu bis sumptum, vnà cum quadrato minoris excessus bis sumpto, aquale est quadrato recta, qua minus latus minorem excessum superat.* 348. & 349

XVI. *Datis excessibus, quibus diameter Rectanguli vtrumque latus superat: vtrumque latus, & diametrum inuenire.* 349

XVII. *Dato excessu diametri Rectanguli supra maius latus, & excessu maioris lateris supra minus: vtrumque latus, ac diametrum inuenire.* 351

XVIII. *Secta linea recta vtcunque, adiungere ei versus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compositæ æquale sit quadrato rectæ adiunctæ, vnà cum quadrato rectæ, quæ ex adiunctæ, & proximo segmento prioris lineæ conflatur.* 351

XIX. *Datis duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore descripti non superat: Maiorem ita secare in duas partes inæquales, vt earum quadrata simul sumpta quadrato minoris lineæ sint æqualia.* 352

XX. *Data chorda alicuius arcus, vnà cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vsque educitur: Quot gradus, vel palmos tam arcus, quam semidiameter circuli complectitur, inuenire.* 353

XXI. *In omni triangulo quadratum maximi lateris minus est, quam duplum summæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus descriptorum.* 353

XXII. *Datis tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, nisi quando extremæ à media æqualiter distant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, si omnes tres in vno puncto conueniant, ita vt eius segmenta inter mediam, & extremas sint inter se æqualia, vel datam habeant proportionem.* 354

XXIII. *Cuiuslibet lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcunque, etiamsi circino non accipiatur.* 355

XXIV. *Ex qualibet lineola quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.* 355

XXV. *Angulum datum rectilineum in tres æquales partes partiri.* 356

XXVI. *Si per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum sub segmentis diametri comprehensum æquale duobus rectangulis sub segmentis duorum laterum comprehensis.* 357

COROLLARIVM. In quadrato rectangulum sub segmentis diametri comprehensum, æquale est duobus complementis. 357

XXVII. *Dato centro Ellipsis in linea axis in infinitum producta vnà cum duobus punctis ad easdem partes axis, vel centri, per quæ transire dicatur Ellipsis: Vtrumque axis vtriusque extremum inuenire.* 357

XXVIII. *Si in circuli diametro producta punctum sumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur, à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta perpendiculari comprehensum bifariam. Item si ab eodem puncto in diametro producta assumpto recta ducatur circulum secans, & ab alterutro sectionis puncto ad intersectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari recta iungatur: Recta ex eoaem sectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremum ducta secabit quoque*

quoque angulum à linea secante, & illa alia, quæ per intersectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam. 358

XXIX. *Descriptionem pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes ferè architecti, atque artifices approbant, falsam esse, demonstrare.* 360

SCHOLIVM. Descriptionem eiusdem pentagoni ab aliis nonnullis traditam, falsam quoque esse, demonstrare. 362

XXX. *Inuentionem lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibusdam tradi, demonstrare.* 363

XXXI. *Octogonum æquilaterum, & æquiangulum circulo inscriptum, medio loco proportionale est inter quadratum eidem circulo circumscriptum, & quadratum inscriptum.* 364

XXXII. *Si ex diametro quadrati detrahatur ipsius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter est linea, qua relinquitur, si latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur: vel si idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.* 365

XXXIII. *Octogonum æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemue constituere.* 365

XXXIV. *Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri.* 366

XXXV. *Prismati cuicunque cylindrum æqualem, & Pyramidi conum æqualem: Ac vicissim cylindro Prisma æquale, & cono æqualem Pyramidem constituere.* 367

XXXVI. *Dato cylindro, aut Prismati æqualem conum, vel Pyramidem sub eadem altitudine: Et vicissim dato cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut Prisma eiusdem altitudinis constituere.* 368

COROLLARIVM I. Tam Cylindrum, quam Prisma, mutare in Pyramidem, aut conum: Et Pyramidem tam in cylindrum, quam in prisma æquale conuertere. 368

COROLLARIVM II. Cylindrum, Prisma, Conum, ac Pyramidem commutare in parallelepipedum rectangulum æquale, cuius basis sit quadrata. 369

XXXVII. *Datum cylindrum, vel Prisma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuscunque altitudinis, in æqualem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum reuocare.* 369

XXXVIII. *Dato parallelepipedo rectangulo cubum æqualem describere.* 369

COROLLARIVM. Cylindro, prismati, cono, ac pyramidi cubum æqualem exhibere. 369

XXXIX. *Dato cubo æquale parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel supra datam basem construere.* 370

COROLLARIVM. Cylindrum, prisma, conum, ac pyramidem in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel basis commutare. 370

XL. *Sphæra data cubum æqualem; Et dato cubo æqualem sphæram constituere.* 370

COROLLARIVM I. Sphæræ datæ solidum rectangulum supra basem quotlibet angulorum æquale, & pyramidem cuiuscunque basis æqualem; vel etiam conum æqualem construere. Et vicissim cuilibet prismati sphæram æqualem exhibere. 371

COROLLARIVM II. Sphæram cuilibet corpori regulari constituere æqualem. 371

XLI. *Duobus, aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.* 372

SCHOLIVM. Quotlibet figuris solidis non cubis cubum æqualem construere. 372

XLII. *Dato cubo corpus regulare, quod ex quinque elegeris; æqualem construere.* 372

XLIII. *Ex maiori cubo detrahere minorem; residuoque cubum æquale exhibere.* 373

SCHOLIVM. Ex quauis figura solida maiori minorem quamcunque auferre, residuoque cubum æqualem constituere. 373

XLIV. *Datis duabus, aut pluribus sphæris sphæram vnam æqualem constituere.* 373

XLV. *Ex maiori sphæra minorem sphæram detrahere, residuoque sphæram æqualem exhibere.* 373

XLVI. *Datum cubum, aut parallelepipedum, secundum datam proportionem secare.* 373

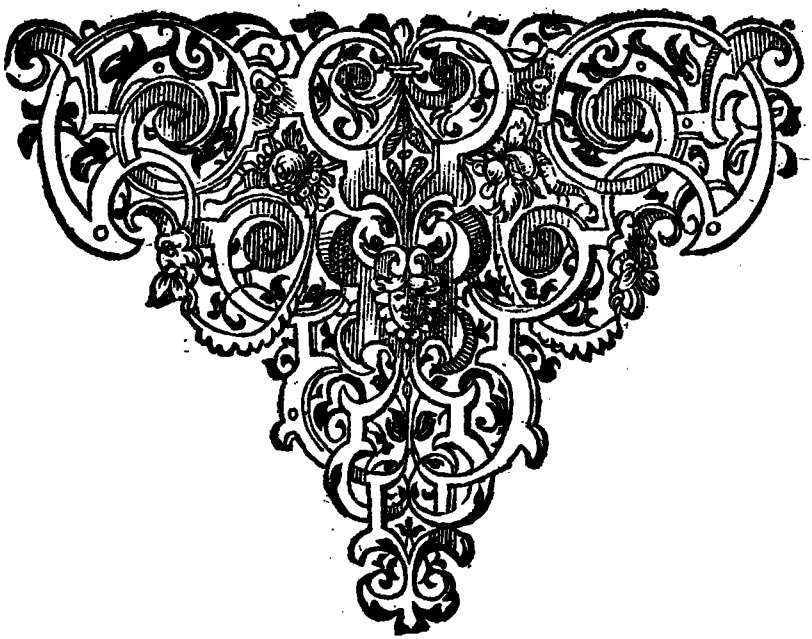
SCHOLIVM. Prisma, vel cylindrum, secundum datam proportionem diuidere. 373

XLVI. *Figuram Ellipsi similem, quam ouatam dicunt, circino describere: Eiusque aream, si beneficio trianguli æquilateri descripta est, explorare.* 374

SCHO-

SCHOLIVM. Tabula quadratorum, & cuborum vsque ad radicem 1000. 378
Differentiæ quadratorum, & cuborum. 387
Dato cubo, eiusque radice, qui numeri impares illum componant, inquirere. 390
Vsus tabulæ quadratorum, & cuborum in extrahendis radicibus quadratis, atque cubis. 391

FINIS.



PRÆ-

PRÆFATIO.

QVANDOQVIDEM Mathematicarum disciplinarum stadium scribendo ingressi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, vt nisi metam tangere licuerit, ab illa certè quam minimè distemus. Ætatem senectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar sponte, summa cum festinatione properare. Et verò, cum perpetua multorum annorum experientia compererim, admodum paucos esse, qui non in Mathematicis exerceantur eo consilio, vt quæ didicerint, ad aliquem vsum trahant: in hoc quicquid est laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi possint ad humanæ vitæ commoda, non inani venditatione, sed re ipsa constaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depressiones, locorum omnium inæqualitates inter se, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatisque substructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi siderum, aliisque artibus, & disciplinis ex horum cognitione manare possit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum scientiæ pars, sicut ab artificibus ob sui necessitatem auidè semper est arrepta: ita ob insignes vtilitates, quas in re tota militari suppeditat, in maximorum Principum, Regumque aulis omni tempestate versata est. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti scriptione persecuti sunt: Inter quos, vt Leonhardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, aliique præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamẽ adiudicarim Io. Antonio Magino præstanti Mathematico; qui tametsi tantũ linearum dimensiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perspicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo iis, qui ante scripserunt, sed spem posteris æqualis gloriæ, ne dum maioris, ademisse videatur. Verum

rum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit sollicitus : & alii, quamuis aggressi omnia, multa tamen inter scribendum præterierunt: decreui, si qua possem, perficere: vt, quicquid vtiliter in Geometria practica ab aliis traditum, à me etiam inuentum est, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus, cum species tres quantitatis continuæ sint, in tria membra, partesq; præcipuas secuimus: In prima rectas lineas, in altera superficies, corpora metientes in postrema: cui annectuntur alia, quæ non tam ad quantitatis dimensionem, quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonstrationes pertinent, à nostro instituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti sumus.

PRIMVS propositiones tres omnino necessarias, & perquam vtiles ad omnium magnitudinum dimensionem accuratè perficiendam continet.

IN Secundo dimensio linearum rectarum per Quadrantem Astronomicum tam pendulum, quàm stabilem absoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimensione per Quadratum Geometricum tum pendulum, tum stabile, etiam per vnicam stationem, agit. Vbi etiam, qua ratione sine huiusmodi instrumento earundem rectarum linearum Dimensiones nonnulla fieri possint, traditur.

QVARTVS superficierum areas inquirit:

QVINTVS solidas magnitudines metitur.

AT QVE hisce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propositæ explicantur.

IN Sexto deinde libro de Geodæsia, id est, de superficierum rectilinearum cuiusque generis Diuisione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quam per lineas parallelas, disseritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentum spectantia soluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam solidæ, vnà cum circulo ac sphæra in data proportione augendæ sint, minuendaúe. In cuius rei gratiam modi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas. Denique ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiusque generis præscribitur.

SEPTIMVS de figuris Isopemetris disputat.

IN Octauo denique varia problemata, ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ.

LIBER PRIMVS.

Tria capita ad dimensionem linearum summe necessaria complectens.

VT magnitudinum dimensio omnibus suis numeris absoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum construenda est norma quædam variarum partium, quam non incongruè Instrumentum partium vocare possumus; quòd in eo varia partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes siue Geometricas, siue Astronomicas ritè perficiendas contineantur. Huius enim vsus credi vix potest, quàm latè pateat tum in dimetiendis magnitudinibus sine numerorum multiplicatione, tum verò maximè in horologiis Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum descriptione tradidimus, describendis, & in aliis rebus tam Geometricis, quam Astronomicis, vt ex iis, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri sumus, perspicuum fiet Secundo loco conficiendus est quadrans, in quo præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo designata non sint) cognosci, ac discerni queant; docendumque, qua ratione idem præstari possit in quolibet quadrante in 90. gradus exquisitè distributo: partesque centesimæ, atque millesimæ in recta quauis linea in paucissimas partes æquales diuisa dignoscendæ sint. Tertio atque postremo loco proponenda erunt, ac soluenda varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibusdam datis, & cognitis facilè possint cognosci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. nostri Astrolabii exposita sint, tamen ne studiosus Lector ad illud Lemma sæpius & non sine molestia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem penè verbis, quot in prædicto Lemmate præscripta sunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda esse diximus, tribus capitibus explicata sequuntur.

INSTRVMENTI PARTIVM Conſtructio, atque vſus.

CAPVT I.

Inſtrumentũ partium quo pacto cõſtruatur.

FIANT ex orichalco, vel alia materia ſolida duæ regulæ A B D, A E C, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniformiter poſsint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus eſt, conſtringi poteſt, & dilatari, fieri ſolet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur A F, A G, eæque in 100. particulas æquales diſtribuantur, vel in 1000. ſi longiores ſint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centeſimæ, aut milleſimæ abſcindi poterunt. Immo ſi ſumatur linea K L, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturq; in 10. partes æquales, ſi quidem ſecta ſit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ K L, continentis 11. particulas eiuſmodi, & in 10. partes æquales diuiſæ, ex data recta qualibet accipi quotuis milleſimæ partes, perinde ac ſi partes ſingulæ centeſimæ in vtraque regula ſectæ eſſent in denas particulas æquales: ſi vero vtraque regula in 1000. particulas diſtributa ſit, & linea K L, talium 11. partium in 10. particulas diſſecta, poterunt ex quauis linea recta propoſita partes, quot quis voluerit, milleſimarum decimæ auferri, non ſecus ac ſi ſingulæ partes milleſimæ in regula diſtributæ eſſent in 10. particulas æquales, vt in vſu inſtrumenti dicemus.

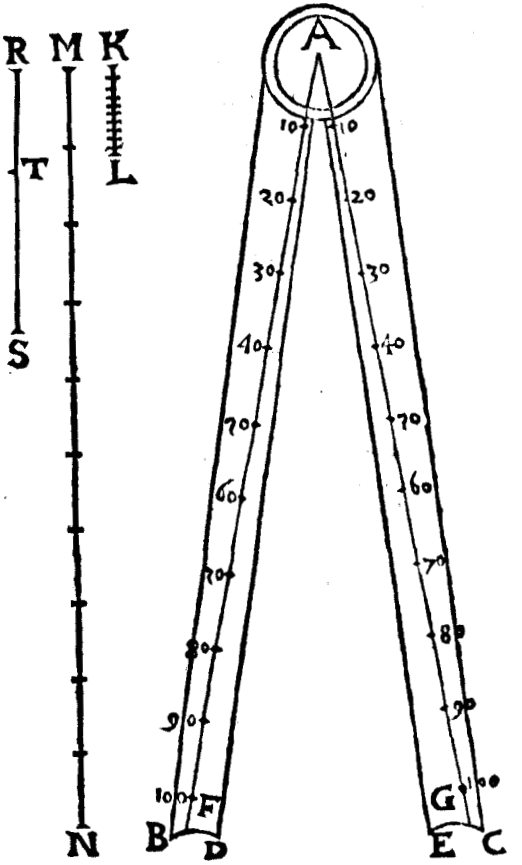
RVRSVS ſi regula contineat 100. partes, & recta quæpiam M N, conſtans ex 101. eiuſmodi particulis diſtribuatur in 100. partes, poterimus ex quauis data recta accipere partes decimas milleſimarum. At ſi in regula notatæ ſint 1000. partes, & linea quæpiam continens eiuſmodi partes 101. ſecetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centeſimæ milleſimarum, ac ſi partes ſingulæ milleſimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001. diuidatur in 1000. partes, capiemus in quauis recta partes milleſimas milleſimarum, perinde ac ſi partes milleſimę ſingulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vſu inſtrumenti conſtabit. Atque hæc eſt conſtructio inſtrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis.

IN altera vero inſtrumenti facie deſignantur chordæ omnium arcuum quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis A F, A G, vt in priori facie, ſumendus eſt quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ, A F, & in rectas A F, A G, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & ſic deinceps vſque ad chordam 89. graduum: ita enim ex quolibet quadrante abſcindere licebit arcum quotcunque graduum, vt Num. 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie poſitarũ capiemus ex quadrante propoſito non ſolum gradus integros, ſed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atq; ita abſoluta eſt conſtructio inſtrumenti in altera facie. Huius inſtrumenti vſus ampliſsimus eſt, vt diximus, & non obſcurè ex iis, quæ ſequuntur, intelligi poteſt.

1. QVAN-

1. QVANDO enim linea recta proposita rectæ A F, vel A G, in priori facie instrumenti æqualis est, nullo negotio ex ea abscindẽtur quotcunq; partes centesimæ, aut millesimæ, prout instrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuisum; si nimirum partes, quæ desiderantur, ex instrumento in datam rectam transferantur.

Centesimæ, vel millesimæ partes in recta linea quo modo accipiantur.



2. QVANDO vero proposita linea non est æqualis rectæ A F, vel A G, in instrumento, dilatandum instrumentum est, vel constringendum, donec interuallum inter F, G, datę lineę sit æquale. Nam circinus inter partes rectarum A F, A G, quę desiderantur, extensus dabit in recta proposita partes quęsitas. Vt si data recta æqualis sit ipsi F G, & desiderẽtur 50. partes centesimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta F G, cogitatur esse diuisa. quod sic demonstratur. [a] Rectæ FG, & 50.50. (si concipiatur ducta recta à parte 50. ad partem 50.) parallelæ sunt; propterea quod latera A F, A G, proportionaliter secta sunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50, A 50, æquales. [b] Igitur erit vt A 50. ad rectam 50.50. ita A F, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50.50. ad F G. Cum ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius A F, continebit quoque recta 50. 50. partes 50. ex 100. in quas diuisa esse concipitur F G. Eademque ratio est de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoque inter puncta 80. & 80. partes 80. complectetur ex 100. totius FG, &c. quæ demonstratio locum etiam habet, si in AF, contineantur 1000. partes, vt constat.

[a] 2. sext.

[b] 4. sexti.

NON aliter, propositis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur esse diuisa, cognoscemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac scilicet ratione. Aperto instrumento, statuatur interuallum rectæ diuisæ inter partes, in quas diuisa intelligitur. Nam si altera per circinum transferatur inter duas alias partes easdem, vel inter duo puncta ab eisdem duabus partibus æqualiter distantia, continebit illa recta tot partes, quot

Diuisa recta in quotuis partes æquales, quot eiusmodi partes in quauis alia contineantur.

4. sexti. quot in regula A F, includuntur inter centrum A, & circini pedem: [c] propterea quod eandem proportionem habet segmentum regulæ A F, vsque ad interuallum rectæ diuisæ, ad segmentum ejusdem regulæ vsque ad interuallum alterius lineę, quam interuallum rectę diuisæ ad interuallum alterius lineę habet, &c. Quod si linea hæc altera esset nimis longa, auferendũ ex ea primum esset interuallum inter 100. & 100. quoties fieri potest. Deinde reliquum segmentum transferendum in instrumentum, vt dictum est. Verbi gratia si altera rectarum diuisa sit in 50. partes æquales, sumemus ei æquale interuallum inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallum æquale rectę F G, inter 100. & 100. continebit ea 100. partes ęquales. Et si in ea superesset segmentum ęquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod si interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur. & insuper segmẽtum ęquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

Tangentes quo modo accipiantur respectu sinus totius 100.

3. ITAQVE si in Tangentibus nouę descriptionis horologiorum (vt huius instrumenti vtilitatem quoque in describendis horologijs aperiamus) sinus totus statuatur 100. quantuscunque ille sit, eique interuallum F G, ponatur ęquale, capiemus commodissime quamcumque Tangentem tabulę in noua descriptione positę, si ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt si quęratur Tangens Grad. 39. min. 57. quoniam ea in tabula est 838. si abijciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. respectu sinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior est, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adijcienda est, cum constituat $\frac{8}{10}$ hoc est, plusquam $\frac{1}{2}$. Itaque si accipiantur in instrumento partes 84. paulo minus, vt dictum est, habebitur Tangens quęsita: si vero Tangens in tabula, abjecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda est Tangens per denas, atque vnitates expressa, relictis centenis, & illi Tangenti postea sinus totus adijciendus est toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Grad. 68. min. 50. quoniam ea in tabula est 2583. & abiecta prima figura, 258. sumenda est Tangens 58. eiq; sinus totus F G, bis adijciendus, & sic de reliquis.

Millesima partes quo modo capiantur, etiamsi in instrumento cõtineantur tãtum partes 100.

4. QVOD si rectam K L, partium 11. in 10. ęquales partes diuisam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes millesimas. Quoniam enim ita se habet linea K L, ad vnam eius partem, vt portio A 10. rectę A F, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio sit decupla; erit permutando quoque K L, ad A 10. vt vna particula ipsius K L, ad vnam particulam ipsius A 10. Cum ergo K L, contineat ipsam A 10. semel, & insuper partem ipsius decimam, (sumpta est enim K L, partiũ 11. qualium 10. est A 10.) continebit quoque vna particula ipsius K L, vnam particulam ipsius A 10. semel, & decimam insuper eius partem: Atque adeo duę illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & sic deinceps. Quare si verbi gratia desiderentur $\frac{87}{100}$. accipiendę erunt octo partes ex 100. totius A F, & insuper $\frac{7}{10}$. sequentis partis nonę, cum decima pars vnius centesimę sit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo sumantur 7. partes ex K L, eęque in A F, transferantur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte post pedem circini immobilem, quę particula in nonam partem est transferenda. Ita enim, cum octo partes complectantur $\frac{80}{10}$. vnius centesimę, (quod

quęlibet

quælibet pars contineat $\frac{10}{10}$. vnius centesimæ.) hoc est, $\frac{80}{1000}$. & $\frac{7}{10}$. vnius centesimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abscissa $\frac{87}{1000}$. Item si quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipsius AF, & $\frac{7}{10}$. sequentis partis secundæ, vt paulo ante dictum est. Vel sic agemus. Sumptis 7. partibus ex KL, transferemus eas in AF. vbicunque libuerit. Nam abscissæ partes erunt $7\frac{7}{17}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique si optentur $\frac{157}{1000}$. sumendæ erunt ex recta AF, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{150}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex sequenti parte quadragesima sexta, beneficio septem particularum rectæ KL, &c.

5. SI ergo sinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior est quam 1000. relictis millenis, accipendæ sunt reliquæ partes millesimæ pro Tangente, eiq; toties sinus totus addendus, quoties vnitas in millenis relictis reperitur. Vt si quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula est 854. accipiendæ sunt in regula AF, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At si quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula est 5671. relictis millenis accipiendæ sunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus sinus totus quinquies.

Tangentes quo modo inueniantur, posito sinu toto 100.

6. PARI ratione si adhibeatur recta MN, partium 101. diuisa in 100. depromemus ex recta AF, partes decimas millesimarum; cum quælibet particula rectæ MN, contineat vnam particulam ipsius AF, semel, & insuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ AF, diuisa esse cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota AF, sit 10000. particularum, quod eodẽ modo demonstrabitur. Est enim eadem proportio MN, ad vnam particulam suam centesimam, quæ rectæ AF, ad vnam suam centesimam. &c.

Decimæ partes millesimarum quo modo sumantur, etiam si instrumentum diuisum sit in 100. partes duntaxat.

7. ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, posito sinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in nostro Theodosio descriptæ. Vt si velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30. quæ in tabula (abiectis tribus figuris) est 49151. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9151. nimirum partes 91. ex 100. regulæ AF, & $\frac{51}{100}$. vnius. quod fiet, si partes 51. rectæ MN, transferantur in AF. Circinus enim vltra partes 51. abscindet $\frac{51}{100}$. Nam quia singulæ particulæ rectæ AF, concipiuntur sectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus si addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus est sinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas, Facile autem ad 91. partes adijcies particulam continentem $\frac{51}{100}$. vnius centesimæ, si eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ AF, existit) cum vna parte regulæ AF, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc est, si eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Tangentes posito sinu toto 10000. quo pacto sumãtur.

8. INVENTA porro Tangente in vtraque regula AF, AG, dabit interuallum inter Tangentem regulæ AF, & Tangentem regulæ AG, eandem Tangentem respectu sinus totius FG.

Qua ratione ex inuenta parte millesima, vel decima millesima

9. QVANDO autem Tangens tam exigua est, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia sumenda

Tangens

sima in AF, eadem reperiatur respectu dati sinus totius.

Tangens 7. partium respectu sinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus majoribus, quarum maior minorem septem vnitatibus superet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (si nimirũ vtraque in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita semper sumendæ erunt duæ Tangẽtes maiores prope medium instrumentis quarum differentia æqualis sit Tangenti exiguæ propositæ.

10. SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & sinus totus propositus constituatur 1000. eique interuallũ FG, æquale sumatur, commodissime accipientur omnes Tangentes, vt in Tabula nouæ descriptionis horologiorum positæ sunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, si relictis millenis, sumatur interuallũ inter partes 430. vtriusq; regulæ AF, AG, eique sinus totus FG, bis adijciatur.

11. ET si adhibeas lineam KL, partium 11. diuisam in 10. accipere poteris Tangentes respectu sinus totius 10000. Item si rectam partium 101. in 100. particulas distributam adhibeas, habebis Tangentes respectu sinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, posito sinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

12. QVOD dictum est de Tangentibus, intelligendum est etiam de sinubus, & secantibus. Nam si interuallum FG, æquale sit sinui alicui toti, siue is partium sit 100. siue 1000. siue plurium, dabunt interualla inter sinus, vel secantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, sinus & secantes respectu sinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma 5. lib. 1. nostri Astrolabij, eandem proportionem habet sinus totus AF, ad sinum totum FG, quam sinus verbi gratia A 50. ad sinum arcus circuli, cuius semidiameter FG, qui arcus arcui sinus A 50. similis est. [a] Cum ergo sit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. sinus arcus, qui arcui sinus A 50. similis est. Eademque ratio est de secantibus.

4. sexti.

Quo pacto cognoscatur, quot decimæ in particula cuiusuis centesimæ partis contineantur.

13. VICISSIM cognoscemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc scilicet modo. Circino sumatur data particula, vna cum vna parte centesima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinusque decies repetatur in recta AF, diligenterque notetur segmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam si ex partibus centesimis in eo segmento contentis abijciantur toties 10. quot partes vna cum particula data sumptę fuerũt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centesimæ, hoc est, millesimas in data particula comprehensas. Et si cum reliqua particula eius segmenti (si qua forte supersit) similiter agemus, reperiemus partes decimas vnius millesimæ, hoc est, partes $\frac{1}{100000}$. Et si iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{1000000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vsu instrumenti horologiorum demostrauimus, eademq; demonstrationem breuiter capite in sequenti Num. 14. repetemus. Exempli causa. Si particula data cum tribus centesimis deciesrepetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centesimæ. Quare si ea particula data fuerit V. g. post vigesimam partem centesimam, continebit illud segmentum rectæ AF, $\frac{37}{1000}$. Nam $\frac{7}{10}$ vnius centesimæ faciunt $\frac{7}{100}$. & 20. centesimæ, si singulæ in decem particulas congitentur esse sectæ, efficiunt $\frac{200}{1000}$. quippe cum omnes centum partes æqui valeant 1000. particulis. Quod si

idem

idem fiat cum reliqua particula (si qua forte superfuerit post 37. partes percursas) vna cum tribus centesimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius millesimæ, hoc est, $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{307}{10}$ æquiualent $\frac{3070}{10000}$. si addantur $\frac{4}{10000}$. vltimo loco deprehensæ, habebimus $\frac{307+}{10000}$. Si denique cum reliqua particula (si qua forte remanserit) vna cum tribus centesimis idem fiat, percursæque verbi gratia sint 39. partes, abiectis 30. supererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc est $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{307+}{10000}$ efficiant $\frac{3070}{10000}$ si addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{307+9}{100000}$. Atque adeo si recta AF, statuatur sinus totus partium 100000. erit segmentum 20. partium cum particula data, sinus partium 20749. Si particula data commode per circinum possit comprehendi, & decies repetatur, dabunt centesimæ partes percursæ partes decimas vnius centesimæ. &c. Si quoque nonnunquam nulla supersit particula, ita vt verbi gratia inuentæ sint præcisè $\frac{387}{100}$ multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur sinus 20700. respectu sinus totius 100000. quemadmodũ & 40. centesimæ constituunt sinum 40000. respectu sinus totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$ ducatur in 1000. fiet minutia $\frac{40000}{100000}$.

14. HOC eodem instrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius semidiameter interuallo F G, æqualis fit, abscindẽdus verbi gratia arcus grad. 53. hoc est, chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula sinuum sinus semissis propositi arcus, graduum videlicet 16. min. 45. qui sinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, est 450. respectu sinus totius 1000. Si ergo sinus hic respectu sinus totius AF, accipiatur in recta AF, vsque ad 45. per ea, quæ supra Num. 4. & 12. tradita sunt, dabit interuallum inter 45. & 45. sinum quoque eundem respectu sinus totius FG, quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id est, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si sinus totus statuatur 10000. erit sinus grad. 26. min. 45. in tabula sinuũ 4501. abiectis nimirum tribus figuris ad dexteram: qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum est.

Ex circulo qua ratione abscindatur arcus datorũ grad. ac min.

QVOD si vtraque regula AF, AG, contineat 1000. partes, statui poterit sinus totus 100000. & etiam plurium partium, si nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuisa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas secta.

15. E CONTRARIO facile etiam cognoscemus, quot gradus, & minuta in proposito arcu cuiusuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius semidiameter F G, cui æqualis sit recta R S, datus aliquis arcus, cuius chordæ semissis sit R T. Huic R T, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncta 40. 40. vel abscindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter distent à duabus partibus æqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. scripsimus, inquiratur, quot partes ex 1000, vel 10000. vel 100000. in segmento ab A, vsque ad punctum inuẽtum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout sinus totus constituitur 1000, vel 10000. vel 100000. atque tantus est sinus 40. 40. respectu sinus totius F G, cui respondent Grad. 23. min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipsius R T, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu cõtineãtur, quo pacto cognoscatur.

Quo pacto aliter ex circulo abscindantur arcus datorum gr. & min.

16. IN altera facie instrumenti, in quam chordę arcuum quadrantis sunt translatę, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo. Chordæ quadrantis propositi sumatur ęquale interuallum F G: Vel etiam semidiametro Quadrantis, chordę nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60. ęquale. Si igitur verbi gratia desideret quis arcum Grad. 56. sumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim ęqualis est chorda grad. 56, Si præter gradus accipienda sint etiam minuta, oportebit per ęstimationem in sequenti particula accipere talem partem ipsius, qualem minuta proposita partem vnius gradus constituunt, Vt si cupiat quis min. 30. sumenda est semissis, si 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulę A F, & partem regulę A G, acceptum dabit chordam quęsiti arcus.

Quo pacto aliter cognoscatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehendantur.

VICISSIM si cognoscere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu existant, inuestiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant vel in duas partes easdem, vel ęqualiter à duabus eisdē distent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus cōtinentur in recta AF, à centro A, vsque ad punctum, è quo chorda dati arcus in rectam A G, trāslata est: ita vt si dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propositus arcus complectatur gr. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abscindatur.

17. IAM vero nemo nescit, si ex linea aliqua abscindenda sit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{17}$. vel denique quęcunq; pars, cuius denominator maior non sit quam 100. quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum F G, in priori facie instrumenti ęquale fuerit datę rectę, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum vero inter 20. & 20. partem $\frac{1}{5}$. Item si interuallum inter 90. & 90. vel inter 60. & 60. vel inter 30. & 30. fiat datę rectę ęquale, dabit interuallum inter 30. & 30. vel inter 20. & 20. vel inter 10. & 10. partem $\frac{1}{3}$. Rursus si interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectę sumatur ęquale, dabit interuallum inter 1. & 1. vel inter 2. & 2. partem $\frac{1}{17}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10. & 10. dabit $\frac{5}{17}$. &c. Ex hisce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in aliis partibus imperatis gerere debeas.

Qua ratione ex dato circulo latus polygoni propositi inueniatur.

18. NON aliter in posteriori facie instrumenti latera polygonorū in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, si quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli ęquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus 51 $\frac{3}{7}$. hoc est, gradus 51. min. 26. paulo minus, latus heptagoni. &c. qui quidem gradus habebuntur, si gradus 360. totius circuli per numerum laterum polygoni propositi diuidantur.

Quo pacto cognoscatur, in quod punctū semidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demissa.

19. QVANDO in dato quadrante cognoscere lubet, (quod non raro vsu venit) in quodnam punctum semidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera semidiametro numerato demissa cadat, ita agendum erit. Sit verbi gratia semidiameter alicuius quadrantis F G, quærendumq; sit punctū, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demissa. Sinus grad. 26. min. 45. est 45. posito sinu toto 100. Ergo & recta inter partes 45. & 45. erit sinus grad. 26. min. 45. respectu sinus totius F G, vt Num. 12. ostensum est. Quo circa recta 45. 45. in semidiametrum dati quadrantis ex centro translata indicabit punctum quæsitum.

20. NON aliter reperiemus in diametro Astrolabij (quod notatu dignum est) punctum cuiuscunque declinationis. Posito enim sinu toto semidiametro Aequatoris, si declinatio est Borealis, tranferenda est in diametrum ex centro Tangens semissis complementi declinationis: si vero australis est, Tangens semissis arcus ex quadrante, & declinationis compositi. Vt Tangens grad. 33. min. 15. qui semissem complementi declinationis ♋. constituunt, dabit punctum extremum semidiametri paralleli ♋, quod videlicet ab Aequatore in Boream grad. 23. min. 30. declinat. Tangens vero grad. 56. min. 45. qui semissem constituunt arcus ex quadrante, & declinatione ♑, cõflati, dabit extremum punctum semidiametri paralleli ♑, quod ab Aequatore in Austrum grad. 23. min. 30. recedit. Ratio huiusce rei est, quod recta in Astrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referẽtis vsque ad intersectionem paralleli borealis cum altera diametro Meridianum repræsentãte ducta constituit cũ altera diametro angulũ semissis complementi declinationis ♋ borealis; ad intersectionem vero paralleli australis cum eadem posteriore diametro educta efficit angulum semissis arcus ex quadrante, & declinatione australi conflati: atque vtriuslibet anguli Tangens semidiameter est paralleli, vt ex Astrolabio liquet.

Quo pacto in diametro Astrolabij punctum cuiusuis declinationis reperiatur.

EODEMQVE modo, si constiterit, quem angulum in extremitate semidiametri Aequatoris in Astrolabio recta ad quodcunque punctum diametri, quæ ad illam semidiametrum perpendicularis est, ducta constituat, reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, sicut in parallelis ♋, & ♑. factum est.

21. SI etiam quæcunque linea ex centro instrumenti huius egrediens secetur quomodocunque, vt verbi gratia extrema, & media ratione, vel (quod operæ pretium esset, vt expeditius horologia describantur) sicut æquinoctialis linea in horologio horizontali diuisa est: secabitur quæuis alia similiter, si nimirum ei æquale interuallum F G, sumatur, vt ex dictis liquido constat. Satis tamen est, si horæ ex vna parte lineę meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in instrumentum transferantur.

Præceptum generale ad diuidendam lineam datã, vt alia quæcunque diuisa est.

22. PRÆTEREA aperto instrumento quomodocunque, cognoscemus quantitatem anguli F A G, in centro A, constituti, hoc modo. Circino sumatur interuallum inter gradus 60. & 60. in posteriore instrumenti facie, transferaturque ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur, tot gradus continebit angulus F A G. Ratio est, quòd arcus ex centro A, per gradus 60. & 60. descriptus portio est quadrantis, cuius chorda est tota linea A F: propterea quod corda 60. graduum semidiameter est quadrantis dicti, cuius chorda est A F, vt ex instrumenti constructione manifestum est. Igitur interuallum inter gr. 60. & 60. est chorda anguli F A G, propositi, &c.

Qua ratione quantitas anguli quem latera instrumenti continent cognoscatur.

23. SED neque hoc omittendum est, (quandoquidem de Tangentibus, sinubus, & secantibus in hoc instrumento respectu dati sinus totius accipiendis verba fecimus) sinum totum interdum esse tam exiguum, vt ex F, in G, transferri nequeat, etiamsi instrumẽtum prorsus claudatur. Vt ergo respectu illius sinus totius Tangens, sinus, ac secantes accipere possimus ex instrume-

Quando sinus totus tam parvus est, vt in instrumentum transferri nequeat.

ferri nequeat, quid agendum.

to, sumendus est ille sinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atque ita ex F, in G, transferendus. Nam si Tangentium quæsitarum, vel sinuũ, aut secantium respectu sinus totius 100. capiantur semisses, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c prout videlicet sinus totus bis, ter, quateruè, &c. acceptus fuit, habebũtur Tangẽtes quæsitæ, vel sinus, aut secãtes. Vt si sinus totus duplicetur, & posito sinu toto 100. Tangens verbi gratia sit 378. sumenda est Tangẽs 189. &c. Sed commodissime res hæc peragetur, si sinus totus, qui perpusillus est, decupletur. Ita enim posito sinu toto 100. si ex Tangente verbi gratia proposita (relicta prima figura ad dexteram) abijciatur vna figura ad dexteram, quæ est secunda in tota Tangente, habebitur decima eius pars. Habenda tamen semper est ratio figuræ abiectæ, vt scilicet pro ea sumatur 1. si maior est quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414. grad 67. min 30. proposita (relictis $\frac{4}{10}$) transferenda erit Tangens 24 paulo amplius, nimirum pars decima Tangentis 241. respectu sinus totius 100.

Quando Tãgens superat sinum totum, quid agendũ, vt per vnicã translationem punctũ quæsitum inueniatur.

24. SIC etiam, quando Tangens aliqua sinum totum superat, ne cogamur primum sinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra; sed vt statim punctum, quod quæritur, per vnam translationem possimus inuenire, diuidenda est tota Tangens tabulæ ad finem nouæ descriptionis Horologiorum positæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dexteram, reliqua Tangens transferenda est respectu sinus totius 100. multiplicati per eundem numerum, per quem Tangẽs diuisa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. respectu sinus totius 1000. est 1732. quæ diuisa per 2. facit 866. Ergo transferenda est Tangens 86. ½. paulo amplius respectu sinus totius 100. duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. est 3732. quæ diuisa per quatuor facit 933. Ergo Tangens 93 $\frac{3}{8}$. transferenda est respectu sinus totius 100. quadruplicati. Atque ita de cæteris.

Quo pacto tertia, & quarta proportionalis reperiatur.

25. IN hoc eodem denique instrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartam adiungemus. Nam si, duabus propositis, primæ in recta AF, regulæ AB, æqualis capiatur: & secunda à fine huius, aperto instrumento, per circinum transferatur in regulam AC, ad numerum similem illi, qui in extremo primæ in regula AB, appositus est (ita vt pedes circini statuantur vel in similibus partibus vtriusque regulæ, vel in duobus punctis æqualiter distantibus à similibus partibus) eidemque secundæ in regula AB, æqualis sumatur, dabit interuallum inter finem huius secundæ, & numerum in regula AC, similem illi, qui prope finem secundæ scriptus est, tertiam proportionalem; vt ex demonstratis Num. 2. constare potest.

EADEM ratione, si, tribus rectis propositis, prima & secunda in instrumentum transferantur, vt dictum est, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoque capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AC, similem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus est, quartam proportionalem.

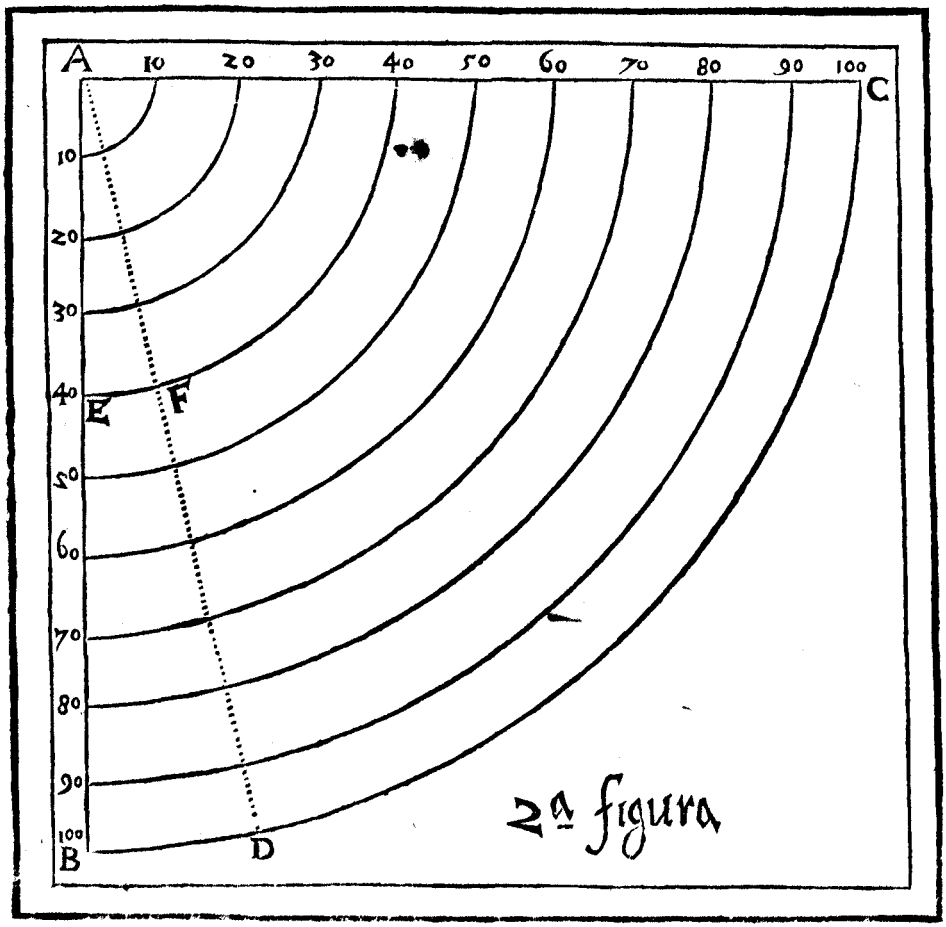
QVOD si lineæ propositæ tam magnæ sint, vel aliqua illarum, vt in instrumentum transportari nequeant, sumendæ erunt omnium semisses, vel tertiæ partes, vel quartæ &c. atque cum illis procedendum, vt dictum est. Inuenta enim duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiã aut quartam proportionalem quæsitam.

26. Loco

26. Loco prędicti instrumenti construi potest in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundem vsum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus B A C, cuiuscunque magnitudinis; quo autem maior fuerit, eo maiores sinus toti in figura assumi poterunt: ita vt non malè feceris si rectum constituas. Ita namque quadrantem quoque recto angulo oppositum obtinebis: Recta autem A B, in 100. particulas ęquales secta, (posset etiam secari in 1000. si commodè fieri posset, vt de superiore instrumento diximus) describantur ex centro A, per singulas partes 100. arcus circulorum, qui rectam quoque A C, in 100. particulas ęquales distinguent: parataque erit figura. *Constructio alterius instrumenti pro eodem vsu.*

NAM si in infimo arcu B C, sumatur interuallũ B D, dato sinui toti æquale ducaturque recta occulta A D, (hæc in ęnea tabella ducenda erit atramentmento non admodum nigro, vel alio colore, vt postea deleri possit) fungentur rectę A B, A D, officio regularum A F. A G, superioris instrumenti ad propositam magnitudinem B D, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes respectu sinus totius B D, vt supra. Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum E F, [a] cum ducta recta E F, parallela sit rectę ductę B D, propterea quod latera A B, A D, secta sunt in E, F, proportionaliter. Alij vsus supra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur: pręsertim si in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius, vt ex dato circulo quotcunque gradus possint abscindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non est, ne clauus in centro atteratur, sicut in superiore instrumento. Deinde in eadem hac figura possunt accipi particulę etiam minimę, prope centrum, & in extremo quadrante sinus totus quamuis perpusillus, quod in superiore instrumento non licebat. [a] *2. sexti.*

QVAMVIS autem ad magnitudinum dimensiones non omnes huius instrumenti partium vsus necessarij sint, sed solum ille, quem Num. 1. & 2. explicauimus, potissimum requiratur; placuit tamen tam varios eius vsus in vnum hunc locum congerere, tum vt instrumenti pręstantia magis eluceat, tum vt studiosus lector habeat, vbi alios vsus, quos desiderat, inquirere debeat. Non sum etiam nescius, quam plurimos alios pręclari huius instrumenti vsus posse excogitari, quos proprio Marte, atque industria quiuis facile, quando id res postulauerit, cogitando inueniet: nos præcipuos solum indicare voluimus hoc loco.



Constructio Quadrantis, in quo minuta quoque, ac secunda deprehendantur, etiamsi gradus in ea secti non sint. Et quo pacto eadem minuta, & sec. obtineri possint in quadrante in 90. gradus distributo. Ac denique qua ratione ex data recta in paucissimas partes æquales diuisa abscindi possint partes millesimæ, &c.

CAPVT II.

HOc est secundum, quod præmittendum esse diximus, qua videlicet via cognoscere possimus, quot minuta, & secunda in proposita particula cuiusuis gradus contineantur: Et quot partes millesimas quęlibet particula datę rectę comprehendat, licet in paucissimas ea partes sit distributa. Quod vt assequamur, construendus est quadrans, quem anno 1586. in Fabrica, & vsu instrumenti

menti Horologiorũ confecimus, hoc modo. Descriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem aliis 36. quadrantibus æqualiter, si placet, inter se distantibus, vt venustior appareat figura: ita vt in vniuersum sint 40. quadrantes, quorum extimus in 90. gradus more solito secetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rursus in duas, & quelibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuisiones absolutæ sint, atque adeò totus quadrans in 128. partes ęquales distributus. Post hæc producantur alij quadrantes vltra semidiametrum AB: ille quidem, qui tertius est ab extremo BC, vsque ad gradum 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc est, vsque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: sequens deinde vsque ad gradum 92. & insequens ad gradum 93. atque ita deinceps vsque ad alios gradus, ita vt quadragesimus quadrans vsque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur singuli in 128. partes ęquales, sicuti quadrans extimo quadranti proximus: qua diuisione peracta, partes supra semidiametrum AB, resecentur, tanquam superuacaneæ.

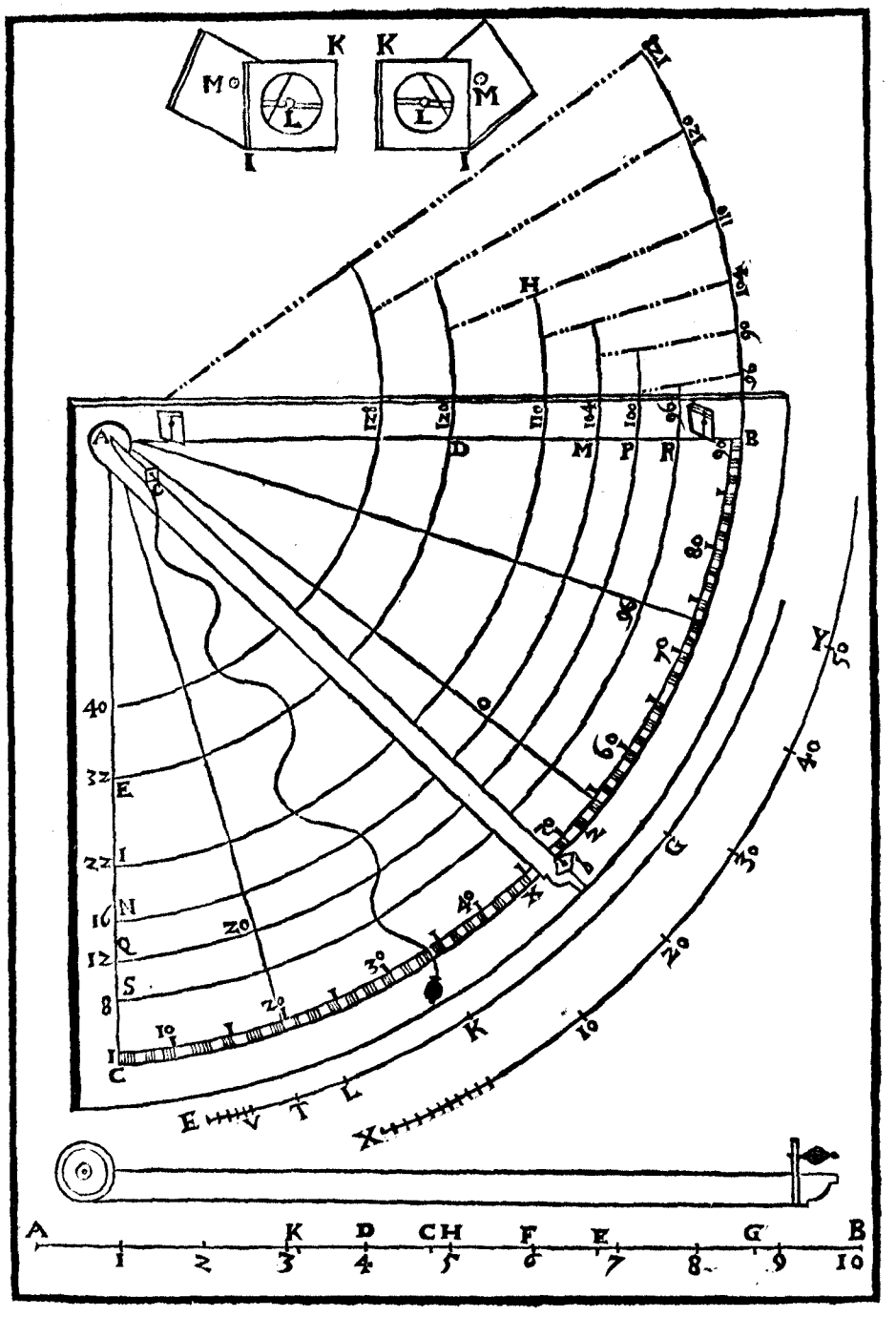
Quadrantis constructio ad m. & sec. cognoscenda.

2. QVOD si quadrantes vltra semidiametrum AB, produci commodè non possint, ob spacij angustias, instituenda erit diuisio hoc modo. In quadrante extremo BC, sumatur semissis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam semissem linea occulta ducatur. Hęc enim secabit quadrantem propositum in puncto, vbi arcus productus prima diuisione bifariam secaretur. Quare si arcus inter hoc punctum & semidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, secetur bifariam continuè sex diuisionibus, partesque illius in arcum inter idem punctum, & semidiametrum AB, transferantur, quę transferri possunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128. in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantem cadunt. Vt si diuidendus sit quadrans MN, vsque ad grad. 104. producendus, ducemus ad grad. 52. nimirum ad semissem grad. 104. rectam, quę secet Quadrantem MN, in O. Nam si arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, secetur continuè bifariam sex diuisionibus, partesque eius in arcum OM, transferantur, habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non secus, ac si totus arcus productus in 128. partes distributus esset. Sic etiam, si quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum 62 ½ nimirum ad semissem graduum 125. Item si quadrans DE, 120. producendus, diuidendus sit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

3. HISCE quadrantibus ita diuisis duplices numeri ascribendi sunt, prope semidiametrum quidem AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta sequentem; & 3. iuxta tertium, &c. Ita vides quadranti, qui vsque ad gradum 96. productus est, appositum esse numerum 8. cum is octauus sit. Primus enim est quadrans BC; secundus, qui sequitur, 90. graduũ; Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduum 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95. & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vsque ad grad. 100. producto cernis ascriptum esse numerum 12. &c. At verò iuxta semidiametrum AB, numeri illorum graduum scribendi sunt, ad quos vsque quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim caden-

Qui numeri quadrantibus ascribendi sint.

te si-


K
K
M
M
L
L
I
I
H
A
D
M
P
R
B
C
E
I
N
Q
S
Y
G
K
E
V
T
L
X
A
K
D
CH
F
E
G
B
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta semidiametrum A B, apparebit, ad quem gradum vsq; quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atque secunda inquirantur, vt paulo post Num. 7. dicemus.

4. IVXTA semidiametrum A B, affigenda sunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quę radius solis, vel visualis transire debet, ad perpendiculum rectę AB, existant; alioquin non paruus error in dimensione linearum committeretur. *Pinnacidia quo pacto affigenda.*

5. QVANDO porro per radium visualem altitudo stellę inuestiganda est, vel punctum aliquod lineæ dimetiendæ inspiciendum, construi debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK, fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod sustineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata subtilis, priori ęqualis, in cuius medio sit etiam perexiguum foramen M, respondens foramini L, quando hęc tabella priori superimponitur. Huiusmodi duo pinnacidia si fiant, dici vix potest, quàm expeditè quamcunque stellam, aut aliam quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidium, quod ab oculo propius abest, claudendum est tabella illa quadrata circumducta circa punctum I, aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius visualis per foramen M, prope oculum immissus, illico conspiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore stellam, vel aliam rem propositam: quia foramen illud maius apertum facilè rem ipsam intueri, & sine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipsam rem visum dirigere nos sinit. *Pinnacidia pro radio visuali quo pacto construēda.*

6. POSTREMO ex centro A, egrediatur filum subtilissimum cum appenso perpendiculo. Aut certè loco fili construatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiducię, in cuius extremitate promineat laminula, ex qua suspendatur perpendiculum hac conditione, vt regula liberè pendente, filum aliquod cum perpendiculo demissum, ad vnguem lineę fiducię respondeat. Atq; in hoc summa diligentia adhibenda est, alioquin gradus non rectè à linea fiducię indicarentur. *Constructio regula, loco fili.*

ATQVE hoc modo Quadrans in suo vsu erit pendulus, siue res in sublimi existens ex B, per A, siue res in plano posita ex A, per B, inspiciatur. *Quadrans pendulus.*

QVOD si circa centrum A, regula affigatur cum linea fiducię AB, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineę fiducię respondeant, ipsaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunque gradum immota permaneat, erit Quadrans in suo vsu stabilis eundem semper situm habens, siue res in sublimi existens inspiciatur ex A, per b, posito nimirum latere AC, Horizonti parallelo, in plano Horizontali, siue rem in plano positam quis intueatur ex A, per b, latere AC, ad Horizontem existente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, superioremq; locū occupante. Verum hęc planius intelligentur, cum de vtroque vsu lib. 2. agemus. *Quadrans stabilis.*

7. VSVS quadrantis hoc modo constructi in minutis, ac secundis exquirendis, pręclarus est. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiducię AB, in partem aliquam integram alicuius Quadrantis (quod ferè semper accidet propter diuersitatem partium in tanta quadrantum multitudine) si fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abscissas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehensorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus gra- *Vsus quadrantis proximè constructi in minutis exquirendis.*

duum in arcu abscisso contentorum. Et si quid in diuisione fuerit residui, illud per 60. multiplicatum, atq; in eundem diuisorem, hoc est, in 128. diuisum, dabit minuta graduum. Et si adhuc quippiam remanserit in hac diuisione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuisorem 128, diuisum, exhibebit secunda. Atq; hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuisione superfit. Tunc enim vlterius progrediendum non est; Sed satis est, ad secunda vsq; progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ, vsq; ad gradum 100. producto, qualis est duodecimus, filum perpendiculi abscidisse partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus distributus est. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud; inuenienturq; gradus 15. supereruntq; in diuisione 80. quę ducta in 60. faciunt 4800. quę diuisa per 128. dant minuta 37, & supersunt adhuc 64. quæ si ducâtur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilq; in diuisione supereſt. Arcus ergo Q 20, vel arcus Quadrantis BC, inter C, & filum perpendiculi includit gr. 15. Min. 37. Sec. 30. Rursus ponamus ex octauo quadrante RS, vsq; ad gradum 96. producto filum perpẽdiculi abscidisse partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. pręcisè arcui abscisso conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis sextidecimi MN, vsque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producenturquoque grad. 52. præcisè. atque ita de cæteris; dummodo sis memor, vt si quid in diuisionibus superfuerit, residua diuisionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt actum est.

DEMONSTRATIO huius operationis perspicua est. Quoniam enim est, (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vsque ad grad. 104. productus, quatenus in 128. partes sectus est, ad arcum NO, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, respectu eorundem graduum; efficitur, vt si fiat quemadmodum partes 128, totius arcus NM, vsque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

Constructio & vsus tabellæ pro minutis & secundis.

8. IN gratiam autem studiosorum placet hic tabellam inserere, in qua ex residuo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & secunda illi residuo respondeant: Ita vt opus sit semel tantum regulam auream adhibere. Construitur autem tabella, si singula residua, quæ plura, quam 127, esse nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt structura, & vsus huiusce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vsque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia verò in diuisione supersunt 24. sub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & posterior secunda; Ita vt arcus à filo abscissus complectatur grad. 27: Min. 11. sec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, si residuum diuisionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio est de reliquis tabellę numeris. Nam semper superior numerus est ille, qui in diuisione remansit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & posterior ad secunda spectat.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MInuta, ac Secunda residuo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in supra nominatæ tabulæ constructione eruuntur, respondeant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0. 28	0.56	1. 24	1. 52	2. 21	2.49	3. 17	3. 45	4.13	4. 41	5. 9	5.37
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
6. 6	6. 34	7. 2	7.30	7. 58	8. 26	8.54	9.22	9. 51	10. 19	10.47	11.15
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
11. 43	12. 11	12. 39	13. 7	13. 36	14. 4	14.32	15. 0	15. 28	15. 56	16.24	16.52
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
17. 21	17.49	18.17	18.45	19. 13	19.41	20. 9	20.37	21. 6	21. 34	22. 2	22.30
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
22. 58	23.26	23. 54	24 22	24. 51	25. 19	25.47	26. 15	26.43	27. 11	27.39	28. 7
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
28.36	29. 4	29.32	30. 0	30.28	30.56	31. 24	31 52	32. 21	32.49	33. 17	33. 45
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
34. 13	34.41	35. 9	35.37	36. 6	36.34	37. 2	37.30	37.58	38.26	38.54	39.22
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.
39. 51	40.19	40.47	41. 15	41.43	42. 11	42.39	43. 7	43.36	44. 4	44.32	45. 0
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.
45.28	45.56	46.24	46.52	47.21	47.49	48.17	48.45	49.13	49.41	50 9	50.37
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
51. 6	51. 34	52. 2	52.30	52.58	53.26	53.54	54.22	54 5	55. 19	55.47	56. 15
121	122	123	124	125	126	127	128				
M. S	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.				
56.43	57 11	57.39	58. 7	8 36	59. 4	59.32	60. 0				

Constructio & vsus tabulæ sequentis.

9. PORRO vt studiosos omni labore supputandi leuaremus, composita à nobis est sequens tabula, in qua confestim apparet, quot gradus, minuta, ac secunda cuilibet parti cuiusuis Quadrantis respondeant. Nam si in latere tabulæ sinistro sumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta semidiametrum A C, illi quadranti appositus, in vertice verò eiusdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abscissarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abscissi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vsque ad grad. 104. productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ sumatur numerus 30. partium, & in sinistro latere numerus quadrantis 16. deprehendentur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vsque ad grad. 103. fuit productus; si in vertice tabulę accipiatur numerus 111. partium, & in latere sinistro numerus Quadrantis 15. reperientur in angulo communi gradus 89. min. 19. sec. 13. Atq; ita de cæteris. Constructio tabulę ex dictis obscura non est. Nam si fiat, vt 128, ad 1. ad 2. ad 3. ad 4. & ita deinceps, vsque ad 128. ita numerus graduum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiusque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi satis esse videantur: Si quis tamen plures describere velit, facilè tabulam extendere poterit secundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua secunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuisoris 128. assumpsimus vnum secundum integrum.

Quo pacto tabula 40 Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes sine ope aureæ regulæ.

IAM verò si quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit sine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac secundis quadragesimi Quadrantis, qui vsque ad grad. 128. productus fuit, adiiciantur differentiæ inter gradus, minuta, ac secunda quadragesimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac secunda aliorum quadrantum infra Quadragesimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac secunda quadrantum supra quadragesimum. Nam gradus, minuta, ac secunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus sit quadragesimus, alij verò duo æqualiter ab eo distent, obseruant proportionem Arithmeticam continuam, vt hic apparet,

Partes	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
42	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna superant se continuè secundis 28. In secunda verò columna secundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoq; Numeri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna

superant

ſuperant ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adijciantur ordine ad gradus, minuta, ac ſecunda Quandrantis 40. componentur gradus, Minuta ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter gradus, Minuta ac Secun. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus, Minutis, ac ſecundis Quadrātis 40. conficient gradus minuta, ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus, Minuta, ac Secunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, Minutis, & ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50. &c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ANte conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	57	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes	8			9			10			11			12			13			14		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0
2	5	37	30	6	19	41	7	1	52	7	44	4	8	26	15	9	8	26	9	50	37
3	5	41	15	6	23	54	7	6	34	7	49	13	8	31	52	9	14	32	9	57	11
4	5	45	0	6	28	7	7	11	15	7	54	22	8	37	30	9	20	37	10	3	45
5	5	48	45	6	32	21	7	15	56	7	59	32	8	43	7	9	26	43	10	10	19
6	5	52	30	6	36	34	7	20	37	8	4	41	8	48	45	9	32	49	10	16	52
7	5	56	15	6	40	47	7	25	19	8	9	51	8	54	22	9	38	54	10	23	26
8	6	0	0	6	45	0	7	30	0	8	15	0	9	0	0	9	45	0	10	30	0
9	6	3	45	6	49	13	7	34	41	8	20	9	9	5	37	9	51	6	10	36	34
10	6	7	30	6	53	26	7	39	22	8	25	19	9	11	15	9	57	11	10	43	7
11	6	11	15	6	57	39	7	44	4	8	30	28	9	16	52	10	3	17	10	49	41
12	6	15	0	7	1	52	7	48	45	8	35	37	9	22	30	10	9	22	10	56	15
13	6	18	45	7	6	6	7	53	26	8	40	47	9	28	7	10	15	28	11	2	49
14	6	22	30	7	10	19	7	58	7	8	45	57	9	33	45	10	21	34	11	9	22
15	6	26	15	7	14	32	8	2	49	8	51	6	9	39	22	10	27	39	11	15	56
16	6	30	0	7	18	45	8	7	30	8	56	15	9	45	0	10	33	45	11	22	30
17	6	33	45	7	22	58	8	12	11	9	1	24	9	50	37	10	39	51	11	29	4
18	6	37	30	7	27	11	8	16	52	9	6	34	9	56	15	10	45	56	11	35	37
19	6	41	15	7	31	24	8	21	34	9	11	45	10	1	52	10	52	2	11	42	11
20	6	45	0	7	35	37	8	26	15	9	16	52	10	7	30	10	58	7	11	48	45
21	6	48	45	7	39	51	8	30	56	9	22	2	10	13	7	11	4	13	11	55	19
22	6	52	30	7	44	4	8	35	37	9	27	11	10	18	45	11	10	19	12	1	52
23	6	56	15	7	48	17	8	40	19	9	32	21	10	24	22	11	16	24	12	8	26
24	7	0	0	7	52	30	8	45	0	9	37	30	10	30	0	11	22	30	12	15	0
25	7	3	45	7	56	43	8	49	41	9	42	39	10	35	37	11	28	36	12	21	34
26	7	7	30	8	0	56	8	54	22	9	47	49	10	41	15	11	34	41	12	28	7
27	7	11	15	8	5	9	8	59	4	9	52	58	10	46	52	11	40	47	12	34	41
28	7	15	0	8	9	22	9	3	45	9	58	7	10	52	30	11	46	52	12	41	15
29	7	18	45	8	13	36	9	8	26	10	3	17	10	58	7	11	52	58	12	47	49
30	7	22	30	8	17	49	9	13	7	10	8	26	11	3	45	11	59	4	12	54	22
31	7	26	15	8	22	2	9	17	49	10	13	36	11	9	22	12	5	9	13	0	56
32	7	30	0	8	26	15	9	22	30	10	18	45	11	15	0	12	11	15	13	7	30
33	7	33	45	8	30	28	9	27	11	10	23	54	11	20	37	12	17	21	13	14	4
34	7	37	30	8	34	41	9	31	52	10	29	4	11	26	15	12	23	26	13	20	37
35	7	41	15	8	38	54	9	36	34	10	34	13	11	31	52	12	29	32	13	27	11
36	7	45	0	8	43	7	9	41	15	10	39	22	11	37	30	12	35	37	13	33	45
37	7	48	45	8	47	21	9	45	56	10	44	32	11	43	7	12	41	43	13	40	19
38	7	52	30	8	51	34	9	50	37	10	49	41	11	48	45	12	47	49	13	46	52
39	7	56	15	8	55	47	9	55	19	10	54	51	11	54	22	12	53	59	13	53	26
40	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	[illegible]	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	19	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	11	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	45	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	15	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	58	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	37	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	6	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	53	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Partes.	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	29	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	28	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	49	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	30	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	35	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	54	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	35	7	38	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	32	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus sine ordo Quadrantum.

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes.	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	33	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	54	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	54	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	4	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	42	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	35	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	22	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	11	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45	0	46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	59	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	57	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	52	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus siue ordo Quadrantum.

Partes	64			65			66			67			68			69			70		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0
2	45	0	0	45	42	11	46	24	22	47	6	34	47	48	45	48	30	56	49	13	7
3	45	30	0	46	12	39	46	55	19	47	37	58	48	20	37	49	3	17	49	45	56
4	46	0	0	46	43	7	47	26	15	48	9	22	48	52	30	49	35	37	50	18	45
5	46	30	0	47	13	36	47	57	11	48	40	47	49	24	22	50	7	58	50	51	34
6	47	0	0	47	44	4	48	28	7	49	12	11	49	56	15	50	40	19	51	24	22
7	47	30	0	48	14	32	48	59	4	49	43	36	50	28	7	51	12	39	51	57	11
8	48	0	0	48	45	0	49	30	0	50	15	0	51	0	0	51	45	0	52	30	0
9	48	30	0	49	15	28	50	0	56	50	46	24	51	31	52	52	17	21	53	2	49
10	49	0	0	49	45	56	50	31	52	51	17	49	52	3	45	52	49	41	53	35	37
11	49	30	0	50	16	24	51	2	49	51	49	13	52	35	37	53	22	2	54	8	26
12	50	0	0	50	46	52	51	33	45	52	20	37	53	7	30	53	54	22	54	41	15
13	50	30	0	51	17	21	52	4	41	52	52	2	53	39	22	54	26	43	55	14	4
14	51	0	0	51	47	49	52	35	37	53	23	26	54	11	15	55	59	4	55	46	52
15	51	30	0	52	18	17	53	6	34	53	54	51	54	43	7	55	31	24	56	19	41
16	52	0	0	52	48	45	53	37	30	54	26	15	55	15	0	56	3	45	56	52	30
17	52	30	0	53	19	13	54	8	26	54	57	39	55	46	52	56	36	6	57	25	19
18	53	0	0	53	49	41	54	39	22	55	29	4	56	18	45	57	8	26	57	58	7
19	53	30	0	54	20	9	55	10	19	56	0	28	56	50	37	57	40	47	58	30	56
20	54	0	0	54	50	37	55	41	15	56	31	52	57	22	30	58	13	7	59	3	45
21	54	30	0	55	21	4	56	12	11	56	3	17	57	54	22	58	45	28	59	36	34
22	55	0	0	55	51	34	56	43	7	57	34	41	58	26	15	59	17	49	60	9	22
23	55	30	0	56	22	2	57	14	4	58	6	6	58	58	7	59	50	9	60	42	11
24	56	0	0	56	52	30	57	45	0	58	37	30	59	30	0	60	22	30	61	15	0
25	56	30	0	57	22	58	58	15	56	59	8	54	60	1	52	60	54	51	61	47	49
26	57	0	0	57	53	26	58	46	52	59	40	19	60	33	45	61	27	11	62	20	37
27	57	30	0	58	23	54	59	17	49	60	11	43	61	5	37	61	59	32	62	13	26
28	58	0	0	58	54	22	59	48	45	60	43	7	61	37	30	62	31	52	63	26	15
29	58	30	0	59	24	51	60	19	41	61	14	32	62	9	22	63	4	13	63	59	4
30	59	0	0	59	55	19	60	50	37	61	45	56	62	41	15	63	36	34	64	31	52
31	59	30	0	60	25	47	61	21	34	62	17	21	63	13	7	64	8	54	65	4	41
32	60	0	0	60	56	15	61	52	30	62	48	45	63	45	0	64	41	15	65	37	30
33	60	30	0	61	26	43	62	23	26	63	20	9	64	16	52	65	13	36	66	10	19
34	61	0	0	61	57	11	62	54	22	63	51	34	64	48	45	65	45	56	66	43	7
35	61	30	0	62	27	39	63	25	19	64	22	58	65	20	37	66	18	17	67	15	56
36	62	0	0	62	58	7	63	56	15	64	54	22	65	52	30	66	50	37	67	48	45
37	62	30	0	63	28	36	64	27	11	65	25	47	66	24	22	67	22	58	68	21	34
38	63	0	0	63	59	4	64	58	7	65	57	11	66	56	15	67	55	19	68	54	22
39	63	30	0	64	29	32	65	29	4	66	28	36	67	28	7	68	27	39	69	27	11
40	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	45	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	52
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus sinuum Quadrantum.

Partes	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	70	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	56	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	23	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	11	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	36	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	2:	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	0	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

Numerus sinuum ordo Quadrantum.

Partes	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	50	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	30	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
10	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
11	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
12	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
13	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
14	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
15	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
16	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
17	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
18	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
19	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
20	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
21	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
22	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
23	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
24	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
25	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
26	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
27	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	57	39	80	51	34	81	45	28
28	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
29	77	41	43	78	36	3	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
30	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
31	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
32	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
33	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
34	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
35	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
36	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
37	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
38	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
39	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
40	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0

Numerus sive ordo Quadrantum.

Partes	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	76	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	45
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	5	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	8			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus sive ordo Quadratorum.

Partes	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	33	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	9	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	82	86	51	34	87	42	39	88	33	45	80	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	39	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus sinuum Quadrantum.

Partes.	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Numerus fue ordo Quadrantum.

Partes.	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	0																		

Partes.	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	8
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes.	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

10. QVANDO

10. QVANDO intra Quadrantem non descripti sunt plures quadrantes, sed vnicus tantum adest in 90. gradus exquisitè distributus, cognoscemus solo circini beneficio, quot Minuta, ac secunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in libello de vsu, & fabrica instrumenti horologiorũ, & in Astrolabio fecimus, hoc scilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. superioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentissimè beneficio circini, & à principio Quadrantis, id est, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vsque ad punctum X, ita vt arcus CX, sexagecuplus sit arcus t u: Quot.n. gradus integri in hoc arcu sexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et si vltra gradus integros in arcu CX, supersit aliqua particula, accipiatur ea sexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu sexagecuplo continentur, tot secunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod si adhuc aliquid supersit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui sexagecuplus est particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & insuper tot secunda, quot gradus continentur in arcu, qui sexagecuplus sit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

Quo pacto per circinum deprehendantur Minuta, ac secunda in quauis proposita gradus particula.

HOC autem ita demonstro. Quã proportionem habet arcus 60. graduum ad 1. gradum, eam habet arcus CX. ad particulam t u, cum vtrobique proportio sit sexagecupla. Igitur permutando erit, vt arcus 60. graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes sexagesimæ arcus 60. graduum, hoc est, quot gradus in arcu CX, continentur, tot sexagesimæ partes vnius gradus, id est, tot minuta in particula t u, existent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum eam habet arcus sexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vsque ad X, superest ad hanc ipsam particulam. Permutando igitur erit, vt arcus 60. Minutorum ad arcum sexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes sexagesimæ arcus 60. Minutorum, hoc est, quot minuta in arcu dictæ particulæ sexagecuplo (sumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes sexagesimæ vnius Minuti, id est, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & sic deinceps, si opus sit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed satis est, meo iudicio, si minuta diligenter inquirantur. Et si quidem particula remanens maior fuerit semisse gradus, pro illa Minutum assumatur, Minutisque inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si verò eadem particula semisse gradus fuerit minor, nihil Minutis inuẽtis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secũda includantur, q̃ 30. Si deniq; dicta particula semissi grad. fuerit æqualis, liberũ sit addere Minutis inuẽtis vnum Minutũ, vel non addere.

11. QVIA verò facilè error committi potest, si circino particulam dictam gradus, vel minuti sexagies ordine sumere velimus, rectius feceris, quando particula data semisse gradus minor est, si eam vna cum præcedente gradu acceptam primo loco quintuples, deinde hunc arcum quintuplũ duples, tertio hũc arcum duplum triples, ac tandem quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus enim hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto sexagecuplus. Quare si ex eo demãtur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerũ minutorum in data particula contentorum. Quod si per æstimationẽ cognoueris,

particulam semisse gradus minorem non superare min. 24. (Nam si superaret 24.minuta,non possemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum,totum Quadrantem excederemus,vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoscemus hoc modo. Datam particulam cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcum quadruplum duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compositi; tertio arcum hunc octuplum iterum duplabimus, vt fiat arcus sedecuplus arcus ex data particula, & vno gradu cõpositi; quarto hunc arcũ rursus duplabimus; & quinto tandem hunc duplum iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula proposita, & vno gradu sexagies & quater, cuius extremum punctam diligenter notetur. Nam si ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vnâ cum vno gradu, supererit arcus sexagecuplus eiusdem particulæ vnâ cum vno gradu; ex quo denique si demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd si data particula semisse gradus fuerit maior, explorabimus eodem modo minuta in reliqua particula minore comprehensa. Hæc namque minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehensa. Benè autem vides, quando data particula minor parum à semisse gradus differt, tutius esse quintuplare illam vnâ cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & postremò hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum sunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12. NEQVE verò semper opus est, vt particula illa gradus, vel particula minor vnâ cum vno gradu sexagies repetatur, sed satis est, vt ea aliquoties repetita incidat præcisè in aliquem gradum; quod non raro accidere solet. Nam tunc constituetur fractio, cuius numerator est numerus graduum percursorũ: Denominator autem numerus totvnitatum, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, si aliqua gradus particula vicies repetita incidat in 6. gradũ, cõplectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare si numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur, indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic si alia particula septies repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numerus productus 180. per denominatorem 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuisione supersunt 5. si ea rursum multiplicentur per 60. productusque numerus 300. per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc $42\frac{6}{7}$. secunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc est. Quoniam in priori exemplo, ita se habent 20. gradus ad 1. gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc est, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. grad. ad 20. grad. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. sint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus, quod est propositum. In posteriori verò exemplo, quia ita se habent 7. grad. ad 1. gradum, vt particula septies repetita, hoc est, vt 3. gradus ad 1. particulam; erit permutando arcus 7. graduum ad 3 grad. vt 1. grad. ad 1 particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. grad. vt vna particula ad 1. grad. Cum ergo 3. gradus sint $\frac{3}{7}$. septem graduum, complectetur quoque 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod est propositum. eademque in cęteris ratio est.

QVANDO

QVANDO particula minor cum vno gradu repetita incidit in gradum aliquem præcisè, auferendi erunt ex gradibus percursis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus enim numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui prius. Vt si particula illa minor cum 1. gradu repetita septies incidit in 10. gradum; demendi erunt 7. gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterum $\frac{1}{7}$. vnius gradus in data particula.

13. SI vicissim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum, ita agendum erit. In quadrante superiore B C, accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta desiderantur; atq; (vt confusionem vitemus) in arcum interuallo semidiametri quadrantis B C, descriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes æquales secetur, (primum, videlicet in duas: deinde vna harũ iterum in duas: Tertio vna harũ in tres; ac postremo vna harũ in quinq;) cõtinebit vna particula sexagesima numerum minutorum propositũ. Verbi gratia, si particula quæratur continens 50. min. accipiemus in arcu F G, ad interuallum semidiametri A C, descripto arcum F G, arcui C Z, graduum 50. æqualem, eumque in 60. partes æquales secabimus, primum in duas in puncto K: Deinde arcum F K, iterum in duas in puncto L; tertio arcum F L, in tres in punctis T, V. ac tandem arcum F V, in quinque. Vna namque harum 5. particularum comprehendet 50. min. ac proinde si transferatur circino in quemlibet gradum Quadrãtis B C, abscissa erunt 50. Min. ex eo gradu. Hoc ita demonstro. Quoniam est, vt arcus 60. graduum ad 1. gradum, ita arcus C Z, vel F G, graduum 50. ad sexagesimam partem eiusdem arcus F G; erit permutando, vt arcus 60. graduum ad arcum F G, graduum 50; ita 1. gradus ad sexagesimam particulam arcus F G: & conuertendo, vt arcus F G, graduum 50. ad arcum graduum 60. ita particula sexagesima arcus F G, ad 1. gradum. Cum ergo arcus F G, contineat $\frac{50}{60}$, arcus 60. graduum, continebit quoq; particula sexagesima arcus F G, $\frac{50}{60}$. vnius gradus, hoc est, 50. Min. Quod est propositum.

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abscindatur.

SED hæc res incommodissima est in paruis Quadrantibus, præsertim si pauca Minuta, vtpote 1. 2. vel 3. abscindenda sint. Quis enim in Quadrante exiguo arcum 1. gradus, vel 2. vel 3. in 60. particulas distribuat? Quamobrem commodius id, quod proponitur, efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante superiore B C, arcus grad. 61. transferatur in arcum X Y, ad interuallum semidiametri A C. descriptum, ab X, vsque ad Y. Atque hic arcus X Y, in 6. partes æquales secetur; Primum scilicet in 2. deinde vtraq; semissis in 3. Deinde prima pars in 10. particulas æquales diuidatur, ita vt quælibet harum particularũ sit $\frac{1}{60}$. arcus X Y. Et quoniam vna harum particularum est ad arcum X Y, vt 1. gradus Quadrantis B C, ad arcum 60. graduum; cum vtrobique proportio sit subsexagecupla; erit permutando vna illarum particularum ad 1. grad. vt arcus X Y, ad arcum 60. graduum. Quocirca quemadmodum arcus X Y, arcum grad. 60. continet semel, & insuper vnam eius partem sexagesimam, id est, 1. ad grad. ex constructione; Ita quoq; vna illarum particularum comprehendet 1. gradum semel, & insuper vnam partem sexagesimam vnius gradus, hoc est, 1. Minutum. Ex quo fit, vt duæ particulæ complectantur 2. grad. & insuper 2. Minuta. At vero 3. particulæ contineant 3. grad. & 3. Min. & sic deinceps.

ITAQVE si in Quadrantem B C, transferatur vna particula sexagesima arcus X Y, à puncto C, vel à quouis gradu, habebitur 1. Min. in 2. gradu, vel quouis alio. Et si duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta:

tia autem Min. in 4. gradu, si tres particulæ transferantur, & sic de cæteris.

PARI ratione, si quis desideret quotlibet gradus, ac Minuta, inquirenda prius erit particula Minutorum, quæ desiderantur, eaque ad gradus propositos adijcienda. Quod si particula minutorum inuentorum tam exigua fuerit, vt circino vix accipi possit, accipienda ea erit vnà cum 1. gradu: & hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propositum minus vno. Vt si velit quis grad. 89. Min. 59. Inueniendæ prius erunt 59. Minuta. quod fiet, si 59. particulæ arcus XY, in Quadrantem BC, transferantur. Nam particula in 60. gradu complectetur 59. Min. vt dictum est. Si igitur arcus ex illa particula, & 1. grad. conflatus adijciatur ad arcum 88. grad. conficietur arcus grad. 89. Min. 59. Eademque ratio est de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. si vnus pes circini in puncto 50. statuatur, & alter in nona particula primæ partis sextæ totius arcus XY, versus X. Ita accipientur quoque particulæ 49. 48. 39. 34. &c. vt perspicuum est.

IAM vero si Minuta non in Quadrante BC, sed in maiori, minoriue accipienda sint, inquirenda ea erunt in Quadrante BC, beneficio arcus XY, vt docuimus; Deinde arcui inter C, & finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrãte proposito arcus similis. quod fiet, si ille Quadrans ex centro A, describatur, rectaque ex A, per finem particulæ in BC, inuentæ educatur, &c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiusque particulæ in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuisa.

14. QVÆ Num. 13. præcedenti diximus, perbelle etiam quadrant in lineas rectas. Nam eadem ratione cognoscemus, si linea recta in quotuis partes æquales secetur, quantam fractionem quælibet particula vnius partis contineat: Et vicissim quo pacto ex vna parte abscindenda sit quæcunque fractio proposita. Quæ res incredibile est, quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis, tum verò maxime Dimensionibus, quæ per scalam altimetram fieri solent, afferat, vt lib. 3. cum de Quadrato Geometrico, vbi scalæ altimetræ vsus apparebit, perspicuum erit. Sit enim recta linea AB, vt ad pedem Quadrantis superioris vides, secta in 10. partes æquales. (In tot enim partes libet tam vmbram rectam, quam versam scalæ altimetræ distribuere: quamuis ab alijs vtraque in 12. diuidatur: quod per illam diuisionem facilius Dimensiones perficiantur, vt suo loco patebit. Magis tamen probarem, si vtrumque vmbræ latus in 100. partes secaretur, si id magnitudo instrumenti commode permittit) propositumque sit, quot partes decimas contineat particula DC, partis quintæ. Beneficio circini sumpta particula DC, decupletur ab A, vsque ad E. Et quoniam in AE, continentur sex partes totius lineæ AB, continebit propterea particula DC. $\frac{6}{10}$. vnius partis decimæ, hoc est, $\frac{6}{100}$. totius lineæ. Ita vt si recta AB, diuisa cogitetur in 100. partes, tribuendo singulis decimis partibus denas particulas, segmentum AC, comprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. superest adhuc particula FE, vnius decimæ, si ea rursum decupletur ab A, vsque ad G, reperientur in AG, octo partes totius lineæ AB. Continet ergo particula FE, $\frac{8}{10}$. vnius decimæ, hoc est, proposita particula DC, vltra $\frac{6}{10}$. vnius partis rectæ AB, continet insuper $\frac{8}{10}$, vnius decimæ, (vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$. vnius partis. si singulæ partes decimæ rectæ AB, diuisæ essent in 100. particulas; atque adeo, si recta AB, secta intelligatur in 1000. partes, tribuendo singulis decimis partibus centenas particulas segmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$. quippe cum in AD, contineantur

tur $\frac{400}{1000}$. Et in D C, $\frac{68}{100}$. vnius partis rectæ AB, siue $\frac{68}{1000}$. totius lineæ AB; cum quælibet centesima particula vnius partis decimæ sit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quæ in particula DC, continentur. nimirum ad fractionem à 10000. denominatam, &c. sed satis mihi videtur ad partes millesimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem est, quæ in gradibus, ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10. partium ad 1. partem, quam recta A E, ad particulam D C, cum vtrobique proportio sit decupla, ideoque permutando erit vt recta 10. partium ad rectam A E, ita 1. pars ad particulam D C. Quamobrem sicut in AE, continentur $\frac{6}{10}$. rectæ A B, decem partium, & insuper particula F E, respectu vnius partis lineæ A B, decem partium, ita quoque in particula data D C, continebuntur $\frac{6}{10}$. vnius partis, & insuper talis particula respectu vnius decimæ qualis est F E, respectu vnius partis lineæ A B, decem partium, &c.

ITAQVE, vt vides, duabus operationibus ad millesimas partes peruenitur, ac si latus totum A B, in 1000. partes sectum esset, quod consideratione dignum est. Et duo quidem numeratores decimarum eo ordine positi, quo inuenti sunt, dant Numeratorem centesimarum: cui si præponatur ad sinistram numerus integrarum partium ante datam particulam existentium, conflabitur Numerator millesimarum. Vt in superiori exemplo, quia ante datam particulam D C, reperiuntur 4. partes, inuentæque sunt $\frac{6}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic si inuentæ essent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. constitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item si in tertia parte inuentæ essent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{707}{1000}$. & sic de cæteris. Quod si recta A B, id est, latus vtriusque vmbræ diuideretur in 100. partes, reperientur partes millesimæ vnica operatione; si nimirum particula data in vna centesima decuplaretur: quia tunc intelligerentur singulæ centesimę in denas particulas subdiuisæ. Sed quia particula data in centesima aliqua parte perparua est, vt vix circino capi possit, accipiemus eam cũ vna centesima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centesimas, vt reliquę centesimæ exhibeant decimas vnius centesimę. Eadem ratione, quando data particula in linea 10. partium est perpusilla accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectę AB, à B, vsque ad finem illius particulę decuplę dabit numerum decimarum in proposita minore particula, &c. Hac ratione, si particulam CH, decuples, incides in punctum K Ergo segmẽtum B K, dabit $\frac{6}{10}$. & insuper particulam DK, vt supra; cum DK, particulę F E, sit ęqualis. Ratio huius rei est, quod ambę particulę DC, CH, decuplatę conficere debeant totam A B, vt constat.

Denominatio facilis fractionum millesimarum.

AD Maiorem quoque commoditatem pro inuestigandis partibus decimis, hoc est, pro decuplanda particula proposita, construi poterit circinus duplicis aperturę, in quo scilicet crura producta se mutuo intersecent, atque vna apertura alterius sit semper decupla, instar circini, quo linea duas in partes ęquales diuidi solet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abscissa, particula maior exhibeat eam particulam decies sumptam, vt non opus sit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi potest, quii illo circino, si recte fabricatus sit, facilius vitatur. Sed sine hoc circino, idem fieri potest per instrumentum partium, quod capite pręcedenti construximus. Nam si particula data circino capiatur, & summa diligentia ei

ſumatur in inſtrumento interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100. & 100. datæ particulæ decuplum.

Quo modo ex data linea auferendæ ſint quotcunque partes decimæ vel alia partes

15. IAM vero ſi viciſsim ex qualiber parte rectæ A B, auferendæ ſint quotcunque decimæ partes vnius, diuidendum erit ſegmentum continens numerum partium decimarum in 10. pattes æquales. Nam vna pars décima huius ſegmenti continebit decimas partes quæſitas. Vt ſi cupiat quis $\frac{7}{10}$, diuidendum erit ſegmentum rectæ A B, includens 7. partes, in 10. particulas. Quælibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{10}$. vnius partis rectæ A B. Eademq; ratio eſt de cæteris. Sed commodius hunc vſum nobis præſtabit inſtrumentum partium ſupra conſtructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abſcindemus non ſolum quotcunque decimas, ſed etiam centeſimas, decimas nonas, nonageſimas octauas, & ſic deinceps, vſque ad dimidiatam partem. Nam ſi velimus $\frac{7}{100}$. alicuius lineæ, capiemus ei lineæ interuallum inter 100. & 100. æquale. Circinus namque extenſus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæſitas. Ita quoque circini pedes inter 50. & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. Rurſus pedes circini inter 20, & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc eſt, $\frac{1}{5}$. & ſic de cæteris, vt fuſius in vſu prædicti inſtrumenti partium cap. 1. expoſuimus.

PROBLEMATA VARIA TRIANGVlorum rectilineorum.

CAPVT III.

TERTIO loco præmiſſuros nos polliciti ſumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis promptè, atque expeditè, cum id res poſtulauerit, poſsint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: poſteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porrò adſcripſimus propoſitiones noſtri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodoſio noſtro editi, in quibus problemata hæc demonſtrantur, vt ſtudioſi intelligant, vnde eorum demonſtrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM RECTANgulorum problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiuſuis trianguli patefacere.

1. Triang. rectil.

Singulis lateribus adſcribantur ſinus angulorum oppoſitorum. Latera enim eaſdem proportiones habent, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum reperiuntur.

II. LA-

II. LATVS.

Ex base, & alterutro angulorum acutorum; ac proinde & altero, notum efficere.

Vt sinus totus	*ad basem*	*Ita sinus anguli lateri quasito oppositi*	*ad latus quasitum in partibus basis.*	2. Triang. rectil.

III. LATVS.

Ex base, & altero latere cognoscere.

Vt basis	*ad sinum totum*	*ita datum latus.*	*ad sinum anguli dato lateri oppositi.*	3. Triang. rectil.

Deinde, sumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt sinus totus	*ad basem*	*Ita sinus anguli, qui lateri quasito opponitur,*	*Ad latus quasitum in partibus basis, & alterius lateris.*

IIII. LATVS.

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

Vt sinus totus	*ad latus datum.*	*Ita tangens anguli quasito lateri oppositi*	*Ad latus quasitum in partibus dati lateris.*	2. Triang. rectil.

Vel

Vt sinus anguli dato lateri oppositi.	*ad latus datum.*	*Ita sinus alterius anguli*	*ad latus quasitum in partibus dati lateris.*	2. Triang. rectil.

V. BASEM.

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inuestigare.

Vt sinus totus	*ad latus datum:*	*Ita secans angulo dato lateri adiacentis.*	*Ad basem in partibus lateris dati.*	2. Triang. rectil.

Vel

Vt sinus anguli dato lateri oppositi	*ad sinum totum.*	*Ita latus datum.*	*ad basem in partibus lateris dati.*	2. Triang. rectil.

VI. BASEM.

Ex vtroque latere perscrutari, vna cum angulis acutis.

Vt latus alterutrum datum.	*ad sinum totum:*	*Ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppositi.*	3. Triang. rectil.

Deinde, sumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt sinus totus	*ad latus alterutrum datum:*	*ita secans anguli accepto lateri adiacentis*	*ad basem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM.

Ex base, & vno latere inquirere.

3. Triang. rectil. *Vt basis* *ad sinum totum* *ita latus datum* *ad sinum anguli dato lateri oppositi*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM.

Ex vtroque latere reddere cognitum.

3. Triang. rectil. *Vt latus alterutrum* *ad sinum totum:* *ita alterum latus datum* *ad tangentem anguli huic alteri lateri oppositi.*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS A Perpendiculari facta.

Ex datis tribus lateribus cognoscere.

9. Triang. rectil. *Vt latus, in quod cadit perpendicularis* *ad summam aliorum duorum laterum* *ita differentia eorundẽ duorum laterum* *ad quartum quendam numerum.*

Et si quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semissis enim reliqui numeri dabit minus segmentum, quod ex toto latere subductum relinquet segmentum maius.

Si verò quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semissis enim reliqui numeri dabit segmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtusum: quod additum eidem lateri conflabit aliud segmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

X. LATERA DVO.

Ex tertio latere, & duobus quibusuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius sit aliorum complementum ad semicirculum, hoc est, ad grad. 180. inuenire.

10. Triang. rectil. 1. *Vt sinus anguli dato lateri oppositi* *ad latus datum:* *ita sinus alterutrius reliquorũ angulorum* *ad latus huic angulo oppositum.*

Rursus

1. Triang. rectil. *Vt sinus anguli dato lateri oppositi* *ad latus datum:* *ita sinus tertii anguli* *ad latus huic tertio angulo oppositum.*

2. In Isoscele vnius tantum lateris inuentione opus est, cum vnum datum sitcum

sit cum angulis. In æquilatero vero triangulo, si vnum latus datum sit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS.

Ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibusuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius sit aliorum complementum ad semicirculum, id est, ad grad. 180. addiscere.

Vt sinus anguli alterutri lateri dato oppositi	*ad latus oppositum datum:*	*ita sinus anguli quæsito lateri oppositi*	*ad latus quæsitum.*	10. Triang. rectil.

XII. LATVS.

Ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso colligere.

1. *Vt sinus totus*	*ad secantem complementi arcus, qui semissi aggregati datorum laterum ad sinus reuocatorum, vt sinus, debetur:*	*Ita differentia inter eam semissem, & alterutrum datorum laterum ad sinus reuocatorum.*	*ad quartũ quendam numerum.*	Problema 17. triang. sphæric.

Latera data ad sinus reuocabuntur, si vtrumq; multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus sinubus tabulæ sinuum, nimirum 5. si sinus totus statuatur 100000. vel 7. si sinus totus ponatur 10000000.

Deinde:

Vt sinus totus	*ad tangentem semissis arcus, qui detracto dato angulo ex semicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter semissẽ eiusdem arcus, & alterutrum angulorum non datorum.*

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2. *Vt semissis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem semissis arcus, qui detracto dato angulo ex semicirculo relinquitur.*	*ita differentia inter semissem aggregati duorum datorum laterũ, & vtrumlibet laterum*	*ad tangentem differentiæ inter semissem arcus prædicti, & alterutrum angulorum non datorum.*	Alio modo qui priori præferendus videtur.

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad semissem eiusdem arcus (est autem hic arcus summa duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad semicirculum, hoc est, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem verò semisse detractus reliquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Post hæc.

Vt si-

1. Triang. rectil. *Vt sinus vtrinslibet anguli inuenti ad latus oppositum: ita angulus datus ad latus oppositum quod quaeritur.*

Itaque antequam tertium latus inueniatur, disquirendi prius sunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur posteriori via Num. 2. exposita indagari, quam priori illa ratione Num. 1. explicata.

[a] *5. primi.* 3. Si duo latera sint æqualia; [a] erunt reliqui duo anguli æquales. Semissis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex semicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c.

XIII. LATVS.

Ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) exquirere.

13. triang. rectil. *1. Vt latus datum dato angulo oppositum ad sinum anguli dati: ita alterum latus datum, ad sinum anguli huic alteri lateri oppositi.*

Hic sinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppositum, si acutus fuerit: (erit autem semper acutus, quando datus angulus est obtusus) si verò fuerit obtusus, arcus sinus inuenti ex semicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum: Propterea quando datus angulus est acutus, oportet dari huius alterius speciem, vt sciamus, num acutus sit, vel obtusus. Summa autem horum angulorum ex semicirculo subtracta relinquet tertium angulum quæsito lateri oppositum. Ergo.

1. triang. rectil. *Vt sinus dati anguli ad datum latus ei oppositum; ita sinus tertii anguli inuenti quæsito lateri oppositi ad latus quæsitum.*

[b] *5. primi.* 2. Si duo latera data sint æqualia: [b] erit angulus alteri dato lateri oppositus, dato angulo æqualis.

XIIII. ANGVLOS DVOS.

Ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso, reperire.

Inuenientur ex iis, quæ data sunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum est: si nimirum inquiratur tangens differentiæ inter semissem arcus, qui detracto angulo dato ex semicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta est in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inuestigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso. Quod vt fieret, inuenti prius fuerunt alii duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS.

Ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) expiscari.

Hic etiam adhibenda est prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex iisdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. AN-

XVI. ANGVLOS OMNES TRES.

Ex tribus omnibus lateribus peruestigare.

1. Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo opposito [a] (vt nimirum perpendicularis semper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. segmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde. 1. triang. rectil.

Vt minimum latus	*ad sinum totum:*	*ita minus segmentum maximi lateris*	*ad sinum complementi anguli medio lateri oppositi.*	1. triang. rectil.

Rursus.

Vt medium latus	*ad sinum totum:*	*ita maius segmentum maximi lateris*	*ad sinum complementi anguli medio lateri oppositi.*	1. triang. rectil.

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; si eorum summa ex semicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppositus.

2. In Isoscele, ducta perpendiculari ad basem [a], quam bifariam secabit, Schol. 26. lib. 1. Eucl.

Vt alterum laterum aqualium	*ad sinum totum:*	*ita semissis basis*	*ad sinum complementi vnius angulorum aqualium ad basem.*

Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex semicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

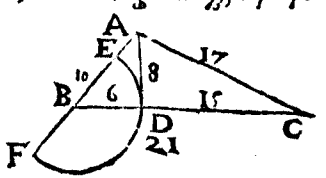
3. In æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamsi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videlicet partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS quodcunque ex angulo opposito cadentem.

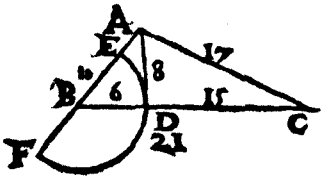
Ex tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur segmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis segmentum, & latus adiacens ducatur in summam eiusdem segmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti perpendicularem quæsitam indicabit.

In triangulo enim ABC, sit AB, 10. AC, 17. & BC, 21. inuestigandaq; sit perpendicularis AD. Per problema 9. reperietur segmentum BD, 6. & CD, 15. Differentia inter BD, & AB, est 4. quæ ducta in 16. summam rectarum BD & AB, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem AD. Quod quia in nostro tractatu triangulorum rectilineorum demonstratum non est, demonstro hoc proposito Theoremate.



Theorema.



IN triangulo rectangulo rectangulum sub differentia basis, & alterutrius lateris circa rectum angulum, & sub summa basis, & eiusdem lateris, æquale est quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

Nam in triangulo rectangulo A B D, cuius angulus D, rectus, si ex B, per D, semicirculus describatur E F D, erit A E, differentia inter basem A B, & latus B D: At A F, summa erit basis A B, & eiusdem lateris B D, cum BD, BE, B F, rectæ sint æquales. Dico igitur rectangulum sub A E, A F, æquale esse quadrato lateris A D. Recta enim A D, cum perpendicularis sit ad semidiametrum B D, [a] semicirculum tanget in D. [b] Igitur rectangulum sub A E, A F, quadrato tangentis A D, æquale erit, quod erat demonstrandum.

[a] Coroll. 16. ter.
[b] 36. ter.

FINIS LIBRI PRIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

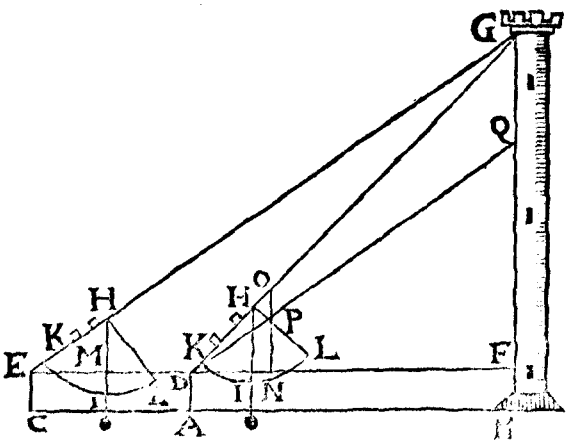
LIBER SECVNDVS.

Linearum rectarum per Quadrantem Astronomicum Dimensionem explicans.

NOMINE linearum rectarum intelligimus distantias locorum, seu interualla, longitudinesue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac postremo profunditates puteorum, vallium, atque fossarum. Ad harum Dimensiones varii varia adhibent instrumenta; quibusdam enim placet scala altimetra in dorso Astrolabii, seu planisphærii descripta. Aliis radius Astronomicus Gemmæ Frisii, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrsino nobili Romano excogitatus sit; vel baculus Iacob: Aliis annulus Astronomicus, vel Holometrum; Aliis denique alia instrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Astronomicus in 90. gradus distributus: & Quadratum Geometricum tum stabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quasdam partes æquales sint diuisa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem Astronomicum Dimensio linearum rectarum perficiatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum esse debent tabulæ sinuum, Tangentium, atque secantium in nostro Theodosio, & in aliorum auctorum libris descriptæ, vnde petendæ erunt. Superuacaneum enim esse duximus, easdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excrescat.

DISTANTIAM in plano, siue accessibilis ea sit, siue inaccessibilis per duas stationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipsam elicere.

PROBLEMA I.



SIT *distantia siue longitudo* inuestiganda AB, in plano CB, erectaque sit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis BG, licet extremum B, non appareat. Statura mensoris sit DA, ab oculo ad pedes vsque. Ne autem hæc statura mutetur, sed eadem semper maneat, recte feceris, si pro ea statura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipsi CB, parallela EF, fiat prima statio in D, Secunda verò in E, puncto remotiore: sitque recta DE, quæ differentia stationum dicitur, nota secundum aliquam mensuram vulgarem. Deinde dirigatur latus quadrantis HK, in quo sunt pinnacidia, versus fastigium G, ita vt oculus in D, positus per vtriusque pinnacidij foramina, fastigium G videat, libere pendente perpendiculo HI: diligenterque per ea, quæ cap. 2. libr. 1. Num. 7. & 10. tradita sunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus GDF, quem arcus IL, in Quadrante manifestabit, complementum videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, sit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, ęqualis nimirum angulo IHL, qui eiusdem anguli DHI, complementum etiam est. Atque hunc angulum GDF, angulum obseruationis dicemus. Eodem modo obseruetur in secunda statione angulus GEF, per radium visualem ab oculo, & per pinnacidia Quadrantis ad fastigium G, directum. Sumptis autem EM, DN, æqualibus, erigantur perpendiculares MN, NO, (in figura conuincidit MH, cum filo perpendiculi; quod nihil refert.) Si igitur EM, DN, statuantur sinus toti, erunt MH, NO, Tangentes angulorum obseruationum E, & D. Ducta quoque DQ, ipsi EG, parallela secante NO, in P, [a] erit angulus NDP, angulo E, æqualis. Cum ergo duo anguli N. D, trianguli NDP, duobus angulis M, E, trianguli MEH, sint æquales, (est enim & rectus N, recto M, æqualis) lateraque DN, EM, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt latera NP, MH; æqualia: ac proinde OP, differentia erit inter Tangentes angulorum obseruationum. [c] Quia verò est, vt OP, ad PN, ita GQ, ad QF: [d] Et vt GQ, ad QF, ita ED, ad DF; erit quoque vt OP, differentia Tangentium angulis obseruationum respondentium ad PN, siue ad HM, Tangentem remotioris stationis, ita ED, differentia stationum ad DF, distantiam quæsitam. Quocirca si fiat,

Differentia stationum.

Angulus obseruationis.

[a] *29. primi.*

[b] *26. primi.*

[c] *Schol. 4. lib. 6.*

[d] *2. sext.*

Distantiæ inuentio per tangentes.

Vt OP, differentia inter Tangentes angulorum obseruationum. *ad PN, vel HM, Tangentem minorem:* *Ita ED, differentia stationum nota in mensura aliqua vulgari* *ad aliud; hoc est ad DF,*

prodibit

prodibit distantia D F, quæsita, siue A B, in eadem mensura differentiæ stationum: cui si adijciatur differentia stationum E D, cognita etiam fiet distantia E F; vel C B, à remotiori statione.

ALITER

2. POSITO sinu toto G F, erit D F, Tangens anguli D G F, complementi anguli obseruationis GDF. quem angulum D G F, indicat arcus Quadrantis IK, à perpendiculo versus oculum, [a] cum angulus D H I, æqualis sit angulo D G F, externus interno. Eodem modo E F, Tangens erit anguli E G F, complementi alterius anguli obseruationis GEF. At ED, differentia inter eas Tangentes existet. Si igitur fiat, [a] 29. primi.

vt E D, differentia inter Tangentes angulorũ, qui cõplemẽta sunt angulorũ obseruationũ, ad D F, Tangentem complementi anguli obseruationis G D F, in propinquiore statione, hoc est, ad Tangentem minorem: Ita E D, differentia stationum nota in aliqua mensura vulgari. ad aliud hoc est, ad DF, Distantiæ inuentio alia per tangentes.

procreabitur distantia minor quæsita DF, vel A B, in eadem mensura differentiæ stationum: cui si addatur differentia stationum E D, nota quoque fiet distantia maior E F.

3. Rursus [b] si fiat, [b] 4. sexti.

Vt D N, sinus totus ad N O, Tangentem anguli G D F, in propinquiore statione: Ita D F, distantia inuenta minor ad aliud, hoc est, ad F G;

Inuenietur altitudo F G, in mensura distantiæ inuentæ D F; minoris. cui si addatur mensuris statura F B, cognita erit tota altitudo B G. Item [c] si fiat, *Altitudinis inuentio per tãgentes.* [c] 4. sexti.

Vt E M, sinus totus ad M H, tangentem anguli G E F, in remotiore statione: ita E F, distantia inuenta maior ad aliud, hoc est, ad F G,

reperietur eadem altitudo F G, in mensura distantiæ inuentæ E F, maioris, cui si addatur statura mensoris F B, nota fiet tota altitudo B G. *Altitudinis inuentio alia per tangentes.*

ALITER

4. Si per solos sinus idem expedire lubeat, erit operatio aliquando longior. Primum enim inuenienda est vtraque hypotenusa E G, D G, in aliqua mensura nota, hoc modo. [d] Quoniam angulus G D F, æqualis est duobus angulis E, EGD: si angulus E, in remotiore statione obseruatus dematur ex angulo GDF, in propinquiore statione deprehenso, reliquus fiet angulus EGD, differentia nimirum inter duos angulos obseruationum. [e] Quod si fiat, [d] 32. primi. [e] 10. Triang. rectil.

Vt sinus anguli E G D, differentia inter angulos duos obseruationum ad E D differentiam stationum notam: Ita sinus anguli D E G, vel. Ita sinus anguli E D G, cõplementi anguli G D F, ad duos rectos, ad D G, vel ad E G,

producetur tam D G, quam E G, nota in partibus differentiæ stationum. Igitur [f] si fiat, *Inuentio Hypotenusarum.* [f] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti F, ad hypotenusam D G, proxime inuentam Ita sinus anguli DGF, complementi anguli obseruationis in propinquiore statione ad D F,

Distantiæ inuentio per solos sinus.

nota fiet distantia D F, cui si adijciatur differentia stationum E D, cognita etiam erit longior distantia EF. quam inuenies quoque,[a] si fiat,

[a] *10. triang. rectil.*

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad hypotenusam EG, nuper inuentam.*	*Ita sinus anguli EGF, complementi anguli obseruationis in remotiore statione*	*ad EF.*

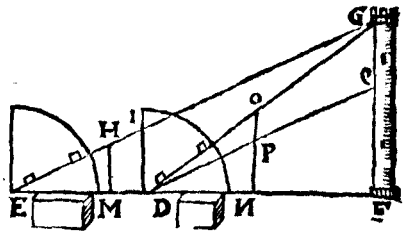
[b] *10. triang. rectil.*

Altitudinis inuentio per solos sinus.

Altitudo autem F G, per solos sinus inuenietur,[b] si fiat,

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad hypotenusam EG, vel ad hypotenusam DG:*	*Ita sinus anguli E, obseruati minoris, vel ita sinus anguli GDF, obseruati maioris*	*ad FG,* *ad FG.*

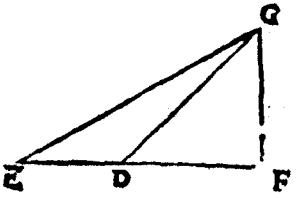
5. PER Quadrantem stabilem eodem modo dimensio fit: solum anguli obseruationum in duabus stationibus hac ratione inuestigantur. Collocato Quadrante supra basem aliquam planam Horizonti æquidistãtem, ita vt rectus sit ad Horizontem; quod beneficio alicuius perpendiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante elenia dioptram, donec per foramina pinnacidiorum fastigiũ G, videas.



Ita enim in propinquiore statione D, angulus obseruationis erit GDF; In remotiore vero GEF. Vtrumque autem metietur arcus Quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, sicut in Quadrante pendulo, vt figura demonstrat. Solum ad altitudinem F G, inuentam adijcienda erit altitudo basis; cui impositus est Quadrans, non autem statura mensoris, nisi altitudini basis sit æqualis.

Problema hoc 1. quo pacto sine numeris absoluatur.

6. IAM vero sine numeris, id est, sine multiplicatione ac diuisione numerorum omnia hæc explorari poterunt, (quod ijs, qui parum in numeris, & vsu sinuum, Tangentium, ac secantium exercitati sunt, pergratum fore non dubito.) hoc modo. In charta aliqua, vel plano construatur figura illi omnino similis, quam ab oculo vsque ad altitudinem supra concepimus esse constructã; quod ita fiet. Ex instrumento partium cap. 1. superioris libri fabricato, vel (si instrumentum non adsit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuisa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas stationes comprehenduntur; transferaturque interuallum illud circini in rectam quamcunque ex E, in D: atque in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obseruationum GDF, GEF, primæ, & secundæ stationis fiant: Punctumque G, in quo rectæ DG, EG, conueniunt, diligenter notetur, (Ne in hoc puncto erretur, propter obliquam sectionem, docebimus in sequenti lemmate, quo pacto exquisitissime deprehendi possit. Nisi enim hoc fiat, mẽsuræ nõ inueniẽtur accurate) ex quo perpẽdicularis demittatur G F Figura ita constructa, si rectæ D F, EF, F G, DG, EG, per circinum transportentur in latus 100. partium prædicti instrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuisam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini

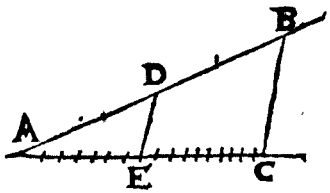


includan-

includantur. Atque tot palmos, aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehensæ fuerint.

ALITER

7. IDEM assequentur via quadam generali, quæ in omnes dimensiones quadrat. videlicet. Fiat angulus quicunque B A C. Deinde sumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propositionis, accipiatur primæ quantitati O P, (hoc est, differentiæ Tangentium angulorum obseruatorum) æqualis; vel si nimis parua est, multiplex A D. (Nos duplam accepimus) Item secũdæ P N, (hoc est, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel ęque multiplex cum A D, nimirum D B. Post hæc ex instrumento partium capiantur tot particulę A E, quot palmi, aut pedes in ED, differentia stationum continentur. Ducta autem recta D E, agatur ei parallela BC. Nam quot partes instrumenti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes distantia DF, complectetur; [a] cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales sint.



Problema hoc 1. qua ratione aliter sine numeris absoluatur

[a] *4. Sexti.*

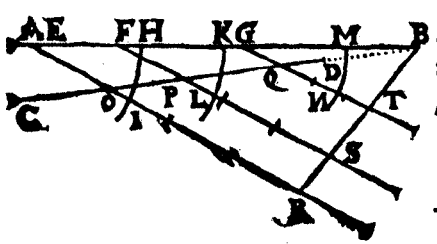
EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obseruato, vt quando sinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula sinuum sinum, abiectis quinque figuris, vt sinus totus sit 100. Verbi gratia. In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, sumenda esset æqualis 100. particulis instrumenti partium, nimirum sinui toti. At D B, æqualis hypotenusę E G, vel D G, in figura Num. 6. Et AE, si angulus E, est grad. 30. Min. 15. æqualis 50 $\frac{4}{10}$. ferme particulis: quia tantus est sinus grad. 30. Min. 15. Vel si angulus G D F, est grad. 53. Min. 20. accipienda esset AE, æqualis particulis 80 $\frac{8}{10}$. fere. Ita enim interuallum EC, dabit tot palmos, aut pedes rectę FG, quot particulę in eo comprehenduntur. Et sic de cęteris.

QVANDO autem tota regula 100. partium est nimis longa, sumi potest pro sinu toto quoduis interuallum inter 100, & 100. dummodo respectu huius sinus totius accipiantur postea sinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum secundam quantitatem DB, in recta AC; & tertiam AE, in recta DB, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

LEMMA.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.



QVOD hic proponitur, demonstratum à nobis fuit lẽmate 13. lib. 1. nostri Astrolabij pluribus viis. Sed quia eius insignis est vtilitas in puncto concursus duarum rectarum exquirendo demonstrabimus illud ipsum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ A B, C D, obliquę se in concursu B, secantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vicunque in alterata-

ra earum assumptis describantur versus alteram ad quodcunque idem interuallum arcus H I, K L, M N, ex quibus arcus quadrante minores abscindantur in I, L, N, punctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur secantes C D, in O, P, Q. Sumptis deinde in E I, productæ ipsi E O, tot partibus æqualibus vsque ad R, quot satis esse videbuntur, vt recta ex R, versus concursum ducta non valde oblique ipsas rectas secet, accipiantur in F L, G N, productis totidem partes ipsis F P, P Q, æquales vsque ad S, T. Dico tam rectam R S, quam R T, & quam S T, in punctum B, concursus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. [a] *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales sunt,* [b] *erunt rectæ E R, F S, G T, parallelæ.* [c] *Cum ergo E R, F S, G T, easdem proportiones habeant, quas E O, E P, G Q, hoc est* [d] *E B, F B, G B, habent,* [e] *cadent rectæ R S, R T, S T, in punctum B, quod est propositum.*

[a] 27. Tertij.
[b] 28. Primi
[c] 15. Quinti
[d] 4. Sexti & permutãdo.
[e] schol. 4. sexti.

H O C ergo lemma si adhibeatur, satis exquisitè in superiore figura Num. 6 punctum concursus G, deprehendetur, proindeque mensura rectarum, quas sine numeris inuenire docuimus, non multum à vero aberunt.

Quo pacto in fig. Num. 6. obliqua sectio in puncto concursus G, vitetur.

8. V E R V M commode obliquam illam sectionem in concursu G, vitabimus, si figuram hoc alio modo construemus, Fiat in figura Num. 6, angulus rectus E F G, & in quolibet puncto G, vbi concursum esse volumus, constituantur anguli F G D, F G E, æquales complementis angulorum obseruationum. Ita enim D E, respondebit differentiæ stationum, &c. Quocirca si cogitetur D E, secta in tot partes æquales, quod palmi, vel pedes in differentia stationum fuerunt assumpti, cognoscemus per ea, quæ ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex ijs partibus in distantijs D F, E F, & in altitudine F G, atque hypotenusis G D, G E, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concursus G, dubium aut incertum esse non potest, cum illud ante omnia elegerimus.

SCHOLIVM.

Vt etiam pro tyronibus semel explicemus, quid per nostrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Vt O P, differentia inter tangentes angulorum obseruationum	*ad P N, vel H M, Tangentem minorem.*	*Ita E D, differentia stationum*	*ad D F:*

Sciendum est, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter si iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco positus ducatur in eum, qui secundum locum occupat, hoc est, differentia stationum in proposito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productusque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id est, per differentiam Tangentium, diuidatur: (nisi quando primus numerus est sinus totus Tunc enim diuisio non fit, sed ex producto quinque figuræ abijciuntur, vel septem, prout sinus totus statuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum distantia D F. Eademque est ratio de cæteris.

Altitudinis inuentio per vnicam stationem, quando distantia nota est.

COROLLARIVM I.

ITAQVE quando distantia à loco mensoris vsque ad altitudinem ignotam cognita est, inuenietur altitudo per vnicam stationem. [f] Sit fiat.

Vt sinus totus	*ad Tangentem anguli obseruationis:*	*Ita distantia nota*	*ad altitudinem.*

[f] 4. *Triang. rectil.*

Hoc enim demonstratum est Num 3. huius problematis 1. tam per angulum obserua-

seruationis GDF, & distantiam DF, quam per angulum obseruationis GEF, & distantiam EF. Vtroque enim modo inuenta est altitudo GF.

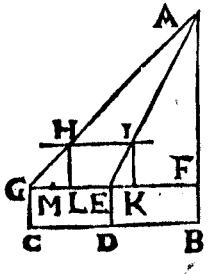
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM etiam est, si G, sit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem posse metiri per duas stationes D, E, in plano factas: si nimirum prius inuestigetur recta DF, vel EF, ab oculo mensoris vsque ad perpendicularem GF, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiãsi eius extremum F, non videamus. *Altitudo mõtis quo pacto inuestigetur.*

ALTITVDINEM inaccessibilem, quando distantia à loco mẽsoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoque ipsam eruere, etiam si extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1. SIT inquirenda altitudo AB, siue ea turris sit, siue mons, siue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis est altitudo, sit CB. Statura mẽsoris DE. Ducta autem cogitatione per E, ipsi CB, parallela GF, fiat prima statio in D, propinquior, secunda vero in G, remotior, vt differentia stationum sit GE. Deinde per radios visuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obseruentur anguli AEF, AGF, siue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, siue per stabilem, vt Num 5 eiusdem problematis præcepimus. Eodem enim semper modo dicti anguli obseruantur, quando è loco inferiori altitudinis fastigium inspicitur. Cogitetur quoque ducta HI, ipsi GF, parallela, [a] vt demissæ perpendiculares HL, IK, in parallelogrammo LI, sint æquales, pro sinubus totis: quorum tangentes sunt EK, GL, angulis, I, H, qui complementa sunt angulorum obseruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus GAF, maior est angulo EAF, [b] estque priori angulus GHL, & posteriori angulus EIK, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tãgens GL, maior Tangente EK, quòd sinus toti HL, IK, æquales sint Abscindatur LM, ipsi EK, æqualis, vt GM, sit differẽtia Tangẽtium GL, EK, [c] Et quia est vt GL, ad LH, ita GF, ad FA, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; [d] Vt autem IK, ad FA, ita quoque est EK, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: [e] ac proinde erit etiam vt GM, ex GL, reliqua ad GE, ex GF, reliquam, ita tota GL, ad totam GF, hoc est, [f] ita LH, sinus totus, ad FA. Quamobrem si fiat.



[a] *34. prim.*
[b] *29. primi.*
[c] *4. sexti.*
[d] *4. sexti & permutando*
[e] *19. quinti*
[f] *4 sexti & permutando.*

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obseruationum *ad GE, differentiam stationum.* *ita LH, sinus totus.* *ad FA,*

Altitudinis inuentio per Tangentes.

inuenta erit altitudo F A, in partibus differentiæ stationum, cui si adijciatur F B, statura mensoris, tota altitudo AB, nota euadet.

2. ITEM si fiat.

Vt G M, differentia Tangentium complementorum angulorum obseruationum.	*ad G E, differentiam stationum:*	*ita G L, Tangent complementi anguli obseruationis in remotiori statione*	*ad G F,*

Distantiæ inuentio.

efficietur nota G F, distantia maior, quandoquidem paulo ante demonstratum est, esse GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod si ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia stationum, nota relinquetur EF, distantia minor.

ALITER.

[a] *32. primi.*

3. Si per solos sinus dimensio instituatur, inuestiganda primum erit alterutra hypotenusarum GA, EA, vel vtraque. hoc scilicet modo. [a] Quoniam angulus A E F, duobus G, G A E, æqualis est, si angulus G, in remotiore statione tollatur ex angulo AEF, in statione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF obseruationum.

[b] 10. triang. rectil.

[b] Ergo si fiat,

Vt sinus anguli G A E, differentiæ inter duos angulos obseruationum	*ad G E, differentiam stationum:*	*ita sinus anguli A G E, vel ita sinus anguli G E A, complementi anguli A E F, ad duos rectos.*	*ad AE, ad GA,*

Hypotenusarum inuentio.

nota fiet tam A E, quam A G, in partibus differentiæ stationum.

[c] 10. triang. rectil.

[c] Si igitur fiat.

Vt sinus totus anguli recti F,	*ad rectam E A: vel ad rectam G A, proximè inuentam*	*ita sinus anguli AEF, in propinquiore statione, vel ita sinus anguli A G F, in remotiore statione*	*ad A F, ad AF,*

Altitudinis inuentio per solos sinus.

signetur altitudo A F, & si adiungetur F B, statura mensoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

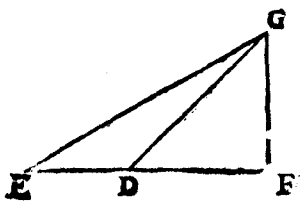
DISTANTIA autem vtraque E F, G F, per solos etiam sinus inuenietur, [d] si fiat.

[d] 10. triang. rectil.

Distantiæ inuẽtis per solos sinus.

Vt sinus totus anguli recti F.	*ad hypotenusam E A. vel ad hypotenusam G A:*	*ita sinus anguli E A F, complementi anguli in propinquiore statione, vel ita sinus anguli G A F, complementi anguli in remotiore statione.*	*ad E F.*

Problemaque pacti si sine numeris soluatur.



4. SINE numerorum multiplicatione ac diuisione eadem inuestigabuntur, si illi figuræ, quam ab oculo mensoris ad altitudinem vsque concepimus esse construendam, similem omni diligentia constituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus

diximus, vt manifestum est, si in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur F G, & distantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiusdem problematis 1. tradita sunt.

COROLLARIVM I.

ITAQVE si altitudo fuerit nota, inuenietur distantia per vnicam stationem, si fiat.

Distantia inuentio per vnicam stationem, quando altitudo nota est.

Vt sinus totus A F,	*ad Tangentem F E, complementi anguli in propinquiore statione: vel ad Tangentem F G, complementi anguli in remotiore statione:*	*ita altitudo nota A F,*	*ad distantiam FE, vel ad distantiam F G.*

ITEM si distantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoq; stationem, si fiat, a 4. triang. rectil.

Vt sinus totus G F,	*ad A F, Tangentem anguli G, obseruati in remotiori statione:*	*ita G F, distantia nota*	*ad AF, altitudinem*

Vel

Vt sinus totus E F,	*ad AF Tangentem anguli E, obseruati in statione propinquiore:*	*ita EF, distantia nota,*	*ad A F, altitudinem.*

COROLLARIVM II.

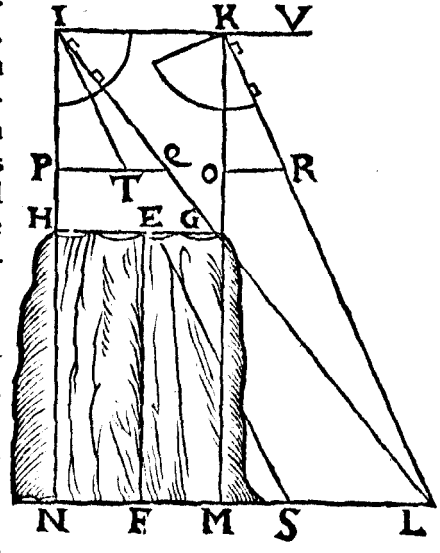
MANIFESTVM etiam est, si punctum A, sit cacumen alicuius montis eodem pacto inuestigari posse lineam perpendicularem A F, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: si nimirum duæ stationes fiant in E, G.

EX VERTICE montis, aut turris, in cuius summitate duæ stationes fieri possint, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipsius montis, turrisue dimetiri. Atque hinc ipsam quoque distantiam à turris basi, vel perpendiculo montis ad signum illud inuestigare.

PROBLEMA III.

1. SIT mons, aut turris G H N M, cuius altitudo perpendiculum E F, vel etiam latus turris G M, vel HN. Eligantur duæ stationes in G, H; & ab oculo mensoris tam in I, quam in K, posito cerni possit signum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons insistit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, versus L, diligenterq; angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemque pacto angulus I, obseruetur. Per Quadrantem stabilem vterque obseruabitur, si vnum eius latus ad Horizontem sit rectũ, (quod tum demũ fiet,

quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina signum L, cerni possit. Nam arcus inter dictum latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obseruationis metietur. Intelligatur quoque filum perpendiculi in vtroque situ Quadrantis penduli, vel latus quadrantis stabilis ad Horizontem rectum productum vsque ad basem montis, aut turris ad M, N. Sũptis deinde rectis æqualibus K O, I P, pro sinubus totis, ducantur P Q, O R, ad I N, K M, perpendiculares, [a] quæ parallelæ erunt plano Horizontis, hoc est, rectę N L; & Tangentes angulorũ obseruationum I, K [b] Ipsæ autem H N, G M, altitudini E F, æquales erunt. Et quoniam in triangulis I N L, K M L, anguli recti N, M, sunt æquales, & I L N, minor quam K L M, pars toto; erit reliquus N I L, reliquo M K L, maior, ideoque & Tangens P Q, Tangente O R, maior. Abscissa ergo P T, ipsi O R, æquali; [c] quia est vt I P, sinus totus ad P Q, Tangentem maioris anguli obseruationis, ita I N, ad N L: erit permutando, vt I P, ad I N, ita P Q, ad N L. Eademque ratione erit, vt K O, ad K M, hoc est, vt I P, ad I N, [d] (cum K O, K M, ipsis I P, I N, sint æquales) ita O R, hoc est, ita P T, ad M L; atque ideo erit, vt P Q, ad N L, ita P T, ad M L. Quia ergo est, vt tota P Q, ad totam N L, ita P T, ablata ad M L, ablatam, [e] erit quoque reliqua T Q, differentia Tangentium, ad reliquam N M, differentiam stationum, [f] (quod N M, H G, æquales sint.) vt tota P Q, ad totam N L, [g] hoc est, vt I P, ad I N. Quâobrem si fiat.



[a] 28. primi.
[b] 34. primi.
[c] 4. sexti.
[d] 34. primi.
[e] 19. quinti.
[f] 34. primi.
[g] 4. sexti.

Vt T Q, differentia inter Tangentes angulorum obseruationum, ad N M, vel H G, differentiam stationum: ita sinus totus I P, ad I N,

Altitudinis inuentio.

reperietur recta I N, ex qua si dematur I H, statura mensoris, nota relinquetur H N, vel E F, altitudo quæsita. Et si rursus fiat,

Vt T Q, differentia Tangentium, ad N M, vel G H, differentiam stationum: ita P Q, Tangens maior ad N L, distantiam.

Distantiæ inuentio.

nota fiet distantia N L; à qua si subtrahatur N F, vel H E, quam metiri licebit, cognita relinquetur F L, distantia à perpendiculo montis. Vel si dematur N M, differentia stationum, nota relinquetur distantia M L, à turri vsque ad L. Item [h] si fiat.

[h] 4. sexti.

Vt I P, sinus totus ad P Q, Tangentem maiorem: ita I N, paulo ante inuenta ad N L, distantiam,

inuenietur rursus distantia N L, &c.

2. VERVM ita esse T Q, differentiam Tangentium ad N M, vel H G, differentiam

rentiam ſtationum, vt eſt P Q, Tangens maior ad diſtantiam N L, vt paulo ante oſtenſum eſt, facilius demonſtrabimus, ſi ducatur recta I T, quæ producta ſecet N L, in S. Nam in triangulis I P T, K O R, duo latera I P, P T, duobus lateribus K O, O R, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, vt pote rectos. [a] Igitur anguli T, R, æquales ſunt; [b] ideoque K L, I S, parallelæ. [c] Et quia ducta I K, æqualis eſt & ipſi S L, & differentiæ ſtationum H G, vel N M, [d] liquido conſtat, ita eſſe T Q, differentiam Tangentium ad S L, quæ differentię ſtationum I K, vel H G, æqualis eſt, vt eſt P Q, Tangens maior ad diſtantiam N L,

[a] *4. primi.*
[b] *28. primi.*
[c] *34. primi.*
[d] *ſchol. 4. ſext.*

ALITER.

3. PER ſolos ſinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenuſas I L, K L, hoc modo. [e] Quoniam angulus L K V, duobus angulis L I K, I L K, æqualis eſt; ſi L I K, angulus complementi maioris anguli obſeruationis L I N, auferatur ex L K V, angulo complementi minoris anguli obſeruationis L K M, reliquus fiet angulus I K L. [f] Si ergo fiat.

[e] *32. primi.*
[f] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli I K L, differentiæ inter duos angulos complementorum angulorum obſeruationum, ad I K, differētiam ſtationum: Ita ſinus anguli I K L, conflati ex recto, & angulo obſeruationis minore, vel Ita ſinus anguli L I K, complementi maioris anguli obſeruationis. ad I L, ad K L,

euadet nota tam I L, quam K L, in menſura differentiæ ſtationum. [g] Igitur ſi fiat,

Hypotenuſarum inuētio.
[g] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N, ad Hypotenuſam proxime inuentam I L, Ita ſinus anguli I L N, complementi maioris anguli obſeruationis ad I N,

Vel

Vt ſinus totus anguli recti M, ad hypotenuſam K L, nuper inuentam: Ita ſinus anguli K L M, complementi minoris anguli obſeruationis ad K M,

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

cognita fiet altitudo I N, vel K M, ex qua ſi dematur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur H N, vel G M, hoc eſt, E F.

DISTANTIA autem vtraque N L, M L, reperietur, [h] ſi fiat.

[h] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N, vel M, ad Hypotenuſam inuentam I L, vel K L, Ita ſinus anguli maioris obſeruati N I L, vel Ita ſinus anguli minoris obſeruati M K L, ad N L, diſtantiam ad M L, diſtantiam.

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.

SINE numeris eædem rectæ I N, N L, I L, K L, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta I K, tot partium, quot palmi, pedeſue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli V K L, V I L, complementorum angulorum M K L, N I L, obſeruationum, & concurſus L, notetur, ex quo ducatur L N, ipſi I K, parallela, & ad hanc perpendicularis in I, excitetur I N, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur I N L, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat

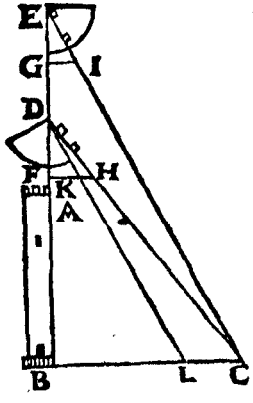
Quo pacto problema conficiatur ſine numeris.

tam angulus NLI complementi maioris anguli obseruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obseruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum est. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. scripsimus.

EX vertice montis, vel turris per duas stationes in aliqua hasta erecta, vel in duabus fenestris turris, quarum vna supra aliam existat, factas, è quibus signum aliquod in Horizonte videri possit, altitudinem ipsius montis, aut turris metiri. Atque hinc distantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vsque ad signum visum cognoscere.

PROBLEMA IV.

1. NON possunt aliquando commodè duæ stationes in summitate montis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, supra planum BC, mensuranda ex summitate A. Erigatur hasta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inspiciatur signum C, in plano per angulum BDC; Deinde idem inspiciatur ex loco superiore hastæ per angulum BEC. Vterque autem angulus obseruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per stabilem cum dioptra, vt in posteriori. Sumptis quoque æqualibus DF, EG, pro sinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obseruationum. Ducta autem DL ipsi EC, parallela secante FH, in K: [a] quoniam anguli BDL, & E, æquales sunt, & F, G, recti, nec non & latera adiacentia DF, EG, æqualia: [b] erunt latera FK, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex schol. propositionis 4. lib. 6. Euclid. est, vt KH, ad FK, ita LC, ad BL: [c] Vt autem LC, ad BL, ita est, ED, ad BD; erit quoque vt KH, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,



a 29. primi.

b 26. primi.

c 2 sexti.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obseruationum, ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem: Ita ED, spatium inter angulos obseruationum, quod notum esse potest per aliquam mensuram, ad DB,

Altitudinis inuentio.

inuenietur DB, ex qua si dematur portio hastæ AD, inter altitudinis fastigium A, & inferiorem angulum obseruationis D, nota relinquetur altitudo proposita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, si pro hasta AE, duæ fenestræ eligantur, è quibus signum C, sub iisdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini DB, inuentæ (si fenestræ sint DE,) adiicienda est portio turris inter punctum D, fenestræ inferioris, & turris fastigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. [d] Et si fiat,

d 4. sexti.

Vt DF,

Vt DF, sinus totus *ad FH, Tangentem maiorem:* *Ita DB, altitudo inuenta* *ad BC,* *Distantia inuentio.*

inuenta erit distantia BC.

ALITER.

2. POSITO sinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obseruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obseruationis D; ideoque DE, differentia illarum Tangentium. Quamobrem si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorum angulorũ obseruationum *ad DB, tangentem minorem:* *Ita DE, differentia stationum oculorum* *ad DB,*

prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima statione vsque ad basem altitudinis, &c. *Altitudinis inuentio alia.*

ALITER.

3. VT per solos sinus instituatur operatio, inuestiganda prius est vtraque hypotenusa CD, CE, vel alterutra earum, hoc modo. [a] Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis est, si minor angulus obseruationis E, ex maiori angulo obseruationis BDC, subtrahatur, notus relinquetur angulus DCE. [b] Itaque si fiat, [a] *29. primi.* [b] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli DCE differentiæ angulorum obseruationum *ad DE, differentiam stationum oculorum:* *Ita sinus minoris anguli obseruationis E,* *ad CD.*

Vel

Ita sinus anguli EDC, complementi maioris anguli obseruationis ad duos rectos, *ad CE,* Hypotenusarum inuẽtio.

reperietur tam hypotenusa CD, quam CE, in partibus differentiæ stationum DE. [c] Quapropter si iam fiat, [c] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti B, *ad hypotenusam CD,* *Ita sinus anguli BCD, complementi maioris anguli obseruationis BDC,* *ad DB,*

Vel

ad hypotenusam CE, proximè inuentam: *Vel* *Ita sinus anguli BCE, complementi minoris anguli obseruationis E;* *ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat, *Altitudinis inuentio per solos sinus.*

Vt sinus totus anguli recti B, *ad Hypotenusam CD,* *Ita sinus anguli D, maioris obseruati,* *ad BC,*

Vel

ad hypotenusam CE, nuper inuentam *Vel* *Ita sinus anguli E, minoris obseruati.* *ad BC,*

cognoscetur quoque distantia BC, per solos sinus,

4. ABS-

Distantia inuentio per solos sinus.

4. ABSQVE numeris problema efficiemus, vt in precedentibus, si nimirum in recta EB, sumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedesue in ED, differentia stationum oculorum existunt, & tam angulus E, minor obseruationis, quam BDC, maior constituatur, concursusque C, notetur, à quo ad EB, perpendicularis ducatur CB, &c. vel si angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus esse concursum, cõstituatur tam angulus BCD, complemento maioris anguli obseruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obseruationis æqualis, &c. Reliqua autem absoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6. & 8. dictum est. Idemque efficies per ea, quæ ibid. Num. 7. explicata sunt.

Problematis solutio sine numeris.

COROLLARIVM.

IGITVR si distantia signi ex turre visi vsque ad turrim nota fuerit, nimirum recta CB, reperietur altitudo turris per vnicam stationem in fastigio A factam: [a] si videlicet fiat,

[a] 4. Triang. rectil.

Vt sinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, qui complementum est anguli obseruationis D,*	*Ita distantia nota CB,*	*ad BD,*

Et si ex inuenta BD, auferatur mensoris statura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

Altitudinis inuentio per vnicam stationem quando distantia nota est.

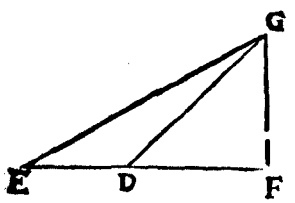
VEL PER SOLOS SINVS.

Vt sinus anguli obseruationis D,	*ad distantiam CB, notam*	*Ita sinus anguli BCD, complementi anguli obseruationis D.*	*ad BD*

QVOD si oculus D, statuatur in aliqua fenestra turris, adiicienda erit portio turris inter oculum, & fastigium ad altitudinem DB, inuentam. Ita namq; conficietur tota altitudo turris EB, si fastigium sit E, vt perspicuum est.

EX VERTICE MONTIS, AVT TVRRIS ALTITVDINEM ipsius, si in plano, cui insistit, spatium aliquod è directo mensoris notum sit, deprehendere.

PROBLEMA V.



1. QVANDO spatium aliquod DE, è directo mensoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipsam altitudinem FG, è fastigio G, hac ratione. Inspiciantur termini D, E, per angulos FGD, FGE, siue per Quadrantem, pendulum, siue siue per stabilem. Et quoniam, posito sinu toto GF, Tangentes angulorum obseruationum sunt DF, EF, ipsarumque differentia per spatium propositum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium angulus obseruationum debitarum,	*ad sinum totum GF:*	*Ita DE, spatium notum*	*ad GF,*

manifesta erit altitudo GF, quæsita in partibus spatij noti DE,

ALI-

ALITER.

2. Per solos sinus eandem altitudinem GF, adipiscemur, si prius hypotenusam GD, venabimur, hoc modo. [a] Fiat,

Vt sinus anguli DGE, differentia angulorum obseruationum, ad DE, spatium cognitum, Ita sinus anguli E, complementi maioris anguli obseruationis ad hypotenusam GD, [a] 10. triang. rectil.

Numerus enim productus dabit hypotenusam GD, in partibus spatii DE, notam. [b] Si ergo rursus fiat, [b] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti F, ad hypotenusam GD, proximè inuentam: Ita sinus anguli D, complementi minoris anguli obseruationis ad GF, altitudinem,

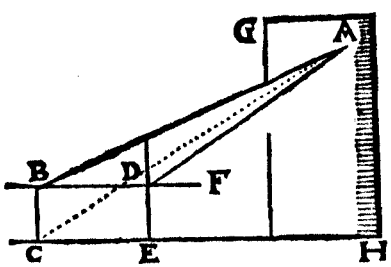
producetur altitudo GF, in partibus hypotenusæ GD, siue spatij DE, nota.

3. SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum est. *Solutio problematis sine numeris.*

DISTANTIAM ab oculo, vel pede mensoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas stationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda distantia puncti A, in muro GH, siue perpendiculari ad Horizontem, siue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, posita statura mensoris BC. Concipiatur ducta BD, ipsi plano CE, parallela, sitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inspecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis stabilis cum recta BD, facit. Deinde accede versus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vsque ad D, vt BD, differentia stationum nota sit. Rursumque ex D, punctum A, inspiciatur, notato diligenter angulo ADF: existentque rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in eodem plano, in eo videlicet, quod per staturas mensoris BC, DE, & per punctum A, ducitur, [c] Et quia angulus ADF, duobus B, & BAD, est æqualis: si angulus B, in remotiore statione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. [d] Si igitur fiat, [c] 32. primi. [d] 10. triang. rectil.



Vt sinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori differt, ad BD, differentiam stationum: Ita sinus anguli ADB, qui complementum est maioris anguli D, ad duos rectos, ad AB, distantiã quæsitam,

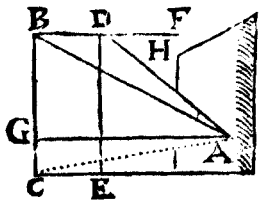
reperta erit quæsita distantia AB, in partibus differentiæ stationum.

QVOD si oculus existat in D, & recedatur à puncto D, vsque ad B, inuenietur eadem arte distantia DA, si loco anguli ADB, sumatur angulus B, in remotiore statione, vt liquet. [e] Est enim vt sinus anguli A, quo angulus minor B, [e] 10. triang rectil.

nor B, à maiori ADF, differt, ad BD, differentiam stationum: ita sinus anguli B, in remotiori statione. ad DA.

2. DISTANTIA verò à puncto A, ad pedem mensoris C, hoc est, recta AC, cognoscetur per Problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, BC, nota sint, nimirum distantia inuenta, & statura mensoris, comprehendantque angulum ABC, notum, vt pote conflatum ex recto CBD, & angulo obseruationis ABD.

3. SIT deinde punctum A, vt in muro HI, infra oculum B. Inspecto puncto A, obseruetur angulus CBA, quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cum BC, facit: Deinde accede versus A, vsque ad D, & iterum considera angulum EDA: existentque rectæ AB, AD, BD, BC, DE, in vno eodemque plano, in eo videlicet, quod per staturas mensoris BC, DE, & per punctum A, ducitur.



[a] Et quoniam angulus FDA, complementi anguli obseruationis in propinquiore statione æqualis est duobus DBA, DAB; si DBA, angulus complementi anguli remotioris stationis dematur ex angulo ADF, complementi anguli stationis propinquioris, reliquus fiet notus BAD. [b] Si ergo fiat,

a 32. primi.

b 10. Triang. rectil.

Vt sinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obseruationum	*ad BD, differentiam stationum:*	*Ita sinus anguli ADB, conflati ex recto BDE, & ex angulo obseruationis ADE, in propinquiore statione*	*ad AB distantiam quæsitã.*

cognita erit distantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ stationum BD.

QVOD si oculus ponatur in D, & recedatur à puncto D, vsque ad B, reperietur eodem modo distantia DA, si pro angulo BDA, assumes angulum DBA, complementi anguli ABC, obseruationis in remotiore statione, vt manifestum est. [c] Nam est, vt sinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obseruationum, ad BD, differentiam stationum: ita sinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore statione, ad DA.

c 10. Triang. rectil.

4. VT autem distantia CA, à pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (si ex puncto A, concipiatur ducta ad BC, staturam mensoris perpendicularis AG,) basis AB, nota est per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum sit complementum anguli obseruationis ABG; [d] Si fiat,

d 2. Triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad basem AB, proximè inuentam:*	*Ita sinus anguli BAG, complementi anguli obseruationis,*	*ad BG,*

cognoscetur BG, in partibus basis AB, hoc est, in partibus differentiæ stationum BD, in quibus AB, inuenta fuit. Ablata autem BG, ex mensoris statura BC, nota fiet reliqua CG. [e] Item si fiat,

e 2. Triang. rectil.

Vt sinus totus	*ad basem AB, nuper inuentam:*	*Ita sinus anguli obseruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiusdem basis AB, vel differentiæ stationum BD. Quia

BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta sunt; *a* cognoscetur quoq; basis AC, quod est propositum. *a* 3. triang. rectil.

5. MANIFESTVM autem est, eodem pacto vtramque distantiam AB, AC, reperiri, etiamsi punctum A, in plano sit, in quo mensor consistit, nimirum in Horizonte, qui ponatur transire per rectam AG, ita vt statura mensoris sit B G, Immo tunc per vnicam stationem vtraque distantia AB, AG, reperietur. Nam posito sinu toto B G, statura mensoris; A B, secans est anguli obseruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca si fiat,

Vt BG, sinus totus	*ad BA, secantem anguli obseruationis ABG,*	*Ita BG, statura mensoris*	*ad BA.*
	Vel		
	ad GA, Tangentem anguli obseruationis ABG:		*ad GA.*

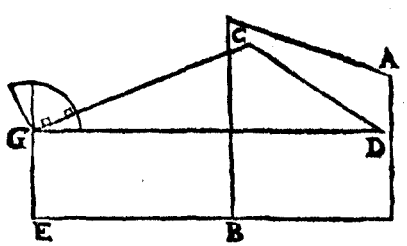
vtraque distantia & BA, ab oculo B, & G A, à G, pede mensoris cognita fiet.

6. IAM verò sine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifestum est, si rectè figura construatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum est. *Quopacto problema sine numeris sit soluendum.*

INTERVALLVM inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem rectum sit, siue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1. IN plano quolibet eleuato AB. propositum sit interuallum CD, quod ex plano EB, inuestigandum sit. Posito oculo in G, vt statura mensoris sit, GE, inuestigetur per præcedens problema 6. vtraque distantia G C, G D, in partibus staturæ mensoris G E, siue differentiæ duarum stationum, è quibus ipsæ distantiæ inuestigantur. Deinde applicato Quadrante stabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta CD, transeat, & vna eius semidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, si posita linea fiduciæ dioptræ supra illam semidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conspiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcusque inter dictam semidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur. hic enim angulum G, metietur. Quod si altera semidiameter Quadrantis vltra rectam G C, existat, erit angulus acutus C G D: Si verò altera illa semidiameter citra rectam G C, extiterit, dictus angulus erit obtusus, qui cognoscetur, si ad rectum adiiciatur reliquus angulus inter alteram illam semidiametrum, & rectam G C; quem quidem reliquum inuestigabimus per Quadrantem, vt de acuto C G D, diximus, si videlicet in recta C D, mente notemus punctum, in quod altera illa semidiameter incurreret producta. Si namque tunc semidiameter illa rectæ G C, congruat,



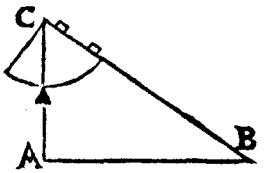
& dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam semidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si denique altera illa semidiameter præcisè in C, tendat, angulus C G D, rectus erit. Quia ergo in triangulo G C D, obliquangulo latera nota G C, G D, continent angulum notum G; cognoscetur latus C D, per problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1.

Problematis solutio sine numeris.

2. ABSQVE numeris facile problema soluetur, si fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obseruatus fuit, & in rectis G C, GD, ex instrumento partium tot particulæ sumantur, quot palmi, aut pedes in distantiis G C, G D, inuenti sunt, &c.

LONGITVDINEM lineæ rectę, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quę perpendicularis sit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, existens alterum extremum videre potest, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1. SIT exquirenda longitudo A B, hoc est, distantia inter A, & B, etiamsi puncta intermedia siue propter tumores interiectos, siue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, existens mensor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea A B, perpendiculari, ita vt A C, sit vel statura mensoris, vel hasta aliqua erecta, vel turris. Inspecto extremo B, obseruetur angulus C. Et quia posito sinu toto AC, distantia AB, est Tangens anguli obseruati C: si fiat,

Vt sinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obseruati C.*	*Ita AC, statura mensoris, vel altitudo nota,*	*Ad AB, longitudinem.*

procreabitur longitudo A B, in partibus altitudinis notæ A C. Quæ per solos sinus etiam producetur, *a* si fiat,

a 4. Triang. rectil.

Vt sinus anguli B, complenti anguli C, obseruati	*Ad AC, staturam mensoris, vel altitudinem notam.*	*Ita sinus anguli C, obseruationis*	*ad AB, longitudinem*

Solutio problematis sine numeris.

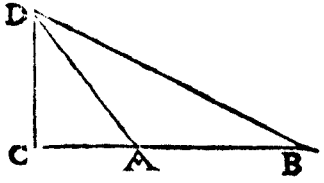
2. SINE numeris eadem longitudo A B, cognoscetur, vt in præcedentibus dictum est: si videlicet ex instrumento partium accipiatur A C, tot particularum, quot palmi, pedesue in altitudine AC, existunt, constituaturque angulus obseruationis C, ac tandem ad AC, perpendicularis excitetur AB, &c.

LONGITVDINEM, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota dimetiri.

PRO-

PROBLEMA IX.

2. SIT longitudo AB, è directo mensoris in C, existentis, ita vt recta BA, producta transeat per C. Sit quoque CD, vel statura mensoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per præcedens problema 8. inquiratur vtraque longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.



ALITER

2. POSITO sinu toto CD, si termini A, B, per angulos CDA, CDB, spectẽtur, erit CA, Tangens minoris anguli, & CB, maioris, at AB, differentia earum Tangentium. Quare si fiat,

Vt sinus totus CD, Ad AB, differentiam Tangentium angulorum obseruationum Ita CD, altitudo nota Ad AB, longitudinem,

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ CD.

ALITER

3. PER solos sinus eandem longitudinem AB, cognoscemus: sed prius inuenienda est AD,[a] hac ratione fiat,

Vt sinus anguli CAD, complementi minoris anguli obseruationis ad CD, altitudinem notam: Ita sinus totus anguli recti C, ad AD,

[a] *5. triang. rectil.*

Productus enim numerus dabit AD, notam in partibus altitudinis notæ CD,[b] Si ergo rursus fiat,

[b] *10. triang. rectil.*

Vt sinus anguli CBD, complementi maioris anguli obseruationis Ad AD, proxime inuentam Ita sinus anguli ADB, differentia inter duos angulos obseruatos ad AB, longitudinẽ,

prodibit nota longitudo AB, in partibus rectę AD, hoc est, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

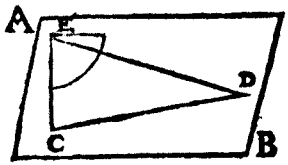
4. SINE numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

LONGITVDINEM transuersam in Horizonte, cuius vtrumq́ extremum inspici potest, notam efficere.

PROBLEMA X.

1. SIT planum Horizontis AB, in quo jaceat longitudo CD, in transuersum, pes autem mensoris sit in E, ita vt recta DC, per pedes mensoris in E, non transeat. Quando namque longitudo DC, è directo mensoris sita est, inuestigabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo tranuersa longitudo CD, nota efficiatur, inuestiganda primum erit vtriusque puncti extremi C, D, distantia à pede mensoris E, & quidem per vnicam stationem in E, factã, vt problemate 6. Num.

5. dictum est. Deinde per Quadrantem cum dioptra angulus C E D, exquirendus in plano Horizontis. quod fiet, si Quadrantis planum erectum transeat semel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt designari possint partes rectarum E C, E D. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ E C, dioptra vero rectæ E D, si angulus est acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram, angulum C E D. Quod si alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet erit angulus CED rectus: Si vero recta ED. vltra alterum latus Quadrantis extiterit, dictus angulus obtusus erit, qui cognitus erit, si recto angulo addatur reliquus inter alterum latus, & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur vt de acuto diximus in problemate 7. Atq; ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota sunt EC, E D, angulumq; notum comprehendunt C E D. [a] Igitur, & tertium latus C D, cognitum erit.



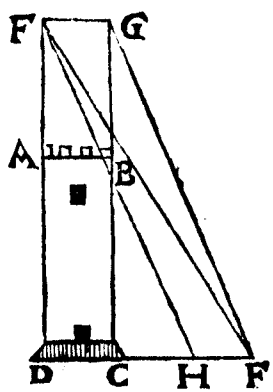
[a] 12. triang. rectil.

2. Qvo pacto autem sine ope numerorum problema perficiendum sit, traditum est in problemate 7. Num. 2.

LONGITVDINEM in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas: vel in duabus fenestris, quarum vna sit sub altera ad perpendiculum, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, demetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.

1. QVAMVIS problema hoc solutum iam sit in problemate 3. & 4. occasione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per se, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris A B CD, & longitudo proposita C E: statuta autem mensoris B G, vel AF. Inspecto extremo E, in prima statione per angulum C G E, & in secũda per angulum DFE, ducatur FH, ipsi G E, parallela. Et quia in triangulis F D H, G C E, anguli D, C, recti sunt, [b] & H, E, æquales [c] latusque FD, lateri GC. æquale: [d] erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera D H, C E. Posito autem sinu toto F D, erit DE, Tangens maioris anguli obseruationis D F E, & D H, Tangens anguli D F H, hoc est, anguli æqualis G, in prima statione obseruati: ac proinde H E, differentia erit earum Tangentium, [e] quæ quidem æqualis est differentiæ stationum F G, vel AB, vel DC. Si igitur fiat,



[b] 29. primi.
[c] 34. primi.
[d] 26. primi.
[e] 34. primi.

Vt H E, differentia Tangentium angulorum obseruationum.	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obseruationis CGE.*	*Ita HE, vel FG, differentia stationum.*	*ad G E, longitudinem,*

gigue-

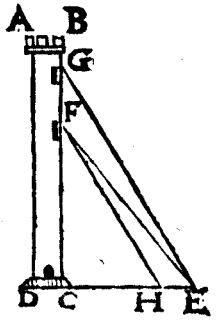
gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ ſtationum HE, vel FG, &c. Quod ſi rurſus fiat,

Vt HE, differentia Tangentium angulorum obſeruationum — *Ad FD, ſinum totum* — *Ita HE, vel FG, differentia ſtationum* — *ad FD,*

inuenietur rẽcta FD, à qua ſi tollatur ſtatura menſoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2. Sed iam ex duabus feneſtris F, G, inſpiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturq; FH, ipſi GE, parallela. *a* Quoniã igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis eſt: ſi ponatur ſinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obſeruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obſeruationis CFE: at FG, differentia ſtationum, hoc eſt, interuallum inter feneſtras, differentia erit dictarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat, *a 29. primi.*

Vt FG, differentia Tangentium cõplemẽtorum angulorum obſeruationum, — *Ad CE, ſinum totum* — *Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras,* — *ad CE, longitudinem propoſitam,*



cognita erit longitudo CE, deſiderata. Et ſi rurſum fiat,

Vt FG, differentia Tangentium complementorũ angulorũ obſeruationũ — *ad GC, Tangentem complementi minoris anguli obſeruati* — *Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras* — *ad GC,*

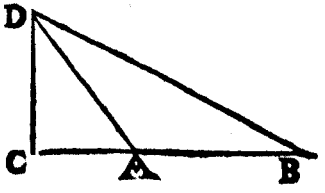
inuenta erit altitudo GC, à ſuperiori feneſtra ad baſem, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi addatur portio GB, à ſuperiori feneſtra ad faſtigium vſque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3. SINE auxilio numerorum procedendum eſt, vt in ſuperioribus.

LONGITVDINEM rectæ è directo menſoris poſitæ, cuius extremum vtrumque, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere.

PROBLEMA XII.

1. SIT longitudo AB, & menſor in extremo A, conſtitutus videre non poſſit alterum extremum, niſi ad dextram ſiniſtramue recedat vſq; ad D, punctũ, è quo vtrumq; extremũ cerni poſsit. Erit igitur longitudo AB, menſori in D, exiſtenti poſita in tranſuerſum. Quare ea per problema 10. inueſtigabitur.



2. Eodẽ modo, ſi mẽſor exiſtat in C, è directo lõgitudinis, ſed vel neutrũ extremũ, vel alterũ dũtaxat

intueri

intueri possit, longitudinem AB, venabimur. Si namque ex C, ad sinistram, vel dextram procedemus, donec in D, vtrumq; extremũ videamus, inuenietur transuersa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, siue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, siue per angulum acutum BAD, &c.

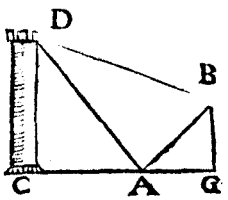
3. OPERATIO sine numeris instituenda est, vt in superioribus.

4. QVANDO mensor in A, existens videre potest extremum B, inuestigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis existat in C, & vtrumque etremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo AB.

DISTANTIAM alicuius signi in Horizonte positi, à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.



1. IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis CD, per rectam AD, quam metiri iubemur, Vbicunq; oculus mensoris existat, nimirum in B, vt sit statura mensoris BG, inuestigentur per problema 6. distantiæ punctorum A, D, ab oculo mensoris B.

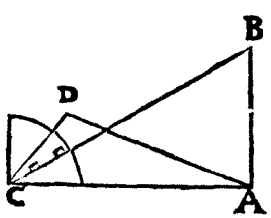
Deinde angulus exploretur ABD, quem nobis præbebit Quadrãs cum dioptra, si ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, transeat, posito centro in B; atque vnum eius latus rectæ BA, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur, &c. Itaq; cum in triangulo BAD, duo latera nota BA, BD, angulum notum contineant B; a cognoscetur quoque latus AD.

[a] *10. triang. rectil.*

2. QVA ratione eadem distantia AD, exquirenda sit absque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solũ ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIV.



1. Sit altitudo AB, ad quam ex C, loco mensoris non liceat accedere, aut ab ea recedere secundum lineam rectam, sed solum in latus, verbi gratia vsque ad D, vnde basem videre possimus. Inquiratur per problema 10. longitudo transuersa AC, ex loco D: inspiciaturque vertex B, ex C, per angulum ACB. Et quia, posito sinu toto AC, altitudo AB, Tangens est anguli obseruationis ACB, [b] si fiat.

[b] *4. Triang. rectil.*

Vt sinus

Vt sinus totus AC, ad AB, Tangentem anguli obseruati ACB: Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta Ad AB, altitudinem,

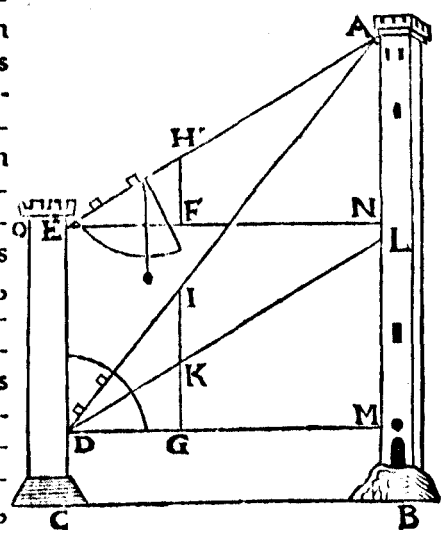
prodibit nota altitudo AB, in partibus, in quibus AC, inuenta fuit.

2. NON erit autem difficile problema hoc sine numerorum auxilio exequi, si superiora præcepta consulantur.

ALTITVDINEM inaccessibilem, quando neque distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neque è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere.

PROBLEMA XV.

1. SIT altitudo AB, locus mensoris C, distantia CB, incognita: basis B, non appareat, & à loco C, non liceat accedere ad AB, neque recedere, vt duæ stationes fiant in plano. Erigatur hasta CE, si non præstò sit turris aliqua CO, & statura mensoris sit CD. Sumpta deinde portione hastæ DE, notarum partium, concipiantur ductæ DM, EN, ipsi CB, parallelæ, obseruenturq; per Quadrantem anguli ADM, AEN. Sumptis quoq; rectis æqualibus EF, DG, pro sinubus totis, erigantur perpendiculares FH, GI, pro Tãgentibus angulorum obseruationũ. Sumpta item AL, æquali ipsi DE, ducatur recta DL, [a] quæ parallela erit ipsi EA, secabitq; GI, in K. [b] Quoniam vero angulus DKG, angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis est; erit angulus DKG, angulo EHF, æqualis: Est autem & rectus G, recto F, æqualis, & latus DG, lateri EF, æquale; [c] erunt quoq; latera GK, FH, æqualia, & anguli D, E, æquales: ideoq; IK, differentia erit inter Tangentes GI, GK, angulorum GDI, GDK, siue FEH. [d] Et quia est, vt IK, ad KG. ita AL, ad LM; erit per contrariam compositionem à nobis in scholio propos. 18. lib. 5. demonstratam, ita quoque IK, ad IG, vt AL, hoc est, vt ED, differentia stationum, ad altitudinem AM. Igitur si fiat,



[a] 33. primi.
[b] 29. primi.
[c] 26. primi.
[d] schol. 4. sexti.

Vt IK, differentia Tangentium ad IG, Tangente maiorem: Ita AL, vel ED, differentia stationum Ad AM, altitudinem,

gignetur altitudo AM, cui si apponatur statura mensoris MB, tota altitudo AB, nota efficietur. [e] Iam si fiat,

Vt GI, sinus totus ad GD, Tangentem complementi maioris anguli obseruationis: Ita altitudo inuenta AM, ad MD, distantiam,

inuenta erit distantia DM, vel CB.

2. PER solos sinus idem problema conficiemus, si prius inuestigetur hypotenusa AD, hoc modo. [f] Fiat,

[e] 4. sexti.
[f] 10. Triang.

Vt sinus recti!

Vt sinus anguli ADL, differentiæ inter angulos obseruationum ADM, LDM, *ad AL, hoc est, ad DE, differentiam stationum:* *Ita sinus anguli ALD, qui relinquitur, si DLM, complementum minoris anguli LDM, obseruati ex duobus rectis subtrahatur,*

Nam productus numerus offeret hypotenusam AD.[a] Si ergo rursus fiat,

Vt sinus totius anguli recti M, *ad hypotenusam AD inuentam:* *Ita sinus maioris anguli obseruationis ADM,* *ad AM,*

procreabitur altitudo AM, &c.[b] Si autem fiat,

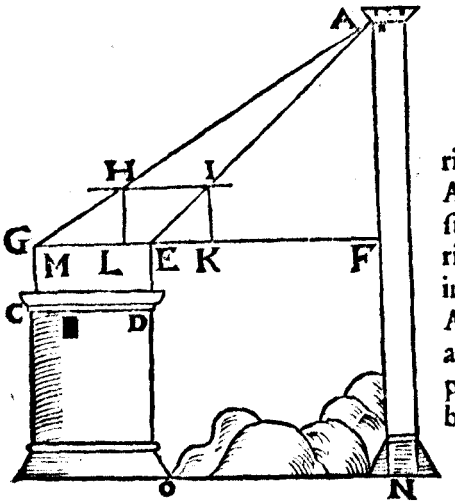
Vt sinus totus anguli recti M, *ad hypotenusam AD, proxime inuentam,* *Ita sinus anguli DAM, complementi maioris anguli obseruationis,* *ad DM,*

efficietur distantia DM, cognita.

[a] 10. triang. rectil.
[b] 10. triang. rectil.

3. Si sine numeris problema soluendum est, recurrendum erit ad superiora, præsertim ad Num. 6. 8. & 7. problematis 1.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, per duas stationes in summitate, vel in duabus fenestris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines colligere.



PROBLEMA XVI.

1. MAIOR altitudo sit AN, minor turris CO, cognita, ex qua solum cacumen A, non autem basis N, appareat. Fiant in summitate duæ stationes in C, D, mensorisque statura sit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Atque inspecto cacumine A, obseruentur anguli AEF, AGF. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, sicut in eo problemate demonstrauimus,

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H, I. qui complementa sunt angulorũ obseruationum positis sinubus totis HL, IK, *ad GE, differentiam stationum:* *Ita LH sinus totus* *ad FA,*

Inuenietur altitudo AF, cui si adijciatur FN, conflata ex altitudine turris CO, & statura mensoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item si fiat,

Vt GM, differentia Tangentium earundem. *ad GE, differentiam stationum:* *Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obseruationis* *ad GF,*

procreabitur distantia GF, à qua si dematur latitudo turris CO, reliqua erit distantia inter duas turres.

HAC omnia in 2. problemate demonstrauimus: & ob hanc causam eisdem prorsus literis hic vsi sumus, quas ibi vsurpauimus, vt demonstratio ex illo loco in hunc transferri possit.

2. QVAN-

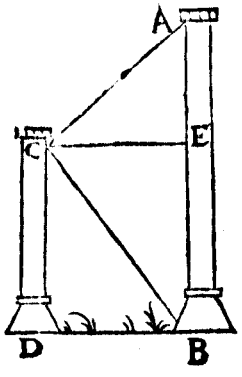
2. QVANDO in summitate turris minoris fieri duæ stationes nequeunt, eligantur duæ fenestræ, in quibus duæ stationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ fenestræ D, E, & reliqua fiant, vt in hasta CE. Solum pro statura mensoris ad altitudinem inuentam AM, adijcienda est portio turris inter inferiorem fenestram D, & basem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

3. SINE numeris nihil noui p̃cipimus, sed ad superiora lectorem amandamus.

4. Quo ẽt pacto ꝓblema hoc p̃ solos sinus possit effici, docuimꝰ ꝓbl. 2. & 15.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, dummodo basis maioris cerni possit per Quadrantem perscrutari.

PROBLEMA XVII.



1. SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita, possitq; basis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas stationes in summitate turris minoris, vel in duabus fenestris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam distantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum est. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. scripsimus.

2. AT ex altitudine CD, & distantia DB, cognitis discemus altitudinem maiorem AB, per solos sinus, hoc modo. Ex aliqua fenestra C, minoris altitudinis inspiciantur extrema A, B, maioris altitudinis per ãgulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipsi DB, parallela, vel ad vtramq; altitudinem perpendiculari.) [a] Deinde fiat,

Vt sinus anguli CBD, complementi illius, quo basis inspicitur — *ad inuentam altitu- altitudinem CD:* — *Ita sinus totus anguli recti D,* — *ad BC,*

Vel

Vt sinus anguli BCD, quo basis inspicitur, — *ad inuentam distan- stantiam BD:* — *Ita sinus totus anguli recti D,* — *ad BC,*

Vtroque enim modo cognita erit hypotenusa BC. [b] Si ergo rursus fiat,

Vt sinus anguli A, complementi illius quo cacumen inspicitur, — *ad inuentam hypotenusam BC:* — *Ita sinus anguli ACB, conflati ex complemento anguli, quo basem intuemur, & ex angulo, quo fastigium cernitur,* — *ad AB,*

manifestabitur altitudo maior AB.

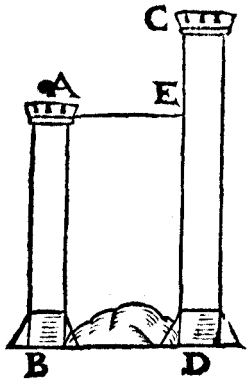
[a] 10. Triang. rectil.

[b] 10. Triang. rectil.

3. DE solutione problematis sine numeris nihil noui hic præcipimus, sed ea ex superioribus perenda est.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet basis minoris non cerni possit, opẽ Quadrantis peruestigare. Atque hinc distantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.



1. MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur addiscenda, etiamsi basis B, non cernatur. Concipiatur ducta recta AE, ipsi BD, parallela, vt ED, minori altitudini AB, sit æqualis. Si igitur ex duabus stationibus in summitate maioris altitudinis CD, factis, per problema 3. vel ex duabus fenestris, per problema 4. inuestigetur tam altitudo CE, quam distantia AE, inspecto cacumine A, ac si esset signum aliquod in Horizonte AE, visum, & CE, ex tota altitudine CD, auferatur, reliqua ED, hoc est, minor altitudo fiet nota. Distantia autem AE, inuenta quæsitæ BD, est æqualis: ac proinde DB, cognita erit.

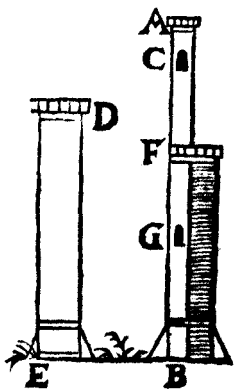
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris videri possit, per Quadrantem explorare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines coniicere.

PROBLEMA XIX.

1. REPETATVR figura præcedentis problematis. Et quia basis B, minoris altitudinis ex maiore apparet; si punctum B, ex duabus stationibus in summitate maioris altitudinis CD, factis inspiciatur, reperietur per problema 3. tã altitudo maior CD. quam distantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. si punctum B, ex duabus fenestris maioris altitudinis CD, inspiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedẽti problemate traditũ est. Cũ igitur & distãtia BD, sit explorata, patet solutio ꝓblematis ꝓpositi.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoscere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.



1. SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE: Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor est portione CB, inuestigetur tam altitudo maior AB, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet portionem AC, quæsitam.

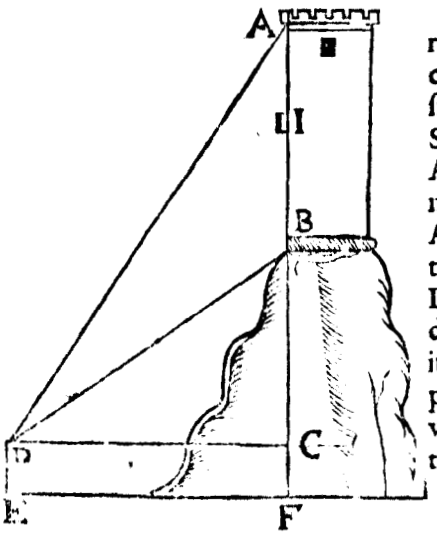
2. SI vero DE, maior est portione FB, explorandaq; sit portio AF; inquirẽda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 16. vel 17. At vero altitudo minor

nor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rursus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.

3. NON secus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXI.



1. HVIVSCEMODI altitudo est turris supra montem posita, & portio alicuius ædificij inter duas fenestras, vel duo signa, quorum alterum altero superius est. Sit igitur supra montem altitudo turris AB, proposita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obseruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cũ recta DC, quæ ex D, ad AB, productam intra montẽ est perpendicularis: ita vt statura mensoris sit DE. Deinde per problema 6. inuestigetur longitudo vtriusque radij DA, DB. [a] Nam si fiat in triangulo ABD, [a] 10. Triang. rectil.

Vt sinus anguli BAD, qui complementum est maioris anguli ADC, obseruati, ad radium DB, proximè inuẽtum: Ita sinus anguli ADB, qui differentia est angulorum obseruationũ ADC, BDC, ad AB, altitudinem,

inuenta erit altitudo AB, quæsita, in partibus, in quibus cognitus est radius DB. [b] Sic etiam, si fiat, [b] 10. Triang. rectil.

Vt sinus anguli ABD, vel (quod idem est) anguli DBC, qui complementum est minoris anguli obseruati BDC, ad radium DA, proximè inuentum Ita sinus anguli ABD, differentia angulorum obseruatorum ADC, BDC, ad AB, altitudinem

prodibit rursus altitudo quæsita AB, in partibus radij inuenti DA.

ALITER.

2. PER problema 2. vel 17. inuestigetur tam altitudo inaccessibilis AC,

quam BC, secluſa menſoris ſtatura CF. Altitudo namq; BC, ex altitudine AC, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER.

3. INVENTA diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus, [a] ſi fiat,

[a] 4. Triang. rectil.

Vt ſinus totus DC, ad diſtantiam cognitam DC, Ita AC, Tangens maioris anguli obſeruati ADC, ad AC,

reperietur altitudo maior AC, in partibus diſtantiæ inuentæ DC. [b] Et ſi rurſus fiat,

[b] 4. Triang. rectil.

Vt ſinus totus DC, ad diſtantiam inuentam DC: Ita BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC, ad BC,

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiuſdem diſtantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine AC, notam relinquet altitudinem turris BA, quæſitam.

ATQVE hæc ratio commodiſsima eſt, quando in turri aliqua. vel ædificio, cuius diſtantia à menſore cognita ſit, metiendum eſt interuallum perpendiculare inter duas feneſtras.

ALITER.

4. INVENTA rurſum diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. ſcripſimus; detrahatur Tangens BC, (poſito ſinu toto DC,) minoris anguli obſeruati ADC, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam ſi fiat,

Vt ſinus totus DC, ad diſtantiam inuentam DC, ita AB, differentia Tangentium AC, BC, ad AB, altitudinem,

procreabitur altitudo quæſita AB, in partibus diſtantiæ inuentæ DC.

ALITER.

5. INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis BC, obſeruentur anguli BDC, ADC, per radios DB, DA. Poſito namque ſinu toto DC, ſi fiat,

Vt BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC, ad BC, altitudinem inuentam: Ita AB, differentia Tangentium AC, CB, angulorum obſeruatorum ADC, BDC. ad AB

prodibit rurſus altitudo nota AB, quam quærimus.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AC, deſideretur, inueſtiganda erit per Problema 2. vel 15. tam tota altitudo AC, quam eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB.

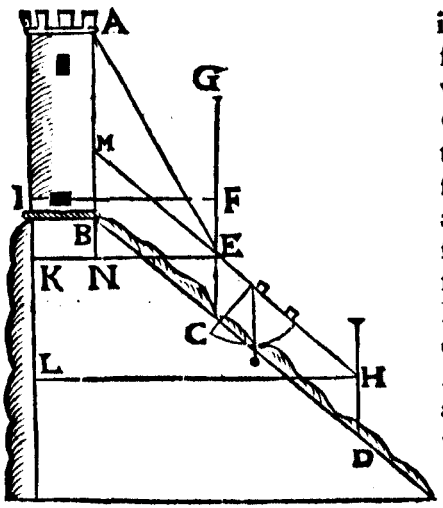
SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda eſt, coniicienda rurſus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars BC, proponitur inquirenda, fiet id per Problema 2. vel 15.

DISTAN-

DISTANTIAM accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.



1. SIT turris AB, monti imposita, in cuius ascensu seu latere mensor consistat in C, ex quo loco basem turris videre non possit. Erigatur hasta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis perpendicularis, sitque mensoris statura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inspecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia statio superior in F, ductaque FI, ad altitudinem perpendiculari, inspiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, est æqualis: si dematur AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima statione obseruati, reliquus fiet angulus EAF, [b] Igitur si fiat,

In figura duc rectam FA.

[a] *32. primi.*

[b] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli EAF, differentiæ complementorũ angulorũ obseruationum ad EF, differentiam stationum: Ita sinus anguli AFE, conflati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in secunda statione obseruati, ad AE hypotenusam.

efficietur nota hypotenusa AE. Post hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, sumptaque mensoris statura DH, ipsi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, inspiciatur punctum E, per angulum EHL, & per radium HEM, [c] qui ipsi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda enim sunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac si DC, producta ad basem turris peruenirет. [d] Quia verò angulus EHL, angulo MEK, æqualis est: si hic ex maiori angulo obseruato AEN, in prima statione dematur, reliquus fiet angulus AEM. Est autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum sit complementum maioris anguli obseruati AEN. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, si complementum anguli MHL, in statione D, obseruati ex duobus rectis detrahatur. [e] Igitur si fiat,

[c] *33. primi.*

[d] *29. primi.*

[e] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli AME, qui relinquitur, si complementum postremi anguli obseruati MHL, ex duobus rectis dematur ad hypotenusam AE, nuper inuentam: Ita sinus anguli, EAN, complementi maioris anguli obseruati AEN ad ME,

inuen-

[a] 10. Triang. rectil. inuenta erit recta EM, hoc est, distantia quæsita CB. [a] Et rursum si fiat.

Vt sinus eiusdem anguli AME, *ad eandem hypotenusam AE, nuper inuentam:* *Ita sinus anguli AEM, quire'inquitur, si angulus postremo loco obseruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obseruato AEK, detrahatur,* *ad AM*

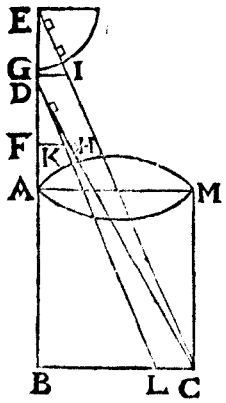
producetur AM, cui si addatur mensoris statura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc est, vt recta ab vltima statione D, per primam C, ducta per basem B, transeat, quod plus minus iudicio sensuum assequemur. Nam per ea, quæ dicta sunt hoc loco, solum reperitur distantia à loco C, vsque ad punctum altitudinis, in quod recta DC, protracta incidit, & altitudo ab A, vsque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, distabit, si diligentia adhibeatur in stationibus C, D, captandis. Propter hanc causam in propositione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque distantia CB, neque altitudo AB, præcisè cognoscitur, nisi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2. VT sine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad superiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuscunque ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.



1. HOC nihil est aliud, nisi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte signum aliquod apparet, per duas stationes in hasta aliqua factas metiri, vt problemate 4. factum est. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, seu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel signum C, in fundo positum conspici possit. Erecta hasta AE, in orificio putei, vel summitate ædificij, fiant duæ stationes oculi mensoris in D, E, inspiciaturque punctum C, per radios DC, EC, facientes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, æqualibus pro sinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorũ BDC, BEC, obseruatorum. Ducta quoque DL, ipsi EC, parallela secãte FH, in K, vt KH, differentia sit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonstrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obseruatorum *ad FK, vel ad GI, Tangentẽ minorem:* *ita DE, differentia stationum, hoc est, spatium inter oculos, vel angulos obseruationum,* *ad DB,*

prodi-

prodibit recta DB, nota, vt problemate 4. ostendimus: ex qua si subtrahatur segmentum hastæ AD. inter orificium, & oculum in prima statione, reliqua fiet profunditas, siue altitudo putei, vel ædificij AB.

ALITER.

2. POSITO sinu toto BC, fiat.

Vt DE, differentia Tangentium BD, BE, quæ complementis angulorum obseruationum debentur,	*ad DB, Tangentem minorem*	*ita DE, differentia stationũ oculorum*	*ad DE,*

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam DB, &c.

ALITER.

3. SI per solos sinus operari lubeat, ita agendum erit. [a] Quoniam angulus maior obseruatus BDC, duobus angulis E, DCE, æqualis est; si angulus E, minor obseruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obseruatorum. [a] *32. primi.*

[b] Igitur si fiat, [b] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli DCE, differentia angulorum obseruatorum.	*ad DE, differentiam stationũ oculorum:*	*ita sinus anguli E, minoris obseruati*	*ad DC,*

prosiliet nota hypotenusa DC. [c] Quapropter si rursum fiat, [c] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti B,	*ad hypotenusam DC, proximè inuentam:*	*ita sinus anguli BCD, complementi maioris anguli obseruati*	*ad DB,*

euadet iterum cognita recta DB, &c.

4. IAM verò si latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, (Non erit autem difficile eam aliqua mensura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatisue AB, veniemus, per vnicam videlicet stationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Vt sinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, complementi anguli obseruationis:*	*ita latitudo cognita CB,*	*ad DB.*

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt supra, &c.

VEL per solos sinus, [d] si fiat, [d] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli BDC, obseruationis	*ad latitudinem cognitam BC:*	*ita sinus anguli BCD, complementi anguli obseruationis.*	*ad DB,*

inuenietur rursus DB, &c.

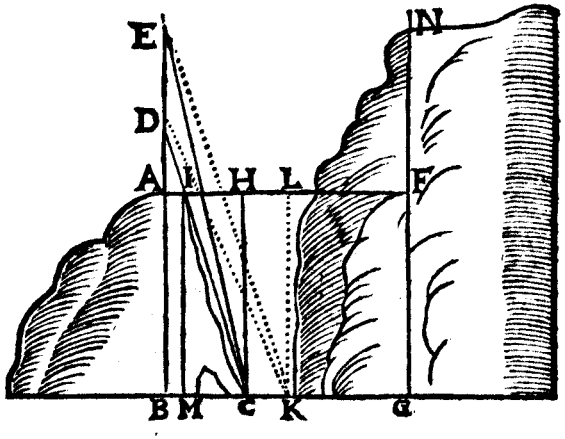
5. VT idem assequaris sine auxilio numerorum, consule ea, quę problemate 4. num. 4. scripsimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valdè inæqualis, eiusque terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per Quadrantem scrutari.

PROBLEMA XXIV.

1. HOC etiam nihil aliud est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes dimetiri, vt problemate 4. ostensum est. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, possit conspici. Erecta hasta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ stationes, obseruenturque anguli D, & E, inspecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vsque ad basem montis extensa in B: & recta excurrens AF, ipsi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & denique CH ipsi AB, parallela, [a] quæ altitudini AB, ęqualis erit, ita vt AB, vel HC, sit profunditas vallis ab A, vsque ad basem montis, & IC, eius descensus obliquus. Liquidò au-

[a] 34. primi.



tem constat, profunditatem AB, vel CH, exquiri posse, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus stationibus in hasta AE, factis, vel in duabus fenestris, vel certè, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit.

DESCENSVS autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monstratum est, angulus DCE, differentia est angulorum BDC, BEC, obseruatorum: [b] si fiat,

[b] 10. Triang. rectil.

Vt sinus anguli DCE, differentia inter angulos obseruatos — *ad DE, differentiam stationum oculorum:* — *ita sinus anguli E, minoris obseruati* — *ad DC,*

cognita fiet recta DC, ex qua si detrahatur DI, (quam facilè ab oculo vsque ad

rectam

rectam AI, mensurare poteris, cum sit exigua) notus remanebit descensus obliquus IC.

2. QVOD si terminus C, in fundo cerni nequeat, inspiciendum erit ex D, & E, aliquod aliud signum K, in valle, & obseruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rursus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, si in plano vallis commodè duæ stationes fieri possint: cognosci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quę in problem. 2. scripsimus: descensus vero obliquus IC, hoc est, interuallum inter I, & C, ex iis, quæ in problemate 7. tradita sunt.

3. EANDEM denique profunditatem CH, perscrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud signum in valle; non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altitudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo est NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni posse statuimus.

4. ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuisione res peragetur, vt in antecedentibus dictum est.

FINIS LIBRI SECVNDI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER TERTIVS.

Earundem linearum rectarum dimensionem per Quadratum Geometricum exequens.

QVONIAM dimensio rectarum linearum per Quadrantem Astronomicum superiori lib. exposita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & secantium, non semper autem eiusmodi tabulas ad manum habere possumus, immo neque omnes in illis versati sunt, atque exercitati: propositum nobis tertio hoc libro est, lineas rectas, longitudines videlicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimeriri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus, sed omnia per vmbram rectam, & versam; vt vocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab aliis scriptoribus dissidebimus, quippe cum aliter tam vmbram rectam, quam versam in partes diuisuri simus, quam ab illis fieri solet: vt nimirum per nostram partitionem expeditius dimensiones perficiantur; quod prudens Lector facilè iudicabit, si nostrã hanc diuisionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricum construendum est, explicandumque quo pacto tam in Quadrato stabili, quam in pendulo vtraque vmbra, recta videlicet, ac versa considerari debeat. Neque enim semper eundem situm prædictæ vmbræ in instrumento seruant, sed pro varietate vsuum non raro eum permutare solent, vt ex iis, quæ sequuntur, liquido constabit.

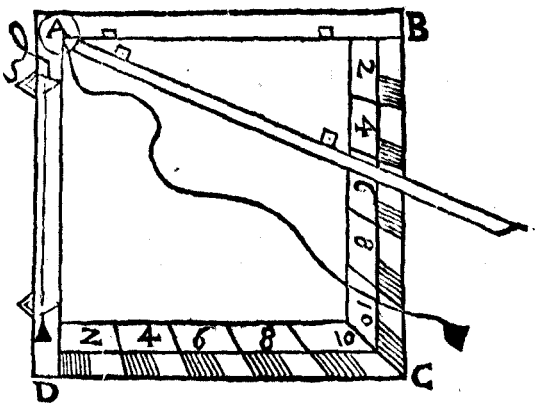
QVADRATI GEOMETRICI CONSTRVCTIO.

Compositio Quadrati Geometrici.

1. Ex quauis materia solida & dura conficiatur quadratum ABCD, siue solidum totum, siue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano existant. Deinde

inde in duab. regulis BC, CD, ducantur tres parallelæ extremitatibus quadrati, pro partibus & numeris vtriusque vmbræ designandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ versæ destinatur à Geometris: Vtrumque

Vmbra recta, & versa in quadrato que, & in quot partes à Geometris vtraque secetur.



autem in 12. partes æquales partiri solent omnes, qui de vsu Quadrati Geometrici scripserunt: Et si capacitas instrumenti permittit, singulas partes in 60. subdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200. in vtraque vmbra existant. Ego vtramque vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, nisi instrumentum sit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta BC, CD, in 100, aut 1000. partes secari possit, subdiuisis videlicet singulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraque vmbra cõstans dici solet à Geometris Scala altimetra.

In quot partes vtraque vmbra in nostro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid.

2. ANTEPONO autem diuisioni consuetæ in 12. vel 720. vel 1200. partes diuisionem nostram in partes 10. vel 100. vel 1000. æquales, propterea quòd, si instrumentum propter paruitatem sectum sit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoscere possumus, quot centesimæ, vel etiam millesimæ partes in qualibet particula cuiuscunque partis decimæ rectarum BC, CD, assignata comprehendantur: non secus ac si vtraque recta in 100. vel 1000. partes secta foret, vt Num. 14. cap. 2. lib. 1. copiosè exposuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri semper debeat multiplicatio, aut diuisio per omnes partes lateris BC, vel CD: Manifestum autem est, faciliorem esse multiplicationẽ, diuisionemue per 10. aut 100. vel 1000. quàm per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per solam appositionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in nostra Arithmetica practica declarauimus.

Quare nostra diuisio vmbræ præferatur aliorum diuisioni.

INVENIO quidem latus quadrati à doctissimo Io. Antonio Magino diuisum quoque esse, & quidem optimo consilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoscendũ sit, quot partes millesimæ in quauis particula vnius centesimæ comprehendantur, quod tamen omnino necessarium est, vt dimensiones, ac stellarum altitudines exquisitè obseruentur: præsertim si propter instrumenti paruitatem latus in 10. partes duntaxat commode possit diuidi. Id quod per nostram doctrinam, vt diximus, sine magno laborè effici potest.

Quadratum pendulum, ac stabile.

3. POST hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. capit. 2. Num 6. tradidimus: & in latere A B, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum est, si quadratum in suo vsu debeat esse pendulum. Nam si illud stabile esse velis, affigenda est circa centrum A, dioptra, hoc est, regula cum linea fiduciæ; ac duobus pinnacidijs, eodem artificio constructis, vt libere possit circumduci, & in omni situ firmari, vt loco supra citato in Quadrante stabili faciendum esse præcepimus.

POSTREMO iuxta latus A D, in plano quadrati (Nam si hoc fieret extra, prope crassitiem instrumenti, non posset quadratum in plano Horizontis locari erectum supra latus A D. quod tamen vt fiat, non raro vsus quadrati postulat:) apponàtur duæ tabellæ perforatæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoscere possis, num instrumentum rectum sit ad Horizontem, nec ne. quod omnino necessarium est.

Vmbra recta, & versa, quo pacto in vtroque quadrato cognoscenda sit.

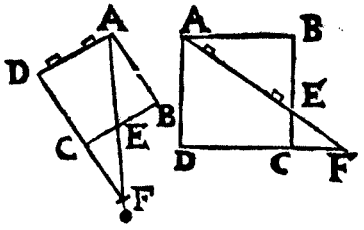
4. SED doceamus, quem situm vtraq; vmbra in vsu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti est, vt in dimensionibus nulla confusio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra versa opponitur semper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ est B C, versæ autem C D. At in quadrato stabili, si metienda sit altitudo, & centrum A, inferiorem obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ supremam occupabit sedem; latus vero vmbræ versæ vergere debebit versus ipsam altitudinem: ita vt tunc basis instrumenti sit A D. quo pacto iterum vmbra recta est B C, & versa C D. Si autem centrum A, superiorem locum possideat, & oculus in extremitate dioptræ existat, (quod etiam fieri potest) latus vmbræ rectæ erit basis C D, & latus vmbræ versæ B C, prope oculum, & ab altitudine metienda remotius. Si autem longitudo metienda proponatur, centrumque A, in superiori loco situm sit, & in eo oculus collocetur, erit quoque basis C D, latus vmbræ rectæ: latus autem B C, vmbræ versæ deputabitur, quod quidem versus longitudinem metiendam vergere debebit, & longius ab oculo abesse. At vero si centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt basis sit A D, oculus autem in extremitate dioptræ consistat, (quod etiam fieri potest, præsertim si quadratum in sublimi fuerit positum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit B C, basi A D, oppositum, vmbræ vero versæ latus erit C D, quod scilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum versa concurrit: & in stabili vmbra recta perpetuo vel supremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam sedem tenet; (vel infimum locum, quando scilicet centrum A, in superiori loco existit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter consideranda sunt, ne in vario instrumenti vsu vmbram rectam pro versa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerso situ quadrati stabilis tam latus B C, quam C D, modo vmbræ rectæ, modo versæ munus obire potest, vt diximus.

5. QVAMVIS autem vel sola vmbra recta, vel versa satis sit ad altitudines, longitudines, profunditatesque perueſtigandas, vt ex sequentibus fiet manifestum: vtraque tamen assumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus B C, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ secat

latus

latus CD: Tunc enim necessario latus BC, produci debet, vt secari possit. Item sæpe numero vmbra versa superat latus CD, quando videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ intersecat latus BC: Tunc enim necessario latus DC, productum versus C, secabitur, vt perspicuum est. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, assumenda est vmbra quidem versa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando versa suo latere CD, maior est.

6. Est autem perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbrã rectam ac versam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendiculi, vel in stabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productũ in F. Erunt igitur triangula ABE, ADF, æquiangula, cum anguli B, D. recti sint,[a] & tam alterni BAE, DFA, quam BEA, DAF, æquales.[b] Quamobrem erit vt BE, vmbra abscissa ad gnomonem BA, ita gnomon AD, ad vmbram abscissam DF: hoc est gnomon BA, vel AD, medio loco est proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta est, & altera versa.



Gnomon medio loco proportionalis est inter vmbrã rectam, & versam.

[a] 29. primi.
[b] 4. sexti.

7. Hinc facilis est reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vsu venit. Nam si gnomon complectens partes 1000. (in tot namq; partes latus quadrati diuisum concipere lubet) in se multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc est, si fiat,

Reductio vmbræ recta ad versam, & contra.

Vt alterutra vmbra ad gnomonem ita gnomon ad alteram vmbram:

hoc est, si quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutram vmbram diuidatur. Verbi gratia si ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturque numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra versa DF, partium 1428 $\frac{4}{7}$. Sic etiam, si BE, statuatur vmbra versa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium 1428 $\frac{4}{7}$. Quod si vna vmbra fit 400. erit altera 2500. & sic de cæteris. Sed iam ad vsum vtriusque quadrati accedamus.

ALTITVDINEM Solis, vel stellę cuiusuis per quadratum Geometricum obseruare.

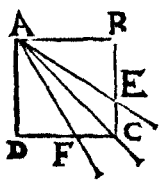
PROBLEMA I.

1. Præparetvr basis plana Horizonti æquidistans, vt supra illam Quadratum stabile erectum, sit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, centro A, ad Solem, vel stellam verso, ita vt eius planum per centrum Solis, aut stellæ transeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum transire deprehendatur: vel radius visualis per eadem foramina

Altitudo Solis, vel stellæ, quo pacto per quadratum cognoscatur.

foramina pinnacidiorum stellam videat. Idemque fiat cum quadrato stabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, supra basem præparatam, ipsumq; circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut stellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorũ transeat, vel radius visualis per eadem foramina stellam conspiciat. Quo peracto, consideretur summa diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati constituit, inuestigando magna cum cura, & diligentia per ea, quæ lib.1.cap.2. Num.14.tradidimus, quot partes millesimæ ex vmbra siue recta, sine versa abscissæ sint à filo perpendiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, si quidem vmbra recta intersecetur, (quæ in quadrato stabili vel supremum locum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt supra diximus) dabit, vt Num.2. demonstrabimus, complementum altitudinis Solis aut stellæ: Si vero vmbram

Quando angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, offerat altitudinem solis; & quando complemẽtum altitudinis.



versam filum, aut dioptra intersecet, ipsemet angulus altitudinem exhibebit. Quantitatem porro huius anguli ita cognoscemus. Sit quadratum siue pendulum siue stabile (eadem enim est in vtroque ratio) A B C D, abscissaque sit vmbra recta B E, quæ in partibus millesimis lateris B C, reperietur, vt cap.2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamsi latus ipsum sit solum in 10. vel 100. partes diuisum: quæ quidem vmbra B E, statuatur verbi gratia, esse partium 850. Quia ergo duo latera AB, BE, trianguli rectanguli ABE, nota sunt, cum AB, sit 1000. & BE, 850. [a] si fiat,

[a] 8. triang. rectil.

Vt latus quadrati A B, 1000.	*ad sinum totum 100000.*	*Ita latus, vel vmbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli BAE,*

(quod quidem factum erit, si ad latus B E, hoc est, ad 8 5 0. duæ cifræ apponantur) reperietur Tangens anguli B A E, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperitur; sed proxime minor est 84956. cui respondent gradus 40. min.21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 8 4 9 5 6. in tabula sumptam, est 44. Differentia autẽ inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. est 50. cui debetur 1. minutum, siue Sec.60. propterea quòd posteriori Tãgenti 85006. respondet vnum minutum amplius, quàm Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot secunda differentiæ 44. congruant; si dicamus. Si differentia 50. poscit, sec.60. quot secunda poscit differentia 44? inueniemusque sec.52 $\frac{4}{5}$. hoc est, sec.53. fere. Angulus ergo BAE, continent grad. 40. Min. 21. sec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. sec. 7. fere, ostendet altitudinem Solis, vel stellæ. Et si vmbra D F, est versa partium quoque 850. erit ipsemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. sec. 53. altitudo Solis, vel stellæ. Atque hoc modo si diligenter partes vmbrę explorabimus respectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Numer. 14. traditum est, inuenietur semper altitudo Solis, aut stellæ in grad. Min. & sec. Sed quia molestũ est, ac laboriosum, per differentias Tangentium Secunda inquirere, satis erit Tangentem anguli inuentam in tabula quærere, & si quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta respondentia; si vero non fuerit inuenta, sumere Tangentem, vel minorem, vel maiorem quæ nimirum minus ab inuenta differat, &c. Hac ratione sumenda erit in nostro exemplo Tangens 86006. cui respondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad. 49. Min.

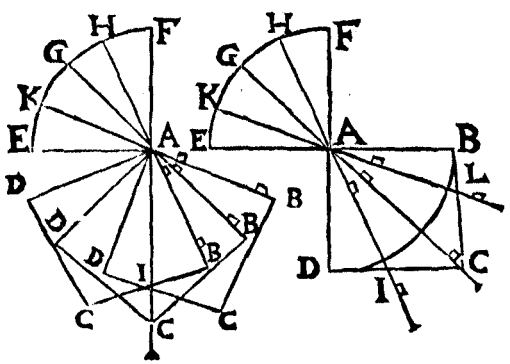
49. Min38. veluti prius. solum desunt sec.7. quæ nullius sunt momenti. Vt autem studiosos molestia hac supputandi liberem, construxi sequentem tabulam pro singulis partibus millesimis vtriusque vmbræ: In qua si centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere sumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæsito: qui videlicet altitudinem Solis aut stellæ indicabit, si partes millesimæ ad vmbram versam spectent: si autem partes ad vmbram rectam pertinent Complementum eius anguli altitudinem Solis stellæue ostendet, vt paulo infra demonstrabimus. Componetur autē tabula hęc, si singulis partibus millesimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ: quod idem est, ac si apponantur tantum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur, Ita factum esse vides supra: Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ sunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abscissæ per sinum totum 100000. & diuisio per 1000. vt in Arithmetica nostra practica scripsimus. Quod si quatuor cifræ partibus millesimis apponantur, habentur eadem ratione Tangētes, posito sinu toto 10000000.

Vsus tabulæ gnomonicæ sequentis.

Compositio tabulæ gnomonicæ facillima.

2. VERVM demonstremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ secans vmbram rectam cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato esse complementum altitudinis Solis, seu stellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram versam secans efficit, exhibere ipsam altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli Verticalis per stellam ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidistet: sintq; tres altitudines stellæ, EG, grad. 45. EH, maior, & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis semirectus GAE, [a] qui æqualis est suo complemento FAG, propter æquales arcus EG, FG, [b] hoc est, an-

[a] 27. tertij.
[b] 15. primi.



Filum perpendiculi secans vmbram rectam facit angulum cōplementi altitudinis; secans vero vmbram versam angulum constituit ipsius altitudinis.

gulo quem filum cum latere AB, facit. Cum ergo diameter quadrati [c] secet angulos eius rectos bifariam, in semirectos nimirum, transibit filum per angulum C: Ac proinde tam CAB, quam CAD, æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorum latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH, semirecto maior, & angulus complementi FAH, semirecto minor, [d] cui æqualis est angulus IAB: Ac propterea filum vmbram rectam in-

[c] schol 34. primi.

 tersecabit,

[d] 15. primi.

terſecabit, facietque angulum complementi altitudinis IAB, ſemirecto minorẽ. Quando denique latus AB, idem efficitur cum radio KA, erit angulus altitudinis EAK, ſemirecto minor, & angulus complementi FAK, ſemirecto maior,[a] cui æqualis eſt angulus IAB: ac proinde filum vmbram verſam abrumpet, conſtituetque angulum altitudinis IAD, ſemirecto minorem. Idem prorſus cernitur in quadrato ſtabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus eſt infimum CD, cum centrum A, ſupremum occupet locum, vt ſuprâ in conſtructione Quadrati Num. 4. dictum eſt. Vbi rurſus perſpicitur, quando altitudo EG, eſt grad. 45. radium GA, cadere in angulum oppoſitum C, ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem eſſe angulo altitudinis, nimirum ſemirectum. Quando autem altitudo EH, maior eſt, quam grad. 45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit,[b] æqualem eſſe angulo FAH, qui complementum eſt anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK, minor eſt, quam grad. 45. angulum IAB, quem linea fiduciæ AI, vmbram verſam BI, aſcindens cum latere AB, conſtituit,[c] æqualem eſſe angulo ipſi altitudinis EAK: quæ omnia demonſtranda erant. Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi. cõtinentem gradus, ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus milleſimis vtriuſq; vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides, angulum ſub parte 800. in vertice ſumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min. 22. fere, vt ſupra diximus: ac tantus erit angulus altitudinis, ſi partes 850. ſpectent ad vmbram verſam: eius verò complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, ſi dictæ partes ex vmbra recta abſciſſæ fuerint. Tabula porro hæc dici poteſt Gnomonica, quod in quadrato ſtabili dicti anguli in tabula comprehenſi efficiantur à gnomone AD, vel AB, cum linea fiduciæ, vt patet.

[a] *15 primi.*

[b] *15. primi.*

[c] *15. primi.*

Tabula Gnomonica cur ſic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula.

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	53	25
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	35	32
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41
19	1	5	6	47	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23
38	2	11	7	51	13	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26
39	2	14	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	28	30	32	44	36	37
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21
64	3	40	9	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23
65	3	43	9	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31
69	3	57	9	36	15	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4
84	4	48	10	26	15	51	21	0	25	50	30	17	34	22	38	6
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	52	30	20	34	25	38	8
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12
88	5	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37
100	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	34	0	38	40

Tabula Gnomonica.

	800		900			800		900			800		900	
	G	M	G	M		G	M	G	M		G	M	G	M
0	38	40	41	59	34	39	50	43	3	68	40	57	44	4
1	38	42	42	1	35	39	52	43	5	69	40	59	44	6
2	38	44	42	3	36	39	54	43	6	70	41	1	44	8
3	38	46	42	5	37	39	56	43	8	71	41	3	44	9
4	38	48	42	7	38	39	58	43	10	72	41	5	44	11
5	38	50	42	9	39	40	0	43	12	73	41	7	44	13
6	38	52	42	11	40	40	2	43	14	74	41	9	44	15
7	38	54	42	12	41	40	4	43	16	75	41	11	44	16
8	38	56	42	14	42	40	6	43	17	76	41	13	44	18
9	38	58	42	16	43	40	8	43	19	77	41	15	44	20
10	39	0	42	18	44	40	10	43	21	78	41	17	44	22
11	39	3	42	20	45	40	12	43	23	79	41	19	44	24
12	39	5	42	22	46	40	14	43	25	80	41	21	44	25
13	39	7	42	24	47	40	16	43	26	81	41	23	44	27
14	39	9	42	26	48	40	18	43	28	82	41	25	44	29
15	39	11	42	28	49	40	20	43	30	83	41	27	44	31
16	39	13	42	29	50	40	22	43	32	84	41	29	44	32
17	39	15	42	31	51	40	24	43	34	85	41	31	44	34
18	39	17	42	33	52	40	26	43	35	86	41	32	44	36
19	39	19	42	35	53	40	28	43	37	87	41	34	44	37
20	39	21	42	37	54	40	30	43	39	88	41	36	44	39
21	39	23	42	39	55	40	32	43	41	89	41	38	44	41
22	39	25	42	41	56	40	34	43	43	90	41	40	44	43
23	39	27	42	42	57	40	36	43	44	91	41	42	44	44
24	39	29	42	44	58	40	38	43	46	92	41	44	44	46
25	39	31	42	46	59	40	40	43	48	93	41	46	44	48
26	39	33	42	48	60	40	42	43	50	94	41	48	44	50
27	39	35	42	50	61	40	44	43	52	95	41	50	44	51
28	39	37	42	52	62	40	46	43	53	96	41	52	44	53
29	39	40	42	54	63	40	48	43	55	97	41	54	44	55
30	39	42	42	55	64	40	50	43	57	98	41	55	44	57
31	39	44	42	57	65	40	52	43	59	99	41	57	44	58
32	39	46	42	59	66	40	54	44	1	100	41	59	45	0
33	39	48	43	1	67	40	56	44	2					

3. SIMILEM tabulam gnomonicam composuit quoque Georgius Purbachius in suo quadrato Geometrico, posito latere partium 1200. eamque ad secunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, constituto quadrati latere partium 1000. quod quidem serius animaduerti. Incidi enim casu quodam in eam, cum hanc penè meam absolueram. alioquin in hoc supputandi labore supersedissem, tabulamque Magini huc transtulissem. Itaque si quis in altitudinibus astrorũ desiderenetiam secunda, petere ea debebit ex Magini tabula; quæ sanè fideliter, & accuratè ab eo supputata est, vel certè per calculum eadem elicere, vt supra Num. 1. docuimus in hoc probl. Sed meo iudicio contenti esse possumus hac nostra, quæ ad Minuta solum vltra gradus progreditur. In qua, si eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in nostra Minutis graduum additum esse semper vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura secunda, quam 30. Sed vt verum fatear, neque nostra, neque illa Magini omnino necessaria est, cum ipsæmet partes millesimę lateris quadrati, si apponantur duæ cifræ, sint tangentes altitudinum respectu sinus totius 100000. & eædem, si addantur quatuor cifræ, Tangẽtes easdẽ, posito sinu toto 10000000 exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi possint cuicunque parti millesimæ congruentes, si prius ei adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt supra ad finem Num. 1. ostendimus. Quia tamen molestia non caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitudinum eruere, quod rarò admodum Tangentes illę in tabula præcisè reperiantur, ac propterea pro illis accipiendæ sint vel proximè minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: non abs re fuerit, vel tabulam hanc nostram Gnomonicam, vel illam Magini, si secunda etiam desiderentur, adsciscere.

Tabulã gnomonicam non esse absolutè necessariam. Quo pacto partes millesimæ lateris Quadrati offerant tangẽtes posito sinu toto 10000. vel 10000000. Non magnus error in altitudinibus cõmittitur, etiãsi per integras millesimas tabula progrediatur, & quo pacto error hic corrigendus sit.

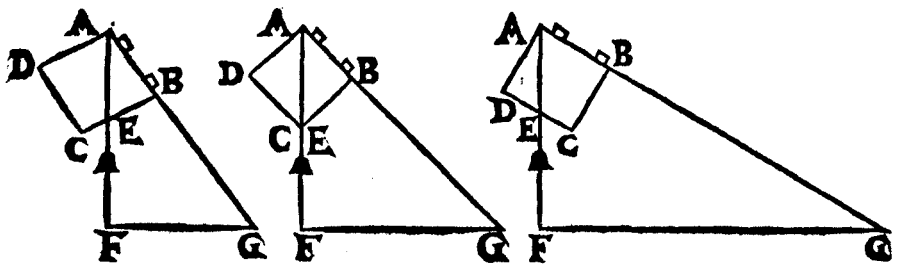
4. QVAMVIS autem tabula Gnonomica per solas partes millesimas integras progrediatur; tamen si quando ex doctrina cap. 2. Num. 14. lib. 1. tradita vltra millesimas integras supersit adhuc aliqua particula, non magnus error in altitudinibus astrorum obseruandis committi potest. Cum enim anguli in tabula crescant ordine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error nisi vnius aut alterius minuti, etiamsi fractio illa millesimæ partis negligatur. Quod si errorem hunc, licet minimum, vitare cupis, considera fractionem millesimæ, an sit tertia pars, an semissis, an verò duæ tertię partes. quod iudicio sensus facilè cognosces ex particulâ illa, quæ vltra partes decimas circino percursas superest. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, addendum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit si dicta particula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$, minor tamen, quam semissis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Item quando particula illa maior fuerit, quam semissis, addi possunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentur per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro semisse vnius partis millesimæ.

DISTANTIAM inter te, & signum quodcunque in plano Horizontis positum, per Quadratum Geometricum inuestigare.

PROBLE-

PROBLEMA II.

1. SIT distantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum sic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota F A, Horizonti ad angulos rectos, siue ea sit statura mensoris ab oculo ad planum, siue maior quædam altitudo. Inspiciatur extremũ G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnacidiorum incedentem, filo perpendiculari liberè pendente, & instrumentum radente, punctum-



que E, notetur, vbi filum latus quadrati intersecat, quod fiet vel in latere B C, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ versæ. Cadente namque filo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo *A*FG, æquiangulum, cum anguli B, F, sint recti, & angulus *A*, communis. [a] Si igitur fiat,

a *4. sexti.*

Vt latus A B, partium 1000.	*ad vmbram rectam abscissam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, distantiam,*

euadet nota distantia quæsita F G, in partibus altitudinis *A* F. Cadente autem puncto E, in vmbram versam, vt in 3. figura, abscindetur rursus triangulum *A*DE, triangulo *A* F G, æquiangulum, cum anguli D, F, recti sint, [b] & alterni *A*ED, F*A*G, æquales. [c] Ergo si fiat.

[b] *29. primi.*
[c] *4. sexti.*

Vt vmbra versa abscissa DE,	*ad latus D A, partium 1000.*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG, distantiam,*

Quando altitudo maior est, quam distantia, & quando æqualis, & quando minor.

nota quoque efficietur distantia quæsita F G, in partibus altitudinis *A* F. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, intersectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem *A*F, maiorem esse distantia F G: quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram versam, minorem.

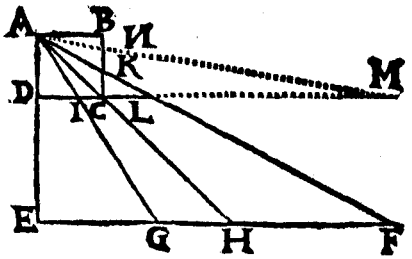
2. QVADRATO stabili ita eandem distantiam explorabimus. Erigatur in extremo distantiæ E, altitudo quædam perpendicularis notarum partium, & quadratum ita accommodetur, vt centrum *A*, superiorem locum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidistet. Directa igitur dioptra ad signum propositum, notetur diligenter vmbra abscissa: quæ si recta fuerit, nimirum D I, erit altitudo *A* E, maior, quam distantia EG, [d] triangulumque *A* D I, triangulo *A*EG, simile erit. [e] Si gitur fiat.

[d] *coroll. 4. sexti.*
[e] *4. sexti.*

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ D I:*	*Ita altitudo A E, cognita*	*ad E G, distantiam*

reperietur distantia quæsita EG, in partibus altitudinis assumptæ *A*E.

Si au-



Si autem dioptra per C, transierit, erit altitudo AE, distantiæ quęsitæ EH, æqualis: [a] cum sit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH. [a] 4. sexti.

Si denique vmbra abscissa fuerit versa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam distantia EF, quod plerunq; in distantiis metiendis accidere solet; eritq; triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti sint, [b] & alterni BAK, AFE, æquales. [c] Quare si fiat, [b] 29. primi. [c] 4. sexti.

Vt partes vmbræ versæ BK, ad latus quadrati AB, 1000. Ita altitudo nota AE, ad EF, distantiam,

producetur quæsita distantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3. QVANDO distantia non valdè magna est, vel extremum eius punctum facilè videri potest satis erit, si quadratum supra planum Horizontis constituatur, ita vt vmbrę versę latus BC, ad punctum illud recta vergat. Vt si distantia horizontalis DM, metienda sit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda est dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione semper vmbra versa BC, abscindetur. Nam si linea fiducię per C, transiret, aut vmbram rectam CD, intersecaret, esset distantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proinde dimensione non indigeret. Quoniam igitur rursus triangulum NBA, triangulo ADM, ęquiangulum est, propter rectos angulos B, D, [d] & alternos æquales BAN, AMD; [e] Si fiat, [d] 29. primi. [e] 4. sexti.

Vt partes vmbræ versæ BN, ad latus quadrati AB, 1000. Ita latus quadrati AD, 1000. ad DM, distantiam,

cognita erit distantia DM, in partibus millesimis lateris quadrati AD.

4. SOLENT nonnulli Scriptores non inquirere distantiam propositam in partibus altitudinis assumptę AE, vel in partibus millesimis lateris quadrati AD; sed solum inuestigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati AD, in distantia proposita contineatur: quod idem est, ac si altitudo, aut latus vmbræ statuatur 1. Atq; ita diuidunt vel partes vmbrę rectę abscissas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ versæ per partes vmbrę versę abscissas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in proposita distantia comprehendatur: cum sit,

Vt totum latus AD, partium 1000. ad partes vmbræ rectæ DI, ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1. ad distantiam EG, vel DI.

Item.

Vt partes vmbræ versæ BN, ad totum latus AB, 1000. Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1. ad distantiam EF, vel DM,

Hinc enim fit, vt cum secundum pręceptum regulę trium tertius numerus in secundum sit ducendus, productusq; numerus per primum diuidendus, satis sit, si secundus per primum diuidatur: quando quidem vnitas in tertio loco posita, si multiplicet secundum numerum, eundem secundum numerum procreat, &c.

HAC ratione, si duæ partes millesimę abscindantur ex vmbra versa, continebitur

nebitur altitudo A E, vel latus AD, in distantia secundum hunc numerum 500. quòd 1000. diuisa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra versa trium millesimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra versa abscissa valde parua est, magnum posse errorem committi in distantia inuestiganda. Cum enim partes millesimæ sint perexiguæ, facilè decipi possumus, vt nimirum putemus, abscissas esse tres millesimas, cum fortasis solum duæ abscissæ sint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinem AE, vel laterum A D, qui error contemnendus non est. At quando partes vmbræ versæ plures millesimas continent, non tantus error committitur, etiamsi vnam millesimam pro altera accipiamus. Nam si verbi gratia putemus, abscissas esse partes $\frac{30}{1000}$. ex vmbra versa, cum verè abscissæ sint $\frac{31}{1000}$. error fieri poterit solum in 1. altitudine A E, vel latere A D, & $\frac{7}{93}$. cum $\frac{30}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{31}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{31}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco statuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ versę abscinduntur, quam hic, vt constat in distantiis æqualibus E F, D M. Vides ergo magnam esse adhibendam diligentiam, vt accuratè partes millesimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. scripsimus.

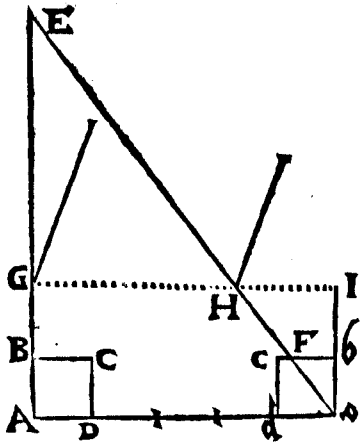
IAM verò, si quadratum constructum sit ad certam aliquam mensuram, hoc est, vt latus contineat vel 1. passum, vel 1. cubitũ, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c. res erit expeditissima, si semel tantum latus particularum 1000. ducatur in mensuras, quibus latus æquiualet. Ita enim in longitudinibus exquirendis, si quadratum supra planum, in quo est longitudo, statuatur, (vt fit in omnibus hypotenusis, siue distantiis à loco mensoris vsque ad aliquod punctum mensore sublimus, depressiusue, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo D M, inquisita est, patebitque in scholio problematis 7. & in scholio problem. 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38. Num. 3. & denique in problem. 43. & 44. & in aliis locis) diuidendus solum est numerus productus per partes vmbræ versæ (quæ semper abscinditur) notatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæsitam in data mensura. Verbi gratia, si in vno latere comprehendantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemusque 3000. Itaque si in inuestiganda longitudine quapiam abscissæ sint partes 200. ex vmbra versa, partiemur 3000. per 200. Nam Quotiens 15. dabit 15. pedes pro quæsita longitudine. a Nam cum in proxima figura sit, vt vmbra versa NB, 200. ad latus BA, 1000. Ita latus AD, 3. pedum ad DM, multiplicandum est latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. Eademque de cæteris ratio est. Sic si latus contineret $\frac{1}{2}$ cubiti, diuidendus esset numerus 500. ex $\frac{1}{2}$. in 1000. procreatus per vmbram versam. Pari ratione si latus complecteretur 10. palmos, diuidendus esset numerus 1000. genitus ex 10. in 1000. per vmbram versam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. quod non indiligenter notandum est.

a 4. sixti

ALITER.

5. QVANDO distantia metienda magna est, & adest bona planities campi, vti poterimus Quadrato stabili commodissimè hoc modo. Sit distantia oblata A E.

ta AE. Erigatur quadratum ad Horizontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius planum oculus in A, constitutus signum E, perspiciat, atque linea notetur AG. Demisso deinde Quadrato vsque ad Horizontis planum, ita vt latus AB, recta tendat ad signum E, hoc est, à recta notata AG, non recedat, protendatur linea recta per latus AD, in qua accipiantur quotcunque partes lateri AD, æquales: vel quotcunque aliæ mensuræ æquales, vt passus, vel cubiti, vsque ad punctum a, in quo rursus erigatur quadratum, (In hoc secundo quadrato asscripsimus literas minusculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius confundantur, quod in sequentibus etiam obseruabimus.) vertaturque, donec per eius planum idem signum E, appareat per rectam a H. Post hæc quadratum Horizonti incumbat, latusque a d, rectæ A a congruat, & dioptra circumducatur, donec eius linea fiduciæ rectæ a H, præcisè sit supposita, notenturque partes millesimæ in portione vmbræ versæ b F, quam diligentissimè. Abscindetur autem semper vmbra versa, propterea quod distantia AE, proponitur magna, saltem maior, quam A a: alioquin mensurari posset sine quadrato, quemadmodum & A a. Quibus peractis, erunt triangula a b F, a A E, æquiangula, cum angulos habeant rectos [a] b, A, & alternos æquales b a F, A E a. [b] Si ergo fiat,



[a] 29. primi.
[b] 4. sexti.

Vt vmbra b F, ad latus b a, 1000, Ita a A, nota ad A E, distantiam,

inuenietur distantia A E, in partibus rectæ A a. Vel si diuidatur latus b a, 1000. per partes millesimas vmbræ B F, procreabitur numerus, secundum quem recta A a, in distantia eadem A E, continetur: posita nimirum recta A a, vt 1. vt Num. 4. ostendimus.

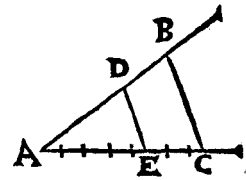
6. QVOD si ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem distantiam beneficio baculi, vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arundo in G, ad rectos angulos plano Horizontis, quod per filum aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet passus vsque ad A, ita vt visus per baculum incedens feratur in signũ E. Post hæc ducatur linea A a, ad AE, perpẽdicularis, in qua numera quotlibet etiam passus vsq; ad a. Ducta tandem GI, ad A E, quoque perpendiculari, & ipsi A a, æquali, figatur rursum baculus ad angulos rectos in tali puncto rectæ GI, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in signum E: inquiranturque exquisitissime passus vna cum fragmentis vnius passus in H I, contenti. His enim peractis, quoniam rursus triangula H I a, a A E, æquiangula sunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales I a H, A E a, [c] si fiat,

[c] 4. sexti.

Vt H I, nota ad I a, notam, Ita a A, nota ad A E, distantiam,

efficietur nota distantia A E. in partibus rectarum G A, A a, a I. Vel si diuidatur a I, nota per IH, notam, reperiemus, quoties Aa, in distantia AE, contineatur, si nimirum recta A a, ponatur vt 1.

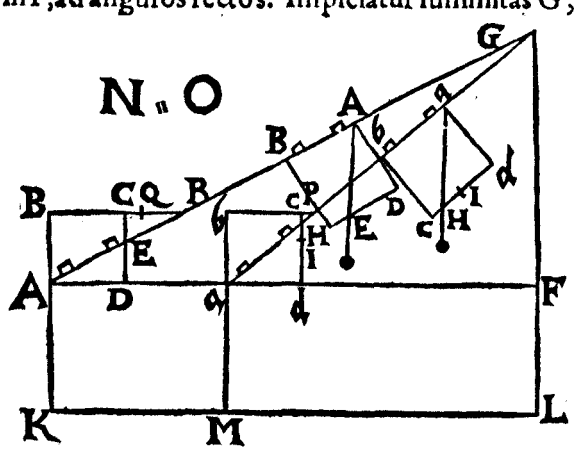
7. IAM verò absq; numerorum auxilio problema absoluemus, si attentè ea considerentur, quæ lib. 2. problem. 1. Num. 7. scripsimus. Nam si fiat angulus quicunque BAC, & pro primo exemplo Num. 1. huius problem. sumatur AD, æqualis lateri quadrati AB, vel si esset nimis magnum, æqualis semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c. eiusdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abscissę BE, (quæ summa cura per circinum in quadrato accipienda est) vel eius semissi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nimirum AD, DB, sint æquè sub-multiplices lateris AB, & vmbræ BE, si eis æquales non sunt. Post hęc ex instrumento partium sumatur AE, tot particularum, quot palmi, aut pedes in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectę DE, parallela agatur BC, continebit distantia FG, tot palmos, aut pedes, quot particulę instrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt si altitudo AF, sit pedum 5. erit distantia FG, pedum 3. & sic de cęteris. Atque hoc modo procedendum erit in aliis exemplis omnibus, considerando videlicet attentè primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod semel monuisse satis est.



DISTANTIAM in plano per duas stationes in eodem plano factas per Quadratum Geometricum metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur.

PROBLEMA III.

1. DISTANTIA inuestiganda sit AF. Intelligatur planum Horizontis KL; erecta altitudo GL: statura mensoris AK, vel alia quædam mensura cognita. Supra aliquam basem Horizonti æquidistantem collocetur quadratum stabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inspiciatur summitas G, per dioptram, secetque eius linea fiduciæ vmbram versam CD, in E, quod semper continget, quando distantia AF, maior est altitudine FG. [a] quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde semirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per G, emissus. Deinde accede magis, vel recede per longitudinem notam Aa, & collocato quadrato supra eandem basem, secet iterum dioptra ad punctum G, directa vmbram versam cd, in H: eritq; vmbra versa dH, in propinquiori statione maior, quam vmbra versa DE, in statione remotiore, [b] quod angulus a, maior sit angulo A. Auferatur dI, ipsi DE, æqualis, vt HI, differentia sit vmbrarum versarum



a 18. primi.

b 16. sexti.

ſarum. [a] Et quia eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: [b] erit rectangulo ſub A D, F G, æquale rectangulum ſub D E, AF. Eadem ratione erit rectangulo ſub a d, F G. rectangulum ſub dH, aF, æquale: propterea quod etiam eſt [c] vt a d, ad dH, ita aF, ad F G. Cum ergo rectangulum ſub AD, FG, æquale ſit rectangulo ſub a d, F G, quod rectæ A D, a d, æquales ſint: erit quoque rectangulum ſub dH, aF, rectangulo ſub DE, AF, hoc eſt, ſub dI, AF, æquale; [d] ideoque erit, vt dH, prima ad d I, ſecundam, ita AF, tertia ad AF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata d I, ad ablatam aF. [e] Igitur erit quoque reliqua H I, ad reliquam Aa, vt tota d H, ad totam A F. Quocirca ſit fiat,

[a] *4. ſexti.*
[b] *16. ſexti.*
[c] *4. ſexti.*
[d] *16. ſexti.*
[e] *19. quinti.*

Vt H I, differentia vmbrarum verſarum ad Aa, differentiam ſtationum: Ita dH, vmbra verſa propinquioris ſtationis, ſiue maior, ad AF, diſtantiã

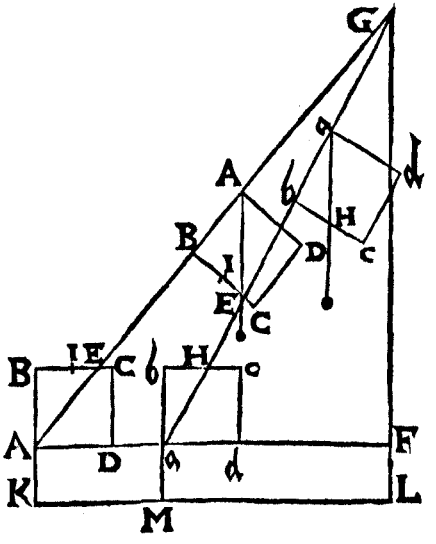
producetur A F, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum Aa, notæ.

2. EADEM prorſus ratio eſt in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ADE, adH, triangulis AFG, aFG, æquiangula: propterea, quod tam anguli D, F, recti ſunt, [f] & angulus F, hoc eſt, alternus B A E, angulo AGF, externus interno æqualis; quam anguli d, F, recti, & angulus H, id eſt, alternus baH, angulo a G F, externus interno æqualis. Reliqua demonſtrabuntur, vt prius. ſunt enim vmbræ verſæ in pendulo quadrato vmbris in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales ſint duobus angulis D, E, in triangulo ADE, quadrati ſtabilis, quod ea triangula ſint, vt oſtendimus, æquiangula: ſint autem & latera AD, AD æqualia; [g] erunt & rectæ D E, D E, hoc eſt, vmbræ verſæ, æquales. Eademque ratione verſæ vmbræ dH, d H, æquales erunt, &c.

[f] *29. primi.*
[g] *26. primi.*

3. Si in vtraq; ſtatione vmbra recta abſcindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H, quod quidem ſemper continget, quando diſtantia A F, minor eſt altitudine F G, [h] quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde ſemirecto maior, quem cum AD, conſtitueret radius per C, emiſſus. Eritque vmbra recta BE, in remotiore ſtatione maior, quã vmbra recta bH, in ſtatione propinquiore, [i] quòd angulus FaG, maior ſit angulo F A G; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipſi bH, æqualis, vt I E, differentia ſit vmbrarum rectarum. Et quia triangula ABE, AFG, æquiangula ſunt, propter angulos rectos B, F, [k] & alternos æquales B A E, A G F: [l] erit vt A B, ad B E, ita F G, ad A F, & permutando, vt AB, ad F G, ita BE, ad A F. Eadem ratione, quia triãgula a b H, a F G, æquiãgula ſunt, propter rectos angulos b, F, [m] & alternos æquales b a H, a G F, [n] erit vt a b, ad b H, ita F G, ad a F: Et permutando vt a b, ad FG, ita bH, ad AF. Cum ergo ſit, vt AB, ad F G, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b. [o] erit quoque vt BE, tota ad A F,

[h] *18. primi.*
[i] *16. primi.*
[k] *29. primi.*
[l] *4. ſexti.*
[m] *29. primi.*
[n] *4. ſexti.*
[o] *11. quinti.*



[a] 19. quinti. totam ita BI, ablata ipsi b H, æqualis, ad ablatum a F. [a] Igitur erit & reliqua I E, ad reliquam A a, vt tota B E, ad totam AF. Quapropter si fiat.

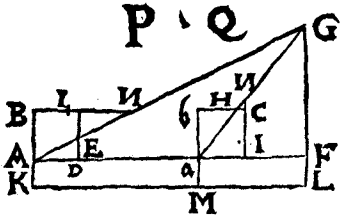
Vt I E, differentia vmbrarum rectarum — *ad A a, differentiam stationum:* — *Ita B E, vmbra recta remotioris stationis, siue maior* — *ad AF, distantiam,*

procreabitur AF, distantia nota in partibus differentiæ stationum A a, notæ.

4. EADEM omnino in quadrato pendulo est ratio. Nam filum perpendiculi abscindit quo que triangula ABE, ab H, triangulis A F G, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti sint, [b] & angulus BAE angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti, & angulus b a H, angulo a GF, æqualis, externus interno. Reliqua demonstrabuntur, vt in stabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in stabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo A B E, quadrati penduli, æquales sint duobus angulis B, E, in triangulo A B E, quadrati stabilis; quod hæc triangula sint, vt ostensum est, æquiangula, vt pote æquiangula triangulo A G F; [c] erunt & rectæ B E, B E, hoc est, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ b H, b H, æquales erunt &c.

[b] 29. primi.

[c] 26. primi.



Ad dexterum angulum superiorem prioris quadrati pone C. ad dexterum inferiorem posterioris d.

5. SI denique in remotiore statione secetur vmbra versa C D, in E, & recta b c, in H, in statione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur similes vmbræ, per ea, quæ in quadrati constructione Nu. 7. ad initium huius libri tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris A B, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam si fiat vt I N, differentia vmbrarum siue rectarum, siue versarum, ad A a, differentiam stationum: Ita B N, maior vmbra recta vel d N, vmbra versa maior ad aliud, gignetur distantia A F, vt demonstratum est Numero 3. & 1.

6. QVOD si quando in vna statione linea fiduciæ transierit per C, assumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel versæ C D, prout in altera statione abscissa erit vmbra recta, vel versa; vt nimirum vmbræ sint similes.

COROLLARIVM I.

Eundem esse modum operandi in vtroque quadrato.

COLLIGITVR ex demonstratis, eundem esse operandi modum in vtroq; quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in stabili, abscinduntur, vt ostendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præscribuntur, in altero quoque obseruanda sunt.

COROLLARIVM II.

Eundem esse operandi modum per vmbras versas, & per rectas.

PATET etiam ex dictis, operationem non variari, siue per vmbras versas, siue per rectas instituatur: quandoquidem semper est, vt differentia vmbrarum ad differentiam stationum, ita vmbra maior, ad distantiam, quæ inuestiganda proponitur, vt demonstratum est.

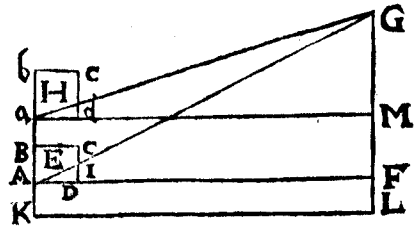
CAPI-

CÆTERVM in ſcholio problematis 7. præſcribemus rationē, qua eandem diſtantiam A F, metiri licebit per vnicam ſtationem.

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IV.

1. QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua K b, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindaturque primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H, Eritque inferioris ſtationis vmbra verſa D E, maior, quam vmbra verſa d H, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulus A, maior ſit angulo a; quippe cū A G F, minor ſit, quam a G M; & anguli F, M, recti. Sumatur D I, ipſi d H, æqualis; [a] Et quoniam eſt, vt A D, ad D E, ita A F, ad F G: erit permutando, vt A D, ad A F, ita D E, ad F G. Eademque ratione erit, vt a d, ad a M, ita d H, ad M G. Cum ergo eadem ſit proportio A D, ad A F, quę a d, ad a M, propter ęqualitatem linearum A D, a d, & A F, a M; [b] Erit vt D E, tota ad totam F G, ita d H, hoc eſt D I, ablata ad ablatam M G. [c] Igitur erit quoque reliqua I E, ad reliquam F M, hoc eſt, ad reliquam A a, vt tota D E, ad totam F G, hoc eſt, vt A D, ad A F; cum oſtenſum ſit eſſe A D, ad A F, vt D E, ad F G. Quo circa ſi fiat,

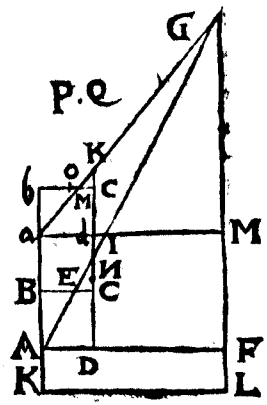


[a] 4. ſexti.
[b] 11. quinti.
[c] 19. quinti.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum ad A a, differentiam ſtationum, ita AD, latus quadrati ad A F, diſtantiam,

manifeſta colligetur diſtantia AF, in partibus differentię ſtationum Aa.

2. SI in vtraque ſtatione latus vmbrę rectę interſecetur in E, H, reducenda eſt vtraque vmbra recta B E, b H, ad verſam, per ea, quę tradita ſunt ad initium huius libri in conſtructione quadrati Numero 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per vtramque vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera D C, d c, vmbrę verſę vſque ad radios A G, a G, ad puncta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Numero 1. vt I N, differentia vmbrarum verſarum ad A a, differentiam ſtationū



ita AD,

ita AD, latus quadrati ad A F, distantiam. Ergo vt Num. 1. ostensum est, inuenietur distantia AF, in partibus differentiæ stationum Aa.

ALITER

SINE reductione vmbrarum rectarum ad versas hoc alio modo eandem distantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat P: & ex b H, vmbra recta maiore in minorem B E, fiat Q. [a] Et quia est, vt I D, ad D A, ita AB, ad BE; [b] erit rectangulum sub ID, B E, æquale quadrato ex A D, vel AB. Eodemque modo rectangulum sub K d, b H, quadrato ex a d, vel a b, hoc est, eidem quadrato ex AD, vel AB, æquale erit: ac proinde rectangula sub I D, B E: & sub K d, b H, æqualia inter se erunt. [c] Igitur erit, vt I D, ad K d, ita b H, ad BE, & permutando vt I D, ad b H, ita K d, ad B E, hoc est, vt I D, tota ad totam b H, ita K d, hoc est, ita D N, ablata ad B E, hoc est, ad b O, ablatam: [d] Ideoque erit & reliqua I N, ad reliquam O H, vt tota I D, ad totam b H; & permutando I N, ad ID, vt OH, ad b H. Quia vero proportio I N, ad D A, (posita media ID,) componitur ex proportionibus I N, ad I D, & I D, ad D A: Est autem, vt proxime monstratum est, vt I N, ad I D, ita O H, ad b H; [e] & vt I D, ad D A, ita A B, ad B E: componetur quoque proportio IN, ad D A, ex proportionibus O H, ad b H, & A B, ad B E. [f] Sed proportio etiam producti P, ad productum Q, componitur ex eisdem proportionibus, nimirum ex lateribus. Igitur eadem est proportio P, ad Q, q̃ I N, ad D A. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. ostendimus, sit I N, ad A a, vt AD, ad A F, hoc est, permutando vt I N, ad DA, ita A a, ad A F: Erit quoque P, ad Q, vt A a, ad A F. Quapropter si fiat,

[a] 4. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 16. sexti.
[d] 19. quinti.
[e] 4. sexti.
[f] 23. sexti.

Vt P, numerus, qui fit ex O H, differentia vmbrarum rectarum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta b H, maiore in minorem B E,*	*Ita A a, differentia stationum,*	*ad A F, distantiam,*

producetur eadem distantia quæsita A F, in partibus differentiæ stationum A a.

ALITER.

[g] QVONIAM est, vt b H, ad a b, ita a M, ad M G: si fiat,

[g] 4. sexti.

Vt b H, vmbra recta,	*ad d b, latus quadrati 1000.*	*Ita a M, quatenus 1.*	*ad M G,*

hoc est, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) si quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam b H, exibit Quotiens M G, indicans, quoties a M, quatenus 1. in M G, comprehendatur. Eodem pacto, si fiat,

Vt B E, vmbra recta	*ad A B, latus quadrati 1000.*	*Ita A F, quatenus 1.*	*ad F G,*

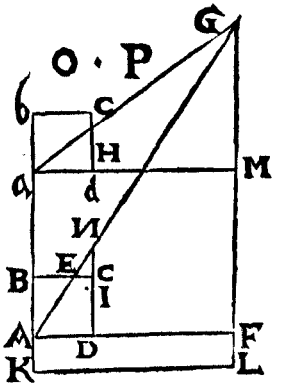
hoc est, si quadrati latus 1000. A B, diuidatur per vmbram rectam B E, fiet Quotiens F G, significans, quoties A F, quatenus. 1. contineatur in F G. Si igitur ex posteriore hoc Quotiente F G, prior ille Quotiens M G, detrahatur, reliqua fiet F M, vel A a, differentia stationum cognita in partibus, quarum A F, est 1. Quocirca si fiat,

Vt

Vt A a, differentia Quotientum qui fiunt, si latus quadrati per vtramque vmbram rectam diuidatur, *ad A a, differentiam stationum notam in mensura aliqua:* *ita A F, vt 1.* *ad AF, distantiam,*

hoc est, si differentia stationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota distantia AF, in partibus differentiæ stationum A a, &c.

3. Si denique in statione inferiori latus vmbræ rectæ secetur in E, & in superiori statione latus vmbræ versæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad versam, vt diximus, & producendum latus D C, vmbræ versæ vsque ad punctum N, sumendaque D I, ipsi d H, æqualis. Nam vt Num. 1. ostendimus, si fiat,



Vt N I, differentia vmbrarum versarum *ad A a, differentiam stationum:* *Ita A D, latus quadrati* *ad A F, distantiam,*

cognita rursus erit distantia A F, in partibus differentiæ stationum A a.

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad versam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra B E, in vmbram versam d H, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. residuumque sit, O. Item ex vmbra recta B E, in latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt initio huius libro in constructione quadrati Numer. 6. ostendimus, latus quadrati medio loco proportionale est inter vmbras B E, D N: [a] Erit rectangulum sub B E, D N, quadrato lateris æquale. [b] Cũ ergo rectangulum sub B E, D N, æquale sit rectangulis sub D E, D I, & sub B E, N I: si rectangulum sub B E, D I, auferatur ex rectangulo sub B E, DN, id est, ex 1000000. quadrato lateris A D, reliquum fiet rectangulum sub B E, N I; ac proinde cum D I, ipsi d H, si æqualis, fiet rectangulum sub B E, D I, ex vmbra B E, in vmbram d H; atque idcirco reliquum rectangulum sub B E, N I, (quod videlicet relinquitur, si rectangulum sub B E, D I, ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum est,) numero O, æquale erit. Est autem ex constructione rectangulum quoque sub B E, vmbra recta, & latere A D, numero P, æquale. Igitur cum numerus B E, multiplicans N I, A D, producat O, P, [c] erit O, ad P, vt N I, ad AD. Sed vt Numero 1. huius problematis demonstrauimus, vt NI, differentia vmbrarum versarum ad A a, differentiam stationum, ita est AD, latus quadrati ad AF, & permutando vt N I, ad AD, ita A a, ad AF. Igitur erit quoque O, ad P, vt A a, ad A F. Quamobrem si fiat,

[a] *16. sexti.*
[b] *1. secundum.*
[c] *17. sept.*

Vt O, numerus, qui relinquitur si numerus genitus ex vmbra recta in versam ex quadrato lateris detrahatur, *ad numerum P, qui ex vmbra recta B E, in latus AD, producitur:* *Ita A a, differentia stationum* *Ad AF, distantiam*

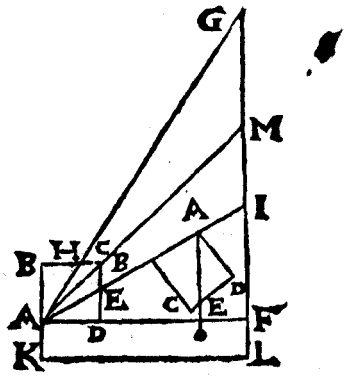
O pro-

procreabitur distantia quæsita AF, in partibus differentiæ stationum A a,

4. HIC etiam si forte in vna statione linea fiduciæ, aut filum perpendiculi, transierit per punctum, C, assumendum erit vel latus vmbræ rectæ, vel versæ, vt Num. 6. præcedentis problematis dictum est.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati coniicere.

PROBLEMA V.



1. SIT altitudo conijcienda G L, vel ML, vel I L, ad Horizontem perpendicularis. Statura mensoris, vel aliqua alia mensura nota sit F L. vel A K, pareturque planum Horizonti parallelum A F, in quo quadratum erigatur, cuius latus A D, intelligatur productum occurrens altitudini in F. Inspecto cacumine I, secet primum dioptra vel filum perpendiculi latus C D, vmbræ versæ in E. quod accidet, quando distantia A F, maior est, altitudine F I, vt problemate 1. Num. 1. ostendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum est, vt ibidem monstratum est;[a] erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quãobrem si fiat,

[a] 4. sexti.

Vt latus quadrati 1000.	*Ad vmbram versam DE:*	*Ita distantia A F, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*Ad FI*

patefacta erit altitudo F I, in partibus distantiæ A F, quæ si data non est, exquirenda erit vel per problema 3. vel 4. Et si ad F I, adijcietur mensura, vel statura mensoris F L, tota altitudo proposita IL, nota fiet,

2. DEINDE linea fiduciæ transeat per punctum C. quod fiet, quando distantia AF, altitudini FM, æqualis est;[b] quod tunc angulus CAD, semirectus sit, ac proinde & reliquus M, in triangulo F A M. [c] Ideoque latera AF, FM, æqualia sint. Quanta ergo est distantia AF, quæ vel data est, vel inuenienda per problema 3. vel 4. tanta erit altitudo F M, cui addita F L, nota patefaciet totam altitudinem M L.

[b] schol. 34. primi.
[c] 6. primi.

3. POSTREMO intersecetur vmbræ rectæ latus in H. quod eueniet, quando di-

do distantia A F, minor est altitudine F G: eritque triangulum A B H, triangulo A F G, æquiangulum, vt problemate 3. Num. 3. demonstrauimus. Igitur erit, vt B H, ad A B, ita A F, ad F G: ac proinde, si fiat,

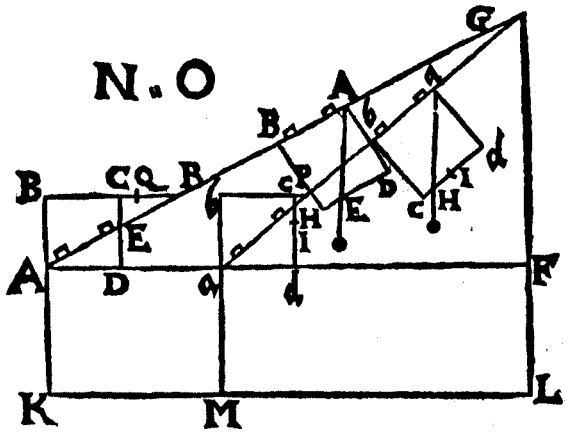
Vt vmbra recta B H, ad AB, latus quadrati 1000. Ita distantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4. ad F G,

nota euadet F G, cui si addetur mensura vel statura mensoris F L, efficietur nota tota altitudo G L, proposita.

ALTITVDINEM eandem, etiamsi eius distantia ab oculo mensoris neque data sit, neq; inuenta, per duas stationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.

1. PROPOSITA sit altitudo metienda F G, seclusa mensoris statura F L. Fi-



ant duæ stationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, seceturque primum vmbra versa in vtraque statione in punctis E, H. Et quia propter similitudinem triangulorum ADE, AFG, est vt DE, ad A D, ita F G, ad AF: si fiat,

Vt D E, vmbra versa abscissa ad AD, latus quadrati 1000. Ita FG, quatenus 1. ad A F.

hoc est, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam D E, prodibit Quotiens AF, indicans, quoties F G, in AF, contineatur. Eodem pacto si fiat,

Vt vmbra versa dH, ad a d, latus quadrati 1000. Ita F G, quatenus 1. ad a F,

hoc est, si quadrati latus 1000. diuidatur per vmbram versam d H, gignetur Quotiens a F, monstrans, quoties F G, in a F, contineatur. Si igitur posterior hic Quotiens a F, ex priori Quotiente a F. detrahatur, relinquetur differentia A a, cognita in partibus, quarum F G, est 1. Si ergo fiat,

Vt A a, differentia Quotientum. diuiso latere Quadrati per vtramque vmbram versam, *ad A a, differentiam stationum.* *Ita F G, vt 1.* *ad FG,*

producetur altitudo F G, in partibus differentiæ stationum A a, nota, & adiecta mensoris statura F L, tota altitudo GL, nota fiet.

ALITER.

EX differentia H I, vmbrarum versarum in latus quadrati gignatur numerus N: & ex vmbra versa D E, in versam d H, fiat O. Productis autem lateribus BC, bc, vsque ad R, P, in radijs, abscindatur B Q, ipsi b P, æqualis. Et quia, vt problemate 3. Num. 3. demonstratum est, ita est QR, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam stationum, vt vmbra recta maior BR, ad AF, distantiam: [a] Vt autem B R, ad B A, ita est A F, ad F G: & permutando, vt B R, ad A F, ita B A, ad F G; erit quoque QR, ad A a, vt BA, ad F G, & permutando Q R, ad B A, vt A a, ad F G. Dico iam, vt est QR, ad AB, ita esse numerum N, ad numerum O. [b] Cum enim sit, vt DE, ad D A, ita AB, ad BR; [c] erit rectangulum sub DE, B R, rectangulo sub D A, A B, hoc est quadrato lateris æquale. Eademque ratione erit rectangulum sub d H, b P, eidem quadrato lateris æquale; ideoque rectangulum sub DE, BR, rectangulo sub d H, b P, æquale erit. [d] Igitur erit, vt D E, ad D H, ita b P, ad B R: & conuertendo, vt d H, ad D E, ita B R, ad b P, vel ad B Q: & permutando vt tota d H, ad totam BR, ita DE, vel d I, ablata ad b P, vel ad BQ, ablatam. [e] Igitur & reliqua HI, ad reliquam QR, erit, vt tota d H, ad totam BR, vel vt ablata d I, ad ablatam B Q: & permutando, vt H I, ad d I, ita Q R, ad B Q, vel ad b P. [f] Proportio autem numeri N, ad numerum O, componitur ex proportionibus HI, ad d I, vel ad DE, & lateris a d, ad d H: propterea quod N, factus est ex HI, differentia vmbrarum versarum in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra versa D E, in versam d H, ex constructione. Cum ergo sit, vt paulo ante ostendimus, quemadmodum H I, ad d I, ita QR, ad b P, [g] Itē vt latus a d, ad D H, ita bP, ad b a, componetur quoque proportio N, ad O, ex proportionibus Q R, ad bP, & b P, ad b a. Sed ex his eisdem componitur proportio QR, ad ba. Igitur eadem est proportio N, ad O, quæ Q R, ad b a, vel B A. quod ostendere volebamus est autem vt QR, ad BA, ita A a, differentia stationum ad altitudinem F G, vt supra ostendimus prope initium huius demonstrationis. Igitur si fiat,

[a] 4. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 16. sexti.
[d] 16. sexti.
[e] 19. quinti.
[f] 23. sexti.
[g] 4. sexti.

Vt N, numerus, qui fit ex HI, differentia vmbrarum versarum in latus quadrati 1000. *ad numerum O, factum ex vmbra versa D E, in versam dH.* *Ita A a, differentia stationum* *ad FG altitudinem,*

deprehensa erit altitudo FG, in partibus differentiæ stationum A a, &c.

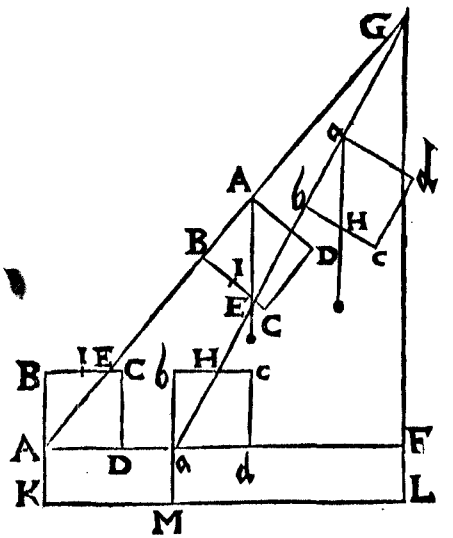
ALITER

REDVCATVR vtraque vmbra versa ad rectam, vt ad initium huius libri in quadrati constructione Num. 7. docuimus. Nam per has vmbras rectas altitudinem FG, nanciscemur, vt i Num. 2. in sequenti tradetur.

2. SECETVR deinde vtraque vmbra recta in E, H, vt in 2. figura problematis 3. quæ hic repetatur. Et quoniam ob similem triangulorum ABE, AFG,

[a] est, vt

[a] est, vt BE, ad AB, ita AF, ad GF; erit permutando, vt BE, ad AF, ita AB, ad FG. Eademque ratione erit vt b H, ad a F, ita a b, ad FG; ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata b H, vel B I, ad ablatam a F, cum vtraque proportio sit, quæ AB, vel a b, ad FG. a *4. sexti.*



Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam A a, vt tota BE, ad totam AF, hoc est, vt AB, ad FG, cum duæ hę proportiones eædem inter se sint, vt paulò ante demonstrauimus. Quo circa si fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum — *Ad Aa, differentiam stationum:* — *Ita AB, quadrati latus 1000.* — *ad FG,*

prosiliet nota altitudo FG, & adiuncta mensoris statura FL, tota altitudo GL, quęsita nota efficietur.

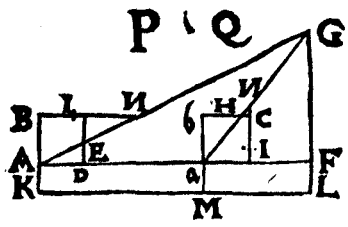
ALITER.

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam stationum, numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotientem maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæsita in partibus differentiæ stationum. Quod ita perspicuum fiet.

SIT vmbra recta minor b H, 50. verbi gratia, & maior B E, 125. at differentia stationum Aa, sit 16. passuum. *b* Et quia est, vt b H, ad a b, ita a F, quatenus 1. ad FG; si a b, 1000. diuidatur per b H, 50. indicabit Quotiens 20. rectam a F, in FG, contineri vicies. [b] *4. sexti.*

SIC etiam, [c] quia est, vt BE, ad AB, ita AF, quatenus 1, ad FG; si AB, 1000. diuidatur per BE, 125. monstrabit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque A a, 16. passuum vna cum a F, continetur in FG, octies, fit vt Aa, 16. passuum octies sumpta, vna cum a F, octies quoque sumpta, faciat 128. passus, & a F, octies sumptam, nimirum numerum ipsi FG, æqualem. Est autem [c] *4. sexti.*

vicies sumpta eidem FG, æqualis. Igitur 128. passus, vna cum a F, octies sumptæ æquiualent ipsi a F, vicies sumptæ. Si ergo vtrobique auferatur a F, octies sumpta, reliqui erunt 128. passus æquales ipsi a F, duodecies sumptæ. Quare si 128. diuiduntur per 12. prodibunt $10\frac{2}{3}$. passus pro recta, a F, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur a F, contineatur vicies in F G: si a F, $10\frac{2}{3}$. passuum ducatur in 20. procreabitur altitudo F G, $213\frac{1}{3}$. passuum. Vides ergo minorem Quotientem 8. in differentiam stationum passuum 16. ductam esse, vt gignerentur 128. & hunc numerum diuisum esse per 12. differentiam Quotientum, vt prodirent passus $10\frac{2}{3}$. pro recta a F: ac tandem hunc Quotientem $10\frac{2}{3}$. ductum esse in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo F G, passuum $213\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quam altitudinem etiam reperies per præcedentem viam, si nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad differentiam stationum, nimirum ad 16. passus. ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000. & productus numerus 16000. diuisus per 75. facit Quotientem $213\frac{1}{3}$. veluti prius.



3. DENIQVE in remotiore statione intersecetur vmbra versa in E, & in propinquiore vmbra recta in H, vt in 3. figura problem. 3. Reducta vmbra versa ad rectam, vt in Quadrati constructione Num. 7. principio huius lib. scripsimus: si fiat, vt I N, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam stationum, ita A B, latus Quadrati 1000. ad aliud, procreabitur altitudo F G, quemadmodum Num. 2. ostendimus.

4. Si fortè in vna statione transiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, assumendum esset in primo casu latus C D, vmbrę versę in duobus autem aliis casibus latus BC, vmbrę rectæ.

ALITER.

Sine reductione vmbrę versę ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra versa D E, in vmbram rectam b H, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. residuumque sit P. Item ex vmbra versa DE, in latus 1000. fiat Q.

[a] 4. sexti. [a] Et quoniam ob triangulorum similitudinem est, vt BN, ad BA, ita AF, ad F G: Et permutando, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt BN, vmbra recta maior ad A F, distantiam, ita est I N, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam stationum, vt Num. 5. in problem. 3. dictum est. Igitur erit quoque IN, ad Aa, sicuti AB, ad FG: Et permutando IN, ad AB, vt Aa, ad FG. Dico iam ita esse

[b] 4. sexti. P, ad Q, vt IN, ad AB. [b] Quoniam enim est, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad

[c] 17. sexti. BN: [c] erit rectangulum sub DE, BN, æquale quadrato numero 1000000. lateris

[d] 1. secundi. AB, 1000. [d] Est autem rectangulum sub DE, BN, æquale rectangulis sub DE, B I, & sub DE, IN. Igitur si productum ex vmbra versa DE, in B I, hoc est, in vmbram rectam b H, dematur ex rectangulo sub DE, BN, hoc est, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum sub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in IN. Fit autem Q, ex eadem vmbra versa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE,

[e] 17. sexti. multiplicans IN, & AB; producat P, Q, [e] erit P, ad Q, sicut IN, ad AB; hoc est, sicut Aa, ad FG. Quocirca si fiat.

Vt P,

Vt P, numerus, qui relinquitur, si productus ex vmbra versa DE, in vmbrã rectam bH, ex quadrato 1000000. detrahatur. *ad Q, numerum, qui fit ex vmbra versa DE, in latus AB, 1000.* *Ita Aa, differentia stationum.* *ad FG, altitudinem,*

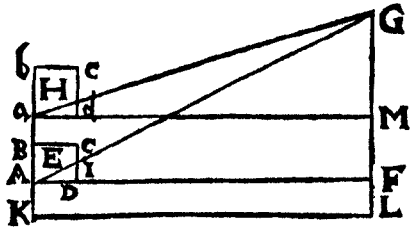
producetur altitudo FG, nota in partibus differentię stationum Aa: cui si adiicietur statura mensoris FL, tota altitudo GL, nota efficietur.

In scholio porro sequentis problematis idem hoc problema per vnicam stationem absoluemus.

ALTITVDINEM eandem, quando distantia ab oculo mensoris neque data est, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ stationes fieri possunt, per duas stationes in aliqua hasta erecta factas, indagare per Quadratum.

PROBLEMA VII.

1. Cvm in plano duæ stationes fieri commodè nequeunt, erigatur hasta aliqua Kb, ad Horizontem recta, nisi fortè adsit aliquod ædificium erectum, ibique fiant duæ stationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autem primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque statione in vmbram versam, vt in 1. figura problematis 4. quę hic repetita est.



a Et quoniã propter triangulorũ similitudinẽ est, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG; erit permutando vt AD, ad AF, ita DE, ad FG. Eademque ratione erit vt, a d, ad a M, ita d H, ad M G. Cum ergo eadem sit proportio AD, ad AF, quæ a d, ad a M, propter ęqualitatem rectarum AD, a d, & AF, a M; b erit vt tota DE, ad totam FG, ita d H, hoc est, ita D I, ablata ad ablatam MG. c Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam FM, hoc est, ad D d, vt tota DE, ad totam FG. Quocirca si fiat, *a 4. sexti. b 11. quinti. c 19. quinti.*

Vt IE, differentia vmbrarum versarum *ad Dd, differentiam stationum:* *Ita DE, maior vmbra versa* *ad FG, altitudinem.*

euadet cognita altitudo FG, in partibus differentiæ stationum Dd. Apposita autem statura mensoris FL, tota altitudo GL, quæsita cognita erit.

2. Abscindat deinde dioptra in vtraque statione vmbram rectam, vt in 2. figura problematis 4. quæ posita est in pagina 103. d Et quia propter triangulorum similitudinem est vt bH, ad ab, ita aM, ad MG: e erit rectangulum sub bH, MG, æquale rectangulo sub ab, aM. Eadem ratione erit rectangulum sub BE, FG, æquale rectangulo sub AB, AF, f quod eadem quoque sit proportio BE, ad AB, quæ AF, ad FG. Cum ergo rectangulum sub ab, aM, rectangulo sub AB, AF, æquale sit, ob æqualitatem rectarum ab, AB, & aM, AF, erit etiam rectangulum sub bH, MG; rectangulo sub BE, FG, æquale, *d 4. sexti. e 16. sexti. f 4. sexti.*

a 17. sexti.
b 19. sexti.

[a] Quare erit vt tota BH, ad totam FG, ita BE, vel b O, ablata ad ablatam MG; [b] Ac propterea erit quoque reliqua O H, ad reliquam F M, siue ad A a, vt tota b H, ad totam FG. Quamobrem si fiat,

Vt O H, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam stationum: Ita b H, maior vmbra recta ad F G, altitudinem,

altitudo F G, prodibit cognita, quę cum statura mensoris F L, totam altitudinem LG, efficiet notam. Vbi vides eundem prorsus esse operandi modum in vmbris rectis, & in versis.

3. POSTREMO in statione inferiori resecetur vmbra recta BE, & versa d H, in superiori statione, vt in 3. figura problematis 4. quæ posita est in pagina 105. Reducta ergo vmbra recta ad versam, vt ad initium huius libri in constructione Quadrati Num. 7. declarauimus: si fiat, vt IN, differentia vmbrarum versarum ad A a, differentiā stationum, ita DN, vmbra versa maior ad aliud, procreabitur F G, altitudo in partibus differentiæ stationum A a, quemadmodum Num. 1. demonstrauimus. Quod si malueris reducere vmbram versam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ceu Num. 2. monstrauimus.

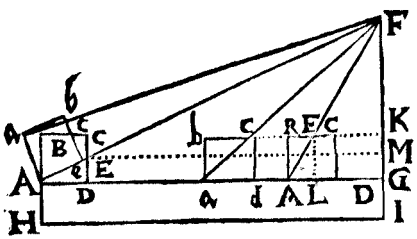
4. QVANDO fortasse in altera stationum linea fiduciæ transiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ versæ, vel rectæ assumere.

SCHOLIVM.

1. EANDEM altitudinem, eiusque distantiam ab oculo mensoris, vna cum hypotenusa ab oculo ad fastigium altitudinis extensa, venari licebit ope quadrati stabilis per vnicam stationem, etiamsi solum fastigium rei erectæ cernatur: adeò vt scholium hoc omnia præstet, quæ in problemate 3. 4. 5. 6. & 7. per plures stationes inuestigauimus, ac proinde diligenter perdiscendum.

Quo pacto præcedentia 5. problemata, ope quadrati stabilis per vnicam stationem absolnantur.

SIT enim altitudo metienda IF; statura mensoris I G, vel H A. Paretur planum Horizonti æquidistans per A, transiens, in quo Quadratum firmari possit, aut collocari. Primum ergo inuestiganda est hypotenusa A F, hoc modo. Inclinetur quadratum, ita vt centrum dioptræ occupet superiorem locum lateris a A, cuius inferius punctum statuatur in A, oculo mensoris. Et totum quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus A e, recta in cacumen F, vergat. Manente sic Quadrato, mensor oculum transferat ad a, & per dioptram inspiciat cacumen F, notenturque partes vmbræ versæ abscissæ b c. [c] Deinde fiat,



Vt c b, vmbra versa ad latus a b, 1000. Ita latus a A, notum in data mensura, quod nunc ponamus continere 3. pedes, ad A F,

Nam inuentus numerus dabit hypotenusam A F, cognitam in partibus lateris a A. Verbi gratia, si c b, contineat 50. partes vmbræ versę, & a A, tribus pedibus sit æqualis: si fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur A F, complecti 60. pe-

60. pedes. Si verò a A, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 200000. qualium 1000. in a A, comprehenduntur.

2. POST hæc deprimatur Quadratum, ita vt latus AD, Horizonti æquidistet, centrumque dioptrę sit in A. quo posito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenusam AF, quæ primum secet vmbram versam CD, in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptrę AE, in partibus laterum AD, DE, [a] quod fiet vel ex vtroque latere AD, DE, cognito: [b] Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere DE, noto: [c] Vel denique si ex summa quadratorum ex AD, DE, descriptorum radix quadrata extrahatur. Inuenta portione AE, in partibus millesimis lateris AD, ductaque EM, ipsi AG, parallela, [d] si fiat,

[a] 6. Triang. rectil.
[b] 5. Triang. rectil.
[c] 47. primi.
[d] 2. sexti & componendo.

Vt AE, inuenta in partibus millesimis lateris AD, ad AF, in iisdem partibus inuentam. Ita GM, in iisdem partibus cognita, cum æqualis sit ipsi DE, ad GF,

nota efficietur GF, in partibus millesimis lateris AD. Quod si rursus fiat,

Vt latus AD, 1000. ad 3. pedes, quos ponimus in AD, contineri: Ita GF, in millesimis partibus lateris AD, inuenta, ad GF,

reperietur eadem GF, in mensura pedum. Et si adiiciatur, statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognita fiet tota altitudo IF, in mensura pedum.

Vbi vides, nos eadem opera inuenisse quoque distantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vsque F.

3. SECET deinde hypotenusa a F, inuenta (inuenietur autem vt Num. 7. dictum est) vtrumque latus vmbræ in C, vt in 2. quadrato. [e] Si igitur fiat,

[e] 2. sexti. & componendo.

Vt portio dioptræ a c, inuenta in partibus a d, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus. ad a F, hypotenusam in iisdem partibus inuentam: Ita GK, 1000. ad GF,

prodibit GF, nota in partibus millesimis lateris d c: Et si rursus fiat,

Vt latus d c, 1000. ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus d c, Ita GK, 1000. cum æquale sit ipsi d c, ad GF,

inuenta erit eadem GF, in mensura pedum. Et si addatur statura mensoris GI, nota in eadem mensura, cognoscetur tota altitudo IF, in mensura pedum.

4. TERTIO secet hypotenusa inuenta AF, (quę inuenietur vt Num. 7. docuimus) vmbram rectam in E, vt in tertio quadrato. [f] Si ergo fiat,

[f] 2. sexti. & componendo.

Vt portio dioptræ A E, inuenta, vt Num. 2. docuimus. ad AF, hypotenusam inuentam. Ita GK, 1000. ad GF,

exibit GF, nota in partibus millesimis lateris DC. Et si iterum fiat,

Vt latus D C, 1000. ad 3. pedes in D C, contentos Ita GK, 1000. cum sit æqualis ipsi D C, ad GF,

cognita erit eadem GF, in mensura pedum, &c.

ATQVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentę in partibus millesimis lateris Quadrati reuocabuntur ad quamcunque aliam mensuram, vt ad pedes, vel cubitos, &c.

• 2. sexti. & componendo.

5. DISTANTIA autem AC, vel HI, cognita euadet, [a] si fiat,

Vt portio dioptræ A E, in primo Quadrato, vel a c, in 2. Quadrato, *ad hypotenusam AF, vel a F,* *Ita latus A D, in 1. Quadrato vel a d, in 2. Quadrato* *ad A G, in 1. quadrato vel ad a G, in secundo.*

VEL

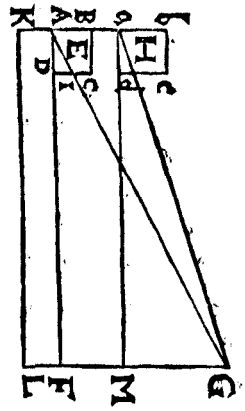
Ducta EL, lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt A E, portio dioptra, *ad hypotenusam AF,* *Ita vmbra recta B E, ipsi AL, æqualis,* *ad AG.*

VIDES igitur, in hac ratione dimetiendę altitudinis, ac distantię, etiam inaccessibilis, opus non esse duabus stationibus siue in plano, siue in hasta aliqua erecta faciendis; Quod non parum molestiæ plerunque afferre solet: sed solum inuestigandam esse prius hypotenusam per quadratum stabile inclinatum: Deinde portionem dioptræ inter eius centrum, & latus Quadrati, quod intersecat: quæ inuentio difficilis non est, vt patuit, cum mensor nunquam locum mutare cogatur.

ALTITVDINEM turris aut montis, ex eius summitate per Quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti æquidistante duæ stationes fieri possunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.



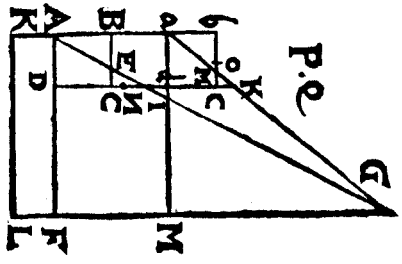
1. SIT altitudo DFMd, in cuius summitate, nimirum in plano Dd, duę stationes fieri possint, ex quibus signum aliquod in Horizonte, videlicet G, videri possit. (Nos ne nouam cogeremur describere figuram, repetiuimus primam problematis 4. inuerso tamen ordine positam, ita vt literæ rectum situm non habeant; Et quamuis signum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, si aliud signum longius distans eligatur, quod ex A, inspici possit.) Collocetur instrumentum in vtraque statione, vt latus vmbrę rectæ DC, vergat deorsum. Et primum vtraque vmbra recta secetur in E, H, (In hac enim inuersione latus DC, vmbræ rectę, & BC, versę deputatur, vt in constructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum est,) atque vmbræ dH, in propinquiore statione, quæ semper minor est, æqualis abscindatur DI. Itaque si fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum *ad Aa, differentiam stationum* *Ita AD, latus quadrati 1000.* *ad AF,*

cognita erit recta AF, ex qua si dematur latus quadrati AD, notum in partibus diffe-

differentiæ ſtationum, nota relinquetur altitudo D F, vel d M, quæſita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonſtratum eſt in problemate 4. Num. 1.

2. QVOD ſi in vtraque ſtatione latus vmbræ verſæ ſecetur in F, H, vt in 2. figura problematis 4. hic repetita, inuerſa tamen, habebimus tres vias inueſtigandi altitudinem A F, ex qua ſi tollatur latus quadrati A D, manifeſta relinquetur queſita altitudo DF, vel d M. Nam reducta vtraque vmbra verſa ad rectam, ſi fiat,



Vt I N, differentia vmbrarum rectarum,	*ad A a, differentiam ſtationum:*	*Ita A D, latus quadrati 1000.*	*ad A F,*

Vel ſine reductione.

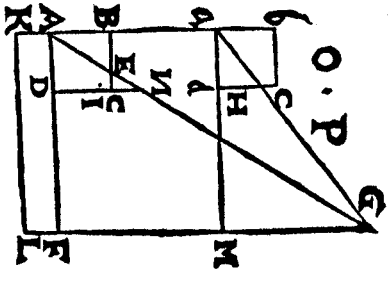
Vt P, numerus, qui ſit ex O H, differentia vmbrarum verſarum in a b, latus quadrati,	*ad numerum, qui fit ex vmbra verſa b H, maiore in minorem B E,*	*Ita A a, differentia ſtationum*	*ad A F,*

Vel

Vt A a, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramq; vmbram verſam diuidatur,	*ad A a, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua*	*Ita A F, vt 1.*	*ad A F,*

procreabitur ſemper altitudo AF, ab oculo inſpectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Num. 2. demonſtratum eſt.

3. SI denique in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ verſę in E, & in altera latus vmbrę rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4. hic inuerſo ordine repetita: ſi vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonſtrauimus, reducatur vmbra verſa ad rectam, & fiat,



Vt NI, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam stationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel sine reductione.

Vt O numerus, qui relinquitur, si numerus genitus ex vmbra versa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerum P, qui ex vmbra versa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differẽtia stationum*	*ad AF,*

producetur AF, altitudo in partibus differentiæ stationum Aa, &c.

4. IAM verò si distantia FG, à turri ad signum G, in Horizonte visum nota fuerit, facilius per vnicam stationem in A, factam altitudinem coniiciemus. Nam si vmbra recta DC, secetur in E, vt in 1. figura: [a] Fiat autem.

[a] 4. sexti.

Vt vmbra recta DE,	*ad latus AD:*	*Ita distantia cognita FG,*	*ad AF,*

[b] 4. sexti.

Vel quando vmbra versa BC, secetur in E, vt in 2. figura; [b] si fiat.

Vt latus AB,	*ad vmbram versam BE,*	*Ita distantia cognita FG,*	*ad AF.*

efficietur nota recta AF, in partibus distantiæ FG, à qua si dematur latus quadrati AD, notum in eisdem partibus distantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

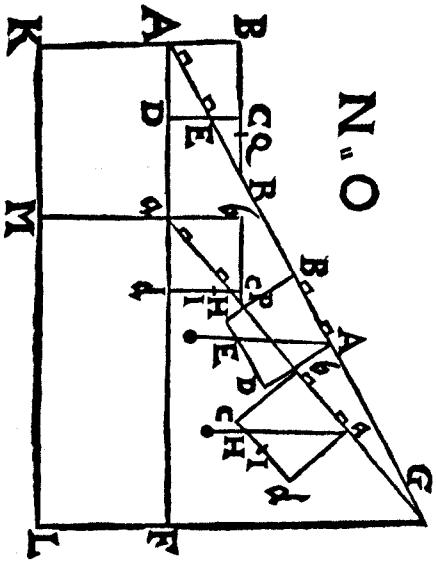
[c] 6. primi.

QVOD si dioptra per C, transeat, [c] erit distantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet.

HOC idem problema in scholio sequentis problematis absoluemus per vnicam stationem.

ALTITVDINEM turris vel montis ex eius summitate per duas stationes in hasta aliqua erecta factas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest.

PROBLEMA IX.



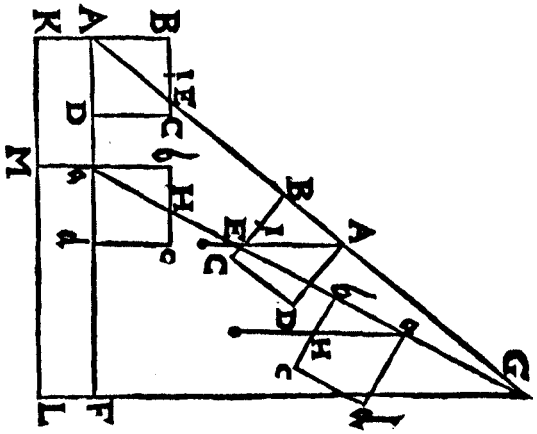
1. QVANDO in summitate non est planities tanta, vt in ea duæ stationes possint fieri, erigatur hasta aliqua in qua duæ stationes fiant. Vt si altitudo inuestiganda sit dF, erigatur hasta dA, & centro dioptræ applicato ad hastam primum in a, deinde in A, inspiciatur signum aliquod G, in Horizonte per radios aG, AG, secetur que primum vtraque vmbra recta in HE, vt in prima figura problematis 3. quam hic inuerso ordine repetiuimus. Nam vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuersione DC, fit latus vmbræ rectæ, & BC, versæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonstrauimus Num. 1. fiat,

Vt HI,

Vt H I, differentia vmbrarum rectarum, ad A a, differentiam stationum; Ita d H, vmbra recta maior ad AF,

nota fiet tota recta AF, ex quasi dematur portio hastæ A d, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo d F.

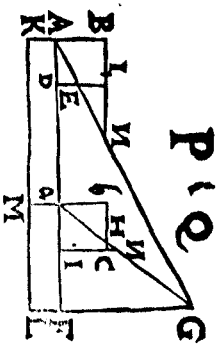
2. Si vero in vtraque statione vmbra versa à radijs intersecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerso, & fiat,



vt I E, differentia vmbrarum versarum, ad A a differentiam stationum: Ita B E, vmbra versa maior ad AF,

prodibit recta A F, ex qua si detrahatur portio hastæ A d, à principio primi quadrati ad finem secundi, reliqua d F, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. ostendimus.

3. At siin vna statione secetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ versæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuersa huc translata est, reducenda erit vel recta vmbra ad versam, vel versa ad rectam. Nam vt in problemate 3. Num. 5. ostendimus, si fiat,



Ad sinistrum angulum inferiorem, inferioris quadrati, pone d

Vt I N, differentia vmbrarum siue versarum, siue rectarum, ad Aa, differentiam stationum: Ita B N, maior vmbra versa, vel d N, maior vmbra recta, ad AF,

efficietur nota recta A F, ex qua si dematur portio hastæ A d, nota relinquetur altitudo d F.

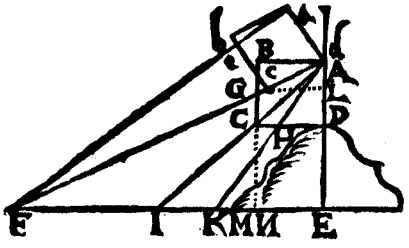
4. Quod si turris esset A F, & ex duabus fenestris d, D, obseruatio fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris A F, vt patet.

SCHOLIVM.

1. Quod præcedentia duo problemata per duas stationes siue in plano summitatis turris, vel montis, siue in hasta aliqua erecta factas docuerunt, possu-

mus per vnicam ſtationem quoque efficere, & ſimul diſtantiam à perpendiculo montis, vel à turre vſque ad ſignum in Horizonte propoſitum inuenire.

Altitudinem montis, vel turris ex eius vertice per vnicam ſtationem, vna cũ diſtãtia à turre, vel perpendiculo montis ad ſignum in Horizonte propoſitum metiri.



SIT enim montis alicuius, aut turris altitudo D E, & ſignum in Horizonte viſum F. Erigatur ex D, haſta aliqua D A, & ſumpta D A, æquali lateri quadrati ſtabilis, accommodetur quadratum a b c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, ſit ſuperius, & latus inferius recta ad ſignum F, vergat. Poſito deinde oculo in a, dirigatur dioptra verſus F, notenturque partes in vmbra verſa b e. Nam ſi fiat,

Vt b e, vmbra verſa *ad latus b a, 1000.* *Ita latus a d, 1000.* *ad A F.*

reperietur hypotenuſa A F, in partibus lateris a d. Accommodetur rurſus quadratum A B C D, vt centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus C D, Horizonti æquidiſtet, hoc eſt, latus AD, haſtæ erectæ congruat. Quo poſito, videbitur ſignũ F, per inuentam hypotenuſam A F, quæ primum ſecet latus vmbræ verſæ B C, in G; inquiraturque portio dioptræ AG, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus. [a] Nam ſi fiat,

[a] *4. ſexti. & componendo.*

Vt portio dioptra A G, inuenta *ad inuentam hypotenuſam A F,* *Ita AL, vmbra verſa BG, æqualis (ducta GL, parallela ipſi EF,)* *ad AE,*

comperta erit AE, in partibus hypotenuſæ AF. Et ſi dematur latus quadrati AD, in ijſdem partibus notum, reliqua fiet D E, altitudo montis, aut turris. Quòd ſi rurſus fiat,

Vt portio dioptra AG, inuenta *ad inuentam hypotenuſam A F,* *Ita EM, (producta BC. vſque ad M,) lateri CD, æqualis,* *ad EF,*

exibit nota diſtantia EF, in ijſdem partibus hypotenuſæ A F.

VBI vides eadem opera inueniri diſtantiam ab oculo A, vſque ad ſignum F, in Horizonte.

NON erit autem difficile ipſam DE, vel EF, ſi inuenta fuerit in partibus milleſimis lateris AD, vel CD, in alia menſura, vt in pedibus, efficere notam; ſi fiat,

Vt AD, latus 1000. *ad AD, notam in pedibus, verbi gratia in 3. vel in ſemiſſe vnius cubiti:* *Ita DE, vel EF, inuenta in milleſimis partibus,* *ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in milleſimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam menſuram vel pedum, vel cubitorum, &c. Quod etiam in ſcholio problem. 7. monuimus.

2. SECET deinde hypotenuſa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta eſt) quadratum

dratum in C: inuestigeturque portio dioptræ AC, vt in schol. problem. 7. Num. 2. tradidimus. [a] Deinde fiat, [a] 2. sexti. & componendo.

Vt portio dioptra AC, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AI,* — *Ita AD, latus 1000.* — *ad AE,*

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenusæ AI. Atque totidem partes complectetur distantia EI; [b] quod AE, EI, æquales sint, ob angulos semirectos EAI, EIA, æquales. [b] 6. primi.

3. POSTREMO hypotenusa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita est, secet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in schol. problem. 7. Num. 2. docuimus. [c] Nam si fiat. [c] 2. sexti. & componendo.

Vt portio dioptra AH, inuenta — *ad inuentam hypotenusam AK:* — *Ita AD, latus quadrati* — *ad AE,*

cognoscetur AE, in partibus hypotenusæ AK, &c. Et si rursus fiat, ducta prius HN, ipsi AE, parallela,

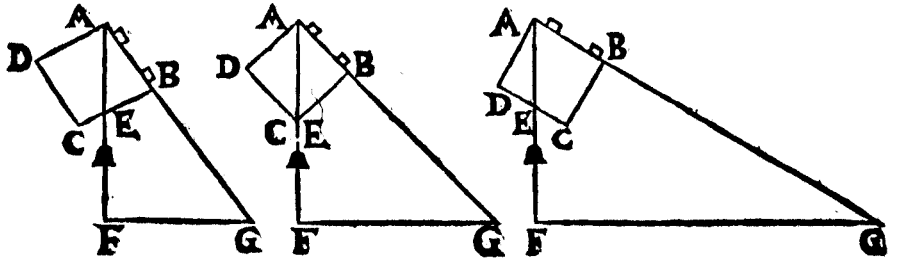
Vt portio dioptra AH, inuenta — *Ad inuentam hypotenusam AK,* — *Ita EN, vmbra recta DH, æqualis* — *ad EK,*

nota quoque reddetur distantia EK, in ijsdem partibus hypotenusæ AK, &c. Quod si ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo distantia à radice vsque ad E, quæ ablata ex distantia FE, inuenta notam quoque relinquet distantiam ab F, vsque ad radicem montis, quæ nonnunquam posset desiderari.

EX summitate turris, vel aliqua eius fenestra, distantiam à base turris ad signum propositum in Horizonte per quadratum cognoscere.

PROBLEMA X.

1. SIT turris aliqua AF, & distantia metienda FG. Si igitur altitudo turris cognita est, aut eius portio inter fenestram A, & basem F; inspiciatur signum G, per pinnacidia quadrati penduli. Et si quidem filum perpendiculi intersecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C, transeat, Fiat autem



Vt latus AB, partium 1000. — *ad vmbram rectam BE,* — *Ita AF, altitudo turris nota* — *ad FG,*

cognita

cognita erit distantia F G, quæsita in partibus turris notæ.

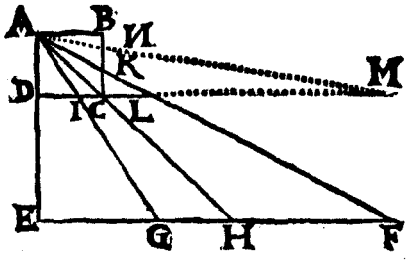
SI autem vmbra versa secetur in E, & fiat,

Vt vmbra versa D E,	*ad latus D A, partium 1000.*	*Ita A F, altitudo turris cognita*	*ad F G,*

efficietur quoque nota eadem distantia F G, in partibus turris cognitæ.

2. PER quadratum stabile eandem quoque distantiam adipisceris. Sit enim rursus turris quæpiam D E, & distantia metienda E G, vel E H, vel E F. Si igitur dioptra secet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati A D, 1000.	*ad vmbram rectam D I:*	*Ita altitudo A E ex turre & latere quadrati A D, conflata.*	*ad E G,*



prodibit distantia quæsita E G.

SI autem dioptra per C. transeat, erit distantia E H, altitudini A E, notæ æqualis.

SI denique vmbra versa intersecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra versa B K,	*ad latus quadrati 1000.*	*Ita altitudo nota A E,*	*ad E F,*

inuenietur distantia EF, in partibus altitudinis A E,

HÆC enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonstrata sunt.

3. QVOD si altitudo turris cognita non sit, inuestiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per scholium problem. 9. aut certe, si commode fieri possit, per chordam aliquam cum appenso perpendiculo demissam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num 1. & 2. dictum est.

VERVM sine cognitione turris idem assequemur ea ratione, qua in problem. 6. vel 7. altitudinem propositam indagauimus, etiamsi distantia vsque ad altitudinem sit ignota. Nam si in 6. problemate turris sit d f, distantia autem metienda F G, efficiemus illud, si in hasta aliqua erecta d A, fiant duæ stationes oculi, in a A. Solum quod ibi dictum est de vmbra versa, hic de recta intelligatur, & contra.

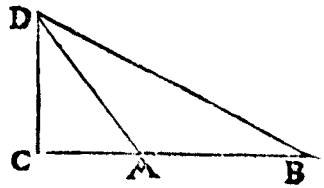
PARI ratione, si in 7. problemate turris sit d F, & distantia metienda F G, inueniemus eam, si in plano summitatis turris fiant duæ stationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra versa, hic etiam de recta intelligatur. Nam si figuræ problem. 6. & 7. hoc est, figuræ problem. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant A F, A F, latus quadrati D C, ad vmbram rectam, & B C, ad versam pertinebit, vt initio huius libri in constructione quadrati Num. 4. explicauimus.

SED hanc distantiam longè facilius in scholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam stationem, vt patuit in distantia EF, &c.

EX

EX ALTITVDINIS alicuius fastigio, etiamsi altitudo sit mensoris statura, distantiam inter duo signa in plano, cui altitudo insistit, si ea distantia è directo mensoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni possit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.

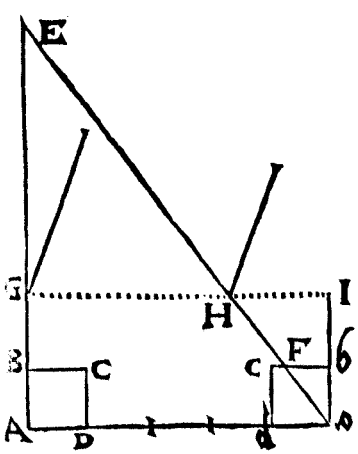


1. SIT distantia metienda AB, è directo altitudinis CD, in qua oculus mensoris existat in D, fastigio. Per problema antecedens inuestigetur ex vertice D, tam distantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet distantiam AB, inter signa A, & B, in partibus altitudinis CD, in quibus videlicet distantiæ etiam CB, CA, inuentæ sunt.

2. SI altitudo CD, sit statura mensoris, reperietur eodem modo distantia AB, si oculus mensoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere possit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extensam metiri per Quadratũ, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem recedere potest ad locum, è quo alterum extremũ appareat.

PROBLEMA XII.



1. SIT longitudo metienda AE, cuius extremum E, ex A, mensor videre non possit, neq; adsit altitudo, sed tamen si ad dextram, vel sinistrã recedat per lineam perpendicularem A a, vsque ad a, illud videre possit. Quadratum stabile ita erigatur, vt eius planum longitudini A E, congruat. Debet namque constare, quænam recta ad extrema A, E, pertineat, hoc est, rectam constituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus A B, a longitudine non recedat, extendatur recta per latus A D, vsq; ad a, vnde extremum, E, appareat, sitque spatium A a, per aliquam mensuram notum. Erectum autem in a, quadratum circumducatur, donec per eius planum extremum E, cernatur. Post hæc idem quadratum in Horizonte collocetur, latusque a d, perpendiculari A a, congruat: Et dioptra circum-

circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ a H, per quam extremum E, inspectum fuit, respondeat, noteturque vmbra versa b F, abscissa. Eruntque triangula a b F, a A E, æquiangula, propter rectos angulos b, A, & alternos b a F, A E a, æquales.[a] Quamobrem si fiat,

[a] 4. sexti.

Vt vmbra versa b F, ad quadrati latus a b, 1000. ita spatium A a, notum, ad A e,

cognita erit longitudo AE, in partibus spatij A a.

Si forte dioptra latus d c, vmbræ rectæ intersecet, (quod raro continget, cũ plerunque AE, maior, sit, quam A a,)[b] erit tunc.

[b] 4. sexti.

Vt latus a d, 1000. ad vmbram rectam abscissam: Ita spatium A a, ad longitudinem,

vt perspicuum est, si ducatur ex a, recta secans latus d e, &c.

Si denique dioptra fortassis per c, transiret,[c] esset spatium A a, longitudini quæsitæ æquale; propterea quod tunc fieret angulus semirectus d a c, ideoque & recta a c, si duceretur, faceret cum AE, angulum semirectum, atque adeo angulo d a c, æqualem.

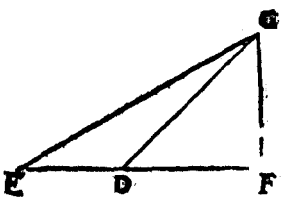
[c] 4. primi.

2. EADEM distantia longitudoue AE, cognoscetur, si tam in G, quam in H, baculus, seu arundo ad angulos rectos figatur, ita vt ex A, a, radij per arundinem incedentes ad E, ferantur, spatiumque A a, cognitum sit: vt in 2. probl. Num. 6. traditum est.

LONGITVDINEM in Horizonte è directo mensoris iacentem cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri, neque vlla adsit altitudo, dummodo ad dextram vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumque extremum appareat.

PROBLEMA XIII.

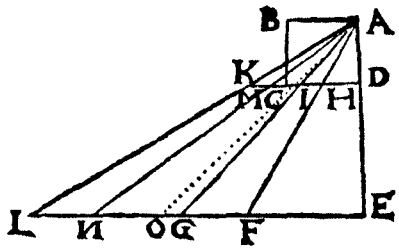
1. LONGITVDO metienda sit ED, è directo mensoris in F, existentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adsit altitudo: Sed solum per lineam perpendicularem F G, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, possit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo F E, quam F D. Hæc enim ex illa detracta non tam relinquet propositam longitudinem DE.



ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam ac turrim cognitum est, per quadratum coniicere.

PRO-

PROBLEMA XIV.



1. SIT mons, aut turris DE, sitque primum è directo mensoris in fastigio D, existentis interuallum F G, notum. Accommodetur quadratum stabile in summitate D, ita vt latus A D, perpendiculare sit ad Horizontem, & C D, Horizonti parallelum. Inspecto igitur per dioptram vtroq; termino F, G, secetur vmbra recta in H, I. [a] Quoniam igitur est, vt I H, ad H D, ita G F, ad F E: [b] Item ob triangulorum similitudinem, vt HD, ad DA, ita FE, ad EA; erit ex æquo, vt IH, ad DA, ita GF, ad E A. Igitur si fiat,

Vt I H, differentia vmbrarum rectarum — *ad D A, latus quadrati* — *Ita interuallum GF,* — *ad E A cognitum*

exibit nota recta E A. Et si dematur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli G F,) reliqua fiet nota altitudo D E, in partibus interualli G F.

[a] *schol. 4. sexti.*
[b] *4. sexti.*

2. SIT tota deinde distantia EG, nota. Inspiciendum ergo solum est extremum G. [c] Nam si fiat,

[c] *4. sexti.*

Vt I D, vmbra recta — *ad D A, latus quadrati* — *Ita distantia nota G E,* — *ad E A,*

efficietur rursus nota recta EA, &c.

3. QVANDO vmbra versa B C, intersecatur, vt si spatium notum sit LN, reducenda est vtraque vmbra versa ad rectas D K, D M. Nam rursus erit, vt KM, differentia vmbrarum rectarum ad latus D A, ita spatium notum L N, ad E A.

SIC etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter versam intersecat, vt in spatio LG, contingit, reuocanda erit vmbra versa ad rectam DK, vt iterum sit K I, differentia vmbrarum rectarum ad D A, latus, vt spatium notum LG, ad EA.

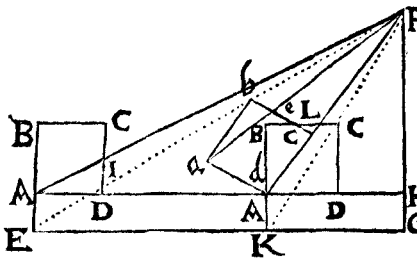
4. SI denique radius per C, transiret, sumendum esset totum latus CD, pro vmbra recta, at vmbra versa, si qua esset, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede mensoris (vbicunque existat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1. EXPLORANDA sit distantia puncti F, in muro aliquo siue perpendiculari ad Horizontem, siue inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, posita statura mensoris AE. Et sit primum altius punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F, demissa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab oculo A, alia perpendicularis A H. Collocato ergo ita quadrato, vt latus A D, Horizonti æquidistet, inspiciatur punctum F, radiusque A F, vel dioptra auferat

vmbram versam D I. Per problema 3. vel 4. vel potius per scholium problem. 7. inuestigetur distantia AH, etiamsi punctum H, non appareat: diligenterque inquiratur, quot partes millesimæ lateris A D, in segmento dioptræ A I, comprehendantur. quod multis modis, vt in schol. probl. 7. Num. 2. docuimus, exequemur hoc modo. Primum quoniam duo latera AD, DI, in rectangulo triangulo ADI, data sunt, [a] ignorari non poterit basis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra D I, notus fit angulus DAI, [b] cognoscetur rursus basis A I. Tertio [c] quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia sunt; si ex aggregato eorũ radix quadrata eruatur, exhibebit ea radix basem AI, notam. His peractis, [d] si fiat,



a 6. triang rectil.
b 5. triang. rectil.
c 47. primi.
d 4. sexti.

Vt latus AD, 1000	*ad portionem dioptræ A I, nuper inuentam:*	*ita distantia AH, nuper etiam inuenta*	*ad AF,*

cognita erit distantia A F, quæsita in partibus inuentæ distantiæ A H.

DISTANTIA autem EF, à pede ad datũ punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, duo latera AF, AE, cognita sunt, cum illud proxime sit inuentum, & hoc staturæ mensoris æquale sit; comprehenduntq; angulum notum EAF, vt pote conflatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus est ex vmbra versa D I: [e] notum efficietur latus quoque E F, quod quæritur.

e 12. trian. rectil.

2. QVOD si vmbra recta secetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum mẽsoris statura est A K: Inuenta portione dioptræ A L, in partibus millesimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon distantia AH, ex problem. 3. vel 4. vel ex scholio probl. 7. [f] Si fiat,

f 4. sexti.

Vt B L, vmbra recta	*ad L A, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita distantia A H, inuenta*	*ad A F,*

prodibit rursus nota distantia A F, in partibus distantiæ inuentæ A H.

NON aliter procedes si dioptra per C, transeat: [g] Cum tunc etiam sit, vt A D, latus ad partem dioptræ A C, inuentam, vt prius, ita distantia inuenta A H, ad distantiam quæsitam A F.

g 4. sexti.

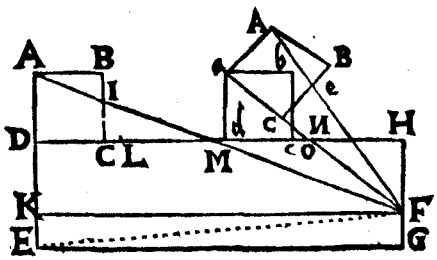
DISTANTIA autem K F, à pede K, vsque ad F, [h] inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, A K, & angulo ab ipsis comprehenso F A K; qui nimirum conflatur ex recto A, & D A L, complemento anguli B A L, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta B L.

h 12. trian. rectil.

3. SED sit iam punctum F, oculo A, depressius, & statura mensoris sit A E. Concipiatur ex F, duci F K, Horizonti parallela, vel ad A E, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipsi AE, parallela. Accommodato autem quadrato, vt latus AD, rectum sit ad Horizontem, & D C, Horizonti æquidistans, cogitetur DC, latus productum vsque ad H, punctum perpendicularis G H. Primum itaque reperiatur altitudo A K, per problema 8. vel 9. duabus stationibus factis in recta D H, vel in hasta D A, protracta, vel certe per scholium problem. 9. Quamuis enim statura mensoris AE, cognita sit, ignoratur tamẽ, quanta sit eius

pars

pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abscindit: ita vt omnino necessarium sit altitudinem AK, inquirere. quod per 8. problema facilè exequemur, si in vtraque statione vmbra versa secetur in I, N, (quod plerunque hic continget (& vtraque abscissa BI, bN, ad rectas DM, dO, reuocetur: Nam si fiat,



Vt LM, differentia vmbrarum rectarum *ad Dd, differentiam stationum:* *ita AD, latus* *ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo posito in eius summitate A; vt in dicto problem. 8. Num. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per scholium problem. 9. reperiri potest.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1. problema patefacit angulum BAI, hoc est, alternum AFK, sibi æqualem, nec non & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proximè inuento; [a] Itaque si fiat, [a] 5. Triang. rectil.

Vt sinus totus *ad latus AK, inuentum:* *ita AF, secans anguli FAK,* *ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus millesimis lateris quadrati, vt supra dictum est prope initium huius problematis, [b] si fiat, [b] 4. sexti.

Vt BI, vmbra versa *ad IA, partem dioptræ inuentæ:* *ita KA, altitudo inuenta* *ad AF,*

nota rursus efficietur distantia AF, in partibus rectæ AK, inuentæ.

PORRO distantiam EF, à pede mensoris ad punctum F, [c] inueniemus, vt supra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota sunt, cum illud sit statura mensoris, hoc autem sit proximè inuentum, angulumque continent notum FAK, vt paulò ante diximus [c] 12. triang. rectil.

4. NON aliter vtraque distantia cognoscetur, si punctum F, in Horizonte sit positum, qui Horizon per FK, intelligatur transire, ita vt statura mensoris, vel aliqua alia altitudo nota, sit AK. Nam cognita portione dioptrę AI, vt supra traditum est; [d] Si fiat, [d] 4. sexti.

Vt BI, vmbra abscissa *ad IA, portionem dioptræ inuentam:* *ita AK, altitudo, vel statura mensoris* *ad AF,*

nota euadet distantia A F, in partibus staturæ mensoris, vel altitudinis notæ A K.

a 4. sexti. [a] Rursus si fiat.

Vt B I, vmbra abscissa	*ad A B, latus quadrati 1000.*	*ita A K, altitudo, vel statura mensoris*	*ad K F,*

cognita etiam fiet distantia K F, à pede mensoris vsque ad punctum F, in partibus eiusdem staturæ mensoris, vel altitudinis notæ A K. Vbi vides, vtramque distantiam cognosci per vnicam stationem, quando punctum datum est in Horizonte.

5. SED vbicunque punctum F, existat siue in Horizonte, siue in sublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramque distantiam per vnicam stationem, hoc modo. Quando punctum F, est in sublimi, vt in prima figura, accomodetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, sit superius, & latus d c, versus punctum F, dirigatur. Inspecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra
b 4. sexti. versa e b, [b] Et fiat,

Vt vmbra versa e b,	*ad latus b a;*	*ita latus a d,*	*ad A F,*

Nam numerus productus notam faciet distantiam A F, in partibus lateris quadrati. Non aliter distantiam K F, à pede mensoris elicies, si eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt constat.

QVANDO autem punctum F, depressius est oculo, vt in 2. figura, erigendus est baculus a d, minor, quam statura mensoris, & in a, applicandum quadratum, vt rursus centrum dioptræ A, sit superius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viso puncto F, ex A, per dioptram, notataque vmbra versa e B, si fiat,

Vt vmbra versa e B,	*ad latus B A:*	*Ita latus A a,*	*ad a F,*

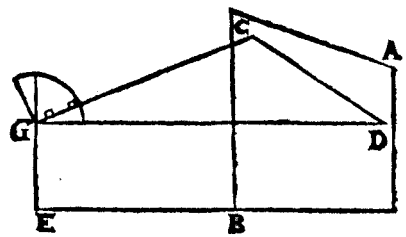
exibit distantia a F, nota in partibus lateris A a. Distantia porrò E F, à pede mensoris coniicietur, si quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum est. Quando denique punctum F, est in Horizonte, inuenietur vtraque distantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo signa, vel puncta in quolibet plano siue recto ad Horizontem, siue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.

1. IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum sit interuallum CD, ex plano BF. Posito oculo in G, vt statura mensoris sit G E, inuestigetur per præcedens problema, vtraque distantia G C, G D, in partibus staturæ mensoris G E. Deinde applicato quadrato stabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, transeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat, (quod fiet, si posita linea fiduciæ dioptræ supra illud latus, punctum D, per foramina pinnaci-

nacidiorum conspiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abscissa notetur, per quam ex problem. 1. anguli C G D, magnitudo addiscatur. Quod si alterum latus quadrati vltra rectam G C, existat, erit angulus CGD, acutus: si verò citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtusus: quem cognoscemus, si ad rectum adiiciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC; quem quidem inuestigabimus, vt



de acuto C G D, diximus, si nimirum in recta CD, mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam si tunc latus illud rectæ G C, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum est. Si denique alterum illud latus præcisè rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G, etiam cognitum; [a] cognoscetur quoque tertium latus CD, quod quæritur. [a] 12. triang. rectil.

2. VERVM inuentis distantiis GC, G D, in aliqua mensura, vna cum angulo G, facilius licet non tam certò, interuallum CD, cognoscemus hoc pacto. Descripto angulo G, seorsum sumatur in GC, portio quotlibet partium lateris quadrati, verbi gratia 500. id est, semissis lateris. Et fiat, vt distantia inuenta G C, ad distantiam inuentam G D, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus si capiatur in G D, portio æqualis, [b] erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidistans interuallo CD; vt constat, si illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea q. in illis extremis punctis rectæ GC, GD, sectæ essent proportionaliter. Quare si illud interuallum circino mensuretur in eisdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ G C, in 500. partes æquales diuisæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum sit vt portio particularum 500. ad interuallum illud, ita G C, diuisa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulæ reducentur ad mensuram, in qua inuentæ sunt GC, GD: si fiat, vt GC, quatenus 500. ad mensuras in G C, inuentas, ita C D, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuisæ, ad aliud. [b] 2. sexti.

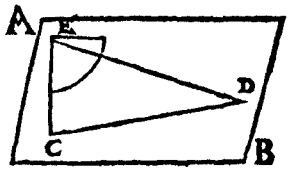
QVIA verò vix per circinum accurate reperiri potest interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquisitè, licet laboriosius, interuallum propositum cognoscetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM transuersum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri potest, per quadratum metiri.

PROBLE-

PROBLEMA XVII.

1. IN Plano Horizontis AB, iaceat interuallum CD, in transuersum, pes autem mensoris in E, ita vt longitudo CD, in vtramque partem producta per E, non transeat. Nam quando recta CD, è directo mensoris iacet, inuestigabitur ea, per problema 11. Itaque vt transuersum interuallum CD, cognoscatur, inquirenda erit primum vtriusque extremi puncti C, D, distantia à pede mensoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum est, per vnicam stationem. Deinde angulus CED, explorandus, quod fiet, si vnum latus quadrati rectæ EC, congruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abscissa inter latus illud, ac dioptram ostendet quantitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictũ est: qui quidem acutus erit, si alterũ latus vltra rectam ED, existet: rectus verò si præcisè rectę ED, congruet: obtusus denique, si citra rectam ED, cadet; quem cognoscemus, si recto angulo adiiciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in pręcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus CED, cuius duo latera EC, ED, cognita sunt, vna cum angulo comprehenso E: *a* cognitum quoque erit tertium latus CD, in partibus rectarum EC, ED.



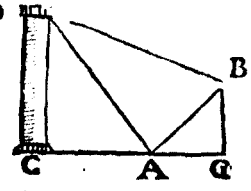
a 12. triang. rectil.

EADEM recta CD, cognita erit, si in rectis EC, ED, seorsum descriptis cum angulo E, inuento sumantur partes ipsis EC, ED, proportionales, &c. vt Num. 2. pręcedentis problematis factum est.

DISTANTIAM alicuius signi in Horizonte positi à summitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque mensor existat.

PROBLEMA XVIII.

1. IN Horizontis plano punctum A, distet à summitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quam sic venabimur. Vbicunque oculus mensoris existat, nimirum in B, indagentur per problema 15. distantię punctorum A, D, ab oculo mensoris B. Deinde angulus exploretur ABD, vt in problemate 16. docuimus. Nam sic habebimus triangulum ABD, cuius duo latera nota sunt BA, BD, vna cum angulo B. *b* Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.



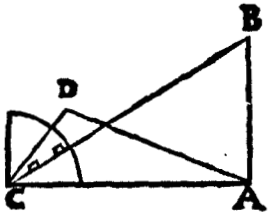
b 12. triang. rectil,

QVOD etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, si in rectis BA, BD, cum angulo B, seorsum ductis sumentur partes ipsis BA, BD, proportionales, &c.

ALTITVDINEM inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullum spatium secundum rectam lineam accedere possit mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram,

tram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.



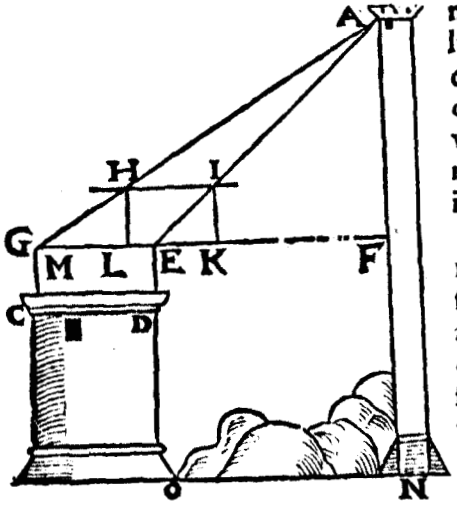
1. ALTITVDO metienda sit AB, inaccessibilis, ad quam ex C, loco mensoris non liceat accedere, aut ab ea recedere secundum lineam rectam, sed solum in transuersum vsque ad D, vnde basem A, videre possimus. Per problema 17. inuestigetur ex D, interuallum transuersum AC. Nam per 5. problema, quando iam distantia CA, manifesta est, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus, in partibus distantiæ inuentæ CA.

CÆTERVM ex scholio problem. 7. facilius per vnicam stationem in C, factam inuestigabitur & altitudo AB, & distantia AC, vna cum hypotenusa BC.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.

1. MAIOR altitudo AN, metienda proponatur ex minori aliqua turri CO, cognita, ex qua solum cacumen A, non autem basis N, appareat. Fiant in summitate duæ stationes in C, & D, si planum summitatis id permittat, staturaque mensoris sit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Per 6. problema reperietur altitudo AF, ad quam si adiicietur altitudo minor DO, vna cum mensoris statura CG, hoc est, recta FN, cognita fiet tota altitudo maior AN.

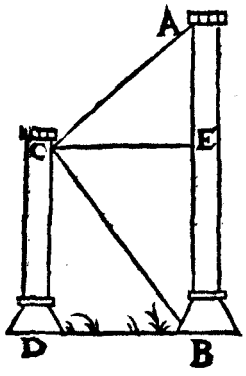


2. QVOD si in summitate tanta planities non sit, vt duæ stationes fieri possint, erigenda est hasta aliqua ad Horizontem recta, nisi forte adsit ædificium quodpiam erectum, ibiq; faciendæ duæ stationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quæ ab inferiori statione Horizonti ducitur parallela. Cui si apponitur altitudo minor ab inferiore statione vsque ad eius basem, conflabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. si maior altitudo sit GL, & minor AK, fiantq; duæ stationes in A, a, inferior vna, & altera superior, reperietur per 7. problema altitudo GF, cui si addetur minor altitudo AK, ab inferiori statione vsque ad basem, componetur tota altitudo maior GL.

PORRO facilius ex ſcholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, ſi in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio diximus. Vt ſi in figura eius ſcholij maior altitudo foret IF, & minor cognita AH, inueniretur GF, vt ibi oſtenſum eſt, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari.

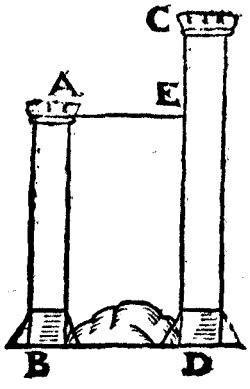
PROBLEMA XXI.



1. IN figura problematis 17. lib. 2. addiſcatur altitudo AE, vel per problema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problem. 7. ſi C, ſit ſummitas minoris altitudinis CD. Deinde quia baſis B, maioris altitudinis ponitur poſſe videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor CD, per problema 8. aut 9, vel potius per ſcholiũ probl. 9. ſi C, fuerit ſummitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem AE, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ deſideratur.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.

PROBLEMA XXII.



1. MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta AE, Horizonti BD, æquidiſtans, vt ED, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex ſummitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per ſcholium problem. 9. exploretur altitudo CE, inſpecto nimirum cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, ex C, viſum: atque hæc altitudo inuenta CE, ex maiore altitudine CD, quę cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere.

PROBLE-

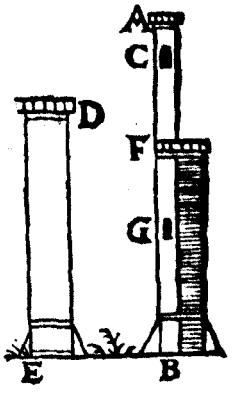
PROBLEMA XXIII.

1. FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia basis B, minoris altitudinis, tanquam signum quodpiam in Horizonte positum, videri potest, ex hypothesi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per scholium problem. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictum est, minor altitudo AB, ex maiore CD, proximè inuenta cognoscetur; quod est propositum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIV.

1. SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiori altitudine DE. Si altitudo DE, minor est reliqua portione CB, maioris altitudinis, inuestiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propositam portionem AC. Si verò DE, maior est reliqua portione FB, si nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inuestiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. exploranda erit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rursus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propositam AF.



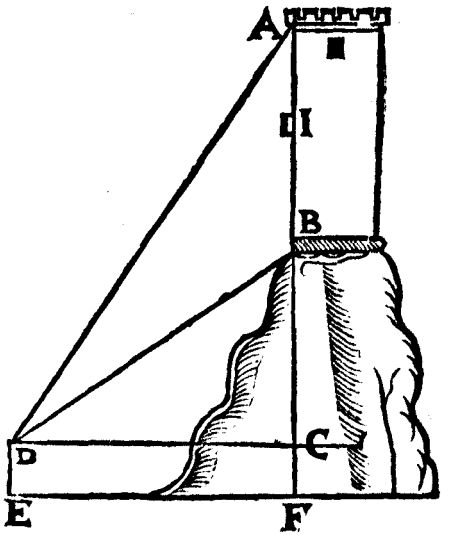
2. NON secus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, si fortè illarum differentia FG, inuenienda sit.

ALTITVDINEM, cuius basis imposita sit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.

1. HVIVSCEMODI altitudo est turris supra montem posita, & portio alicuius ædificij inter duas fenestras, vel duo signa, quorum alterum altero superius est. Sit igitur supra montem BF, altitudo turris AB, proposita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque turris extremum conspiciatur,

tur, inuestigetur per problema 6. vel 7. tam altitudo AF, quam BF, prout scilicet duæ stationes fiunt aut in plano, aut in aliqua hasta erecta. Vtraque tamen



altitudo AF, BF, facilius inuenietur per scholium problem. 7. si in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo scholio factum est. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine AF, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHOLIVM.

Suprema media atque infima pars altitudinis quo pacto metienda sit.

ITAQVE si AB, portio superior totius alicuius altitudinis AF, desideretur, indaganda erit per problem. 6. vel 7. aut potius per scholium probl. 7. tam tota altitudo AF, quàm eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit superiorem portionem AB, desideratam.

SI autem media aliqua portio IB, cognoscenda sit, coniicienda rursum erit per problema 6. vel 7. aut potius per scholium problem. 7. vtraque altitudo IF, BF, vt earum differentia IB, nota reddatur.

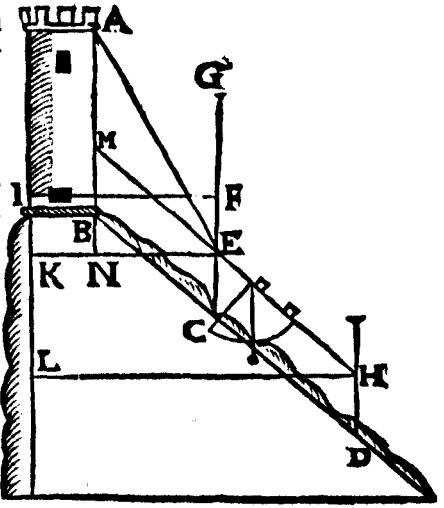
SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius per scholium problem. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine quando mensor in ascensu montis consistit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PROBLEMA XXVI.

1. SIT turris AB, monti imposita, in cuius ascensu, seu latere mensor consistat in C, ex quo loco basem turris videre nõ possit. Erigatur hasta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, sitque mensoris statura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis, aut Hori-

Horizonti æquidistans. Applicato autem quadrato stabili ad hastam in puncto E, (si pendulum adhibeatur, cõstituendus etiam erit oculus in E.) dirigatur dioptra versus cacumen A; & per vmbram abscissam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiat alia statio superior in F, in hasta, ductaq; per cogitationẽ recta FI, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rursus dioptra versus A, atque eodem modo angulus eruatur AFI.[a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis est, si auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in statione inferiori E, inuenti, ex AFG, complemento posterioris anguli in superiori statione F, deprehensi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quoniam igitur in trangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti sunt, vna cum latere EF, hoc est, cum differentia stationum,[b] nota fient reliqua latera AE, AF.



In figura duc lineam ex F. ad A.

[a] *32. primi.*

[b] *10. triang. rectil.*

2. POST hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, sumptaq; mensoris statura ipsi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rursumque per problema 1. ex vmbra abscissa angulus eliciatur EHL, ac radius visualis HE, altitudini occurrere concipiatur in M, [c] qui ipsi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim sunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac si DC, producta ad basem turris pertineret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, internus externo æqualis est, si EHL, cognitus hoc est MEK, ex angulo AEN, in priori statione E, obseruato, detrahatur, notus relinquetur angulus AEM: Est autem & angulus EAM, cum complementum sit anguli AEN, in priori statione E, obseruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: quiquidem etiam relinquitur, si NMH, complementum anguli MHL, in statione postrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triangulo AEM, omnes anguli noti sint, vna cum latere AE, quod paulo ante inuenimus, [e] cognoscentur quoque reliqua duo latera ME, AM: ac propterea distantia EM, vel CB, inuenta erit. Et si rectæ AM, inuentæ addatur mensoris statura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit.

[c] *33. primi.*

[d] *29. primi.*

[e] *10. triang. rectil.*

CVRANDVM autem est magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib 2. faciendum esse monuimus.

3. QVOD si basis altitudinis ex latere montis videri possit, nullo ferme labore problema per vnicam stationem efficiemus. Nam si in D, statuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ sit superius, & latus infimum recta in B, feratur, dirigenda erit dioptra versus idem punctum B. [f] Nam si fiat,

Vt vmbra versa abscissa *Ad latus quadrati:* *In latus quadrati* *ad aliud,*

inuenietur distantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido cõstat ex ijs, quæ in problem. 15. Num. 5. scripsimus, patetque in 1. figura eiusdem problematis; si

[f] *4. sexti.*

in ea cogitetur ascensus montis AF, in secundo quadrato, & F, basis altitudinis monti impositæ.

DEINDE si idem quadratum in D, ita statuatur, vt rursus centrum dioptræ sit in sublimi, & latus infimum ad fastigium altitudinis A, recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inspiciatur, reperietur eodem pacto distantia à D, vsque ad A; si fiat,

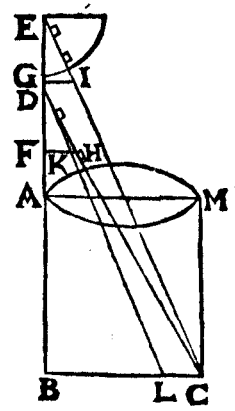
Vt vmbra versa abscissa ad latus quadrati: Ita latus quadrati ad aliud.

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ DB, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ DB, DA, efficiunt, vt in problem 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus seorsum describatur, & in rectis DB, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Num. 2. tradidimus, reperietur altitudo AB, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiusuis ad perpendiculum erecti, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.

1. HOC nihil est aliud, nisi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte signum aliquod apparet, per duas stationes in hasta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum est. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, seu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel signum quodpiam C, in fundo positum conspici possit. Erecta hasta AE, in orificio putei, vel summitate ædificij, fiant duæ stationes oculi mensoris in D, E, & applicato latere quadrati ad hastam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, statuatur, dirigatur dioptra versus C. Si igitur in vtraque statione dioptra vmbram rectam intersecet, quod plerumque in puteorum dimensione fieri solet: Fiat autem,



Vt differentia vmbrarum rectarum ad DE, differentia stationum Ita vmbra recta maior ad EB,

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ stationum DE. Si ergo auferatur recta EA, composita ex differentia stationum DE, & portione hastæ DA, quæ plerunque staturæ mensoris esse solet æqualis, vel certe facile mesurari potest, nota relinquetur altitudo AB, quæsita.

2. SI vero in vtraque statione vmbra versa intersecetur, & fiat,

Vt dif-

Vt differentia vmbrarum versarum ad DE, differentiam stationum, ita vmbra versa maior ad EB,

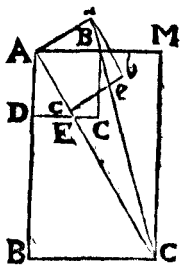
fiet rursus nota recta EB, &c.

3. SI denique in vna statione latus vmbræ rectæ secetur, & in altera latus vmbræ versæ, reducenda erit vel vmbra recta ad versam, vel versa ad rectam. Nam si rursus fiat.

Vt differentia vmbrarum siue versarum, siue rectarum, ad DE, differentiam stationum: ita vmbra versa vel recta maior ad EB,

iterum producetur recta EB, in partibus differentiæ stationum DE, &c.

PER vnicam quoque stationem assequemur altitudinem putei, quemadmodum in scholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem mensi sumus: si videlicet in A, quadratum ita statuatur, vt centrum a, dioptræ superius sit, & latus infimum AC, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam distantiam, vel hypotenusam AC, &c. vt in eo scholio factum est, atque hæc figura apposita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum est, vt A, centrum dioptræ sit in A, & latus AD, lateri pueri AB, adhæreat; Adeo vt per dioptram puncto C, inspecto, radius visualis ab hypotenusa AC, non differat. Itaque si fiat.



Vt eb, vmbra versa ad latus ba, ita latus a A, ad aliud,

inuenietur hypotenusa AC. Inuenta deinde portione dioptræ AE, in secundo quadrato, vt in scholio problem. 7. docuimus: * Si rursus fiat,

Vt portio dioptra AE, inuenta ad hypotenusam inuentam AC: ita latus AD, ad aliud,

prodibit altitudo, siue profunditas AB.

4. QVOD si latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, quæ facile per aliquam mensuram cognosci poterit facilius per vnam duntaxat stationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, conijciemus. Nam si fiat,

Vt vmbra recta, si ea abscissa fuerit, ad latus quadrati: ita latitudo cognita BC, ad AB,

Vel

Vt latus quadrati ad vmbram versam, si ea fuerit abscissa: ita latitudo cognita BC, ad AB,

producetur AB, profunditas nota in partibus latitudinis.

Et si forte dioptra per punctum C, in quadrato transeat, erit latitudo BC, rectæ AB, æqualis.

HÆ porro praxes demonstratæ sunt omnes in prædicto problemate 9. hac vltima Num. 4. excepta, quam in problemate 8. Num. 4. demonstrauimus.

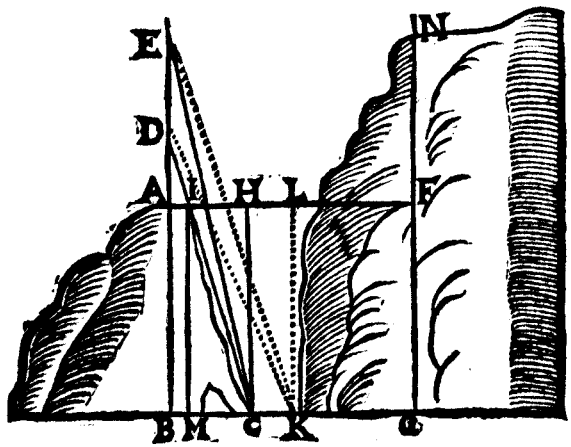
PROFVNDITATEM vallis, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea signum conspici possit, per quadratum cognoscere.

* 2. sexti. & componendo.

PRO-

PROBLEMA XXVIII.

1. Hoc etiam aliud nihil est, nisi altitudinem quampiam ex eius summo fastigio per duas stationes in hasta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum est, & in præcedenti problemate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, posita, & terminus ipsius C, ex monte AB, conspici possit, Erecta ha-



sta AE, in qua duæ stationes oculi mensoris fieri possint in D, E, si reliqua construantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inuestigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB, fuit inuenta. Et si dematur portio hastæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.

2. DESCENSVS autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abscissam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc est, angulus CIM,[a] qui ei æqualis est, externus interno; eritque proinde reliquus angulus ICM, notus, vtpote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti sint, vna cum latere IM, nuper inuento;[b] basis IC, ignorari non poterit.

a 29. primi.

b 5. triang. rectil.

SED hæc omnia facilius per vnicam stationem inuestigabuntur, si in D, puncto hastæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemate Num. 2. & in scholio problem. 9. factum est in puncto A, &c.

3. QVOD si terminus C, non cernatur, eligatur aliquod signum K, in valle, quod ex stationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius scholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

IMMO si in plano vallis duæ stationes commode fieri possint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problema 6. vel per scholium problem. 7. Descensus verò obliquus IC, tanquam interuallũ inter duo signa I, & C, per problema 16. indagandus erit.

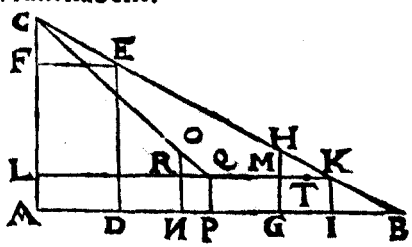
4. EANDEM denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte NG, si modo terminus C, minoris montis, vel aliquod signum in valle appareat ex cacumine N: non aliter, quam in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem

tudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda est CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri posse statuimus.

DISTANTIAM inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest.

PROBLEMA XXIX.

1. ABSOLVTIS dimensionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri solent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adest, vti possimus. Ex pluribus autem modis illis solum seligemus, quo faciliorem vsum habent.



SIT ergo distantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo mensoris ad pedes, rectus ad Horizontem. quod fiet, si filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demissus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat mensor vsque ad A, donec radius visualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi transiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipsi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula sunt; quod anguli F, D, sint recti, [a] & ECF, BED, æquales, internus, & externus, &c. [b] Si igitur fiat. [a] *29. primi.* [b] *4. sexti.*

Vt CF, differentia inter baculum DE, & mensoris staturam AC. ad FE, spatium inter mensorem & baculum: Ita ED, longitudo baculi noti. ad DB,

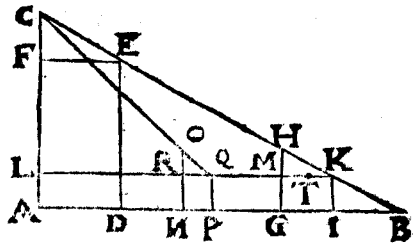
nota prodibit distantia quæsita DB, in partibus baculi DE, vel staturæ mensoris AC. Debent enim baculus, & statura mensoris per vnam eandemque mensuram esse cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PROBLEMA XXX.

1. SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquãtulum maior statura mẽsoris ab oculo ad pedes quæ sit IK. Deinde retrocedat mensor vsque ad I, ita vt eius oculus in K, constitutus fastigium C, inspiciat: intelligaturque ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, secans baculum in M. [c] Quoniam igitur triangula KMH, KLC, similia sunt, propter parallelas MH, LC: si fiat, [c] *coroll. 4. sexti.*

 Vt KM,



Vt KM, spatium inter mensorem, & baculum, ad MH, differentiam inter baculum & staturam mensoris: Ita distantia KL, qua nota fiat per aliquam mensuram, ad LC,

producetur recta LC, cui si adijcietur statura mensoris AL, tota altitudo proposita AC, cognita erit in partibus staturæ mensoris, vel distantiæ KL.

2. QVOD si accessus non pateat ad altitudinem AC, vt distantiam IA, metiri possimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis NO, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde mensor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q existens per summitatem baculi O, iterum fastigium C, videat: feceturque baculus NO, à recta KL, in R. [a] Et quia est, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item vt QR, ad RO, ita QL, ad LC: [b] Est autem maior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio KM, ad MH, quam QR, ad RO, ipsi MH, æqualem. (Cum enim & totæ GH, NO, & ablatæ GM, NR, æquales sint, erunt quoque reliquæ MH, RO, æquales) [c] Igitur KM, maior erit, quàm QR. Abscissa ergo KT, æquali ipsi QR, [d] quoniam est, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totam KL, ita MH, ad LC. Eadem ratione erit QR, hoc est, KT, ablata ex KM, ad QL, ablatã ex KL, vt RO, ad LC, hoc est, vt MH, ad LC. Igitur & reliqua TM, ad reliquam KQ, erit vt tota KM, ad totam KL: Vt autem KM, ad KL, ita paulo ante ostendimus esse MH, ad LC. Quapropter si fiat.

[a] 4. sexti.
[b] 8. quinti.
[c] 10. quinti.
[d] 4. sexti.

Vt TM, differentia inter spatia KM, & QR, vel KT, à mensore vsque ad baculos, ad KQ, differentiam stationum, Ita MH, differentia inter baculum, & mensoris staturam, ad LC,

efficietur nota LC, cui si addetur statura mensoris AL, nota quoq; euadet proposita altitudo AC.

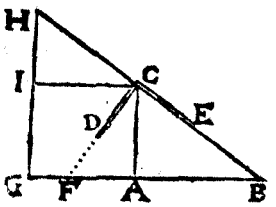
3. IAM si prima statio fiat in Q, & secunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonstratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.

1. PROPOSITA sit distantia AB. In A, loco mensoris figatur ad angulos rectos baculus AC, paulò minor statura mensoris, & per mensurã, per quam mẽsoris statura cognita est, notus. Angulus deinde rectus normæ C, summitati baculi

culi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius visualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctum extremum B, diligenterque notetur punctum F, in quod radius visualis per alterum latus interius CD, transiens incidit. [a] Et quoniam AC, media est proportionalis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & distantiam AB: si fiat,



[a] coroll. 8. sexti.

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita *ad baculum AC:* *Ita baculus AC,* *ad AB,*

Hoc est, si quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente distantia AB, nota in partibus baculi.

2. NON absre foret, si duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius visualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inuestigare.

PROBLEMA XXXII.

1. IN figura præcedentis problematis sit metienda altitudo GH. Figatur rursus in A, loco mensoris baculus AC, cuius summitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiusq; latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue, donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conspiciatur punctumq; F, in quo alterum latus CD, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiãgula sunt; q. anguli A, I, recti sint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (si nimirum communis auferatur DCI,) æquales: [b] si fiat. [b] 4. sexti.

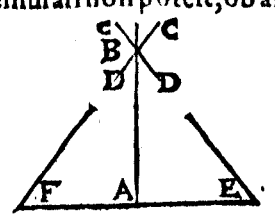
Vt baculus AC, *ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam* *Ita distantia CI, vel AG, qua nota fiat per aliquam mensuram,* *ad IH,*

procreabitur IH, nota, ad quam si adijcietur longitudo baculi AC, vel GI, proposita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non sit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PROBLEMA XXXIII.

1. QVANDO planum aliquod exiguam habet longitudinem, sed tamen mensurari non potest, ob aliquod impedimentum, cuiusmodi sunt latitudines flumintum, & stagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, mensurari nequeunt, ob interiectã aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut stagni, vel alterius cuiuscunque reimetiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cuiin puncto B, accõ-



modetur virgula CD, ita vt circa B, deprimi aut eleuari posit, donec radius visualis per CD, transiens occurrat extremo E, distantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula CD, manente immobili, ne angulus DBA, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos semper angulos Horizonti insistens, donec radius visualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut stagnũ, in quo nimirum mensor existit, & quod mensurari posit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A, B, trianguli ABE, duobus angulis A, B, trianguli ABF, æquales sunt, & latus AB, commune: [a] erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, si AF, in plano per aliquam mensuram efficiatur nota; distantia quoque AE, cognita erit.

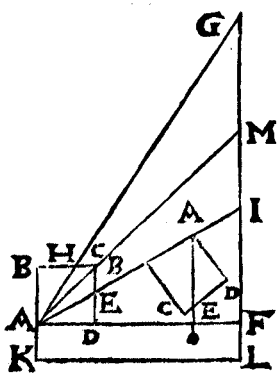
[a] 26. primi.

2. ALII hoc ipsum efficiunt sine baculo, hac ratione. Erigunt se ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimunt pileum, qui sit aliquantulũ latus, donec radius visualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, distantiæ AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt se versus planum aliquod mensurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius visualis ipsi plano occurrit. Nam rursus longitudo AF, quæ per mensuram aliquam cognoscenda est, distantiæ AE, propositæ æqualis est: propterea quod statura mensoris fungitur tunc munere baculi AB, & pileus depressus vices gerit virgulæ CD, vt constat.

ALTITVDINEM cuiusque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proiicit, si nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIV.

1. Hoc problema à quinto non differt, nisi quòd hic vtimur radio Solis pro radio visuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proiicit, pro distantia à mensore ad altitudinem vsque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiusque vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum versus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & transeunte radio Solis per foramina pinnacidiorum, notetur quanta vmbra siue recta, siue versa à dioptra, vel filo perpendiculi in quadrato abscindatur. Nam ita sese habebit vmbra recta HB, in quadrato ad latus AB, vt vmbra proiecta AF, ad altitudinem FG. Item ea est proportio lateris AD, ad vmbram versam DE, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ AF, ad altitudinem FI. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta AF, quanta est altitudo FM. quæ omnia in problemate 5. demonstrata sunt. Igitur si fiat.



Vt vmbra recta HB, in quadrato abscissa *ad latus AB,* *Ita longitudo vmbra proiecta AF,* *ad FG,*

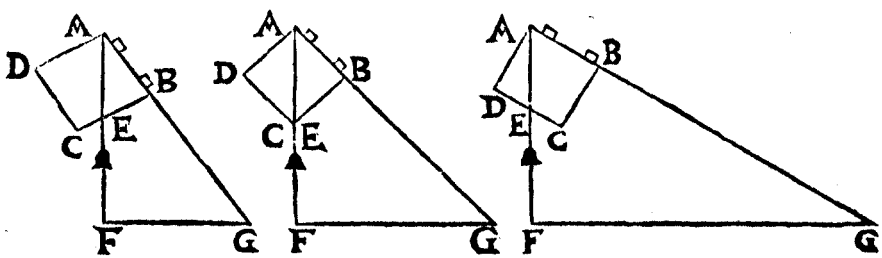
Vel

Vt latus AD, *ad vmbram versam DE, abscissam in quadrato* *Ita longitudo vmbra proiecta AF,* *ad FI,*

altitudo proposita FG, vel FI, proueniet nota &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo est cognita, ope quadrati apertam, & manifestam facere.

PROBLEMA XXXV.



1. Hoc etiam problema à secundo diuersum non est: solum hic pro distantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proiicit. Sit ergo altitudo AF, eiusque vmbra proiecta FG. Dirigatur quadratum versus Solem, vbicunque mensor extra vmbram constiterit, & transeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina, obseruetur vmbra siue recta, siue versa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abscindit. Ita namque se habebit latus quadrati AB, ad vmbram eius rectam BE, abscissam, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Item sic erit vmbra versa DE, in quadrato ad latus AD, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, transeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ FG, æqualis est. quæ omnia in problemate 2. demonstrauimus. Quamobrem si fiat,

Vt latus AB, *ad vmbram rectam abscissam BE,* *Ita altitudo nota AF,* *ad FG:*

Vel

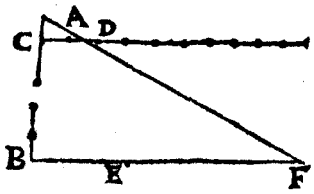
Vt vmbra versa DE, abscissa in quadrato *ad latus AD,* *Ita altitudo nota AF,* *ad FG,*

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter mensorem, & signum aliquod visum, beneficio simplicissimi cuiusdam instrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1. CONSTRVATVR instrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulò minor, quàm mensoris statura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, paucioresue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo sumantur ordine quotcunque palmi, aut pedes. In extremitate quoque baculi AB, infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: constructumque erit instrumentum, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit: Sit enim primum metiendæ distantia BF, cuius terminum F, mensor in altero termino B, existens videre possit ex A, etiamsi in medio sint valles, & alia impedimenta. Constituatur instrumentum in tali situ, vt AB, sit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidistans. Inspecto extremo F, ex A, notetur summa cura ac diligentia punctum D, in baculo CD, per quod radius visualis transit. [a] Nam cum triangula ACD, ABF, sint similia; [b] si fiat,



[a] *coroll. 4. sexti.*
[b] *4. sexti.*

Vt AC, Ad AB, Ita CD, ad BF,

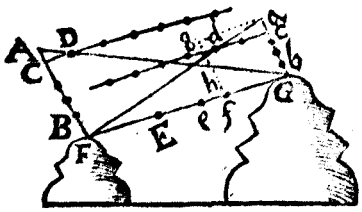
inuenta erit distantia BF, in partibus CD. Itaque si AC, est quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars distantiæ BF. Et quia in nostro exemplo CD, continet 2. pedes, si eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro distantia BF.

2. CVRANDVM autem erit diligenter, vt quando radius visualis non transit per aliquem pedem integrum baculi CD, inuestigetur, quot decimæ, vel centesimæ vnius pedis in particula abscissa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. scripsimus, quod fiet, si in regula CD, decem pedes comprehendantur. Idemque de quacunque alia mensura intelligendum est, si ea in CD, loco pedum signetur.

3. VERVM hoc eadem facilitate præstitimus ope quadrati, tum penduli, tum stabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti instrumenti coniicere.

PROBLEMA XXXVII.



1. SINT duo cacumina montium F, G. Posito puncto B, prædicti instrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumen G, tendat, quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Num. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc situ instrumento, inspiciatur cacumen G, ex A, obserueturque punctum D, intersectionis radij AG, cum baculo CD. [c] Nam cum æquiangula sint triangula ACD, ABG, si fiat,

[c] *coroll. 4. sexti.*

Vt AC,

Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita CD, nota in data mensura*	*ad BG,*

cognoscetur distantia BG, in partibus CD. Vt si AC, est quinta pars ipsius AB, & CD, contineat 1. pedem, & insuper $\frac{2}{3}$. si $1\frac{2}{3}$. quinquies sumatur, efficietur distantia BG, pedum $8\frac{1}{3}$.

2. NON aliter distantia bF, ex maioris montis cacumine G, inuestigabitur, vt figura indicat.

EODEM modo procedes, si puncta F, G, sint fastigia duarum turrium, aut si vnum sit fastigium turris, & alterum, cacumen montis, vt constat.

3. IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum abfg, statuaturque angulus b, in cacumine G, & latus bf, deprimatur, ita vt recta in cacumen F, tendat, si productum intelligatur, obseruetur que vmbra versa abscissa gh, à radio visuali aB. Nam quia triangula agh, Bba, æquiangula sunt, [a] si fiat. [a] 4. sexti.

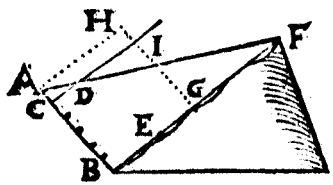
Vt gh, vmbra versa	*ad ga, latus quadrati*	*ita latus quadrati ab,*	*ad Bb,*

hoc est, si quadratus numerus lateris, nimirum 1000000. diuidatur per vmbram versam, gignetur in Quotiente distantia Bb.

IDEMQVE fieret, si angulus quadrati in B, collocaretur, infimumque latus recta à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM ascensus alicuius montis, si eius cacumen ab oculo in radice constituto videatur, eiusdem instrumenti beneficio cognoscere.

PROBLEMA XXXVIII.



1. ACCOMMODETVR prædictum instrumentum, vt punctum B, in radice montis statuatur, & baculus BE, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problem. 31. dictum est, recta in cacumen F, vergat; noteturque intersectio D, radij visualis cum baculo CD, inspecto cacumine F, ex A. [b] Nam iterum triangula ACD, ABF. Similia erunt. [c] Quare si fiat, [b] coroll. 4. sexti. [c] 4. sexti.

Vt AC, nota in partibus AB,	*ad AB, notarum partium:*	*Ita CD, nota in data mensura*	*ad BF,*

cognoscetur ascensus obliquus montis B, F, in partibus CD.

2. PARI ratione, si F, sit fastigium alicuius turris, inuestigabis distantiam à puncto B, in terra, vel alibi posito, vsque ad F, hoc est, hypotenusam BF, vt perspicuum est. Atque hoc eodem instrumento complures aliæ dimensiones absolui poterunt, quod prudens Lector facilè perspiciet.

3. IDEM assequemur quadrato ABGH, si eius angulus B, in radice statuatur, & latus BG, eleuetur ita, vt recta tendat in cacumen F. Obseruata enim vmbra.

vmbra versa H I, quam dioptra in cacumen F, directa abscindit, fiunt triangula AHI, FBA, æquiangula. [a] Quamobrem si fiat,

[a] 4. sexti.

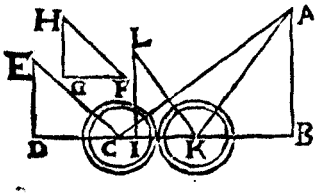
Vt H I, vmbra versa	*ad A H, latus quadrati*	*Ita latus quadrati A B,*	*ad B F,*

id est, si quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmbram versam, dabit Quotiens numerus longitudinem ascensus obliqui B F.

ALTITVDINEM, ad cuius basem pateat accessus, beneficio speculi plani, vna cum distantia speculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.

1. SIT altitudo AB, à cuius base B, recedatur per quotuis passus, aut pedes, vsque ad C, punctum, in quo speculi plani centrum collocetur, & secundum



rectam BC, retrocedatur, donec mensoris oculus in E, constitutus cacumen A, intueri possit per radium reflexum ECA, ita vt DE, sit statura mensoris ab oculo vsque ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ D C E, æqualis est angulo reflexionis A C B, vt Perspectiui docent, & anguli D, B, recti sunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula; [b] ideoque erit, vt CD, ad DE, ita CB, ad BA. Quo circa si fiat,

[b] 4. sexti.

Vt C D, distantia mensoris à speculo C,	*ad D E, staturam mensoris:*	*Ita C B, distantia speculi ab altitudine.*	*ad B A,*

producetur altitudo B A, quam quærimus, nota in partibus staturæ mensoris D E.

ALITER.

2. MENSVRETVR per quadrantem angulus D C E, vel B C A, (Hoc fiet, si angulus rectus construatur F G H, & recta F G, tot particulas æquales contineat, quot passus, vel pedes in CD, distantia continentur: Item recta G H, tot particulas easdem, quot passus aut pedes statura mensoris D E, complectitur. Iuncta namque recta F H, [c] erit angulus F, angulo C, æqualis. quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuisum cognoscemus.) Nam si posito sinu toto C B, fiat.

[c] 4. primi.

Vt sinus totus C B,	*ad B A, tangentem anguli reflexionis B C A, vel incidentiæ D C E, quem proximè inuenimus*	*Ita C B, distantia cognita*	*ad B A,*

prodibit altitudo B A, nota in partibus distantiæ C B. Et si rursum fiat,

Vt sinus totus C B,	*ad C A, secantem eiusdem anguli B C A,*	*Ita C B, distantia cognita*	*ad C A,*

cognita etiam erit C A, distantia à speculo C, vsque ad cacumen A, in partibus distantiæ C B.

ALI-

ALITER.

3. PER solos sinus ita progrediemur, si libet. [a] Fiat,

Vt sinus anguli A, complementi anguli C, reflexionis, vel incidentiæ, *ad CB, distantiam cognitam* *Ita sinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis,* *ad BA.* [a] 10. triang. rectil.

Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus distantiæ CB. [b] Rursus fiat, [b] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli A, complementi anguli eiusdem C, *ad CB, distantiam cognitam:* *Ita sinus totus recti anguli B,* *ad CA.*

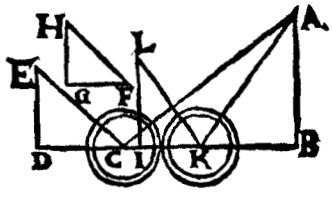
Numerus enim proueniens dabit hypotenusam CA, in partibus distantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inaccessibilem beneficio speculi plani, vnà cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quàm à cacumine altitudinis cognoscere.

PROBLEMA XL.

1. SIT rursus in præcedenti figura altitudo AB, supra planum BD, erecta. Collocato speculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A, per radium reflexum ECA, cerni possit, obseruetur que per quadrantem angulus ECD, ideoque & angulus ACB, vt in problemate præcedenti Num. 2. dictum est. Deinde collocato speculo in K, puncto, quotuis passibus à C, versus altitudinem distante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inspiciatur rursum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB. Et quoniam posito sinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes sunt angulorum BAK, BAC, qui complementa sunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum, cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium quæ complemẽtis angulorum incidentia debentur, *ad AB, sinum totum.* *Ita KC, differentia positionum speculi* *ad AB,*



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ positionum speculi KC.

RVRSVS si fiat,

Vt KC, differentia complementorum angulorum incidentiæ in speculo, *ad CB, tangentem maiorem:* *Ita KC, differentia positionum speculi* *ad CB,*

reperietur CB, maior distantia speculi C, ab altitudine. Ex qua si auferatur KC, differentia positionum speculi, nota remanebit KB, minor distantia speculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, si fiat, vt KC, differentia prædictorum angulorum, qui complementa sunt angulorum incidentiæ in speculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia positionum speculi ad aliud, vt perspicuum est.

[a] 22. primi. a DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore speculi positione duobus angulis ACK, CAK, æqualis est, si angulus ACK, remotioris positionis detrahatur ex angulo AKB, positionis propinquioris: remanebit angulus CAK, notus. [b] Si igitur fiat,

[b] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli CAK, differentiæ angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam positionum speculi:*	*Ita sinus anguli AKC, complementi anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore positione speculi*	*ad CA,*

gignetur hypotenusa CA, remotioris positionis speculi, in partibus differentiæ positionum speculi KC. [c] Et si rursus fiat,

[c] 10. triang. rectil.

Vt sinus anguli CAK, differentiæ angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam positionum speculi:*	*Ita sinus anguli reflexionis ACK, in remotiori positione speculi*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenusa KA, propinquioris positionis speculi, in eisdem partibus differentiæ positionum speculi KC.

ALITER.

2. PER solos sinus idem assequemur hoc modo. Inuenta hypotenusa CA, vt proximè diximus, per sinus. [d] fiat,

[d] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti B,	*ad hypotenusam inuentam CA,*	*Ita sinus anguli ACB, remotioris positionis speculi*	*ad AB,*

Prodibit enim in Quotiente altitudo AB, nota in partibus hypotenusæ inuentæ CA. [e] Quod si rursus fiat,

[e] 10. triang. rectil.

Vt sinus totus anguli recti B,	*ad hypotenusam inuentam CA,*	*Ita sinus anguli BAC, complementi anguli in remotiore positione speculi*	*ad CB,*

producetur CB, maior speculi distantia ab altitudine. Ex qua si subtrahatur KC, differentia positionum speculi, cognita etiam relinquetur distantia minor KB. Quæ etiam, si inuestigetur hypotenusa KB, vt supra traditum est, reperietur: si fiat, vt sinus totus anguli recti B, ad hypotenusam inuentam KB, ita sinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore positione speculi, ad aliud, vt manifestum est.

ALTITVDINEM monti impositam, si modo altitudinis basis possit conspici, vel portionem superiorem alicuius turris, beneficio speculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

1. QVANDO ad turrim patet accessus, vt eius à mensore distantia cognosci possit; si per probl. 39. inuestigetur tam altitudo à summitate portionis propositæ, vsque ad basem turris, quam altitudo ab infima parte eiusdem portionis, vsque ad eandem turris basem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

2. AT verò, quando altitudo monti est imposita, & basis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet accessus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rursus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ desideratur.

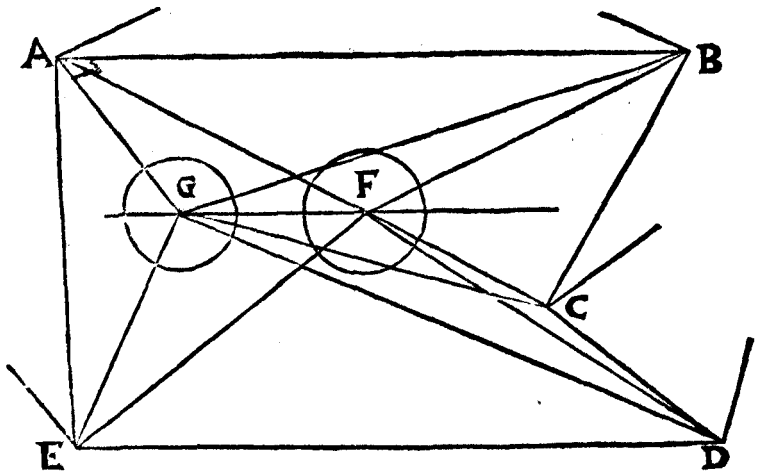
SITVM cuiuslibet campi, aut atrii, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiusuis in plano describere, si è duobus locis intra ipsum situm assumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certè ipsi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri possint: simulque longitudines laterum campi, vel ædificii, nec non distantias inter angulos, & vtrumuis locorum assumptorum in data mensura cognoscere. Quod si talia duo loca intra situm eligi nequeant, idem efficere, dummodo situm possimus circumire.

PROBLEMA XLII.

Situs campi cuiusuis, quo pacto ex duobus locis intra ipsum assumptis deliniatur.

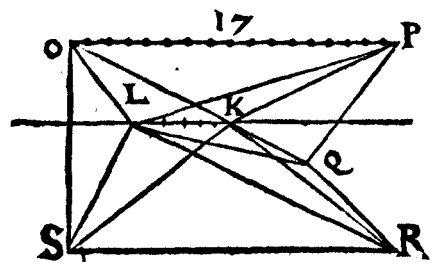
1. ETSI problema hoc vel Geographicum est, vel Architectonicum; tamen quia sine dimensione linearum absolui non potest, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo campus quinque lateribus AB, BC, CD, DE, EA, cinctus. Figantur in quinque angulis A, B, C, D, E, quinque baculi ad angulos rectos cum Horizonte, pareturque circa medium areæ planum aliquantulum altum Horizonti æquidistans, in quo duo puncta F, G, quantumlibet inter se distantia, verbi gratia 100. pedibus, è quibus omnes quinque baculi cerni possint. Per F, G, ducatur recta FG, ad vtrasque partes; continebitque segmentum FG, 100. pedes ex hypothesi. Affixa deinde dioptra volubili cum pinnacidiis in vtroq; puncto F, & G, descriptisque circulis duobus ex F, & G, vt per eorum circumferentias angulorum magnitudines, qui in F, G, constituetur, cognosci possint, inspiciantur ex F, & G, per foramina pinnacidiorum (circumducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cũ recta HI, facit, aut quos rectæ à linea fiduciæ designatę inter se faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunq; inter se distantia in recta, KL,

quæ seorsum in charta aliqua sit descripta, productis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si namque puncta, vbi dictæ lineæ ex



K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, descripta erit figura O P Q R S, similis omnino figuræ campi A B C D E. Quod sic demonstro. Triangula AGF, OLK, similia sunt, quòd anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales sint, ex constructione. [a] Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob similitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli A G E, O L S, circa quos latera illa sunt proportionalia, æquales sint, quippe cum angulo A G E, factus sit æqualis ex constructione angulus O L S: [b] similia erunt triangula AGE, OLS, hoc est, æquiangula. Pari ratione ob similitudinem triangulorum FGD, KLR, [c] erit GD, ad GF, vt LR, ad LK. Item ob similitudinem triangulorum FGE, KLS, erit FG, ad GE, vt KL, ad LS. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad L S: Ac proinde cum anguli DGE, RLS, ex constructione sint æquales; [d] æquiangula quoque erunt triangula D G E, R L S. Non aliter ostendemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis, QLR, PLQ, OLP, esse æquiangula. Immo eisdem argumentis concludemus, quamuis non sit necessarium, triangula, quæ in F, supra latera campi constructa sunt, æquiangula esse triangulis in K, supra latera figuræ O P Q R S, constitutis. Ex his sequitur, figuram ABCD E, figuræ O P Q R S, æquiangulam esse: quippe cum earum anguli coagmentati sint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipsum componentibus, qui angulis OSL, L S R, angulum O S R, componentibus æquales sunt; & sic de cæteris. Sequitur etiam latera earundem figurarum circa æquales angulos esse proportionalia. Nam propter triangulorum similitudinem, [e] est AE, ad EG, vt O S, ad S L: & E G,

[a] 4. sexti.
[b] 6. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 4. sexti.
[e] 4. sexti.



& EG, ad ED, vt SL, ad SR. Ideoque ex æquo AE, ad ED, vt OS, ad SR: Atque ita de alijs. Similis ergo sunt figuræ ABCDE, OPQRS.

2. IAM vero vt longitudines laterum AB, BC, CD, DE, EA, & rectarum ex F, vel G, ad angulos in prima figura ductarum inueniamus, diuidendum erit in figura inuenta, id est, in secunda, interuallum KL, in quotcunq; partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in singulis lateribus, & rectis eiusdem figuræ secundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur. quod vel per circinum fieri potest, repetendo sæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL, in quolibet latere, vel recta, quoties fieri potest, & in reliquo segmento vna etiam particula interualli KL, circino iteretur, quoties fieri potest. Nam quoties repetita fuerit KL: toties numerus particularum ipsius KL, in latere continebitur, cum tot insuper particulis, quot per circinum in reliquo segmento fuerint deprehensæ. Aut certe per ea, quæ lib 1. cap. 1. ad finem Num. 2. scripsimus, inuestigetur in instrumento partium, quot particulæ interualli KL, in dictis lateribus, & rectis cõprehendantur. Deinde fiat, vt numerus particularum interualli KL, assumptus in 2. figura, ad numerum pedum inter puncta F, & G, in prima figura assumptum, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in secunda figura inuentarum, ad aliud. Quotiens enim numerus indicabit, quot pedes in assumpto latere, vel recta contineantur. Ratio est, quia cum eandem proportionem habeat KL, in 2. figura ad quodlibet latus, vel rectam eiusdem figuræ, quam habet FG, in prima figura ad respondens latus, vel rectam, propter similitudinẽ figurarũ, erit pmutando KL, ad interuallũ FG, vt latus ad latus, &c. Verbi gratia, In 2. figura interuallum KL, sectum est in 5. particulas, qualium 17. in latere OP, inuentæ sunt: Et quia spatium FG, in 1. figura positum est 100. pedum: si fiat,

Vt KL, quinque particularum — *ad FG. 100. pedum:* — *Ita OP, 17 particularum* — *ad AB,*

hoc est, si, vt regula aurea præcipit, 100. ducantur in 17. secundus numerus in tertium, & productus numerus 1700. diuidatur per 5. id est, per primum numerum, reperientur in Quotiente 340. pedes pro latere AB, & sic de cæteris.

Situs campi cuiusuis qua ratione ex vno loco intra ipsum assumpto describatur.

3. EVNDEM situm campi propositi ABCDE, delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipsum assumpto, hac ratione. Dioptra ad singulos baculos ex angulis erectos, dirigatur, notatis angulis, quos lineæ, per dioptram designatæ inter se faciunt; distantiæque ab F, ad singulos angulos inquirantur in aliqua mensura, vel per catenulã aliquã ferream, quæ nec intendi possit, nec remitti, vel per chordam ex F, ad singulos angulos extensam vel certe, si distantiæ illæ magnæ sint, per problema 2. vel 36. beneficio quadrati, alteriusue instrumẽti. Nam si in charta aliqua ad quodlibet punctum K, ijdem anguli constituantur, & in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter se æquales cuiusuis magnitudinis, quot mensuræ inuentæ sunt in rectis respondentibus, quæ ex F, exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur, descripta erit figura OPQRS, similis omnino campo ABCDE: [a] propterea quod triangula ad punctum F, collecta similia sunt triangulis ad punctum K, collectis, ob æqualitatem angulorum in F, & K, constitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia, ex constructione.

[a] 6. sexti.

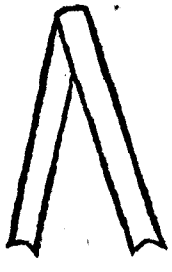
4. LATERVM autem longitudines in campo ABCDE, cognoscentur, si

per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figuræ OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emissa sumptæ fuere. Totidem namq; mensuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perspicuum est ex figurarum similitudine.

Vrbis cuiusuis, ac regionis situs quo pacto describatur.

5. EADEM prorsus ratio tenenda est in situ alicuius atrij vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe describenda pro punctis F, & G, eligendæ sunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conspici possint, & quarum distantia vnius ab altera vel cognita sit, vel per præcedentia problemata inuestigata. In regione autem delineanda pro ijsdem punctis F, & G, duo oppida deligenda sunt, & in quolibet ex altissima turre circumiacentia oppida inspicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo mensoris ad singula oppida eductæ constituunt. Hi autem facilius obseruabuntur, si loco dioptrę, quia nimis alta est, statuatur planum erectum in punctis F, & G, ita vt circumductum transeat per oppida circumiacentia, si intelligatur esse productum. Ita namque planum ipsum rectas designabit, quæ angulos prædictos constituant. Atq; hoc etiam in situ vrbium peruestigando faciendum erit. Itaq; si anguli vrbis cuiuspiam, aut oppida alicuius regionis sint A, B, C, D, E, & duæ turres in F, & G, omnia perficienda erunt, vt supra de campi situ dictum est. Nam situm vrbis, vel regionis exhibebit figura OPQRS, distantiæque locorum A, B, C, D, E, vnius ab altero cognoscentur, vt de lateribus campi dictum est.

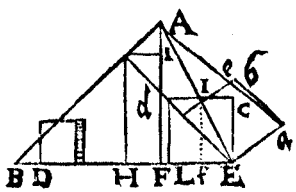
6. QVOD si intra situm propositum duo loca, vel vnus saltem non existat, vnde omnes anguli conspici possint, vt in omnibus ædificijs contingit, oportebit situm circumire, & inuestigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ sunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos transire conspiciatur. Ipsum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificijs autem, ac templis ipsi muri exteriores dictos angulos constituunt, quorum amplitudo inuestigari solet ab artificibus instrumento quodam ex duabus regulis compacto, quarum vna sub alteram ingressa moueatur, (quod Italis Squadrazoppa dicitur) vt hæc figura indicat. Aperto namque instrumento, si crura duobus muris angulum efficientibus congruent, dabunt interiora crurium latera in cõcursu angulum quæsitum. Et si idem instrumentum interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadem latera interiora crurium angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis, ac notatis, mensuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulam ferream, vel chordã, aut certe in campis, si ea interualla longa sint, per problema 2. vel 36. exploranda in aliqua mensura nota, vt in cubitis. Nam si in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, deprehensi sunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta OS, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vsq; ad S, quot cubiti in interuallo AE, reperti sunt: ac rursum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & sic deinceps, repræsentabitur situs campi per figuram O P Q R S. Idemque de situ ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum est, si diligenter anguli, ac distantię obseruentur.



LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio superior tantum conspiciatur, vna cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigii supra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.

1. Trabs inclinata supra murum CD, sit AB, & mensor in E, constitutus è directo ipsius trabis, ita, vt ipse & trabs in eodem sint plano, metiri debeat longitudinẽ AB, angulum inclinationis ABE, distantiam BE, & altitudinem AF, etiamsi tantum portionem supremam AG, videat, basem ocultante muro CD Si quadratum ad E, bis applicetur, semel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demissum ad Horizontem, ita vt centrum dioptræ sit in E, & latus EL, Horizonti incumbat. Nam inspecto puncto A, ex a, a si fiat, vt vmbra versa e b, ad latus b a, ita latus a E, ad aliud, gignetur distãtia, siue hypotenusa EA. Deinde explorata portione dioptræ EI, vt in scholio Probl. 7. Num. 2. docui; [b] Si fiat, vt EI, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenusam EA, ita FI, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, quæsita. quod est quartum.



[a] 4. sexti.

[b] 2. sexti. & componendo.

2. [c] ET si rursus fiat, vt EI, portio dioptræ ad hypotenusam EA, ita EF, ipsi cI, æqualis ad aliud, nota fiet distantia EF. Non aliter, si aliud punctum G, inspiciatur, cognita sit hypotenusa EG, & altitudo GH, vna cum distantia EH, si nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in scholio probl. 7. ostendimus.

[c] 2. sexti. & componendo.

3. IAM si EF, inuenta ex cognita EH, subducatur, nota relinquetur FH, id est, GI, quæ in sublimi duci cogitetur parallela Horizonti Eodem modo si GH, cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, dematur, reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in sublimi constituto duo latera AI, IG, cognita sint, [d] cognoscetur & basis AG, & angulus AGI, [e] qui æqualis est angulo inclinationis ABE, qui quæritur. quod est secundum.

[d] 6. triang. rectil.

[e] 29. primi.

4. ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notũ sit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, [f] cognitum fiet alterum quoque latus BF, cui si adijcietur distantia EF, inuenta, tota distantia quæsita EB, manifesta erit. quod est tertium.

[f] 4. triang. rectil.

5. DENIQVE in eodem triangulo ABF, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius complemento BAF, cognitis, [g] cognoscetur etiam basis AB, longitudo videlicet trabis. quod est primum. Hæc autem nota etiam efficietur, [h] si fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita AG, paulo ante nota effecta, ad AB.

[g] 4. triang. rectil.

[h] 2. sexti. & componendo.

VISIS duarum turrium summitatibus, etiamsi bases propter ædificia interiecta occultentur, distantiam tam inter earum bases, quam inter earundem fastigia, vna cum ipsarum altitudinibus, ac distãtiis à mensore coniicere.

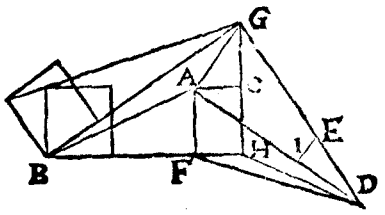
PRO-

PROBLEMA XLIV.

1. SINT duæ turres AF, GH, quarum sola fastigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inuestigare & distantiam FH, & interuallum AG, & vtriusq; turris altitudinem. Sit primum minor turris AF, inter maiorem, & mensorem, ita vt mensor in eodem cum turribus sit plano, & minor non occultet fastigium G, maioris. Per schol. probl. 7. inuenietur & vtraque distantia BF, BH, & vtraque altitudo AF, GH: si nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenusis BA, BG, coincidat, &c. quod est quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit distantiarum differentia FH, cognita, hoc est, distantia inter turrium bases, quod est primum. Rursus differentia altitudinum GC, nota erit, a ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus. AC, CG, cognitis, basis quoque AG, efficietur nota. quod est secundum.

a 6. triang. rectil.

2. DEINDE consistat mensor in D, ita vt ipse, ac bases F, H, non iaceant in vna linea recta. Per scholium problem. 7. iterum tam altitudines AF, GH, quam distantiæ DF, DH, congitæ fient, si videlicet quadrati vnum latus hypotenusis DA, DG, congruet, &c. quod est tertium, ac quartum. Inuestigatis autem hypotenusis DA, DG, vt in eodem scholio traditũ est, cognoscetur per problema 16. præsertim per ea, quæ Num. 2. eiusdem problematis scripsimus, interuallum AG, si nimirum in hypotenusis accipentur portiones DI, DE, ipsis hypotenusis proportionales, vt in illo Num. 2. diximus, &c. quod est secundum. Et quoniam altitudines AF, GH, notæ factæ sunt, erit etiam earum differentia GC, nota. Quamobrem ex base AG, & latere GC, in triangulo rectangulo ACG, cognitis, latus quoq; AC, hoc est, distantia FH, inter bases nota erit: quod est primum.



SI turres essent AF, CH, æquales, esset distantia AC, inter fastigia distantiæ FH, inter bases æqualis.

SCHOLIVM.

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quando earum extrema videntur.

1. Ex omnibus, quæ demonstrata sunt in hoc 3. libro, colligi potest regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, siue eæ sint distantiæ in Horizonte, siue altitudines, profunditates ue, siue hypotenusæ, id est, distãtiæ ab oculo ad quodlibet punctum siue interualla inter duo puncta, vbicunq; existant: dummodo vtrumq; extremum longitudinis dimetiendæ videri possit à mensore, vbicunque etiam ipse existat. Nam si per problema 15. præsertim per ea, quæ Nu. 5. eius problematis scripsimus, distantiæ à mensore vsque ad duo extrema longitudinis explorentur, inuestigato prius angulo, quem duæ illæ distantiæ, siue hypotenusæ efficiunt, vt in scholio probl. 7. Num. 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque si diligenter ea, quæ in problem. 15. ac 16. scripsimus,

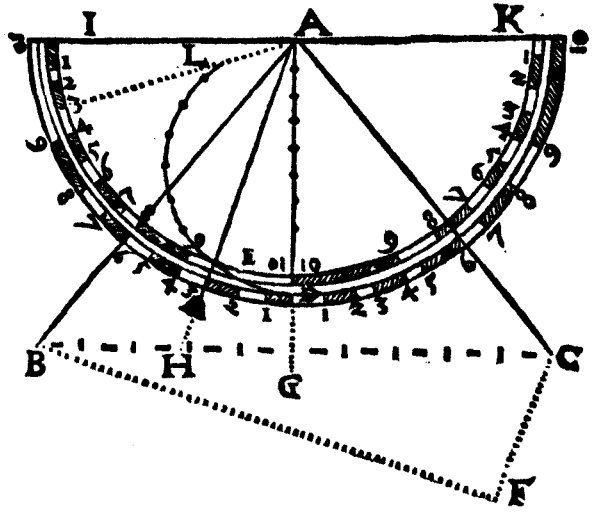
mus, percepta fuerint, eadem semper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, si vtraque extremitas rectæ propositæ cerni potest, vt diximus.

2. SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ sunt duæ distantiæ à mensoris loco vsque ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipsis comprehenso, certius (quamquam laboriosius) interuallum inter duo illa extrema, hoc est, rectam propositam inueniri posse ex duabus illis distantijs, & angulo comprehenso, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis distantijs proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri possit. Id quod etiam in problem. 16. ad finem Num. 2. monuimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam si lubet, Horizonti æquidistans efficere.

PROBLEMA XLV.

1. QVANDO oblatum spatium non est valde magnum, excogitauit Ioannes Ferrerius Hispanus nobilis Architectus, & Mathematicus, instrumentum *Instrumenti constructio pro librationibus*



percommodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo solido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeant satis longam, ita vt distantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos precise, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, describatur ex A, semicirculus quantuscunque I D K, cuius semidiameter A D, in tot æquales partes secetur, quot palmi in distantia BC, comprehenduntur. Descripto quoq; circa A D, semicirculo occulto A E D, transferantur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ A D: ac tandem ex A, per singula puncta semicirculi AED, rectæ occultæ emittantur, notenturq; intersectiones earum cum peripheria D I, atque in alteram peripheriam D K, transportentur.

tentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis solum cruribus instrumenti AB, AC, vna cum peripheria semicirculi IDK, cõstructum erit instrumentum ad librationes peropportunum.

Spatium in æquale quo pacto libretur.

2. NAM in campo aliquo, vel horto, positis punctis B, C, in terra, si filum perpendiculi transit per D, erunt puncta B, C, in terra eiusdem altitudinis, ita vt si spatium interiectum BC, complanetur, spatium illud horti, vel campi sit libratũ, hoc est, Horizonti parallelum.

SI vero filum perpendiculi AH, abscindet ex quadrante DI, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum spatium inter B, & infimum punctum effossum Horizonti sit parallelum. Quod si filum perpendiculi abscinderet ex alio quadrante DK, quotcunq; partes nimirum 5. esset punctum C, depressius quinque palmis puncto B. Quare tunc superimponenda, foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt spatium inter B, & supremum punctum terræ superimpositæ complanatum Horizonti æquidistet. Complanato spatio inter B, & aliud punctum prope C, siue effossum, siue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, posito crure AB, in puncto inuento, &c. Atque ita deinceps procedendum est vsque ad vltimum signum in horto, vel campo propositum. Hoc ita demonstratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta CF, filo perpendiculi AH, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta BF, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidistabit. Et quoniam in triangulis A G H, B F C, recti anguli E, F, æquales sunt, [a] nec non & alterni C, H, [b] æquiangula erunt triangula; Est autem A G H, triangulo A D E, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales sint, & A, communis. Igitur triangula quoque A D E, B C F, æquiangula erunt. [c] Ideoque erit vt A D, 10. partium ad D E, 3. partium, ita B C, 10. palmorum, ad C E, ac proinde C F, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abscindit ex semicirculo I D K. Quod si quadratum C F, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus C F, sit 3. palmorum) dematur ex 100. id est, ex quadrato BC. 10. palmorum, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis B F, cuius quadrata radix 9 $\frac{10}{19}$. dabit horizontalem distantiam B F, à puncto B, vsque ad perpendicularem CF.

[a] 29. primi.
[b] 32. primi.
[c] 4. sexti.

HÆC eadem distantia horizontalis B F, cognoscetur quoque sine numerorum supputatione, hoc modo. Ex A, describatur alius semicirculus, & in semicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emissis per puncta in semicirculo notata, obseruẽtur earum intersectiones cum semicirculo ex A, descripto, transferanturque in alterum quadrantem versus K. Nam quot partes filum perpendiculi A H, ex vltimo hoc semicirculo ex A, descripto abscindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo BF: [d] propterea quod eadem est proportio DA, ad AE, quę CB, ad BF, quippe cum triangula D A E, CBF, ostensa sint similia. Cum ergo ex constructione, recta AE, complectatur tot partes rectę A D, quot ex A, in semicirculum AED, vsque ad filum perpendiculi sunt translatæ, (vt in nostro exemplo partes propemodum 9 $\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Est autem consideratione dignum, partes posterioris semicirculi contrario ordine similes esse partibus prioris semicirculi IDK. Nam si verbi gratia rectæ D E, quæ æqualis est tribus partibus rectæ D A, initium sumentibus à D, accipia-

[d] 4. sexti.

tur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium sumentium à puncto A, ducaturq; recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales sunt, erunt quoq; reliqui AE, DL, æquales. [a] Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt: ideoq; & reliqui DAE, IAL, æquales inter se erunt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in semicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto sunt æquales. Ex quo fit, rectas AI, AL, ex posteriori semicirculo ex A, descripto auferre arcum similem arcui in priori semicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademque ratio est de alijs. [a] 27. tertij.

QVANDO instrumentum sæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depressius sit primum punctum, quam vltimum, scietur hoc per altitudines, depressionesue intermedias. Vt si primus locus fuerit altior quam secundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depressior, quam quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem esse vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio septem palmis, cum primus secundum quinque palmis superet, & secundus tertium, duobus. Et quia tertius superatur à quarto, tribus palmis, superabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior sit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & sic de cæteris.

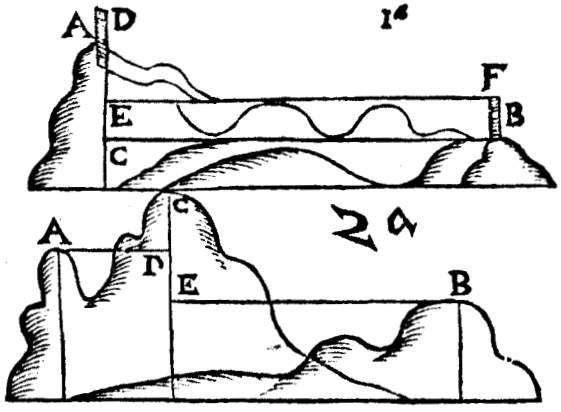
Libraturæ pro conducendis aquis, quo modo fiant.

3. CÆTERVM quando duo loca multum inter se distant, explorabimus per quadratum stabile, quanto alter altero sit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, secundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, staturæ mensoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratum autem facilè cognoscès, vter locorum sit altior. Nam quando per latus supremum Horizonti æquidistans, ex A, locus B, cernitur, eadem est altitudo vtriusque loci: Si vero deprimendum est illud, vt B, videri possit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum est, erit locus B, altior.) Nam si per doctrinam scholij probl. 9. inuestigetur altitudo DC, & auferatur mensoris statura AD, reliqua erit altitudo AC: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et si è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus BF, staturæ mensoris æqualis, & per doctrinam scholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vsque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductam, & apponatur statura mensoris BF, nota euadet tota altitudo AC; Ac tantò depressior erit locus B, quam locus A. Atque ita ex loco A, ad locum B, conduci potest aqua, non autem contra.

4. QVOD si inter primum locum A, & secundum B, interpositus sit mons C, ita vt ex A, locus B, videri nequeat, vt in 2. figura, ita procedemus. Ex A, per scholium problem. 7. indagabimus altitudinem CD. Deinde ex C, per scholium problem. 9. explorabimus altitudinem CE, ductis nimirum ad CE, perpendicularibus AD, BE. Nam hac ratione concludes locum A, altiorem esse loco B, quantitate DE. Quamobrem si perfodiatur mons C, vel aquæductus circa ipsum extruatur, conduci poterit aqua ex A, ad B, & non contra.

5. POSTREMO si in monte aliquo, vel in eius latere sit aqua vel in puteo aliquo profundo, vel in fossa aliqua profunda CD; & scire desideres, an ex D, ad B, conduci possit aqua per aquæductum, ita erit agendũ. Primũ si CD, puteus est, inuestiga eius profunditatem CD, per probl. 27. si vero fossa, aut vorago ali-

qua, per problema 28. Deinde concipiatur ex B, ad perpendiculum CD, duci perpendicularis BE; atq; per scholium probl. 7. ex B, inuestigetur altitudo CE.



Si namq; hęc deprehensa fuerit ęqualis profunditati inuentę CD, habebit fundus aquę D, eandem altitudinem cum loco B, ac proinde aqua ad B, ex D, defluere non poterit per aquęductum: Si vero altitudo CE, reperta fuerit maior quam profunditas CD, conduci poterit aqua ex D, in locum B: Si denique altitudo CE, inuenta fuerit minor profunditate CD, erit locus B, altior quam aqua iuxta D, atque idcirco defluere non poterit ad B.

Ex his non obscurè intelliges, vbi aquęductus vtiliter sint extruendi, & vbi non.

FINIS LIBRI TERTII.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER QVARTVS.

AREAS

Superficierum planarum inuestigans.

QVEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometra superficies planas per superficiem quadratam, & corpora, siue solida, per corpus cubicum metiri solent. Nam sicut linea recta dicitur 100. palmorum in qua linea vnius palmi centies continetur, ita superficies plana dicitur 100. palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale est: & solidum 100. palmorum illud dicitur, quod complectitur 100. cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de aliis etiam mensuris, vt de pede, cubito, passu, milliario, &c. intelligendum est. Quia vero qualibet superficies tot quadrata cuiusque mensuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale est, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuslibet rectanguli cognoscatur. Deinde de area triangulorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiusque partes metiemur.

Penes quid mensura linearum rectarum, planarum superficierum & solidorum sumantur.

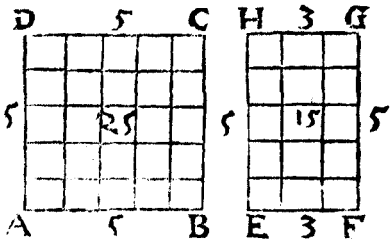
DE AREA RECTANGVLORVM

CAPVT I.

Area quadrati, & altera parte longioris quo pacto cognoscatur.

VONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum; manifestum est, aream cuiusque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angu-

angulum, vnius in alterum; adeo vt in quadrato satis sit ducere vnum latus in se, vt eius area cognoscatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sint. Vt in quadrato ABCD, cuius singula latera quinos palmos continent, si latus AB, quinque palmorum in se ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atque tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur.



Vt campus rectangulus mensuretur, quid agendum.

2. ITAQVE si campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, mensuranda erunt per aliquam mensuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propositi campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum est.

DE AREA TRIANGVLORVM

CAPVT II.

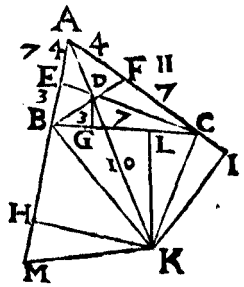
1. QVANDO trianguli omnia tria latera cognita sunt, duabus viis eius area cognosci potest. Prima, quæ accuratissima est, ita se habet. *Colligantur omnia latera in vnam summam: Ex huius summæ semisse subtrahantur singula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam semissem, & latera singula: Postremo tres hæ differentiæ, & dicta semissis inter se mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæsita.*

Verbi gratia, si latera sint 10. 17. 21. erit summa ex illis collecta 48. & semissis 24. Differentiæ autem inter hanc semissem, & latera erunt 14. 7. 3. Hæ inter se multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. semissem prædictam, producunt 7056. cuius numeri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera sunt 10. 17. 21. Rursus si in alio quopiam triangulo latera sint 13. 14. 15. inueniemus eandem aream. Nam summa laterum est 42. semissis 21. Differētię inter hanc semissem, & tria latera sunt 8. 7. 6. quæ inter se multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. semissem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13. 14. 15. continetur. Denique si detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC, 11. summa omnium est 28. & semissis 14. quæ latera superat hisce numeris 7. 4. 3. qui inter se multiplicati faciunt 84. quę ducta in 14. semissem summæ gignunt numerum 1176. cuius radix quadrata $34\frac{30}{61}$. ferè dabit aream trianguli ABC. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream esse numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non est semper quadratus, vt in postremo hoc exemplo contigit.

HANC

HANC praxim, siue regulam, quæ exquisitissima est, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonstrabimus. Diuisis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad singula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta AD. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB, æquales sunt duobus angulis G, DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; [a] erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemq; modo tam latera DF, DG, æqualia erunt in triangulis DFC, DGC: ac proinde DE, DF, (cum vtraque ipsi DG, sit ostensa æqualis) inter se æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter se erunt. [a] 26. primi.

[b] DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia sunt tam quadrata ex AE, ED, quam quadrata ex AF, FD; æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD, Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum ED, FD, æqualium, reliqua quadrata rectarum AE, AF, æqualia erunt: propterea que & rectæ ipsæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia sint, & basis ED, basi FD; [c] erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis. [b] 47. primi. [c] 8. primi.



QVIA verò AE, ipsi AF, & EB, ipsi BG, æqualis est ostensa, erit tota AB duabus AF, BG, æqualis: additisque æqualibus CG, CF, duę AB, CG, duabus AC, BG, æquales erunt. Tam ergo duę AB, CG, quam duæ AC, BG, semissem trium laterum AB, BC, AC, constituent. Quocirca CG, vel CF, differentia erit inter semissem laterum, & latus AB. Item BG, vel BE, differentia inter eandem semissem, & latus AC. Denique cum AB, CG, semissem laterum efficiant, sitque BG, ipsi BE, æqualis, vt ostendimus, constituent quoque BC, AE, semissem eorundem laterum: ideoque AE, differentia erit inter laterum semissem, & latus BC. Tres ergo rectę AE, EB, CG, & semissem laterum constituunt, & tres differentias inter semissem laterum, & tria latera trianguli.

PRODVCTIS iam AB, AC, sit BH, ipsi CG, & CI, ipsi BG, æqualis; ita vt tam AH, semissi laterum, rectis videlicet AB, CG, quam AI, eidem semissi laterum, rectis nimirum AC, BG, sit ęqualis, constetque ex tribus differentiis ante dictis. Ducta quoque HK, ad AH, perpendiculari, quę cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectę KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus lateribus AI, AK, trianguli AIK, ęqualia sunt, angulosque ad A, continent ęquales, vt supra ostendimus, [d] æquales quoque erunt & bases HK, IK, & anguli H, I. Cum ergo H, per constructionem sit rectus, rectus etiam erit I. [d] 4. primi.

ABSCINDATVR pręterea BL, ipsi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquę BG, vel ipsi CI, æqualis sit, iungaturq; recta KL. Producta autem BH, sumatur HM, ipsi CI, æqualis, connectaturque recta LM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia sunt, angulosque H, I, continent ęquales, vt pote rectos: [e] erunt quoque bases KM, KC, ęquales: atque adeò cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, ęqualia sint, (est namque BM, ipsi BC, æqualis, quod partes BH, HM, partibus BL, LC, sint æquales) sitque basis [e] 8. primi.

KM, basi

[a] 8. primi. KM, basi KC, ostensa æqualis; [a] erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaque quoniam duo latera BH, BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trianguli BLK, æqualia sunt, æqualesq; continent angulos ad B, vt ostendimus, [b] 4. primi. [b] erunt & bases HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex constructione rectus sit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli KBH, [c] 8. primi. lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia sint, & basis BH, basi BL, [c] erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales.

QVONIAM autem ex iis, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonstrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis sunt æquales: erunt demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales; ideoque [d] 13. primi. duobus angulis HBL, EBL, æquales, [d] quod hi quoque duobus sint rectis æquales, ablatoque communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipsi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit. Cum ergo & [e] 32. primi. rectus H, recto E, sit æqualis, [e] erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in triangulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æquiangula erunt. [f] 4. sexti. [f] Quapropter erit vt DE, ad EB, ita BH, ad HK; atque id circo si lineæ hę ad numeros contrahantur, [g] 19. septim. [g] erit numerus, qui fit ex DE, in HK, [h] 7. quinti. æqualis numero, qui fit ex EB, in BH. [h] Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, & ad productum ex EB, in BH. [i] 17. septim. [i] Sed ita est quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE, & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex [k] 28. primi. EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita est AE, ad AH. [k] Nam cum parallelæ sint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. [l] 4. sexti. 4. lib. 6. Euclid. [l] Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus quoque ex DE, ad produ- [m] 19. sept. ctum ex EB, in BH, vt AE, ad AH. [m] Qui ergo fit ex quadrato ipsius DE, in AH, æqualis erit ei, qui fit AE, in productum ex EB, in BH. Igitur & numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia ęquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipsius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex [n] 18. sept. EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant [n] habebunt producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipsius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, & numerus qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandem proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi æquales sint, erunt & illi producti æquales) hoc est, numerus productus ex AH, in AH, id est, quadratus ipsius AH, ductus in quadratum ipsius DE, (Per scholium enim propos. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter se multiplicentur, idem semper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, EB, BH, inter se multiplicatarum, ducto in AH, id est, in semissem laterum gignitur. At ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, producitur quadratus numerus areæ trianguli ABC, vt mox ostendemus. Igitur & ex producto trium excessuum AE, EB, BH, inter se multiplicatorum, ducto in AH, semissem laterum AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ trianguli ABC:

ac pro-

ac proinde radix quadrati huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonstrandum.

QVOD autem ex quadrato ipsius D E, in quadratum ipsius A H, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonstro. Quoniam vt Num. 2. ostendemus, ex D E, in semissem lateris A B, producitur area trianguli ADB; Et ex eadem D E, hoc est, ex D G, in semissem lateris BC, efficitur area trianguli B D C; Item ex eadem DE, id est, ex D F, in semissem lateris A C, gignitur area trianguli A D C: Quod autem fit ex D E, in semisses laterum AB, BC, AC, [a] æquale est ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis semissibus conflatam. fiet propterea area trianguli A B C, ex DE, in AH, ac propterea (contractis hisce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiusdem trianguli procreabitur ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius A H. Quando enim duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati se mutuo multiplicantes quadratum illius producti, quod ita perspicuum fiet. [a] 1. secundi.

A . . B . . .
C . . . D . . . . E . . . . .
F 36.

Duo numeri A, & B, se multiplicantes faciant D; & ambo se ipsos multiplicantes faciant C, & E: Denique hi quadrati C, & E, se multiplicantes faciant F. Dico F, esse quadratum ipsius D. Cum enim A, multiplicans se ipsum, & B, faciat C, & D: [b] erit vt A, ad B, ita C, ad D: Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & se ipsum, faciat D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoque C, D, E, continuè proportionales erunt. [c] Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, qui fit ex D, in se: ac proinde F, quadratus erit ipsius D. Quæ cum ita sint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli A B C, vt ostendimus, fiet ex quadrato ipsius DE, in quadratum ipsius AH, quadratus numerus areæ eiusdem trianguli ABC. Quod erat demonstrandum. [b] 17. sept. [c] 20. sept.

2. ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc est. *Area trianguli quo pacto aliter ex datis lateribus colligatur.*

Ex quouis angulo ad latus oppositum, etiam protractum, si opus est, perpendicularis ducatur. Hæc enim (si eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in semissem basis, seu dicti lateris, vel eius semissis in totam basem producet aream trianguli, Vel si manis, tota perpendicularis ducta in totam basem, numerum procreabit, cuius semissis aream trianguli offeret:

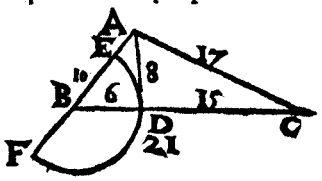
NAM vt lib. 7. propos. 1. demonstrauimus, est area trianguli æqualis rectangulo comprehenso sub perpendiculari, & semisse basis, vel sub semisse perpendicularis, ac tota base; Item semissi rectanguli sub perpendiculari, ac tota base comprehensi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc est, ex perpendiculari ([d] quæ vni lateri æqualis est) in semissem basis trianguli, vel ex semisse perpendicularis ([e] quæ semissi lateris est æqualis) in totam basem: vel deinque rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam basem trianguli: constat propositum. [d] 34. primi. [e] 34. primi.

MAGNITVDO autem dictę perpendicularis, sicuti & basis, in metiendis campis inuestiganda est per catenulam ferream, quod hęc neque intendatur, neque remittatur, aut certè, si omnia latera nota sint, Geometrice hoc modo. Sit triangulum ABC, cuius latus AB, sit 10. & B C, 21. & A C, 17. Primum inue-

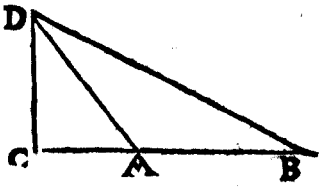
 stiganda

Segmenta basis, quæ à perpendiculari abscinduntur, quo pacto cognoscatur.

ſligandæ ſunt ſegmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea, quæ lib. 1. cap. 3. Nũ. 9. ſcripſimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem eſſet demittenda perpendicularis in maximum latus, vt intra triangulum caderet) ad ſummam aliorum duorum laterum AB, AC, nimirum vt 21. ad 27. ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor eſt latere BC, argumento eſt, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior eſſet, caderet extra, vt propoſ. 9. noſtrorum triangulorum rectil. oſtendimus) qui ablatus ex latere BC, id eſt, ex 21. relinquit 12. cuius ſemiſsis 6. dabit minus ſegmentum BD, prope minus latus AB, quę eadem ſemiſsis ex latere BC, ſubtracta reliquum faciet maius ſegmentum CD, nimirum 15. iuxta maius latus AC.



SIT rurſus triangulum ABD, cuius latus AB, 12. AD, 11. & BD, 20. demittenda autem ſit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad ſummam aliorum duorum 31. ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus $23\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem cadere extra triangulum, angulumque A, eſſe obtuſum,) ex quo latus AB, 12. ſubtractum, relinquit, $11\frac{1}{4}$. Huius autem numeri ſemiſsis $5\frac{5}{8}$. dabit ſegmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtuſum: eademque ſemiſsis addita lateri AB, efficiet aliud ſegmentum BC, inter perpendicularem, & angulum acutum $17\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditiſsima eſt.



ALITER. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo ABC, quæ neceſſario cadet intra triangulum; [a] propterea, quod angulus A, maior eſt vtrolibet BC; ac proinde vterque horum acutus eſt. [b] Quoniam autem quadratum rectę AB, minus eſt quadratis rectarum AC, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AB, 100. detrahatur ex ſumma quadratorum rectarum AC, BC, id eſt ex 730. reliquum fiet rectangulum 630. bis comprehenſum ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem. Quare eius ſemiſsis 315. æqualis erit rectangulo illi ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 315. diuiſo per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. ſegmentum CD, prope angulum acutum C, cui opponitur latus AB, cuius quadratum ex ſumma reliquorum quadratorum detractum fuit. Ablato autem ſegmento CD, 15. ex latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum BD, 6. Eodem pacto, [c] quia quadratum rectę AC, minus eſt quadratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AC, 289. ſubducatur ex ſumma 541. quadratorum rectarum AB, BC, reliquum fiet rectangulum 252. comprehenſum bis ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius ſemiſsis 126. æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 126. diuiſo per latus CB, 21. dabit Quotiens 6. ſegmentum BD, iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus aliis quadratis detracti opponitur.

[a] *18. primi.*
[b] *13. ſecundi.*
[c] *13 ſecundi.*

Quo

Quo segmento 6. dempto ex latere BC, 21. remanebit alterum segmentum CD, 15.

DEINDE in posteriori triangulo ABD, ducenda sit perpendicularis ad latus AB, non maximum. Et quia latus DB, latere AD, maius est; [a] erit angulus A, maior angulo B. [b] Cum ambo ergo simul sint duobus rectis minores, erit saltem minor B, acutus: [c] ac proinde quadratum rectæ AD, minus erit quadratis rectarum AB, BD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB, & segmento inter B, & perpendicularem. Si ergo quadratum rectę AD, 121. subtrahatur ex summa quadratorum rectarum AB, BD, id est, ex 544. reliquum fiet rectangulum bis comprehensum sub AB, & segmento, inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius semissis $211\frac{1}{2}$. æqualis erit illi rectangulo semel sumpto. Quare si rectangulum hoc $211\frac{1}{2}$. diuidatur per latus AB, 12. dabit Quotiens $17\frac{5}{8}$. segmentum inter B, & perpendicularem. quod quia maius est latere AB, argumento est, perpendicularem DC, cadere extra triangulum: ac proinde angulum A, obtusum esse. Quod si ex hoc segmento $17\frac{5}{8}$. dematur latus AB, 12. remanebit exterius segmentum $5\frac{5}{8}$.

[a] *18. primi.*
[b] *17. primi.*
[c] *13. primi.*

QVANDO constat, angulum A, esse obtusum, ideoque perpendicularem DC, extra triangulum cadere, reperiemus eadem segmenta BC, CA, hoc etiam modo. [d] Quoniam quadratum lateris BD, superat quadrata laterum AB, AD, rectangulo bis comprehenso sub latere AB, & segmento exteriore AC; si summam quadratorum rectarum AB, AD, 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis comprehensum sub AB, AC: & eius semissis $67\frac{1}{2}$. illi rectangulo semel sumpto æqualis erit; ac proinde hoc rectangulo $67\frac{1}{2}$. diuiso per latus AB, 12. indicabit Quotiens $5\frac{5}{8}$. segmentum exterius CD; cui si addatur latus AB, 12. conflabitur segmentum BC, $17\frac{5}{8}$. Sed prior ratio, quæ ex libr. 2. Euclid. non pendet, expeditior est, ac proinde tenenda: quamuis auctores alij posteriorem hanc viam plerunque sequantur.

[d] *12. secundi.*

Qua ratio tenenda in segmentis exquirendis.

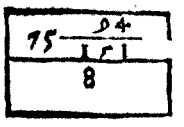
INVENTIS segmentis à perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoscemus.

Perpendicularis in triangulo quo pacto reperiatur.

DIFFERENTIA inter vtrumuis segmentum, & latus adiacens ducatur in summam ex eodem segmento & latere conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt lib. 1. cap. 3. Num. 17. demonstrauimus.

VERBI gratia. In priori triangulo ABC, si differentia 4. inter segmentum BD, & latus AB, hoc est, inter 6. & 10. multiplicetur per 16. nempe per summam eiusdem segmenti BD, & lateris AB; gignetur numerus 64. cuius radix quadrata 8. dabit perpendicularem AD. Pari ratione si differentia 2. inter segmentum CD, & latus AC, hoc est, 15. & 17. ducatur in 32. id est, in summam eiusdem segmenti CD, & lateris AC: procreabitur numerus 64. cuius radix quadrata 8. præbebit perpendicularem AD, vt prius.

IN posteriori autem triangulo ABD, si differentia $5\frac{5}{8}$. inter segmentum AC, & latus AD, nimirũ inter $5\frac{5}{8}$. & 11. ducatur in $16\frac{5}{8}$. hoc est, in summam eiusdem segmenti AC, & latus AD: producetur numerus $\frac{5721}{64}$. siue $89\frac{7}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi non potest, sed paulo maior est, quã apposita fractio cuius numerator est $75\frac{94}{151}$. denominator aũt 8.



quæ ad hunc numerum $9\frac{547}{1208}$. reducetur, si numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta est fermè perpendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{1208}$. Sic etiam si differentia $2\frac{3}{8}$. inter segmentum BC, $17\frac{5}{8}$. & latus BD, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. summam eiusdem segmenti BC, & latus BD: gignetur idem numerus, qui prius, $\frac{5712}{64}$. hoc est, $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior est, quam $9\frac{547}{1208}$. veluti prius. Atque hęc ratio satis expedita est.

[a] *47. primi.* ALTER. [a] Quoniam quadratum rectę AB, in priori triangulo ABC, æquale est duobus quadratis rectarum AD, BD: si quadratum 36. segmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis AB, relinquetur quadratum 64. perpendicularis AD. Rādix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt supra. Similiter si quadratum 225. segmenti CD, dematur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet qudratum 64. perpendicularis AD, cuius radix 8. magnitudo erit perpendicularis AD, vt prius.

Quæ via inuestiganda perpendicularis sit expeditior.

IN triangulo verò posteriori ABD, si quadratum $31\frac{41}{64}$. segmenti AC, $5\frac{5}{8}$. subtrahatur ex 121. quadrato lateris adiacentis AD, 11. remanebit quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix est paulò maior quam $9\frac{547}{1208}$. vt supra. Sic etiam si quadratum $310\frac{41}{64}$. segmenti BC, $17\frac{5}{8}$. subtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20. remanebit rursus quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix paulo maior est quam $9\frac{547}{1208}$. vt supra. Verum prior ratio magis expedita videtur, quanquam alij posteriorem hanc viam tradant.

[b] *12. quarti decimi.*

IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. [b] Quoniam quadratum lateris sesquitertium est quadrati perpendicularis: si fiat vt 4. ad 3. ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum perpendicularis. Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt si latus est 10. & fiat vt 4. ad 3. ita 100. quadratum lateris ad aliud gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix $8\frac{11}{17}$. proximè erit perpendicularis quæsita.

DENIQVE inuentis segmentis basis à perpendiculari factis, perpendicularis ipsa per sinus ita fiet cognita in priori triangulo. Fiat vt 10. latus AB, recto angulo oppositum ad sinum totum recti anguli D; ita 6. segmentum BD, ad aliud; produceturque sinus anguli oppositi BAD, 60000. Ergo angulus BAD, erit grad. 36. Min. 52. ac proinde angulus B, eius complementum erit grad. 53. Min. 8. Si ergo rursus fiat, vt sinus totus ad 10. latus AB: ita 80003. sinus anguli BAD, ad aliud, pro creabitur latus AD, hoc est, perpendicularis $8\frac{50}{10000}$. fermè, quæ paulo maior est, quam 8. supra inuenta. quod discrimen oritur ex eo, quod sinus non sunt omnino tales, quales in tabula describuntur: quod tamen in mensuratione camporum non inducit sensibilem admodum errorem.

Area prioris trianguli ABC.

ITAQVE si in priori triangulo ABC, perpendicularis AD, 8. ducatur in $10\frac{1}{2}$. semissem basis BC, vel 4. semissis perpendicularis AD, in 21. totam basem, procreabitur area trianguli ABC, 84. Quę etiam producetur, si tota perpendicularis 8. in totam basem 21. multiplicetur, & producti numeri 168. semissis accipiatur 84.

Area posterioris trianguli ABD.

ITEM in posteriori triangulo ABD, si perpendicularis DC, $9\frac{547}{1208}$. ducatur in 6. semissem basis AB, vel semissis perpendicularis, nimirum $2\frac{1412}{2416}$. vel $4\frac{1775}{2416}$.

4 $\frac{1711}{2416}$. in totam basem 12. conficietur area trianguli ABD, 56 $\frac{866}{1208}$. vel 56 $\frac{433}{604}$. Quæ etiam producetur, si tota perpendicularis in totam basem ducatur, & producti capiatur semissis.

Vt fractiones vitentur quid agendum.

VTautem fractiones, quoad eius fieri potest, vitentur, curabis, vt quando perpendicularis est numerus par, & basis numerus impar, accipias semissem perpendicularis, eamque in totam basem ducas: quando vero perpendicularis est numerus impar, & basis numerus par, sumas semissem basis, eamque ducas in totam perpendicularem. Quod si tam perpendicularis, quam basis fuerit numerus par, vel impar, nihil interest, vtrius semissem capias.

Quid agendum, quando perpendicularis est numerus surdus.

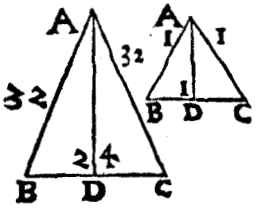
QVANDO etiam perpendicularis est radix surda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC, in posteriori triangulo ABD, rectè feceris, si eius quadratum (non extracta radice illa surda) multiplices per quadratum semissis basis. Numerus enim productus erit quadratus numerus areæ trianguli: adeo vt radix eius sit ipsa trianguli area. Hac enim ratione minus à vero aberrabimus. Vt à dicto posteriori triangulo ABD, si quadratum perpendicularis DC, $\frac{5719}{64}$. duamus in 36. quadratum semissis basis, producemus $\frac{206884}{64}$. quadratum areæ, cuius radix est 56 $\frac{360}{1628}$. area videlicet trianguli ABD, paulo maior, quam prius inuenta. Pari ratione, si in aliquo triangulo quadratum perpendicularis fuerit 72. & semissis basis 6. si radicem numeri 72. nimirum 8 $\frac{8}{17}$. hoc est, ipsam perpendicularem, ducamus in 6. producemus aream 50 $\frac{14}{17}$. At si ipsumet quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet semissis basis, procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior est, quam 50 $\frac{893}{1017}$. qui numerus aliquanto maior est, quam area prius inuenta 50 $\frac{14}{17}$. Ratio huius nostræ regulæ est, quòd, vt paulò ante ad finem Num. 1. demonstrauimus, duo numeri sese multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti.

Area trianguli rectanguli:

3. EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inuestigatur, proponemus nunc particularia quædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis, quæ nonnuquam magno vsui erunt, cum per ea sæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur, quam per illas generales regulas. Area ergo trianguli rectanguli producetur, si duo latera circa rectum angulum inter se multiplicentur, & numeri producti semissis capiatur. Nam ex multiplicatione illa gignitur parallelogrāmum rectangulum sub duobus lateribus circa angulum rectum comprehensum, vt c. 1. dictum est, [a] cuius rectanguli triangulum semissis est, Quod perinde est, ac si semissis vtriusuis lateris in totum alterum, tamquam in basem, multiplicetur. Vt in præcedenti triangulo ABC, diuiso in duo triangula rectangula ADB, ADC; si AD, 8. ducatur in BD, 6. producetur numerus 48. cuius semissis 24. erit area trianguli ADB. Sic si AD, 8, ducatur in DC, 15. fiet numerus 120. cuus semissis 60. erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24. & 60. componere totum triangulum ABC, 84. vt supra inuenimus.

[a] 41. primi.

Area trianguli Isoscelis.



4. AREA trianguli Isoscelis, vel etiam æquilateri, procreabitur, si quadratum semissis basis ex quadrato lateris auferatur, & reliquus numerus in idem quadratum semissis basis ducatur, ac denique huius producti radix quadrata eruatur. Vt in Isoscele ABC, cuius æqualia latera AB, AC, sint 32. 32. & basis BC, 24. si quadratum 144. semissis basis dematur ex 1024. quadrato lateris AC, vel

AB, & reliquus numerus 880. ducatur in 144. quadratũ semissis basis, eit producti 126720. radix quadrata $355\frac{895}{711}$. (quæ paulo minor est vera radice) area trianguli ABC. Nam si quadratum semissis basis DC, auferatur ex quadrato lateris AC,[a] reliquum fit quadratum perpendicularis AD, quod ex scholio propos. 26. lib. 1. Euclid. perpendicularis AD, basem BC, secet bifariam in D. Quare vt circa finem Num 2. ostendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, semissis basis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademq; ratio est in triãgulo æquilatero, cum hoc habeat etiã duo latera æqualia.

[a] 47. primi.

Area trianguli æquilateri.

5. PRO area tamen trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur, quamuis à nemine (quod sciam) demonstrata sit. Quadratum lateis ducatur in 13. productusque numerus per 30. diuidatur. Quotiens enim eit area trianguli æquilateri. Vt si vnum latus æquilateri trianguli sit 10. ducatu quadratum lateris 10. nimirum 100, in 13. productusque numerus 1300. per 30 diuidatur. Quotiens enim $43\frac{1}{3}$. erit area trianguli. Hanc regulam ita demonstro. Area trianguli æquilateri, cuius singula latera sunt 1. est radix quadrata huius numeri $\frac{3}{16}$. (Nam per regulam præcedentem Nume. 4. explicatam, si $\frac{1}{4}$. quadratum semissis lateris dematur ex 1. quadrato lateris, & reliquus numerus $\frac{3}{4}$. ducatur in idem quadratum $\frac{1}{4}$. semissis lateris, producetur quadratum aeæ trianguli $\frac{3}{16}$.) nimirum $\frac{13}{30}$. proximè. Cum ergo quadratum lateris 1. ad quadratum lateris 10. hoc est, 1. ad 100. eandem proportionem habeat, quam aea $\frac{13}{30}$. trianguli, cuius vnum latus est 1. ad aream trianguli, cuius vnum latus est 10. quod vtraque proportio proportionis lateris 1. ad latus 10. sit duplicata: fiat vt 1. (quadratum lateris 1.) ad 100. (quadratum lateris 10.) ita area $\frac{13}{30}$. ad aliud, producetur area trianguli, cuius vnum latus est 10. Hoc autem fit, ducendo secundum numerum 100. in tertium $\frac{13}{30}$. hoc est, (vt constat ex regula multiplicationis fractorum, ducendo 100. in numeratorem 13. & productum per denominatorem 30. diuidendo. Neque vero opus est productum hunc numerum $43\frac{1}{3}$. per primum 1. partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunq; numerũ producat numerum eundem. Sic etiam si latus vnum trianguli æquilateri sit 6. ducemus eius quadratum 36. in $\frac{13}{30}$. hoc est in 13. numeratorem, productumq; 468. per 30. partiemur. Quotiens namq; $15\frac{3}{5}$. erit trianguli propositi area.

[b] 20. & 19. sexti.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur.

QVOD autem $\frac{13}{30}$. sit radix quadrata numeri $\frac{3}{16}$, patet ex regula qua cuiusuis fracti numeri radix extrahitur: quæ talis est. Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem: vel ipsam radicem per denominatorem partiemur; exibit radix fractionis propositæ: priori quidem modo maior quam vera, posteriori autem minor, si radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor, quam vera: quia in priori illo modo fit diuisio per numerum vero minorem, in posteriori autẽ numerus vero minor diuiditur. Quod si radix illa propinqua foret maior, quam vera, produceretur priori modo radix fractionis minor, quam vera, posteriori autem maior, vt liquet. Verbi gratia. Inuenienda sit radix quadrata fractionis $\frac{3}{16}$. quam diximus esse quadratum areæ trianguli æquilateri, cuius vnum latus est. 1. Ex 3. in 16. fit numerus 48. cuius radix propinqua $6\frac{13}{17}$. minor quam vera, per quam si diuidatur numerator 3. prodibit radix $\frac{13}{30}$. fractionis $\frac{3}{16}$. maior, quam vera: at si radicem eandem propinquam $6\frac{13}{17}$. partiamur per denominatorem 16. reperietur radix $\frac{51}{104}$. eiusdem

fractio-

fractionis $\frac{3}{16}$. minor, quam vera. Ratio huius extractionis hæc est. Quando numerator 3. denominatorem 16. multiplicat, [a] erit producti 48. radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix hæc in se ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3. & 16. inter se multiplicatis gignitur: ac proinde proportio 3. ad 16. erit duplicata tam proportionis 3. ad illam radicem, quam illius radicis ad 16. [b] Cum ergo proportio 3. ad 16. sit quoque duplicata proportionis, quam radix numeri 3. ad radicem numeri 16. habet: erit vt 3. ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16. ita radix numeri 3. ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator est radix numeri 3. denominator autem radix numeri 16. sit radix fractionis $\frac{3}{16}$. erit quoque tam fractio, cuius numerator 3. & denominator radix producti 48. quã fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc est, tam Quotiens, qui fit ex diuisione 3. per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuisione radicis producti 48. per 16. radix propinqua fractionis $\frac{3}{16}$. Eademque de cæteris ratio est.

[a] 20. sept.

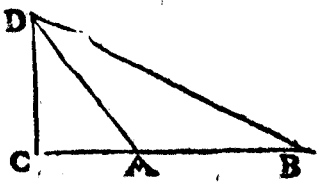
[b] 11. octaui.

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendam. Ex quadrato lateris sumatur tam pars decima, quàm tertia. Harum enim partium summa erit area trianguli. Quod sic ostendo. Hæ fractiones $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. in vnam collectæ summam efficiunt $\frac{13}{30}$. ac proinde idem est ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. atque $\frac{13}{30}$. Sed quando auferentur $\frac{13}{30}$. multiplicatur quadratum lateris per $\frac{13}{30}$. vt in 6. quæstiuncula fractorum docui. Igitur cum, vt Num. 5. explicatum est, ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{13}{30}$. producatur area trianguli æquilateri, liquido constat, partem decimam, & partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque si latus sit 30. erit eius quadratum 900. cuius $\frac{1}{10}$. est 90. & $\frac{1}{3}$. est 300. quæ partes simul conficiunt numerum 390. pro area illius trianguli æquilateri.

6. HACTENVS exposuimus regulas, quæ nos in cognitionem areæ cuiuscunque trianguli ducunt, si singula latera cognita sint. Nunc triangulorum areas per doctrinam sinuum, Tangentium, secantiumque inuestigabimus, licet non omnia latera sint cognita, sed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno. In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inuestigetur.

QVANDO in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum cognitum est, cum vno angulo acuto, cognoscemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto, id est, ex grad. 90. relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD, notum, vna cum angulo acuto B. [c] Et quoniam duo B, & BDC, vni recto, id est, gradibus 90. sunt æquales, si angulus B, ex grad. 90. detrahatur, reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt sinus totus anguli recti C, ad oppositum latus BD, in qualibet mensura cognitum; ita tam sinus anguli B, quàm anguli BDC, ad aliud; [d] nota fient latera DC, & CB, in partibus lateris BD: atque ita omnia tria latera cognita erunt. Ergo & area cognoscetur vel ex Num. 1. huius cap. vel ex Num. 3.



[c] 32. primi.

[d] 2. triang. rectil.

ITAQVE si campus mensurandus triangularis est habẽs vnum angulum rectum, satis erit, si summa diligentia latus recto angulo oppositum mensuretur, & insuper vnus angulus acutus, beneficio alicuius quadrantis in gradus diuisi, qualis

qualis est à nobis constructus cap.2.lib.1. Nam ex his cognitis, vt proxime diximus, tota area trianguli cognoscetur, etiamsi ad alia duo latera accedere non possimus.

QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC, alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere, quod recto angulo opponitur, nimirum si DC, & DB, cognita sint; [a] cognoscetur quoque alterum latus BC, si fiat, vt latus DB, angulo recto oppositum ad sinum totum anguli recti C, ita latus datũ DC, ad aliud. Productus enim numerus erit sinus anguli B, quo cognito ex tabula sinuum, cognitũ etiam erit eius complementum BDC. Si ergo rursus fiat, vt sinus totus anguli recti C, ad latus oppositum datum DB, ita sinus anguli BDC, inuenti ad aliud, exibit latus oppositum BC. Ex duobus igitur lateribus DC, CB, cognitis, area trianguli nota fiet ex ijs, quæ Num.3. paulo ante scripsimus.

[a] *3.triang.rectil. Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur.*

ATQVE ita in campo, si detur portio triangularis, habens angulum rectum; satis est, si diligenter mensuretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamsi ad tertium latus non pateat accessus. Ex illis enim duobus area cognoscetur, vt dictum est.

QVOD si in eodem triangulo rectangulo BDC, notum fuerit vnum latus circa rectum angulum, videlicet DC, vna cum alterutro angulo acuto, vt pote cum C, [b] notum efficietur alterum latus BC: si fiat, vt sinus totus ad datum latus DC: Ita Tangens anguli BDC, quæsito lateri CB, oppositi, (cognoscetur autem alter hic angulus BDC, si angulus C, ex gradibus 90. dematur) ad aliud. Nam inuentus numerus dabit latus CB, quæsitum. Vel si fiat, vt sinus anguli C, dato lateri DC, oppositi ad latus datum DC: Ita sinus alterius anguli BDC, ad aliud. Nam rursus producetur latus quæsitum BC. Ex duobus ergo lateribus DC, CB, aream cognoscemus, vt Num.3. traditur.

[b] *4.triang.rectil. Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum & vno angulo acuto.*

IN Campo ergo aliquo, si proponatur portio triangularis angulum habẽs rectum, satis erit vnum latus circa rectum angulum, & vnum angulum acutum metiri, vt eius trianguli area reperiatur, etiamsi ad alia duo latera accessus denegetur. Atque hæc de rectangulis triangulis: veniamus iam ab obliquangula.

7. SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum sit vnum latus, cum duobus angulis quibuscunque, perueniemus in cognitionem areæ hoc modo. Ex duobus angulis cognitus erit quoque tertius, cum sit complementum aliorum duorum ad gr.180. [c] Igitur alia duo latera cognoscentur: ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex ijs, quæ Num.1. & 2. tradita sunt.

[c] *10.triang.rectil. Area trianguli obliquãguli ex vno latere ac duobus angulis.*

VT ergo campus triangularis nullum habens angulũ rectum cognitus fiat, satis erit, si vnum latus cum duobus angulis accurate mensuretur. Ex ijs enim duo reliqua latera notá efficientur, &c. vt dictum est.

RVRSVS si in eodem triangulo ABD, non rectangulo nota sint duo latera, vna cum angulo ab ipsis comprehenso; [d] inuenietur tertium latus: ac proinde, vt prius, ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita.

[d] *12.triang.rectil. Area trianguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab ipsis comprehenso.*

ITAQVE satis erit, si in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipsis comprehenso mensurentur: vt area ipsius nota reddatur.

8. NEQVE vero hoc omittendum videtur: si videlicet vnum latus trianguli, vel cuiusuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet æquales secetur, reliqua latera in eisdem partibus fieri posse cognita, beneficio instrumenti partium, vt ad finem Num.1.cap.1.lib.1. declarauimus. Verum vt magis exquisitè reperiantur,

inqui-

inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ (si quod superfuerit) in partibus millesimis, per ea, quæ Num.14.cap.2.lib.1. docuimus. Ita enim in dimensionibus figurarum minus à vero aberrabimus.

Diuiso vno latere figuræ in quotuis partes æquales, quo pacto alia latera in eisdem partibus fiant nota.

9. NEMINEM autē moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metiendas esse nonnunquam mechanice per catenulam aliquam ferreā, aut per instrumentum partium. Nam in hoc dimetiendi negotio, præsertim in campis, & agris admittenda omnino est huiusmodi mechanica linearum dimensio, tum quia apud omnes agrimensores hic mos est: tum quia non semper via Geometrica id præstare potest; tum vero maximè, quia in dimensionibus agrorum, siue figurarum satis est rem prope verum attingere, dum modo notabilis error non cōmitatur. Quod si hæc dimensio quarundem linearum alicui nō probetur, is profecto è medio tollat, necesse est, omnem agrorum, figurarumue dimensionem. Vnde enim constat, agrum propositum, vel figuram habere latera cognita, nisi hæc ipsa per mensuram aliquam materialem sint explorata? Si igitur laterum dimensio mechanica, tanquam à vero parum aberrans, ab omnibus vsurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reijciendam censeamus, nō video. Non nego tamen, viam Geometricam, quando fieri potest, adhibendam esse. In figuris quoque, vbi latera non sunt nimis magna, vtendū censeo doctrina, quam in instrumento partium lib.1.cap.1. ad finem Num.2. tradidimus, non neglectis etiam ijs, quæ in eodem lib.1.cap.2.Nume 14. de quauis particula lineæ cognoscenda, in partibus saltem millesimis, scripsimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare possit.

In negotio dimensionum admittendam esse in nonnullis lineis & angulis mechanicam mensurationem.

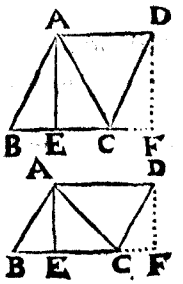
IDEM de mechanica angulorum dimensione per quadrantem intelligendum est: præsertim si præter gradus inuestigentur quoque minuta, vt lib.1.cap.2.docuimus.

DE AREA QVADRILATERORVM non rectangulorum.

CAPVT III.

1. TRIA sunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angulum rectum habent, vel certe non omnes rectos: Rhombus, Rhomboides, & Trapezium. Primæ duæ figuræ nullum habent angulum rectum: posterior autem potest habere vel vnum rectum, vel duos, vel etiam nullum: Item duo latera opposita parallela, vel non parallela. Rhombi & Rhomboidis, quorum latera nota sint, area producitur ex ductu perpendicularis in latus, in quod perpendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accurate sit prius exploranda vel per instrumentum partium initio huius operis constructi, vt paulo ante cap. 2. Num.8. monuimus, vel alio modo, vt mox dicam. Verbi gratia, in Rhombo & Rhomboide ABCD, producetur area ex multiplicatione perpendicularis AE, in latus BC, [a] Nam rectangulum AF, sub AE, & AD, comprehensum æquale est parallelogrammo BD, quòd hæc duo parallelogramma sint inter paralle-

Rhombi & Rhomboidis area



[a] 35. primi.

las AD, BC, & super eandē basem AD. Itaq; frustra alij p̄cipiunt, vt diameter ducatur AC, & beneficio perpendicularis AE, area trianguli ABC, inquiratur, quod hæc duplicata aream exhibeat totius parallelogrammi, [a] quippe cum triangulum ABC, semissis sit parallelogrammi. Frustra, inquam hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur si perpendicularis in totum latus BC, ducatur, quam si in semissem multiplicetur, ac productus deinde numerus dupletur.

[a] 34. primi.

Perpendicularis inuentio.

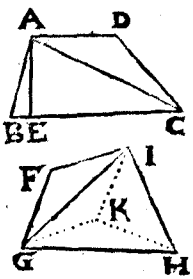
SI per quadrantem cap. 2. lib. 1. constructum inuestigetur quantitas anguli B, reperietur perpendicularis AE, per sinus, hac ratione. Fiat vt sinus totus anguli recti E, ad latus oppositum AB, ita sinus anguli B, ad aliud. [b] Productus enim numerus erit perpendicularis AE, cognita in partibus lateris dati AB.

[b] 2. triang. rectil.

2. TRAPEZII, in quo duo latera opposita sint parallela AB, BC, & omnia latera nota, area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in semissem summæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in semissem basis BC, vt cap. 2. Num. 2. dictum est: Item area trianguli ACD, ex eadem perpendiculari AE, in semissem basis AD: Ac proinde hæ duæ areæ simul aream totius Trapezij ABCD, conficient. [c] Cum igitur idem fiat ex AE, in summam ex semisse rectæ BC, & ex semisse rectæ AD, conflatam, id est, in semissem rectarum BC, AD, simul: quod ex AE, in semissem lateris BC, & ex AE, in semissem lateris AD; liquidò constat, aream Trapezij gigni ex perpendiculari AE, in semissem summæ laterum AD, BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectum, vel duos rectos.

Area trapezii habentis duo latera parallela.

[c] 1. secundi.



PERPENDICVLARIS vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, si per quadrantem angulus B, inuestigetur, &c.

Area trapezii nulla habentis latera parallela.

IN Trapezio autem FGHI, in quo nulla sunt latera parallela, omnia tamen latera sunt nota, mensuranda primum est diameter. IG, per instrumentum partium. Deinde vtriusque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Nume. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ simul conficient aream totius Trapezij.

QVOD si malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoscemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam sinuum, ac Tangentium, [d] vt lib. 1. capit. 3. docuimus, ex duobus lateribus FG, FI, & angulo F, ab ipsis comprehenso, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

[d] 12. trian. rectil. Num. 2.

Area figuræ quadrilateræ irregularis.

3. NON aliter aream consequemur cuiuscunque quadrilateri irregularis, etiamsi non habeat omnes angulos introrsum, sicut Trapezium. Vt si in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectæ GK, IK, constituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum solum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non fit angulus GKI, introrsum versus H, cum illud spatium sit duobus rectis maius, sed versus F, extrorsum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulorum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum est.

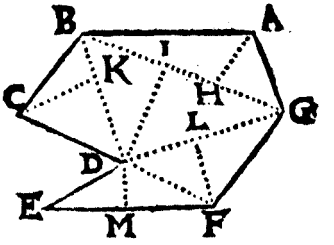
DE AREA MVLTILATERARVM figurarum irregularium.

CAPVT IV.

1. FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiamsi valdè irregulares sint, metiemur, vt trapezia irregularia, resoluendo nimirum illas in triangula, & singulorũ triangulorum areas inuestigando. Nam omnes hæ areæ in vnam summam collectæ æquales sunt areæ totius figuræ propositæ. Vt si figura septem laterum ABCDEFG, resoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorum latera se mutuo non intersecent, inquirendæ sunt areæ singulorũ hoc

Area multilatera figura.

Quando figura in triangula resolui potest, quo modo eius area colligatur.



modo. Quando omnia latera triangulorum nota effici possunt per aliquam mensuram, siue figura agrum aliquem repræsentet, siue in charta solum sit descripta, demittantur ex angulis ad latera opposita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, singulæ in singulis triangulis. Deinde in triangulo ABG, a inquirantur ex tribus lateribus notis segmenta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus. Nam AH, in semissem basis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ perueſtigentur: atque omnes areæ in vnam redigantur summam, vt area totius figuræ habeatur. Quod si malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ capit. 2. Numer. 1. scripsimus, etiamsi neque perpendiculares ductæ sint, neque segmenta BH, GH, inuenta.

a *9. triang. rectil.*

2. QVANDO latera triangulorum interiora mensurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertransiri non possunt; alia ratione scopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam mensuram, inuestigentur quoque anguli ab ipsis comprehensi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuisi. In proposita figura angulus CDE, indagandus non est, quod sit extra figuram. Resoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac si latera interiora ducta essent, vt prius:

Quando figura in triangula resolui non potest quo modo eius area deprehendatur.

[a] 12. triang. rectil.
[b] 2. triang. rectil.
[c] 12. triang. rectil. Nu 2.
[d] 2. triang. rectil.
[e] 12 triang. rectil. Nu 2.
[f] 2. triang. rectil.
[g] 12. triang. rectil.
[h] 2. triang. rectil.
[i] 16. triang. rectil.
[k] 2. triang. rectil.

[a] explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, angulo que ab ipsis comprehenso; atque insuper latus B G. Hinc enim in triangulo rectangulo ABH, vel AGH, [b] demissa perpendicularis ex A, cognoscetur ex base AB, & angulo B, vel ex base AG, & angulo G: ac proinde area trianguli reperietur, vt antea, ex ijs, quæ c. 2. huius lib. Nume. 1. & 2. tradita sunt. Non aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duobus lateribus CB, CD, notis angulum C, notum ambientibus, [c] si nimirum inuestigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD, [d] & ex his demissa perpendicularis CK. Post hæc in triangulo BDG, si anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus D B G, notus. Cum ergo latera B D, B G, ipsum includentia facta sint etiam nota; [e] cognoscentur eodem modo & anguli D, G, & latus DG; [f] atque in super perpendicularis ex B, in DG, demissa, &c. Similiter in triangulo GDF, si ex angulo noto A G F, tollantur anguli A G B, B G D, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum sit: [g] cognoscemus & duos angulos GDF, GFD, & insuper latus D F, [h] vna cum perpendiculari ex G, in D F, demissa, &c. In triangulo denique DEF, cum omnia latera sint nota; [i] efficientur quoq; noti omnes tres anguli: ac proinde demissa perpendicularis D M, ex D, demissa, vel ex quocunque alio angulo, [k] nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

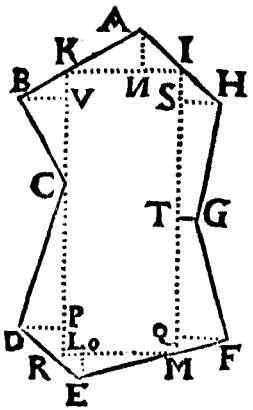
Quomodo figura agro proposito similis describi possit.

POTES etiam, si vis, describere in charta aliqua figuram agro similem: si nimirum sumas rectam A B, tot particularum æqualium, quot mensuræ in latere agri respondente includuntur, angulumque constituas ABC, æqualē ei, quem in ambitu agri inuenisti. Deinde in B C, tot particulas accipias, quot in latere agri respondente continentur, iterumque angulum B C D, æqualem illi constituas, quem in figura deprehendisti. Denique si idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, descripta erit figura similis agro: quę si resoluetur in triangula, quorum latera intra figura per instrumentum partium mensurentur, reperietur eius area, sicuti prius, quādo ager resolui poterat in triangula.

QVANDO campi planities non est impedita, magis exquisitè figura ei similis describetur per ea, quæ lib. 3. Problem. 42. Num. 3. scripsimus: si videlicet intra campum eligatur punctum quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam si illæ rectæ mensurentur, angulique ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot mensuræ in rectis angulorum circa punctū in campo electum consistentium deprehensæ sunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram similem campo, vt in loco citato demonstrauimus. Quod si duo puncta eligantur in campo, è quibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ, conueniunt, describetur etiam figura cāpo similis, quamuis rectæ illæ non mensurentur: quemadmodum ibidem Num. 1. declarauimus.

Quaratione campus intra quem lacus vel sylua exstat mensurentur.

MANIFESTVM autem est, eodem pacto mensurari posse campum, in quo lacus, vel sylua comprehendatur, licet in triangula resolui non possit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognosci possint. Quod si in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, secanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis assumendæ.



3. AGRIMENSORES ne cogantur totum campum sæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, angulosque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, seu figura constituunt, quam possunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppositum dirigendo. Ita namque tota figura resoluta erit in rectangulum illud constitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipsimet metiuntur latera rectanguli, & perpendiculares, vel vt ab aliis mensurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Postremo triangula quidem rectangula metiuntur, vt cap. 2. Num. 3. tradidimus, trapezia verò duorum laterum parallelorum, vt cap. 3. Num. 2. docuimus. Rectangulum denique per ea, quæ cap. 1. scripsimus, mensurant. Horum enim areæ in vnam summam collectæ conficiunt aream totius agri, seu figuræ. In proposito octãgulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE, DPR, CDP, BCV, BKV.

Ratio communis mensorum in area cuiusuis figuræ inuestiganda.

ALII non constituunt rectangulum intra campum, vel figuram, sed lineam, quam possunt, longissimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rursus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula dispertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores sint, ac propterea facilius mensurentur, ac certius.

QVANDO intra agrum dictæ operationes fieri nequeunt, solent etiam mensores circa agrum includentem syluas, lacus, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam si ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri constituentur iterum trapezia rectangula duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ si ex area totius rectanguli subducantur, reliqua fiet area propositi agri.

4. SED neque aspernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare solebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad similem figuram, vt paulo ante Num. 2. præcepi) constituatur quadratum æquale, vel certè latus eius quadrati inueniatur. Nam si vnum huius quadrati latus mensuretur, atque in seipsum ducatur, prodibit area figurę propositę. Mensurandum porro est latus in particulis laterum figuræ, quę mensuris laterum agri respondent, quod facilè fiet per instrumentum partium.

Pulchra ratio areæ inueniendæ cuiuscũque figuræ.

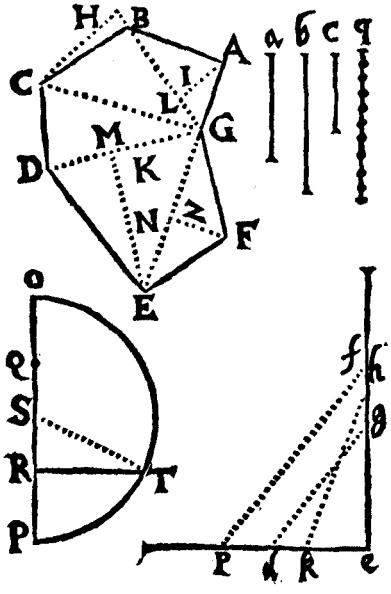
QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum ęquale sine magno labore construi possit, docui in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum censeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo resoluto in 5. triãgula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducantur ad BG, basem communem duorũ triangulorum ab angulis oppositis A, C,

Quadratum datæ figuræ æquale qua ratione construatur.

perpendiculares AL, CH, quarũ posterior in GB, protractam cadit in nostra figura. Deinde in recta quacunque OP, sumantur OQ, QR, ipsis AL, CH, æquales. Item RP, ipsi BI, semissi basis BG, æqualis; at circa OP, ex medio puncto S, semicirculus describatur O T P: ac denique ex R, termino rectę OR, quę duabus perpendicularibus AL, CH, æqualis est, ad OP, perpendicularis excitetur RT, semicirculum secans in T. Dico quadratum rectę RT, duobus triangulis simul ABG, BCG, esse æquale. Quia enim rectangulum sub BI, semisse basis, & perpendiculari AL, æquale est triangulo ABG, ex propos. 1. lib. 7. huius; & rectangulum sub eadem BI, & perpendiculari GH, æquale est triangulo BCG: Quod autem sub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc est, sub RP, OR, (quod RP, ipsi BI, sumpta sit æqualis, & OR, ipsis AL, CH, simul) [a] æquale est eis, quę sub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum sub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. [b] Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, sit æquale, (quod ex schol. propos. 13. lib. 6. Euclid. RT, media proportionalis sit inter OR, RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG, BCG, æquale, quod est propositum. Immo qua-

[a] 1. secundi.

[b] 17. sexti.



dratum ex RT, rectangulo sub OR, RP, æquale esse, demonstrabitur hoc etiam modo sine ope lib. 6. Euclid. [c] Rectangulum sub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale est quadrato ex SP, hoc est, (ducta ST,) quadrato ex ST, [d] hoc est, quadratis ex SR, RT. Ablato ergo communi quadrato rectę SR, reliquum rectangulum sub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

[c] 5. secundi.

[d] 47. primi.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, si ad basem communem DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in nostra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atque ita deinceps si plura fuerint triangula, reperiemus semper binis triangulis singula quadrata æqualia. Sed quia in nostra figura superest vnum tantum triangulum EFG, inuenie-

ueniemus ei quadratum æquale, si, ducta perpendiculari F N, circa rectam ex FN, & semisse basis EZ, conflatam semicirculus describatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapeziis, ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium; quibus omnibus quadratis vnum ęquale exhibebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales sumantur rectę e d, e g, [a] eritque quadratum ductę rectę d g, quadratis rectarum e d, e g, hoc est, laterum a, b, æquale. Capiatur rursus e k, lateri c, & recta e h, rectę d g, ęqualis; [b] eritque rursus quadratum ex kh, ęquale quadratis ex k e, e h, id est ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k h, mensuretur, & in se ducatur, ginetur area figurę propositæ A B C D E F G.

[a] 47. primi.

[b] 47. primi.

EODEM artificio, si plura sint latera, inueniemus quadratum omnibus quadratis ęquale. Vt si foret alterum latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectę k h, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc est, ex q, & ex e f, id est, ex a, b, c, erit ęquale, & sic de pluribus.

Ex his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis, cuiusmodi est in proxima figura trapezium A B C G. Nam ducta diametro B G, si ad eam duę perpendiculares demissę A L, CH, mensurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonstratum est.

Facilis ratio mensurandi trapezii irregularis.

IN octauo porrò lib. propos. 6. docebimus quoque, qua ratione datę figurę rectilineę rectangulum æquale construatur. quod si fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum ęquale, per vltimam propos. lib. 2. Euclidis, sine vllo negotio, aut molestia.

DE AREA MVLTILATERARum figurarum regularium.

CAPVT V.

1. QVANQVAM regulares figurę, quę scilicet sunt & æquilaterę & & æquiangulę, mensurari possint, vt irregulares pręcedentis capitis, resoluendo eas in triangula, &c. solet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiusque figurę regularis area inuenitur: quę ita se habet.

SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ.

NAM vt lib. 7. de Isoperimetris propos. 2. demonstrabimus, area cuiuslibet figurę regularis ęqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figurę ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figurę.

Area figuræ regularis.

2. PERPENDICVLARIS porrò è centro figurę in vnum latus cadens, vna cum semidiametro circuli figuram ambientis sic reperietur. Numerus laterum, siue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figurę ęquiualeant, per ea, quę in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. demonstrata sunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum, per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figurę magnitudinem exhibeat, qui in he-

Perpendicularis & semidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur.

in hexagono continet rectum cum parte tertia, hoc est, grad.120. Et quoniam semidiameter secat angulum figuræ bifariam, vt constat ex demonstratione propos.12. lib.4. Euclid. fit vt si semissis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur sinus totus, perpendicularis sit Tangens semissis anguli figuræ, & semidiameter, Secans. Si fiat ergo,

Vt latus 100000, sinus totus.	*ad semissem lateris:*	*ita Tangens semissis anguli, vel secans.*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quàm semidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus sit 12. si fiat, vt 100000. sinus totus ad 6. semissem lateris: ita 173205. tangens semissis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis $10\frac{7927}{10000}$. vel $10\frac{7927}{10000}$. Item si fiat, vt 100000. sinus totus ad 6. semissem lateris; ita 200000. Secans semissis anguli Hexagoni ad aliud, exibit semidiameter figuræ 12.

ITAQVE si perpendicularis $10\frac{7927}{10000}$. ducatur in 36. semissem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni $374\frac{1328}{10000}$. vel $374\frac{307}{2500}$. Eodemque modo procedendum est in aliis figuris regularibus, in quibus angulorum semisses in tabula Tangentium, ac secantium accipi possunt.

Quare ex latere figuræ regularis dato non semper possit inueniri area, nisi figura ipsa descripta sit.

3. QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus describi potest, vt ex lib.4. Eucl. constet, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel semidiametri, siue sinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquisitè inueniri possint per regulam Num.1. propositam. Nam si ex solo vno latere in aliqua mensura cognito aream inuestigare velimus, quemadmodum in Hexagono factum est, occurrẽt multæ difficultates ac magnę, propterea quod semidiametri, perpendicularesque ex sinubus, Tangentibus, ac secantibus erui non possunt, nisi quando semissis anguli figuræ comprehendit prçcisè gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & secundis: (quamuis si secunda adsint, necesse sit partem proportionalem adhibere) sicut in Hexagono paulo ante factum est, cuius anguli semissis continet grad. 60. quod in quam plurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia, in Heptagono omnes 7. anguli ex scholio propos. 32. lib.1. Euclid. æquiualent 10. rectis, ideoque vnus angulus complectitur vnum rectum cum $\frac{3}{7}$. hoc est, gradus 128. Min. 34. Sec. 17. Ter. 8. Quar. 34. &c. atque eius semissis grad. 64. min. 17. Secun. 8. Ter. 34. Quar. 17. &c. ex qua semisse nequit Tangens pro perpendiculari, neque secans pro semidiametro per tabulas Tangentium, atque secantium excerpi potest. Idemque in aliis figuris innumeris accidere comperies. Quod si scientia inuenta esset construendi omnes figuras regulares, superari aliquo modo posset hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiscunque partibus, cognosci quoque posset tam perpendicularis, quam semidiameter in iisdem partibus, beneficio instrumenti partium, vt lib.1. cap.1. ad finem Num.1. tradidimus. Sed quia paucissimas figuras æquilateras describere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari necesse est. Hanc ob causam nonnulli Geometræ, inter quos strenuam operam nauauit Ludolphus, à Collen, ingenti labore latera figurarum, siue descriptæ eæ sint, siue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant

insuper

TABVLA CONTINENS LATERA FIgurarum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

insuper Secunda, Tertia, Quarta, &c. vt earum areas consequi possimus. Nam ex latere cuiuscunque figurę regularis cognito in partibus diametri circuli circumscripti, vel sinus totius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. scripsimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductę, ac proinde totam aream nanciscemur, vt paulo ante Num. 1. docuimus. Latera igitur in quam plurimis figuris in tabula precedenti exposita habes, quæ omnia veris lateribus sunt paulò minora; & si adieceris vnitatem, fient paulò maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. consistat.

Ex cognita semidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo descripta.

4. IAM vero cognita semidiametro alicuius circuli in partibus cuiuscunque mensuræ, reperiemus in iisdem partibus latus figurę regularis, cuius laterum numerus maior non est, quam 80. beneficio præcedentis tabulę: si nimirum fiat, vt sinus totus 10000000. ad latus figurę propositæ in præcedenti tabula, ita semidiamer circuli propositi data ad aliud. Sit verbi gratia, semidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum sit latus decagoni respectu dictæ semidiametri: Fiat vt 10000000. sinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. semidiameter data ad aliud; exibitque latus quæsitum $8\frac{164068}{10000000}$. vel in minoribus numeris $8\frac{41017}{2500000}$.

Fractionem magnam ad minorem ferè æquiualentem reducere.

Et si molestum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quasi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad suum Denominatorē 10000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperiesque Denominatorem $609\frac{83588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. sit minor quam verus; & 610. maior, hoc est, fractio $\frac{10}{609}$. sit maior fractione $\frac{164068}{10000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor Inter has autē duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediā $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus est. Eritque fractio inuenta ferè maiori illi æqualis.

Inter duas fractiones inuenire mediā.

FRACTIONEM porrò, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, esse maiorem minore, & minorem maiore, demonstrabimus lib. 8. propos. 10.

Ex cognito latere figuræ regularis, inuenire semidiametrum circuli circumscripti.

VICISSIM ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoscemus semidiametrum circuli circumscribentis: si fiat, vt latus propositæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt si latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur semidiameter circuli circumscripti $10\frac{2442250}{11755705}$. Et si fiat, vt Numerator huius fractionis ad suum Denominatorem: Ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator sequens $4\frac{1255705}{2442250}$. ita vt fiactio $\frac{1}{4}$. sit maior, quā $\frac{2442250}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor Ex additione numeratorū 1. 1. inter se, & Denominarum 4. 5. inter se, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam, quæ adhuc maior est, quam $\frac{2442250}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. est $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt semidiameter quæsita dici posit esse $10\frac{3}{14}$. Atque in hunc modum per minores numeros operationes fieri possunt, quamuis non omnino exquisitè, quod fractiones assumptę non sint omnino veræ; sed hic error in dimensionibus camporum tolerabilis est.

5. ANTEQVAM rectilinearum figurarum dimensionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuscunque figuræ latus habentis notum ve-

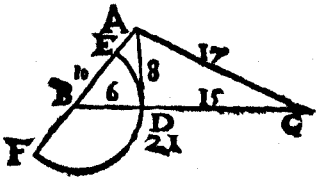
tum venire possimus in cognitionem alterius figurę similis illi, similiterque positę latus homologum etiam notum habentis: quæ sic se habet.

Quadratus numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, si latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur) si ducatur in aream cognitam producetur area alterius figuræ quæsitæ. Debent autem figuræ esse similes, similiterque positæ, & earum latera homologa sumi vt dictum est.

Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ similis.

Nam denominator proportionis lateris figurę quæsitę ad latus figuræ datę in se multiplicatus gignit denominatorem proportionis duplicatę eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. scripsimus. [a] Cum ergo figurę similes similiterque positę habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; fit vt denominator proportionis duplicatę laterum prædictorum multiplicans aream cognitam producat aream quęsitam, hoc est, numerum, qui ad aream cognitam proportionem habeat duplicatam proportionis datorum laterum, denominatam scilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterum in se multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli ABC, cuius latus AB, 10. AC, 17. & BC, 21. area est 84. Si ergo sit aliud triangulum huic simile habens latus ipsi AB, homologum 70. ipsi verò AC, homologum

[a] *18. vel 20. sexti.*



119. & ipsi BC, homologum 147. diuidaturque latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris; nimirum 49. ducatur in 84. areā trianguli ABC, producetur area 4116. posterioris trianguli. Rursus quia area trianguli æquilateri, cuius singula latera sint, 1. area est $\frac{\sqrt{3}}{4}$. fermè, vt supra patuit, si detur aliud triangulum æquilaterum, cuius singula latera sint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum est ipsummet latus 70. quod 70. diuisa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{\sqrt{3}}{4}$. aream cognitam. Productus enim numerus $2123\frac{1}{2}$. erit area posterioris trianguli.

6. HÆC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæsitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæsitæ.* Propterea quod eadem est proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæsitę, quæ figurę notæ ad figuram quæsitam: [b] quippe cum vtraque proportio sit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. est 1. fit, vt quotiescunque latus figuræ aream cognitam habentis fuerit 1. satis sit, quadratum numerum lateris figuræ quæsitæ multiplicare in datam aream, vt quęsita area producatur: Adeo vt operæ pretium sit areas inuestigare plurimarum figurarum regularium, quarum latera sint 1. Ex his enim sine magno labore areæ aliarum figurarum

Regula supradicta aliter proposita.

[b] *19. vel 20. sexti.*

Facilitas prædictæ regulæ, quando latus figuræ notæ est vnitas.

similium elicientur, quarum latera cognita sint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera sunt 1. hic subiecimus, vt per eas similium figurarum, quarum latera vnitatem superant, inuestigari possint ex regula Num. 5. vel 6. præscripta; quamuis in quadrato id necessarium non sit, cum latus datum in se ductum producat suum quadratum.

	Figuræ regulares.	Areæ prædictarum figurarum sunt ferè hæ.
Quarum latera sunt 1.	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	1
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

Qua ratione beneficio laterum superioris tabulæ areæ figurarum regularium inueniantur.

POSSVNT autem hę fractiones ad minores ferè æquiualentes, si placet, reuocari, vt supra Num. 4. docuimus.

7. AREÆ porro hæ procreatę sunt per regulam Num. 1. præscriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineant secunda, ac tertia, prętер gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbi gratia, ex superiori tabula sumpta est semissis lateris heptagoni 4338837. (quando numerus lateris est impar, addenda est 1. vt fiat par, ac proinde semissem habeat, quando quidem minus est vero latere, vt diximus. Deinde, quia, vt in tractatione sinuum dictum est, semissis hęc sinus est anguli oppositi in centro, quęsitus est is angulus ex tabula sinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodum ad finem Lemmatis 53. nostri Astrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac secundis,) inuentusque est grad. 25. min. 42. sec. 51.

POST

POST hæc, [a] quia est, vt sinus huius anguli inuenti, nimirum semissis ipsa 4338837. lateris ex superiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. semissem lateris, id est, ita sinus complementi eiusdem anguli inuenti, hoc est, ita sinus grad. 64. min. 17. sec. 9. (adhibita quoque parte proportionali, propter secunda.) nimirum 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuenti anguli oppositam in triangulo rectangulo: Inuenta est hæc perpendicularis $\frac{9011398}{8677678}$ quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. semissem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni $31\frac{11014432}{[illegible]}$. vel in minoribus numeris $31\frac{15973231}{8677678}$ Atque hac eadem ratione aream cuiuscunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non sit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream similis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies.

[a] *4. triang rectil.*

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. exposito aream cuiusuis figuræ regularis, etiamsi latus habeat maius, quam 1. (si placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ similis, cuius latus sit 1. si nimirum loco $\frac{1}{2}$. semissis lateris 1. accipiatur semissis lateris dati, quod maius sit quam 1. vt perspicuum est.

8. Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non sit, quã 12. cognoscetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ similis latus habentis 1. ex præcedenti tabula desumpta ad aream figuræ propositæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæsiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæsitum. Nam ita est area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; [b] quod vtraque proportio sit proportionis laterum duplicata.

Ex area cognita quo pacto latus eruatur.

[b] *10. vel 20. sexti.*

QVOD si area cognita sit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. nõ plura tamen quam 80. inuenienda primum erit area figuræ similis latus habentis 1. beneficio superioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8. declaratum est. Et si tabula superior laterum extensa esset ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{3}{5}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus est 1. inuenta est supra $\frac{43}{50}$. si fiat vt $\frac{43}{50}$. ad aream propositam. $15\frac{3}{5}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæsiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

De dimensione circuli ex Archimede.

CAPVT VI.

1. VT circulum quemlibet propositum, eiusq; partes metiri possimus, necesse est probè nosse, quæ Archimedes de circuli dimensione tradidit. Non abs re ergo erit, si eius libellum de circuli dimensione acutissimũ sane, & subtilissimum hic interseram, tum quia breuissimus est, quippe qui tribus duntaxat propositionibus constet: tum ne studiosus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedem ipsum adire cogatur: tum vero maximè, quod cum Archimedis scripta ob affectatam breuitatem, sint paulo obscuriora, illis nos lucem aliquam allaturos speramus. Nec

dubitamus etiam, quin res hæc studioso lectori grata, ac iucunda sit futura.

PROPOSITIO I.

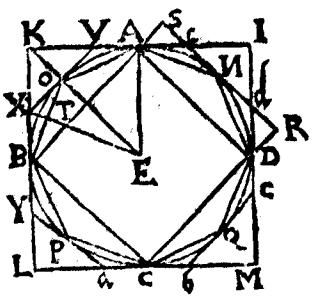
AREA cuiuslibet circuli æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterũ verò peripheriæ eiusdem circuli æquale est.

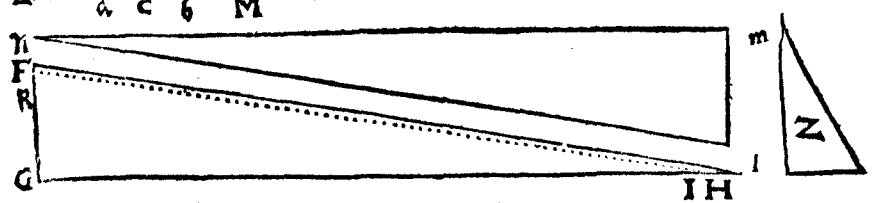
SIT circulus ABCD, cuius centrum E, semidiameter EA: sitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus verò FG, semidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiusdem circuli æquale. Dico circulum ABCD, triangulo FGH, æqualem esse. Si enim dicatur non esse æqualis, sit primũ, si fieri potest, circulus maior quam triangulum, magnitudine z: adeo vt circulus æqualis sit triangulo, & magnitudini z. simul; propterea que maior, quam z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quàm dimidium, & à residuo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

[a] 1. decimi.

Hæc autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur ex circulo quadratum inscriptum ABCD. Hoc enim cum dimidium sit quadrati IKLM, circulo circumscripti, vt in schol. propos. 9. lib. 4. Eucl. ostendimus: circulus autem ipsius quadrati IKLM, pars sit: erit quadratum inscriptum ABCD, maius quam dimidium circuli. Deinde si auferantur à residuis quatuor segmentis quatuor triangula Isoscelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media puncta arcuum. Hæc enim simul maiora sunt, quam dimidium quatuor segmentorum simul, cum vnum quodq; maius sit, quam dimidium segmenti, in quo existit. Completo enim rectangulo AR, [b] erit eius dimidium triangulum AND: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium segmenti AND. Eademque ratio est de aliis. Pari ratione, si à residuis octo segmentis auferantur octo alia triangula Isoscelia in illis constituta, &c. atque ita deinceps.

[b] 41. primi.





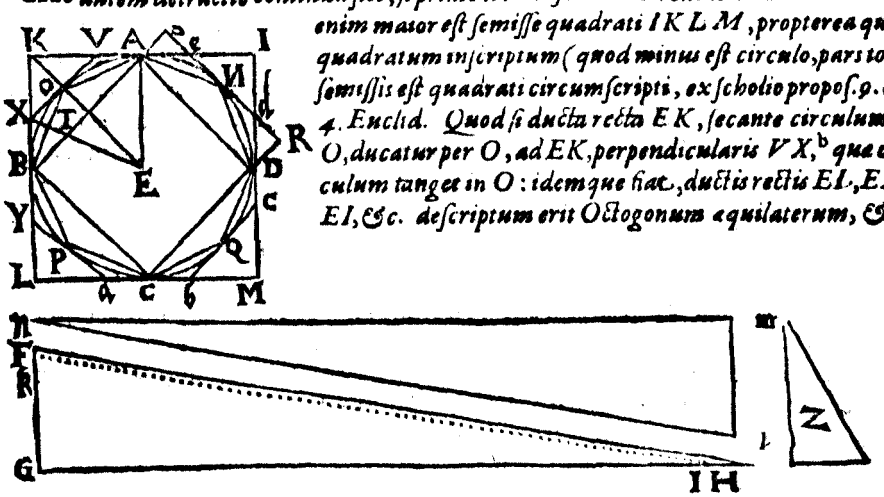
Ponantur ergo iam octo segmenta AO, OB, BP, PC, CQ, QD, DN, NA, relicta esse minora magnitudine z. & quoniam circulus æqualis conceditur triangulo FGH, & magnitudini z, simul: si demantur inæqualia, nimirum ista segmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inscripta, Octogona videlicet, maior triangulo FGH, quod est absurdũ, quippe cum multo minor sit. Si namque ex centro E, ad latus BO, ducatur perpendicularis ET, & in triangulo sumatur GK, ipsi ET, & recta Gi, ambitui

Octo-

Octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor sit semidiametro circuli, & ambitus Octogoni minor peripheria eiusdem circuli. Igitur ducta recta ki, erit triangulum Gki, minus triangulo FGH, pars toto. Est autem triangulum kGi, Octogono æquale: quippe cum ex scholio propos. 41. lib. 1, Euclid. æquale sit rectangulo sub Gk, & semisse ipsius Gi, comprehenso, quod per propositionem 2. lib. 7. de Isoperimetris Octogono æquale est. Octogonum ergo minus est triangulo FGH. Non ergo maius est: ac proinde circulus triangulo maius esse nequit.

SIT deinde, si fieri potest, circulus ABCD, minor quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumscribatur circulo quadratum IKLM, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo FGH. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propos. 1. probabimus) maior sit peripheria circuli, hoc est, recta GH, & perpendicularis EA, ipsi FG, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipsi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati IKLM.) maius triangulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per scholium propos. 45. lib. 1. Euclid. sit æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus quadrati IKLM, comprehenso: hoc autem rectangulum per propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo FGH. Et quia triangulum FGH, ponitur æquale circulo, & magnitudini z. simul, ac proinde maius quã z, erit quoque quadratum IKLM, (quod maius esse ostendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimidium, & à residio plus etiam quam dimidium, atque ita deinceps, [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z. [a] 1. decimi.

Hæc autem detractio continua fiet, si primo loco auferatur circulus ABCD: Hic enim maior est semisse quadrati IKLM, propterea quod quadratum inscriptum (quod minus est circulo, pars toto) semissis est quadrati circumscripti, ex scholio propos. 9. lib. 4. Euclid. Quod si ducta recta EK, secante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX, [b] *quæ circulum tanget in O: idemque fiat, ductis rectis EL, EM, EI, &c. descriptum erit Octogonum æquilaterum, & a-* [b] 16. tertij.



quiangulũ VXYabcdeV, vt constat ex constructione, demonstrationeq; propos. 12. lib. 4. Eucl. quippe cum ad EA, EO, & ad reliquas semidiametros Octogoni inscripti ducta sint perpendiculares ve, VX, &c. Quoniã vero vA, vO, per 2. coroll propos. 36. lib. 3. Eucl. æquales sunt; [c] *& est KV, maior quam vO: erit quoque KV, maior quam vA, ideoque & triangulum KvO, triangulo vAO, maius erit;* [d] *cum sit triangulum ad triangulum, vt basis ad basem. Igitur triangulum KVO, maius erit, quam dimidium trianguli* [c] 19. primi. [d] 1. sexti.

KAO;

KAO; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti KAO, cuius vnum latus est arcus AO. Eadem ratione erit KOX, maius, quam dimidium trianguli mixti KOB, cuius vnum latus est arcus OB. Auferendo ergo triangulum KVX, ex figura mistilinea KAB, in qua vnum latus est arcus AOB, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiusmodi triangulis KVX, LYa, Mbc, Ide, ablatum erit plus, quam dimidium ex quatuor residuis extra circulum, & sic deinceps. Ponantur igitur iam octo triãgula mixta residua, quorũ bases sunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis positus sit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo residuis, hoc est, figura Octogona VXY, abcdeV, minor eodem triangulo FGH. quod est absurdum, cum maius sit: quippe cum perpẽdicularis EO, æqualis sit lateri FG, & ambitus Octogini maior circumferentia circuli, hoc est, recta GH. Hinc enim fit, triangulum rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari EO, & alterum latus æquale ambitui Octogoni, maius videlicet, quam GH, maius esse triangulo FGH. Cum ergo illud triangulum sit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Eucl. æquale rectangulo sub FG, & semisse ambitus Octogoni comprehenso; hoc autem rectangulum Octogono æquale, ex propos. 2. lib. 7. de Isoperimetris: erit quoq; Octogonum maius triangulo FGH. Nõ ergo minus esse potest, ac proinde circulus ABCD, minor non est triangulo FGH: Sed neque maior est, vt demonstrauimus. Igitur æqualis est, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonstrationis non perpendit, vel quia suæ circuli quadrandi rationi vidit esse contrariam, non est veritus Archimedem hoc loco falsitatis arguere: conaturque ostendere, non rectè ab eo demonstratum, circulum æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus semidiametro, & alterum circumferentiæ circuli est æquale. Nam, ait, si demonstratio Archimedis bona est, demonstrabitur eodem modo, circulũ æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro æquale est, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo lmn, latus quidem lm, trianguli semidiametro circuli EA, æquale, at mn, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non esse maiorem triangulo FGH, rectè esse ab Archimede demonstratum, hoc est, triangulum FGH, cuius latus GH, peripheriæ est æquale, non esse minus circulo, ac proinde neque triangulum lmn, cuius latus mn, maius est peripheria, circulo minus esse. Concedit item, rectè probatum esse, circulũ non esse minorem triangulo FGH, si latus GH, peripheriæ sit æquale, hoc est, triangulum FGH, non esse maius circulo. Sed negat, ex hoc sequi, triangulum FGH, esse æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, si basis mn, maior est peripheria, sed minor circumscripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo lmn, quod ambitus polygoni maior sit recta mn, & semidiameter EA, rectæ lm, æqualis. Sed resectis portionibus, sequeretur, idẽ polygonum esse triangulo lmn, minus, quod est ineptum. Ita ne verò mi Scaliger? Non aduertis, te cum hypothesi pugnare? Nam posito latere mn, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum esse minus triangulo lmn, (si nimirum relictæ portiones minores fuerint magnitudine z,) se-

quitur

quitur necessariò, ambitum polygoni minorem esse latere m n. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo semidiametro polygoni, & basis ambitui æqualis est, æquale sit, ex scholio propos. 41. lib. 1. Eucl. rectangulo sub eadem semidiametro, & semisse ambitus polygoni comprehensa; hoc autem, per propos. 2. lib. 7. huius de Isoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo l m n. Quare cum hæc triangula habeant æquales altitudines; [a] erit vt illud triangulum ad l m n, ita basis illius ad basem m n: ac proinde illa basis, hoc est, ambitus polygoni, basem m n, minor erit. Non ergo ponere potes basem trianguli l m n, si maior est, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonstratione autem Archimedis constat, ambitū polygoni maiorem esse base trianguli F G H, si G H, æqualis est peripheriæ circuli, cum maior sit, quam peripheria: ac propterea rectè conclusit Archimedes, polygonum esse maius triangulo F G H, cum tamen ex hypothesi aduersarij ostensum sit esse minus. Itaque potuisset Archimedes ita quoque propositum colligere. Polygonum minus est triangulo F G H, propter relictas sectiones minores magnitudine z. Ergo eius ambitus minor est base G H, (quemadmodum proximè demonstrauimus.) hoc est, peripheria circuli. quod est absurdū, cum ambitus polygoni maior sit, quam peripheria. Quod absurdum, doctissimè Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo l m n, cum statuas basem mn, peripheria circuli maiorem. Et sane miror te, Mathematicus cū sis, negare quātitatē aliquam illi esse æqualem, qua neque maior est, neque minor. Si enim æqualis non est, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypothesim, cum dicatur neque maior esse, neque minor. An non vides, non solum Archimedem, sed etiam Euclidem lib. 12. hunc argumentandi modum frequentissimè vsurpare?

[a] 1. sexti.

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla est diametri, & adhuc superat parte, quæ quidem minor est decem septuagesimis, hoc est, septima parte diametri, maior verò decem septuagesimis primis.

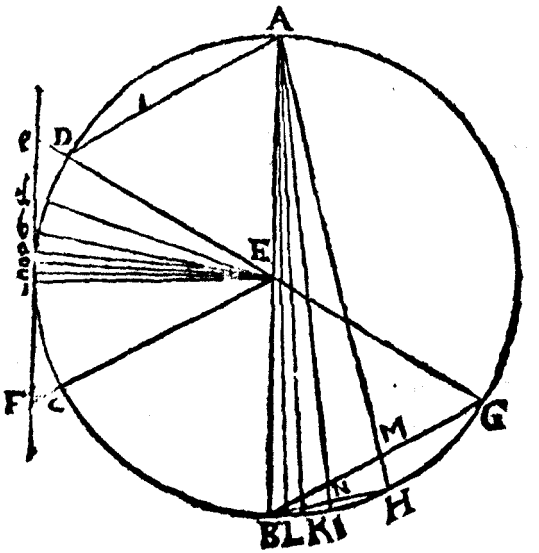
HÆc est Archimedis propositio 3. quam nos secundam facimus, vt doctrinæ ordo seruetur, quando quidem sequens propositio 3. quam ipse 2. facit, hāc nostram propositionem 2. in demonstrationem adhibet.

Sit igitur circulus ABCD cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos secet semidiameter E c, & e c F, ad E c, perpendicularis ducatur, [b] quæ circulum tangetin c. Ducatur latus hexagoni AD, [c] quod semidiametro æquale erit, & arcus AD, grad. 60. Ideoq; D c. grad. 30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus e E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus c E F, angulo c E e, æqualis: eruntq; anguli e, F, inter se æquales, quod vterque complementum sit tertiæ partis anguli recti, ac proinde vterque duas tertias partes vnius recti comprehendet. [d] Cum ergo omnes tres anguli in triangulo e E F, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoque e E F, $\frac{3}{3}$. vnius recti ipsumq; triangulum æquiangulum erit, hoc est, per coroll. propos. 6. lib. 1. Euc. æquilaterū; propterea q; perpendicularis E c, basem e F, bifariā secabit, ex scholio propos. 26. lib. 1. Euclid. arq; ideo E e, ipsius e c, dupla erit. Posita igitur c e,

[b] 16. tertij.
[c] 15. quar.
[d] 32. primi.

153. erit E e, 306. Et si quadratum ipsius c e, 23409. dematur ex 93636. quadrato ipsius E e, [a] reliquum fiet quadratum ipsius E c, 70227. cuius radix est paulo maior, quam 265. [b] ac proinde E c, ad c e, maiorem habebit proportionem, quam 265. ad 153.

[a] 47. primi.
[b] 8. quinti.



[c] 3. sexti.

SECTO iam angulo e E c, bifariam per rectã E d; [c] erit e E, ad E c, vt e d, ad d c. Et componendo e E, E c simul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, simul ad e c, vt E c, ad c d. Quia verò e E, E c, simul maiores sunt, quam 571. (quippe cum E e, sit 306. & E c, paulo maior, quam 265.) & e c, posita est 153. [d] habebunt e E, E c, simul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoque & proportio E c, ad c d, maior erit, quam 571. ad 153. ac proinde si c d, ponatur 153. [e] erit E c, paulo maior quam 571. Igitur quadratum ipsius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum quadratum ipsius c d, sit 23409. erit quadratum ipsius E d, [f] quod quadratis rectarum E c, c d, est æquale, paulo maius, quam 349450. eiusque radix maior, quam $591\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum sit tantum $349428\frac{49}{64}$. [g] Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem quam $591\frac{1}{8}$. ad 153.

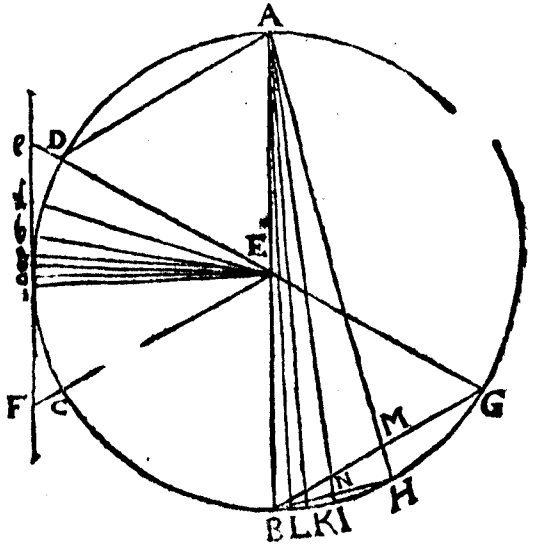
[d] 8. quinti.
[e] 10. quinti.
[f] 47 primi.
[g] 8. quinti.

[h] 3. sexti. & componendo permutandoque.

SECTO rursus angulo d E c, bifariam per rectam E b; [h] erit rursus vt d E, E c, simul ad d c, ita E c, ad c b. Quia verò d E, E c, simul maiores sunt, quam $1162\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior sit, quam $591\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571.) & d c, posita est 153. [i] habebunt d E, E c, ad d c, maiorem proportionem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ideoque & E c, ad c b, proportionem habebit maiorem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde si ponatur c b, 153. erit E c, maior, quam $1162\frac{1}{8}$. [k] Igitur quadratum ipsius E c, maius erit quam $1350534\frac{33}{64}$. cui si addatur quadratum 23409. ipsius c b, erit quadratum ipsius E b, [l] quod quadratis rectarum E c, c b, æquale est, maius, quam $1373943\frac{33}{64}$. eiusque radix propterea, id est, recta E b,

[i] 8. quinti.
[k] 10. quinti.
[l] 47. primi.

ca Eb, paulo maior quam 1172 $\frac{1}{8}$. quippè cum huius radicis quadratum sit tantum 1373877 $\frac{1}{64}$. [a] Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam 1172 $\frac{1}{8}$. ad 153. [a] 8. quinti.



SECTO item angulo b E c, bifariam per rectam E a; [b] erunt b E, E c, simul ad b c, vt E c, ad c a. Quia verò b E, maior est, quam 1172 $\frac{1}{8}$. & E c, maior, quã 1162 $\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, simul maiores, quam 2334 $\frac{3}{8}$. vel 2334 $\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, posita sit 153. [c] habebunt b E, E c, simul ad c b, maiorem proportionem, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam 2334 $\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, si c a, ponatur 153. [d] erit E c, maior, quam 2334 $\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipsius E c, maius erit, quam 5448723 $\frac{1}{16}$. cui si addatur quadratum 23409. ipsius c a, erit quãdratum ipsius E a, [e] quod quadratis rectarum E c, c a, æquale est, maius quam 5472132 $\frac{1}{16}$. eiusque radix maior, quam 2339 $\frac{1}{4}$. cum huius radicis quadratum sit tantum 5472090 $\frac{8}{16}$. [f] Ergo E a, ad a c, maiorem proportionem habebit, quam 2339 $\frac{1}{4}$. ad 153.

[b] 3. sexti. & componendo, permutando-que.
[c] 8. quinti.
[d] 10. quinti.
[e] 47. primi.
[f] 8. quinti.

SECTO denique angulo quoque a E c, bifariam per rectam E o, [g] erunt a E, E c, simul ad a c, vt E c, ad c o. Quia verò a E, maior est, quam 2339 $\frac{1}{4}$. a & E c, maior quam 2334 $\frac{1}{4}$. erunt a E, E c, simul maiores, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Cum ergo c a, posita sit 153. [h] habebunt a E, E c, simul ad c a, hoc est, E c, ad c o, maiorem proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea si ponatur c o, 153. [i] erit E c, maior quam 4673 $\frac{1}{2}$.

[g] 3. sexti. & componendo, permutando-que.
[h] 8. quinti.
[i] 10. quinti.

QVONIAM igitur angulus e E c, tertia pars est recti, erit eius semissis d E c, sexta pars recti, & huius semissis b E c, $\frac{1}{12}$. recti, & huius semissis a E c, $\frac{1}{24}$. recti, & denique huius semissis o E c, $\frac{1}{48}$. recti. [k] Qualium ergo partium 48. est quadrans A c, talium 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circumferentiæ. Fiat angulus c E i, angulo c E o, æqualis; eritq; totus angulus o E i, $\frac{1}{96}$. quatuor rectorũ: [l] ideoq; arc° o i, $\frac{1}{98}$. totius circũferentiæ. Per doctrinã ergo ꝓpos. 12. lib. 4. Eucl. recta o i,

[k] 33 sexti.
[l] 33. sexti.

latus erit polygoni circulo circumscripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia ostensum est, E c, ad c o, maiorem habere proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153.[a] habebit quoque diameter AB, ipsius E c, dupla ad o i, ipsius c o, duplam maiorem proportionem, quam 4673 $\frac{1}{2}$. ad 153. Si ergo o i, latus polygoni ponatur 153.[b] erit diameter AB, maior, quam 4673 $\frac{1}{2}$. Multiplicentur 153. per 96. vt totus ambitus polygoni producatur 14688.[c] habebitque ambitus polygoni ad diametrum AB, minorem proportionem, quam 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}$.[d] Est autem proportio 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}$. minor, quam tripla sesquiseptima; quod 14688. ad 4673. $\frac{5}{11}$. (qui numerus paulo minor est quam 4673 $\frac{1}{2}$.) habeant proportionem triplam sesquiseptimam.[e] Igitur & ambitus polygoni ad diametrũ AB, proportionem habet minorem tripla sesquiseptima:[f] atque adeo circumferentia, quæ (vt lib. 8. propos. 1. probabimus) minor est ambitu polygoni, multo minorem proportionem tripla sesquiseptima ad diametrum habebit; ideoq; circumferentia tripla est diametri, & ad huc superat parte, quæ minor est $\frac{1}{7}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. diametri. Nam si contineret ter, & $\frac{1}{7}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem triplam sesquiseptimam: si vero contineret ter, & plusquã $\frac{1}{7}$. haberet maiorem proportionem, quam triplam sesquiseptimam, cum tamen minorem habeat, vt demonstratum est.

[a] *15. quinti.*
[b] *10. quinti.*
[c] *8. quinti.*
[d] *8. quinti.*
[e] *schol. 13. quinti.*
[f] *8. quinti.*

IAM vero in eodem circulo sit latus hexagoni B G, semidiametro æquale, per coroll. propos. 15. lib. 4. Eucl. iunganturque rectæ A G, E G. Et quia triangulum E B G, est æquilaterum constans ex tribus semidiametris;[g] erit angulus B E G, $\frac{1}{3}$. vnius recti,[h] ac proinde eius semissis B A G, erit $\frac{1}{6}$. vnius recti. Et quia diameter AB, dupla est semidiametri B G, si B G, ponatur 780. erit AB, 1560.[i] Cũ ergo quadratum ipsius A B, æquale sit quadratis rectarum B G, G A;[k] quod angulus A G B, in semicirculo rectus sit: si quadratum 608400. ipsius B G, dematur ex 2433600. quadrato ipsius A B, reliquum fiet quadratum 1825200. ipsius A G, cuius radix paulo minor est, quam 1351. cum huius quadratum 1825201. maius sit, quam 1825200.[l] Igitur A G, ad G B, minorem habebit proportionem, quam 1351. ad 780. ac proinde si B G, ponatur 780.[m] erit A G, minor, quam 1351.

[g] *coroll. 3 propos. 32. lib. 1.*
[h] *20. tertij.*
[i] *47. primi.*
[k] *31. tertij.*
[l] *8. quinti.*
[m] *10. quinti.*

SECTO iam angulo B A G, bifariam per rectam A H, secantem B G, in M, ductaque H B, erunt triangula B H M, A H B, æquiangula:[n] propterea quod angulus H B M, æqualis est angulo H A G, ob eandem basem G H; ideoque per constructionem angulo H A B; & angulus rectus H, in semicirculo communis.[o] Igitur erit A H, ad H B, vt H B, ad H M. Item AB, ad B H, vt B M, ad M H: & permutando AB, ad B M, vt B H, ad H M: ideoque erunt tres hæ proportiones A H, ad H B; H B, ad H M: & AB, ad B M, æquales. Sed vt AB, ad B M, ita est vtraq; simul B A, A G, ad B G.[p] *Nam vt AG, ad AB, ita est GM, ad MB; & componendo vt AG, AB, simul ad AB, ita GM, MB, simul id est, tota GB, ad MB: Et permutando vt AG, AB, simul ad GB, ita AB, ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque A G, AB, simul ad G B, ita A H, ad H B. Est autem A G, ostensa minor, quam 1351. & AB, posita est 1560. & G B, 780. Igitur vtraque A G, AB, simul (cum minus efficiant, quã 2911.)[q] minorem habebit proportionem ad G B, quam 2911. ad 780. Quare etiam proportio A H, ad H B, minor erit, quam 2911. ad 780. ac proinde si H B, ponatur 780.[r] erit A H, minor, quam 2911. ideoque eius quadratum minus, quam 8473921. cui si addatur quadratum 608400. ipsius B H, fiet quadratum ipsius AB,[s] (quod quadratis rectarum A H, H B, æquale est) minus, quam 9082321. ideoque eius radix, vel recta A B, minor, quam 3013 $\frac{7}{4}$. cum huius quadratum

[n] *21. tertij.*
[o] *4. sexti.*
[p] *3. sexti.*
[q] *8. quinti.*
[r] *10. quinti.*
[s] *47. primi.*

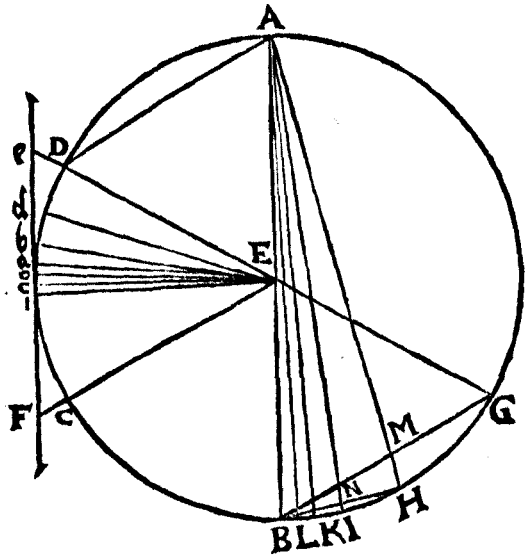
9082-

9082689 $\frac{1}{11}$. maius sit, quam 9082321. Igitur AB, ad BH, minorem proportionem habebit, quam 3013 $\frac{3}{4}$. ad 780. ac proinde si BH, ponatur 780. [a] erit AB, minor quam 3013 $\frac{3}{4}$. [a] 10. 9.

SECTO rursus angulo HAB, bifariam per rectam AI, secantem HB, in N; erunt vt prius, triangula BIN, AIB, æquiangula. Ergo, vt supra, demonstrabimus, vtramque BA, AH, simul ad HB, habere eandem proportionem quam AI, ad IB. Est autem BA, ostensa minor, quam 3013 $\frac{3}{4}$. & AH, minor, quam 2911. & ob id earum summa minor, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ipsa autem HB, posita est 780. [b] Igitur vtraque BA, AH, simul ad HB, hoc est, AI, ad IB, minorem habebit proportionem, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. Si ergo IB, ponatur 780. [c] erit AI, minor, quam 5924 $\frac{3}{4}$. Et quoniam est, vt 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. ita 1823. ad 240, quod idem numerus fiat ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium, quæ quidem proportio denominatur à 7 $\frac{17}{240}$. habebit quoque AI, ad IB, minorem proportionem, quam 1823. ad 240. ideoque posita IB, 240. [d] erit AI, minor, quam 1823. atque ob id quadratum ipsius AI, minus, quam 3323329. cui si addatur quadratum 57600. ipsius IB, fiet quadratum ipsius AB, [e] (quod quadratis rectarum AI, IB, æquale est) minus quam 3380929. eiusque radix propterea, vel recta AB, minor quam 1838. $\frac{9}{11}$. cum huius quadratum 3381252 $\frac{77}{121}$. maius sit, quam 3380929. [f] Igitur AB, ad BI, minorem proportionem habebit, quam 1838 $\frac{9}{11}$. ad 240. ac proinde posita BI, 240. [g] erit AB, minor, quam 1838 $\frac{9}{11}$.

[b] 8. quinti. [c] 10. quinti. [d] 10. quinti. [e] 47. primi. [f] 8. quinti. [g] 10. quinti.

SECTO item angulo IAB, bifariam per rectam AK, ostendemus eodem modo, vtramque BA, AI, simul ad IB, habere eandem proportionem, quam AK, ad KB. Sunt autem BA, AI, ambæ simul minores, quam 3661 $\frac{9}{11}$. (quod BA, ostensa sit minor, quam 1838 $\frac{9}{11}$. & AI, minor, quam 1823.) & IB, posita est 240.



[h] Vtraq; ergo BA, AI, simul ad IB, hoc est, AK, ad KB, minorem habebit proportionem [h] 8. quinti.

tionem, quam $3661\frac{9}{11}$. ad 240. Vt autem $3661\frac{9}{11}$. ad 240. ita est 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex secundo in tertium, quę quidem proportio denominatur à $15\frac{17}{33}$. Igitur AK, ad KB, minorem quoque proportionem habebit, quam 1007. ad 66. ideoque posita KB, 66.
[a] erit AK, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum minus, quam 1014049. cui si addatur quadratum 4356. ipsius KB; fiet quadratum ipsius AP, [b] (quod illis duobus æquale est) minus quam 1018405. eiusque radix propterea, id est, recta AB, minor, quam $1009\frac{1}{4}$. cum huius quadratum $1018417\frac{1}{16}$. sit maius, quam 1018405. [c] Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem habebit, quam $1009\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco posita BK, 66. [d] erit AB, minor, quam $1009\frac{1}{6}$.

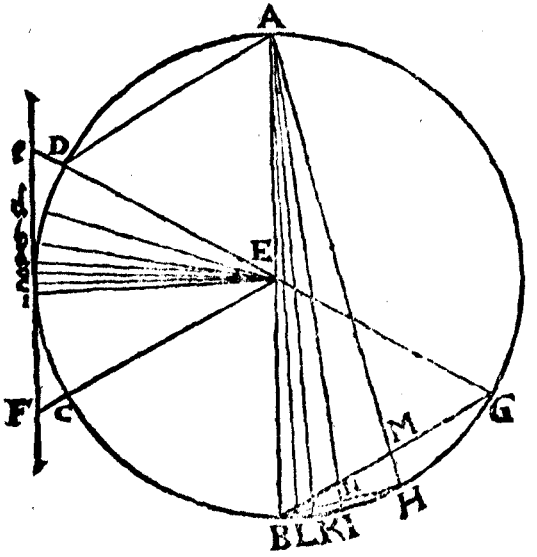
[a] 10. quinti.
[b] 47. primi.
[c] 8. quinti.
[d] 10. quinti.

SECTO denique angulo KAB, bifariam, per rectam AL, demonstrabimus eadem ratione, vtramque BA, AK, simul ad CK, esse, vt AL, ad LB. Sunt autem ambę BA, AK, simul minores, quam $2016\frac{1}{6}$. (quod BA, sit ostensa minor, quam $1009\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & BK, posita est 66. [e] Igitur vtraque BA, AK, simul ad CK, hoc est, AL, ad LB, habebit proportionem minorem, quam $2016\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco si LB, ponatur 66. [f] erit AL, minor, quam $2016\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam $4064928\frac{1}{36}$. cui si addatur quadratum 4356. ipsius LB; fiet quadratum ipsius AB, [g] quod duobus illis est æquale) minus, quam numerus $4069284\frac{1}{36}$. ideoq; eius radix, id est, recta AB, minor, quam $2017\frac{1}{4}$. cum huius quadratum $4069297\frac{9}{16}$. superet $4069284\frac{1}{36}$. [h] Quamobrem AB, ad BL, minorem proportionem habebit, quam $2017\frac{1}{4}$. ad 66. ideoque si BL, ponatur 66. [i] erit AB, minor, quam $2017\frac{1}{4}$.

[e] 8. quinti.
[f] 10. quinti.
[g] 47. primi.
[h] 8. quinti.
[i] 10. quinti.

QVONIAM igitur angulus GAH, angulo HAB, æqualis est; [k] erit arcus

[k] 26. tertij.



GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus HI, arcui IB. & IK, ipsi KB, & KL, ipsi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, sit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit HB, $\frac{1}{12}$. &

$\frac{1}{7}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inscripti, quod 96. lateribus æqualibus continetur. Quoniam vero BL, posita est 66. si 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336. [a] Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum AB, maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad 2017$\frac{1}{4}$. cum diameter AB, ostensa sit minor, quam 2017$\frac{1}{4}$. [b] Est autem proportio 6336. ad 2017$\frac{1}{4}$. maior, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas, quod proportio 6336. ad 2017$\frac{61}{227}$. (qui numerus maior est, quam 2107$\frac{1}{4}$) sit tripla superdecupartiens septuagesimas primas. Ergo ambitus Polygoni maiorem habet proportionem ad diametrum, quam 3$\frac{10}{71}$. Cum igitur circumferentia circuli sit maior ambitu Polygoni, [c] habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quam 3$\frac{10}{71}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & insuper partem maiorem, quam $\frac{10}{71}$. Nam si contineret $\frac{10}{71}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem 3$\frac{10}{71}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{10}{71}$. haberet proportionem minorem, quam 3$\frac{10}{71}$. cum tamen maiorem habere demonstratum sit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor est, quam $\frac{10}{71}$. liquet ex hac secunda parte propositionis, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte constet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$. diametri: perspicuum est, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum consistere inter triplam sesquiseptimam, & triplam sesquioctauam.

a 8. quinti.

b 8. quinti.

c 8. quinti.

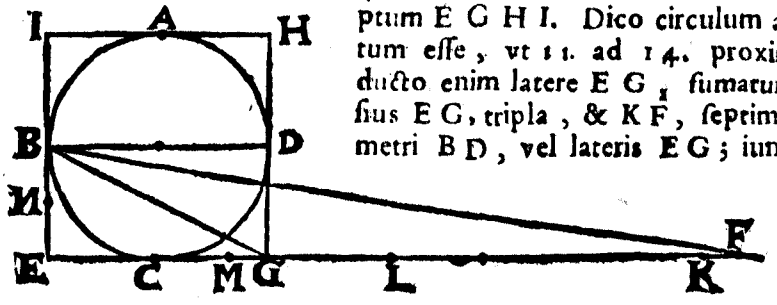
COROLLARIVM.

ITAQVE si diameter per 3$\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quam circumferentia: si verò multiplicetur per 3$\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, si circumferentia diuidatur per 3$\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: si vero diuidatur per 3$\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam ad 11. ad 14. proximè.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumscriptum EGHI. Dico circulum ad quadratum esse, vt 11. ad 14. proximè. Producto enim latere EG, sumatur EK, ipsius EG, tripla, & KF, septima pars diametri BD, vel lateris EG; iunganturque



rectæ

rectę BG, BF. Quoniam igitur EF. ad diametrum EG, proportionem habet triplam sesquiseptimam, ex constructione; erit per pręcedentem EF, circumferentiæ circuli fermè æqualis. Cum ergo BE, ęqualis sit semidiametro: erit per 1. propos. triangulum BEF, circulo æquale proximè: Triangulum autem BEG, quarta pars erit quadrati EH. Quia verò posito latere EG, 7. recta EF, est 22. [a] erit triangulum BEF, hoc est, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed posito triangulo BEG, 7. quadratum EGHI, ipsius quadruplum, est 28. Igitur circulus ad quadratum, est fermè, vt 22. ad 28. hoc est, vt 11. ad 14. quod erat demonstrandum.

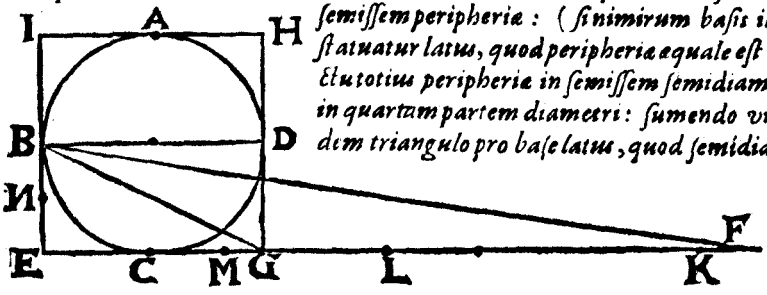
[a] 1 sexti.

DE AREA CIRCVLI, INVENTIONEque circumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumfetentia.

CAPVT VII.

1. QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiusdem æquale est, [b] areæ circuli adæquatur: huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in semissem basis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri scripsimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione semidiametri in semissem peripheriæ: (si nimirum basis illius trianguli statuatur latus, quod peripheria æquale est) Vel ex ductu totius peripheriæ in semissem semidiametri, hoc est, in quartam partem diametri: sumendo videlicet in eodem triangulo pro basi latus, quod semidiametro est æquale.) Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheria partem*, quod ita perspicuum faciemus.

[b] 1. de Dimẽs. circuli. Area circuli trib. viis, ex cognita diametro, & circumferentia.



REPETATVR figura pręcedentis propositionis, diuidaturque EF, quę peripheriæ circuli est æqualis, bifariam in L, ita vt EL, semiperipherię sit æqualis: Item EL, bifariam secetur in M, vt EM, æqualis sit quartę parti peripherię. Et tandem BE, bifariam quoque secetur in N, vt EN, semissis sit semidiametri BE, hoc est, quarta pars totius diametri. [c] Et quia triangulum BEF, æqualę est circulo ABCD; erit quoque rectangulũ sub semidiametro BE, & semiperipheria EL, comprehensum (quod per propositionem 1. lib. 7. huius, triangulo ęquale est.) eidem circulo ęquale; quod est primum.

[c] 1. de Dimẽs. circuli.

NON aliter rectangulum comprehensum sub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propos. 1 lib. 7. huius, eidem triangulo æquale est) eidem circulo erit æquale, quod est secundum.

DENI-

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales sunt, quod tam priores duę, quam posteriores duę habeant proportionem duplam; [a] erit rectangulum sub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehensum, rectangulo sub EB, semidiametro, & EL, semiperipheria comprehenso æquale. Cum ergo hoc in prima parte ostensum sit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod est tertium. [a] *16. sexti.*

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus est numeri producti ex semidiametro in semicircumferentiam, vt liquet. *Area semicirculi, Quadrantis, octauæ partis, &c.*

SEQVITVR ex prima parte, aream semicirculi produci ex semidiametro in quartam partem circumferentię: quia nimirum producitur semissis eius, quod fit ex semidiametro in semissem peripheriæ. item aream Quadrantis procreari ex semidiametro in octauam partem circumferentię: Et aream octauę partis ex semidiametro in sextamdecimam partem circumferentię: Et aream sextędecimę partis ex semidiametro in $\frac{1}{32}$. circumferentię, & sic deinceps: quia semper producitur semissis pręcedentis producti; quemadmodum & partes circuli semisses sunt pręcedentium partium: nimirum Quadrans semissis est semicirculi; & octaua pars semissis Quadrantis; & sextadecima pars semissis octauę partis, &c.

1. IGITVR vt area circuli reperiatur, necesse est tam eius diametrum, quam circumferentiam esse cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propos. 2. de Dimensione circuli inueniatur. Deinde alias regulas pręscribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumferentia cognita eruatur.

I.

Ex data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud, procreabiturque circumferentia 88. maior quam vera. [b] Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor est, quam tripla sesquiseptima; proportio autem 88. ad 28. est tripla sesquiseptima, [c] eadem videlicet, quæ 22. ad 7. [c] erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter est 28. [b] *2. de Dimēs. circuli:* [c] *10. quinti.*

II.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, producetur que circumferentia $87\frac{67}{71}$. *minor quam vera.* [d] Quoniam enim proportio circumferentię ad diametrum maior est, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas; proportio autem $87\frac{67}{71}$. ad 28. est tripla superdecupartiens septuagesimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. [e] erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam $87\frac{67}{71}$. [d] *2. de Dimēs. circuli.* [e] *10. quint.*

III.

Ex data circuli circumferentia, diametrum vera maiorem indagare.

Fiat vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus 28 $\frac{4}{223}$. dabit diametrum vera maiorem. [a] *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam superdecupartientem septuagesimas primas, hoc est, maiorem quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad suam diametrum proportionem maiorem, quam ad 28 $\frac{4}{223}$.* [b] *ac proinde diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam 28 $\frac{4}{223}$:*

[a] *2. de Dimens. circuli.*

[b] *10. quinti.*

IIII.

Ex data circuli circumferentia diametrum inuestigare vera minorem.

Fiat vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus 28. offeret diametrum vera maiorem. [c] Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proportionem, quam triplam sesquiseptimam, hoc est, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad suam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. [d] atque idcirco diameter circumferentiæ 88. maior erit, quam 28.

[c] *2. de Dimes. circuli.*

[d] *10. quinti.*

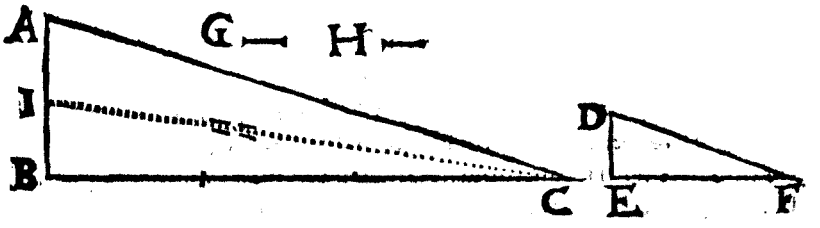
3. IAM verò vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex sola diametro cognita, vel ex sola circumferentia cognoscatur, ita vt necesse non sit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inuestigare, demonstrandæ prius erunt sequentes tres propositiones, quarum primam deinde lib. 8. propos. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonstrabimus.

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorum circulorum AB, DE, & rectæ circumferentiis æquales BC, EF, quę cum diametris angulos rectos efficiant B, E, compleanturque triangula ABC, DEF. Dico ita esse diametrum AB, ad diametrum DE, vt est circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Diametris enim AB, DE, inueniatur tertia proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionalis H. Et quia continuè proportionales sunt AB, DE, G; [e] erit quadratum ex AB,

[e] *20. coroll. sexti.*



ad quadratum ex DE, vt AB, ad G. [f] Sed vt quadratum ex AB, ad quadratum ex DE,

[f] *2. duodec.*

ex DE, ita est circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. a Et vt circulus ad circulum, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, quòd hęc triangula circulorum sint dupla. (Nam diuisa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta IC, b erit triangulũ IBC, circulo æquale: ac proinde cum b triangula AIC, IBC, æqualia sint; erit triangulum ABC, duplum trianguli IBC, hoc est, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum DEF, duplum erit circuli, cuius diameter DE.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est AB, ad H. quod vtraque proportio composita sit ex iisdem proportionibus. (d Nam proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportione basis AB, ad basem DE, & ex proportione altitudinis BC, ad altitudinem EF, hoc est, ex proportione DE, ad H, quæ ex constructione eadem est, quæ BC, ad EF. Proportio autem AB, ad H, componitur quoque ex proportionibus AB, ad DE, & DE, ad H, ex defin.) Igitur erit, vt AB, ad G, ita AB, ad H. e ideoque G, & H, æquales erunt: f ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Est autem per constructionem AB, diameter ad diametrum DE, vt DE, ad G, hoc est, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per constructionem, circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. quod erat demonstrandum.

a *15. quinti.*
b *1. de Dimēs. circuli.*
c *38. primi.*
d *schol. 23. sexti.*
e *9. quinti.*
f *7. quinti.*

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuslibet circuli descripti ad circuli aream maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

g QVONIAM enim quadratum diametri cuiusuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli est, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiusdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiusdem diametri. Posita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipsius ad circulum maior est, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. Igitur proportio quadrati diametri cuiusuis alterius circuli ad ipsum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

g *2. duodec.*

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad suum circulum maior sit, quam 14. ad 11. minor verò, quàm 284. ad 223. ita perspicuum fiet. Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia $3\frac{1}{7}$. vel $\frac{22}{7}$. maior, quam vera. Igitur ex eius semisse $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. semidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum est, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: h Ac proinde quadratum diametri 1. quod est 1. ad veram aream circuli, quæ minor est, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propositione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem proportio est numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutæ $\frac{11}{14}$. ad suum integrũ 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoq; quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, minorem proportionem, quam 14. ad 11. quod est propositum. Constat ergo prima propositionis pars.

h *8. quinti.*

RVRSVS si fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli $3\frac{10}{71}$. vel $\frac{227}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum est ex eius semisse $\frac{227}{142}$. in $\frac{1}{2}$. semidiametrum producetur area circuli $\frac{227}{284}$. maior tamen, quam vera: *a* Ac proinde quadratum diametri 1. quod est 1. ad veram circuli aream, quę maior est, quam $\frac{227}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{227}{284}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{227}{284}$. vt 284. ad 223. (Nam quia ex propos. 2. Minutiarum, eadem est proportio Numeratoris 223. ad denominatorem 284. quę minutię $\frac{227}{284}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 284. ad 223. ita 1. ad $\frac{227}{284}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod est propositum. Constat ergo secunda etiam pars propositionis.

a 8. quinti.

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiusuis descripti ad circuli aream maior est, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

b QVONIAM enim circumferentia cuiusuis circuli ad circumferentiam alterius circuli est, vt diameter ad diametrum: *c* erit quoque quadratum circumferentiæ ad quadratum circumferentię, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. *d* Sed vt quadratrum diametri ad quadratum diametri, ita est circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentię ad quadratum circumferentię; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentię, ad suum circulũ, vt quadratum alterius circumferentię ad suum circulum. Posita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentię illius circuli ad circulum maior est, quam 892. ad 71. minor verò, quàm 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentię cuiuslibet alterius circuli ad ipsum circulum maior erit, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

b 1. huius Num. 3.
c 22. sexti.
d 2. duodec.

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. descripti, ad suum circulum maior sit, quam 892. ad 71. minor verò, quam 88. ad 7. sic demonstrabimus. Quoniã si fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{71}{223}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. constat. fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentię ducta in $\frac{71}{446}$. semissem diametri inuentę producat aream circuli $\frac{71}{892}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum est. *e* Igitur quadratum circumferentię 1. quod est 1. ad veram aream circuli, quę minor est, quam $\frac{71}{892}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{71}{892}$. Vt autem 1. ad $\frac{71}{892}$. ita est, ex propos. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadratum circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71 quod est propositum. Vera ergo est prior propositionis pars.

e 8. quinti.

RVRSVS, quia si fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{7}{22}$. minor quam vera: fit vt $\frac{1}{2}$. semissis circumferentię ducta in $\frac{7}{44}$. semissem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{7}{88}$. vera minorem, vt ex iis, constat, quæ Num. 1. diximus. *f* Igitur quadratum circumferentię 1. quod est 1. ad aream veram circuli, quæ maior est, quam $\frac{7}{88}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{7}{88}$. Vt autem 1. ad $\frac{7}{88}$. ita est, ex propositione 2. Minutiarum, & con-

8. quinti.

& conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7. quod est propositum. Vera igitur etiam est posterior pars propositionis.

4. His ita demonstratis, sequuntur iam quatuor regulæ, per quas aream circuli propositi siue maiorem, siue minorem vera, vel ex sola diametro, vel ex sola circumferentia cognita conijcere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inuestigare.

Fiat vt 14. ad 11. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli veram maiorem. [a] Cum enim maior sit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam. [b] Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc est, area inuenta maior erit, quam vera. [a] *2. Num. 3.* [b] *10. quinti.*

II.

EX diametro aream circuli vera minorem inuestigare.

Fiat vt 284. ad 223. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem offeret. [c] Cum enim minor sit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quam 284. ad 223. sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad areâ inuentam: [d] Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc est, inuenta area erit minor, quam vera. [c] *2. Num. 3.* [d] *10. quinti.*

III.

EX circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

Fiat vt 892. ad 71. ita quadratum datæ circumferentiæ ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera maiorem indicabit. [e] Cum enim maior sit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad aream inuentam vt 892. ad 71. erit quoq; maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [f] ideoque vera circuli area minor erit, quam inuenta; hoc est, inuenta area maior erit, quam vera. [e] *3. Num. 3.* [f] *10. quinti.*

IV.

EX circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

Fiat vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ datæ ad aliud. Numerus namque,

qui

a 3.Num.3. *qui gignitur, erit area circuli minor, quam vera.* [a] Cum enim minor sit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. sit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoq; minor proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Ac proinde area circuli vera erit maior, quam inuenta: hoc est, area inuenta minor erit, quam vera.

b 10. quinti.

5. OMNES hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit esse quidē minorem tripla sesquiseptima, maiorem verò tripla superdecupartiente septuagesimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non sint, necesse est, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli superare, vel ab ea deficere, vt ex superioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis, perexigna sit, in magnis tamen circulis negligēda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream desiderat, assumat proportionem diametri ad circumferentiam verò propinquiorem, quàm posteriores Geometræ, pſertim Ludolphus à Collen, & Christophorus Gruēbergerus inuenerunt, vt sequitur.

Accuratior proportio diametri ad circumferentiā.

Diameter	Circumferentia maior quam vera
10000000000000000000.	31415926535897932384 7.

Diameter	Circumferentia minor quam vera
10000000000000000000.	31415926535897932384 6.

Ita vt proportio circumferentiæ ad diametrum maior, quam vera, denominetur ab hoc primo numero, quæ minor est, quam tripla sesquiseptima. Proportio verò minor, quam vera, denominetur ab hoc secundo numero quæ maior est, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas: qui denominatores habentur, si vtraque circumferentia per diametrum diuidatur.

$$\left\}\ \frac{31415926535897932384 7}{10000000000000000000.}\right.$$

$$\left\}\ \frac{31415926535897932384 6}{10000000000000000000.}\right.$$

Accuratior inuentio circumferentiæ ex data diametro: & diametri ex data circumferentia.

ITAQVE si fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num.2. ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiā vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferētia minor, quam vera, magis tamen ad veram accedens, quam illa Archimedis, quæ Nu.2. ex reg.2. inuenitur. E contrario verò, si fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrum, ita circūferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, prouenier dameter minor, quam vera. Vtraq; tamen diameter inuēta magis ad veram accedet, quā illa Archimedis, quæ Nu.2. per reg.3. & 4. inuēta fuit.

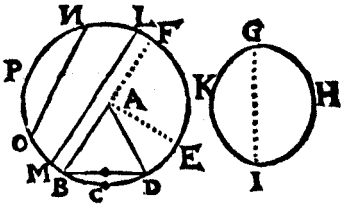
INVENTA

INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum est: si nimirum semidiameter in semicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in semissem semidiametri: vel deniq; tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera distabit, quam illa, quæ ex proportione Archimedis inuenitur. Sed quia difficilius est per magnos numeros calculum instituere, quam per minores, vsus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculum adhibeatur. Quãdo tamẽ desideratur accuratior calculus, vtendum erit posteriori hac proportione Ludolphi, præsertim in maioribus circulis.

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

CAPVT VIII.

1. SIT primum propositus sector circuli ABCD, comprehensus duabus semidiametris AB, AD, & arcu BCD. Huius aream ita explorabimus. Si tam semidiameter AB, nota sit, nimirum palmorum 7. quam arcus BCD, palmorum videlicet $3\frac{2}{3}$. ducatur semidiameter 7. in $\frac{11}{6}$. id est, in semissem arcus, Productus enim numerus $12\frac{5}{9}$. palm. erit area sectoris ABCD, vt demonstrabimus. Si autem neque semidiameter AB, neque peripheria BCD, data sit, mensuranda erit semidiameter aliqua mensura nota, & secundum eandem mensuram inuenienda circumferẽtia circuli per regulas antecedentis capit. nec non recta BD. Deinde fiat, vt AB, nota in assumpta mensura ad sinum totum 100000. ita BD, nota in eadem mensura assumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit rectam BD, cognitam in partibus sinus totius. Huius autem medietas sinus erit semissis arcus BD: ac proinde ex tabula sinuũ semissis BC, in gradib. nota erit, ideoq; totus arcus BD, nõ ignorabitur. Et quia tota circuli circumferentia nota facta est in assumpta mensura: si fiat vt grad. 360. ad totam circumferentia in assumpta mensura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoscetur idem arcus BD, in mensura assumpta. Quare, vt prius, area sectoris ABCD, reperietur. Possent quoque gradus in arcu BD, contenti inuestigari beneficio quadrantis alicuius in gradus diuisi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Nume. 10. tradita, vt minuta etiam cognoscantur, quando in arcu BD, vltra gradus aliqua particula superest.



AREAM porro sectoris produci ex semidiametro in semissem arcus sectoris, sic demonstro. Sit quadrans BE, & semicirculus BEF. [a] Et quoniam est, vt arcus BD, ad quadrantem BE, ita sector ABCD, ad sectorem ABDE: erit quoque ex scholio propos. 22. lib. 5. Eucli. vt arcus BD, ad quadruplum quadrantis BE, hoc est, ad totam circumferentiam, ita sector ABCD, ad quadruplum sectoris ABDE, hoc est, ad totum circulum. [b] Vt autem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita est BC, semissis arcus BD, ad BEF, semissem totius circumferentiæ. Igitur erit quoque vt BC, ad BEF, ita sector ABCD, ad totum circulum. [c] Sed vt BC, ad BEF, ita est rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub AB, BEF. Ergo erit quoq; sector ABCD, ad totũ circulum, vt rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub AB, BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circu-

[a] 33. sexti.
[b] 15. quinti.
[c] 1. sexti.

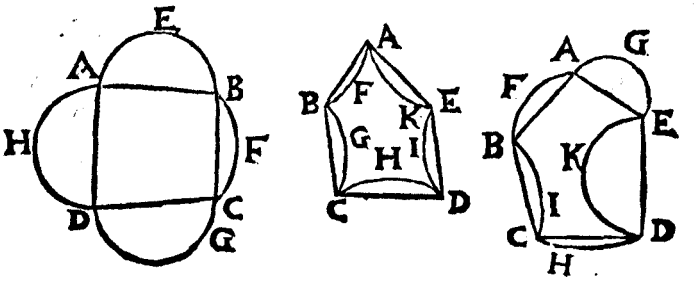
[a] 14. quinti. circulus æqualis sit rectangulo sub AB, BEF, [a] erit quoque sector A B C D, rectangulo sub AB, BC, æqualis. quod erat demonstrandum.

EADEM ratione procreabitur sector A B F D A, ex semidiametro A B, in semissem arcus BFD.

[b] 25. tertij. 2. SIT deinde segmentum BCD. [b] Inuento centro A, arcus B C D, & cognitis per aliquam mensuram lateribus trianguli A B D, & arcu B C D, in eadem mensura, vt Num. 1. diximus, inuestigetur tam area sectoris ABCD, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream segmenti propositi BCD.

3. SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus G H I, GKI. contenta. Ducta recta G I, inquiratur, vt Nu. 2. docuimus, vtriusque segmenti GHI, GKI, area. Summa enim ex duabus hisce areis conflata, erit area propositæ figuræ GHIK. Quod si segmenta GHI, GKI, sint æqualia, satis erit vnius aream inuestigare. Hæc namque duplicata dabit propositæ figuræ GHIK, aream.

4. NON aliter metiemur figuras ex varijs circulorum segmentis coagmentatas, siue omnes circumferentiæ extrorsus vergant, siue introrsum, siue partim introrsum, & partium extrorsum. Vt in tribus his figuris, si arcubus subtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & segmenta AEB, BFC, CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditũ est. Si enim hæc segmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia extrorsum tendant,



conflabitur area figuræ A E B F C G D H, ex quatuor arcubus compositæ.

IN secunda autem metiemur pentagonum ABCDE, per ea, quæ cap. 4. scripta sunt: Ex quo si dememus quinque segmenta introrsum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. scripsimus, cognoscentur, reliqua fiet area figuræ A F B G C H D I E K, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono A B C D E, adijciemus tria segmenta, A F B, A G E, C H D, extrorsum vergentia, & ex composito numero duo segmenta B I C, D K E, introrsum vergentia tollemus, vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compositæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5. SIT denique in prima figura huius cap. segmentum circuli L M O N, comprehensum duabus rectis L M, N O, & duobus arcubus L N, M O. Exploretur vt Num. 2. declaratum est, area vtriusque segmenti P L M, P N O. Minor enim area P N O, detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propositi segmenti L M O N.

6. VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appẽdicis loco regulas quasdam alias à nostro instituto non alienas subiungere.

I. DATA

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoſcere.

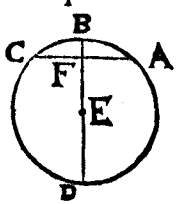
FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratum circumferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4. cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit circumferentiam vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt conſtat ex 3. reg. Num. 4. capit. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

FIAT rurſus, vt 223. ad 284. ita area propoſita ad aliud. Procreatus namque numerus erit quadratum diametri verò maius, vt ex 2. reg. Num. 4. cap. 7. perſpicuum eſt. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri verò minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur. Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

II.

DATO arcu cuiuſuis circuli, diametrum circuli in numeris inueſtigare.

SIT datus arcus A B C. Ducta chorda A C, ſectaque bifariam in F, ducatur per F, perpendicularis FB,[a] quæ per centrum circuli tranſibit,[b] ideoque rectangulum ſub C F, A F, hoc eſt, quadratum ex A F, æquale erit rectangulo ſub B F, & reliqua portione diametri. Si igitur A F, FB, per aliquam menſuram fiant notæ, & quadratus numerus rectæ A F, diuidatur per F B, prodibit reliqua portio diametri F D, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem menſura, in qua A F, FB, cognitæ ſunt.



[a] *coroll. 1. tertij.*
[b] *35. tertij.*

GEOMETRICE eadem portio F D, reperietur, ſi duabus F B, A F, inueniatur tertia proportionalis F D: propterea quod ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta.

III.

DATIS diametris duorum circulorum, vel circumferentiis: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum ſimilium, ſimiliterq; poſitarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter ſe habeant, cognoſcere.

QVONIAM circuli, & figuræ ſimiles ſimiliterque poſitæ, habent duplicatam proportionem diametrorum, vel circumferentiarum, & laterum homologorum: ſi maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in ſe ducatur, producetur denominator

duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt si diameter vnius circuli sit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diameter 14. & circumferentia 44. Diuisis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in se producit 16. denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem similem, similiterque positam, si latera homologa sint 56. & 14. vel 176. & 44.

IV.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ sint: Item pluribus figuris similibus similiterque positis, quarũ latera homologa sint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propositis æqualis sit. Item latus reperire, cuius figura similis, similiterque posita æqualis sit omnibus propositis figuris.

MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in se, & numeri producti in vnam summam colligantur. Radix enim quadrata huius summæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæsitum. Verbi gratia, si sint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa similium figurarum, similiterque positarum, 84. 3. 4. 12. atq; in se multiplicentur, gignentur numeri 7056. 9. 16. 144. quorum summa 7225. Radix ergo quadrata huius summæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia est 85. aut figura supra rectam 85. similis, similiterq; posita figuris datis, æqualis sit quatuor circulis, aut figuris propositis. Nam cum quadratum 7225. radicis 85. æquale sit quatuor quadratis 7056. 9. 16. 144. radicũ 84. 3. 4. 12. [a] Circuli autem eandem habeant proportionem, quam quadrata diametrorum: ac proinde quam quadrata circumferẽtiarum; quod circumferentiæ diametris sint proportionales. Item figuræ similes, similiterque positæ inter se sint, vt quadrata laterum homologorum, [b] propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiaue 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri circumferentiæue 84. 3. 4. 12. quam figura supra latus 85. similis similiterque posita, quatuor figuris, quarum lateta 84. 3. 4. 12. æqualis, quod est propositum.

a 2. duodec.

b 20. sexti.

V.

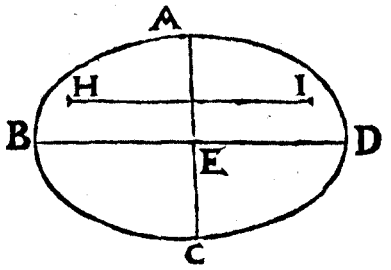
AREAM propositæ Elipsis indagare.

LVBET denique librum hunc quartum duobus problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracusano accutissimè inuenta sunt, ac demonstrata. Vnũ est de area Ellipsis; alterum de area Parabolæ. Sit ergo Ellipsis ABCD, cuius maior diameter BD, & minor AC, secans maiorem in E, bifariam. [c] Inueniatur HI, media proportionalis inter BD, & AC: & circuli circa diametrum HI, descripti area inquiratur, per ea, quæ c. 7. huius lib. scripsimus. Dico hanc aream areæ

c 13. sexti.

Ellipsis

Ellipsis ABCD, esse æqualem. [a] Quoniam enim est, vt BD, ad AC, ita quadratum ex BD, ad quadratũ ex ex HI. [b] Vt autẽ quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, ita est circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Igitur erit quoq;, vt BD, ad AC, ita circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Cũ ergo per propositionem 5. Archimedis de Conoidibus, & sphæroidib. sit quoq;, vt maior diameter BD, ad minorem AC, ita circulus diametri BD, ad Ellipsim ABCD; [c] habebit circulus diametri BD, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipsim ABCD. [d] Ideoque area circuli diametri HI, areæ Ellipsis ABCD, æqualis erit. quod erat demonstrandum.

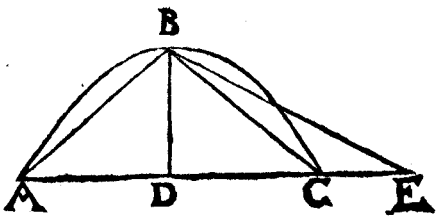


a *coroll. 20. sexti.*
b *2. duodec.*
c *11. quinti.*
d *9. quinti.*

VI.

AREAM propositæ parabolæ inuestigare.

SIT data parabola ABC, cuius basis AC, & axis BD, diuidens basem bifariam in D, & vertex B. Inscribatur parabolæ triangulum ABC, eandem habens basem, ac verticem cum parabola. Producta autem base AC, sumatur CE, tertia pars ipsius AC: ita vt AE, ipsius AC, sit sesquitertia. Iungaturque recta EB. Inquiratur denique per cap. 2. huius libr. area triãguli ABE. quam dico esse æqualem areæ parabolæ ABC. [e] Quoniã enim est, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Est autem AE, ipsius AC, sesquitertia, ex constructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, sesquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demõstrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, sit sesquitertia: [f] habebunt triangulum ABE, & parabola ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. [g] Ideoque area trianguli ABE, areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat ostendendum.



e *1. sexti.*
f *11. quinti.*
g *9. quinti.*

FINIS LIBRI QVARTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER QVINTVS.

AREAS

Solidorum, corporumue perſcrutans.

SVPEREST tertia magnitudinis ſpecies, quæ corpora ſolidaue cõplectitur. Et quia initio lib. 4. diximus, corpora metienda eſſe per corpuſcula cubica: ita vt quando dicitur corpus aliquod continere 1000. palmos, intelligendum ſit, 1000. cubos æquales, quorum ſinguli latera habent vni palmo æqualia, aream illius corporis explere: docendum iam erit hoc lib. qua ratione cuiuſcunque corporis area inueſtigetur, hoc eſt, numerus corpuſculorum cubicorum in eo contentorum. Præcipua autem corpora, de quibus acturi ſumus, ſunt Parallelepipeda, Priſmata, cubi, Pyramides, Fruſta pyramidum, Cylindri, Coni, Fruſta Conorum, ſphæræ, ſphærarum portiones, quinq; corpora regularia, videlicet Tetraedrum, Hexaedrum ſiue cubus, Octaedrum, Icoſaedrum, Dodecaedrum, quæ omnia lib 11. ab Euclid. definita ſunt. His adiungemus nonnulla corpora vacua, & alia quædam irregularia.

DE AREA PARALLELEPIPEDORUM, Priſmatum, & Cylindrorum.

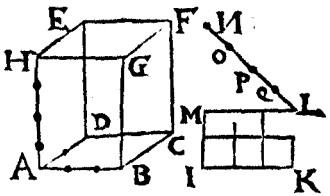
CAPVT I.

PARALLELEPIPEDVM [a] eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelæ ſunt, contenta. Huiuſmodi figuram ſolidam exprimit columna aliqua quadrilatera vniformis craſsitiei. Vt figura ſolida ABCDEFGH, in qua tam duo plana oppoſita ABCD, EFGH, quam duo

[a] 30. de fin. vndec.

duo ADEH, BCFG, & duo ABGH, DCFE, parallelogramma sunt inter se parallela, & æqualia, dicitur parallelepipedum. Huius area ita inuestigabitur. Sit primò propositum parallelepipedum rectangulum habens omnia sex parallelogramma rectangula, ac proinde omnes eius angulos solidos rectos: sitque longitudo basis AB, palm. 3. latitudo AD, palm. 2. & altitudo AH, palm. 4. Ducatur ergo latitudo 2. in longitudinem 3. vt producatur basis palmorum 6. quadratorum, vt lib. 4. cap. 1. traditum est. Deinde basis hæc 6. palmorum ducatur in altitudinem 4. Numerus enim productus 24. indicabit in parallelepipedo contineri 24 cubos, quorũ singula latera singulos palmos complectuntur, quod ita planum faciemus. Exponatur seorsum rectangulum IKLM, æquale basi ABCD, intelligaturque altitudo perpendicularis LN, 4. palm. Si igitur ducatur latus IM, palm. 2. in IK, palm. 3. producetur area basis palmorum quadratorum 6. supra quæ si concipiantur extructi 6. cubi æquales, implebunt ij parallelepipedum vsq; ad primum palmum LQ, altitudinis. Si deinde alij 6. cubi æquales prioribus superimponantur, implebitur parallelepipedum vsq; ad secundum palmum altitudinis QP. Et alij 6. cubi æquales parallelepipedum vsq; tertium palmum PO, altitudinis implebunt. Denique alij 6. cubi appositi totum parallelepipedum explebunt vsque ad quartũ altitudinis palmum ON. Constat ergo in toto parallelepipedo existere toties 6. cubos palmares, quoties palmus in altitudine continetur, hoc est cubos 24.

Area parallelepipedi rectãguli.



2. INTELLIGATVR deinde parallelepipedum ABCE, cuius bases ABCD, EFGH, sint Rhombi, vel Rhomboides, ac latera AH, DE, DE, BG, CF, ad basem ABCD, recta, ita vt altitudo sit AH. Primum ergo inquiratur area basis ABCD, vt lib. 4. cap. 3. Num. 1. docuimus. Hæc deinde in altitudinem AH, ducatur. Productus namq; numerus erit parallelepipedi area. Nam si fiat rectangulum IL, basi AC, æquale, & supra illud concipiatur parallelepipedũ rectangulũ, cuius altitudo LN, altitudini AH, sit æqualis *a* erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius basis rectangulum IL, & altitudo LN, producatur ex altitudine LN, in basem IL, vt ostensum est, producetur quoque parallelepipedum ACE, ex altitudine AH, in basem AC, basi IL, æqualem.

Area parallelepipedi nõ rectanguli.

a 31. duodec.

SI nullum latus parallelepipedi rectum est ad basem, demittenda erit ex aliquo angulo supremi parallogrammi ad planum, in quo basis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaque diligenter metienda. Si namq; area basis inuestigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando est rectangula, vel per cap. 3. eiusdem lib. quando non est rectangula, eaque in altitudinem inuentam ducatur, producetur area propositi parallelepipedi. Nam si supra basem intelligatur parallelepipedum rectum eiusdem altitudinis cum proposito parallelepipedo, *b* erunt duo hæc parallelepipeda inter se æqualia. Constat autẽ ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu basis in altitudinem.

b 29. vel 30. vndec.

3. CVBVS, qui etiam parallelepipedum quoddam est rectangulum, eodem modo producitur, nimirum ex latere in se, & iterum in productum. Vt si latus cubi sit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000.

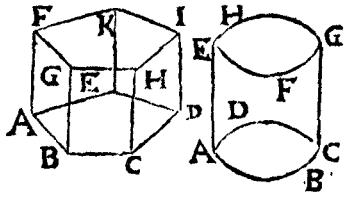
Area cubi.

c 13. defin. vndec.

4. *c* PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo

ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia verò parallelogramma. Vt eſt ſolidum ADF, cuius baſes ſunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram ſolidam repræſentat columna aliqua laterata æqualis craſsitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, ac parallelę, ſiue hæ triangula ſint, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Ex quo fit, vt priſma quodcunque ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur. Vt propoſitum priſma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet priſmatis inuenietur, ſi area baſis inquiratur, atque in altitudinem ducatur.

Area priſmatis, tam recti, quam obliqui.



Nam ſi concipiatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum priſmate, habens baſem, rectangulũ baſi priſmatis æquale; [a] erit hoc parallelepipedum priſmati ęquale. Cũ ergo parallelepipedũ producatur ex ſua baſe in altitudinem, procreabitur quoque priſma ex multiplicatione ſuę baſis in altitudinem. Area porro baſis cognoſcetur ex iis, quæ lib. 4. ſcripſimus, & altitudo priſmatis, ſi eius latera recta non ſint ad baſem, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepidi inueſtigandam eſſe præcepimus.

a 2. coroll. 7. duodec.

5. CYLINDRVS eſt figura ſolida æqualis craſsitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidiſtantibus, & rotunda ſuperficie inter ipſos interiecta continetur, inſtar columnę cuiuſpiam rotundæ. Vt eſt ſolidum ACH, cuius baſes ſunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoque area procreabitur ex multiplicatione baſis, ex cap. 7. lib. 4. inuentę in altitudinem. quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum eſt. Nam ſi verbi gratia baſis Cylindri circularis ABCD, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares ſupra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vſque ad primum palmum altitudinis; at 20. cubi eundem explebunt vſque ad ſecundum palmum, &c. Quod ſi Cylindrus obliquus ſit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularem ex ſuperiore baſe demiſſam ad planum, in quo inferior baſis exiſtit, atque in hanc altitudinem area baſis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propoſiti, [b] cum æqualis ſit Cylindro recto eandem cum illo baſem, & altitudinem habenti.

b coroll. 11. duodec.

DE AREA PYRAMIDVM & Conorum.

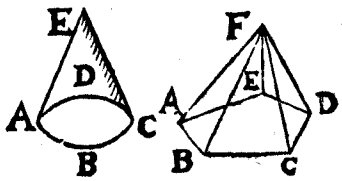
CAPVT II.

1. PYRAMIS [c] eſt figura ſolida, quę planis continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta. Vt figura ſolida ABCDEF, ad punctum F, conſtituta ſupra baſem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque

c defin. 12. vndec.

quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, tot nimirum, quot in base sunt latera, dicitur pyramis.

CONVS autem est figura solida rotunda ad vnum punctum constituta, supra basem circularem, instar pyramidis rotundæ, qualis est figura ABCDE. *Area pyramidis, & coni.*



TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione basis in tertiã partem altitudinis. Cũ enim, vt in præcedenti cap. ostendimus, ex base in totam altitudinem gignatur prisma vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem; *a* producetur ex eadem base in tertiam partem altitudinis tertia pars illius prismatis, vel Cylindri. *b*, Cum ergo pyramis sit tertia pars illius prismatis, *c* & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidẽ, quam Conum produci ex base in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, si basis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, esse quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem basis: *d* quod hac ratione tertia pars prismatis, vel Coni gignatur.

a *schol. 14. duodec.*
b *corol. 7. duodec.*
c *10. duodec.*
Area pyramidis, & coni aliter.
d *1. schol. 7. duodec. & 11. duodec.*

2. BASIS porro pyramidis, si triangularis est, cognoscetur, vt lib. 4. 2. traditum est: si multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. scripsimus. Basis autem Coni inuestigabitur ex cap. 7. eiusdem lib. At verò altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, si in vertice statuatur planum basi æquidistans, ab eoque ad planum, in quo basis, perpendicularis demittatur, eaque exquisitè mensuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari possit Geometrice, si inclinatio vnius lateris ad basem, & magnitudo quoque eiusdem lateris cognoscatur: quia tamen hęc ipsa exploranda sunt materialiter per aliquod instrumentum, præstat ipsam quoque altitudinem statim per instrumentum exquirere, pręsertim per instrumentum partium, quod lib. 1. cap. 1. descripsimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior sit, procedatq; ex inclinatione, ac latere per instrumentum cognitis. *Altitudo pyramidis, & coni.*

3. ATQVE hæc, quę diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Conisque rectis, quam de obliquis, & Scalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAMIDIS, & Coni.

CAPVT III.

1. FRVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod alij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo frustum pyramidis ABCDEF, cuius bases ABC, DEF, sint parallelæ, & similes, & cuius area inuestiganda sit. Quod duobus modis fieri potest. Primũ cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinẽ HG, perpendicularem ad basem (licet pyramis actu nõ sit integrata) ita inueniem[e]. Quoniã est, vt ab AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoq; diuidẽdo (sumpta AS, æquali

e *4. sexti.*

a 17. vnde. æquali ipsi DE) vt SB, ad DE, ita AD, ad DH. *a* Quia vero plana parallela ABC, DEF, secant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, basium ad DE, ita GI, altitudo Frusti pyramidis (quæ cognoscetur per lineam perpendicularem demissam ad basem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, si opus est,) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quo circa si per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam abscissæ pyramidis DEFH, & hęc ab illa dematur, reliquum fiet Frustum ABCDEF.

Area frusti pyramidis.

2. NON aliter frustum Coni ABCD, inuestigabitur, vt patet, si integer Conus intelligatur ABH, &c.

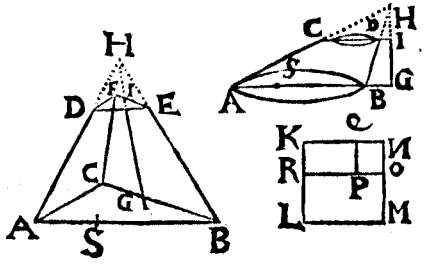
Area frusti coni.

3. ALIO modo idem frustum tam Pyramidis, quam Coni cognoscemus, etiamsi neque pyramis, neque conus integretur. *c* Fiant quadrata KLMN, NOPQ, basibus ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata KM, NP, superficies media proportionalis, qualis est rectangula figura OK, producto latere OP, ad R. *c* Quoniam enim est, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP. *e* estque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale est inter quadrata KM, NP. Quamobrem, si radix quadrata basis ABC, notæ, id est, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam basis DEF, notę, hoc est, in latus NO, quadrati NP, producetur area rectanguli NR.

b 14. secundi.

c 1. sexti.

d 7. quinti.



IAM vero ducatur GI, altitudo frusti in summam ex quadrato KM, hoc est, ex base ABC, & quadrato NP, siue base DEF, & superficie NR, media proportionali inter bases, vel dicta quadrata collectam. Productus enim numerus triplus erit frusti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti frusti. *e* Quoniam enim prisma, quod fit ex GH, altitudine pyramidis in basem ABC, siue quadratum KM, triplum est pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH, in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiusdem. *f* Est aũt & ablatum paralellepipedum factum ex IH, in basem DEF, hoc est, in quadratum NP, triplum ablatæ pyramidis DEFH, *g* Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum iis, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit frusti reliqui ABCDEF.

e 7. duodec.

f 7. duodec.

g 5. quinti.

h 7. quinti. 4. *h* QVIA verò æquales superficies ABC, KM, ad superficies æquales DEF, NR, eandem habent proportionem, erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP. *i* Ideoque latus AB, ad latus DE, erit, vt latus KN, ad latus NQ, & diuidendo (subtracta recta AS, æquali ipsi DE, ex AB,) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Est autem, vt Num. 1. demonstrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ, ad QN, ideoque vt MO, ad ON, ita GI, ad IH. *k* Sed vt KQ, ad QN, ita est KP, ad PN: Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit

i 22. sexti.

k 1. sexti.

quoque

quoque, vt GI, ad IH, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hisce magnitudinibus ad numeros, [a] erit numerus factus ex GI, primò in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH, secundò in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primò in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, secundò in MR, tertium: [b] Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH, in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi posteriores tres tripli sunt frusti pyramidis ABCDEF, vt ad fin. Num. 3. demonstrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudine frusti in KM, & in PN, & in RN, hoc est, in summam ex KM, basi ABC, æquali, & ex PN, basi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter bases collectam, tripli erunt eiusdem frusti: ideoque tertia eorum pars æqualis erit areæ frusti. quod erat demonstrandum.

[a] 19. sept.

[b] 2. pronunc.

5. EADEM ratione frustũ Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in summam ex base AB, & base CD, & superficie media proportionali inter bases collectam: vt constat, si concipiantur quadrata KM, NP, basibus æqualia, & proinde superficies RN, media proportionalis inter bases, &c.

SCHOLIVM.

1. SI ea, quæ hactenus dicta sunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis crassitiei, tanquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem sit, quæ longitudo muri: latitudo verò eadem quæ muri latitudo: altitudo denique, siue profunditas eadem, quæ altitudo muri.

Soliditas muri.

EADEMQVE ratione metiemur frustum alicuius marmoris, vel alterius saxi, tanquam prisma quodpiam, si vniformem habeat crassitiem, lateraque ad bases sint recta.

NON aliter saccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur, plus minus. Nam cum saccus non sit accuratus Cylindrus, vera eius mensura haberi non potest.

Soliditas alicuius frusti marmoris.

2. RVRSVS per caput 2. aceruum tritici, tanquam conum aliquem, eodem modo, plus minus, metiri licebit. Itaque si cognoscemus, quot grana, vel libræ tritici in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, multiplicenturque grana, vel libræ vnius cubiti in numerum cuborum, qui in toto sacco, vel aceruo reperti sunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem sacco, vel aceruo existentium.

Capacitas saccitritici.

Capacitas aceruitritici.

SIC etiam, si detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri, sciemus eius capacitatem, si eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non secus, ac si solida figura esset, metiemur: ita vt si cognitum fuerit, quot mensuræ aquæ alterius ue liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non possit, quot mensurę in cubis in toto vase contentis comprehendantur, si nimirum mensuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vase comprehendi inuenimus.

Capacitas vasis excauati.

4. DENIQVE si desideretur soliditas alicuius vasis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, seu prismatis, Cylindriue, me-

Soliditas vasis excauati. tienda erit vtraque figura tum interior, tum exterior. Si namque illa ex hac detrahetur, reliqua fiet soliditas vasis excauati.

DE AREA QVINQVE CORporum regularium.

CAPVT IV.

1. QVINQVE tantum sunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icosaedrum, vt in scholio propos. 18. libr. 13. Euclid. demonstrauimus: quæ sic ab Euclide libr. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta. qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta. qualem refert cubus, seu parallelepipedum basium quadratarum, in quo omnes tres dimensiones sunt æquales.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM est figura solida sub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Area cubi, & Tetraedri. 2. CVBI siue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in se, & iterum in productum, cap. 1. Num. 3. docuimus. Item pyramidem, seu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanicè cognoscetur, vt c. 2. Num. 2. traditum est) in tertiam basis partem: vel ex eius base in tertiam partem altitudinis, declarauimus cap. 2. Num. 1. Quod si Geometricè inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum diametri sphæræ Tetraedrum ambientis est, vt 2. ad 3. [a] quod diameter sit potentia sesquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratũ lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri sphærę, eiusque quadrati quadrata radix diametrum ipsam exhibebit, [b] cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Altitudo Tetraedri.
[a] 13. tertiidecimi.
[b] 2. coroll. 13. tertiidec.

3. [c] QVONIAM verò Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum à latere descriptum: si vtriusque pyramidis inuestigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata sit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, si quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur. quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiusdem diametrum, est parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: [d] propterea quod semissis illius parallelepipedi eandem habens basem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla est vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quę à diametro sphærę, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, si ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur;

[c] 2. coroll. 14. tertiidec.
Area Octaedri.
[d] coroll. 7. duodec.
Diameter Octaedri.

tur; [a] quod tam quadratum ex diametro quadrati descriptum duplum sit quadrati lateris, [b] quam quadratum diametri sphæræ quadrati lateris Octaedri. Semissis verò huius diametri, altitudo erit vtriusuis Pyramidis. Quare si hęc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id est, semissis Octaedri; ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

a *schol. 47. primi.*
b *14. tertiidec.*

4. DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, necesse est, & aream basis pentagonæ inuestigare ex latere dato, per ea, quę lib. 4. cap. 5. scripsimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex superiori plano producto demittatur ad planum basis oppositæ linea perpendicularis: Huius enim semissis diligenter inquisita in partibus lateris Dodecaedri, per instrumentum partium lib. 1. cap. 1. constructum, dabit pyramidis altitudinem quęsitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam tamen Geometricè ita quoq; deprehendemus. [c] Quia cubus in Dodecaedro descriptus eadem sphęra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiusque latus vnum angulum Pentagoni Dodecaedri subtendit; ideoq; eadem diameter est sphærę, Dodecaedri, & cubi: [d] Si recta subtendens angulum pentagoni inuestigetur, habebitur latus cubi: [e] Et quia diameter sphærę potentia est tripla lateris cubi, si quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, habebitur quadratum diametri sphærę, vel cubi, cuius radix quadrata ipsam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiusdem centra basium oppositarum coniungens se in centro secent bifariam, venabimur semissem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quęsitam, hac ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est semidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proximè cognita sit, latera verò circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Dodecaedri circumscribentis. Cum ergo semidiameter hæc cognosci possit, ex iis, quę lib. 4. cap. 5. docuimus, [f] cognoscetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. Porrò semidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis ita quoque reddetur nota. Quoniam latus pentagoni subtendit in eo circulo grad. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus sinus totius. Si ergo fiat, vt latus pentagoni in partibus sinus totius cognitum ad idem latus notum ex hypothesi, ita latus Decagoni in iisdem partibus sinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in mensura lateris pentagoni cognitum. [g] Et quia latus pentagoni potest latera decagoni, & Hexagoni eiusdem circuli, si quadratum lateris decagoni proximè cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id est, semidiametri, ideoque eius radix quadrata semidiametrum exhibebit notam.

Area Dodecaedri.
c *8. quinti dec.*
d *12. triang. rectil.*
e *15. tertiidec.*
Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Dodecaedri.
f *3. triang. rectil.*
Semidiameter circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.
g *10. tertiidec.*

5. POSTREMO quia ductis ex centro Icosaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icosaedrum in 20. pyramides triangulares ęquales diuiditur; si area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icosaedri area ex illis 20. pyramidibus conflata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inuestiganda primum erit area basis triangularis, ex iis, quę lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. scripsimus, Deinde altitudo pyramidis mechanicę,

Area Icosaedri.

hoc pacto. Ex superiori plano producto, hoc est, ex inferiori superficie alicuius plani, quod corporis supremæ basi imponeretur, ad planum basis oppositæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accuratè dimensa altitudinem Icosaedri dabit, eiusque semissis altitudinem pyramidis, quæ quęritur. Quam Geometricè ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5. lateribus Icosaedri, inuestigeturque eius semidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumscribente, in partibus, in quibus latus Icosaedri datum est, hac scilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis semidiameter dicti circuli, latera verò semissis lateris pentagoni, hoc est, Icosaedri, & perpendicularis è centro ad punctum medium dicti lateris demissa. Ita namque cognoscetur semidiameter, ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita sunt. Latus verò Decagoni in eodem circulo descripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4. dictum est. [a] Et quia diameter sphærę, siue Icosaedri potentia est quintupla inuentæ semidiametri; si quadratum semidiametri inuentę quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icosaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & semidiameter Icosaedri nota erit. Vel aliter. [b] Quoniam diameter sphærę, id est, Icosaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icosaedri compositum circumscribente: erit summa collecta ex semidiametro illius circuli, & duobus lateribus decagoni, diametro Icosaedri æqualis: ideoque rursus semidiameter Icosaedri nota erit.

[a] 1. corol. 16. tertiidec.

[b] 2. corol. 16. tertiidec.

Error Orontii.

HINC patet, Orontium cum illis, qui ipsum sequuntur, decipi, qui putat, ex semisse semidiametri illius circuli, & ex latere decagoni componi semiaxem Icosaedri, hoc est, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius basis triangulum Icosaedri, & vertex centrum sphæræ. Nam vt ex iis constat, quę proximè scripsimus, eo modo componitur semidiameter sphærę, vel Icosaedri, quæ maior est prędicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumscribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Num. 4. diximus, si nimirum quadratum lateris decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icosaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: [c] propterea quod latus pentagoni potest latera decagoni, & hexagoni eiusdem circuli.

[c] 10. tertiidec.

Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Icosaedri.

IAM verò cognita semidiametro Icosaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius basis est triangulum Icosaedri, & vertex eiusdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icosaedri, eiusdemque altitudo sese in centro secant bifariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius basis est diameter Icosaedri proximè cognita, latera verò circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & semidiameter circuli basem Icosaedri circumscribentis. Cum ergo hęc semidiameter cognosci possit ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [d] cognoscetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. Semidiameter porro circuli basem triangularem Icosaedri circumscribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. [e] Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum est semidiametri illius circuli; si quadratum lateris Icosaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata semidiameter quæsita.

[d] 3. triang. rectil.

[e] 12. tertiidec.

Semidiameter circuli triangulum Icosaedri circumscribentis.

6. EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icosaedro exposita est, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inuestigare licebit, si, lineæ ex eorum centris ad omnes angulos ductis, in pyramides æquales distribuantur. Tetraedrum nimirum

rum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, si ea in numerum basiũ corporis regularis ducatur, insurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipsius, vt ducta in tertiam basis partem pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro sic reperietur. [a] Quoniam diameter sphæræ Tetraedrum ambientis potentia est sesquialtera lateris Tetraedri: si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri sphæræ, cuius radix quadrata ipsam diametrum ostendet. [b] Huius autem diametri sexta pars, altitudo erit pyramidis quæsita, recta videlicet perpendicularis è centro sphæræ in basem Tetraedri demissa.

Area Tetraedri, cubi & Octaedri aliter inuenta.

a 13. tertij dec.

b 2. corol. 13. tertiidec.

Perpendicularis è centro sphæræ ad basem Tetraedri, cubi, & Octaedri.

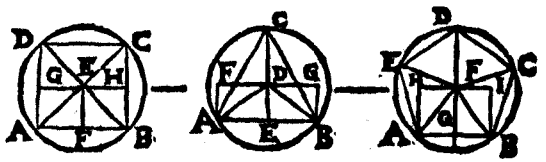
In cubo verò dicta altitudo semissi lateris cubi æqualis est, quod perpendicularis è centro sphæræ in basem cubi demissa æqualis sit semissi lateris cubi, vt liquet.

In Octaedro denique eadem altitudo sic deprehendetur. [c] Quoniam diameter sphæræ est potentia dupla lateris Octaedri: si fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri sphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoq; semidiameter non ignorabitur. Hinc altitudo pyramidis quæsita, hoc est perpendicularis è centro sphæræ in basem Octaedri demissa, elicietur ea ratione, quã in Icosaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

c 14. tertiidec.

7. Non videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinq; corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonstrata est, & est eiusmodi. Primum quæratur superficies conuexa cuiusque corporis, ex eius latere cognito, etiamsi nullius basis area inuestigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet basis cuiusuis corporis diuiditur per rectas ex centro basis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in base continentur: si ducatur hic numerus triangulorum in numerum basium corpus regulare, quod propositum est, ambientium, habebitur numerus omnium huiusmodi triangu-

In quot triangula diuidantur omnes bases cuiusuis corporis regularis ex earũ centris.



lorũ in tota superficie conuexa contentorũ. Vt quia basis quadrata cubi ABCD, diuisa est in quatuor triangula ex centro E, continebuntur 24. eiusmodi triangula in 6. basibus. Item quia basis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icosaedri ABC, ex centro D, distributa est in 3. triangula, existent in 4. basibus Tetraedri 12. eiusmodi triangula, & 24. in 8. basibus Octaedri, & 60. in 20. basibus Icosaedri. Denique quia basis pentagona Dodecaedri ABCDE, resoluta est ex cẽtro F, in 5. triangula, cõplectentur 12. bases Dodecaedri 60. eiusmodi triãgula.

Deinde quia rectangulum contentum sub perpendiculari è centro basis in latus demissa, & sub vno latere, æquale est duobus eiusmodi triangulis, [d] propterea quod vnius duplum est: erit in cubo rectangulum illud duodecies sumptum toti superficiei cubi æquale. In Tetraedro verò sexies sumptum to-

d 41. primi.

Superficies regularium corporum & perpendiculares basium.

tam Tetraedri superficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti superficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icosaedro tricies sumptum superficiei toti tam Dodecaedri, quam Icosaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis EF, in base cubi æqualis est semisi lateris cubi AB, [a] Quoniam enim perpendicularis EF, secat latus AB, bifariam, [b] estque ipsi AF, æqualis, quod anguli FAE, FEA, semirecti sint; constat EF, semissi lateris cubi esse ęqualem. Perpendicularis autem DE, in base Tetraedri; Octaedri, & Icosaedri, [c] semissis est semidiametri CD. [d] Cum ergo latus AC, sit potentia triplum semidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. ita quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum semidiametri CD, cuius radix quadrata ipsam CD, indicabit, eiusque semissis perpendicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in base Dodecaedri e semissis est summæ ex semidiametro AF, & latere decagoni circuli ABD, collectæ, quod latus decagoni cognoscetur, vt ad finem Nume. 4. traditum est.

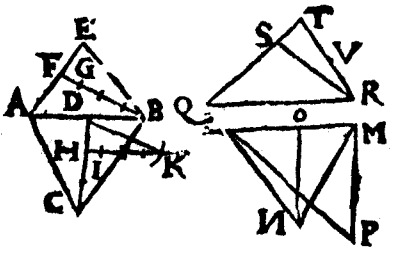
[a] *schol. 26. primi.*
[b] *6. primi.*
[c] *2. coroll. 12. tertijdec.*
[d] *12. tertijdec.*
[e] *1. quartidec.*

Area corporum regularium aliter inuenta.

[f] QVIA verò solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscumque corporis regularis ad aliquam eius basem ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, ipsi corpori æquale est; si inuestigetur superficies conuexa dati corporis regularis, vt proximè docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipsum per rectas è centro ipsius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt supra tradidimus) hoc est, perpendicularis è centro corporis in eius basem demissa, procreabitur area, siue soliditas ipsius corporis. Quæ etiam obtinebitur, si dicta altitudo ducatur in totam superficiem conuexam, & producti tertia pars capiatur.

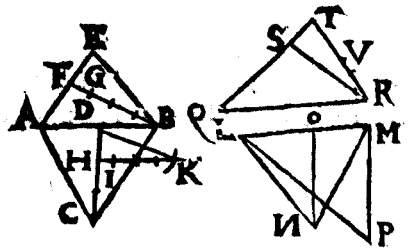
[f] *schol. 20. tertijdec.*

8. ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis consistit fermè tota in altitudine pyramidis basem habentis eandem cũ corpore, verticem autem in centro sphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros molestissima est, propter radices surdas, & numeros fra-



ctos, quorum numeratores, denominatoresq; nimis magni sunt, adeo vt operæ pretium videatur esse eandem mechanicè explorare, vt ad initium Num. 2. 4. & 5. diximus, præsertim si exquisita diligentia in ea per instrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia non semper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanicè eam altitudinem consequi possimus, libet rationem quãdam nouam, eamque facillimam hic præscribere, qua sine molestia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamsi corpus regulare non adsit,

adsit, sed solum eius latus datum sit ac cognitum. Sit ergo primo datum latus Tetraedri AB, quotcunque palmorum, construaturque triangulum æquilaterum ABC, pro base Tetraedri: Diuiso autem latere AB, bifariam in D, iungatur recta CD, [a] quæ ad AB, perpendicularis erit. Constructo quoque Isoscele ABE, cuius vtrumque latus rectæ CD, æquale sit, demittatur ad AE, perpendicularis BF, cuius quarta pars sit FG. Dico FG, altitudinem esse vnius pyramidis, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphæræ Tetraedro circumscriptæ ad vnam basem deductæ. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, E, angulus est inclinationis vnius basis Tetraedri ad alteram, estque EB, perpendiculari CD, æqualis: si triangulum BEF, concipiatur circa EF, moueri, donec rectum sit ad basem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. [b] Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias semidiametri sphæræ continet: si semidiameter ponatur 6. erit altitudo BF, 4. & semidiameter 3. [c] Cum ergo altitudo vnius pyramidis sit tertia pars semidiametri, erit BG, semidiameter, & GF, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Isosceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta dH, tertia parte perpendicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, secetur in K. Dico HI, quartam partem ipsius HK, esse altitudinem vnius pyramidis. Erecto enim triangulo DHK, supra basem Tetraedri ABC, cadet punctũ K, in verticem Tetraedri, quod DK, ducta æqualis sit perpendiculari ex medio latere ad angulum basis oppositum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro sphæræ in H, centrum basis cadens. [d] Nam DH, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.



[a] *schol. 26. primi.*

[e] *Altitudo pyramidis Tetraedri.*

[b] *2. corol. 13. tertij dec.*

[c] *2. corol. 13. tertij dec.*

[d] *2. corol. 13. tertij dec.*

Sit deinde datum latus Octaedri LM, supra quod construatur triangulum æquilaterum LMN, pro base Octaedri. Diuiso autem latere LM, bifariam in O, iungatur recta NO, [e] quæ ad LM, erit perpendicularis. Constructio iam Isoscele QRS, supra basem QR, æqualem diametro sphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri descripti, (quæ habebitur, si educatur perpendicularis MP, lateri LM, æqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel sphæræ.) vtrumque laterum QS, RS, æquale habens perpendiculari NO; ducatur ex R, ad QS, perpendicularis RT, quæ bifariam secetur in V. Dico TV, esse altitudinem pyramidis quæsitam, hoc est, æqualem esse perpendiculari ex centro sphæræ ad vnam basem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius basis ad alteram indicat, estque obtusus, erit perpendicularis RT, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id est, perpendiculari basium Octaedri oppositarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perspicuum est: Ac propterea eius semissis TV, altitudo erit pyramidis q̃sita, quod altitudo Octaedri bifariam secetur in centro.

[e] *schol. 26. primi.*

[e] *Altitudo pyramidis Octaedri.*

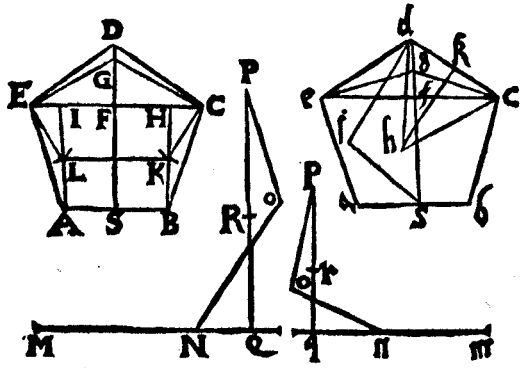
Sit detur latus cubi, siue hexaedri, erit eius semissis altitudo pyramidis quæsita: propterea quod cubi altitudo eiusdem lateri sit æqualis.

[e] *Altitudo pyramidis cubi.*

DATVM

DATVM iam sit AB, latus Dodecaedri, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, pro base Dodecaedri. Iuncta autem recta CE,[a] quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipso sphæra descripti, [b] atque lateri AB, parallela: secetur AB, bifariam in S, connectaturque recta SD. [c] quæ angulum CDE, bifariam secabit: [d] ac proinde & rectam CE, bifariã, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erunt. Fiat supra CE, Isosceles CGE, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, sit æ-

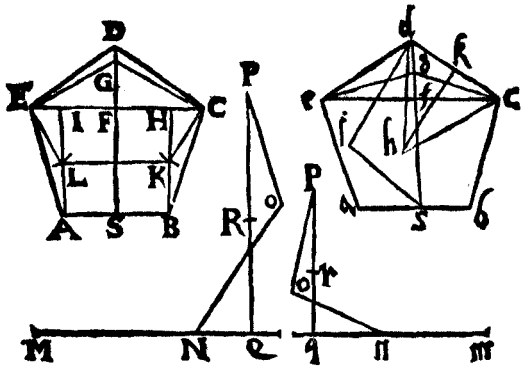
a 2. coroll. 17. ertijdec.
b coroll. 8. quintidec.
c schol. 12. quarti.
d 4. primi.



quale. Sumptis quoque FH, FI, semissi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, secentur in K, L, iunganturq; rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipsi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulũs NOP, ponaturque OP, lateri AB, æqualis: ac tandem demittatur ex P, ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam secetur in R. Dico RQ, altitudinem esse pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypsicle demonstrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius basis ad alteram metitur, si MN, concipiatur esse perpendicularis, quæ in base infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppositi ducitur, respondebit NO, perpendiculari, quæ in pentagono ad illam basem inclinato ex eodem medio puncto ad oppositum angulum ducitur: propterea quod angulum MNO, angulo inclinationis CGE, & rectam NO, perpendiculari SD, æqualem posuimus. Recta autem OP, refert latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulũ supremæ basis positũ: ꝓpterea q; recta OP, posita est æqualis lateri Dodecaedri, & angulus NOP, angulo ELK, qui quidem æqualis est illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo supradicti pentagoni inclinati ad basem in medium punctum lateris oppositi ductæ, vt constat, si vna basis cubi Dodecaedro inscripti intelligatur dicto lateri Dodecaedri substrata, ita vt duo latera basis cubi subtendant duos angulos duorum pentagonorũ, quorum vnum ad basem Dodecaedri inclinatum est, alterum verò supremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta CE, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum basis cubi connectentis. Rectæ autem EL, CK, respondebunt rectis ex eisdem punctis medijs laterum illorum basis cubi, ad angulos prædictorũ pentagonorum ductis: Ac proinde angulus ELK, æqualis erit ei, quem perpendi-

cularis

cularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano supremæ basis existere, atque idcirco perpendicularem



PQ ad planum basis per MN, ductum demissam, æqualem esse altitudini Dodecaedri; eiusque semissem RQ, altitudini vnius pyramidis pentagonæ esse æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, si Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.

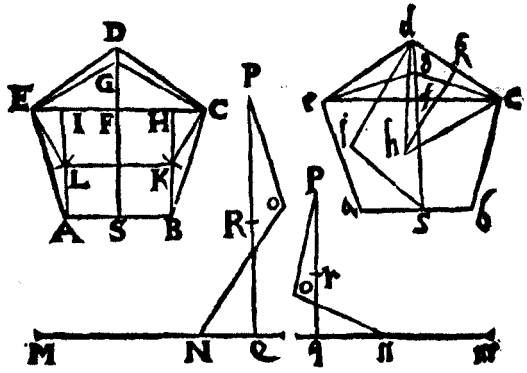
DENIQVE datum sit Icosaedri latus a b, supra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum a b c d e, pro base pyramidis ex quinque basibus Icosaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, secetur latus a b, in f, bifariam, & recta ducatur f d, quæ vt in Dodecaedro ostendimus proximè, perpendicularis erit ad vtramque a b, c e. Fiat supra latus Icosaedri c d, triangulum æquilaterum c d h, pro base vna Icosaedri; & diuiso latere c d, bifariam in k, iungatur recta h k,[a] quæ ad c d, erit perpendicularis. Præterea supra c e, fiat Isosceles c g e, cuius vtrumque laterum c g, e g, perpendiculari h k, sit æquale. Post hæc supra f d, constituatur triangulum f d l, cuius latus f l, perpendiculari h k, & latus d l, lateri Icosaedri a b, sit æquale. Denique angulo c g e, fiat æqualis angulus m n o, & recta n o, perpendiculari h k, æqualis: Item angulus n o p, angulo d l s, rectaque o p, lateri Icosaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem p q, ad m n, demissam, esse altitudinem Icosaedri, eiusque semissem r q, altitudinem vnius pyramidis in Icosaedro. Quia enim, vt ex Hypsicle ad finem Euclidis demonstrauimus, angulus c g e, metitur inclinationem vnius basis ad alteram, si m n, concipiatur esse perpendicularis, quæ in base infima Icosaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppositi ducitur, respondebit n o, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam basem inclinato ex eodem medio pũcto ad angulum oppositum ducitur: propterea quod angulum m n o, angulo inclinationis c g e, & rectam n o, perpendiculari h k, æqualem fecimus: Recta verò o p, referet latus Icosaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum supremæ basis positum; propterea quod recta o p, posita est æqualis lateri Icosaedri, & angulus n o p, angulo d l s:[b] qui quidem æqualis est illi, quẽ dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo supradicti trianguli inclinati ad basem, in medium punctum lateris oppositi ducitur. Est enim recta d s, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, & latera s l, d l, æqualia perpendiculari

a *schol. 26. primi.*

Altitudo pyramidis Icosaedri.

b *8. primi.*

in triangulo inclinato, & lateri Icosaedri inter angulum supremum pentagon prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano supre-



mæ basis existere: ac, inde perpendicularem p q, ad planũ basis per m n, ductũ demissam, æqualẽ esse altitudini Icosaedri, eiusq; semissem r q, altitudini vnius pyramidis trigoni esse æqualem. Quæ omnia facilè percipientur, si adhibeatur materiale aliquod Icosaedrum. Inuenta porrò hoc modo altitudine pyramidis, cognoscenda eadem summa diligentia erit, beneficio instrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propositi.

DE AREA SPHÆRÆ, INVENTIONEque superficiei conuexæ eiusdem sphæræ.

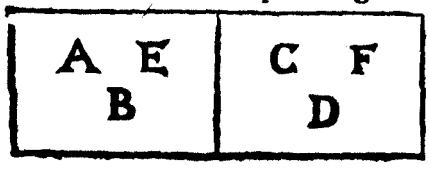
CAPVT V.

1. VT sphæræ aream, soliditatemue pluribus possimus vijs assequi, demõstranda prius erunt nonnulla ad eam rem valdè necessaria, atq; vtilia. quod sequentibus 7. propositionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuscunque, eandem habent duæ similes partes alterius cuiusuis magnitudinis.

SIT enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E, eadẽ pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico esse, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobiq; eadem proportio submultiplex posita sit. Item vt B,



vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique posita sit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. quod est propositum.

IDEM sequitur si A, & C, sint ipsarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, si E, & F, earundem B, D, sint eædem partes plures non facientes vnam, vt $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$. &c. Nam si verbi gratia A, C, sint $\frac{3}{4}$. ipsarum B, D, erit $\frac{1}{4}$. ipsius B, ad B, vt $\frac{1}{4}$. ipsius D, ad D. [a] Igitur erunt quoq;, vt $\frac{3}{4}$. ipsius B, hoc est, ipsa A, ad B, ita $\frac{3}{4}$. ipsius D, hoc est, ipsa C, ad D. Rursus si verbi gratia E, F, sint $\frac{2}{3}$. ipsarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem D. [b] Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id est, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. id est, ad F. Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F.

a *schol. 22. quinti.*

b *schol. 22. quinti.*

COROLLARIVM.

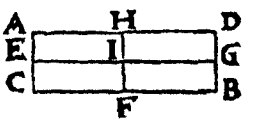
SEQVITVR hinc, ita esse $\frac{1}{2}$. cuiusuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt est $\frac{1}{2}$. cuiusuis alteri[us] magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiusdē. Quoniā. n. vt ostendim[us], ita est $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, vt $\frac{1}{4}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. eiusdem. [c] Vt autem $\frac{1}{3}$. posterioris ad $\frac{1}{3}$. ita sunt $\frac{3}{4}$. ad $\frac{2}{3}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. ad $\frac{2}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiusdem, ita $\frac{1}{2}$. posterioris magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiusdem.

c *1. quinti.*

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra comprehensum, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdem sphęræ ęquale.

SIT rectangulum AB, comprehensum sub diametro AC, & circumferentia CB, maximi in sphæra circuli. Dico rectangulum AB, quadruplum esse circuli maximi in sphæra, & superficiei conuexæ eiusdem sphęræ ęquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctisque rectis EG, FH, secantibus se se in I, diuisum erit totum rectangulum in quatuor æqualia AI, CI, BI, DI, [d] quod rectæ EG, FH, rectis AD, AC, parallelæ sint. Ac proinde rectangulum AB, rectanguli CI, quadruplum erit. Est autem rectangulum CI, contentum sub CE, semidiametro, & semicircumferentia CF, circulo maximo, cuius nimirum diameter AC, ęquale, vt lib. 4. capit. 7. Nume. 1. demonstratum est. Igitur rectangulum AB, circuli maximi quadruplum est. Et quia eiusdem circuli maximi quadrupla est superficies conuexa sphęræ, per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphęra, & Cylindro: [e] ęquale erit rectangulum AB, conuexæ superficiei, quod erat demonstrandum.



d *33. primi.*

e *9. quinti.*

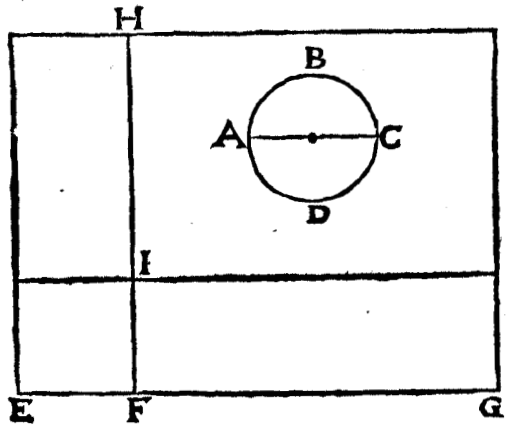
COROLLARIVM.

EX demonstratione liquet, rectangulum sub diametro cuiusuis circuli, (etiamsi non sit maximus in sphęra,) & circumferentia eiusdem, quadruplum esse ipsius circuli. Eadem enim semper demonstratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM est proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in sphęra ad superficiem sphęræ, quę circumferentię circuli maximi ad diametrum. Item eadem est proportio quadrati diametri maximi circuli in sphęra ad superficiem sphęrę, quę diametri ad circumferentiam eiusdem circuli maximi.

SIT circulus sphæræ maximus ABCD, eiusque diameter AC. Dico ita esse quadratum ex circumferentia ABCD, descriptum ad superficiem sphęræ, cuius diameter AC, vt est circumferentia ABCD, ad diametrum AC. Item ita esse quadratum diametri AC, circuli maximi in sphæra, ad superficiem sphęrę, vt est diameter AC, ad circumferentiam ABCD. Sit enim EF, diametro AC, & recta FG, circumferentię ABCD, æqualis, & super FG, construatur quadratum GH, capiaturque FI, ipsi EF, ęqualis, eritque EI, quadratum diametri EF, vel AC.



Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum GI, sub semidiametro FI, maximi circuli, & circumfentia FG, quam rectangulum EH, sub diametro EF, eiusdem circuli maximi, & circumferentia FH, ęquale, per pręcedentem, superficiei conuexę sphęrę. a Cum ergo sit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG, descriptum ad rectangulum EH, superficiei conuexę sphęrę ęquale, ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi, constat primum.

a 1. sexti.

b 1. sexti.

b ITEM cum sit, vt EI, quadratum diametri EF, maximi circuli, ad IG, rectangulum superficiei conuexæ sphærę ęquale, ita EF, diameter maximi circuli ad FG, circumferentiam, patet id, quod secundo loco proponitur.

COROLLARIVM.

Area circuli.

HINC manifestum est (id quod lib. 4. capit. 7. Nume. 1. etiam demonstrauimus) circuli aream gigni tam ex ¼. diametri in totam circumferentiam, quam ex ¼. circumferentię in totam diametrum. Cum enim circulus ABCD, sit quarta pars rectanguli GI, quòd hoc illius quadruplum sit ostensum propos. 2.

[a] Contineatur autem quarta pars rectanguli GI, tam sub $\frac{1}{4}$. diametri FI, & circumferentia FG, quam sub $\frac{1}{4}$. circumferentiæ FG, & diametro FI; liquido constat, quod proponitur. a *1. sexti.*

PROPOSITIO IV.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem verò, quam 22. ad 7.

CVM enim per præcedentem sit, vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad superficiem conuexam sphærę, ita circumferentia eiusdem circuli ad diametrum: [b] sit autem maior proportio circumferentię ad diametrum, quam $3\frac{10}{71}$. ad 1. hoc est, quam 223. ad 71. minor verò, quam $3\frac{1}{7}$. ad 1. hoc est, quam 22. ad 7. liquet id, quod propositum est. b *2. de Dimẽs. circuli lib. 4.*

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in sphæra maximi ad superficiem sphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem verò, quam 71. ad 223.

CVM enim per propos. 3. sit, vt quadratum diametri ad superficiem sphærę, ita diameter ad circumferentiam: [c] Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam, quam 7. ad 22. ([d] quod minor sit proportio circumferentię ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor verò, quam 71. ad 223. ([e] quod maior sit proportio circumferentię ad diametrum, quam 223. ad 71.) patet verum esse, quod proponitur. c *26. quinti.* d *2. de Dimẽs. circuli lib. 4.*

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in sphæra circuli descripti, ad sphæram maior est, quam 298374. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49.

CVM enim sit per propos. 1. cap. 7. lib. 4. vt circumferentia maximi circuli in quauis sphæra, ad circumferentiam maximi circuli in quauis alia sphęra, ita diameter ad diametrum: [e] habeat autem cubus circumferentię prioris sphærę ad cubum circumferentię sphærę posterioris, proportionem triplicatam circumferentię ad circumferentiam; [f] Item sphæra prior ad posteriorem sphęram, proportionem triplicatam diametri ad diametrum: erit vt cubus ex circumferentia prioris sphærę descriptus ad cubum ex posterioris sphærę circumferentia descriptum, ita sphæra prior ad posteriorem sphęram; Et permutando, vt cubus circumferentię sphærę prioris ad priorem sphęram, ita cubus circumferentiæ posterioris sphęrę ad sphęram posteriorem. e *33. vndec.* f *18. duodec.*

IAM verè si circumferentia circuli maximi alicuius sphærę sit 1. diuidaturque per $3\frac{10}{71}$. producetur diameter $\frac{71}{227}$. maior quam vera, ex coroll. propos. 2. de dimensione circuli. Si igitur eius semissis $\frac{71}{454}$. in $\frac{1}{2}$. semissem circumferentiæ ducatur, procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quē vera: quæ rursus ducta in $\frac{3}{7}$. diametri inuentę, (quæ etiam maior est, quam vera) nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. ostendam, soliditatem sphæræ $\frac{10082}{596748}$. hoc est $\frac{5041}{298374}$. maiorem tamen, quam veram. [a] Maior ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad sphęram, quam ad $\frac{5041}{298374}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{5041}{298374}$. vt 298374. ad 5041. (Quoniam enim ex propositione 2. Minutiarum ad finem libr. 9. Euclid. eadem est proportio Numeratoris 5041. ad denominatorem 298374. quæ minutię $\frac{5041}{298374}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 298374. ad 5041. ita 1. ad $\frac{5041}{298374}$.) maior erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad sphæram, qaam 298374. ad 5041. Cum igitur ita se habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in sphæra ad sphæram qualibet descriptus, vt cubus circumferentiæ 1. ad suam sphæram, vt initio huius propos. ostendimus; Constat id, quod primo loco proponitur.

[a] 8. quinti.

RVRSVS si circumferentia 1. diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur diameter $\frac{7}{22}$. minor quam vera, ex coroll. propos. 2. de dimensione circuli. Si igitur eius semissis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. semissem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$: minor, quam vera: quę rursus ducta in $\frac{3}{7}$. diametri inuentę (quæ etiam minor est, quam vera) nimirum in $\frac{1}{66}$. hoc est in $\frac{7}{77}$. producet, vt infra in regula 2. docebo, soliditatem sphærę $\frac{49}{2904}$. minorem tamen, quam veram. [b] Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. descripti, qui cubus est 1. ad sphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{49}{2904}$. vt 2904. ad 49. (Quoniam enim ex propos. 2. Minutiarum ad finem libr. 9. Eucl. eadem proportio est Numeratoris 49. ad denominatorem 2904. quæ minutię $\frac{49}{2904}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904. ad 49. ita 1. ad $\frac{49}{2904}$.) minor erit proportio cubi descripti ex circumferentia 1. qui cubus est 1. ad sphæram, quam 2904. ad 49. Cum igitur ita se habeat cubus ex circumferentia maximi circuli sphærę cuiuslibet descriptus, ad sphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad suam sphęram, vt initio huius propositionis demonstrauimus, patet etiam id, quod secundo loco propositum erat.

[b] 8. quinti.

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri sphæræ ad sphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem verò, quam 426. ad 223.

CVM enim sit, vt cubus diametri cuiuslibet sphærę ad cubum diametri alterius sphærę, ita sphæra ad sphęram [c]; quod vtraque proportio sit triplicata proportionis diametrorum: erit permutando, vt cubus diametri cuiuslibet sphærę ad ipsam sphęram, ita cubus diametri alterius sphærę ad ipsam sphęram.

[c] 33. vndec. & 18. duodec.

QVOD si diameter alicuius sphærę ponatur 1. multiplicetur q; per $3\frac{1}{7}$. d proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{22}{7}$. maior quam vera. Eius ergo semissis $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. semissem diametri ducta efficiet $\frac{11}{14}$. aream ipsius maximi circuli vera maiorem:

[d] corol. 2. de Dimens. circuli.

iorem: ac proinde si hęc area maior, quam vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2. dicetur, soliditas sphærę $\frac{22}{42}$. hoc est $\frac{11}{21}$. maior quam vera. [a] Igitur cubus diametri 1. qui est 1. ad sphæram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{11}{21}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{11}{21}$. vt 21. ad 11. (Quia enim ex propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem est proportio Numeratoris 11. ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{11}{21}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo vt 21. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{21}$.) maior erit proportio cubi 1. ex diametro 1. descripti ad sphæram, quam 21. ad 11. Et quia, vt initio huius propositionis ostendimus, ita est cubus diametri cuiusuis alterius sphæræ ad ipsam sphærã, vt cubus diametri 1. ad suam sphæram, verum est, quod primo loco est propositum. *a 8. quinti.*

[b] ITEM si diameter 1. ducatur in $3\frac{10}{71}$. producetur circumferentia maximi circuli $\frac{223}{71}$. minor quam vera. Eius ergo semisis $\frac{223}{142}$. ducta in $\frac{1}{2}$. semissem diametri 1. faciet $\frac{223}{284}$. aream circuli maximi vera minorem; ideoque si ea ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri 1. procreabitur, vt infra in regula 2. dicetur, soliditas sphæræ [illegible]. hoc est, $\frac{223}{426}$. minor, quam vera. [c] Igitur cubus 1. diametri 1. ad sphæram habebit proportionem minorem, quam ad $\frac{223}{426}$. Cum ergo sit 1. ad $\frac{223}{426}$. vt 426. ad 223. (Quia enim ex propos. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio est Numeratoris 223. ad denominatorem 426. quæ Minutiæ $\frac{223}{426}$. ad suum integrum 1. erit conuertendo, vt 426. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{426}$.) minor erit proportio cubi diametri 1. ad suam sphæram, quam 426. ad 223. Quoniam verò, vt ad initium huius propositionis ostendimus, ita est cubus diametri cuiuslibet sphæræ alterius ad ipsam sphæram, vt cubus diametri 1. ad suam sphæram, liquet etiam id, quod secundo loco propositum est. *b corol. 2. de Dimens. circuli.* *c 8. quinti.*

2. HIS præmissis, sequuntur regulę ad inuestigandam tam superficiem conuexam cuiuslibet sphæræ, quam eiusdem soliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propositæ sphæræ adinuenire.

AREA maximi circuli datæ sphærę quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam sphærę superficiem exhibebit: propterea quod per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & Cylindro, superficies sphærę quadrupla est circuli maximi. *Superficies conuexa sphæræ.*

EADEM superficies procreabitur, si diameter sphęrę in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propos. 2. Num. 2. huius cap. rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehensum superficiei conuexę sphęrę est ęquale.

II.

SOLIDITATEM propositæ sphæræ exquirere.

1. SPHAERAE soliditas producitur ex eius semidiametro in tertiam partem superficiei conuexæ. Vel ex $\frac{2}{3}$ totius diametri in $\frac{2}{3}$. conuexæ superficiei. *Soliditas sphæræ.*

2. ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in aream circuli maximi.

3. VEL

3. VEL ex duabus tertiis partibus aræa circuli maximi in totam diametrum.
4. VEL ex semidiametro in quatuor tertias partes aræa circuli maximi.
5. VEL ex semisse aræa circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.
6. VEL ex dupla diametro in tertiam partem aræa circuli maximi.
7. VEL ex diametro in 6. partem superficiei sphæra.
8. VEL denique ex tertia parte diametri in semissem superficiei conuexæ sphæra.

Demonstratio prima partis. PRIMVM demonstatum à nobis est in commentariis in sphęram, quam demonstrationem repetemus lib. 7. de Isoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonstrabimus. Concipiatur conus, cuius basis maximus circulus sphęrę, & altitudo semidiameter eiusdem. Item alius conus, cuius basis quadrupla sit maximi circuli, & altitudo semidiameter eadem. Et quia prioris coni tam sphęra, per propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphęra, & cylindro, quadrupla est, [a] quam posterior conus: [b] erunt posterior conus, & sphęra inter se æquales.

[a] *11. duodec.*
[b] *9. quinti.*

RVRSVS quia circulus, cuius semidiameter ęqualis est toti diametro sphęrę, quadruplus est circuli maximi. [c] (cum enim sit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autem prioris diametri quadruplum sit quadrati diametri posterioris, ex scholio propos. 4. lib. 2. Eucl. quòd illa diameter sit huius dupla; quandoquidem semissis prioris diametri sumpta est posteriori diametro ęqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus.) erit idem circulus, cuius semidiameter diametro sphęrę ęqualis est, ęqualis basi posterioris coni, cum huius basis quadrupla etiam posita sit maximi circuli. Quia verò etiam superficies sphæræ quadrupla est circuli maximi, ex propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: [d] Erunt superficies sphæræ, basis posterioris coni, & circulus semidiametrum habens æqualem diametro sphæræ, inter se æquales.

[c] *2. duodec.*
[d] *9. quinti.*

POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius basis sit prædictus circulus semidiametrum diametro sphæræ habens æqualem, altitudo verò semidiameter sphæræ. [e] Erit hic cylindrus triplus posterioris coni prædicti: ac proinde & sphæræ, quæ ei cono est ostensa æqualis. [f] Idem autem cylindrus triplus quoque est cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & basem tertiæ parti illius cylindri, hoc est, tertiæ parti superficiei sphæræ, æqualem. [g] Ergo posterior cylindrus, (basem habens tertiæ parti superficiei sphæræ æqualem, altitudinem verò semidiametro eiusdem sphæræ æqualem.) & sphæra æquales sunt. Cum ergo cylindrus hic posterior contineatur sub semidiametro sphæræ, & tertia parte superficiei sphæricæ: liquidò constat, sphæræ soliditatem gigni ex semidiametro in partem tertiam superficiei sphæræ. Vel ex $\frac{1}{3}$. totius diametri in $\frac{1}{3}$. superficiei sphæræ: cum hic numerus illi sit æqualis. quod est primum.

[e] *10. duodec.*
[f] *11. duodec.*
[g] *9. quinti.*

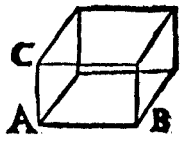
Demonstratio secundæ partis. CONCIPIATVR rursum cylindrus, cuius basis maximus circulus sphæræ, & altitudo diameter sphæræ. Erit hic cylindrus sesquialter sphæræ, ex coroll. propos. 32. libr. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro. Quod si ex parte superiori per tertiam partem diametri sphæræ, vel axis cylindri, ducatur basibus cylindri planum parallelum: [h] erit totus cylindrus ad cylindrum abscissum, cuius axis duæ tertiæ partes sunt totius axis, sesquialter; Ac proinde posterior hic cylindrus abscissus, qui quidem continetur sub maximo circulo, nempe sub sua basi, & duabus tertiis partibus diametri sphæræ, sphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam secundum.

[h] *13. duodec.*
[i] *9. quinti.*

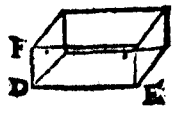
ALI-

ALITER.

SIT parallelepipedum ABC, comprehensum sub AC, duabus tertiis partibus diametri sphærę, & sub basi AB, quę circulo maximo eiusdem sphærę sit æqualis. Dico parallelepipedum ABC, sphærę æquale esse. Sit enim aliud parallelepipedum DEF, contentum sub DF, semidiametro sphærę, & sub base DE, quę tertię parti superficiei sphærę sit æqualis. quod vt in prima parte huius 2. regulę demonstrauimus, æquale erit sphærę propositæ. Quia ergo basis AB, circulo maximo sphærę æqualis, est $\frac{1}{4}$. superficiei sphærę; erit ex coroll. propos. 1. huius cap. vt AB, hoc est, vt $\frac{1}{4}$. superficiei sphærę ad DE, id est, ad $\frac{1}{3}$. eiusdem superficiei, ita DF, hoc est, ita $\frac{1}{2}$. diametri sphærę, ad AC, id est, ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri. Ac proinde cum bases AB, DE, cum altitudinibus DF, AC, reciprocentur, [a] parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter se erunt. Cum ergo DEF, sphærę æquale sit, vt dictum est, erit quoque ABC, eidem sphærę æquale. quod est propositum. [a] 34. vndec.



ALITER.



QVONIAM ex coroll. propos. 1. huius cap. est, vt $\frac{1}{4}$. superficiei sphærę ad $\frac{1}{3}$. eiusdem superficiei, ita $\frac{1}{2}$. diametri ad $\frac{2}{3}$. eiusdem diametri: [b] idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. superficiei, id est, ex circulo maximo sphærę, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex secundo, id est, ex $\frac{1}{3}$. superficiei, in tertium, hoc est, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. superficiei in $\frac{1}{2}$. diametri soliditas sphærę procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ ostensum est. Igitur eadem soliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur. quod est propositum. [b] 19. sept.

Demonstratio tertiæ partis.

RVRSVS quia cylindrus, cuius basis circulus maximus sphærę, & altitudo diameter eiusdem, sesquialter est ipsius sphærę, ex coroll. propos. 32. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro: [c] Idemque cylindrus sesquialter etiam cylindri, cuius basis æqualis sit duabus tertiis partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter; [d] erunt posterior hic cylindrus, & sphæra æquales: hoc est, sphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum sphærę. quod est tertium. [c] 11. duodec. [d] 9. quinti.

Demonstratio quartæ partis.

CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius basis sit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in sphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius verò basis æqualis sit $\frac{4}{3}$. areę circuli maximi, & altitudo semidiametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris basis subdupla sit basis posterioris, quam altitudo posterioris altitudinis prioris: [e] erunt ipsa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulę, ęquale est soliditati sphęrę. Igitur & posterius. Ideoque sphęra producetur, ex semidiametro in $\frac{4}{3}$. areę circuli maximi. quod quarto loco proponitur. [e] 34. vndec.

Demonstratio quintæ partis.

PRÆTEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis ęqualis sit areę circuli in sphęra maximi, & altitudo ęqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius verò basis ęqualis sit $\frac{1}{2}$. areę circuli maximi, & altitudo $\frac{4}{3}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum bases reciprocantur cum altitudinibus; quod tam basis in priori dupla sit basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in

priori: [a] æqualia erunt ipsa parallelepipeda: Sed prius est, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale sphærę. Igitur & posterius: atque idcirco sphæra gignetur ex $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi in $\frac{4}{7}$. diametri. quod est quintum.

[a] 34. vndec.

Demonstratio sexta partis.

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis æqualis sit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in sphæra, & altitudo diametro: alterius verò basis æqualis sit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum bases cum altitudinibus reciprocantur: quod tam basis in priori sit dupla basis in posteriori, quam altitudo in posteriori altitudinis in priori: [b] eruntipsa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulę, æquale est ipsi sphærę. Igitur & posterius: Ac proinde sphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur. quod sexto loco est propositum.

[b] 34. vndec.

Demonstratio septimæ partis.

INTELLIGANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius basis contineat $\frac{1}{3}$. superficiei sphærę, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius verò basis comprehendat $\frac{1}{6}$. superficiei, & altitudo æqualis sit diametro. Et quoniam bases cum altitudinibus sunt reciprocę, quod ita sit $\frac{1}{3}$. superficiei basis videlicet prioris parallelepipedi, ad $\frac{1}{6}$. superficiei, id est, ad basem posterioris, vt altitudo posterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio sit dupla: [c] ipsa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipsi sphærę, per 1. partem huius 2. regulæ æquale est. Igitur, & posterius: hoc est, sphærę soliditas producetur ex diametro in sextam partem superficiei, quod est septimum.

[c] 34. vndec.

Demonstratio octaua partis.

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius basis sit $\frac{1}{3}$. superficiei sphæræ, & altitudo semidiameter: alterius autem basis sit $\frac{1}{2}$. superficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia verò bases, & altitudines reciprocantur, quod ita sit $\frac{1}{3}$. superficiei ad $\frac{1}{2}$. superficiei, nimirũ basis prioris parallelepipedi ad basem posterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet posterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; [d] æqualia erunt ipsa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius sit sphæræ æquale, eidem quoque posterius æquale erit: Ac propterea sphæræ soliditas producetur ex tertia parte diametri in semissem conuexæ superficiei. quod est octauum.

[d] 34. vndec.

3. IAM vero ex propos. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor sequentes regulæ, per quas superficies sphæræ conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex circumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in sphæra maximi superficiem conuexam sphęrę procreare vera maiorem.

Superficies sphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data descriptum ad aliud, prodibitque sphæræ superficies maior quam vera. Cum enim per propos. 4. huius cap. Num. 1. maior sit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad superficiem sphæræ, quam 223. ad 71. sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad superficiem sphæræ veram, maiorem

lem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum: [a] ideoque productus numerus maior erit superficie vera. [a] 10. quinti.

II.

EX circumferentia circuli in sphæra maximi superficiem sphæræ conuexam vera minorem eruere.

FIAT vt 22. ad 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data descriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera superficie sphæræ. Cum enim per propos. 4. huius cap. Num. 1. minor sit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad superficiem sphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoque quadratum datæ circumferentiæ ad superficiem veram sphæræ, minorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum. [b] Quam ob rem [b] 10. quinti. numerus productus vera superficie sphæræ minor erit. *Superficie sphæræ minor, quam vera.*

III.

EX diametro circuli in sphęra maximi superficiem sphærę vera maiorem elicere.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gigneturque superficies sphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propos. 5. huius cap. Num. 1. maior sit proportio quadrati diametri circuli maximi ad superficiem sphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad superficiem veram sphærę, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad productum numerum. [c] Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera superficies sphærę. *Superficies sphæræ maior, quam vera.* [c] 10. quint.

IIII.

EX diametro circuli in sphæra maximi superficiem sphærę vera minorem colligere.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namque genitus superficiem sphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propos. 5. huius cap. Num. 1. minor est proportio quadrati diametri ad superficiem sphærę, quam 71. ad 223. Est autē quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoq; minor proportio quadrati datæ diametri ad veram superficiem sphærę quam eiusdem quadrati ad numerum productum. [d] Quapropter minor erit productus numerus, quam vera superficies sphærę. *Superficies sphæræ minor, quam vera.* [d] 10. quinti.

4. PARI ratione ex propos. 6. & 7. huius cap. Nū. 1. eliciuntur quatuor aliæ sequentes regulę, per quas tam ex circūferentia, quam ex diametro maximi circuli in sphæra, eruitur soliditas sphærę tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in sphæra soliditatem sphæræ producere vera maiorem.

Soliditas sphæra maior, quã vera.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli descriptus ad aliud. Numerus enim genitus dabit sphærę soliditatem vera maiorem. Nam cum, per propos. 6. huius cap. Num. 1. maior sit proportio cubi datæ circumferentiæ ad sphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datę circumferentię ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datę circumferentię ad sphærę soliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum: [a] Ideoque productus numerus maior erit, quam vera soliditas sphærę.

[a] *10. quinti.*

II.

EX circumferentia circuli maximi in sphæra soliditatem sphærę vera minorem procreare.

Soliditas sphæra minor, quã vera.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datę circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret sphærę soliditatem vera minorem. Cum enim per propos. 6. huius cap. Num. 1. minor sit proportio cubi circumferentiæ datę ad sphęram, quam 2904. ad 49. sit autem cubus datę circumferentię ad numerum procreatum, vt 2904. ad 49. habebit quoque cubus datę circumferentiæ ad veram soliditatem sphæræ, minorem proportionem, quàm idem cubus ad numerum productum. [b] Ideoque numerus productus minor erit vera soliditate sphæræ.

[b] *10. quinti.*

III.

EX diametro maximi circuli in sphęra soliditatem sphærę colligere vera maiorem.

Soliditas sphæra maior, quã vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus soliditatem sphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propos. 7. huius cap. Num. 1. maior sit proportio cubi diametri sphæræ ad sphæram, quàm 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoque maiorem proportionem cubus datæ diametri ad veram soliditatem sphæræ, quam idem cubus ad numerum genitum. [c] Quapropter numerus procreatus maior erit vera soliditate sphæræ.

[c] *10. quinti.*

IIII.

EX diametro maximi circuli in sphæra soliditatem sphæræ concludere vera minorem.

Soliditas sphæra minor, quã vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datę diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quàm vera soliditas sphærę. Nam cum per propos. 7. huius

cap.

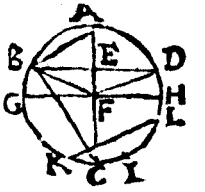
cap.Num.1.minor sit proportio cubi datæ diametri ad sphæram, quàm 4 2 6. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 4 2 6. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad sphæram, proportionem minorem, quàm idem cubus ad numerum genitum. [a] Quare minor erit numerus productus, quàm vera soliditas sphęræ. [a] *10.quinti.*

DE AREA SEGMENTORUM sphæræ.

CAPVT VI.

1. *HEMISPHERII superficies conuexa, exclusa base, gignitur ex area maximi circuli per 2.multiplicata. Vel ex semidiametro in circumferentiã maximi circuli. Vel denique ex tota diametro in semissem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perspicua sunt ex 1. regula Num.2.capitis 5.propterea quod hi numeri producti sunt semisses illorum, qui superficiem conuexam totius sphęræ in ea regula exhibuerunt. *Superficies cõuexa Hemisphærii.*

2. *SVPERFICIES conuexa cuiuslibet portionis sphæra hemisphario minoris, vel maioris, dempta base, æqualis est circulo, cuius semidiameter æqualis est rectæ lineæ, quæ à vertice portionis ad circumferentiam basis ducitur. ex propos. 40. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.* Sit enim maximus in sphęra circulus ABCD, cuius diameter AC, quàm in E, ad angulos rectos secet B D, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, secans sphæram in duas portiones, quarum basis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB; erit circulus semidiametri A B, superficiei conuexæ minoris portionis, & circulus semidiametri C B, conuexę superficiei maioris portionis ęqualis, ex dicta propos. Archimedis. Quare si vtraque AB, CB, in partibus diametri A C, fiat nota, præsertim ope instrumenti partium cap.1.lib.1. constructi, & areę circulorum ad interualla semidiametrorum AB, CB, desciptorum inuestigentur, per ea, quę lib.4. capit.7. scripsimus; notæ erunt superficies conuexæ dictarum portionum sphęræ. *Superficies cõuexa portionis sphæra.*



EADEM superficies conuexa portionis sphærę hemisphęrio minoris, vel maioris, ita quoque cognoscetur. Ex demonstratis ab Archimede propos.3.lib.2. de sphęra, & cylindro, eandem proportionem habet EC, ad EA, quam superficies conuexa portionis sphęræ basem habentis circulum diametri BD, & verticẽ C, ad superficiem conuexam portionis basem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoq; erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita superficies conuexa totius sphęræ ad superficiem cõuexam portionis B A D. Eademq; ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa superficies totius sphęræ ad superficiem conuexam portionis BCD. Quo circa inuestigata proportione diametri A C, ad segmenta AE, EC, per instrumentum partium cap.1. lib.1. constructum; si fiat, vt diameter AC, ad AE, ita superficies conuexa totius sphęræ, (quæ ex regula 1.Nume.2.cap.5.huius lib. cognita fiet) ad aliud,

proueniet conuexa superficies portionis minoris BAD. Similiq; modò superficies conuexa maioris portionis BCD, cognoscetur; si fiat, vt diameter AC, ad EC, ita superficies conuexa totius sphæræ ad aliud.

ET quia, vt ex Archimede ostendimus, ita est diameter AC, ad AE, vel ad EC, vt tota superficies sphæræ ad superficiē portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, semissis diametri ad AE, vel EC, vt hemisphęrij superficies GAH, ad superficiem portionis BAD, vel BCD, quod ostendetur eodem modo, quo scholium propos. 22. lib. 5. Euclid. est demonstratum: Si fiat, vt semidiameter sphæræ AF, ad AE, vel EC, altitudinem portionis, ita hemisphęrij GAH, superficies ad aliud; producetur rursus conuexa superficies portionis minoris BAD, vel maioris BCD.

IMMO cum sit vt AF, semidiameter ad AE, ita hemisphęrij GAH, superficies ad superficiem portionis BAD, [a] erit per conuersionem rationis, vt AF, semidiameter ad EF, ita superficies hemisphęrij GAH, ad superficiem frusti GBDH, demptis basibus. Ergo EF, eadem pars erit, vel partes diametri AC, vel semidiametri AF, quæ pars est, vel partes superficies frustri GBDH, demptis basibus, superficiei totius sphęræ, vel hemisphærij GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars sit EF, vel partes semidiametri AF, si ex superficie hemisphærij GAH, eadē pars auferatur, vel partes, reliqua fiet superficies conuexa minoris portionis BAD. Et si ad hemisphærij GCH, superficiem adijciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa superficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, si EF, contineat $\frac{1}{3}$. semidiametri AF, & ex superficie hemisphærij GAH, tollantur $\frac{1}{3}$. reliqua fiet superficies conuexa portionis minoris BAD: Et si $\frac{1}{3}$. superficiei hemisphærij adijciantur ad superficiē hemisphęrij GCH, cōficietur superficies cōuexa maioris portionis BCD. Sic si EF, esset semissis semidiametri, auferenda esset ex hemisphærij superficie semissis ipsius, vel adijcenda: Et sic de cæteris.

a corol. 19. quinti.

Soliditas hemisphærij.

3. HEMISPHÆRII soliditas producitur ex semidiametro in tertiam partem superficiei hemisphærij: Vel in sextam partem superficiei totius sphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. superficiei hemisphærij.

ITEM ex duabus tertijs partibus diametri in semissem areæ circuli maximi.

VEL ex duabus tertijs partibus areæ circuli maximi in semidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

VEL ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi.

VEL ex semisse areæ circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri.

VEL ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

VEL ex semidiametro in sextam partem superficiei sphęræ.

VEL denique ex $\frac{1}{6}$. diametri in superficiem hemisphærij conuexam. quæ omnia ex 2. regula Num. 2. cap. 5. colliguntur: cum omnes hi numeri producti sint semissesillorum, qui soliditatem totius sphæræ in ea regula indicant.

Soliditas sectoris sphæræ.

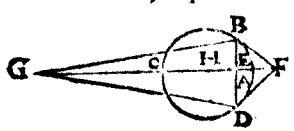
4. SOLIDITAS sectoris sphęræ (qui nimirum componitur ex minore portione sphęræ, & cono basem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in basem portionis deductæ; Vel quirelinquitur, si idem conus ex portione maiore subtrahitur. Vt in proxima figura, solidū compositum ex portione sphęræ BAD, basem habente circulum diametri BD, & ex cono habente eandem basem, & verticem in centro F: Item solidū, quod relinquitur, si conus idem ex portione maiore BCD, dematur, appellamus sectorem

ctorem sphæræ.) hac ratione inuestigabitur. Quoniam per propos.42.lib.1.Archimedis de sphęra & cylindro, sectori sphęræ ęqualis est conus basem habens circulum ęqualem superficiei conuexæ portionis sphęræ, altitudinem verò semidiametro sphęræ ęqualem: Conus autem producitur, vt c.2. huius lib. Nu. 1. declarauimus, vel ex base in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. basis; fit vt sector sphęræ gignatur vel ex superficie conuexa portionis sphęræ in $\frac{1}{3}$. semidiametri, hoc est, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex semidiametro in $\frac{1}{3}$. superficiei conuexæ portionis sphęræ.

5. SOLIDITAS verò cuiuscunque portionis sphęræ hoc modo procreabitur. Inuestigetur soliditas sectoris sphęræ, vt proximè traditum est. Nam si, quando portio proposita minor est hemisphęrio, ex hoc sectore dematur conus eandem habens cum portione basem, altitudinem verò perpendicularem ex centro sphęræ in basem portionis cadentem, reliqua fiet soliditas portionis minoris: At verò si, quando portio proposita hemisphęrio maior est, idem conus ad sectorem adijciatur, conflabitur soliditas portionis maioris. Id quod perspicuum est in superiori figura, cum conus BFD, ablatus ex sectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus sectori CBFDC, constituat maiorem portionem BCD. Conus porrò prædictus BFD, cognitus fiet ex base, nimirum ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt cap.2. huius lib. Num.1. docuimus. *Soliditas cuiuslibet portionis sphęræ.*

ALITER.

SIT in sphæra circulus maximus ABCD, & portiones sphęræ, quarum basis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarum soliditates exquirendæ sunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpendicularis HE, [a] quæ rectá BD, secabit bifariam, [b] ac proinde & vtrumque arcum BAD, BCD, bifariam, hoc est, per vertices A, C, transibit. [c] Fiat, vt CE, ad summam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad summam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturque duo coni, quorum basis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propos. 2.lib.2.Archimedis de sphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quo circa, inuentis horum conorum soliditatibus, vt cap.2. huius lib. Numer.1. traditum est inuentę quoque erunt soliditates portionum BAD, BCD. quod est propositum.



[a] 3. tertij.
[b] schol. 27. tertij.
[c] 12. sexti.

6. SOLIDITAS denique cuiuscunque frusti sphęrę, siue bases sint parallelę, cuiusmodi est in 1. figura huius cap. frustum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, inclusum, siue non parallelę, quale est frustum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inuestigetur, vt Num.5. diximus, vtriusque portionis ABD, AGH, soliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit soliditas frusti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, si inueniatur soliditas vtriusque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit soliditas frusti BDLK, nota. *Soliditas cuiuslibet frusti sphęræ.*

DE

DE AREA SPHÆROIDIS, EIVSDEMque portionum.

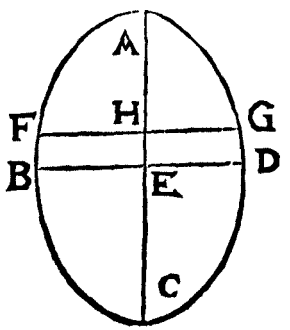
CAPVT VII.

1. SIT Ellipsis ABCD, cuius maior axis AC, minor BD, priorem ad angulos rectos secans. Soliditatem ergo Sphæroidis, id est, solidi ex circumuolutione Ellipsis circa axem effecti, ita nanciscemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propos. 12. lib. Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidib. demonstratur. cuius diameter BD, & centrum E; erit per propos. 29. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. semissis Sphæroidis ABD, dupla coni eandem basem cum illa semisse, circulum videlicet diametri BD, habentis, & altitudinem eandem EA. Igitur si huius coni soliditas per capit. 2. huius lib. inuestigetur, & duplicetur, exurget soliditas semissis Sphæroidis: quæ duplicata soliditatem totius Sphęroidis exhibebit.

Soliditas Sphæroidis.

2. DVCATVR minori axi BD, parallela FG, secans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens FG, & centrum H, vt Federicus Commandinus ad propos. 12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonstrauit; abscindenturque portiones Sphæroidis FAG, minor & FCG, maior. Vtriusq; soliditas ita fiet cognita. Quoniam per propos. 31. libri Archimedis de Conoid. & Sphęroid. Conus, cuius basis circulus diametri FG, & axis HA, ad minorem portionem sphęroidis FAG, proportionē habet, quam maioris portionis axis HC, ad summam rectarum EC, HC: Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad summam rectarum EC, HC, ita conus prædictus ad aliud, (qui quidem conus ex cap. 2. huius libri cognitus erit.) prodibit soliditas minoris portionis sphęroidis FAG.

Soliditas portionum Sphæroidis.



RVRSVS quia per propos. 33. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius basis circulus diametri FG, & axis HC, ad maiorem portionem Sphęroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis HA, ad summam rectarum EA, HA: si fiat, vt HA, minoris portionis axis ad summam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap. 2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur soliditas maioris portionis sphęroidis FCG.

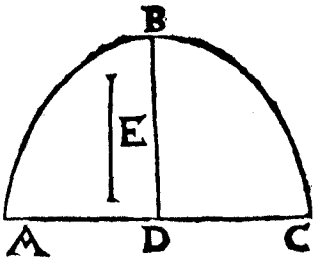
DE AREA CONOIDIS parabolici.

CAPVT VIII.

Soliditas Conoidis Parabolici.

1. SIT Parabola ABC, cuius axis BD, ad basem AC, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur. Quoniam per ea, quæ ad propos. 12. libri Archim. de Co-

de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonstrauit, planum per AC, [illegible]tum, & rectum ad axem BD, circulum facit, cuius diameter A C, & centrum D: erit per propos. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides ABC, sesquialterum coni, cuius basis circulus diametri AC, & axis BD. Igitur si fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; prosiliet soliditas Conoidis Parabolici ABC.



DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

CAPVT IX.

CONCIPIATVR superior figura esse Hyperbola, & recta E, æqualis semissi diametri transuersæ inter duas hyperbolas oppositas, hoc est, rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietque rursus circulus, cuius diameter A C, à plano per AC, ducto, & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propos. 12. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonstrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem BD, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propos. 27. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conoides Hyperbolicum ABC, ad conum, cuius basis eadem cum base Conoidis, circulus videlicet diametri AC, & axis idem BD, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe BD, & tripla ipsius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & dupla ipsius E. Si fiat, vt linea conflata ex axe BD, & dupla ipsius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipsius E, ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri dimetiemur) ad aliud; gignetur soliditas Conoidis Hyperbolici ABC.

Soliditas Conoidis Hyperbolici.

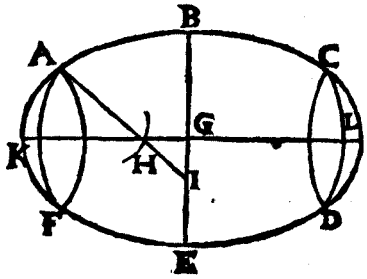
DE AREA DOLIORVM.

CAPVT X.

QVONIAM dolia non eandem formam vbiq; seruant, vix præscribi potest ratio, qua dolij propositi capacitas accurate inueniatur. Argumento est, quod scriptores variè de eius Dimensione scripserunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi verisimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF, CD, orificium B, per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam KL, centra circulorum AF, CD, coniungentem, secans dolium bifariam. Si igitur asseres dolij in B, & E, cuuentur, & deinde secundum lineas quasi rectas extendantur, cuiusmodi dolia non pauca Romæ vidi:

Capacitas dolii.

referent semisses dolij ABEF, CDEB, conos decuratos: quos si per ea, quæ c. 3. huius libri scripta sunt, metieris, dabit eorum summa dolij propositi capacitatem. Memor tamen esto, profunditatem dolij BE, & diametrum circuli AF, mensurandam esse intra asseres, ita, vt eorum crassities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius bases sint circuli BE, AF, &c.



2. Si vero asseres dolij verè sint aliquo modo circulares, quod nonnulli asserunt, concipiendum erit dolium, tanquam frustum quoddam Sphæroidis. Nã curuitas asserum sensibiliter à curuitate Sphæroidis, cuius axes sunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia solum axis minor nimirum profunditas dolij, data est, reperiemus ex puncto A, in Ellipsi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo semissis minoris axis BG, describatur ex A, arcus secans in H, rectam GH, ad angulos rectos ipsi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur secans minorem axem in I. Recta enim AI, dabit semisses GK, GL, maioris axis, vt lib. 1. nostri Astrolabij in scholio Lemmatis 50. demonstrauimus. Itaq; si tam semissis sphęroidis BKE, quam portio minor AKF, mensuretur, vt cap. 7. traditum est, & soliditas portionis AKF, ex soliditate semissis BKE, detrahatur, remanebit capacitas semissis dolij ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolij dimetiendi à vera dolij capacitate non longè abesse arbitror. Paratus tamen interim sum, si quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.

Capacitas dolij alio modo.

DE AREA CORPORVM omnino irregularium.

CAPVT XI.

1. TRADVNT scriptores nonnulli regulam quandã mechanicam ad corpora dimetienda, quæ omnino sunt irregularia, ita vt sub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ sunt, cadere non possint: cuiusmodi sunt statuæ, vrnæ, amphoræ, frusta saxorum, quæ neque vniformis sunt crassitiei, neque latera habent prorsus recta, aut ad bases perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aspernanda, ita se habet.

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

PARETVR arca lignea ex asseribus leuigatis, instar parallelepipedi cuiusdã, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere possit. Arca hæc tantæ debet esse longitudinis, latitudinis, atq; altitudinis, vt corpus metiendum intra ipsam positum, aqua totum possit operiri. Posita autem hac arca Horizonti æquidistante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantũ aquæ, quantum satis est, vt corpus impositum omnino tegat, notenturque diligenter suprema

latera

latera aquæ in asseribus arcæ, vt habeatur altitudo aquæ vsque ad arcæ fundũ: Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rursum latera aquæ, postquam quieuerit. Quod si per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorũ basis communis est arcæ fundus, siue basis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ notatis vsque ad basem, & minus à maiore subtrahamus, relinquetur parallelepipedũ soliditati corporis propositi omnino æquale. quod parallelepipedũ etiam consequeris, si altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in basem arcæ. Sunt, qui infusa aqua in arcam, latera eius in asseribus primo loco notent. Deinde imposito corpore, eiusdem aquæ latera signent. Si enim altitudo inter posteriora latera, ac priora ducatur in basem arcæ, producetur soliditas corporis impositi.

2. PRO vrnis, atque amphoris, siue eæ lapideæ sint, siue cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullo modo possit. Imposito deinde vase in aqua intra arcam contenta, ac si esset corpus quodpiam irregulare, inuestigetur eius soliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequam vas vacuum imponatur. Imposito denique vase vacuo, signentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter posteriora, ac priora latera multiplicetur per basem arcæ: procreabitur soliditas solius vasis: quæ detracta ex priori soliditate, notam relinquet vasis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA coni & cylindri recti.

CAPVT XII.

1. QVONIAM ex Archimede demonstrauimus, qua ratione superficies conuexa, sphæræ eiusque portionum inuestiganda sit: non deerit fortasse, qui idem desideret in cono, ac cylindro recto. quod ex ijs, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de sphęra, & cylindro demonstrata sunt, obtinebit hoc modo. Proposito cono recto quocunque, erit eius superficies conuexa conica, seclusa base, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum basis eiusdem coni, ex propos. 14. lib. 1. Archimedis de sphęra, & cylindro.

Superficies conica, demptis base, cui circulo sit aqualis.

2. QVOD si conus rectus secetur plano, quod basi æquidistet, erit superficies conuexa frusti coni, demptis basibus, æqualis circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus conicum frusti, & rectam ex semidiametris duarũ basum cõflatã, ex ppos. 16. lib. 1. Archime. de sphęra, & cylindro.

Superficies frusti coni, demptis basibus, cui circulo aqualis sit.

ITEM superficies conica coni recti ad suam basem, proportionẽ habet eandem, quam latus coni ad semidiametrum basis coni eiusdem, ex propos. 15. lib. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro.

Proportio conica superficiei ad suam basem.

4. DENIQVE superficies conuexa cylindri recti, demptis basibus, æqualis est circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrũ basis cylindri eiusdem, ex propos. 13. lib. 1. Archimedis de sphęra & cylindro.

Superficies cylindrica, demptis basibus, cui circulo sit aqualis.

FINIS LIBRI QVINTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER SEXTVS.

In quo de Geodæsia, & de figuris augendis, minuendisque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.

EXPEDITIS iis, quæ de magnitudinum dimensionibus initio proposuimus, restat vt de rectilinearũ superficierum etiam diuisione agamus: quæ Geometriæ practicæ pars proprio nomine Geodæsia vocatur. Nã δαίω idem significat, quod partior, vel diuido. Scio plerosque partem etiam illam, quæ magnitudines, & terram metitur, appellare Geodæsiam; Sed hi, auctore Pediasimo de mensuratione & partitione terræ, longè à veritate aberrant. *Nam, inquit, terræ mensuratio duas in partes diuiditur, Geometriam scilicet, & Geodaesiam. Area namque secundum artem mensuratio, & terræ mensuratio est, & merito Geometria vocatur. vnius vero, & eiusdem areæ, seu loci diuisio inter diuersas personas, partitio quadam est terræ, & iure optimo Geodaesia appellatur.* Hæc Pediasimus.

Geometria & Geodęsia quid.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellũ de superficierum diuisionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adscriptum: ipseque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuersalem conscripsit: estque sanè libellus vterque acutissimus, & eruditione re-

ne referissimus. Idem verò postea argumentum alia via aggressus est, & meo certè iudicio, faciliori & magis generali, Simon Steuinius Brugensis: sed in qua aliquid desiderari videatur, vt omnibus superficiebus rectilineis (quod ipse velle videtur) conuenire possit. quod facilè iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attentè perlegerint. Res enim proposita nulla ratione confici potest, nisi prius duæ propositiones demonstrentur, quarum priorem ipse sine demonstratione assumit pro principio, posterioris verò ne meminit quidem, cum tamen admodum sit necessaria, & quam Machometus Bagdedinus demonstrauit paulò aliter, quam nos. Has ergo duas propositiones ad initium huius lib. demonstrabimus, & posteriorem quidem longè generalius, quam à Machometo factum est. quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde superficierum rectilinearum diuisionem aggrediemur, insistentes eiusdem Steuinii vestigiis, nisi quando generalius rem oportebit demonstrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipsorum in manibus omnium est, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia proposita aliqua figura multorum angulorum, non sine difficultate, ac labore eam studiosus diuidet, nisi diuisionis omnium præcedentium figurarum memor sit, quod in nostra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio solum figuris ordinariis conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrsum, tot nimirū, quot latera figura ipsa continet, nostra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrsum, & partim extrorsum vergentes.

THOREMA I. PROPOSITIO I.

SI magnitudo in quotuis partes secetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis simul ad reliquas omnes partes simul eandem proportionem, quam totidem partes posterioris magnitudinis simul ad reliquas omnes partes simul. Et si quælibet pars prioris magnitudinis secetur in duas partes vtcunque, secetur autem & pars posterioris magnitudinis illi parti respondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidem totæ magnitudines sectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, secta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiscunque GH, etiamsi diuersi sit generis, secta in

totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita esse, verbi gratia, duas partes AC, CD, simul ad reliquas tres DE, EF, FB, simul, vt sunt duæ GI, IK, simul ad reliquas tres KL, LM, MH, simul, &c. Quoniam enim est, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita est IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.

RVRSVS quia conuertendo est, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoque componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita est ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK; & com-

ponendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK; & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum ostensum sit, esse vt AD, ad DE, ita vt GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH; erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter ostendemus esse, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rursus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo sit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namque rursus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo sit quoque, vt EF, ad FB, ita LM, ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & sic de cæteris. Constat igitur primum.

DEINDE pars v. g. tertia DE, secta sit vtcunque in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico esse quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK: & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum sit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO, atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales sunt.

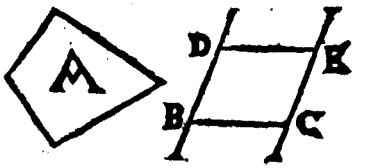
RVRSVS quia est conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK; & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL; erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO; & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL, ad LM; ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK, KO, OL, LM, MH, proportionales sunt. Igitur vt in prima parte demonstratum est, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Constat ergo etiam secundum.

PROBL.

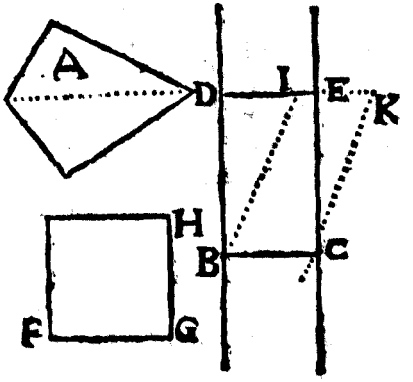
PROBLEMA 1. PROPOSITIO 2.

DATO rectilineo super datam rectam inter alias duas rectas interceptam, constituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppositum inter duas easdem rectas, interceptum datæ rectæ sit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuscunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri potest, quod ex ipsa problematis solutione cognoscetur.

SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas BD, CE, intercepta: oporteatque primum constituere rectilineo A, æquale quadrilaterum super datam rectam BC, cuius latus oppositum inter easdem rectas BD, CE, interceptum datæ rectæ BC, sit parallelum. Et si quidem duæ rectæ BD, CE, sint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales sunt, duobus rectis) efficietur problema, a si super rectam BC, constituetur parallelogrammum BE, siue in angulo BCE, siue in angulo CBD, rectilineo A, æquale. a 45. primi.



2. QVANDO anguli B, C, recti sunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, constituatur per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ scripsimus, quadratum FGH, æquale: resoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æquale quadratum constituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fusè explicauimus. Deinde duabus rectis BC, FG, inueniatur terria



tertia proportionalis BD, acper D, ipsi BC, parallela agatur DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; [a] cum quadrato FGH, æquale sit; propterea quod tres rectæ BC, FG, BD, continuè proportionales sunt.

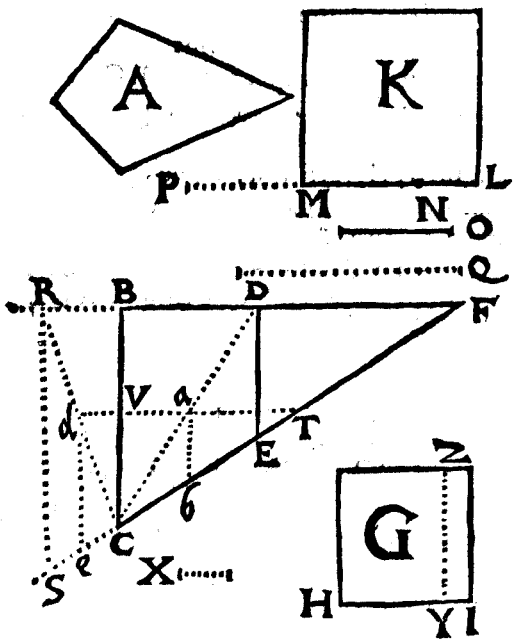
[a] 17. sexti.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ BI, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam constituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id est, rectilineo A, vt dictum est: si producatur latus DE, donec secet rectas BI, CK, in I, K, [b] erit parallelogrammum BK, rectangulo CD, æquale, hoc est, rectilineo A.

[b] 35. primi.

3. SI verò duæ rectæ BD, CE, non sint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, ECB, minores sunt duobus rectis) sitque primum propositum super BC, versus F, constituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ BC, oppositum eidem BC, parallelum. quod vt fieri possit, necesse est, rectilineum A, minus esse triangulo BCF, vt patet.

RECTILINEO ergo A, construatur per eá, quæ in scholio propos. 14. lib.



[c] 14. secundi.

2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proximè diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI. [c] Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis LM, HI: reperiatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM, & MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; actandem per D, ipsi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale esse

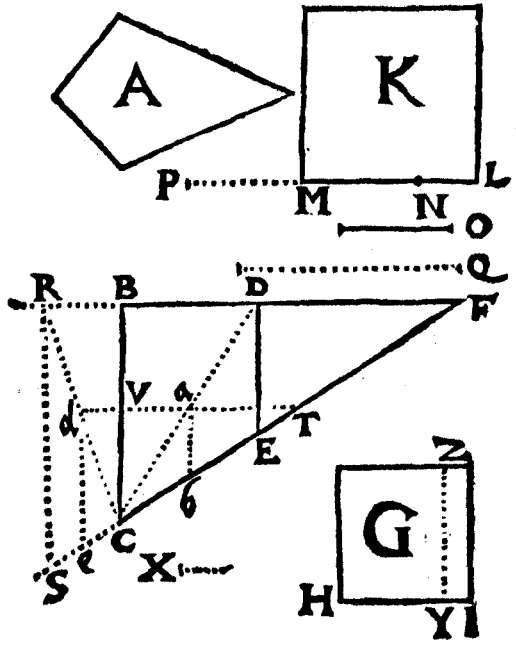
[a] Quo-

[a] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum DEF, duplicatam proportionem habet lateris BF, ad latus DF, hoc est, rectæ LM, ad rectam O: Habet autem & LM, ad MN, duplicatam proportionem eius, quam habet LM, ad O, quod LM, O, MN, sint continuè proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum DEF, ita LM, ad MN; Et per conuersionem rationis, vt triangulum BCF, ad Trapezium BE, ita LM, ad LN. [a] *19. sexti.*
[b] Cum ergo sit, vt LM, ad LN, ita quadratum K, ad quadratum G, quod LM, HI, LN, continuè sint proportionales, erit quoque vt triangulum BCF, ad trapezium BE, ita quadratum K, ad quadratum G, hoc est, ita triangulum BCF, quod ipsi K, æquale est, ad rectilineum A, ipsi G, æquale. Quocirca cum triangulum BCF, ad trapezium BE, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem; [c] æqualia erunt trapezium BE, & rectilineum A, quod est propositum. [b] *coroll. 20. sexti.* [c] *9. quinti.*

4. SIT deinde super BC, versus R, S, vbi anguli RBC, SCB. duobus rectis sunt maiores, non autem versus punctum concursus F, construendum trapezium rectilineo A, cuiuscunque magnitudinis sit, æquale, habens latus oppositum rectæ BC, parallelum. [d] Fiat rursus triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus HI, per ea, quæ ad propositionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus LM, HI, inueniatur tertia proportionalis MP, quæ ipsi LM, in continuum & directum sit posita: atque inter totam LP, & LM, reperta sit media proportionalis Q: ac postremo, vt Q, ad LP, ita fiat FB, ad FR: ipsique BC, parallela agatur RS. Dico trapezium BS, rectilineo A, esse æquale. [e] Quoniam enim triangulum BCF, ad triangulum RSF, proportionem habet duplicatam lateris FB, ad latus FR, hoc est, proportionis Q, ad LP; Est autem & proportio LM, ad LP, duplicata proportionis LM, ad Q, vel Q, ad LP, quod tres rectæ LM, Q, LP, sint continuè proportionales. Igitur erit vt triangulum BCF, ad triangulum RSF, ita LM, ad LP; ideoque etiam per diuisionem rationis contrariam in scholio propos. 17. libr. 5. Euclid. à nobis demonstratam, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita LM, ad MP. [f] Vt autem LM, ad MP, ita est quadratum K, ad quadratum G, quod tres LM, HI, MP, sint continuè proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum BCF, ad trapezium BS, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo BCF, constructum sit æquale quadratum K: [g] erit quoque trapezium BS, quadrato G, æquale, hoc est, rectilineo A, cui quadratum G, constructum est æquale. quod est propositum. [d] *14. secundi.* [e] *19. sexti.* [f] *coroll. 20. sexti.* [g] *14. quinti.*

QVOD si quando duæ rectæ BF, CF, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi possit, (quod quidem tunc accidet, cum ipsæ rectæ ferè parallelæ sunt) absoluemus problema, etiamsi punctum concursus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunque puncto T, in altera earum, nimirum in CF, agatur TV, alteri BF, parallela; & duabus BC, CV, inueniatur tertia proportionalis X. Constructo deinde ex scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. libr. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus BC, X, HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela. [h] Et quoniam est, vt triangulum BCF, (si perficeretur) ad triangulum VCT, ita recta BC, ad rectam X, hoc est, ita HI, [h] *coroll. 19. sexti.*

[a] 1. sexti. ad IY, [a] hoc est, ita quadratum G, ad rectangulum IZ: Est autem triangulum BCF, maius quadrato G, siue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores sunt, construendum est trapezium dato recti-



[b] 14. quinti. lineo æquale, debet esse triangulum maius rectilineo) [b] erit quoque triangulum VCT, maius rectangulo IZ. Igitur vt Num. 3. traditum est, construatur trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale: & tribus rectis CV, Va, CB, inuenta quarta proportionali BD, [c] (transibit autem recta ducta Ca, per D, si quarta BD, ritè est inuenta, [d] ita vt vicissim recta Ca, si exquisitè ducatur, exhibeat quartam proportionalem quæsitam BD,) demittatur DE, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BE, dato rectilineo A, æquale esse. Quoniam enim trapezium BE, trapezio Vb, simile est, per ea, quæ ad propos. 18. libr. 6. Euclid. demonstrauimus; [e] erit trapezium BE, ad trapezium Vb, vt recta BC, ad rectam X, hoc est, vt recta HI, ad IY, [f] hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Vb, rectangulo IZ, æquale sit; [g] erit quoque trapezium BE, quadrato G, hoc est, rectilineo A, æquale. quod est propositum.

[c] schol. 4. sexti.
[d] 4. sexti.
[e] coroll. 20. sexti.
[f] 1. sexti.
[g] 14. quinti.

6. NON aliter ex alia parte angulorum RBC, SCB, qui duobus rectis sunt maiores, etiamsi punctum concursus F, non habeatur, trapezium constituemus rectilineo T, æquale, cuiuscunque magnitudinis illud ponatur. Neque enim in hoc casu necesse est, ipsum esse minus triangulo BCF, si perficeretur. Ducta namque ex quolibet puncto T, rectæ CF, ipsi BF, parallella TV, eaque producta, inueniatur duabus rectis BC, CV, tertia proportionalis X. Constructa deinde

deinde quadrato G, quod rectilineo A, sit æquale, reperiatur tribus rectis BC, X, & HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela, ita vt rursus sit triangulum BCF, ad triangulum VCT, sicut quadratum G, ad rectangulum IZ. Post hæc, vt Num. 4. præcepimus, rectangulo IZ, construatur trapezium æquale Ve, & tribus rectis CV, Vd, CB, inuenta quarta proportionali BR, [a] (transibit autem recta Cd, ducta per R: si quarta BR, rectè inuenta est: [b] ita vt vicissim recta Cd, si accuratè ducatur, abscindat quartam proportionalem quæsitam BR,) demittatur RS, ipsi BC, parallela. Dico trapezium BS, rectilineo A, æquale esse. Quoniam enim trapezium BS, trapezio Ve, simile est, per ea, quæ in scholio propos. 18. lib. 6. Euclid. monstrata sunt à nobis; [c] erit trapezium BS, ad trapezium Ve, vt recta BC, ad rectam X, hoc est, vt recta HI, ad rectam IY, [d] hoc est, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Ve, rectangulo IZ, æquale sit; [e] erit quoque trapezium BS, quadrato G, hoc est, rectilineo A, æquale. quod est propositum.

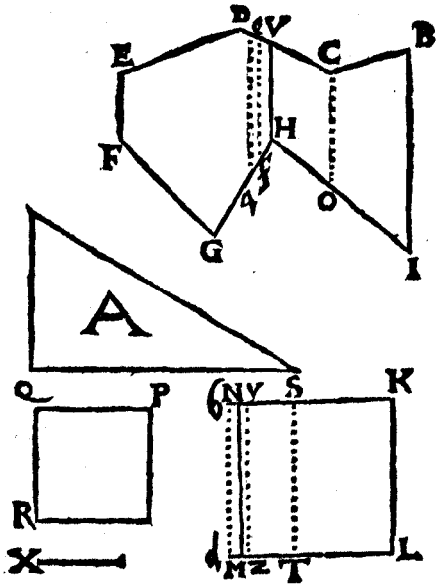
[a] *schol. 4. sexti.* [b] *4. sexti.* [c] *coroll. 20. sexti.* [d] *1. sexti.* [e] *14. quinti.*

7. IAM verò datis duobus rectilineis quibuscunque A, & BCDEFGHI, sit ex posteriore: quod maius ponatur, auferendum rectilineum habens latus lateri BI, parallelum, æquale priori A, quod minus statuatur, si fieri quidem id poterit. Fieri autem poterit semper in figuris omnes angulos habentibus introrsum, in aliis verò non semper. Per ea, quæ in scholio propos. 14 lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, construatur quadratum KM, rectilineo minori A, æquale. Deinde ex angulo C, qui lateri BI, proximus est, ducta lateri BI, parallela CO, constituatur rectilineo BO, eadem ratione quadratum æquale PQR; & duabus rectis KN, PQ, inuenta tertia proportionali KS, ducatur ST, ipsi KL, parallela: [f] Eritque rectangulum KT, contentum sub prima linea KL, & tertia KS, quadrato mediæ PQ, hoc est, rectilineo BO, æquale. Et quoniam KS, inuenta est in hoc exemplo minor latere KN: ideoque & rectangulum KT, minus quadrato KM, hoc est, rectilineo A; erit etiam rectilineum BO, minus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H, ducta rursum ipsi CO, vel BI, parallela HV, fiat iterum rectilineo CH, æquale quadratum, cuius latus X: Et duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionali SN, quæ in hoc exemplo terminatur in extremo lateris KN; [g] erit rursum rectangulum SM, sub prima linea ST, & tertia SN, comprehensum æquale quadrato mediæ X, hoc est, rectilineo CH. Cum ergo & KT, ipsi BO, sit ostensum æquale: erit totum quadratum KM, hoc est, rectilineum A, toti rectilineo BCVHOI, æquale; ac proinde ex maiori rectilineo per rectam HV, lateri BI, parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A, æquale. quod faciendum erat.

[f] *17. sexti.* [g] *17. sexti.*

8. QVOD si duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionalis fuisset minor, quam SN, nimirum æqualis ipsi SY, ita vt rectangulum SZ, quadrato rectæ X, vel rectilineo CH, foret æquale: ducenda esset ex proximo angulo D, alia parallela Da, & rectilineo DH, constituendum quadratum æquale; atque rectæ KN, & lateri postremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abscindenda æqualis Yb. Et si YB, foret minor, quam YN, ducenda adhuc esset ex proximo angulo G, parallela lateri BI, & rectilineo inter hanc parallelam, & Da, comprehenso efficiendum quadratum æquale: ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis, &c. Atque ita progrediendum deinceps, donec inuenta sit tertia propor-

tionalis S N, quæ terminetur in N, (qualis fuit tertia proportionalis S N, duabus K N, & X, inuenta) vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectilineum inter B I, & vltimam parallelam comprehensum



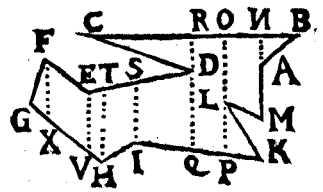
æquale quadrato K M, hoc est, rectilineo A, vt ostensum fuit de rectilineo B H, paulo ante hunc Num. 8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b. ita vt rectangulum Y d, sit æquale vltimo quadrato inuento, hoc est, rectilineo D H; ac proinde totum rectilineum inter BI, & vltimam parallelam, hoc est, rectangulum K d, maius quadrato K M, vel rectilineo A; erit vltimum rectilineum D H, maius rectangulo N d, propterea quod K Z, ipsi BH, æquale est, & Y d, ipsi D H. Quare si super rectam D a, inter rectas D V, a H, constituatur trapezium D f, per parallelam e f, rectangulo N d, æquale, vt supra Num. 3. traditum est: erit rectilineum inter B I, & e f, parallelas contentum æquale quadrato KM, hoc est, rectilineo A.

CÆTERVM non est necesse, vt semper à proximo angulo parallela ducatur in figura B F. Quando namque sensus iudicaret plus minus, parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato K M, vel non multò maius, ducenda esset parallela ex eo angulo, & rectilineo abscisso construendum æquale quadratum, & reliqua perficienda, vt prius.

DENIQVE si aliquando deprehenderetur, rectilineum abscissum non esse multo minus quadrato, constituendum esset, vt Num. 3. docuimus, super parallelam illam trapezium æquale rectangulo, quo quadratum KM, rectilineum abscissum superat.

9. Ex

9, Ex his puto ſatis ſtudioſum Lectorem intelligere, quo pacto in alijs exemplis ſe gerere debeat. Nam ſi verbi gratia ex hoc propoſito rectilineo irregulariſsimo per lineam lateri AM, parallelam abſcindenda ſit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vſque ad N. Et ſi quidem deprehenſum fuerit triangulum ABN, eſſe æquale dato rectilineo minori, (quod ſcietur, ſi quadratum triangulo æquale conſtructum, fuerit æquale quadrato, quod dato rectilineo minori conſtruitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si verò maius, conſtruemus ſuper AN, verſus B, trapezium per parallelam ipſi AN, æquale exceſſui: At ſi minus, ducemus LO, parallelam. Nam ſi fuerit deprehenſum rectilineum NL, æquale defectui, problema efficiet parallela LO: Si verò maius, conſtituemus ſuper LO, verſus MN, per parallelam ipſi MN, trapezium exceſſui æquale. Ea enim parallela problema ſoluet: At ſi minus, producemus OL, ad P: Etſi quidem triangulum KLP, fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæſtioni ſatisfaciet: Si verò maius, [a] conſtituemus in angulo K, triangulum ſimile triangulo KLP, & exceſſui æquale; ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc caſu ſolui non poſſe, cum duæ parallelæ, nimirum LO, & illa, quæ triangulum ipſi KLP, ſimile aufert, reſecent ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At ſi triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et ſi quidem rectilineum PR, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam QR, quod iubetur: Si verò maius, parallela, quæ cum QR, verſus OP, auferet rectilineum huic exceſſui æquale, ſatisfaciet problemati: At ſi rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentũ fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ, quæſtionem diſſoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu, [b] ſi ad C, conſtituatur triangulum exceſſui æquale, & ſimile triangulo CDR, ſatisfacient quæſtioni duæ parallelæ, videlicet DQ, & baſis prædicti trianguli conſtituti; atque in hoc caſu per vnicam parallelam ſatisfieri problemati nequit: Si denique triangulum CDR, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et ſi quidẽ rectilineum DI, æquale fuerit illi, quo triangulum CDR, minus eſt vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum DI, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam ſæpius dictum eſt, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totũ rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facilè conijci poſſe, quando problema per vnicam parallelam ſolui poſsit, & quando non, ſed per duas: Quotieſcunque enim incidemus in eiuſmodi triangulum in ipſa conſtructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum ſit triangulum ſimile, & æquale exceſſui alicui, ſolui problema nequit, niſi per duas parallelas.



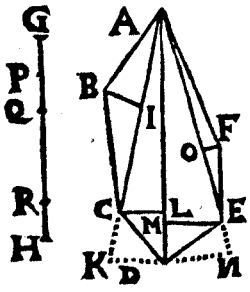
a 25. ſexti.

b 25. ſexti.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipsis triangulis ordine proportionales inuenire.

SIT rectilineum quodlibet ABCDEF, diuisum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, per rectas ex angulo A, (vel aliquo puncto assignato in vno latere) ad omnes angulos oppositos ductas: atque hisce triangulis inueniendæ sint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis dempto angulo A, ad rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares BI, CL, DK, DN, EM, FO, pro altitudinibus triangulorũ. (Nihil autem refert, si interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiusmodi hic sunt DK, DN,) ita vt singula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ singulas duntaxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur GP, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & PQ, æqualis altitudini DK, secundi trianguli ACD, respectu eiusdem basis AC. Post hæc fiat, [a] vt CL, altitudo secundi trianguli respectu basis AD, ad EM, altitudinẽ tertij trianguli ADE, respectu eiusdem basis AD, ita PQ, ad QR; Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, respectu basis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, respectu eiusdem basis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, si plura fuerint triangula, sumendo semper duas altitudines ad communem basem demissas, &c. Dico quatuor rectas GP, PQ, QR, RH, esse quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in scholio propos. 1. lib. 6. Euclid demonstratum est, à nobis, ita est triangulum ABC, ad triangulum ACD, vt altitudo BI, ad altitudinem DK, propter basem communem AC, hoc est, vt GP, ad PQ, cum hæ sumptæ sint illis altitudinibus æquales. Eadem de causa ita est triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo CL, ad altitudinem EM, hoc est, vt PQ, ad QR, cum ex constructione sit, vt CL, ad EM, ita PQ, ad QR. Pari denique ratione ita est triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem, FO, hoc est, vt QR, ad RH, cum sit per constructionem, vt DM, ad FO, ita QR, ad RH. Constat ergo id, quod propositum fuit.



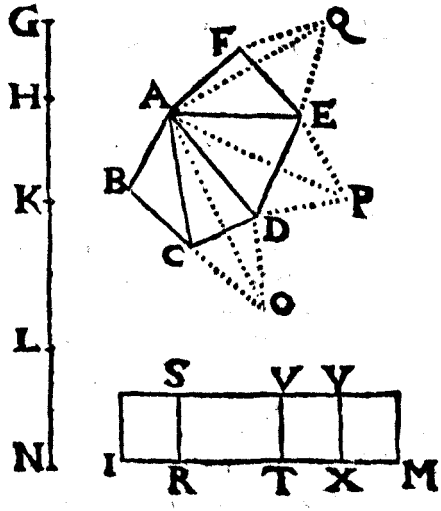
[a] 12. sexti.

ALITER.

SIT rursus rectilineum ABCDEF, diuisum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula constituunt quadrilaterum, cuius diameter est latus vtrique triangulo commune, cuiusmodi est ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam DO, quæ secet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro AD, parallelam ducemus EP, quæ secet latus CD, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus FQ, quæ latus DE, productum secet in Q. Deinde in recta quauis GN, sumantur GH, HK, ipsis BC, CO, æquales. Et tribus

CD,

CD,DP,HK,reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE,EQ, KL, quarta proportionalis inueniatur LN. Dico inuentas esse quatuor rectas GH,HK,KL,LN,quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O,P,Q,puncta concursuum rectis AO,AP,AQ, [a] erit triangulum ACD,trian- [a] 37. primi.



gulo ACO; & triangulum ADE,triangulo ADP; & triangulum AEF, triangulo AEQ, æquale. [b] Cum ergo sit, vt BC,ad CO,hoc est,vt GH, ad HK,ita triangulum ABC,ad triangulum ACO,hoc est,ad triangulum ACD: Item vt CD,ad DP,hoc est,vt HK,ad KL,ita triangulum ACD,ad triangulum ADP, hoc est, ad triangulum ADE: Et vt DE,ad EQ, hoc est, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE,ad triangulum AEQ,hoc est,ad triangulum AEF: perspicuum est id, quod proponitur. [b] 1. sexti.

ALITER.

RATIONES duæ expositæ, quæ expeditissimè sunt, propria est triangulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emissas: potest tamen idem hoc problema absolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non sit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuisa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras. [c] Et primo triangulo ABC, vel primæ figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale construatur IS: Et super rectam RS, aliud parallelogrammum ST, secundo triangulo ACD, vel secundę figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Itē super rectā TV, aliud VX, tertio triāgulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulū habēs VTX, æqualē eidem angulo I: Ac deniq; super rectam XY, aliud YM, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atque ita deinceps, si plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris esse proportionales. Nam ex quatuor [c] 44. vel 45. primi.

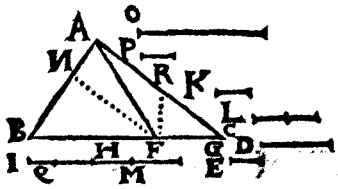
tior rectangulis, vel parallelogrammis constituitur vnum totum, vt ex demõstratione propos. 45. lib. 1. Euclid. manifestum est, propter angulos I, S R T, V-TX, YXM, æquales: ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem. [a] Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales sunt parallelogrammis, ideoque & triangulis, siue figuris. quod est propositum.

[a] 1. sexti.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat.

SIT primum triangulum quodcunque ABC, per rectam ex angulo A, diuidendum in duas partes: ita vt pars ad B, vergẽs ad reliquam partẽ habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus BC, dato angulo oppositum, per ea, quæ in scholio propos. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem sit proportio BF, ad FC, quæ D, ad E, ducaturque recta AF. Dico esse vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC. [b] Est enim triangulum ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad FC, hoc est, vt D, ad E.



[b] 1. sexti.

DEINDE sit idem triangulum ABC, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars versus B, ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppositum A, recta FA, vt totum triangulum in duo triangula sit sectum: [c] reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum AFC: totaque GI, secetur in H, vt eadem sit proportio GH, ad HI, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ GH; estque vt GH, ad HI, hoc est, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC: diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppositum angulum A, ducta triangulum ABC, in duas partes in data proportione D, ad E.

[c] 3. huius.

SIT rursus data proportio K, ad L, diuidendumque sit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiusdem proportionis. Diuidatur tota GI, in M, ita vt eadem sit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuisionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, secabimus BA, basem primi trianguli dato puncto F, oppositam, in N, vt eadem sit proportio BN, ad NA, quę GM, ad MH. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc est, ita esse triangulum BFN, ad trapezium FNAC, vt K, ad L. Quoniam enim rectæ GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ sunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, secuimus proportionaliter, [d] cum sit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc est, vt GM, ad MH, [e] erit vt GM, ad MI, id est, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC. quod est propositum.

[d] 1. sexti.
[e] 1. huius.

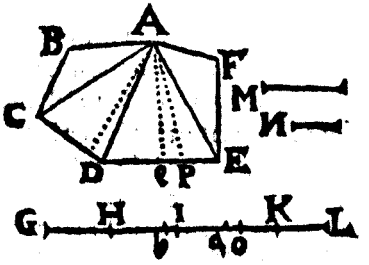
DENIQVE data sit proportio O, ad P, secandumque sit triangulum ABC, in duas partes eiusdem proportionis. Diuisa tota GI, in Q, ita vt eadem sit

proportio

proportio GQ, ad QI, quæ O, ad P: quoniam punctum diuisionis Q, cadit in secundam partem HI, totius lineę GI, diuidemus AC, basem secundi trianguli dato puncto F; oppositam in R, vt eadem sit proportio AR, ad RC, quæ HQ, ad QI. Dico ductam rectam ER, problema efficere, hoc est, ita esse trapezium ABFR, ad triangulum RFC, vt O, ad P. Quoniam enim rectæ GH, HI, repertæ sunt triangulis ABF, AFC, proportionales; & ram secundam partem HI, in Q, quam secundum triangulum AFC, per rectam FR, secuimus proportionaliter: [a] cum sit triangulum AFR, ad triangulum CFR, vt AR, ad RC, hoc est, vt HQ, ad QI: [b] Erit vt GQ, ad QI, hoc est, vt O, ad P, ita trapezium ABFR, ad triangulũ RFC. quod est propositum. a *1. sexti.* b *1. huius.*

IAM verò si antecedens proportionis vergere debeat versus C, proportioque data sit O, ad P; fiet id commodissimè, si triangulum ex F, diuidatur secũdum proportionem P, ad O, ita vt antecedens vergat versus B, sicut docuimus. Nam tunc pars versus C, ad reliquam habebit proportionem, quam O, ad P, per conuersam proportionalitatem. Quod etiam in alijs figuris intelligi volo.

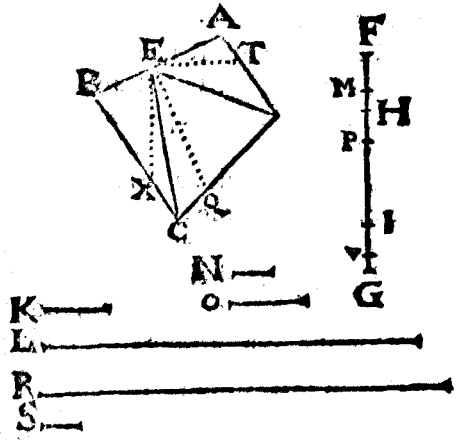
SIT deinde multilatera figura quæcunque ABCDEF, per rectam ex angulo A, ductam secanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M, ad N. Ductis ex dato angulo A, ad omnes angulos oppositos rectis partientibus figuram in quatuor triangula; [c] inueniantur ipsis quatuor rectæ proportionales GH, HI, IK, KL. Tota deinde GL, secetur in O, vt eadem sit proportio GO, ad OL, quæ M, ad N. Et quoniam diuisionis punctum O, cadit in tertiam lineam IK, secabimus tertij trianguli basem DE, dato angulo A, oppositam in P, vt secta est IK, in O, ducemusque rectam c *3. huius.*



AP. Dico esse rectilineum ABCDPA, ad rectilineum APEFA, vt GO, ad OL, hoc est vt M, ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia sunt ordine rectis GH, HI, IK, KL, per constructionem, tertiumq; triangulum ADE, & lineam tertiam IK, diuisimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; [d] cum sit vt DP, ad PE, hoc est, vt IO, ad OK, ita triangulum ADP, ad triangulum APE; [e] Erunt totæ quoque magnitudines sectæ proportionaliter, hoc est, erit ABCDPA, ad APEFA, vt GO, ad OL, hoc est, vt M, ad N. quod est propositum. d *1. sexti.* e *1. huius.*

QVOD si punctum O, diuidens rectam GL, in duas partes proportionis datæ M, ad N, caderet in aliquod punctorum H, I, K, vt in I, terminum secundæ lineæ HI, diuideret recta AD, terminans secundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem. Nam tunc per primam partem propos. 1. huius lib. esset ABCDA, ad ADEFA, vt M, ad N, vt pespicuum est.

DATVM præterea sit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere AB, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad posteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato puncto E, ad omnes an-



gulos oppositos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; [a] inueniantur rectæ FH, HI, IG, triangulis EBC, ECD, EDA, proportionales. Secta deinde tota FG, in M, secundum datam proportionem K, ad L: quoniam diuisionis punctum M, incidit in primam linea FH, diuidemus primi trianguli EBC, basem BC, dato puncto E, oppositam in X, vt FH, secta est in M. Iuncta namq; recta EX, [b] erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc est, vt K, ad L: propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia sunt ex constructione; & primæ partes EBC, FH, sectæ sunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; [c] cum sit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc est, vt FM, ad MH. Constat ergo propositũ.

a 3. huius.

b 1. huius.

c 1. sexti.

SI proportio data sit N, ad O; secta FG, in P, secundum proportionem N, ad O, cadet diuisionis punctum P, in secundam lineam HI. Igitur si secundi trianguli ECD, basis CD, dato puncto E, opposita secetur in Q, vt secta est HI, in P, nectaturque recta EQ, [d] erit rursus figura EBCQE, ad figuram EQDA, vt FP, ad PG, hoc est, vt N, ad O.

d 1. huius.

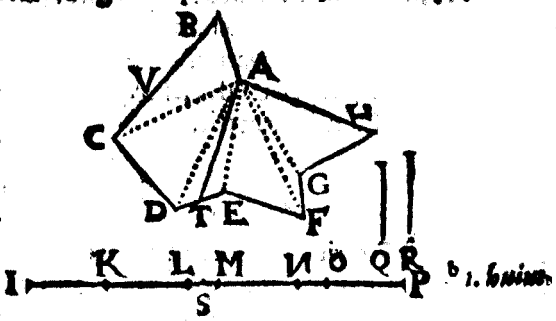
SI denique data sit proportio R, ad S; secta FG, in V, secundum proportionem R, ad S, cadet diuisionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quamobrem si tertij trianguli EDA, basis DA, dato puncto E, opposita secetur in T, vt secta est IG, in V, iungaturque recta ET; [e] erit rursus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, ad VG, hoc est, vt R, ad S.

e. huius.

ATQVE hac via procedendum est in omnibus aliis figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id est, in quibus omnes anguli introrsum vergant.

IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorsum vergant, & partim introrsum, dummodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci possint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula quæ nullũ ipsius latus secent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrsum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorsum. ductæ sunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præterquam ad duos proximos

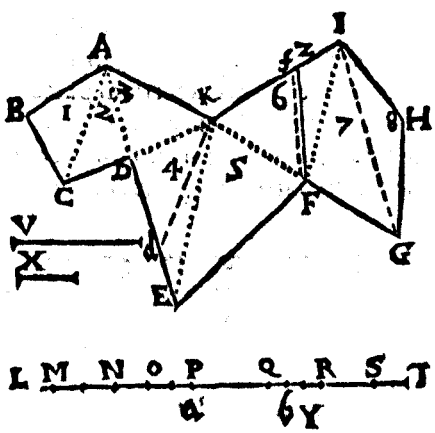
mos B, H, nullum figuræ latus intersecantes. a Si igitur reperiantur sex rectæ IK, KL, LM, MN, NO, OP, sex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, secetur in S, secundum datam proportionem Q, ad R; atque basis DE, tertij trianguli (Nam diuisionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, opposita diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuisa est, ducaturque recta AT: b Erit figura ABCDTA, ad figurá ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc est, vt Q, ad R. a 3. huius



b 1. huius

Ex angulo B, vel H, non poterit proposita figura in quamcunque proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppositos angulos emissæ partim secant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod si data proportio minor esset, quam figuræ BCDEB, (si nimirum intelligatur ducta recta BE,) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi posset ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo triangula BCD, (ducta videlicet recta BD,) BDE, ad punctum B, quorum bases sunt latera figuræ CD, DE, alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam bases sunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

EODEM modo quamcunque figuram rectilineam, etiam irregularissimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (nisi ex eo duci possint rectæ ad omnes angulos oppositos, exceptis duobus proximis, quæ nullum figuræ latus intersecent: cuiusmo-



di esset punctum V, in antecedenti figura) sed ex aliquo puncto particulari; si prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat saltem vnum latus, quod etiam sit latus figuræ. Vt si figura hæc ABCDEFGHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT c inueniantur totidem lineæ proportionales, totaq; linea LT, secetur in Y, c 3. huius.

secundum datam proportionem V, ad X; & basis IK, sexti trianguli (quod punctum Y, cadat in sextam lineam QR,) secetur in Z, vt secta est QR, in Y; *a* ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, sectum sit, vt secta est basis IK, hoc est recta QR: *b* Erit figura ABCDEFZKA, ad figuram FZIHGF, vt LY, ad YT, hoc est, vt V, ad X, Et sic de cæteris.

a 1. sexti.
b 1. huius.

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data secetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales.

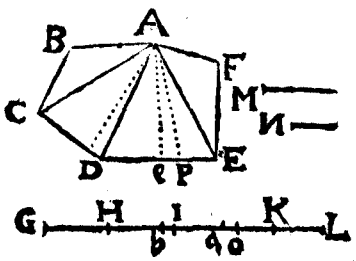
HIS sitè intellectis, licebit nobis quamlibet figuram secare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel pũcto in latere, ex quo duci possint ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus secent. Nam si proposita figura sit secanda, verbi gratia in 7. partes æquales, diuidemus eam secundum proportionem 1. ad 6. nimirum secundum sub multiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in quas figura diuidenda est. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum posterior 6. eiusmodi partes complectatur. Hanc deinde posteriorem partem secabimus secundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$: ipsius, hoc est, $\frac{1}{7}$. totius figuræ. Post hæc posteriorem huius secundæ diuisionis partem partiemur secũdum proportionem 1. ad 4. Ac rursus partem huius tertiæ diuisionis posteriorem diuidemus secundum proportionem 1. ad 3. Atq; posteriorem huius quartæ diuisionis partem secabimus secundum proportionem 1. ad 2. Ac postremo partem posteriorem huius quintæ diuisionis partiemur in duas partes æquales, nimirum secundum proportionem 1. ad 1.

NON aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci possunt rectæ ad angulos oppositos, quin aliqua figuræ latera secentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuersis angulis, vel punctis. Nam si verbi gratia vltima figura huius propositionis diuidenda sit in 5. partes æquales; resecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintã partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuisionis: Ac tandem semissem ex vltima parte postremæ huius diuisionis. Hac enim ratione diuisa erit tota figura in 5. partes: non secus atq; in linea recta *AB*, contingit. Si namque eam partiri iubeamur in 7. partes æquales, efficiemus

id, si primo loco septimam partem *AC*, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem DE: & ex reliqua FB, tertiam partem FG: *Ac* deniq; relinquam lineam GB, bifariam secabimus in H, hoc est, semissem GH, ex ea abscindemus.

FACILIVS idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci possunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus secantes, hac ratione. Lineam ex rectis, quę triangulis figuræ proportionales sunt, cõflatã secabimus in tot partes æquales, in quot figurã partiri iubemur. Si enim

enim bases triangulorum dato angulo, vel puncto oppositas, quæ lineis, in quas puncta diuisionum cadunt, respondent, ita diuidemus, vt sectæ sunt respondentes lineæ, atque ex dato angulo, vel puncto, ad diuisionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt si secunda figura huius propos. secanda sit in 5. partes æquales, partiemur lineam GI, in 5. æquales partes GH, Hb, ba, aK, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quintæ figuræ pars; [a] cum sit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde secabimus basem secundi trianguli in d, vt secunda linea HI, secta est in b: Et basem tertii trianguli in e, vt tertia linea IK, secta est in a; rectasque ducemus Ad, Ae. Quia verò quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuisa in 5. partes æquales ABC, [a] 1. huius.



ACd, AdDe, AeE, AEF: [b] propterea quod hæ partes partibus GH, Hb, ba, aK, KL, proportionales sunt. [b] 1. huius.

NEQVE verò difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis est vltima huius propos. accommodare. Si enim ea diuidenda sit, verbi gratia in tres partes æquales, secanda erit linea LT, in tres æquales partes La, ab, bT. Et quarti trianguli basis DE, diuidenda in d, vt quarta linea OP, diuisa est in a: Item sexti trianguli basis KI, secanda in f, vt sexta linea QR, in b, secta est. Nam si ex K, angulo basi DE, opposito recta ducatur Kd: Item ex angulo F, basi KI, opposito recta Ff, erunt tres partes figuræ ABCD dKA, KdEFfK, fFGHIf, inter se æquales: [c] cum sint rectis La, ab, bT, proportionales. Eademque de cæteris ratio est. [c] 1. huius.

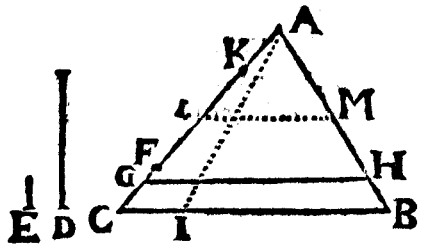
PROBLEMA 4. PROPOSITIO 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum ABC, diuidendum in duas partes per lineam lateri BC, parallelam, vt pars versus A, ad reliquam habeat proportionem datam D, ad E. Alterutro latere si, cui linea diuidens æquidistare non debet, videlicet AC, diuiso in F, vt eadem sit proportio AF, ad FC, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, versus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus AC, & eius partem AF, quæ terminatur in angulo A, qui lateri oppo-

nitur, cui æquidistans ducenda est, media proportionalis AG, agaturque per G ipsi BC, parallela GH. Dico hanc parallelam problema efficere, id est, eandem esse proportionem trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ est D, ad E.

a coroll. 19. sexti. a Quoniam enim triangulum ABC, ad triangulum AGH, est, vt latus AC, ad rectam AF, quod tres rectæ AC, AG, AF, continuè proportionales sint, & triangu-



la ABC, AGH, super AC, AG, similia similiterque posita; Erit per conuersionem rationis triangulum ABC, ad trapezium BCGH, vt AC, ad FC. Ergo diuidendo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc est, vt D, ad E. quod est propositum. Quod etiam ita colligemus. b Quoniam est triangulum ABC, ad triangulum AGH, vt recta AC, ad AF; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertendo triangulum AGH, ad trapezium BG, vt AF ad FC, hoc est, vt D, ad E.

b coroll. 19. sexti.

ALITER.

DIVISO latere quocunque, nimirum BC, in I, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI: c erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id est, vt D, ad E. d Si igitur super BC, inter rectas BA, CA, constituatur trapezium BG, per parallelam GH, æquale triangulo AIC, quod est consequens; erit reliquum triangulum AGH, reliquo triangulo ABI, æquale. e Quare erit triangulum AGH, ad trapezium BG, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc est, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E. Sed prior via expeditior est; placuit tamen hanc alteram etiam proponere; quia generalis fermè est, & in omnes figuras multilateras quadrat, vt infra patebit.

c 1. sexti. d 2. huius. e 7. quinti.

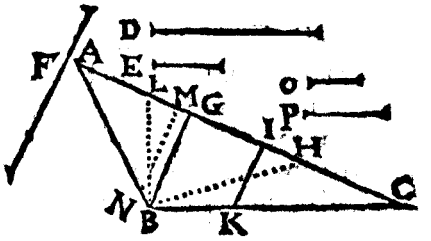
NON secus id, quod propositum est, exequemur, si antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC, cui recta ducenda est parallela. Diuiso enim rursus latere AC, in K, secundum datam proportionem D, ad E, ita vt antecedens proportionis incipiat à latere BC; inueniatur inter totam AC, & eius partem AK, quæ est consequens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri BC, parallela LM. Dico hanc parallelam problema efficere, hoc est, eandem esse proportionem trapezij BL, ad triangulum ALM, quæ est D, ad E. f Quia enim est, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK; quod tres rectæ AC, AL, AK, continuè sint proportionales, & triangula ABC, ALM, super AC, AL, similia similiterque posita; Erit diuidendo trapezium BL, ad triangulum ALM, vt CK, ad AK, hoc est, vt D, ad E, quod est propositum. Hoc idem effici etiam potest via illa altera generali, quamuis non ita expeditè. Diuiso

f coroll. 19. sexti.

uito enim quocunque latere, nimirum BC, in I, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI, [a] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id est, vt D, ad E. [b] Si igitur super BC, inter rectas BA, CA, constituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale triangulo ABI, quod est antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale. [c] Quare erit trapezium BL, ad triangulum ALM, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc est, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

[a] 1. sexti. [b] 2. huius. [c] 7. quinti.

SED diuidendum iam sit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cuicunque lineæ F: quæ si æquidistet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi lateri parallelam,



vt iam tradidimus, siue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppositum, siue ad ipsum mer latus: factumque erit, quod iubetur; [d] cum parallela illa æquidistet etiam datæ rectæ lineæ.

[d] 30. primi.

SI verò data recta F, nulli laterum æquidistet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum cadens, qualis est BG. Si igitur antecedens proportionis statuendum sit ad partes A, secabimus latus AC, in H, in datam proportionem D, ad E. Cadat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniatur-que inter GC, & eius partem CH, terminatam in angulo C, parallelæ BG, opposito media proportionalis CI; & per I, ipsi BG, vel ipsi F, parallela agatur IK; quam dico, problema efficere: hoc est, esse trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt D, ad E. [e] Quoniam enim est (ducta recta BH,) vt triangulum GBC, ad triangulum IKC, ita GC, ad CH; quod tres GC, CI, CH, sint continuè proportionales, & triangula similia similiterque posita; [f] Vt autem GC, ad CH, ita est quoque triangulum GBC, ad triangulum HBC; [g] erunt triangula IKC, HBC; æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium ABKI, reliquo triangulo ABH, æquale erit. [h] Igitur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC: hoc est, ita AH, ad HC, vel ita D, ad E. quod est propositum.

[e] coroll. 19. sexti. [f] 1. sexti. [g] 9. quinti. [h] 7. quinti.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D, diuisamque esse AC, in L, secundum datam proportionem inter A, & G. Inuenta ergo inter GA, & eius partem AL, terminatam angulo A, parallelæ BG, opposito, media proportionali AM, agatur per M, ipsi GB, ideoque & ipsi F, parallela MN: quam dico problema efficere, hoc est, esse triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt E, ad D. Iunctaque recta BL, [i] quoniam est, vt triangulum ABG, ad triangulum AMN, ita AG, ad AL: quod tres AG, AM, AL, continuè proportionales sint, & triangula similia similiterque posita: [k] Vt autem

[i] coroll. 19. sexti. [k] 1. sexti.

[a] 9. quinti. autem AG, ad AL, ita est idē quoq; triangulū ABG, ad triangulum ABL; [a] erunt triangula AMN, ABL, æqualia: ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. [b] Quapropter erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, [c] hoc est, vt AL, ad LC, vel E, ad D. quod est propositum.

[b] 7. quinti.
[c] 1. sexti.

QVOD si punctum diuisionis caderet in G, quod contingeret, si data esset proportio O, ad P; Ipsamet parallela BG, problema efficeret; [d] cum sit triangulum ABG, ad triangulum GBC, vt AG, GC, hoc est, vt O, ad P. Et si antecedens statui debet versus C, & data proportio esset P, ad O; [e] erit quoque triangulum CBG, ad triangulum ABG, vt CG, ad GA, vel vt P, ad O.

[d] 1. sexti.
[e] 1. sext.

ALITER.

DIVISO quouis latere, videlicet in AC, in H, secundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH; quia punctum H, cadit inter G, & C, fiat super BG, inter rectas BC, GC, trapezium BI, per parallelam IK, æquale triangulo BGH: Eritque propterea totum trapezium ABKI, toti triangulo ABH, æquale, atque idcirco & reliquum triangulum IKC, reliquo triangulo BCH. [g] Quocircirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum ABH, ad triangulum BCH, [h] hoc est, vt AH, ad HC, vel vt D, ad E.

[f] 2. huius.
[g] 7. quinti.
[h] 1. sexti.

DIVISO rursus latere AC, in L, secundum datam proportionem E, ad D, iunctaque recta BL, quoniam punctum L, cadit inter A, & G. [i] fiat super BG, inter rectas BA, GA, trapezium BM, per parallelam MN, æquale triangulo BGL: Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo LBC, & reliquum triangulum AMN, reliquo triangulo ABL, æquale, [k] Quam ob rem erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, [l] hoc est, vt AL, ad LC, vel vt E, ad D. quod erat faciendum.

[i] 2. huius.
[k] 7. quinti.
[l] 1. sexti.

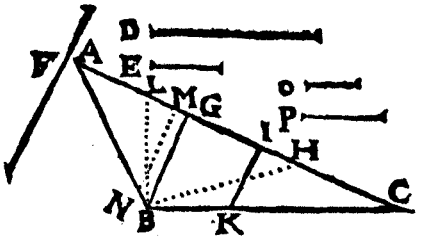
NON aliter problema absoluemus, si antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiso namque latere CA, in L, in proportionem datam D, ad E: Quoniam punctum L, cadit inter A, & G: inueniemus inter GA, AL, mediam proportionalem AM, & per M, ipsi BG, parallelam ducemus MN, quam dico problema efficere, id est, ita esse trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt D, ad E. Iuncta namque recta BL: [m] quoniam triangulum ABG, ad triangulum AMN, est, vt AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continuè sint proportionales, & triangula similia similiterque posita: [n] Vt autem AG, ad AL, ita est quoque idem triangulum ABG, ad triangulum ABL; [o] æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. Igitur erit trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt triangulum LBC, ad triangulum ABL, [p] hoc est, vt CL, ad LA, vel vt D, ad E.

[m] coroll. 19. sexti.
[n] 1. sexti.
[o] 9. quinti.
[p] 1. sexti.

QVOD si proportio data sit E, ad D; diuiso eodem latere CA, in H, in proportionem datam E, ad D, ductaque recta BH; quoniam punctum H, cadit inter G, & C, reperiemus inter GC, CH, mediam proportionalem CI, & per I, parallelam ipsi BG, agemus IK: quam dico problema efficere, hoc est, esse triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. Iuncta enim recta BH; [q] quoniam est triangulum CBG, ad triangulum CIK, vt CG, ad CH; quod tres CG, CI, CH. sint continuè proportionales, & triangula similia similiterque

[q] coroll. 19. sexti.

lineæque posita: [a] Vt autem CG, ad CH, ita quoque est idem triangulum CBG, ad triangulum CBH; [b] æqualia erunt triangula CIK, CBH: ideoque & reli- [a] 1. sexti. [b] 9. quinti.



quum trapezium IKBA, reliquo triangulo HBA, æquale erit. [c] Quocirca erit triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA, [d] hoc est, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. quod faciendum erat. [c] 7. quinti. [d] 1. sexti.

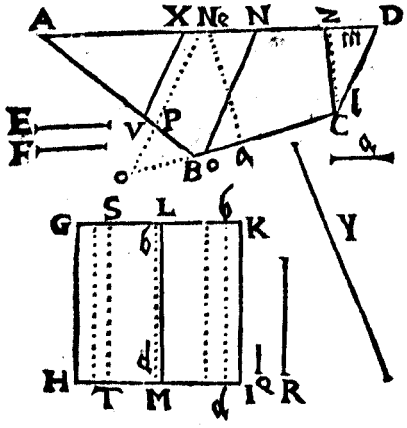
FIET idem quoque aliter, si cadente puncto diuisionis L, inter A, & G, [e] construatur trapezium GN, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Cadente verò puncto diuisionis H, inter G, & C, trapezium constituatur BI, æquale triangulo BGH, per parallelam IK, &c. [e] 2. huius.

PRÆTEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per lineam lateri CD, parallelam in duas partes, vt pars versus A, ad reliquam habeat datam proportionem E, ad F. Per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, construatur quadratum æquale GHIK; seceturque latus GK, in L, in proportionem E, ad F, datam, & per L, ipsi GH, parallela agatur LM. Deinde super CD, inter rectas CB, DA, [f] fiat rectilineo LI, æquale quadrilaterum DO, habens latus NO, lateri CD, parallelum: Et si quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipsum punctum B, recta NO, problema efficiet. Cum enim quadratum GI, toti quadrilatero AC, æquale sit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero ablato DO; erit quoque reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ANO, æquale. [g] Quapropter erit ANO, ad DO, vt GM, ad MK; [h] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. quod est propositum. [f] 2. huius. [g] 7. quinti. [h] 1. sexti.

SI verò punctum O, cadit in CB, latus productum, (quod hic fiet, si proportio data sit Q. ad R. Diuiso enim latere GK, in S, in datam proportionem Q. ad R; ductaque ST, parallela lateri GH; si super CD, inter rectas DA, CB, [i] fiat rectangulo KT, æquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, & parallela NO, secabit latus AB, in P.) [k] constituemus super NP, inter rectas NA, PA, per parallelam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, factum erit, quod iubetur. Addito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti rectilineo DO, hoc est, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangulum AVX, reliquo rectangulo GT, æquale. [l] Quare erit triangulum AVX, ad rectilineum CDXVB, vt GT. ad KT, [m] hoc est, vt GS, ad SK, vel vt Q. ad R. quod erat faciendum. [i] 2. huius. [k] 2 huius. [l] 7. quinti. [m] 1. sexti.

NON alia ratione problema absoluemus, si antecedens proportionis statuen-

dum sit ad partes CD. Sit namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiso ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum est æquale, in L, se-



cundum propottionem datam F, ad E; vel in S, secundum datam proportionem R, ad Q, ductaque parallela LM, vel ST: [a] si super CD, inter rectas DA, CB, constituemus rectilineum DO, rectangulo KM, vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulò ante dictum est, solutum erit problema, vt liquet.

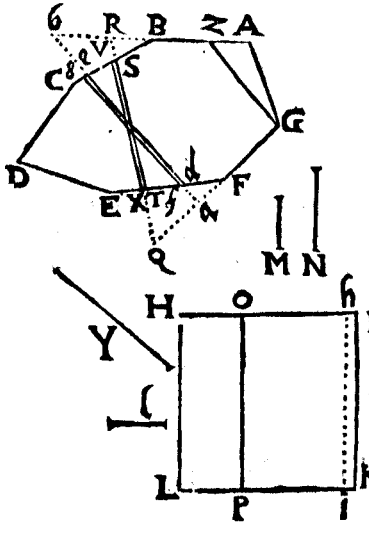
[a] 2. huius.

VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum sit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in proportionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidistet vni lateri, partiemur datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proindeque & rectæ Y, parallelam, vt proximè scripsimus. Si verò nulli lateri recta Y, æquidistet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato, auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero sit æquale, rectangulum æquale Kd. (quod fiet, si triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadratum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb. Ducta enim bd, ipsi KI, parallela, [b] erit rectangulum Kd, quadrato lateris a, hoc est, rectilineo CDZ, æquale.) Et si quidem parallela bd, cadit inter KI, & LM, [c] constituemus super CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum Caeb, rectangulo bM, æquale, cuius latus ae, lateri CZ, hoc est, datæ rectæ Y, aquidistet; factumque erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum CDea, toti rectangulo KM; ac propterea & reliquum ABae, reliquo GM, æquale. [d] Quapropter erit ABae, ad eacD, vt GM, ad KM; [e] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si verò parallela bd, coincidit cum recta LM, efficiet problema recta CZ: quia cum KM, rectilineo CDZ, sit æquale, erit reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ABCZ, æquale; [f] atque idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM, [g] hoc est, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si denique parallela bd, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatum CDZ, maius rectangulo KM. [h] Si igitur super CZ, inter rectas CD, ZD, construetur rectilineum Cm, rectangulo Ld, æquale; erit reliquum Dlm, reliquo rectangulo Gd, æquale: ac propterea

[b] 17. sexti.
[c] 2. huius.
[d] 7. quinti.
[e] 1. sexti.
[f] 7 quinti.
[g] 1. sexti.
[h] 2. huius.

pterea ad reliquum m l C B A, reliquo rectangulo KM. [a] Igitur erit A B C l m, ad l m D, vt G M, ad KM: hoc est vt G L, ad L K, vel vt E, ad F. quod est propositum. [a] 7. quinti.

EODEM prorsus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionem secabimus per lineam, quæ vni lateri vel cuiuis alij rectæ lineæ æquidistet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, secandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M, ad N habet. Constituto quadrato H I K L, æquali ipsi heptagono, per ea, quæ in schol. propos. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius scripsimus; & diuiso latere HI, in O, in proportionem M, ad N, ductaque OP, lateri HL, parallela: [b] fiat super rectam A G, inter rectas A B, G F, rectangulo I P, æquale rectilineum A G Q R, habens latus Q R, lateri A G, parallelum. Et quoniam Q R, cadit vltra F, B, [c] constituemus rursum super rectam S T, inter rectas S C, T E, per rectam V X, ipsi S T, parallelam, rectilineum æquale triangulis F Q T, B R S, extra heptagonum existentibus; factumque erit quod proponitur. Cum enim rectilineum A G Q R, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo I P, sit æquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo O L, æquale. [d] Igitur erit D E X V C, ad ABVXFG, vt O L, ad I P, [e] hoc est, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N, quod erat faciendum. [b] 2. huius. [c] 2. huius. [d] 7. quinti. [e] 1. sexti.



QVOD si latus rectilinei ex heptagono abscissi æquidistare debeat rectæ Y, q̃ nulli lateri heptagoni æqdistet (si náq; æquidistaret, vni lateri, absolueretur problema, vt proximè traditũ est) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela G Z, quæ intra figurã cadat; [f] cõstruemus rectilineo A G Z, super rectã I K, æquale rectangulũ h K; quod fiet, si rectilineo A G Z, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus I K, & l, tertia proportionalis reperiatur I h. Ducta enim h i, ipsi I K, parallela, [g] erit rectangulum h K, quadrato lateris l, hoc est, rectilineo A G Z, æquale. [h] Deinde super rectam G Z, inter rectas G F, Z B, constituemus rectangulo h P, per parallelam b a, æquale rectilineum G Z b a. [i] Nam si triangulis B b e, F a d, super rectam d e, interrectas e C, d E, fiat per parallelam f g, rectilineum d e g f, æquale; factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perspicuum est. Eademque omninò ratio est in omnibus aliis rectilineis quamuis irregularibus, dummodo in iis duci possit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim semper hoc fieri posse in figuris, cuius anguli partim introrsum, & partim extrorsum vergant, ad finem propos. 2. huius lib. declarauimus. Id quod constructio ipsã problematis perspicuè nos docebit. [f] 2. huius. [g] 17. sexti. [h] 2. huius. [i] 2. huius.

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data secetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.

DIVIDI ergo poterit quælibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuiuis rectæ lineæ æquidistent. Nam si verbi gratia data figura secanda sit in 8. partes æquales per lineas datæ rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter se proportionem habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde posteriorem partem secabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuisionis sit $\frac{1}{7}$. illius partis diuisæ, hoc est, $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum pars illa diuisa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Postea partem posteriorem proximæ diuisionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et posteriorem huius diuisionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo semper, donec ad partem deueniamus, quæ secanda sit in proportionem 1. ad 1. hoc est, in partes æquales.

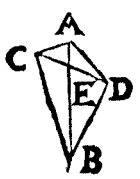
HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem scholij propos. 4. exposuimus: si videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato constructum est æquale, in tot æquales partes secetur, in quot partes datum rectilineum diuidendum est, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde posterior pars rectilinei in proportionem secundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps, &c.

ATQVE hic finem habet nostra Geodæsia complectens diuisionem omnium figurarum rectilinearum: sequuntur iam particulares nonnullæ diuisiones quarundam figurarum, quæ tum, quia subtiles acutasque demonstrationes continent, tum quia plerasque earum eruditi quoque Geometræ, vt Leonardus Pisanus, Frater Lucas Pacciolus, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo visæ sunt: Vt autem Geometricè eas demonstremus, præmittenda sunt Theoremata nonnulla, quorum primum sit hoc.

THEOREMA 2. PROPOS. 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuersas partes vergant: Recta oppositos angulos connectens à latere illo communi bifariam secatur.

SINT æqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, commune, & in diuersas partes vergentia. Dico rectam CD, oppositos angulos C, D, iungentem secari in E, bifariam à latere comuni AB.[a] Quoniã enim est tam triangulum ACE, ad triangulum ADE, quàm triangulum BCE, ad triangulum BDE, vt CE, ad ED;[b] erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE.[c] Igitur erunt quoque duo triangula simul ACE, BCE, hoc est, totum triangulum ABC, ad duo triangula simul ADE, BDE, id est, ad totum triangulum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc est, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia; erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, secta est bifariam. quod erat ostendendum.



[a] 1. sexti.

[b] 7 quinti.

[c] quinti.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo basi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur se se intersecantibus: habebit vtriusuis harum rectarum segmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuisum ad partem eius superiorem. Recta autem ex tertio angulo per intersectionem dictarum rectarum extensa secabit vtramque parallelam bifariam.

IN triangulo ABC, ducta sit DE, basi BC, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, se intersecent in F. Dico esse BF, ad FE, vt AC, ad AE: Item CF, ad FD, vt AB, ad AD. Et iunctam rectam AF, secare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. [a] Quoniam enim triangula BDC, CEB, æqualia sunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. [b] Quia verò est, vt BD, ad DA, ita CE, ad EA: [c] Vt autem BD, ad DA, ita est triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt CE, ad EA, ita triangulum CFE, ad triangulum AFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum CFE, ad triangulum AFE. Cum ergo triangulum BFD, triangulo CFE, ostensum sit æquale; [d] erit quoque triangulum AFD, triangulo AFE, æquale. [e] Igitur DE, in G, secta est bifariam: [f] ac proinde & parallela BC, secta erit bifariam in H. [g] Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; [h] estque vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AE, vt BF, ad FE: Eademque ratione erit AB, ad AD, vel AC, ad AE, vt CF, ad FD. quod etiam inde patet; [i] cum sit vt CF, ad FD, ita CFE, ad DEF, hoc est, ita BFD, ipsi CFE, æquale ad idem DEF, [k] hoc est, ita BF, ad FE. quod erat demonstrandum.

[a] *37. primi.*
[b] *2. sexti.*
[c] *1. sexti.*
[d] *14. quinti.*
[e] *6. huius.*
[f] *schol. 4. sexti.*
[g] *7. quinti.*
[h] *1. sexti.*
[i] *1. sexti.*
[k] *1. sexti.*

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppositorum laterum: Recta ex angulo reliquo per intersectionem earum deducta secat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum segmentum prope angulum ad reliquum segmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab intersectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.

IN triangulo præcedentis propos. ABC, duæ rectæ BE, CD, secent latera AC, AB, bifariam in E, D, se autem mutuo intersecet in F. Dico rectam ductam AF, secare quoque latus BC, bifariam in H, &c. [l] Iuncta enim recta DE, parallela erit ipsi BC, cum secet latera AB, AC, proportionaliter, in partes videlicet æquales: [m] Quamobrem AF, vtramque parallelam DE, BC, bifariam secabit. quod est primum.

[l] *2. sexti.*
[m] *7. huius.*

[a] 7. huius. DEINDE [a] quia est, vt AB, ad AD, ita CF, ad FD: Est autem AB, ipsius AD, dupla; erit quoque CF, ipsius FD, dupla. Eademque ratione & BF, ipsius FE; & AF, ipsius FH, dupla erit. quod est secundum.

[b] 1. sexti. POSTREMO [b] quia est vt AF, ad FH, ita triangulum A F B, ad triangulum BFH: Est autem AF, ipsius F H, ostensa dupla; erit quoque triangulum A F B, [c] 38. primi. trianguli B F H, duplum. Est autem & triangulum B F C, eiusdem trianguli B FH, duplum; [c] quod triangula B F H, C F H, æqualia sint. Igitur æqualia erunt triangula AFB, BFC. Eodemq; modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA, æqualia erunt. quod est tertium.

COROLLARIVM.

ITAQVE facilè inuenirì potest punctum intra triangulum, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipsum triangulum in tria æqualia triangula partiantur. Huiusmodi enim punctum in proposito triangulo est F, vbi duæ rectæ ex duobus quibusuis angulis ad media puncta oppositorum laterum ductæ se intersecant, vt in tertia parte huius propos. ostendimus.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunque duo latera secans: Erit totum triangulum ad abscissum triangulum, vt rectangulum sub duobus lateribus sectis totius trianguli comprehensum, ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi, quæ priorum segmenta sunt, comprehensum.

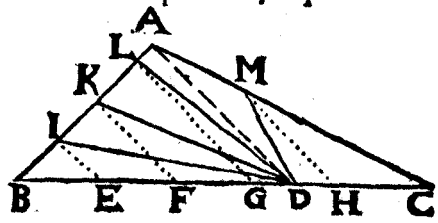
IN triangulo ABC, recta D E, secet latera A B, A C, in D, E. Dico esse vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AD, AE, ita triangulum ABC, ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC, ADE, angulum habent communem A; habebunt per propos. 4. schol. propos. 23. lib. 6. Euclid. eandem proportionem, quam rectangula sub lateribus AB, A C, & sub A D, AE, comprehensa. quod ostendendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes secundum datam proportionem diuidendum sit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata sit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis secandum sit in quotlibet partes

partes æquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum est triangulum.



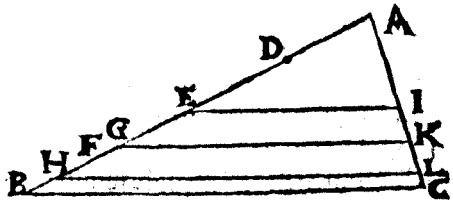
Deinde duæ tales partes: postea tres, atque ita deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ sint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt si triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum sit in quinque partes æquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum est, in quinque partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA, ducemus ei parallelas EI, FK, GL, HM. Si namque connectantur rectæ DI, DK, DL, DM, diuisum erit triangulum in quinque partes æquales. Nam vt in dicta propos. 14. scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. ostensum est, triangulum DBI, est $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet DBI, ad ABC, vt BE, ad BC. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli, id est, ita se habet DBK, ad ABC, vt BF, ad BC. At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id est, ita se habet DBL, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique ABDM, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc est, ita se habet ABDM, ad ABC, vt BH, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, esse $\frac{1}{5}$. eiusdem trianguli ABC.

QVANDO punctum datum est in vno angulo, manifestum est, si latus oppositum in tot partes secetur, in quot triangulum diuidendum est, [a] rectas ex eo angulo ad puncta diuisionum eductas secare triangulum in propositas partes æquales. [a] 1. sexti.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere,

SIT triangulum ABC, diuidendum verbi gratia in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidistantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum ni-



mirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulũ diuidendum est, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media proportionali AE; atque

atque inter AB, AE, media proportionali A G; ac denique inter AB, AF, media proportionali AH; ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ. quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. [a] Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, simile est; [b] erit triangulum ABC, ad triangulum A E I, vt A B, ad AD, quod tres A B, A E, A D, sint continuè proportionales. Est autem A D, quarta pars ipsius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars est trianguli ABC.

a *coroll. 4. sexti.*
b *coroll. 19. sexti.*

[c] NON aliter ostendemus, esse triangulum A B C, ad triangulum A G K, vt AB, ad AE, quod etiam tres AB, AG, AE, sint continue proportionales. Quare cum AE, contineat $\frac{3}{4}$. rectæ AB, continebit etiam AGK, triangulum $\frac{3}{4}$. trianguli ABC: Ideoq; cum AEI, sit $\frac{1}{4}$. trianguli ABC, vt ostendimus, erit EIKG, $\frac{1}{4}$. eiusdem trianguli A B C. Deniq; eadem ratione erit triangulum A B C, ad triangulum AHL, vt AB, ad AF, quod etiam tres AB, *A*H, *A*F, sint continue proportionales: ac proinde triangulum *A*HL, complectetur $\frac{3}{4}$. trianguli *A*BC; quemadmodum *A*F, continet $\frac{3}{4}$. ipsius *A*B: ideoq; BHLC, erit $\frac{1}{4}$. trianguli *A*BC, &c.

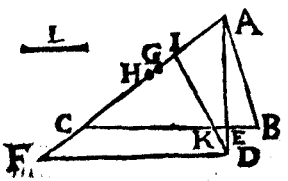
c *coroll. 19. sexti.*

PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

Ex puncto D, extra triangulum *A*B C, dato ducenda sit linea diuidens triangulum bifariam. Ducta recta D*A*, ad angulum oppositum secante latus B C, in E: si quidem B C, in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur: [d] quod tunc triangula *A*BE, *A*CE, sint æqualia. Si vero B C, non bifariam diuiditur in E, sit segmentum CE, maius, cui ducatur parallela DF, occurrens lateri *A*C, producto in F. Secto latere *A*C, bifariam in G, inueniatur tribus DF. BC, CG, quarta proportionalis CH; [e] Eritque rectangulum sub DF, CH, æquale rectangulo sub B C, C G; hoc est semissi rectanguli sub B C, C*A*: [f] cum rectangulum sub B C, C*A*, duplum sit rectanguli sub *B* C, C G. Deinde inuenta L, media proportionali inter FC, CH, [g] vt quadratum ex L, æquale sit rectangulo sub FC, CH, adiũgatur ipsi CH, recta HI, vt rectangulum sub tota CI, & adiuncta HI, æquale sit quadrato ex L, siue rectangulo sub F C, C H, quemadmodum ad finem scholij propos. 36. lib. 3. Euclid. scripsimus: ducaturque recta DI, secans *B*C, in K. Dico rectam DI, secare triangulum *A*BC, in duas partes *A*BKI, IKC, æquales. Quoniam enim per constructionem rectangulũ sub CI, IH, æquale est rectangulo sub CF, CH, [h] erit vt CI, ad CF, ita CH, ad IH; Et cõuertendo, vt CF, ad CI, ita IH, ad CH: & cõponẽdo vt IF, ad CI, ita CI, ad CH. [i] Vt aũt IF, ad CI, ita est FD, ad CK. Igitur erit quoq; FD, ad CK, vt CI, ad CH: [k] Ac pinde rectangulũ sub FD, CH, æquale erit rectangulo sub CK, CI: Erat aũt rectangulũ sub FD, CH, per constructionẽ æquale semissi rectanguli sub *B*C, C*A*. Igitur & rectangulum sub *C* K, *C* I, æquale erit semissi rectanguli sub B C, CA. Vt autem rectangulum sub CK, CI, ad rectangulum sub *BC*, *C*A, [l] ita est triangulum *C*K I, ad triangulum *A*B*C*. Igitur triangulum *C*K I, æquale quoque erit

d *38. primi.*
e *16. sexti.*
f *1. sexti.*
g *17. sexti.*



h *16. sexti.*
i *4. sexti & permutando.*
k *16. sexti.*
l *9. huius.*

erit semissi trianguli ABC: ac proinde quadrilaterum ABKI, reliquæ semissi trianguli ABC, æquale erit. quod est propositum.

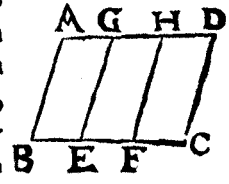
EADEM ratione, si pro CG, sumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcumque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt supra, auferemus per rectam ex D, ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel deniq; talē partem ex triangulo ABC, qualis sumpta est C G, ipsius A C, vt perspicuum est.

LEONARDVS Pisanus, & Nicolaus Tartalea, idem hoc problema soluūt, quando datum punctum est extra triangulum in tali loco, vt vnum latus trianguli productum, in illud incidat, cuiusmodi esset punctum F, datum. Item quando est inter duo latera producta: Vt si triangulum foret AEC, punctū autem inter B, & D, existeret, ita vt ab eo solum per angulum E, duci posset linea secans latus A C: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C, ductæ nullum latus intersecarent. Verum quia hęc curiosa magis, quam vtilia sunt, dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea desiderat, auctores prædictos legere poterit. Pari ratione abstinemus ab eo problemate, quando punctum datum est intra triangulum (quod tamen ijdem auctores soluere conantur) quia non semper per punctum interius duci potest linea, quæ triangulū bifariam secet, vt experientia constat.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunq; partes æquales per lineas duobus lateribus oppositis æquidistantes diuidere.

SIT parallelogrammum ABCD, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB, DC, æquidistantes. Diuiso alterutro reliquorum duorum laterum, nimirum B C, in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidendum, in E, & F, punctis, ducantur EG, FH, ipsis AB, DC, parallelæ: factumque erit, quod iubetur; [a] quod parallelogramma A E, E H, H C, ęqualia sint, propter æquales bases BE, EF, FC.



[a] *1. sexti vel 38. primi.*

COROLLARIVM.

ITAQVE si ex latere auferatur $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel denique qualiscunque pars, vel partes, & per extremum eius punctum parallela lateri AB, ducatur, ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars, vel eædem partes. Ita vides A E, esse partem tertiam parallelogrammi AC, quemadmodum & B E, tertia pars est lateris B C, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto siue extra, siue intra ipsum, siue in aliquo latere dato ductam, bifariam diuidere.

SIT primò parallelogrammum ABCD, per rectam ex puncto E, exterior ductam secundum bifariam. Ducta diametro BD, eaque secta bifariam in F, ducatur ex E, per F, recta EH, quam dico parallelogrammum partiri bifariam. Nam vt in scholio Propos. 34. lib. 1. Euclid. demonstrauimus, recta GH, diuidens diametrum BD, in F, bifariam, secat parallelogrammum bifariam. Idem fiet, si recta IK, latera AD, BC, secans bifariam, diuidatur bifariam in F, & per F, extendatur recta EF, propterea quod IK, diametrum secat bifariam, ac proinde per F, punctum medium diametri transit.

a 29. primi.
b 26. primi.

a Cum enim anguli IDF, FID, angulis alternis KBF, FKB, æquales sint, & latera ID, KB, quibus adiacent, æqualia; b erunt tam latera DF, quam IF, KF, inter se æqualia.

EODEM modo ex puncto interiori L; Item ex puncto G, in latere BC, recta ducta LF, vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

INTER datas duas rectas, duas medias proportionales prope verum inuenire.

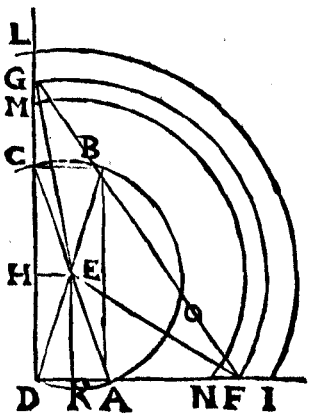
EXPOSITA Geodæsia nostra prioribus quinq; propositionibus huius lib. & nouem alijs propositionibus, ijs demonstratis, quæ addenda esse censuimus ad idem argumentum spectantia: agendum iam esset de augendis minuendisq; figuris in data proportione, vt in titulo huius lib. 6. proposuimus. Verum quia sicut id in planis figuris effici non potest sine inuentione medię proportionalis inter duas rectas propositas, quam inuentionem Euclid. lib. 6. propos. 13. nobis tradidit: ita idem absolui in figuris solidis nulla ratione potest, nisi inter duas rectas datas duæ mediæ reperiantur proportionales. Quocirca prius in hac propos. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de rescripta relinquerunt. Multorum enim ingenia res hęc exercuit, atque torsit, quamuis nemo ad hanc vsque diem, verè, ac Geometricè duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Prætermissis autem modis Eratosthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; menechmi tum beneficio Hyperbolę, ac parabolę, tum ope duarum parabolarum; & Architæ Tarentini, quamuis acutissimis subtilissimisque: solum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Bysantio, Philoppono, Diocle, & Nicomede traditos explicabimus, quos cōmodiores, facilioresque, & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes desiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Ascalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphęra, & Cylindro: Item in libello Ioannis Verneri Norimbergensis de sectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS introductionibus, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo ascribitur.

SINT duæ lineę rectę AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Constituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulū ABCD.

ABCD, cum diametris AC, BD, [a] quæ se mutuo bifariam diuident in E. Satis esset vnam tantum diametrum ducere, eamque in E, secare bifariam. Protractis autem lateribus DA, DC, intelligatur circa punctum B, moueri regula hinc inde, donec ita secet DA, DC, productas in F, & G, vt rectæ emissæ EF, EG, ęquales sint. Vel certè, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli describantur LI, GF, MN, donec chorda arcus vnius pręcisè per punctum B, incedat, qualis est GF. Quod si chorda supra B, transeat, cuiusmodi est chorda LI, describendus erit circulus ȳ.L; Si verò infra punctũ B, transeat, qualis est chorda MN, describẽdus erit circul° ȳ.M. Atque hoc opus toties iterandum, donec aliqua chorda, qualis est GF, per B, incedat. Erunt enim hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circumferentiam GF, inter se ęquales. Quibus ita constructis. Dico AF, CG, esse medio loco proportionales inter AB, BC: hoc est, ita esse AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuisis enim AD, CD, bifariam in K, & H; [b] erunt ductę EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares. [c] Quoniam verò rectangulum sub DF, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, ęquale est; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum sub DF, AF, vna cum quadratis ex AK, EK, [d] hoc est, vna cũ quadrato ex EA, ęquale quadratis ex KF, EF, [e] hoc est, quadrato ex EF, hoc est, quadrato ex EG, quę ipsi EF, est æqualis. Eadem ratione ostendemus, rectangulum sub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id est, ex EA, ęquale esse eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum sub DF, AF, vna cum quadrato ex EA, ęquale erit rectangulo sub DG, GC, vna cum quadrato ex EA: demptoque communi quadrato EA; remanebit rectangulum sub DG, GC, rectangulo sub DF, AF, ęquale. [f] Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG: [g] Vt autem DG, ad DF, ita est AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc est, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt. [h] Sed rursus est, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoque CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoq; vt AF ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continuè proportionales. quod erat demonstrandum.

[a] *schol. 34. primi.*



[b] *schol. 26. primi.*
[c] *6. secundi.*
[d] *47. primi.*
[e] *47. primi.*
[f] *16. sexti.*
[g] *4. sexti.*
[h] *4. sexti.*

MODVS PHILONIS BYSANTII, qui Philoppono quoque tribuitur.

SINT rursus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendę duę medię proportionales. Constituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productisq; lateribus DA, DC, vt supra; describatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC, vel EA, [i] qui necessario per angulum rectum B, transibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, secans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, ęquales sint. Quod fiet, si per B, plurimę lineę occultę ducantur. Vna enim earum habebit segmentum inter rectam DG, & circulum æquale segmento inter DF, & eundẽ

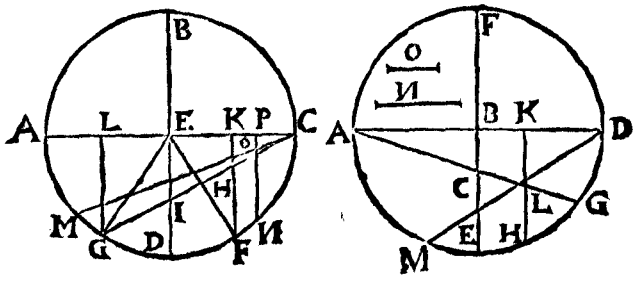
[i] *schol. 31. tertij.*

circulum. Quibus peractis, dico AF, CG, medias proportionales esse inter AB, CB. Quoniam enim ęquales sunt GB, FO; addita communi BO, æquales quoque erunt GO, FB: ideoque rectangulum sub GO, GB, rectangulo sub FB, FO, æquale erit. [a] Sed illud rectangulo sub DG, GC, & hoc rectangulo sub DF, AF, est æquale. Igitur & rectangulum sub DG, GC, rectangulo sub DF, AF, æquale erit. Quamobrem, vt in præcedenti modo, ostendemus, AB, AF, CG, CB, esse continue proportionales. quod est propositum.

[a] 1. coroll. 36. tertij.

MODIS DIOCLIS IN LIBRO DE Piriis pulcherrimus.

PRÆMITTIT prius Diocles Lemma tale. Describatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, se se ad angulos rectos secantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iungatur recta CG, & per F, ipsi BD, parallela agatur FK, secans CG, in H. Hoc facto, erunt



FK, KC, mediæ proportionales inter AK, KH. Ducta namque GL, parallela ipsi BD, iunctisque rectis EF, EG, [b] quoniam anguli LEG, KEF, insistentes arcubus æqualibus AG, CF, æquales sunt, [c] & anguli L, K, recti, lateraque EG, EF, æqualia; [d] erunt & GL, FK, & EL, EK, inter se æquales: ideoque & reliquæ AL, CK; Immo addita communi LK, & totæ AK, CL, æquales inter se erunt. [e] Quoniam igitur est CL, ad LG, vt CK, ad KH: estque vt CL, ad LG, ita AK, ad KF, quod hæ illis æquales sint: erit quoque AK, ad KF, vt CK, ad KH. [f] Vt autem AK, ad KF, ita est KF, ad CK. Igitur erit AK, ad KF, vt KF, ad CK, & CK, ad KH, hoc est, KF, CK, mediæ proportionales erunt inter AK, KH. quod est propositum. Pari ratione, si, sumptis arcubus ęqualibus DM, DN, iunctaq; recta CM, ducatur NP, ipsi BD, parallela secans CM, in O; erunt PN, CP, inter AP, PO, mediæ proportionales, &c.

[b] 27. tertij. [c] 27. primi. [d] 26. primi.

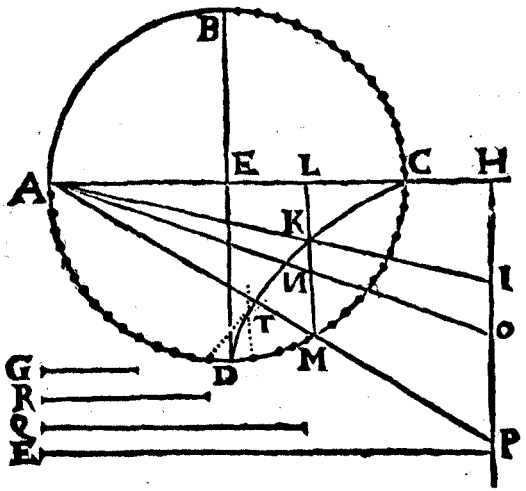
[e] 4. sexti. [f] schol. 13. sexti.

Hoc lemmate præmisso, sint inter rectas AB, BC, reperiendæ duæ mediæ proportionales. Constituantur in altera figura ad angulum rectum B, & centro B, ad interuallum maioris BA, describatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vsque protendantur AB, BC. Deinde ex A, per C, ducta recta ACG, sumatur in quadrante DE, punctum H, in tali situ, vt ducta HK, ipsi EF, parallela secante ipsam AG, in L; recta ex D, per L, emissa auferat arcũ EM, arcui EH, æqualem. Nam hac ratione, per lemma præmissum, erunt KH, DK, mediæ proportionales inter AK, KL. [g] Et quoniam est vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: si fiat, vt AK, ad KH, ita AB, ad N; & vt KH, ad DK, ita N, ad O; erunt quoque N, O, mediæ proportionales inter AB, BC. Neque enim dubitandum est, esse & O, ad BC, vt DK, ad KL. Cum enim sit, vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: habeat

[g] 4. sexti.

habeat autem AK, ad KL, proportionem triplicatã AK, ad HK, hoc est, AB, ad N; habebit etiam AB, ad BC, triplicatam proportionẽ AB, ad N. Cum ergo proportio AB, ad N, sit æqualis proportioni N, ad O; erit eidem æqualis proportio O, ad BC, vt tres æquales proportiones existant inter AB, & BC. Igitur quatuor AB, N, O, BC, continuè proportionales sunt, quemadmodum quatuor AK, KH, DK, KL. quod est propositum.

VERVM, quia difficile visum fuit Diocli accipere in posteriori figura punctum H, in tali situ, vt recta DM, secans AG, & parallelam HK, in L, auferat arcum EM, arcui EH, æqualem: descripsit lineam quandam inflexam ad hanc rem aptissimam, hac ratione. Describatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, sese ad angulos rectos in E, secantibus. Deinde in quadrante CD, capiantur quotcunque puncta parum inter se distantia, quæ ex D, & B, ordine in quadrantes DA, BC, transferantur. Post hæc applicata regula ad bina puncta quadrantum DC, BC, æqualiter à B, D, distantia, ducantur rectæ occul-



tæ, [a] quæ ipsi BD, parallelę erunt. Et ex C, ad singula puncta quadrantis DA, rectę occultæ emittantur, notenturque harum intersectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirum punctum T, vbi recta ex C, ad proximum punctum ipsi D, ducta intersecat proximam parallelam ipsi BD, & sic deinceps. Nam si omnia hæc intersectionum puncta ritè per lineam inflexam coniungantur, qualis est CKTD, constructa erit figura mediis duabus proportionalibus inueniendis aptissima. Sint enim inter duas F, G, duæ mediæ proportinales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta, si opus est, sumatur AH, maiori F, æqualis. Ducta deinde perpendiculari HP, abscindatur HI, minori G, ęqualis. Ducta autem AI, secante lineam inflexam in K, agatur per K, ipsi BD, parallela LM. Denique sumpta LN, ipsi LC, æquali, ducantur per N, & M, rectæ AN, AM, secantes HP, in O, P. Dico HP, HO, esse medias proportionales inter AH, HI, hoc est, inter F, & G. Quoniam enim punctum K, lineæ inflexæ inuentum est per rectam ad punctum quadrantis DA, ductã, quod tanto interuallo à puncto D, abest, quanto punctum M, ab eodem distat, vt ex descriptione lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor rectæ AL, LM, LC, vel LN, & LK, continuè proportionales.

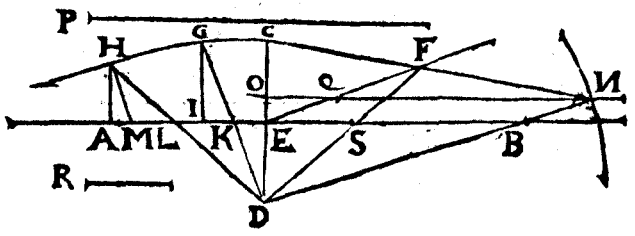
[a] *schol. 27 tertii.*

 [b] Cum

[a] 4. sexti. a Cum ergo hisce quatuor rectis proportionales sint quatuor rectæ AH, HP, HO, HI; erunt hæ quoque continuè proportionales. quod est propositum.

MODVS NICOMEDIS IN libro de lineis Conchoidibus.

NICOMEDES construit prius instrumentum quoddam, quo lineam inflexam describit, quam Conchilem, vel Conchoideos appellat. Sed nos omisso eo instrumento, eandem, (quod ad nostrum institutum satis est) per puncta delineabimus, hac ratione. Sit recta linea AB, & ad eam perpendicularis CD, in puncto E. Sumatur deinde infra E, punctum D, pro polo lineæ describendæ, & supra E, aliud punctum C, vt libet. In vsu lineæ descriptæ constabit, quantum tam punctum D, quam punctum C, à puncto E, abesse debeat. Si igitur ex D, ducantur plurimæ lineæ occultę parum inter se distantes, & ex singulis ab-



scindantur portiones rectæ EC, æquales, initio semper facto à recta AB; extrema autem harum portionum puncta per lineam inflexam coniungantur descripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF, DN, in quibus sumptæ sunt LH, KG, SF, BN, ipsi EC, æquales, per quarum extrema puncta H, G, F, N, inflexa linea incedit. Et quo plures lineæ occultę ex D, educentur, eo crebriora puncta inuenientur, per quæ transire debet linea inflexa.

SEQVITVR ex descriptione huius lineæ, eam nunquã posse cum recta AB, conuenire, licet vtraque in infinitum producatur: quia puncta, per quæ incedit, sunt omnia supra rectam AB, terminantia nimirum segmenta rectarum ex D, prodeuntium ([b] quæ quidem omnes rectam AB, intersecant) ipsi EC, æqualia.

[b] pronunciatum 11. lib. 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ insignes. Prima est. Quodlibet eius punctum à puncto C, diuersum minus distat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius est à C, minus distat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum est. Ducta enim recta quacunque DG, demittatur perpendicularis GI. [c] Et quia KG, maior est quam GI; erit quoque perpendicularis EC, (ipsi KG, æqualis) maior quam perpendicularis IG, hoc est, punctum C, magis distabit à recta AB, quam punctum G. Eademq; ratione magis à recta AB, distabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis HA. Dico punctum H, minus distare à recta AB, quam punctum G, hoc est, perpendicularem HA, minorem esse perpendicu-

[c] 19. primi.

lari

culari GI. Ducta namque recta DH, [a] erit angulus DKE, maior angulo DLE. [a] 16. primi.
[b] hoc est angulus GKI, angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales sint; [c] erit [b] 15. primi
reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipsi G, fiat æqualis AHM; erunt trian- [c] 32. primi.
gula KGI, MHA, æquiangula; [d] ideoque erit, vt MH, ad HA, ita KG, ad GI. [d] 4. sexti.
[e] Et quia LH, maior est, quam MH, [f] (quod angulus HML, maior sit recto A, [e] 19. primi.
[g] & HLM, minor) [h] erit maior proportio LH, ad HA, quam HM, ad HA, hoc [f] 16. primi.
est, quam GK, ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales sint, erit quoque ma- [g] 17. primi.
ior proportio HL, ad HA, quam HL, ad GI; [i] ideoque HA, minor erit quam [h] 8. quinti.
GI. quod est propositum. [i] 10. quinti.

ALTERA proprietas est. Quamuis Conchilis CF, nunquam conueniat cum recta EB, tamen cum qualibet alia recta, etiam ipsi EB, propinquissima conuenit. Sit enim primum recta NO, ipsi EB, parallela, secans EC, in O. Fiat vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Et quoniam EO, minor est quam EC: [k] erit quoque [k] 14. quinti.
OD, minor quam P. Si igitur ex D, ad interuallum rectę P, describatur arcus circuli, secabit is rectam ON, in aliquo puncto, vt in N. Dico Conchilem CF, prolongatam coire cum ON, in N. Ducta enim recta DN, secante EB, in B, quæ ipsi P, æqualis erit; [l] quoniam est vt EO, ad OD, ita BN, ad ND; hoc est, ad si- [l] 4. sexti.
bi æqualem P. Fuit autem etiam, vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: [m] ac proinde inter se æquales erunt; [m] 9. quinti.
ideoque Conchilis per N, transibit.

SIT deinde recta QF, non parallela ipsi EB, sed eam secet in E, vergatque versus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipsa QF, in F, vt perspicuum est.

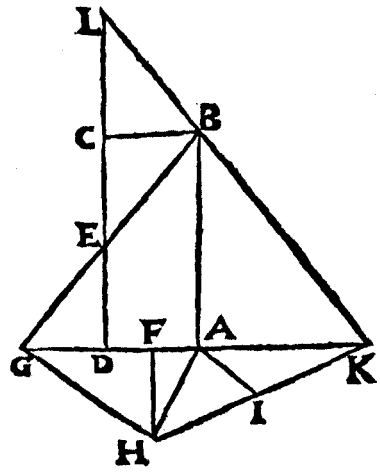
POST hæc Nicomedes dissoluit huiusmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes: Ab illo puncto educere rectam secantem rectas datum continentes angulum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis sit datæ rectę. In eadem namque figura rectæ EB, EF, angulum contineant BEF, ducendaque sit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis sit datæ rectæ, R. Ex O, ad inferiorem lineam EB, ducatur perpendicularis DE, sumaturque EC, datæ rectæ R, æqualis: & polo D, interuallo verò EC, Conchilis describatur, quæ per secundam proprietatem rectam EF, secabit in F. Ducta ergo recta DF, secante EB, in S; erit SF, ipsi EC, hoc est, ipsi R, æqualis, vt ex descriptione Conchilis liquet.

HIS præmissis, sint duæ rectæ AB, BC, ad angulum rectum B, coniunctæ, inter quas reperiendæ sint duę lineæ medię proportionales. Compleatur rectangulum AC, cuius duo latera AD, CD, bifariam secentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta secante AD, productam in G; [n] erit DG, ipsi CB, hoc est, ipsi [n] 28. primi.
DA, æqualis; propterea quod anguli D, E, trianguli DEG, angulis CE, trianguli CEB, æquales sunt, & latera quoque DE, CE, quibus adiacent, æqualia. Rursus ductam perpendicularem FH, secet AH, ipsi CE, æqualis, quod fiet, si ex A, ad interuallum CE, arcus delineetur secans FH, in H. Deinde iuncta recta GH, ducatur ei parallela AI: atq; producta DA; ex H, per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita secans, vt intercepta IK, ipsi AH, vel CE, æqualis sit. quod fiet, si ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis sit ipsi AH, vel CE. Postremò ex K, per B, recta

extem-

extendatur secans DC, productam in L. Dico duas AK, CL, medias proportionales esse inter AB, BC. [a] Quoniam enim est LC, ad CD, vt LB, ad BK, hoc est, vt DA, ad AK; Et vt CD, ad CE, ita est GA, ad DA, quod vtraque CD, GA, secta sit bifariam in E, D: erit ex proportione perturbata LC, ad

[a] 2. sexti.



L C.	G A.
C D.	D A.
C E.	A K.

CE, vt GA ad AK, vt in hac formula apparet: hoc est, vt HI, ad IK. Cum ergo CE, ipsi IK, sit æqualis per constructionem, [b] erit quoque LC, ipsi HI, æqualis, & tota LE, toti HK. [c] Deinde quia rectangulum sub DK, KA, vna cum quadrato ex AF, æquale est quadrato FK; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum sub DK, KA, vnà cum quadratis ex AF, FH, [d] hoc est, vna cum quadrato ex AH, vel ex CE, æquale quadratis ex KF, FH, hoc est, quadrato ex HK, id est, ex LE, ipsi HK, æquali. [e] Sed & rectangulum sub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE, æquale quoq; est eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum sub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectangulo sub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE; Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum sub DL, LC, reliquo rectangulo sub DK, AK, æquale erit. [f] Igitur erit DL, ad DK, [g] hoc est, AB, ad AK, vt AK, ad LC. [h] Vt autem AB, ad AK, ita est quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB: ac proinde AK, LC, medię proportionales erunt inter datas AB, BC, quod est propositum.

[b] 14. quinti.
[c] 6. secundi.
[d] 47. primi.
[e] 6. secundi.
[f] 16. sexti.
[g] 4. sexti.
[h] 4. sexti.

QVOD si datę duę rectæ sint nimis longę, accipi poterunt earum semisses, vel tertię partes, &c. atque inter eas duę medię inquirendę. Nam si inuentę duplicentur, vel triplicentur, &c. habebuntur duę medię inter datas duas. Quod etiam in aliis modis intelligendum est.

PROBL. II. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

HOC problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propos. 15. scholij propos. 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus AB, vel circulus, cuius diameter AB, oporteatque constituere maius rectilineum, vel circulum maiorem in proportione, C, ad D, nimirum sub tripla. Tribus lineis C, D, AB, inueniatur quarta pro-

ta proportionalis E, atque inter AB, & E, reperiatur media proportionalis FG. & supra FG, figura construatur similis datæ figuræ AB, similiterque posita. Item circulus describatur circa diametrum FG. Dico tam rectilineum AB, esse tertiam partem rectilinei FG, quam circulum AB, circuli FG, nimirum eandem habere proportionem AB, ad FG, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectę AB, FG, & E, continuè proportionales sunt, [a] erit figura AB, ad figuram FG, vt AB, ad E, hoc est, vt C, ad D. [b] Quia verò est, vt quadratum ex AB, ad quadratum FG, ita circulus AB, ad circulum FG; estque quadratum AB, ad quadratum FG, vt AB, ad E; erit quoque circulus AB, ad circulum FG, vt AB, ad E, vel vt C, ad D.

[a] *coroll. 19. vel 20. sexti.*
[b] *2. duodec.*

SIT deinde figura, vel circulus HI, oporteatque construere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, HI, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter HI, & M, media proportionalis inueniatur NO, supra quam construatur figura similis similiterque posita figuræ HI: Item circulus describatur circa diametrum NO. Dico tam figuram HI, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum NO, habere proportionem triplam, eandem videlicet, quam habet K, ad L. Quoniam enim tres rectæ HI, NO, & M, continuè sunt proportionales; [c] erit figura HI, ad figuram NO, vt recta HI, ad M, hoc est, vt K, ad L. [d] Et quia est, vt quadratum HI, ad quadratum NO, ita circulus HI, ad circulum NO, estque quadratum HI, ad quadratum NO, vt recta HI, ad M; erit quoque circulus HI, ad circulum NO, vt recta HI, ad M, vel vt K, ad L.

[c] *coroll. 19. vel 20. sexti.*
[d] *2. duodec.*

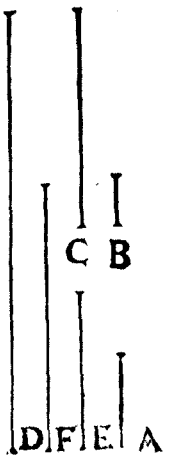
Ex his constat, qua ratione, dato foramine rotundo, vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione construendum sit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram solidam qualemcunque ex iis, de quibus Eucl. in lib. Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ solidæ sunt parallelepipedum, Pyramis, Prisma, sphæra, Conus, Cylindrus, & quinque corpora regularia.

SIT ergo figura solida, cuius latus A, vel sphæra, cuius diameter A, augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B, C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A, & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E, F. Dico solidum lateris A, ad solidum supra latus E, nimirum supra mediam proportionalem, quæ propinquior est lateri dato A, constructum simile, similiterque positum solido supra latus A, constituto, habere proportionem, quam B, habet ad C. Item sphæram datam diametri A, ad sphæram diametri E, esse, vt B, ad C. Quoniam enim figura solida lateris A, ad figuram solidam lateris E, similem similiterque positam habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E, vt lib. 11. & 12. Eucl. de-



monstratum est: Similiter Conus & Cylindrus, cuius basis diameter A, ad Conum & Cylindrum similem, cuius diameter E: Nec non sphæra diametri A, ad sphæram diametri E; Est autem, ex defin. 10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A, ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit solidum A, ad solidum E, vt A, ad D, hoc est, vt B, ad C. quod est propositum.

SIT deinde solidum lateris, vel diametri D, minuendum in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico solidum lateris, vel diametri D, ad solidum simile similiterque descriptum supra F, nimirum supra mediam proportionalem, quæ lateri dato D, propinquior est, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim solidum D, ad simile similiterque descriptum solidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Eucl. recta D, ad rectam A: erit solidum D, ad solidum F, vt D, ad A, id est, vt C, ad B. quod est propositum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non solum duplicandus sit (quod veteres inquirebant) sed etiam augendus minuendusue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant secundum proportionem datam.

SCHOLIVM.

FIGVRAS solidas similiterque positas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonstratum est de parallelepipedis quidem lib. 11. Eucl. propos. 33. De pyramidibus verò lib. 12. propos. 8. eiusque coroll. & de Prismatis, in eiusdem scholio. De sphæra autem lib. eodem 12. propos. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propos. 12. si pro lateribus homologis sumantur diametri sphærarum, & diametri basium Conorum, & Cylindrorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propos. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in sphæris describi possint.

QVAMVIS autem problema hoc de supradictis corporibus duntaxat proposuerimus, idem tamen etiam locum habet in aliis cuiusque generis corporibus similibus, similiterque positis, vt perspicuum est; propterea quod diuidi possunt in pyramides similes, æquales numero; [a] quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. [b] Cum ergo sit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id est, ita solidum ad solidum; sintque eadem latera homologa solidorum, quæ pyramidum similium, constat propositum.

[a] 8. duodec. eiusq; coroll.
[b] 12. quinti.

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON rarò figura siue plana, siue solida augenda, vel minuenda est per numeros, quod quidem sine inuentione vnius medij proportionalis, vel duorum mediorum inter datos duos numeros perfici non potest; idcirco artem præscribe-

ſcribemus, qua huiuſmodi medias inuenire poſsimus. Propoſitis igitur primum duobus numeris quibuſcunque 9. & 25. inter quos reperiendus ſit vnus medius proportionalis; ſi multiplicentur inter ſe, & producti numeri 225. radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: [a] erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri æquale ſit rectangulo ſub extremis comprehenſo. Sic inter 5. & 13. medius proportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulò maior eſt, quam $8\frac{1}{17}$. & paulò minor, quam $8\frac{1}{16}$.

[a] *17. ſexti, vel 20. ſept.*

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi ſint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti namque numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorem collocandus. Et ſi maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorem ſtatuendus, vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei eſt, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & ſub altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo aſſumpto propinquior eſt, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus. Quoniam verò, vt in ſcholio propoſ. 19. lib. 8. Euclid. oſtendimus, propoſitis hiſce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, ſiue prius ducantur 2. in 2. deinde productus 4. in 54. ſiue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Item datis hiſce tribus numeris 54. 54. 2. idem numerus gignitur, ſiue prius ducantur 54. in 54. deinde productus 2916. in 2. ſiue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54. manifeſto colligitur, ſi minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem conſtituendi: Item ſi maior 54. ducatur in minorem 2. & productus 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem ſcribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cæterum inuento altero mediorum numerorum, reperietur alter etiam, ſi inuentus per extremum remotiorem multiplicetur & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. ſi medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. ſi multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 6. 18. quam 6. 18. 54. ſunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI ſint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumptæ propinquior eſt.

REPETATVR figura propoſ. 17. in qua lineæ quatuor continuè proportionales ſunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum ſub quadrato extremæ A, &

[a] *coroll. 20. sexti.* altera D, contentum, cubo rectæ E, æquale esse. [a] Quoniam enim quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E proportionem habet, quam A, ad F, id est, quam E, ad D, reciprocabuntur bases cum altitudinibus, cum basis parallelepipedi sit quadratum rectæ A, & eiusdem altitudo recta D: cubi autem basis quadratum rectæ E, & altitudo ipsamet recta E. [b] Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum sub quadrato extremæ D, & sub altera extrema A, contentum æquale cubo rectæ F. [c] Nam cum sit, vt quadratum rectæ D, ad quadratum rectæ F, id est, vt basis dicti parallelepipedi ad basem dicti cubi, ita D, ad E, hoc est, ita F, ad A, hoc est, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabuntur quoque bases cum altitudinibus: [d] ideoque æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. quod est propositum.

[b] *34. vndecimi.*

[c] *coroll. 20. sexti.*

[d] *34. vndecimi.*

QVIA verò in nostra Arithmetica practica solum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortasse alieno, inserere: quandoquidem ea necessaria omninò est, vt problema hoc 13. ad opus possit deduci. Hoc autem efficiam, si præscribam artem quandam generalem, qua cuiuscunque generis radicem extrahere possimus, ex libro eximij cuiusdam Arithmetici Germani depromptam fermè totam: quod quidem studioso Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuslibet generis extrahere.

Extractio radicis quid. EXTRACTIO radicis est inuentio numeri ex proposito numero, qui multiplicatione aliqua in se numerum propositum producat. Vt extractio quadratæ radicis est inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadratè multiplicatus ipsum producat: Et extractio radicis cubicæ, est inuentio numeri, qui in se ductus cubicè producat cubum propositum, &c. Quid autem sit multiplicare numerum quadratè, aut cubicè, aut alio modo, mox explicabo.

Infinita species radicum. QVEMADMODVM igitur infinitæ sunt species multiplicationum numerorum in se, vt statim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati; & solidi, vt cubi, Zensicensi, Surdesolidi, &c. qui à Iunioribus nonnullis in Algebra explicari solent: sic etiam infinitæ sunt radicum species iuxta varias numerorum appellationes, qui consurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchrè nobis repræsentat naturalis numerorum progressio, inseruiens progressionibus Geometricis ab vnitate incipientibus; vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. &c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024. &c.
	Radix	Quadratus	Cubus.	Zensizensus	Surdesolidus.	Zensicubus	B, surdesolidus.	Zensizenzensus.	Cubicubus	Zensurdesolidus.

PRIMVM numeri superioris progressionis significant species multiplicationum. Vt 2. supra quadratum significat, multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, & sic multiplicatur, vt 2. 2. facit 4. Sic 3. significat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2. 2. 2. facit 8. Pari ratione 4. ostendit multiplicationem Zensizensicam: Et 5. surdesolidam, &c.

DEINDE ijdem numeri significant radicum species. Vt 2. significat, radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratam: Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam: Et sic deinceps.

IN extractionibus igitur radicum obseruanda est signatio figurarum per pũcta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda est, hoc modo.

IN extractione radicis quadratæ signantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris: ita vt alternatim semper vna figura omittatur, quæ non signetur.

IN extractione cubica omittuntur semper duæ figuræ. In Zensizensica tres. In surdesolida quatuor. Et sic deinceps in infinitum. Vt in appositis exemplis vides.

Quo modo figuræ per puncta signentur.

Pro quadrata.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . . . .
Pro cubica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . . .
Zensizensica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . .
Pro surdesolida.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
. . .

RESPONDENT autem hæ signationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratę omittitur semper vna figura: Inter duos verò Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur semper duæ figuræ, & sic de cæteris.

PRO qualibet autem specie radicis extrahẽdę inseruiunt quidam numeri peculiares: qui per sequentem tabulam inueniuntur, quæ hoc modò construitur. Prima columna continet seriem naturalẽ numerorũ. Ex hac colũna nascit secũda: tertia ex secũda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duab. cellulis primæ colũnæ, repetit numerus tertiæ cellulæ in secunda columna. Deinde ex additione duorum numerorum, id est, ex tertio primæ columnæ, & primo secundæ columnæ, fit secundus numerus secundæ columnæ. Eodem modo ex secundo numero secundæ columnæ, & ex eius collaterali conficitur tertius secũdæ columnæ: Atque ex tertio numero secundæ columnę, & ex eius collaterali fit quartus eiusdem secundę columnæ,

Constructio tabulæ mirificæ.

1								
2								
3	3							
4	6							
5	10	10						
6	15	20						
7	21	35	35					
8	28	56	70					
9	36	84	126	126				
10	45	120	210	252				
11	55	165	330	462	462			
12	66	220	495	792	924			
13	78	286	715	1287	1716	1716		
14	91	364	1001	2002	3003	3432		
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310

& sic deinceps. Continentur autem in secunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex secunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquũtur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero sequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur secundus numerus, &c.

Quo pacto ex superiori tabula desumantur numeri pro singulis radicum speciebus.

HAC extructa tabula, desumuntur numeri peculiares ex ordinibus transuersalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis transuersalis ordine scribuntur, ijdemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo semper excepto, & penultimo etiam tunc solum, quando vltimo æqualis est. Vt in secundo ordine sumitur tantum numerus 2. quia cum sit vltimus, non repetitur. In tertio sumuntur quoque hi duo tantum 3.3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem sumendi sunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, semper tot numeros assumi, quot sunt vnitates in primo numero transuersali, minus vno. Vt in ordine septimodecimo assumendi erunt hi sexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & sic de cæteris.

CVILIBET deinde numero præponendæ sunt tot cifræ, quot numeri ab eo inclusiue numerantur vsque ad vltimum assumptum. Vt numero 2. secundi ordinis præponenda est vna cifra, hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordinè, vbi assumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, secundũs septem, tertius sex, & sic semper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inseruiant prædicti numeri in quolibet ordine transuersali accepti, pulchrè indicat primus numerus ordinis transuersalis. Vt

lis. Vt quia in superiori progressione numerus 2. notat quadratum, & 3. cubũ: & 4. Zensizensum, &c. ideo numerus 2. secundi ordinis cum sua cifra, hoc modo. 20. inseruit radici quadratæ: Et duo numeri ex tertio ordine assumpti cum suis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicæ: Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zensizensicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici surdesolidæ, &c.

IAM verò vt propius ad extractionem radicum accedamus, sciendum est, radicẽ cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta sub ipso signata sunt, secundum doctrinam superiorem. Item ad punctum vltimum versus sinistram pertinere ipsam figuram supra punctum positam, cum omnibus alijs, quæ ipsam versus sinistram præcedunt. Ex quo puncto si subtrahatur numerus, vt mox dicemus, spectabit ad penultimum punctum figura supra ipsum punctum cum reliquis ad sinistram, & sic de cæteris. *Quot figuras quelibet radix habeat.*

VT autem ritè incipiat extractio cuiuslibet radicis, construenda erit tabella quadratorum, cuborum, surdesolidorum, B, surdesolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum suis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices.	Cubi.	Radices.	Surdesolidi.	Radices.	B, Surdesolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

Cur autem non apposuerim tabellas Zensizensorum. & zensicuborũ, causa est, quod eiusmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt postea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS Quadratæ.

SIT numerus propositus 6 7 6 5 2 0 1. ex quo erui debet radix quadrata. *Quadrata radicis extractio.*

PRIMVM ab vltimo puncto, id est, à figura 6. (Hoc enim punctum vnã tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) subtrahitur maximus quadratus, qui subtrahi potest, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In residuo autem manent 2. pro sequenti puncto. quod erit 276. atque ita absolutum est vltimum punctum, quod est in operatione primum. *Radix 2601.*

DEINDE

DEINDE paro diuisorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratę inseruientem: quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum sequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad sinistram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextrā, sub quo scribo eius quadratum 36. vt hic vides.

2—20—6.
36.

POST hęc multiplico tres numeros 2.20.6. inter se, & producto 240. addo quadratum 36. & summam 276. ex puncto 276. detraho, nihilque relinquitur, atque ita absolutum est sequens punctum: aliudque sequens punctum est 52.

PARO iam diuisorem ex toto Quotiente inuento 26. ducto in 20. id est, in numerum peculiarem quadratæ radicis, quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non potest punctum 52. pono in Quotiente 0. neque opus est multiplicare, vt reperiatur numerus subtrahendus, quia nihil subrahitur, cum 0. multiplicans producat 0. Et sic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuisor inuentus in puncto proposito ne semel quidem continetur: atque ita absolutum est punctum 52. punctumque insequens est 5201.

PARO iterū diuisorē ex toto Quotiēte inuēto 260. ducto in numerū peculiarem 20. quem reperio 5200. qui semel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totum Quotientem prius inuentum 260. ad sinistram, & numerum peculiarem 20. in medio, & quotientē 1. nunc inuentum ad dexteram, eiusque quadratum 1. sub illo, vt in exemplo patet.

260—20—1
1

MVLTIPLICATIO trium superiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1. figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201. detractus nil relinquit. Est ergo absoluta extractio, radixque inuenta est 2601. quæ quadratè, id est, in se multiplicata producit propositum numerum 6765201.

ATQVE hæc est probatio, vel examen cuiusuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in se multiplicetur vel quadratè, vel cubice, vel surdesolide, &c. p qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum, veluti in nostro exēplo, necesse est, numerum productum ęqualem esse propositio numero, ex quo facta est extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additū producto numero conficiet numerum propositum. Institui quoq; potest examen per 9. vel 7. vt in Diuisione. Nam si ex inuenta radice abijciantur 9. vel 7. quoties fieri potest, & residuum collocetur tum in sinistra parte crucis, tum in dextra, quod Quotiens, vel radix inuenta sit etiam instar Diuisoris. Hoc enim residuo in se multiplicato quadrate, vel cubice, &c. & ex producto abiectis 9. vel 7. necesse est, residuum hoc æquale esse residuo numeri propositi, si abijciātur ex eo omnia 9. vel 7. & nihil in extractione relictum sit. Nam alioquin ex residuo extractionis, & ex producto radicis inuctæ in se multiplicatæ abijcienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim residuum ęquale esse debet residuo numeri propositi, si omnia 9. vel 7. abijciantur. In nostro exemplo, si probatio instituatur per 9. residuum semper est 0. Si verò fiat per 7. stabit exemplum examinis vt hic apparet.

0
0 X 0
0
2
4 X 4
2

EXTRACTIO RADICIS CVBICE.

SIT ex numero 239483190. extrahenda radix cubica.

PRI-

PRIMVM expuncto 239. subtraho cubum 216. qui est maximus in eo contentus, cuius radicem 6. scribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit sequens punctum 23483. *Cubica radicis extractio. radix 621.*

DEINDE paro diuisorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, nimirum 300. & 30. vt hic vides. Multiplico superiores duos numeros 36. & 300. inter se, & producto 10800. addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorũ 6. & 30. inter se. Nam summa 10980. erit Diuisor. Satis etiam esset productus ex duobus superioribus inter se multiplicatis, nimirum 10800. pro Diuisore. quod in alijs extractionibus intelligendum quoque est. Diuido ergo punctum meum 23483. per diuisorem inuentum 10980. & Quotientem 2. scribo post figuram 6. prius inuentam. Pingo post hæc figuram huiusmodi. Ad dextram numerorum 36. & 300. colloco inuentam figuram 2. & infra eam eius quadratum 4. & sub hoc cubum eiusdem 8. Nam si tam superiores tres numeri 36. 300. & 2. quam inferiores tres 6. 30. & 4. inter se multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem si ex meo puncto 23483. subtraham, remanent 1155. atque adeo punctum sequens erit 1155190.

36—300
6— 30

36—300—2.
6— 30—4.
8.

PARO iam alium diuisorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam scribo eius quadratum 3844. & ad dextram eosdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum superiorum inter se facit diuisorem 1153200. per quem si diuidatur pũctum 1155190. fit Quotiens 1. post alias duas figuras 62. scribendus. Pingo iam figuram talem. Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proximè inuentam, & infra eam eius quadratum 1. & sub hoc eiusdem cubum 1. Nam si tam tres superiores numeri 3844. 300. & 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter se multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem si ex meo puncto 1155190. demam, remanent 129. Est ergo absoluta extractio, radixque inuenta est 621. quæ in se cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui si adijciatur residuum 129. coflabitur numerus propositus 239483190.

3844—300.
62— 30.

3844—300—1.
62— 30—1.
1.

EXTRACTIO RADICIS Surdesolidæ.

SIT numerus 1039589621. cuius radix surdesolida quæritur.

PRIMVM à puncto 10395. subtraho maximum surdesolidum 7776. in eo inclusum, cuius radicem 6. scribo in margine ꝑ Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619. ideo punctum sequens erit 261989621. *Surdesolida radicis extractio radix 63.*

DEINDE paro diuisorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. scribo eius quadratum 36. & supra hunc eiusdem cubum 216. & supra hunc eiusdem Zensizensum, vel quadrati quadratum 1296: ita vt constituatur progressio

Geometrica ascendens à radice 6. denominata tot terminorum, quot numeri peculiares requiruntur in extractione surdesolida, Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requisitos, vt exemplum monstrat. Multiplico duos superiores numeros (quod satis est) 1296. & 50000. inter se. Productus namque numerus 64800000. erit diuisor, per quem si diuidatur punctum relictum 261989621. posset esse Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2. est nimis parua, & 4. nimis magna, vt ex sequentibus patebit; quem Quotientem 3. in margine scribo post inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & sub hoc eiusdem cubum 27. & sub hoc eiusdem Zensizensum, vel quadrati quadratum 81. & sub hoc eiusdem surdesolidum 243. ita vt ad dextram constituatur progressio Geometrica descendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus sit numerus surdesolidus figuræ inuentæ, quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus. Nam si terni numeri transuersales inter se multiplicentur, & ad productos 1944.00000. 19440000. 972000. 24300. adijciatur surdesolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Est ergo radix surdesolida inuenta 63. quę in se surdesolidè multiplicata, si nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63.63.63.63.63. producit numerum 992436543, cui si addatur residuum 47153078. conflabitur propositus numerus 1039589621.

1296—	50000—	3.
216—	10000—	9.
36—	1000—	27.
6—	50—	81.
		243

QVOD si superesset aliud punctum, constituenda esset progressio ascendēs denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex superioribus duobus numeris inter se multiplicatis esset nouus diuisor. Deinde ex noua figura inuenta esset constituenda progressio descendens vsque ad surdesolidum illius figuræ, quemadmodum supra cum figura 3. factum est.

15752961—	50000	
250047—	10000	
3969—	1000	
63—	50	

ATQVE in hunc modum radicem cuiuscunque speciei extrahes, si diligenter inquires numeros propositæ radici inseruientes, vt supra docuimus. Quæ sanè ratio mihi semper præclara est visa. Nam etiamsi operatio videatur aliquanto longior esse, quam par sit, difficilis tamen non est, quippe cum ignorari in ea non possit, quid faciendum sit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta sit operationis difficultas, vt infinita ferè memoria opus sit ad retinendū ea, quę ad extrahendas radices adhibenda sunt, vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam, si adhibeatur, patebit: cum tamen cubica extractio sit longè facilior extractione surdesolida, & alijs insequentibus, quę ferè inextricabiles sunt.

SOLA vna difficultas tam in nostra, quam in aliorum extractione existit, quod nimirum dubium interdum sit, num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in secundo puncto extractionis surdesolidæ

potuis

potuit esse Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi esse velimus, an accipi potuisset figura 4. quandoquidem superfuit numerus 47149078. valdè magnus, faciendum periculum erit cum figura 4. constituendo scilicet progressionem descendentem Geometricam à 4. denominatam. Et quia quatuor numeri producti transversales cum surdesolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto secundo 261989621. subtrahi nequit; argumento est, figuram 4. nimis magnam esse, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quãdoquidem cum figura 3. tales numeri procreati sunt, qui ex proposito puncto potuerunt subtrahi. Hoc ergo remedium si adhibeatur, quamuis longiusculum, tutissima erit nostra ratio extrahendarum radicum.

Difficultas in extractionibus quo pacto superetur.

1296—	50000—	4
216—	10000—	16
36—	1000—	64
6—	50—	256
		1024

IAM verò cur in superiori tabella quadratorum, cuborum, surdesolidorum, &c. omiserim Zensizensos, siue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zensizensicæ extractionem præterierim; ratio est, quod radices Zensizensica, Zensicubica, Zensizenzensica, cubicubica, Zensurdesolida, &c. quamuis erui possint, sicut aliæ, habent tamen aliam etiam extractionis regulã, quam vel ex ipsis nominibus colligere licet. Videlicet.

Cur exemplũ non ponatur de radice Zensizensica, &c.

EXTRACTVRVS radicem Zensizensicam, siue quadrati quadratam, extrahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zensizensica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS verò radicem Zensicubicam, id est, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam, & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compositorum, vt de radice Zensizenzensica, cubicubica, Zensurdesolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRACTIONIS radicis cubicæ.

QVONIAM frequentior vsus est radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos, quam aliarum radicum, lubet in studiosorũ gratiam præscribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in nostra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minusque expeditæ sint, excerpam vnam quasi nouam ex superiori extractione radicis cubicæ, quæ sic se habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

Ex primo puncto 1. ad sinistram subtraho cubum 1. maximũ in eo contentũ, nihilq; remanet. Erit ergo sequẽs punctũ 860. & pro radice inuenta est figura 1.

Regula propria ad cubicam radix 123.

PARO diuisorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem si diuidam punctum 860 inuenio Quotientẽ 2. pro secunda figura radicis. Hanc duco in diuisorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratũ nouæ figuræ 2. inuentæ, nimirũ 4. in productũ ex priori

figura 1. multiplicata per 30. hoc est, in 30. facioque 120. Postremò ad summá duorum horum productorum 600. & 120. id est, ad 720. adijcio cubum inuentę nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque summam 728. ex meo puncto 860. subtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. post priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuisorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id est, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuisor, per quem si diuidam meum punctum 132867. reperio Quotientem 3. scribendum post radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3. similiter duco in diuisorem inuentum 43200. facioque 129600. Deinde quadratum eiusdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12 prius inuenta, multiplicata per 30. hoc est, in 360. efficioque 3240. Postremò ad summam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc est, ad 132840. adijcio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867: qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta est radix 123. numeri propositi 1860867.

QVOD si superesset aliud punctum, ducendus esset quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuisor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in superiori, quamuis facilior sit, quam aliorum regulæ. Memor tamen esto, quando dubitas, an nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt supra dictum est.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zensizensicis, non surdesolidis, &c. radicem, veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propositus non est quadratus, aut cubus, aut Zensizésus, aut surdesolidus, &c. non potest habere veram radicem, sed per regulas superiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zensizensi vel surdesolidi in dato numero contenti. Vt igitur sciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda sit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

Quot binarij cifrarum vel ternarij vel quaternarij, &c. ad propinquam radicē eruendam apponendi sint.

NVMERO proposito apponantur aliquot binarij cifrarum, si quadrata radix propinqua inquiritur: vel si cubica, aliquot cifrarum ternarij; vel aliquot quaternarij, si radix Zensizensica desideratur, vel aliquot quinarij cifrarum, si de surdesolida radice agitur, &c. Respondet autem in qualibet specie radicis numerus cifrarum aliquoties repetendus numero, qui in progressione ad initium præcedentis problematis posita scribitur supra numerum, à quo radix nomen sumit. Vt quia supra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binę cifræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod supra cubum scriptus sit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicuba propinqua apponendi sint aliquot nouenarij cifrarū, quippe cū supra cubicubū numerus 9. reperiat descriptus. Idem numerus cifrarum aliquoties repetendus respondet quoq; signationibus punctorum, quæ faciendæ sunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata

radice

radice extrahenda signatur secunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij ascribendi sunt; in cubica verò radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi sunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura signatur, &c.

QVO autem plures binarij, vel ternarij cifrarum, &c. numero proposito apponetur, eo propinquior radix eruetur.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerum, ex quo radix eruenda est, extrahenda est ex toto illo numero radix, vt supra traditum est. Deinde ex ea radice abiectis ad dexteram tot figuris, quot cifrarum binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c. appositi fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda est fractio numeratorem habens figuras abiectas, denominatorem verò vnitatem, cum totidem cifris, quot binarij cifrarum, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. si vnus binarius, vel ternarius, &c. additus fuit, vel 100. si duo binarij: vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. si tres, & sic deinceps ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centesimas, vel millesimas, &c.

Qua fractio addenda sit radici, vt propinquior radix signatur.

EXEMPLI causa. Ex numero 29. extrahenda sit radix quadrata. Appositis tribus binariis cifrarum, hoc modo 29000000. inuenietur huius numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanserit: addita verò vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dexteram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quam vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus est $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propositus numerus 29. Huius verò numerus quadratus est $29\frac{8996}{1000000}$. maior eodem numero proposito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda sit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rursus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus residuus: atque adeò maior quàm vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram, propter tres cifrarum ternarios appositos, erit propinqua radix cubica $30\frac{779}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus sit tantum $29158\frac{788419159}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quam vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus sit $29161\frac{375552000}{1000000000}$.

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hæc est. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propositum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propositus numerus per 100. hoc est, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. sumendi sunt tanquam quadrati, cum eorum radices quærantur) [a] habent proportionem suarum radicum duplicatam: Est autem 500. ad 5. vt 100. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla verò proportio decuplę duplicata est, vt in hoc apposito exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. sit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum $2\frac{3}{10}$. radix numeri 5. minor quam vera: ac proinde $2\frac{7}{10}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abiiciendam esse ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix $2\frac{3}{10}$.

[a] *11. octaui.*

I.	10.	100.
5.		500.

QVANDO autem apponuntur 0000. multiplicatur numerus propositus, verbi gratia numerus 5. per 10000. id est, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000.5.[a] habent duplicatam proportionem suarum radicum. Est autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata est proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000. nimirum 223. ad radicem numeri 5. vt 100. ad 1. Quare si radix 223. diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua $2\frac{23}{100}$. minor quam vera, at $2\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiiciendas esse ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix $2\frac{23}{100}$.

[a] 11. octaui.

1. 100. 10000.
5. 50000.

PARI ratione, si apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in millesimis. atque ita deinceps.

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerum propositum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id est, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5.[b] habent proportionem suarum radicum triplicatam: Est autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod 1000. multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata est proportionis 10. ad 1. vt in hoc apposito exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000. nimirum 17. ad radicem numeri 5. vt 10. ad 1. Quocirca si radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua $1\frac{7}{10}$. minor quam vera, at $1\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abiiciendam esse ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix $1\frac{7}{10}$.

[b] 12. octaui.

1. 10. 100. 1000.
5. 5000.

SIMILI modo si apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centesimis: Et si apponantur 000000000. in millesimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id est, per cubum radicis 100. hic verò per 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Cætera eodem modo demonstrabuntur.

NEQVE verò diuersa ratio est in aliis radicibus. Nam in surdesolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id est, per surdesolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. est quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in apposito exemplo apparet, &c.

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiusque generis ex data minutia extrahere.

Extractio radicum ex minutiis.

IN minutiis extrahenda est radix eiusdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix est propositæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{9}{16}$. est $\frac{3}{4}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$. est similiter $\frac{2}{3}$. Et radix Zensizensica minutiæ $\frac{16}{81}$. est quoque $\frac{2}{3}$. Et radix surdesolida minutiæ $\frac{32}{243}$. est pari ratione $\frac{2}{3}$. & sic de aliis.

QVOD

QVANDO si data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam simplicem. Vt si quærenda sit radix quadrata huiusmodi minutiæ minutiæ $\frac{1}{4}.\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc simplicem minutiam $\frac{18}{36}$. cuius radix quadrata est $\frac{1}{6}$. vel $\frac{1}{3}$. &c.

SIMILITER si fractio adhæreat integris, erunt integra prius reducenda ad fractionem eiusdem denominationis. Vt si quærenda sit radix cubica numeri $2\frac{1}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{54}{27}$. cuius radix cubica est $\frac{3}{3}$. hoc est, $1\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ desideratur, non habebit illa minutia radicem, quę quæritur. Vt neque $\frac{4}{9}$. neque $\frac{6}{9}$. neque $\frac{8}{13}$. habent radicem quadratam præcisè, propterea quod denominator in prima numerator verò in secunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæsitam, nec ne, si eam, ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si verò reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque proposita minutia radicem habebit. Vt si proponatur minutia $\frac{40}{45}$. volo scire, an habeat radicem quadratam: Ea redacta ad minimos terminos est $\frac{4}{9}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{3}$. Hanc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia proposita $\frac{40}{45}$. At verò minutia $\frac{6}{9}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{6}{9}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{24}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{2}{3}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{8}{27}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{17}{16}$. radice cubica carebit, quod minutia $\frac{7}{1}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et sic de aliis.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæsitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot cifrarum binarios, vel ternarios, quaternarios ue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zensizensica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, si proponatur minutia $\frac{6}{9}$. cuius radix quadrata inquirenda sit, appositis tribus binariis cifrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{319}{1000}$. denominatoris verò $2\frac{996}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, proueniet radix quæsita $\frac{2319}{2996}$. satis propinqua. Idem iudicium de aliis radicibus habeatur, si memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos esse aliquot ternarios cifrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zensizensica verò aliquot quaternarios, & in surdesolida aliquot quinarios, &c.

QVIA verò molestum est inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propositæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vsu sunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet: quippe cum in eis tantummodo radicis propinquæ inuentione opus sit.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorẽ, & producti numeri radicẽ quadratam propinquã diuide per denominatorẽ: Vel numeratorem *Alia extractio radicis qua-*

drate & cubica ex data minutia.

ratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroque enim modo radix propinqua fractionis propositæ gignetur. Et si quidem propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractionis propinqua minor quoque quam vera; propterea quod numerus verò minor diuiditur: posteriori verò modo inuenietur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, si radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix fractionis propinqua maior, quam vera, posteriori vero modo minor, quam vera, vt perspicuum est. Hanc regulam proposui quoque libr. 4. cap. 2. Num. 5. ibique eandem demonstraui. Exemplum huius etiam regulæ ibidem habes.

PRO radice verò cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denominatorem in quadratum numeratoris, & per numeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroque enim modo propinqua radix propositæ minutiæ proueniet. Et priori quidem modo, si illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoque quam vera, propterea quod diuisio fit numeri vero minoris per denominatorem fractionis: Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Posteriori vero modo, si radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuisio fiat per numerum vero minorem: At si illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidem tunc diuiditur numerator per numerum vero maiorẽ. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente verã radicem cubicam $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5832. cuius radix cubica est 18. Hæc diuisa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id est, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignitur numerus 1728. cuius radix cubica est 12. per quam si diuidatur numerator 8. fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc est, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propositæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadratum denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua 6 $\frac{25}{100}$. (inuenta per appositionum duorum ternariorum cifrarum) diuisa per denominatorẽ 7. facit Quotientem $\frac{625}{700}$. hoc est, $\frac{25}{28}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratum numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam 5 $\frac{59}{100}$. propinquam inuentam per appositionẽ 000000. ad 175. si partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{100}{59}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$. atque ita de aliis. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per superiorem regulam: quia hic solum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non est, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in posteriori, in propria sua quantitate; at in superiori regula duo interueniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ non sunt.

DEMON-

DEMONSTRO vtrumque hunc modum hac ratione. Quando numerator in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorem, vt constat ex iis, quæ propos. 18. huius lib. demonstrata sunt. [a] Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inuentæ ad denominatorem: [b] Est autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tanquam cubi ad cubum, triplicata quoque proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: [c] ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipse denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem sicut hæc minutia est radix cubica fractionis propositæ, ita quoque illa erit radix cubica eiusdem fractionis. Diuisa ergo radice illa cubica inuenta per denominatorem fractionis propositæ (quæ diuisio fit, quia illa radix cubica inuenta est fractio, ac proinde, vt cognoscatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipsemet denominator fractionis propositæ, diuidendus est numerator huius minutiæ per eius denominatorem: alioquin si illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuisio facienda non esset) producetur radix cubica fractionis propositæ: quemadmodum ex diuisione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propositæ: quippe cum minutia nil aliud sit, nisi numerator per denominatorem diuisus.

[a] 10. defin. quinti.
[b] 12. octaui.
[c] 7. minutiarum ad finem lib. 9.

QVANDO verò denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorem, vt ex demonstratis propos. 18. huius lib. manifestum est. Ergo rursus erit proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tanquam cubi ad cubum, triplicata est: Ac propterea, vt supra, minutia, cuius numerator ipsemet numerator fractionis propositæ, denominator verò radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator, radix cubica numeratoris fractionis propositæ, & denominator radix cubica denominatoris eiusdem fractionis. Quocirca diuiso numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica fractionis propositæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

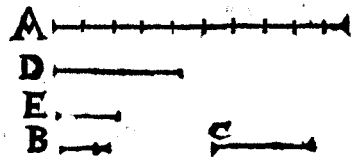
RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. repræsentans quadratum 10. palmorum, vel pedum,

vel aliarum mensurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedum 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1. [a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, esse radicem quadratam, siue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale est rectangulo sub A, & B, comprehenso: Est autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perspicuum est, rectam C, esse latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod est propositum.

[a] *13. sexti.*

[b] *17. sexti.*



RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus mediis proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori B, propinquior est, latus esse cubicum, siue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis est parallelepipedo sub quadrato rectæ B, & sub A, recta comprehenso. Est autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, se multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquidò constat, rectam E, esse latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod est propositum.

[c] *15. huius.*

[d] *Lemma 18. huius.*

FINIS LIBRI SEXTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER SEPTIMVS.

De figuris Isoperimetris disputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

NOBILIS ac prastans de Isoperimetris figuris semper apud omnes habita est disputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum sit altera maior, & capacior, & quæ sit omnium maxima, & capacissima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati sunt, putantes figuras Isoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, esse inter se æquales, siue æquè capaces. Immo è contrario, quod mirum est, nonnulli, qui se Geometras appellant, adduci vix possunt, vt credant, dari posse duas figuras Isoperimetras inter se omnino æquales, quod tamen fieri posse, clarissimè propos. 20. 21. 22. huius demonstrabimus. Quamuis autem de Isoperimetris figuris tractionem benè longam, & copiosam in commentariis nostris in sphæram instituerimus, exemplum in hoc secuti Theonis Alexandrini, qui idem argumentum in commentariis in Almagestum Ptolomei persecutus est: tamen quia id in alieno fortassis loco factum esse suspicari quis posset; transferemus eam tractationem ex nostris commentariis in sphæram in hanc nostram Geometriam practicam, tanquam in magis proprium locum, additis tribus, aut quatuor propositionibus, quæ in illa tractatione desiderantur, & tamen maximè ad hanc materiam spectare videntur.

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationē Isoperimetrarū figurarum pertinentes.

I.

ISOPERIMETRÆ figuræ sunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera, & æquiangula est.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum est circuli figuræ inscripti, vel circumscripti.

IIII.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, spatium siue superficie, intra latera ipsius comprehensa.

V.

OMNE solidum rectangulum (cuius nimirum bases æquidistantes sunt, & æquales, lateraque ad bases recta, quale est Parallelepipedum) contineri dicitur sub altera basium, ac perpendiculari ab illa basi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra basium indicat longitudinem ac latitudinem figuræ, perpendicularis verò altitudinem, siue profunditatem eiusdem demonstrat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Triangulum quodcunque cui rectangulo æquale sit.

AREA cuiuslibet trianguli æqualis est rectangulo comprehenso sub perpendiculari â vertice ad basim protracta, & dimidia parte basis. Item rectangulo comprehenso sub semisse perpendicularis, & tota base. Vel denique semissi rectanguli sub tota perpendiculari, & tota base comprehensi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad basim BC, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primò basim BC, bifariam, vt in prima figura. Per A, ducatur EAF, in vtramque partem æquidistans rectæ BC, compleaturque rectangulum BEFC, a quod erit duplum trianguli ABC; b Item duplum rectanguli ADBE. Quare rectangulum ADBE, quod nimirum continetur sub perpendiculari AD, & dimidio basis BD, æquale est triangulo ABC, diuidat secundo perpendicularis AD, basim BC, non bifariam, vel etiã cadat in basim CB, protractam, vt in 2. & 3. figura; Et per A, ducatur rursus AF, in vtramq; partẽ æquidistãs rectę BC, compleaturq; rectangulũ ADCF. Diuisa deinde base BC, bifariã in G, ducantur

a 41. primi.
b 36. primi.

rectæ

rectæ BE, GH, ipsi AD, æquidistantes, [a] eritque GH, ęqualis perpendiculari AD. [b] Quoniam igitur rectangulum BCFE, duplum est trianguli ABC; [c] Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG, quod continetur sub perpendiculari GH, vel AD, & dimidio basis BG, æquale triangulo ABC.

[a] 34. primi. [b] 41. primi. [c] 36. primi.

SECETVR iam perpendicularis AD, vel GH, bifariam in I, agaturque per I, ipsi BC, parallela KL. Dico triangulum idem ABC, æquale quoque esse rectãgulo BCLK, in 1. & 2. figura, Item rectangulo BCLM, in 3. figura, comprehenso nimirum sub ID, vel IG, semisse perpendicularis AD, vel HG. [d] Quoniam enim triangulum ABC, dimidium est rectanguli EC, eiusdemque dimidium etiam est rectangulum BL; [e] quod rectangula BL, LE, super æquales bases æqualia sint: æqualia inter se erunt triangulum ABC, & rectangulum BL. [f] Et quia rectangulum BF, contentum sub perpendiculari AD, vel BE, & base trianguli BC, duplum est trianguli ABC; erit triangulum semissi illius rectanguli ęquale. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis est, &c. quod erat ostendendum.

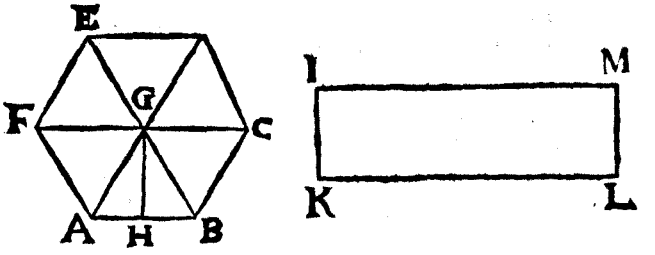
[d] 41. primi. [e] 36. primi. [f] 41. primi.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

Regularis figura quæcunque cui rectãgulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis est rectangulo contento sub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & sub dimidiato ambitu eiusdem figuræ.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur GH, perpendicularis ad vnum latus, nempe ad AB: Sit quoq; rectangulum IKLM, contentum sub IK, quæ æqualis sit perpendiculari GH, & sub KL, recta, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF. Di-



co huic rectangulo æqualem esse figuram regularem ABCDEF. Ducantur enim ex G, ad singulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triangula resoluatur, quæ omnia æqualia inter se erunt, vt in corollario propos. 8. lib. 1. Eucl. demonstratum est à nobis: propterea quòd omnia latera triangulorum à puncto G, exeuntia sint inter se æqualia, habeantq; bases æquales, nempè latera figuræ regularis. [g] Hinc enim efficitur, omnes angulos ad G, æquales esse, ac proinde, ex dicto corollario, triangula ipsa inter se quoque esse æqualia. [h] Quoniam igitur rectangulum contentum sub GH, perpendiculari, & medietate basis AB, æquale est triangulo ABG, si sumantur tot huiusmodi rectangula, in quot triangula diuisa est figura regularis, erunt omnia simul figuræ ABCDEF, ęqualia; propterea

[g] 8. primi. [h] 1. huius.

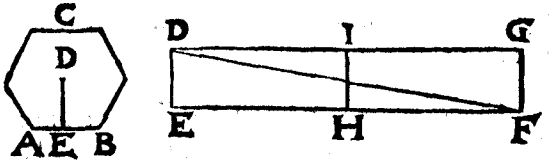
[a] *1. secundi.* quod omnia triangula ostensa sint æqualia triangulo ABG. [a] Cum igitur eadem simul æqualia sint rectangulo IKLM; propterea quòd KL, æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc est omnibus medietatibus basium simul; & recta IK, perpendiculari GH; erit figura regularis ABCDEF, æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis est, &c. quod erat demonstrandum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Regularis figura quæcũque cui triangulo rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale est perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterum verò æquale ambitui eiusdem figuræ.

SIT rursus figura regularis ABC, cuius centrum D, à quo perpendicularis ad latus AB, ducta sit DE; triangulum verò rectangulum DEF, habens angulũ



E, rectum, & latus DE, æquale perpendiculari DE, latus autem EF, æquale ambitui figuræ ABC. Dico triangulum DEF, figuræ ABC, æquale esse. Compleatur enim rectangulum DEFG; & diuisa EF, bifariam in puncto H, ducatur HI, [b] *2. huius.* æquidistans rectæ DE. [b] Erit igitur rectangulum DEHI, contentum sub DE, perpendiculari, & sub EH, dimidio ambitus figuræ, æquale figuræ ABC: At rectangulo DEHI, æquale est triangulum DEF. Nam rectangulum DEHI, est [c] *36 primi.* dimidium rectanguli DEFG; [c] propterea quod ęqualia sunt rectangula DEHI, IHFG; [d] *41. primi.* Triangulum quoque DEF, dimidium est eiusdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis est triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

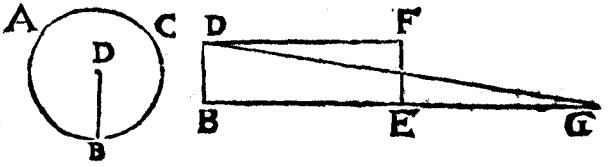
Circulus quicunque cui rectangulo æqualis sit.

AREA cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

ESTO circulus ABC, cuius semidiameter DB: Rectangulum autem DBEF, comprehensum sub DB, semidiametro circuli, & BE, recta, quę æqualis sit dimidiatæ circumferentiæ circuli. Dico aream circuli ABC, æqualem esse rectangulo DBEF. Producatur enim BE, in continuum, ponaturque EG, æqualis ipsi BE, vt sit BG, recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur deniq; puncta

puncta D, G; recta DG. [a] Quoniam igitur circulus ABC, æqualis est triangulo DBG: [b] Est autem triangulum DBG, rectangulo DBEF, æquale; quod basis

[a] 1. de Dimēs. circuli Archim.
[b] schol. 41. primi.



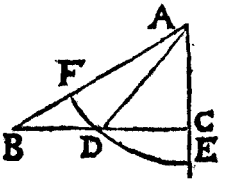
trianguli dupla sit basis rectanguli; (Id quod etiam ex demonstratione antecedentis propos. liquet, vbi ostendimus, triangulum DEF, æquale esse rectangulo DEHI:) erit quoque circulus ABC, rectangulo DBEF, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo, &c. quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Proprietas quædam trianguli rectanguli.

IN omni triangulo rectangulo, si ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppositum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius segmentum, quod prope angulum rectum existit, quam anguli acuti prædicti, ad eius partem dicto segmento lateris oppositum.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, sit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppositum BC, recta AD, vtcunque; Dico maiorem esse proportionem rectæ BC, ad rectam CD, quam anguli BAC, ad angulum CAD. [c] Quoniam enim recta AD, maior quidem est, quam AC; minor verò, quam AB; si centro A, interuallo autem AD, circulus describatur, secabit is rectam AC, protractam infra punctum C, vt in E, at verò rectam AB, supra punctum B, vt in F. Et quia maior est proportio trianguli BAD, ad sectorem FAD, quã trianguli DAC, ad sectorem DAE, (propterea quod ibi est proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis) [d] erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam sectoris FAD, ad sectorẽ DAE. [e] Componendo igitur maior quoque erit proportio trianguli BAC, ad triangulum DAC, hoc est, rectæ BC, ad rectam CD, [f] (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam bases BC, CD.) quam sectoris FAE, ad sectorẽ DAE, hoc est, quam anguli BAC, ad angulum CAD; [g] quod eandem habeant proportionem sectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonstrandum erat.



[c] 19. primi.
[d] 27. quinti.
[e] 28. quinti.
[f] 1. sexti.
[g] coroll. 33. sexti.

HAC propositio vera quoque est in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior sit angulo ADC, vt patet; [h] quod tunc etiam AD, maior sit, quam AC, minor vero, quam AB, &c.

[h] 19. primi.

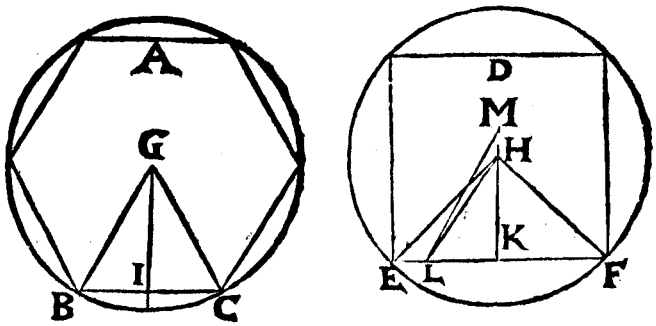
THEOR.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Inter figuras Isoperimetras, quæ plures angulos, seu latera continet, illa maior est.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera.

SINT duæ figuræ regulares isoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, siue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem esse, quam DEF.



Describatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK,[a] quæ diuident rectas BC, EF, bifariam. Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quam DEF, sibi isoperimetra, efficitur, vt latus BC, sæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus BC, minus erit latere EF, ideoque BI, medietas lateris BC, minor, quàm EK, medietas lateris EF. Ponatur KL, ęqualis ipsi BI, & ducantur rectæ LH, HE, HF, GB, GC.[b] Et quia omnes arcus circuli DEF, sunt æquales, quòd & rectæ subtensę æquales ponantur; erit recta EF, ita submultiplex ambitus figuræ DEF, vt arcus EF, submultiplex est circumferentiæ circuli DEF: Eademque ratione ita multiplex ambitus figuræ ABC, rectæ BC, sicut multiplex est circumferentia ABC, arcus BC. [c] Vt autem arcus EF, ad circumferentiam circuli DEF, ita est angulus EHF, ad quatuor rectos; Igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitum figuræ DEF, hoc est, ad ambitum figuræ ABC, illi æqualem, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autem ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita est circumferentia circuli ABC, ad arcum BC,[d] hoc est, ita quatuor recti ad angulum BGC. Ex æquo igitur, vt recta EF, ad rectam BC,[e] hoc est, vt recta EK, ad rectam BI, hoc est, ad rectam KL, ita angulus EHF, ad angulum BGC,[f] hoc est, ita angulus EHK, ad angulum BGI.[g] Est autem maior proportio rectæ EK, ad rectam KL, quam anguli EHK, ad angulum KHL. [h] Quare maior erit proportio quoque anguli EHK, ad angulum BGI, quam eiusdem anguli EHK, ad angulum KHL; [i] ideoq; maior erit angulus KHL, quam angulus BGI. Cum igitur anguli HKL, GIB, sint ęquales, vt pote recti;[k] erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo GBI. Fiat igitur angulus KLM, æqualis angulo GBI; cadetque LM, extra LH; conuenietque cum KH, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli GBI, ęquales sunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera BI, LK, æqualia,[l] erunt rectæ GI, MK, ęquales. Recta ergo GI, maior est, quam recta HK.

[a] *3. tertij.*
[b] *28. tertij.*
[c] *2. coroll. 33. sexti.*
[d] *2. coroll. 33. sexti.*
[e] *15. quinti.*
[f] *15. quinti.*
[g] *5. huius.*
[h] *13. quinti.*
[i] *10. quinti.*
[k] *32. primi.*
[l] *26. primi.*

Quam-

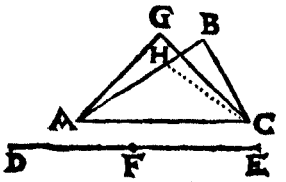
Quamobrem rectangulum sub GI, & dimidio ambitu figuræ ABC, contentum, maius erit rectangulo contento sub HK, & dimidio ambitu figuræ DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ ABC, [a] Quocirca cum illud rectangulũ ostensum sit æquale figuræ ABC, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoq; erit figura ABC, quàm figura DEF. Isoperimetrarum ergo figurarum regularium maior est illa &c. quod erat ostendendum. [a] 2. huius.

PROBL. I. PROPOS. 7.

Qua arte triangulum Isosceles constituatur Isoperimetrum cuiuis triangulo non Isosceli.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum priori Isoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, describere.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, sint inæqualia, nempe AB, maius, quam BC; oporteatque supra AC, construere triangulum Isosceles, atq; Isoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, simul, diuidaturque bifariam in F. Et quoniam latera AB, BC, simul maiora sunt latere AC, erunt quoque DF, FE, simul, maiores quam linea AC. Atque ob id tres lineæ AC, DF, FE, ita sese habebunt, vt quęlibet duæ sint reliqua maiores. [b] Si igitur ex ipsis conficiatur triangulum AGC, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera AG, GC, & inter se ęqualia, & simul sumpta æqualia lateribus AB, BC, simul sumptis: Addito igitur communi AC, erunt triangula ABC, AGC, Isoperimetra. Proposito igitur triangulo, cuius duo latera sint inæqualia, supra reliquum latus triangulum, &c. descripsimus. quod faciendum erat. 16. primi. [b] 22. primi.



SCHOLIVM.

CADET autem necessario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H, [c] esset ducta recta HC, minor, quam HB, BC, simul, & ob id triangulum AHC, non esset Isoperimetrum triangulo ABC, cuius contrarium ex constructione est demonstratum. Multo minus cadet pũctum G, intra triangulum ABC. Quare extra cadet, quod est propositum. [c] 20. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

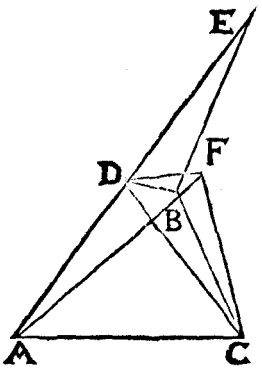
Isosceles triangulum maius est triangulo sibi Isoperimetro non Isoscele.

DVORVM triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basim, quorum vnius duo latera sint æqualia, alterius verò inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia sunt.

ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere BC, [d] constituaturque super basim AC, triangulo ABC, triangulum Isoperimetrum ADC, habens latera AD, DC, æqualia & inter se, & lateribus AB, BC, simul sumptis. Dico tri- [d] 7. huius.

angulum ADC, maius esse triangulo ABC. Producatur enim AD, ad partes D, sitque DE, æqualis ipsi AD, siue ipsi DC. Ducantur quoque rectæ DB, BE. [a] Quoniam igitur AB, BE, maiores sunt, quam AE, hoc est, quam AD, DC, simul, hoc est, quam AB, BC, simul; ablata communi AB, erit BE, maior quam BC. Et quia latera ED, DB, trianguli EDB, æqualia sunt lateribus CD, DB, trianguli CDB. At verò basis BE, base BC, maior, [b] erit angulus EDB, maior angulo CDB. Quare angulus EDB, maior est, quam dimidium anguli EDC: Est autem angulus DAC, dimidium anguli EDC; [c] propterea quod anguli DAC, DCA, æquales sunt, [d] & his simul sumptis ęqualis quoque externus angulus EDC. Maior igitur erit angulus EDB, angulo DAC. [e] Fiat angulus EDF, ęqualis angulo interno DAC; cadetque DF, recta supra rectam DB, [f] æquidistabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat in F, ducaturq; recta FC. [g] Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia sunt, triangulum autem AFC, maius est triangulo ABC; maius quoque erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basim, &c. quod demonstrandum erat.

a 20. primi.
b 25. primi.
c 5. primi.
d 32. primi.
e 23. primi.
f 28. primi.
g 37. primi.



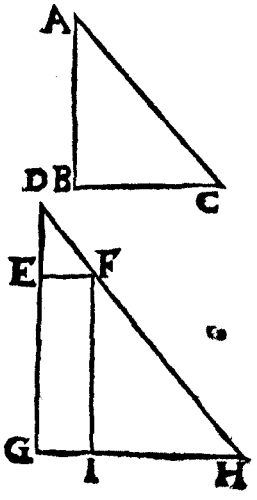
THEOR. 8. PROPOS. 9.

Proprietas duorum triangulorum rectangulorũ similium.

IN similibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, tanquam ab vna linea, descriptum, æquale est quadratis duobus simul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duabus lineis, ita vt quælibet duo latera homologa conficiant vnã lineam rectam, describuntur.

SINT triangula rectangula similia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, sint recti, anguli verò C, & F, inter se æquales; itemque anguli A, & D, inter se æquales; homologaque latera AB, DE; Item BC, EF, & AC, DF. Dico quadratũ ex AC, DF, tanquam ex linea vna, descriptum, æquale esse duobus quadratis, quorum vnum ex AB, DE, tanquam ex vna linea, alterum verò ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, describitur. Producta namque DE, ad partes E, sumatur EG, æqualis rectæ AB, & ducatur GH, recta æquidistans rectæ EF, donec cum DF, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta FI, æquidistans rectæ EG. Erit igitur triangulum FIH, æquiangulum triangulo DEF, hoc est, triangulo ABC. [h] Nam angulus FIH, æqualis est angulo G, [i] & hic æqualis angulo DEF, hoc est, angulo B; angulus verò H, æqualis est angulo DFE

h 29. primi.
i 29. primi.



DFE, hoc est, angulo C; [a] ac proinde & angulus IFH, angulo A: Sunt autem & latera AB, FI, æqualia; [b] Nam recta FI, est æqualis rectæ E G, hæc autem rectæ AB, sumpta fuit ęqualis. [c] Igitur & latera BC, IH; item AC, FH, æqualia inter se erunt. Quare recta DH, composita erit ex AC, & DF, Recta verò DG, ex AB, & DE, Recta denique GH, ex BC, & EF; [d] quod G I, recta æqualis sit rectæ E F. [e] Et quoniam quadratum rectæ DH, æquale est quadratis rectarum D G, GH, simul, constat verum esse, quod proponitur. In similibus igitur triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis subtenduntur, &c. quod erat demonstrandum.

[a] 32 primi.
[b] 34 primi.
[c] 26 primi.
[d] 34. primi.
[e] 47. primi.

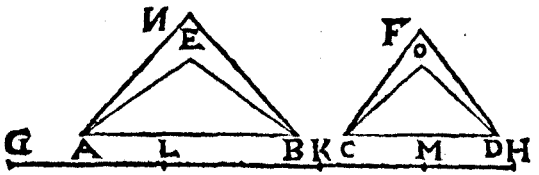
PROBL. 2. PROPOS. 10.

Quo arte cõstituantur duo triangula Isoscelia similia quidem inter se Isoperimetra vero aliis duobus Isoscelibus.

DATIS duobus triangulis Isoscelibus; quorum bases inæquales existant, duoque latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius; Super eisdem basibus duo alia triangula Isoscelia inter se quidem similia, prioribus verò simul sumptis Isoperimetra simul sumpta, constituere.

SINT super bases inæquales A B, C D, duo triangula Isoscelia A E B, C F D, sintque quatuor lineę AE, EB, C F, F D, inter se æquales; maior autem sit basis AB, base C D. quibus positis, [f] erit angulus E, maior angulo F, ideoque trian-

[f] 25. primi.



gula non similia, cum nec æquiangula. Oporteat iam super bases easdem AB, CD, constituere alia duo triangula Isoscelia inter se quidem similia, Isoperimetra verò simul sumpta prioribus triangulis simul sumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF, FD, [g] diuidaturque in puncto K, vt esset recta composita ex AB, & C D, diuisa in puncto B, hoc est, sit ea proportio G K, ad KH, quæ est AB, ad CD. Et quia maior est recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta G K, quam recta K H, cum vtrobique sit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque GK, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum sit vt GK, ad KH, ita AB, ad CD, erit componendo, vt GH, ad KH, ita AB, CD, simul ad C D. Est autem G H, maior, quàm A B, C D, simul, [h] quod & quatuor rectæ AE, EB, CF, FD, quæ æquales sunt rectæ GH, maiores sint, quam AB, CD. [i] Igitur & K H, maior erit quam C D: Eademque ratione maior erit G K, quam AB. Quoniam igitur trium rectarum AB, G L, L K, duæ reliqua sunt maiores omnifariam sumptæ; (Duæ enim G L, L K, maiores sunt quam A B, quod tota G K, maior sit, quam A B, vt modo fuit ostensum; Manifestum autem est, A B, G L, maiores esse reliqua L K; Itemque A B, LK, reliqua G L, esse maiores, propterea quod G K, diuisa est bifariam in puncto L. Idem quoq; dices de tribus rectis C D, KM, MH.) [k] constituatur ex tribus

[g] 10. sexti.
[h] 20. primi.
[i] 14. quinti.
[k] 22. primi.

rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Isosceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum AE, EB, simul dimidium constituant rectæ GH; at verò AN, NB, simul maius efficiant, quam dimidium rectæ GH. [a] Rursus ex tribus rectis CD, KM, MH, constituatur quoque triangulum COD, quod Isosceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum CFD, eo quod CF, FD, simul æquales sint dimidio rectæ GH; at CO, OD, simul minores sint dimidio rectæ GH. Et quoniam quatuor latera AE, EB, CF, FD, simul; Item AN, NB, CO, OD, simul æqualia sunt rectæ GH, erunt priora quatuor simul, posterioribus quatuor simul æqualia; additis ergo communibus AB, CD, fient sex latera AE, EB, BA, CF, FD, DC, simul æqualia sex lateribus AN, NB, BA, CO, OD, DC, simul; ideoque triangula ANB, COD, simul Isoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, simul. Dico iam, quod & similia inter se sunt triangula ANB, COD. Nam quoniam est, vt AB, ad CD, ita GK, ad KH, [b] hoc est, ita GL, ad KM, hoc est ita AN, ad CO, & NB, ad OD; erit permutando, vt AB, ad AN, ita CD, ad CO; & vt AN, ad NB, ita CO, ad OD. Proportionalia ergo sunt latera triangulorum ANB, COD; [c] ac proinde æquiangula inter se erunt, & idcirco similia. Quare datis duobus triangulis Isoscelibus, quorum bases inæquales existant &c. constituimus. quod faciendum erat.

[a] *22. primi.*

[b] *15. quinti.*

[c] *5. sexti.*

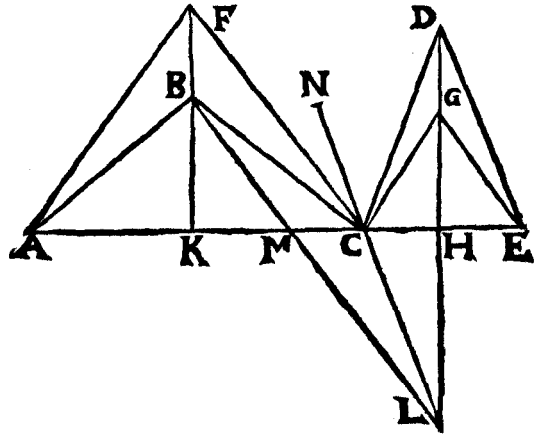
THEOR. 9. PROPOS. 11.

Triangula duo Isoscelia similia maiora sunt duobus Isoscelibus non similibus, quæ illis sint Isoperimetra, basesque habeant easdem.

DVO triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, vtraque simul maiora sunt duobus triangulis Isoscelibus, vtrisque simul, quæ habeant easdem bases cum prioribus, sintq; dissimilia quidem inter se, at Isoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter se habeant æqualia.

SVPER basibus inæqualibus AC, CE, sint duo triangula Isoscelia inter se non similia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, CD, DE, inter se sint æqualia. [d] Atque super eisdem basibus AC, CE, constituantur alia duo triangu-

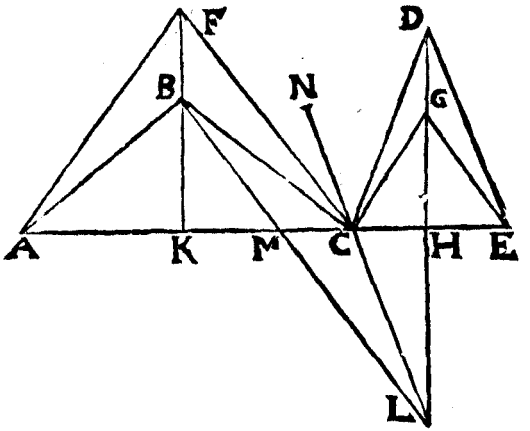
[d] *10. huius.*



la Isoscelia AFC, CGE, similia inter se, & Isoperimetra simul prioribus triangulis simul. Dico duo triãgula AFC, CGE, simul maiora esse duobus triangulis ABC, CDE, simul. Ponantur enim AC, CE, secundum lineam rectam vnam; sitque AC,

AC, basis maior base CE. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, secans rectam AC, in puncto K; Item ex D, per G, punctum ducatur recta DGH, secans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, trianguli AFB, æqualia sunt lateribus CF, FB, triãguli CFB, & basis AB, basi BC, æqualis, [a] erit angulus AFB, angulo CFB, æqualis. Rursus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sunt lateribus CF, FK, trianguli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum est; [b] erunt bases AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc est, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectam CE, in puncto H, diuidi bifariam, angulosque ad H, esse rectos. Producatur recta DH, ad partes H, sumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctum C, recta LCN. Quoniam verò latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia sunt lateribus LH, HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vtpote recti; [c] erunt bases DC, LC, æquales, & anguli DCH, LCH, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior est angulo GCH, & angulus GCH, æqualis est angulo FAK, propter similitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc est, angulo FCA, [d] qui angulo FAC, æqualis est. Erit igitur angulus DCH, hoc est, angulus LCH, qui illi ostensus est æqualis, hoc est, angulus NCK, [e] qui angulo LCH, ad verticem est æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet necessariò; & rectæ LC, CB, propterea comprehendent ad partes K, angulum BCL. Quare si ducatur recta BL, secabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta C, & K, quod sit M. Quoniam verò rectæ AB, BC, CD, DE, simul æquales sunt rectis AF, FC, CG, GE, simul, propter triangula isoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter se, nimirum rectę BC, CD, hoc est, BC, CL, simul æquales ipsis FC, CG, simul: [f] Sunt autem rectæ BC, CL, simul maiores recta BL. Igitur & FC, CG, simul maiores erunt eadem recta BL:

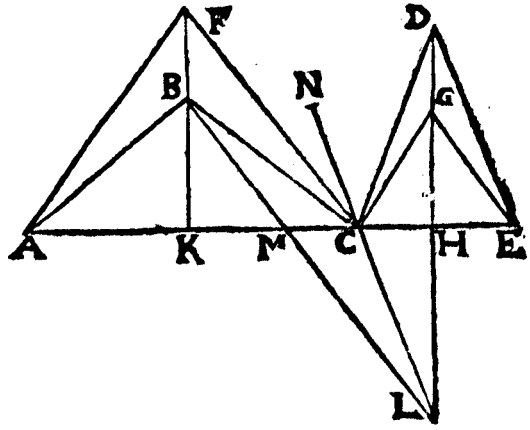
[a] 8. primi.
[b] 4. primi.
[c] 4. primi.
[d] 5. primi.
[e] 15. primi.
[f] 20. primi.



ideoque quadratum ex FC, CG, tanquam ex vna linea, descriptum maius erit quadrato BL. [g] Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, describitur quadratum, æquale est quadrato ex FK, GH, tanquam ex vna linea descripto, vna cum quadrato, quod ex KC, CH, tanquam ex vna linea describitur. [h] Quadratum verò ex LB, descriptum æquale est quadrato ex BK, LH, hoc est, ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto, vna cum quadrato, quod ex KM, MH, tanquam ex vna linea, describitur; quod triangula rectangula BKM, LHM, sunt similia inter se. [i] Sunt enim anguli M, ad verticem æquales, & an-

[g] 9. huius.
[h] 9. huius.
[i] 15. primi.

a 32. primi. & anguli K, H, recti, [a] ideoque & reliqui KBM, HLM, æquales. Igitur quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, descriptum, & quadratum ex KC, CH, tanquam ex vna linea descriptum, hoc est, quadratum KH, vtraque simul, maiora sunt quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto, & quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea descripto, hoc est, quadrato KH, vtrisque simul. Ablato ergo communi quadrato KH, erit quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, descriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, descripto; ideoque maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, simul rectis BK, DH, simul; Ac propterea, demptis communibus BK, GH, erit FB, reliqua maior, quam reliqua DG. Est autem & KC, maior quam HC, quod tota AC, cuius dimidium est KC, maior ponitur quam tota CE, cuius dimidium est HC. Quapropter rectangulum sub FB, KC, contentum, maius erit rectangulo sub DG, HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium est rectanguli sub FB, KC, contenti; (Nam si super FB, constituatur rectangulum altitudinem habens KC, ita vt triangulum, & rectangulum inter



b 41. primi. easdem sint parallelas; [b] erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub FB, KC, contentum, vt constat.) Triangulum verò DGC, dimidium est rectanguli contenti sub DG, HC; (Si enim super DG, constituatur rectangulum altitudinem habens HC, ita vt triangulum, & rectangulum inter easdem sint parallelas: [c] erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem est, quod rectangulum sub DG, HC, contentum, vt constat.) erit quoque triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac propterea duplum trianguli FBC, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vtpote rectilineo CDEGC. Quocirca, addito communi composito ex triangulis ABC, CGE; erunt triangula AFC, CGE, vtraque simul maiora triangulis ABC, CDE, vtrisque simul. Duo ergo triangula Isoscelia similia super inæqualibus basibus constituta, &c. quod ostendendum est.

c 41. primi.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

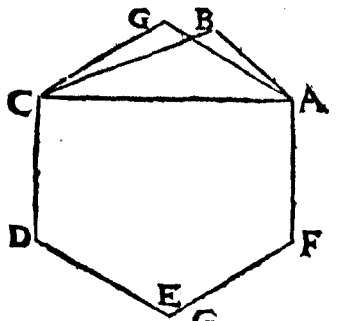
Inter Isoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima, & æquilatera est, & æquiangula.

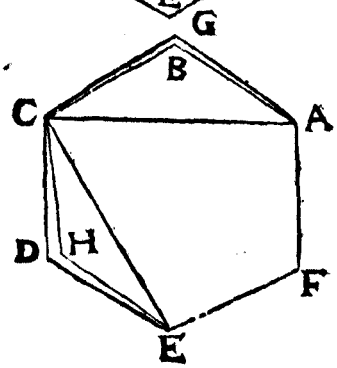
ISOPERIMETRARVM figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula.

ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes totidem laterum sibi Isoperimetras, ita vt maior dari non possit. Dico eam esse æquilateram, & æquiangulam. Sit enim si fieri potest, primum non æquilatera, sed sint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta AC, [a] si constituatur super AC, triangulũ Isosceles AGC, quod sit isoperimetrum triangulo ABC; erit tota figura AGCDEF. Isoperimetra figurę ABCDEF. [b] Et quia triangulum AGC, maius est triangulo ABC; si addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod est contrarium hypothesi. Non ergo inæqualia sunt latera AB, BC, sed æqualia. Eademq; ratione ostendemus, latera proxima BC, CD; Item proxima deinceps æqualia esse. Maxima igitur figura inter sibi isoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera est, quod est primum.

[a] 7. huius.

[b] 8. huius.





SIT deinde, si fieri potest, figura ABCDEF, æquilatera quidem, vt iam demonstratum est, at non æquiangula, sed anguli B, D, non proximi inæquales sint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demonstratum est, figuram maximam esse æquilateram, erunt duo triangula ABC, CDE, Isoscelia, ita vt duo latera AB, BC, æqualia sint duobus lateribus CD, DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; [c] erit recta AC, maior quam recta CE. [d] Si igitur constituantur super bases AC, CE, alia duo triangula Isoscelia AGC, CHE, similia inter se, & Isoperimetra triangulis ABC, CDE; erunt triangula AGC, CHE, vtraque simul maiora triangulis ABC, CDE, vtrisque simul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF: erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF, quod cum hypothesi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur. Non ergo inæquales sunt anguli B, D, sed æquales. Eademque ratione ostendemus, angulos non proximos C, E, æquales esse, & binos alios quosuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam esse, nempe proximos etiam angulos inter se esse æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis esse angulo C; cum angulus C, æqualis sit non proximo angulo E; erit quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod absurdum est. Bini enim anguli non proximi inter se æquales sunt, vt ostendimus. Maxima ergo figura inter sibi Isoperime-

[c] 24. prim.

[d] 10. huius.

[e] 11. huius.

rimetras æqualia numero latera habentes non solum æquilatera, sed & æquiangula est. Quocirca Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera est, & æquiangula. quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

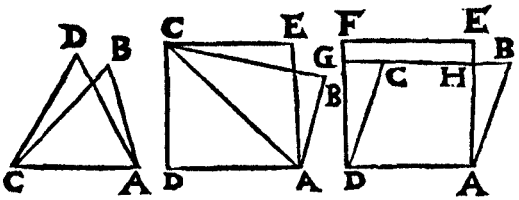
Quæ obseruanda sint in demonstratione huius propos.

CIRCA demonstrationem prioris partis huius propos. obseruandum est, accipienda esse duo latera inæqualia proxima inter se, ita vt angulum constituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia sunt latera accepta AB, BC, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta AC, factum erit triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, inæqualia sunt, vt in demonstrane assumebatur. Neque verò dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi posse duo latera proxima inæqualia. Nam si quis dicat latera AB, BC, esse æqualia, sumemus latera AB, AF, quæ si dicantur etiam æqualia esse, accipiemus AF, FE: Et si hæc adhuc æqualia esse dicantur, capiemus EF, ED; & sic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum constituant. Necessariò autem ad duo huiusmodi latera perueniemus: alias figura esset æquilatera, quod non conceditur

QVOD verò ad posterioris partis demonstrationem attinet, aduertendum est, in figuris multilateris accipiendos esse duos angulos inæquales non proximos inter se, ita vt inter ipsos vnus, vel plures anguli interponantur, quales sunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectę AC, CE, dictos angulos subtendentes se mutuò non intersecabunt, constituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula supra bases AC, CE, constructa: quod non contingeret, si duo anguli inæquales proximi inter se sumerentur, vt constat. Non est autem in dubitum vertendũ, an tales duo anguli possint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula necessariò erunt aliqui duo anguli non proximi inter se inæquales. Nam in proposita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui necessariò duo erunt in pentagono, in hexagono verò tres, & ita deinceps. Quod si vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter se inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis est: Si verò omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, saltem alteri proximorum inæqualis, alias figura esset æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D; non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si verò inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propositio hæc demonstrata tantum est in figuris multilateris, vt ex iis constat, quæ proximè de duobus angulis non proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiusmodi reperiri non possunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli sint æquales, vt ex coroll. propos. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam necessario sunt parallelogramma, vt in scholio pro-

lio propos. 34. lib. 1. Euclid. ostendimus) [a] singuli oppositi inter se sint æquales: Idcirco totam hanc propositionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita [a] 34. primi.



demonstrabimus. Sit primum triangulum ABC, inter sibi Isoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum esse & æquiangulum. Si enim non est æquilaterum, sed latera AB, BC, sunt inæqualia, [b] si super basem AC, constituatur triangulum Isosceles ADC, ita vt latera AD, DC, simul æqualia sint lateribus AB, BC, simul; erunt triangula ABC, ADC, Isoperimetra; [c] atque adeo ADC, maius, quam ABC, quod est contra hypothesim. Non ergo inæqualia sunt latera AB, BC, sed æqualia. Eademque ratio est de cæteris. Æquilaterum ergo est triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum est. quod est propositum. [b] 7. huius. [c] 8. huius.

DEINDE sit quadrilaterum ABCD, inter omnia sibi Isoperimetra maximum. Dico illud esse, & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non est æquilaterum, sint latera AB, BC, si fieri potest, inæqualia, ducaturq; recta AC. [d] Si igitur super AC, constituatur triangulum Isosceles, AEC, Isoperimetrum triangulo ABC; erit triangulum AEC, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, [e] erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD. quod est contra hypothesim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia sunt latera AB, BC, sed æqualia. Eademque ratio est de cæteris. Æquilatera ergo est figura ABCD. [d] 7. huius. [e] 8. huius.

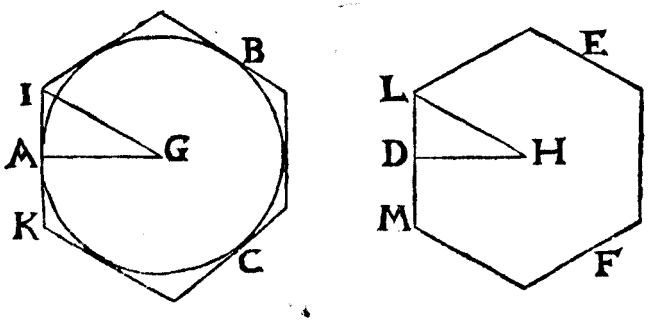
SI TIAM quadrilatera figura ABCD, omnium isoperimetrarum maxima, æquilatera, vt ostensum est, at non æquiangula, sed anguli BAD, CDA, inæquales sint. Quoniam igitur figura ABCD, cum sit æquilatera, parallelogrammum est, vt in scholio propos. 34. lib. 1. demonstrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus est; (alias, [f] cum ambo duobus rectis sint æquales, essent ambo recti) sed vnus acutus, & obtusus alter: si educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri BC, in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. [g] Quia verò latera AB, DC, maiora sunt lateribus AH, DG; producantur hæc, vt fiant rectæ AE, DF, lateribus AB, DC, æquales, iungaturque recta EF. Quo facto, erit figura AEFD, isoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE, DF, lateribus AB, DC, æqualia sint, latus verò AD, commune, & latus EF, lateri BC, æquale, [h] quod vtrumque æquale sit lateri opposito AD. Cum ergo figura AEFD, maior sit parallelogrammo AHGD; [i] hoc autem æquale sit parallelogrammo ABCD; erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem sit isoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter sibi Isoperimetras maxima. quod est contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt anguli BAD, CDA, sed æquales: atque adeò cum ABCD, sit parallelogrammum, [k] erunt anguli oppositi B, C, angulis D, A, æquales, propterea que tota figura æquiangula erit, quod est propositum. [f] 29. primi. [g] 19. primi. [h] 34. primi. [i] 35. primi. [k] 34. primi.

THEOR. II. PROPOS. 13.

Circulus omnium figurarum rectilinearum regularium sibi isoperimetrarum maximus est.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est.

ESTO circulus ABC, figura autem regularis quotcunque laterum ei isoperimetra DEF. Dico circulum ABC, esse maiorem figura DEF. Sit enim G, centrum circuli ABC, & H, centrum figuræ DEF; Describaturque circa circulum ABC, figura BIKC, tot laterum, & angulorum æqualium, quot continet figura DEF, per ea, quæ in scholio propos. 16. lib. 4. Euclid. docuimus. Deinde ex



puncto contactus A, ad centrum G, ducatur recta AG, [a] quæ perpendicularis erit ad IK. Ducatur rursus HD, ad LM, perpendicularis; [b] Diuidentque rectæ GA, HD, rectas IK, LM, bifariã, vt constat, si figuris BIKC, DEF, circumscribantur circuli. Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I, & L, bifariam, vt manifestum est ex demonstratione propos. 12. lib. 4. Euclid. Quoniam igitur toti anguli I, & L, sunt æquales, propter similitudinem figurarum, erunt etiam ipsorum dimidia (videlicet anguli AIG, DLH,) æqualia. Cum ergo & anguli IAG, LDH, sint æquales, vtpote recti; [c] erunt triangula AIH, DLH, æquiangula. Quia verò ambitus figuræ BIKC, maior est (per 1. propos. libr. 1. Archimedis de sphæra, & cylindro) ambitu circuli ABC; Ambitus autem circuli æqualis ponitur ambitui figuræ DEF; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitus figuræ DEF. Cum igitur figuræ sint regulares, & similes, erit etiam latus IK, latere LM, maius; & ideò IA, dimidium lateris IK, maius, quam LD, dimidium lateris LM. [d] Rursus quoniam est, vt IA, ad GA, ita LD, ad DH; Et est IA, maior quam LD; [e] erit quoque AG, maior, quam DH. Quamobrem rectangulum contentum sub AG, & dimidio ambitu circuli ABC, [f] quod circulo ABC, est æquale, maius est, quam rectangulum contentum sub DH, & dimidio ambitu figuræ DEF, hoc est, [g] quam area figuræ DEF. Circulus igitur omnibus figuris rectilineis regularibus sibi isoperimetris maior est. quod ostendendum erat.

[a] *18. tertii.*
[b] *3. tertii.*
[c] *32. primi.*
[d] *4. sexti.*
[e] *14. quinti.*
[f] *4. huius.*
[g] *2. huius.*

Circulus omnibus figuris rectilineis sibi isoperimetris maior est.

COROLLARIVM.

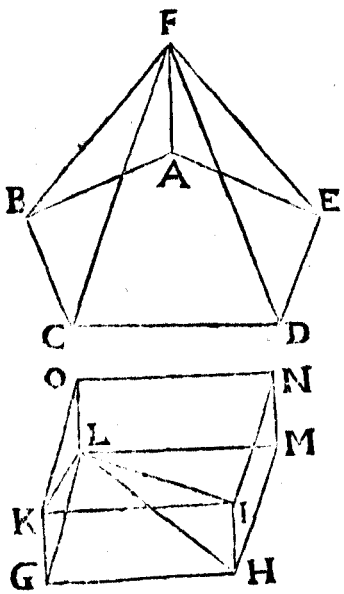
EX omnibus iis, quæ demonstrata sunt, perspicuum est, circulum absolutè omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse.

QVONIAM enim ex propositione 5. habetur, regularium figurarum isoperimetrarum eam, quæ plura latera continet, esse maiorem: Rursus ex propositione 12. constat, inter omnes figuras isoperimetras æqualia numero latera habentes, eam maximam esse, quæ regularis est: Ex hac denique 13. propositione perspicuum est, circulum omnium figurarum isoperimetrarum regularium esse maximum: Manifestè concluditur, circulum absolutè ac simpliciter omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum maximum esse. quod est propositum.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

AREA cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo contento sub perpendiculari à vertice ad basim protracta, & tertia parte basis. *Pyramis quælibet cui parallelepipedo sit æqualis.*

SIT pyramis, cuius basis quotcunque laterum ABCDE, & vertex F. Solidum autem rectangulum GN, cuius basis GHIK, æqualis sit tertiæ parti basis ABCDE; altitudo verò siue perpendicularis GL, æqualis altitudini pyramidis, siue perpendiculari à vertice pyramidis ad eius basim productæ. Dico solidum rectangulum GN, æquale esse, pyramidi ABCDEF. Ducantur enim ab omnibus angulis basis GHIK, ad aliquod punctum basis oppositæ, nimirum ad L, lineæ rectæ, ita vt constituatur pyramis GHIKL, eandem habens basim cum solido GN, eandemque altitudinem & cum eodem solido GN, & cum pyramide ABCDEF. [a] Quoniam igitur pyramis ABCDEF, tripla est pyramidis GHIKL; [b] Et solidum GN, triplum quoque est eiusdem pyramidis GHIKL: [c] erit solidum GN, pyramidi ABCDEF, æquale. Quapropter area cuiuslibet pyramidis æqualis est solido rectangulo, &c. quod erat ostendendum.



[a] *schol. 6. duodec.*
[b] *coroll. 7. duodec.*
[c] *9. quinti.*

THEOR. 13. PROPOS. 15.

AREA cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, & circa sphæram aliquam circumscriptibilis, hoc est, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad bases eius productæ sunt æquales, æqualis est solido rectangulo contento sub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis. *Corpus quodlibet, in qua sphæra describi potest, cui parallelepipedo æquale sit.*

ESTO corpus planis superficiebus contentum ABCD, circa sphæram EFGH, cuius centrum I, descriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad bases solidi erunt perpendiculares. Nam si verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in sphæra, per propos. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, [a] & in basi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod sphæra basim non secat, sed tangit. [b] Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, si per IE, ducatur aliud planum, à priori differens, fiet alius circulus in sphæra, & alia linea recta in eadem basi secans rectam AB, in E; ad quam etiam IE, perpendicularis erit: [c] Ac propterea IE, ad basim solidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter ostendemus, rectas IF, IG, IH, ad alias bases esse perpendiculares. Sit quoque solidum rectangulum LR, cuius bases KLMN, sit æqualis tertiæ parti ambitus corporis ABCD; altitudo verò siue perpendicularis LP, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad bases corporis ABCD, cadentium; quæ omnes inter se æquales sunt ex defin. sphæræ. Dico solidum LR, corpori ABCD, æquale esse. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibus componitur, diuidatur: quarum quidem pyramidum bases eædem sunt quæ corporis, vertex autem communis centrum I. [d] Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis est solido rectangulo sub perpendiculari LP, quæ singulis perpendicularibus corporis ABCD, æqualis ponitur, & tertia parte suæ basis contento; Si fiant tot solida rectangula, quot sunt pyramides, erunt omnia hæc simul æqualia solido rectangulo LR. (Si enim rectangulum KLMN, diuidatur in tot rectangula, quot bases sunt in solido proposito, ita vt primum æquale sit tertiæ parti vnius basis, & secundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quando quidem totum rectangulum KLMN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus solidi; intelligantur autem super illa rectangula constitui parallelepipeda; erunt omnia simul æqualia parallelepipedo LR.) Cum ergo singula parallelepipeda singulis pyramidibus sint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compositum, æquale solido rectangulo LR. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis superficiebus contenti, &c. quod demonstrandum erat.

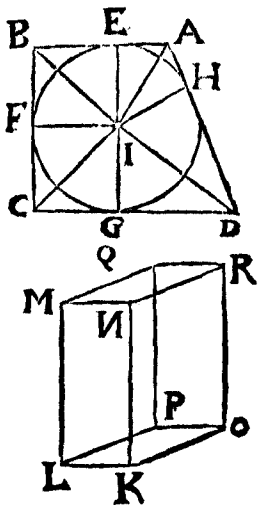
a 3. vndec.

b 18. tertii.

c 4. vndec.

d 14. huius.

e 14. huius.



THEOR. 14. PROPOS. 16.

Sphæra quælibet cui parallelepipedo sit æqualis.

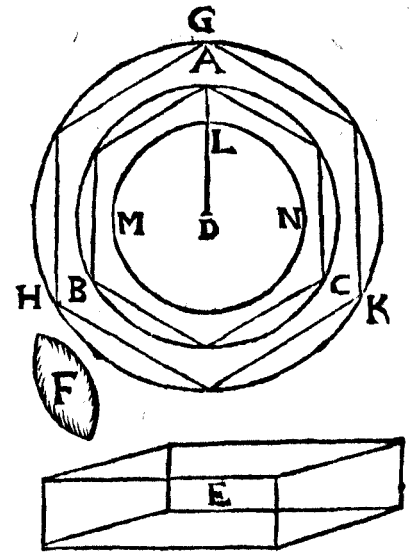
AREA cuiuslibet sphæræ æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphæræ, & tertia parte ambitus sphæræ.

ESTO sphæra ABC, cuius centrum D, semidiameter AD: Solidum autem rectangulum E, contentũ sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus sphæræ, ABC.

ABC. Dico corpus E, sphæræ ABC, esse æquale. Nam si non est æquale: sit, si fieri potest, primum maius, sitque excessus corporis E, supra sphæram ABC, quantitas F. Intelligatur circa centrum D, descripta sphæra GHK, maior quam sphæra ABC, ita tamen, vt excessus sphæræ GHK, supra sphęram ABC, non sit maior quantitate F, sed vel æqualis, vel minor, hoc est, vt sphæra GHK, sit vel ęqualis solido E, quando nimirum ipsa excedit sphærā ABC, præcisè quantitate F; vel minor, si nimirum ipsa excedit sphæram ABC, minori quātitate, quam F. Necessario enim aliqua sphæra erit, quæ vel æqualis sit magnitudini E, atq; adeo maior quam sphæra ABC; vel maior quidem quam sphæra ABC, minor verò quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam sphæra ABC. [a] Inscribatur deinde intra sphæram GHK, corpus, quod non tangat sphæram ABC, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad bases istius corporis eductarum maior sit semidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum bases sunt eædem, quæ corporis GHK, vertex autem communis centrum D; [b] erit quælibet pyramis æqualis solido rectangulo contento sub eius perpendiculari, & tertia parte basis; Atq; idcirco solidum rectangulum contentum sub semidiametro AD, & tertia parte basis cuiuslibet pyramidis, minus ipsa pyramide erit. Et quoniam omnia solida rectangula cōtenta sub singulis perpendicularibus ex centro D, ad bases corporis dicti protractis, & singulis tertijs partibus basium, simul æqualia sunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes basium simul tertiam partem ambitus corporis; erit solidum rectangulū contētum sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus præfati corporis inscripti intra sphæram GHK, minus corpore inscripto. Quoniam verò ambitus corporis inscripti maior est ambitu sphęræ ABC, vt demonstrat Archimedes lib. 1. de sphęra & cylindro propos. 27. atque adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia parte ambitus sphęrę ABC: erit solidum rectangulum contentum sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus sphęrę ABC, hoc est, solidum E, multo minus corpore inscripto intra sphęram GHK: Posita est autem sphæra GHK, vel æqualis solido E, vel minor. Igitur & sphęra GHK, minor erit corpore intra ipsam descripto, totum parte quod est absurdum. Quocirca solidum E, maius non erit sphęra ABC.

[a] 17. duodec.

[b] 14. huius.



SIT DEINDE, si fieri potest, solidum E, minus, quam sphęra ABC, excedatur que à sphęra ABC, quantitate F. Intelligatur circa centrum D, sphęra descripta LMN, minor quam sphęra ABC, ita tamen vt excessus, quo sphęra LMN, superatur à sphęra ABC, non sit maior quantitate F, sed vel æqualis, vel minor, hoc est, vt sphęra LMN, sit vel æqualis solido E, si nimirum ipsa excedatur à sphęra ABC, quantitate F, vel maior solido E, si videlicet sphęra LMN, à sphęra ABC, superetur minori quantitate, quam F. Necessario enim aliqua sphęra erit

ra erit, quæ vel ęqualis sit solido E, atque adeo minor quam sphęra ABC, vel minor quidem quàm sphæra ABC, maior verò quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam sphęra ABC.[a] Describatur deinde intra sphæram ABC, corpus, quod minimè tangat sphæram L M N; ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad bases huius corporis inscripti cadentium minor sit semidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes eius angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides resoluatur, quarũ bases sunt eædem, quæ corporis ABC, vertex autem communis centrum D; [b] erit quęlibet pyramis ęqualis solido rectangulo contento sub eius perpendiculari, & tertia parte basis; Et ideo solidum rectangulum contentum sub semidiametro A D, & tertia parte basis cuiusuis pyramidis, maius erit pyramide ipsa. Et quoniam omnia solida rectangula contenta sunt singulis perpendicularibus ex centro D, ad bases corporis dicti protractis, & singulis tertijs partibus basium, simul æqualia sunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes basium simul tertiam partem ambitus corporis, erit solidum rectangulum contentum sub semidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis sphęræ ABC, inscripti, maius corpore inscripto. Cum igitur ambitus sphęræ A B C, maior sit ambitu corporis sibi inscripti, atque adeo & tertia pars ambitus sphęræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit solidum rectangulum contentum sub AD, semidiametro, & tertia parte ambitus sphęræ ABC, hoc est, solidum E, multo maius corpore inscripto intra sphęram ABC: Ponebatur autem sphęra L M N, vel ęqualis solido E, vel maior. Igitur & sphęra L M N, maior erit corpore intra sphęram A B C, descripto, pars toto, quod est absurdum. Non igitur solidum E, minus erit sphęra ABC. Cum ergo neque maius sit ostensum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiuslibet sphęræ ęqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro sphęræ, & tertia parte ambitus sphęræ. quod demonstrandum erat.

a 17. duodec.

b 14. huius.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

Sphæra maior est omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ planis superficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus sibi Isoperimetris, quæ planis superficiebus contineantur, circaque alias sphæras circumscriptibilia sint, hoc est, quorum omnes perpendiculares ad bases productæ ab aliquo puncto medio sint æquales, maior est.

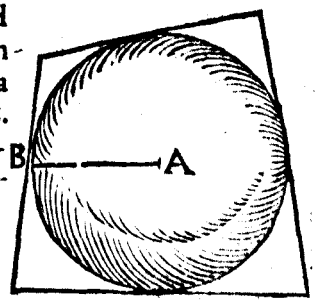
ESTO sphæra A, cuius centrum A, & semidiameter AB: Solidum autem circa aliquam sphæram circumscriptibile sibi Isoperimetrum C, cuius vna perpendicularium C D. Dico sphæram A, maiorem esse solido C. Intelligatur enim circa sphęram A, corpus descriptum simile prorsus solido C, ita vt singula quoque latera contingant sphęram A, hoc est, eius perpendiculares, quarum vna sit AB, sint quoque æquales, nempe semidiametri sphęræ A, existentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa sphęram A, maior est ambitu sphęræ A, (per ea, quę ab Archimede sunt demonstrata lib 1. de sphæra & cylindro, propos. 27.) erit quoque eiusdem corporis ambitus maior ambitu corpori C. Quare perpendicularis AB, hoc est semidiameter sphærę A, maior erit perpendiculari CD.

Quam-

Quamobrẽ rectangulũ ſolidũ contentũ ſub ſemidiametro AB, & tertia parte ambitus ſphęræ A, [a] quod ſphęræ A, ęquale eſt, maius erit, quàm rectangulum ſolidum contentum ſub perpendiculari CD, & tertia parte ambitus corporis C, [b] hoc eſt, quam corpus C. Sphęra igitur omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, quę planis ſuperficiebus contineantur, &c. maior eſt. quod erat demonſtrandum.

[a] *16. huius.*

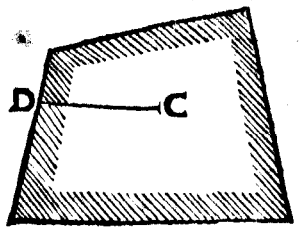
[b] *15. huius.*



Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro.

COROLLARIVM.

CONSTAT hinc, ſphęram maiorem eſſe quolibet corpore regulari ſibi Iſoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares è centro ad baſes corporis regularis inter ſe ęquales ſint; propterea quod ęquales ſunt ſemidiametro ſphęrę, [c] quæ intra corpus deſcribi poteſt.



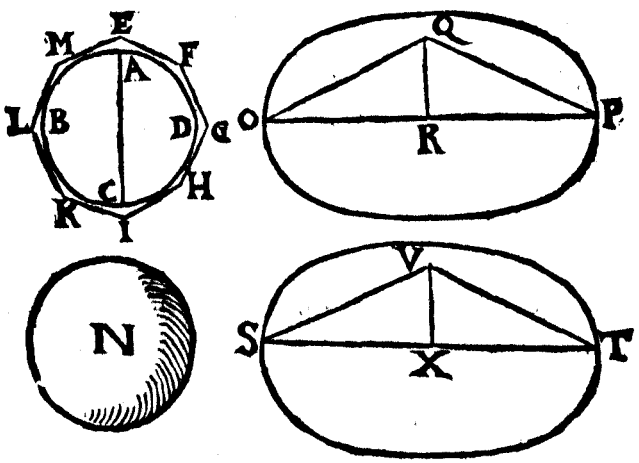
[c] *21. quintidec.*

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphęras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilib⁹, quæ conicis ſuperficiebus continentur.

ESTO circulus A B C D, cui circumſcribatur figura regularis E F G HIKLM, ita vt numerus laterum à quaternario menſuretur, cuiuſmodi eſt quadratum, figura 8. 12. 16. 20. 24. vel 28. laterum, angulorumque

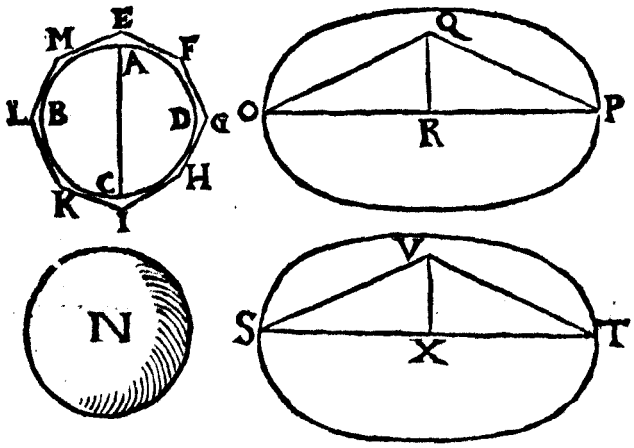


æqualium, &c. Ducaturque ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaq; ſi circa manentem rectam EI, immobilem circumagatur planũ, in quo eſt circulus ABCD, & figura EFGHIKLM, deſcribet circul⁹ ſphærã, figura vero corpus

corpus circa sphęram conicis superficiebus contentum, quarum superficierum latera æqualia sunt, nempè eadem, quę figuræ, vt ab Archimede demonstratur propos. 22. & 27. lib. 1. de sphęra & cylindro. Sit iam sphæra N, Isoperimetra corpori EFGHIKLM, circa sphęram A B C D, descripto. Dico sphęram N, dicto corpore esse maiorem. Quoniam enim ambitus solidi EFGHIKLM, maior est (per propos. 27. lib. 1. Archimedis de sphęra & cylindro) ambitu sphęrę ABCD, erit quoque ambitus sphęrę N, maior ambitu sphęrę ABCD; ideoq; semidiameter sphęrę N, maior erit semidiametro sphęrę ABCD. Et quia superficies sphęræ quadrupla est (per propos. 31. lib. 1. Archimedis de sphęra & cylindro) maximi circuli in sphęra; si sumat circul[o] OP, quadrupl[o] circuli maximi in sphęra N; (quod quidem facilè fiet, si diameter O P, dupla sumatur diametri maximi circuli in sphęra N. [a] Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in sphęra N, ita quadratum diametri OP, ad quadratum diametri circuli maximi in sphęra N; [b] Est autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorum, erit quoque circulus OP, ad circulum maximum in sphęra N, in proportione duplicata proportionis diametri O P, ad diametrum circuli maximi in sphęra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam, habebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata est, pportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1. 2. 4.) erit circulus OP, ęqualis superficiei sphæræ N. Accipiatur rursus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde supra circulum ST, conus rectus STV, axem VX, æqualem habens semidiametro sphæræ N: item supra circulum OP, alter conus NPQ construatur habens axem QR, ęqualem semidia-

a 2. duodec.

b 20. sexti.



metro sphęrę ABCD; eritque maior altitudo coni S T V, quam coni O P Q, at bases ęquales erunt. Quare conus S T V, maior erit cono O P Q; [c] propterea quod coni æqualium basium eam inter se habent proportionem, quam altitudines. Quoniam verò sphęra N, quadrupla est eius coni, qui basem habet ęqualem maximo in sphęra N, circulo, & altitudinem ęqualem semidiametro sphęrę N, vt demonstrauit Archimedes lib. 1. de sphęra & cylindro propos. 32. Huius autem eiusdem coni quadruplus est conus S T V, [d] eo quod coni eandem habentes altitudinem proportionem habent quam bases; [e] erit conus S T V, sphęrę N, ęqualis.

c 14. duodec.

d 11. duodec.

e 9. quinti.

N, æqualis. Eodem pacto, quia basis coni O P Q, æqualis est ambitui corporis E F G H I K L M; quia & æqualis superficiei sphæræ N, quæ corpori illi Isoperimetra est: altitudo vero æqualis semidiametro sphęræ ABCD; erit solido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ, per ea, quæ Archimedes lib 1. de sphæra & cylindro propos. 29. demonstrauit. Quamobrem & sphæra N, maior erit solido E F G H I K L M, conicis superficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, &c. maior est. quod demonstrandum erat.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Sphæra maior est quolibet cono & cylindro sibi Isoperimetro.

SPHÆRA quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est.

PROPOSITA enim quacunque sphæra, si fiat conus basem habens æqualem superficiei sphęræ, id est, quadruplam maximi in sphæra circuli, altitudinem verò semidiametro sphæræ æqualem: [a] erit sphæra huic cono æqualis; propterea quod ad conum, cuius basis est maximus in sphæra circulus, & altitudo semidiameter sphæræ, tam sphæra, ex propos. 32. libri 1. Archimedis de sphæra & cylindro, [b] quam prior conus basem habens quadruplā maximi circuli in sphæra, hoc est. superficiei sphęræ æqualem, & altitudinem semidiametrum sphæræ, proportionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni basem habentis superficiei sphæræ æqualem maior sit ambitu sphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota superficie coni, seclusa basi, quæ ambitui sphæræ ponitur æqualis, liquido constat, si fiat conus sphęræ Isoperimeter, hunc esse illo cono, ac proinde & sphęra minorem.

[a] 9. quinti.

[b] 11. duodec.

RVRSVS si fiat cylindrus basem habens æqualem superficiei sphęræ, & altitudinem semidiametrum sphęræ; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni basem habentis æqualem eidem superficiei sphęræ, & altitudinem semidiametrum eandem sphęræ, quem sphęræ æqualem esse proximè ostendimus: ac proinde & triplus ipsius sphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri (cylindrus videlicet eandem habens basem, altitudinem vero tertiam partem altitudinis cylindri illius: [d] cū ille cylindrus sit huius triplus) æqualis erit sphæræ. Cum ergo posterior hic cylindrus habeat ambitum maiorē ambitu sphęræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cylindri, seclusa vna base; quis non videt, si fiat cylindrus sphęræ Isoperimeter, hunc esse priore illo cylindro, ac proinde & sphæra maiorē? Sphęra ergo quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est. quod demonstrandum erat.

[c] 10. duodec.

[d] 14. duode.

SCHOLIVM.

HÆC omnia ferè ex Theone Alexandrino in commentarijs in Almagestū Ptolemaei, & ex Pappo Alexandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonstrauerimus, excerpta sunt: quæ verò sequuntur, à nobis inuenta sunt, ac demonstrata.

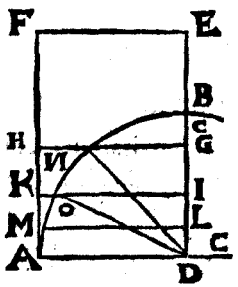
PROBL. 3. PROPOS. 20.

DATO semicirculo vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæ sextæ,

Semicirculo & aliis partibus subduplis circuli æqualia rectangula & Isoperimetra constituere.

mę sextæ, &c. rectangulum constituere Isoperimetrum & æquale; si linea recta periphæriæ detur æqualis.

SIT semicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars sextadecima AOD, &c. construatur rectangulum AE, contentum sub semidiametro AD, & sub recta AF, quæ quartæ parti peripheriæ æqualis sit; Item rectangulum AG, sub semidiametro AD, & sub AH, octaua parte peripheriæ. Itē rectangulum AI, sub semidiametro *A*D, & sub *A*K, parte decimasexta peripherię. Item rectangulum *A*L, sub semidiametro *A*D, & sub *A*M, parte trigesima secunda peripheriæ. Erit igitur ex ijs, quę lib. 4. cap. 7. ad finem Num. 1, ostendimus, AE, semicirculo ABC; & *A*G. Quadranti *A*BD; & *A*I, octauę parti *A*ND: & *A*L, parti sextædecimæ *A*OD, æquale, &c. Dico hæc eadem rectangula esse Isoperimetra prædictis circuli partibus, singula singulis. quod quidem perspicuum est ex constructione. Nam *A*D, EF, æqualia sunt diametro *A*C, & *A*F, DE, semicircumferentiæ *A*BC, nimirum duabus quartis partibus circumferentiæ. Item *A*D, GH, æqualia sunt semidiametris *A*D, DB, & *A*H, DG, duabus partibus octauis, hoc est, quartæ parti circumferentiæ *A*B. Item *A*D, IK, duabus semidiametris *A*D, DN, & *A*K, DI, duabus sextis decimis, id est, octauæ parti circumferentiæ *A*N. Item *A*D, LM, duabus semidiametris *A*D, DO, & *A*M, DL, duabus partibus trigesimis secundis, hoc est, parti decimæsextæ *A*O; *A*tque ita deinceps, si tam peripheria *A*O, quam recta *A*M, continue subdiuidatur. Dato ergo semicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Isoperimetrum, & æquale constituimus. quod faciendum erat.



HOC problema, quod ad semicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. Odo Malcotius Mathematicus ingeniosus, cum problema Mathematicum per suos auditores exhiberet in Collegio Romano: quamuis illud instar Theorematis proposuerit.

PROBL. 4. PROPOS. 21.

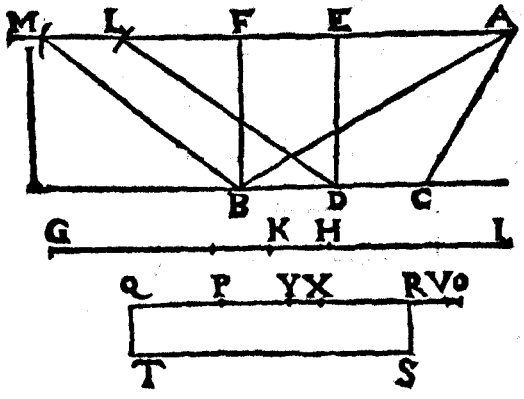
Parallelogrammum dato triangulo æquale & Isoperimetrum constituere.

DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque Isoperimetrum constituere.

SIT datum triangulum qualecunque *A*BC. Per *A*, ducatur *A*M, basi BC, parallela. Et quia, si neuter angulorum B, C, rectus est, [a] vtrumque latus *A*B, *A*C, maius est perpendiculari ex *A*, vel B, C, D, in oppositam parallelam demissa: si verò alter angulorum rectus est, hoc est, alterutrum laterum perpendiculare est ad dictas parallelas; vtrumque latus *A*B, *A*C, simul maius est, quam duplum prædictæ perpendicularis; ideoque semissis aggregati ex vtroque latere maior perpendiculari eadem; id est, si accipiatur GH, lateri *A*B, & HI, lateri *A*C, æqualis, vt tota GI, summæ laterum *A*B, *A*C, æqualis sit, diuidaturque GI, bifariam in K, semissis GK, maior erit perpendiculari DE. Si igitur ex D, medio puncto

[a] coroll. 19. primi.

to basis B C, ad interuallũ G K, arcus circuli describatur, secabitis rectam A M, in aliquo puncto, vt in L. Sumpta autem L M, ipsi B D, æquali, ducantur rectæ

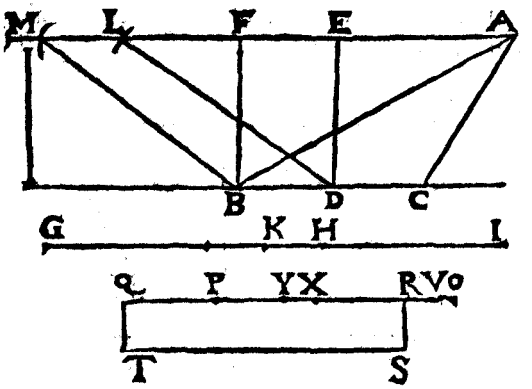


D L, B M, [a] quæ parallelæ inter se erunt; ideoque parallelogrammum erit D M, triangulo A B C, æquale. Dico hoc idem triangulo esse Isoperimetrum, quod perspicuum est ex constructione: quippe cum D L, B M, vtraque æqualis sit ipsi G K, hoc est, semisi laterum A B, A C, ac proinde ambæ D L, B M, simul æquales ambobus lateribus A B, A C, simul; rectæ autem B D, L M, simul æquales basi B C. Constructum ergo est parallelogrammum D M, non rectangulum æquale, & Isoperimetrum triangulo A B C.

[a] 33. primi. [b] schol. 41. primi.

QVOD si optes rectangulum eidem triangulo A B C, æquale, & Isoperimetrum, ita agendum erit. Erectis perpendicularibus B F, D F, [c] erit rectangulum B E, triangulo æquale, sed non Isoperimetrum; [d] quod B F, D E, minores sint lateribus A B, A C, sed B D, E F, basi B C, æquales: ac proinde ambitus rectanguli B E, ambitu trianguli A B C, minor; ideoque si producantur B F, D E, ad æqualitatem semisis laterum A B, A C, fiet quidem rectangulum triangulo A B C, Isoperimetrum, sed triangulo maius, cum superet rectangulum B E. [e] Inuenta autem inter B F, B D, media proportionali N; [f] erit quadratum rectæ N, rectangulo B E, ideoque & triangulo A B C, æquale. [g] Quia vero B F, B D, simul maiores sunt, quam dupla rectæ N; [h] est que B M, maior quam B F, erunt B M, B D, simul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo Q P, ipsi B D, & P O, ipsi B M, æquali, vt tota Q O, duabus B D, B M, simul sit æqualis; erit quoque Q O, maior quam dupla rectæ N. [i] Secetur ergo Q O, in R, ita vt N, sit inter segmenta Q R, R O, media proportionalis, perficiaturque rectangulum Q S, sub segmentis Q R, R O, comprehensum. [k] quod quadrato rectæ N, hoc est, rectangulo B E, vel triangulo A B C, æquale erit. Dico idem esse triangulo A B C, Isoperimetrum. Quoniam enim Q R, R S, simul, id est, recta Q O, æquales sunt rectis B D, B M, simul, ex constructione; erunt reliquæ S T, T Q, reliquis L M, L D, æquales: ideoque rectangulum Q S, parallelogrammo B L, ac proinde & triangulo A B C, (cui parallelogrammum B K, Isoperimetrum est ostensum) erit Isoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. constituimus. quod faciendum erat.

[c] schol. 41. primi. [d] coroll. 19. primi. [e] 13. sexti. [f] 17. sexti. [g] schol. 25. quinti. [h] 19. primi. [i] schol. 13. sexti. [k] 17 sexti.



SCHOLIVM.

QVOD si sumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum sub QV, VO, adhuc Isoperimetrum triangulo ABC, sed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y, (diuisa QO, bifariam in Y,) erit adhuc rectangulum sub QX, XO, Isoperimetrum triangulo ABC, sed maius. Quadratum denique rectæ QV, Isoperimetrum quoque est triangulo ABC, & maius, quæ omnia ita demonstrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, Isoperimetra esse triangulo ABC, hoc est, rectangulo QS, patet: cum bina latera circa angulum rectum æqualia semper sint rectæ QO, hoc est, binis lateribus rectanguli QS. Eadem verò esse inæqualia triangulo ABC, sic ostendo.

[a] *lemma 42. decimi.* [a] Quoniam quadrata QV, VO, maiora sunt quadratis QR, RO, simul: [b] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo sub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna cum rectangulo sub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum sub QV, VO, bis minus rectangulo sub QR, RO, bis; ideoque & rectangulum sub QV, VO, semel, rectangulo sub QR, RO, semel minus erit. Non aliter ostendemus, rectangulum sub QR, RO, minus esse rectangulo sub QX, XO, hoc est rectangulum sub QX, XO, maius esse rectangulo sub QR, RO. Denique

[b] *4. secundi.*

[c] *6. secundi.* [c] quoniam rectangulum sub QX, XO, vna cum quadrato XY, æquale est quadrato YO, vel QY; erit quadratum QY, maius rectangulo sub QX, XO ideoque multo maius rectangulo sub QR, RO, id est, triangulo ABC. Quæ omnia demonstranda erant.

EX quo constat, quadratum QY, ex semissæ rectæ QO, descriptum maximum esse omnium rectangulorum sub quibuscunque segmentis rectæ QO, cõprehensorum, quod etiam ex propos. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

Rectangulũ datæ figuræ Isoperimetrũ & æquale cõstituere.

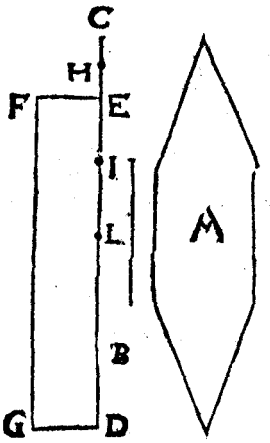
DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Isoperimetrum constituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non esse semisse dimidiati ambitus dati rectilinei.

SIT

SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, sed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non sit semisse, dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta CD, æquali semissi ambitus hexagoni; erit B, recta non maior semisse ipsius CD, sed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, ita vt B, sit media proportionalis inter segmenta DE, EC, fiat rectangulum EG, contentum sub segmentis DE, EC. Dico rectangulum EG, æquale esse, & isoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres DE, B, EC, continuè proportionales sunt; [c] erit rectangulum EG, quadrato B, id est, hexagono A, æquale. Et quia duo latera DE, EF, æqualia sunt rectæ CD, hoc est, semissi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri semissi: [d] erit totum rectangulum EG, hexagono A, isoperimetrum. Dato ergo rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & isoperimetrum constituimus: quod erat faciendum.

[a] 14. secundi.
[b] schol. 13. sexti.
[c] 17. sexti.

SCHOLIVM.



QVOD si B, latus quadrati foret maius semisse dimidii ambitus rectilinei A, hoc est, maius recta CD, non posset CD, ita secari, vt B, esset medio loco proportionalis inter segmenta, vt liquidò constat.

IAM verò si sumatur punctum H, inter C, & E, vtcunque; erit rectangulum sub DH, HC, adhuc isoperimetrum figuræ A, sed tamen minus. Si verò accipiatur punctum I, vtcunque inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum sub DI, IC, figuræ A, isoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum semissis DL, erit isoperimetrum eidem figuræ & maius; quæ omnia demonstrabuntur, vt in scholio præcedentis problematis dictum est.

APPENDIX.

De circulo per lineas quadrando.

1. LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonstratum est, circulum figurarum omnium sibi isoperimetrarum esse maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum construi possit æquale, & vicissim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. cap 7. copiosè traditum sit, quo pacto ex inuentis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus sit, hoc est, qua ratione area circuli, siue capacitas tum ex diametro, tum ex circumferentia cognita sit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus est quadrati, quod circulo æquale est. Sic è contrario cap. 8. eiusdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda sit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc est, proposito quadrato, instar areæ circuli alicuius, quomodo circulus describendus sit illi quadrato æqualis. Inuenta

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

uenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illius diametri erit is, qui quæritur. Visum est autem appendicem hanc libro huic septimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragonismo, siue quadratura, non parum affinis sit de isoperimetris figuris disputationi.

Circuli quadratura per numeros secundum Arabes falsa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Iosephus Scaliger in suis Cyclometricis elementis veram esse credit, omnino reiicienda est, cum sit extra limites Archimedis, per quos constat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere esse tripla sesquiseptima, maiorem verò tripla superdecupartiente septuagesimas primas. quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim proportionem circumferentiæ ad diametrum esse potentia decuplam: adeò vt si quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametrum sit 1. quod falsum est. Nam cum radix quadrata numeri 10. sit maior quam $3\frac{1}{7}$. quod huius radicis quadratum sit tantum $9\frac{47}{49}$. Radix autem vnitatis sit 1. esset maior proportio circumferentiæ ad diametrum, quam tripla sesquiseptima: cum tamen secundum Archimedem sit minor. Item quia posita diametro 7. circumferentia minor est, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur est proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falsa.

a schol. 47. primi.

SIMILI modo reiicienda est ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui existimat, diuisa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis esse 10. adeò vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falsum est. Nam cum quadratum diametri 10. sit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter est 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. vt cap. 7. lib. 4. Num. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{2}{7}$. atque adeò multò maior, quam 50. Est igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

Falsa quadratura circuli per lineas Campano ascripta.

2. IAM verò, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera esse videtur, & quam sciolus, nescio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typisque mandauit. Est autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiusmodi linea inueniatur, non docet) secetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum constituatur. quod sciolus ille circulo dicit esse æquale. quæ res omninò Geometra indigna est, & planè ridicula. Si enim quadratum illud circulo est Isoperimetrum; [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum sibi isoperimetrarum capacissimus est, quis non videt, quadratum illud circulo minus esse?

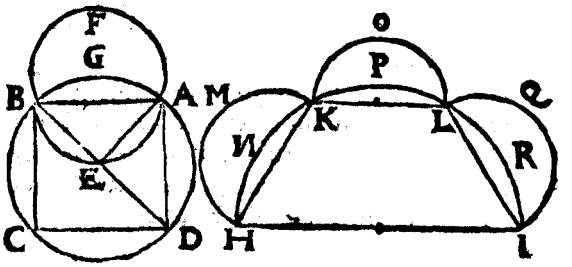
b 13 huius.

Quadratura Hyppocratis Chii.

c 9. quinti.
d 31. tertii.
e schol. 26. primi.
f schol. 27. primi.

3. DE Tetragonismo etiam Hippocratis Chij nihil dicerem, nisi in eius demonstratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propositam non attingat. Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua describatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus describatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, secet in E. Ducta ergo recta AE, [d] erit angulus AEB, in semicirculo rectus, [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet basem BD, trianguli Isoscelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum est quadrati diametri AB;

tri AB; [a] estque vt quadratum BD, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE: erit quoque circulus circuli duplus; & semicirculus BAD, semicirculi AFB; ideoque semissis semicirculi BAD: id est, quadrãs ABE, [b] (est enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) semicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur communi segmento AGB, reliquum triangulum AFB, reliquæ Lunulæ AFBGA, æquale erit: ac proinde si triangulo fiat quadratum æquale erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata est Lunula AFBGA. [a] 2. duodec.



DEINDE sit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam semicirculo descripto, aptentur in eo tres rectæ semidiametro huius circuli, hoc est, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes semissem hexagoni: [b] cum latus hexagoni sit semidiametro æquale. Descriptis autem circa illas tres rectas semicirculis HMK, KOL, LQI, qui semicirculo AFB, æquales sunt, propter diametros æquales; [c] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum est. quod latus lateris sit duplum: [d] erit quoque circulus diametri HI, circuli diametri HK, quadruplus, & semicirculus HKLI, semicirculis HMK, KOL, LQI, AFB, æqualis erit: demptisque segmentis communibus HNK, KPL, LRI, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRIQ, vna cum semicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum est, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc est, [e] inquiratur excessus trapezii super tria illa quadrata; erit excessus hic rectilinea figura semicirculo AFB, æqualis. [f] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum semicirculo AFB, æquale, & quadratum ex illius quadrati diametro descriptum toti circulo AFBE, æquale. [g] quod tam quadratum quadrati duplum sit, quam circulus semicirculi. Quadratus ergo circulus est.

[b] corell. 15. quarti.
[c] schol. 4. secundi.
[d] 2. duodec.
[e] schol. 45. primi.
[f] 14. secundi.
[g] schol. 45. primi.

HÆC est quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, verè quadrauerit, vitiosa autem, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à se esse arbitratur, quod verum non est. Solum enim ex eius demonstratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria est quarta pars peripheriæ alicuius circuli, superior autem semicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars est circumferentiæ ABCD, & AFB, semissis peripheriæ AFBE. At eiusmodi non sunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, sint sextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ superiores sint semicirculi, vt in illis: quæ nondum sunt quadratæ. Quod si inuenta esset ars quadrandi huiusmodi Lunulas, verissimè quoque quadraretur circulus, sine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ sanè res foret præclara.

Fallacia quadratura Hippocratis.

Quid desideretur in Hippocratis quadratura.

COLLI-

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli esse possibilem, cum sicut Lunula AGBF, quadrata est, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari posse, nihil obstet, quamuis adhuc non sit à quoquam quadrata. Et certè, vt quidam rectè affirmat, quod hic ostenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars est circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto sciri posse, etiam non inuestigata quantitate peripheriæ circuli, cum solum desit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquando dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

Cur de fallsis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.

4. MVLTA quoque hic dicenda essent de fallis aliorum quadraturis, sed quia hæ vel se ipsas produnt, cum in progressu earum facilè appareat, aliquid deesse ad constituendum circulo æquale quadratum, cuiusmodi est quadratura Iacobi Falconis Equitis Hispani, qui sine inuetione lineæ rectæ, quæ peripheriæ sit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum sunt confutatæ, nimirum Nicolai Cusani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontij Finaei Tetragonismus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Lusitano in libello de Erratis Orontij: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem se inuenisse putauit, nihil omninò dicendum mihi esse statuo, ne frustra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem solum hoc loco eam quadraturam subiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem libr. 6. Euclid. conscripsi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (sic enim eam appellare lubet, lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometricè inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea desideretur, accuratior tamen est omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practicè à scopo aberrare non possimus. Vt autem clarè atque ordinatè procedam, absoluam totum negotium paucis quibusdam propositionibus.

Qua nõ quadratura per lineas hic explicetur.

L.

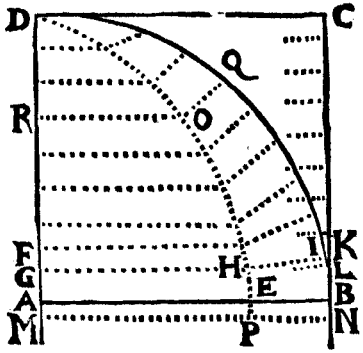
QVADRATRICEM lineam describere.

DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor est Pappus Alexandrinus in 4. libr. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio πτεραγονίζουσα ab iisdem est appellata; à nobis verò eadem de causa quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores conentur huiusmodi lineam describere per duos motus imaginarios duarum rectarum sese intersecantium, qua in re principium (vt philosophi loquuntur) petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometricè delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet.

Quadratricis descriptio.

5. SIT ergo in quadrato ABCD, descriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoque: ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu descendens ad latus AB, peruenat, sic tamen, vt perpetuo sit lateri AB, parallela & cum lateribus

ribus AD,BC, angulos rectos efficiat, secabunt se mutuò continuè semidiameter in circumferentia D B, circuma cta, & recta D C, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent: hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B,



effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc repræhenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, atq; ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum D B, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionũ puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum AB, in E.

6. SED quia punctum E, in latere A B, inuenire Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimam partem A F, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus DB, bifariam continuè secabimus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, factæ sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta verò ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissimè notetur (adhibito videlicet Lemmate Probl. 1. lib. 2. vt concursus H, quam exquisitissimè reperiatur) sumemus ipsi GH, æqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili, atque vniformi extensione vsq; ad P, secabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, A E, M P, inter se distantiam efficitur, vt fermè sint æquales, licet Geometricè loquendo recta A E, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest: adeò vt arcus circuli ex A, per H, P, descriptus verum punctum E, quod ad sensum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit.

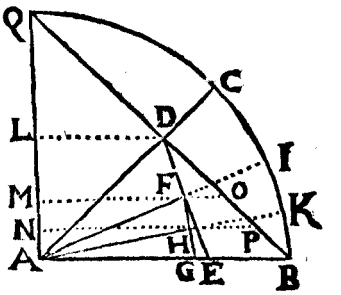
Rectæ namque GL, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior sit. Itaque si res illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod verè in Quadratrice ibi existit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquisite & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

Latus basis & centrũ Quadratricis.

RECTAM porrò AD, vocamus latus Quadratricis: & rectam AE, eiusdem basem: ac denique punctum A, centrum eiusdem.

7. VERVM puncta Quadratricis prope basem certius inueniemus (sine intersectionibus linearum, quæ ibi valdè obliquæ sunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, secetur in D, bifariam. quod fiet, si ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, secetur bifariam in F. quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctum medium arcus BC. ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam: [c] ac proinde & rectam DE, [d] quæ chordæ BC, est parallela: propterea quod latera AB, AC, in triangulo ABC, proportionaliter secantur, in D, E: quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo, si rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones, vt in prioris figura. [e] Est enim AD, ad DB, perpendicularis, [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.

[a] *schol. 27. tertii.*
[b] *schol. 27. tertii.*
[c] *schol. 4. sexti.*
[d] *2. sexti.*



[e] *3. tertii.*
[f] *schol. 26. primi.*

OMNIA verò hæc puncta inuenta D, F, H, &c. esse in Quadratrice, ita ostendo. Ductis LL, FM, NH, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ. ideoque & AQ. secta erit in L, bifariam. Sectus autem est & arcus BQ, in bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE, secta est bifariam in F, [h] erit quoque DB, secta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD; ita est AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt ostendimus, secabunt sese AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de aliis punctis hac arte inuentis.

[g] *2. sexti.*
[h] *2. sexti.*
[i] *2. sexti.*

8. ESSE porrò lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometricè descriptam, eandem, quam Dinostratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuũ est. Nam si semidiameter AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus

tus DC peruenirет. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum D A, C B, ductæ abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione: liquidò constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometricè inuenta, à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre.

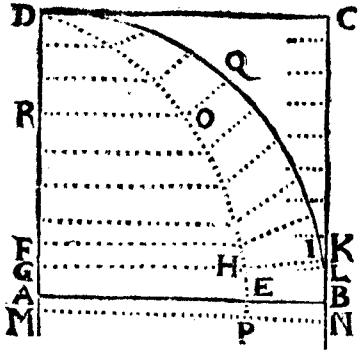
HÆC igitur est descriptio lineæ Quadratricis Geometrica quodammodo, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen errori magis sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam conicarum sectionum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Appollonius Pergaeus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reiicere velit, tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipse multa præclarè de iisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habēt in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omninò cogetur, hanc descriptionem nostram Quadratricis lineæ esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt lib. 6. propos 15. diximus.

HABET linea hæc quadratrix multas, & insignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. demonstrauimus, quas hoc loco repetere superuacaneum est. Solum igitur eius vsum in quadrandis circulis hic exponemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamsi nullum aliud Quadratricis punctum inuentum esset. quod quidem vltimum punctum licet Geometricè, ac præcisè non reperiatur: tamen si artificium posterioris figuræ adhibeatur, non aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt supra diximus. Quando namque deprehensum fuerit, vltimam perpendicularem A H, æqualem esse præcedenti vltimæ lineæ translatæ A G, ita vt nulla differentia inter illas per circinum discernatur: sumi poterit citra errorem notabilem vltimum illud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Si minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artificio, quo AF, AH, ductæ sunt, donec inter vltimam, & postremo loco inuentam rectam in semidiametro AB, nullum appareat discrimen. cuius quidem rei operatio ipsa optimus erit magister.

COROLLARIVM.

9. Ex descriptione Quadratricis colligitur, si ex centro A, ducatur recta vtcunque A Q, secans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita esse arcum BD, ad arcum B Q, vt est semidiameter A D, ad rectam A R, ducta prius O R, ipsi A B, parallela: ac proinde & ad rectam, quæ ex O, ad A B, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars est arcus D Q, totius arcus DB, quę [a] 34. primi.

Pars eſt recta DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, continet: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſeſe interſecant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus DQ, toti arcui DB, quã recta DR, toti lateri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur pars lateris DA, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto exrremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt: ac proinde ea nõ tranſibit per O, quod eſt abſurdũ, & contra hypotheſim. Quia inquam eadẽ pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius lateris DA; [a] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius lateris DA, quod eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadem totius DB, ad totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, ita totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam, [b] quæ ipſi RA, æqualis eſt.



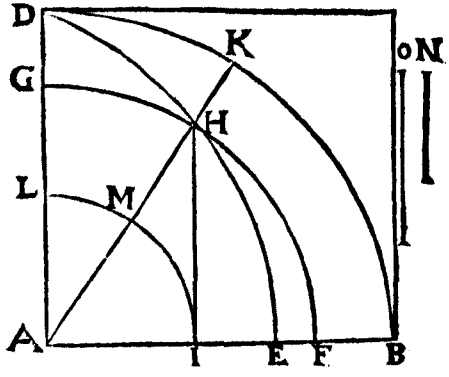
a 19.quinti.

b 34.primi.

II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit; erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continuè proportionales.

Hæc eſt eximia, atque inſignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſupra. Dico arcum BD, ſemidiametrum AD, & Quadratricis baſem AE, continuè eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipſa



AE, minoremue: ſitque primum AF, maior, quam AE. Deſcripto ex centro A, Quadrante FG, per F, ſecante Quadratricem in H, ducatur per H, ſemidiameter

AHK,

AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam AD, vt AD, hoc est, vt AB, ad AF; estque vt AB, semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim sit, vt lib. 4. capit. 7. propos. 1. demonstrauimus, diameter ad diametrum, vt circumferentia ad circũferentiam;[a] erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam: [b] ac proinde etiam, vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, vt arcus BD, ad arcum FG.) [c] Erit quoque arcus BD, ad rectam AD, vt idem arcus BD, ad arcum FG; [d] ac propterea æquales erunt recta AD, & arcus FG. Quia verò ex præcedenti coroll. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta AD, ad rectam HI, & vt arcus BD, ad arcum BK, ita est arcus FG, ad arcum FH, [e] quod arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint; [f] erit quoque recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo ostensa sit recta AD, arcui FG, æqualis: [g] erit quoque recta HI, arcui FH, ęqualis quod est absurdum. Est enim recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: [h] (Nam recta AF, secat eam chordam bifariam; [i] ac proinde & arcum) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem base AE, Quadratricis.

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e schol. 33. sexti.
f 11. quinti.
g 14. quinti.
h 3. tertij.
i schol. 27. tertij.

SIT deinde, si fieri potest, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem base AE. Descripto igitur ex centro A, per I, Quadrante IL, erigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, secans Quadratricem in H, puncto, per quod semidiameter ducatur AK, secans arcum IL, in M. Ostendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æqualem esse. Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum IL, ad arcum IM, vt est recta AD; ad rectam HI. Quare cum arcus IL, ostensus sit æqualis rectæ AD, [k] erit quoq; arcus IM, æqualis rectæ HI. quod est absurdum. Est enim recta HI, maior arcu IM. Nam si ex H, duceretur versus G, alia recta tangens circulum IL, sicut HI, eundẽ tangit in I, [l] essent hę duæ tangentes æquales, arcusq; inter eas interceptus secaretur bifariam in M, [m] propterea quod angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur à recta AH, [n] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [o] ideoque arcus, quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum, vt lib. 8. propos. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis HI, maior semisse IM, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad rectam minorẽ base AE, Quadratricis; Sed neque vt AD, ad maiorem, sicut ostensum est. Igitur vt AD, ad ipsam basem AE. quod demonstrandum erat.

k 14. quinti.
l 2. coroll. 36. tertij.
m schol. 27. tertij.
n 4. vel 8. primi.
o 26. tertij.

COROLLARIVM I.

Rectam circunferentiæ circuli æqualem reperire.

HINC facilè rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, ac proinde & semicircumferentiæ, immo & toti circũferentiæ æqualem.

QVONIAM est arcus BD, ad semidiametrum AD, vt AD, ad basem Quadratricis AE; erit conuertendo quoque AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [p] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio sit eadem, quæ

p 11. quinti.

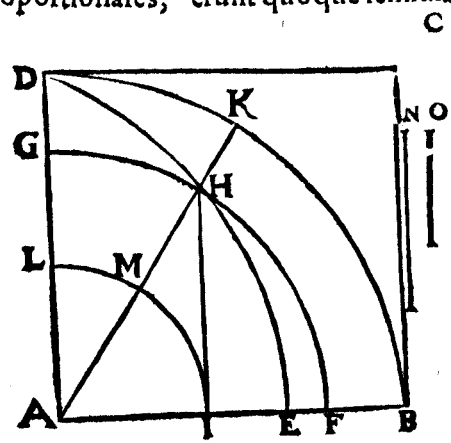
[a] 9. quinti. AE. [a] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli: Si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus A D, quartæ parti circumferentię illius circuli esse æquale: Et lineam lateris A D, duplam æqualem esse semicircumferentiæ eiusdem circuli: Et lineam quadruplam lateris toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propos. 1. ostendimus, diametri circulorum circumferentijs sint proportionales, [b] erunt quoque semidiametri semicircumfe-

[b] 15. quinti.



rentijs, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt A D, ad A E, hoc est, vt supradicta tertia proportionalis ad AD, ita Quadrans BD, semidiametri AD, ad Quadrantem semidiametri A E. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis sit ostensa Quadranti BD; [c] erit quoque recta AD, quadranti semidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipsius AD, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit ęqualis.

[c] 14. quinti.

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, si duæ rectę N, O, in præcedenti figura eandem proportionem habeant, quam AD, AE, minor autem O, statuatur semidiameter circuli alicuius, maiorem N, æqualem esse arcui Quadrãtis illius circuli.

CVM enim sit AD, ad AE, vt N, ad O; erit permutando AD, ad N, vt AE, ad O. Vt autem AE, ad O, ita est Quadrans semidiametri A E, ad Quadrantem semidiametri O, vt lib. 4. cap. 7. propos. 1. demonstrauimus. [d] Igitur erit quoque AD, ad N, vt Quadrans semidiametri AE, ad Quadrantem semidiametri O. Cũ ergo

[d] 11. quinti.

ergo AD, æqualis sit ostensa Quadranti semidiametri AE; [a] erit quoqe N, æqualis Quadranti semidiametri O. quod est propositum.

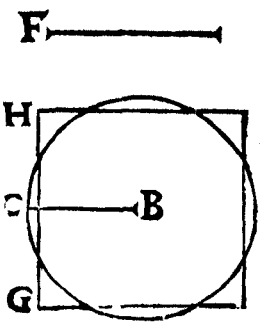
[a] 14. quinti.

III.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

SIT quadrandus circulus ad interuallum semidiametri B C, descriptus. Tribus rectis AE, basi Quadratricis; AD, lateri eiusdem pręcedentis figuræ, & rectę BC, inuenta quarta proportionali F; erit ex coroll. 3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atq; eius dupla semicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter semidiametrum B C, & duplam ipsius F, media proportionali GH: Dico quadratum ex G H, descriptum æquale esse circulo ad interuallum B C, descripto. [b] Quoniam enim rectangulum sub BC, semidiametro, & sub semicircumferetia circuli, id est, sub dupla rectæ F, inuentæ, æquale est circulo: [c] Prędicto autem rectangulo æquale est quadratum lateris G H; erit quoque quadratum lateris G H, circulo semidiametri B C, æquale.

Quadratum circulo æquale exhibere.

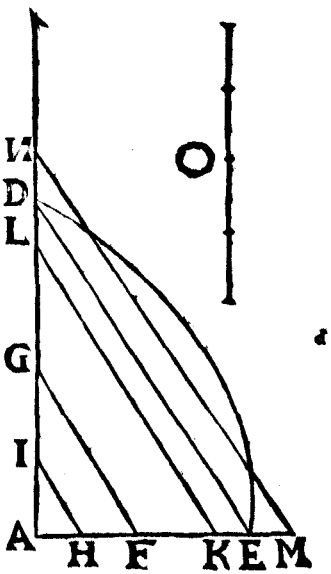


[b] 4. Isoperimetrorum.

[c] 17. sexti.

VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, atque idcirco & semicircumferentiæ, vel toti circumferentiæ, construenda erit figura eiusmodi. Fiat angulus rectus DAE, rectaque AD, ęqualis sit semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est; & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A, noua Quadratrix describatur DE, cuius latus AD, & basis A E. Ducta namque recta D E, constructa erit figura aptissima ad rectam circumferentię dati circuli æqualem inueniendam. Si enim circuli quadrandi semidiametro abscindatur æqualis AF, ducaturque F G, ipsi D E, parallela; erit ex coroll. 3. antecedenti A G, æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, cuius semidiameter minimum est AF, (quemadmodum A D, quartæ parti circumferentiæ circuli semidiametri A E, æqualis est, vt ex coroll. 2. præcedenti constat) [d] propterea quod A F, A G, eandem habent proportionem, quam A E, AD. Eadem ratione, ductis HI, KL, MN, eidem DE, parallelis, erunt A I, A L, A N, æquales quartis partibus circumferentiarum circulorum ex semidiametris AH, AK, AM, descriptorum. Hæ autem rectæ duplicatę semicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta ęqualis quartæ parti circumferentię cuiusuis circuli, si eius semidiametro ex recta A E, æqualem lineam abscindemus, ab eiusque extremo rectæ DE, parallelā ducemus, &c.

Facilis inuentio rectæ æqualis circumferentiæ.

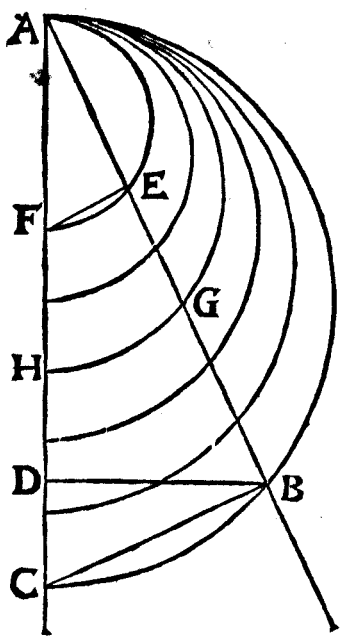


[d] 4. sexti.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.

VT quoque sine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratum æquale exhibeamus, vtendum erit hoc artificio. Inuento semel latere quadrati alicui circulo æqualis, vt paulò ante docuimus, construemus figuram ad quadrandos alios circulos quoscunque accommodatissimam, hoc modo. Detur circulus A B C, diametri A C, sitque A B, media proportionalis inter semidiametrum, & rectam semicircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura, ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, sit æquale: [a] accommodetur AB, in circulo, quæ certius applicabitur, si fortè circinus ex A, ad interuallũ datæ AB, descriptus nimis oblique peripheriam A B C, secet in B, hoc modo. Duabus rectis, nimirum diametro AC, & lateri AB, quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD. Perpendicularis namque DB, cadet in punctum B, in quod latus inuentum duci debet: [b] propterea quod tres rectæ AC, AB, AD, sunt continuè proportionales, quemadmodum recta A C, latus quadrati inuentum, & AD, continuam seruant proportionem, ex constructione. Liquet autem inter AC, AD, vnam tantum posse esse mediam proportionalem. Hac figura extructa, dicto citius quemcunque circulum quadrabimus. Si namque diametro dati circuli rectam æqualem abscindemus A F, circa quam semicirculus describatur, resecabit is ex recta AB, latus AE, cuius quadratum circulo dato est æquale. Quia enim angulus externus AEF, interno ABC, æqualis est: [c] quod vterque in semicirculo rectus sit; [d] erunt E F, B C, parallelæ; ideoque triangula AEF, ABC, æquiangula. [e] Igitur erit CA, ad AB, vt FA, ad AE; Et permutando CA, ad FA, vt AB, ad AE. [f] Ideoque erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex A F: [g] hoc est, vt circulus diametri A C, ad circulum diametri A F, vt quadratum ex A B, ad quadratum ex AE. Est autem circulus diametri A C, quadrato ex A B, per constructionem, ęquale. [h] Igitur & circulus diametri AF, quadrato ex AE, æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ A G, circulo diametri A H, erit ęquale. Et sic de cęteris.

[a] *1. quinti.*
[b] *coroll. 8. sexti.*
[c] *31. tertii.*
[d] *28. primi.*
[e] *4. sexti.*
[f] *22. sexti.*
[g] *2. duodec.*
[h] *14. quinti.*



Facilis inuentio quadrati circulo æqualis ex Archimede.

IAM verò quoniam lib. 4. cap. 6. propos. 3. ex Archimede demonstrauimus, quadratũ diametri ad circulum habere ferme proportionem, quam 14. ad 11. si quis volet secundũ hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta A C, in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D, (ita vt AD. contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vsque ad circumferentiam circa A C, descriptam. Recta enim enim ducta A B, latus erit quadrati circulo diametri A C, æqualis. [i] Cum enim tres rectæ AC, AB, AD, sint continue proportionales; [k] erit quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, vt A C, ad A D, videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam sit, vt diximus, quadratum diametri ad circulum, vt 14. ad 11. ferme: [l] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt ad circulum diametri AC. [m] Igitur quadratum ex AB, circulo diametri A C, æquale erit. Quod si secundum

[i] *coroll. 2. sexti.*
[k] *coroll. 20. sexti.*
[l] *11. quinti.*
[m] *9. quinti.*

cundum varias diametros describantur circuli per A, transeuntes, abscindent quoq; ij circuli ex recta AB, latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale, siue quadratricem nostram adhibeas, siue demonstrata ab Archimede sequaris.

IV.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis est describendus. In proxima figura ex recta AB, abscindatur recta AE, dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB, perpendicularis EF, secans AC, in F. Eritque circulus diametri AF, quadrato lateris AE, æqualis, vt ex proximè demonstratis liquet.

COROLLARIVM.

Ex his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum cuicunq; figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ [a] describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem per hanc 4. propos. constituamus; erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis. a 14. secundi

RVRSVS si per propositionem 3. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [b] constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datę figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. quod est propositum. b 25. sexti.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN secunda figura propos. 3. sit rectæ O, exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis AD, recta æqualis AI, ac per I, ipsi DE, agatur parallela IH. Eritque circumferentia circuli ex diametro AH, descripti æqualis datę rectæ O, propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis est rectæ AI, vt ostensum est ac proinde tota circũferentia æqualis erit quadruplæ rectæ AI, hoc est, æqualis rectæ O, cuius quarta pars posita est recta AI. Datæ ergo rectæ circumfentiã æqualem reperimus. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER OCTAVVS.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonstrans.

VT extremam manum Geometriæ huic nostræ practicæ imponamus, concludemus eam variis nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonstratis. Qua in re exemplum illustre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conscripsit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter institutum nostrum existimare quis debet: cum per eiusmodi demonstrationes Geometricas studioso Lectori via multiplex aperiatur ad inuestigandas similes speculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium amplissimum campum habeat. Est & alia causa, quæ me ad hunc librum octauum conscribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non sine magno labore peruestigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis propriè pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præsertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perscribendum auctores mihi, atque suasores fuerunt.

THEOR. I. PROPOS. I.

FIGVRA regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

HÆc est prima propositio Archimedis in lib. 1. de sphęra & Cylindro: quã demonstrat, hoc assumpto principio.

Si duæ

Si duæ lineæ in plano eosdem habeant terminos, & in easdem partes cauæ sint, comprehendens comprehensa maior est. quod quidem principium esse verum, ex eo euidéter intelligi potest quod ex eo, non solum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonstrarint, quæ vt verissima, ab omnibus retepta sunt; neque vnquam ex illo absurdi aliquid consecutum est, aut contra id quisquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus est. Hoc ergo posito principio, facilis est demonstratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, descripta circa circulũ, cuius centrũ N, tangens eũ in punctis G, H, I, K, L, M. Quoniã igitur per præmissum principium rectæ A G, A M, maiores sunt arcu GM: Item B G, BH, maiores arcu GH, & sic de reliquis; erunt omnes rectæ simul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus simul conficientibus totam circuli peripheriam. quod erat demonstrandum.

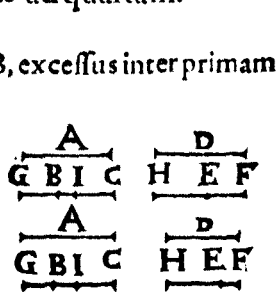
SCHOLIVM.

CARDANVS in libro quinto de proportionibus propos. 201. conatur demonstrare, duas rectas circulum contingentes, cuiusmodi sunt AG, AM, maiores esse arcu intercepto GM, (quod Archimedes ex suo assumpto principio deduxit (præmissis tribus Lemmatibus, & vno principio. quorum primum est hoc.

LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor sit excessus inter primã & secũdã, quam inter tertiã & quartam; sitq; prima non minor, quam tertia, maior verò quam secunda, Item tertia maior quam quarta: Erit minor proportio primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam.

SINT quatuor quantitates A, BC, D, EF; sitque GB, excessus inter primam A, & secundam BC, minor excessu HE, inter tertiam D, & quartam EF; Item prima A, non sit minor, quã tertia D: maior verò quam secunda BC: Ac denique tertia D; maior sit quam quarta EF; Dico minorem esse proportionem primæ A, ad secundam BC, quam tertiæ D, ad quartam EF. Cum enim A, non minor sit, q̃ D: at GB, minor, q̃ HE, [a] erit maior, ꝓportio A, ad GB, quam ad HE: Est autem A, (si est æqualis ipsi D,) ad HE, vt D, ad HE; vel maior est proportio A, (si maior est, quam D,) ad HE. quam D, ad HE. Igitur maior erit proportio A, ad GB, quam D, ad HE. Si igitur fiat vt D, ad HE, ita A, ad GI, habebit quoque A, ad GB, maiorem proportionem, quam ad GI; [b] ac proinde erit GI, maior quam GB; idcoque IC, minor, quam BC. [c] Maior ergo erit proportio A, ad IC. quam ad BC.



[a] 8. quinti.

[b] 10. quinti.

[c] 8. quinti.

ad B C. Et quoniam G C, ipsi A, æqualis, est ad G I, vt H F, ipsi D, æqualis, ad HE; Erit quoque per conuersionem rationis GC, hoc est, A, ad IC, vt HF, hoc est, vt D, ad E F. Cum ergo ostensum sit, maiorem esse proportionem A, ad IC, quam ad B C; erit quoque maior proportio D, ad E F, quam A, ad B C, hoc est, A, ad BC, minorem proportionem habebit, quam D, ad E F. quod est propositum.

LEMMA II.

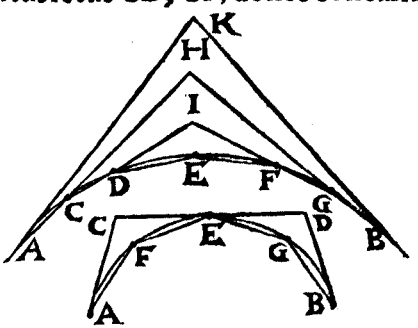
SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipsum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus hisce chordis simul maiores.

TANGANT arcum AB, duæ rectæ AK, BK, coeuntes in K, aptenturq; quotlibet rectæ in eo æquales AC, CD, DE, EF, FG, GB, diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK, BK, simul maiores esse omnibus illis rectis subtensis simul. Productis enim rectis AC, BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I, & sic deinceps, si plures rectæ fuerint: [a] Erunt rectæ DI, FI, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG; erunt etiam rectæ C I, G I; maiores rectis CD, DE, EF, FG, simul. [b] Sed C H, G H, maiores sunt rectis C I, G I. Igitur multo maiores erunt CH, GH, rectis C D, D E, EF, F G; additisque æqualibus A C, B G, maiores erunt AH, B H, simul quam A C, CD, DE, EF, FG, GB, simul. [c] Sunt autem & AK, BK, maiores, quam AH, BH. Igitur multo maiores erunt A K, B K, simul quam AC, CD, DE, EF, FG, GB, simul. quod erat demonstrandum.

[a] 21. primi.

[b] 21. primi.

[c] 21. primi.



LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuum punctum medium diuidat arcum bifariam: In eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter se æquales, Erunt tres illæ tangẽtes omnib. his simul sumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB, tangant tres rectæ AC, CD, DB, conuenientes in duobus punctis C, D, secantes ipsum bifariam in E. Accommodenturque in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares AF, F F, EG, GB. Dico tres AC, CD, DB, simul sumptas esse maiores rectis AF, FE, EG, GB, simul sumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens A C, C E, maiores sunt, rectis AF, FE: Item BD, DE, maiores rectis B G, G E, Erunt quoque A C, C D, DB, simul maiores rectis AF, FE, EG, GB, simul. quod ostendendum erat.

HÆC

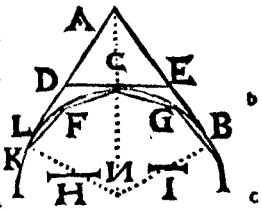
HÆc ergo sunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus aditungit hoc postulatum, sine principium. Cum arcus quilibet maior sit quotcunque rectis in eo subtensis simul sumptis, & quo plures subtensæ fuerint, eo minori excessu arcus illas superet: fieri potest, vt tot subtensæ duci possint, ita vt excessus, quo arcus illas superet, minor sit quauis recta proposita. Hoc principium videtur esse manifestum, cum tam paruus arcus possit accipi, vt eius chorda illi ferè æqualis sit; adeò vt sensus nullam percipere possit inter arcum, & chordam differentiam. A posteriori tamen illud confirmari potest per numeros. Posita enim proportione circumferentiæ ad diametrum fermè 3141592 6. ad 10000000. vt lib. 4. cap. 7. Num. 5. ex probatis auctoribus retulimus, deprehendemus, si arcus propositus continuè secetur bifariam per rectas subtensas, semper à præcedenti excessu plus dimidio auferri; [a] ac proinde tandem relinqui excessum omni quantitate minorem. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula sinuum eruta 697990. ita vt arcus chordam superet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ superatur ab eodem arcu grad. 4. numero hoc 35. qui minor est semisse præcedentis excessus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rursus summa quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum superat hoc numero 11. qui etiam minor est semisse proximi excessus 35. Item summa 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. excessus autem inter eam, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque est, quam semissis proximi excessus 11. & sic deinceps. Scio confirmationem hanc propositi principii non esse demonstratiuam, cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonstrare conamur, nimirum figuram circulo circumscriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tamen probabilem esse, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (si illa proportio longè à vero abesset) excessus illos paulatim ita minui, vt semper minor numerus semisse præcedentis excessus relinquatur; adeò vt tandem nulla ferè differentia inter arcum, & summam chordarum subtensarum reperiatur.

Principium Cardani.

[a] 1. decimi.

HIs præmissis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas esse maiores arcu. Sint enim, si fieri potest, non maiores, ac proinde arcus BCL, sit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C, ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuisis quoque arcubus CB, CL, bifariam in G, F, iungantur rectæ BG, GC, CF, FL. [b] Et quia AD, AE, maiores sunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ æquales sunt; (Namiunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniã tria latera trianguli ABN, tribus lateribus triãguli ALN, æqualia sunt; [c] erunt tãanguli ad N, quam ad A, æquales; [d] ideoq; arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per contactum C, transibit, [e] eritque ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales sint, & latus adiacens AC, commune; [f] erunt latera AD, AE, æqualia: propterea que & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, æquales sint) erunt AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo excessus H. Rursus quia arcus BL. maior est rectis BG, GC, CF, FL, sit excessus I, qui minor sit excessu H. Si namque minor non est, diuidemus arcus

Demonstratio Cardani



[b] 20. primi.

[c] 8. primi.

[d] 26. tertii.

[e] 18. tertii.

[f] 26. primi.

cus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rursus bifariã, &c. connectemusq; rectas, donec fiat excessus minor excessu H, per superius principium Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas superat secundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, simul excessu I; Et tertia quantitas, nimirum summa rectarum AL, AB, superat quartam, id est, summam rectarum LD, DE, EB, excessu H: Estque excessus I, minor excessu H; Et prima quantitas, hoc est, arcus BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL, conflata; item tertia AB, AI, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL, primæ quantitatis ad secundam LF, FC, CG, GB quam tertiæ quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB; [a] Et permutando minor erit proportio arcus LB, ad AL, AB, simul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, simul ad rectas LD, DE, EB, simul. Sit ergo vt composita ex LF, FC, CG, GB, ad compositam ex LD, DE, EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, simul: Eritque propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, simul, quam arcus BL, ad arcum BK; [b] ideoque arcus BK, maior erit arcu BL. Cum ergo eadem sit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, simul ad LD, DE, EB, simul, quæ arcus BK, ad AL, AB, simul: sintque per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, simul minores, quam LD, DE, EB, simul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, simul. Multò ergo minor erit arcus BL, duabus AL, AB, simul. Quare rectæ tangentes AL, AB, simul maiores sunt arcu BL, quod erat ostendendum.

[a] *schol. 27. quinti.*

[b] *10. quinti.*

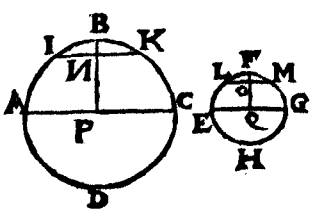
Est autem hæc demonstratio Cardani admirabilis, & non absimilis illi, qua Eucl, in propos. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur conclusio demonstratione affirmatiua ex eius opposito, vt patet.

Attvli hanc demonstrationem Cardani, non quòd verè Geometrica sit, nisi principium illud suum admittatur, sed quod ingeniosa sit & acuta. Sine tamen hac demonstratione concedendum erit, ambitum figuræ circumscriptæ esse maiorem peripheria circuli propter demonstrationem Archimedis, cum nihil vnquam in contrarium à quoquam sit allatum, vt supra diximus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLORVM diametri inter se sunt, vt circumferentiæ.

Hoc demonstrauimus nos in libr. 4. cap. 7. num. 3. propos. 1. idem autem hic aliter demonstrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrum. [c] Quoniam enim est circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri. [d] Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita est quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG. Sed rectangulum sub diametro AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, sit æqualis, comprehensum, quadruplũ est circuli ABCD; & rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex co-



[c] *2. duodec.*

[d] *15. quinti.*

ex coroll. propos. 2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum sub diametro AC, & circumferentia ABCD, contentum, ad rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehensum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum sub diametro AC, & circumferentia ABCD, ad quadratũ ex AC, vt rectangulum sub diametro EG, & circumferentia EFGH, ad quadratũ ex EG. [a] Est autem rectangulum sub AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, sit æqualis, ad quadratum ex AC, vt recta circumferentiæ æqualis ad AC: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem AC. Eodemque modo est rectangulum sub EG, & recta, quæ circumferentiæ EFGH, sit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circumferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circumferentia ABCD, ad diametrum AC, ita circumferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum, quod demonstrandum erat. [a] 1. sexti.

SCHOLIVM.

SVNT qui putent, frustrà à Pappo hoc theorema demonstrari, cum videatur esse per se notum, ita esse circumferentiam cuiusuis circuli ad suam diametrum, vt est circumferentia alterius circuli ad suam diametrum. ac proinde permutando esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolomæo (quod & à nobis propos. 10. Sinuum factum est) demonstretur, maiorem esse proportionem maioris arcus ad minorem eiusdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum est, nisi arcus illi similes sint, vt in sequenti Theoremate ostendemus) quis sine demonstratione concederet, eandem esse proportionem circumferentiæ ad circumferentiã, quæ est diametri ad diametrum? Quod si demonstratum esset, ita esse arcum cuiusuis circuli ad similem arcum alterius circuli, vt est corda ad chordam, tum demum constaret, ita esse circumferentiam ad circumferentiam, [b] ac proinde & semircumferentiam ad semicircumferentiam, vt est diameter ad diametrum: propterea quod arcus semicirculorum similes sunt, quorum chordæ sunt diametri. Verum hoc demonstrari non potest, nisi prius demonstretur, ita esse circumferentiam ad circumferentiam, vt est diameter ad diametrum, vt in Theoremate sequenti constabit. Meritò ergo, & non sine causa, theorema præcedens à Pappo fuit demonstratum. [b] 15. quinti.

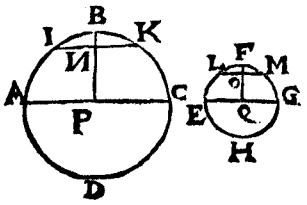
THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiusuis circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, similes sunt.

IN figura præcedentis propos. ducantur ad diametros perpendiculares PB, QF, ex centris P, Q, diuidentes semicirculos in binos quadrantes: sintque arcus BI, BK, æquales, quibus similes capiantur FL, FM; adeò vt toti arcus IK, LM, si-

LM, similes sint, quorum chordæ IK, LM, bifariam factæ sint à semidiametris in N, O. Dico eandem esse proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ est chordæ IK, ad chordam LM, &c. [a] Quoniam enim est circumferentia ABD, ad circumferentiam EFH, [b] hoc est, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG; hoc est, vt semidiameter PB, ad semidiametrum QF. [c] Est autem, vt quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum similes ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt semidiameter PB, ad semidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propos. 1. lib. 1. nostræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. libr. 1. nostri Astrolabilij, ita se habeat PB, sinus totus ad QF, sinum totum, quemadmodum sinus IN, ad sinum LO. erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt sinus IN, ad sinum LO, [d] id est, duplus arcus IK, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipsius IN, dupla, ad chordam LM, ipsius LO duplam. quod est propositum.

[a] 2. huius.
[b] 15. quinti.
[c] 15. quinti.
[d] 15. quinti.



VERVM sit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Dico arcus similes esse. Facta enim eadem constructione, [e] erit quoque arcus IB, ad arcum LF, semissis ad semissem, vt IN, ad LO, semissis ad semissem. [f] Vt autem IB, ad LF, ita est quadrans AB, ad quadrantem EF; [g] Et vt quadrans ad quadrantem, ita est semidiameter PB, ad semidiametrũ. QF. Igitur erit quoque sinus IN, ad sinum LO, vt sinus totus PB, ad sinum totum QF: Atque idcirco ex Lemmate propos. 1. lib. 1. nostræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. nostri Astrolabij, arcus IB, LF, similes erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, similes erunt. quod erat demonstrandum.

[e] 15. quinti.
[f] schol. 33. sexti.
[g] 2. huius.

COROLLARIVM.

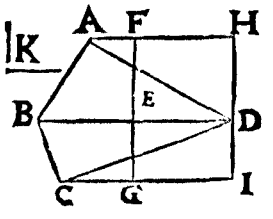
SEQVITVR hinc, si arcus IBK, LFM, non sint similes, eos non habere eandem cum chordis proportionem, Si namque eandem haberent, ipsi similes essent, vt in secunda parte huius propos. fuit ostensum, quod est absurdum, cum ponantur non similes.

PROBL. 1. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eaque diuisa bifariam in E, ducatur per E, recta FG, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipsi FG, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipsi BD, parallelis secantibus FG, HI, in F, H, G, I, constitutum erit parallelogrammum FI, in dato angulo G, [h] qui æqualis est angulo, FED, internus externo, hoc est, angulo K. Dico

[h] 29. primi.



idem

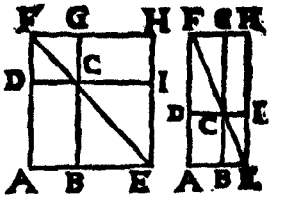
idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD, æquale esse. [a] Quia enim parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale est; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale. quod est propositum.

[a] *schol. 41. primi.*

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo supra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

SIT rectangulum ABCD, cui supra datam rectam constituendum est rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, siue ea sit maior latere AB, siue minor: atque ex E, per C, recta deducatur secans AD, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectæ BC, DC. producantur vsque ad G, I. [b] Erit igitur complementum CH, complemento CA, æquale. Cum igitur latus CI, sit lateri BE, id est, datæ rectæ æquale: factum erit, quod proponitur.



[b] *43. primi.*

ALITER.

DATÆ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, [c] inueniatur quarta proportionalis CG. [d] Nam rectangulum sub BE, prima, & CG, quarta comprehensum, rectangulum videlicet CH, æquale erit dato rectangulo AC, sub secunda AB, & tertia BC, comprehenso. quod est propositum.

[c] *17. sexti.*
[d] *16. sexti.*

PROBL. 3. PROPOS. 6.

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quam per propos. 45. lib. 1. Euclid. constituere.

HOC per duas præcedentes propos. facilè expedietur. Nam si figura rectilinea in triangula resoluatur, constituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune est diameter. [d] Igitur si singulis trapeziis singula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, si fortè numerus triangulorum est impar. Deinde, si, vt in præcedenti propos. dictum est, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus secundi, [e] inueniatur quarta proportionalis; [f] erit rectangulum sub assumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, secundo rectangulo æquale. Quocirca si alterum latus prope assumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abscindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum, habebitur rectangulum ex duobus compositum æquale duobus primis trapeziis. Et si eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rursum quarta proportionalis, & huic quartæ sumatur in priori latere producto recta æqualis,

[e] *4. huius.*
[f] *12. sexti.*
[g] *16. sexti.*

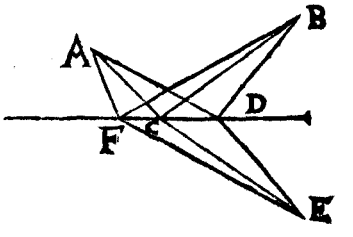
lis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapeziis, &c.

[a] *schol. 41. primi.* [a] VLTIMO porrò triangulo, si quod fuerit, constituetur rectangulum æquale supra semissem basis, in eadem altitudine cum triangulo.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiusuis lineæ rectæ, quæ communis sectio sit plani per duo puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: erunt duæ hæ rectæ breuiores quibuscunque aliis duabus rectis, quæ ex eisdem duobus punctis ad aliud punctum eiusdem lineæ rectæ ducuntur.

Ex duobus punctis A, B, ad C, punctum in recta CD, ita vt planum per CD, ductum transeat reuolutum per A, B, ducantur duæ rectæ AC, BC, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eisdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D, ad dextram ipsius C, aliæ duæ rectæ AD, BD. Dico AC, BC, esse breuiores, quam AD, BD. Producta enim AC, versus C, fiat CE, ipsi CB, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus ACF, angulo BCD, ponitur æqualis, [b] *15. primi.* [b] estque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD, angulo ECD, æqualis. Cum ergo & duo latera BC, CD, duobus lateribus EC, CD, æqualia sint: [c] *4. primi.* [c] erit basis DB, basi DE, æqualis; ac proinde AD, DB, simul ipsis AD, DE, simul æquales erunt. [d] *21. primi.* [d] Sunt autem AD, DE, maiores quam AE, hoc est, quam AC, CB; quod CB, CE, positæ sint æquales. Igitur & AD, BD, maiores erunt, quam AC, BC. quod est propositum.



DVCANTVR deinde ex punctis A, B, ad aliud punctum F, ad sinistram ipsius C, aliæ duæ rectæ AF, BF. Dico rursus AC, BC, breuiores esse, quam AF, BF. Producta enim rursum AC, sumptaque CE, ipsi CB, æquali, iungatur EF. Et quoniam anguli ACF, BCD, æquales ponuntur; [e] *15. primi.* [e] estque ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis; erunt quoque anguli BCD, ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales erunt. Cum ergo & duo latera BC, CF, duobus lateribus EC, CF, æqualia sint; [f] *4. primi.* [f] erit quoque basis BF, basi EF, æqualis: Ac proinde AF, FE, ipsis AF, BF, æquales erunt. [g] *20. primi.* [g] Sunt autem AF, FE, maiores, quam AE, hoc est, quam AC, BC, quod BC, CE, positæ sint æquales. Igitur & AF, BF, maiores erunt, quam AC, CB. quod est propositum.

SCHOLIVM.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuissimas; fit, vt radius Solis, vel visualis cadens ex A, in planum tersum DF, ita vt reflectatur ad punctum

ctum B, cadat necessariò in punctum C, vbi angulus ACF, (quem Perspectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo BCD, quem reflexionis appellant. Nam si radius caderet in D, vel F, reflectereturque ad B, non ageret Natura per lineas breuissimas; cum tam AD, BD, quam AF, BF, longiores sint, quam AC, BC vt demonstrauimus. quod est absurdum. Atque ita demonstratum est, quod Perspectiui assumunt, angulum scilicet incidentiæ æqualem esse angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates post tres operationes imperatas reliquæ sint, coniicere.

IVBE conceptum numerum per quemcunque numerum, vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota summę totius à multiplicante numero denominata auferri similem partem aliquotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc est, ipsum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit similis pars aliquota numeri, quem adiunxisti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus sit, habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere. Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4. iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30. à multiplicante 6. numeratum, fiunt 54. Ex sexta parte huius summæ denominata à multiplicante numero 6. id est, ex 9. fac detrahi partem quoque sextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipsum numerum conceptum. Ita namque remanet sexta pars numeri adiuncti 30. nimirum 5. quod in hunc modum demonstratur.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F, fiat summa C. Ex E. parte aliquota summæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B, denominata quoque à 6. hoc est, ipsemet numerus conceptus A, reliquusque fiat numerus G, quem dico partem esse aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita est multiplex totus C, totius E, vt ablatus B, ex C, ipsius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipsius C, qualis D, ipsius B, denominata videlicet à 6. [a] Igitur erit quoque reliquus F, (detracto nimirum producto B, ex summa C,) ita multiplex reliqui G, (dempto scilicet D, ex E,) vt totus C, totius E. quod erat demonstrandum.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

[a] *schol. 7. septimi.*

EST autem iucundum, hoc idem coniici posse inter plures. Nam si plures concipiant mente numeros, singuli videlicet singulos, nullo eorum conscio, quem quisq; numerum concepit; & iubeas quemlibet suum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerũ à tuo electo

numeratum, quicunque ille sit; ac postremo ex parte aliquota summæ, cuius denominator est numerus à te electus, auferre similem partem ex productis singulorum, hoc est, ipsos conceptos numeros: reliquus numerus cuiusque erit similis pars numeri adiecti.

QVOD si malueris diuersos numeros, dic vt secundus suum residuum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim coniicies, primi residuum esse illam partem aliquotam numeri adiecti: secundum verò habere duplum illius, & tertium triplum, &c. Vbi vides eos residuum illud per quoscunque numeros posse multiplicare, dummodo memor sis in coniiciendis numeris, per quos numeros factæ sunt multiplicationes.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur ferè impossibile: (qui enim fieri potest, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi possit in quotlibet numeros, qui omnes sint quadrati?) solutio tamen eius non est difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36. diuidendus in 5. numeros quadratos. Per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. Euclid. scripsimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis sit æqualis, nimirum 5. 4. 3. Deinde dic: si 5. dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item si 5. dant 3. quid dabunt 6? Inueniesq; $\frac{24}{5}$. & $\frac{18}{5}$. hoc est, $4\frac{4}{5}$. & $3\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita se habeat radix 6. ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex constructione: fiet ex lateribus 6. $4\frac{4}{5}$. $3\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum, simile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4. 3. constructo. * Igitur quadrati ex $4\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6. dato. Rursus si fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $3\frac{3}{5}$. ad aliud; (sumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenietur alij duo numeri, quorũ quadrati æquales sint quadrato radicis $3\frac{3}{5}$. nimirum $2\frac{22}{25}$. & $2\frac{4}{25}$. Atque ita iam (relicta radice $3\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $2\frac{4}{25}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36. proposito. Eodem modo, si fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $2\frac{4}{25}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. Quare (relicta radice $2\frac{4}{25}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique si rursus fiat vt 5. ad 4. & ad 3. ita $1\frac{37}{125}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{27}{625}$. & $\frac{486}{625}$. Quocirca (relicta radice $1\frac{37}{125}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. $1\frac{27}{625}$. & $\frac{486}{625}$. quarum quadrati numeri $23\frac{1}{25}$. $8\frac{184}{625}$. $2\frac{15406}{390625}$. $1\frac{29279}{390625}$. & $\frac{276196}{390625}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. si nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{486}{625}$. quæ minima est, ad aliud, &c.

a 47. primi.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutiis inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem est minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{7}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{7}{12}$. Dico hanc maiorem esse, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{7}{5}$. Quoniam enim maior est minutia $\frac{7}{5}$. quam $\frac{4}{7}$. erit per propos. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. maior proportio 3. ad 5. quam 4. ad 7. [a] Et permutando, maior 3. ad 4. quam 5. ad 7. [b] Igitur & componendo, maior 3. 4. simul, hoc est, 7. ad 4. quam 5. 7. simul, id est, quam 12. ad 7. [c] Et permutando, maior 7. ad 12. quam 4. ad 7. Ac proinde per propos. 8. Minutiarum libri 9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{4}{7}$. quod est primum.

$\frac{7}{5}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{7}{12}$.

[a] 27 quinti. [b] 28. quinti. [c] 27. quinti.

DEINDE quia minor est $\frac{4}{7}$. quam $\frac{7}{5}$. erit per propos. 8. Minutiarum libri 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3. ad 5. [d] & permutando, minor 4. ad 3. quam 7. ad 5. [e] Igitur & componendo minor 4. 3. simul, id est, 7. ad 3. quam 7. 5. simul, hoc est. quam 12. ad 5. [f] Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propos. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quã $\frac{7}{5}$. quod est secundum.

[d] 27. quinti. [e] 28. quinti. [f] 27. quinti.

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter se primi non sint ambo quadrati aut cubi; neque eorum æquè multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et si eorum æquè multiplices aliqui sint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipsi erunt quadrati aut cubi.

SINT enim A, B, numeri inter se primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quãuis vnus eorum quadratus sit, vel cubus. sintque eorum æquè multiplices C, D. Dico neq; hos esse ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, si fieri potest, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum sint æque multiplices: [g] erit A, ad B, vt C, ad D. [h] Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. [i] Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo. Cum ergo extremi A, B, ponantur inter se primi; [k] erunt omnes tres, vel quatuor proportionales, minimi in sua proportione: [l] Ac proinde A, B, ambo quadrati erunt, vel cubi. quod est contra hypothesim. Non ergo C, D, ambo quadrati sunt, aut cubi. quod erat ostendendum.

A	B
4.	11.
C	D
12.	33.

[g] 17. septimi. [h] 11. & 12. octaui. [i] 8. octaui. [k] 1. octaui. [l] coroll. 2. octaui.

SED sint iam C, D, ipsorum A, B, inter se primorum æquè multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos esse quadratos, vel cubos. Si n.

non sunt; neque ipsi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonstratum est. quod cum hypothesi pugnat.

COROLLARIVM.

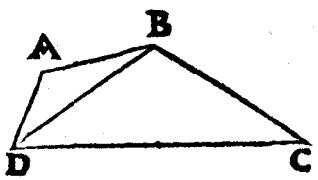
HINC fit, si tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit quadratus, aut cubus: tam Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiusdem minutiæ ad minimos reductę terminos, esse quadratum, vel cubum; cum minimi termini sint numeri inter se primi, habeantque eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ sint æquales. Item si vterque numerus minutiæ cuiuspiam in minimis terminis non sit quadratus, aut cubus, neque vtrumque numerum alterius minutiæ æquiualentis esse quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere.

SIT quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC, simul sumpta esse maiora reliquo latere DC. Ducta enim diametro BD; [a] erunt rectæ BD, BC, maiores quam DC; Sed eadem ratione AB, AD, maiores sunt quam BD. Maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quam duæ BD, BC; ac proinde multo maiores, quam DC. Idemque demonstrabitur simili modo de quibuscunque alijs tribus lateribus, vt constat. In omni ergo quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, assumpta, maiora sunt reliquo latere. quod erat demonstrandum.

[a] 20. primi.



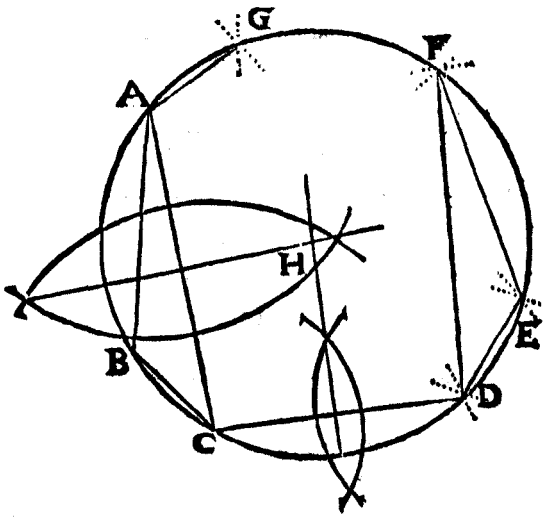
PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulis describendus sit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus transire debeat.

SOLENT interdum tria data puncta tam parum inter se distare, aut fere in recta linea iacere, vt non facilè eorum centrum inueniri possit, propterea quod rectæ secantes lineas illa puncta connectentes bifariam, & ad angulos rectos, nimis obliquè se in centro intersecant. Vt igitur magis exquisitè centrum reperiatur, inuestiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis AB, AC, BC, constituatur super basem BC, triangulum BCD, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, versus quam circumferentia describenda transire debet, lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc est, latus CD, lateri BA, & latus BD, lateri CA, sit æquale. Quod quidem fiet, si ex C, arcus delineetur ad interuallum BA, quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus secet in D. [b] Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: [c] ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, descriptus transibit quoq; per quartum

[b] 8. primi.
[c] schol. 21. tertij.

tum punctum D. Eadem ratione, si super basem CD, triangulum construatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum ordine prædicto, ita vt latus D E, lateri C B,



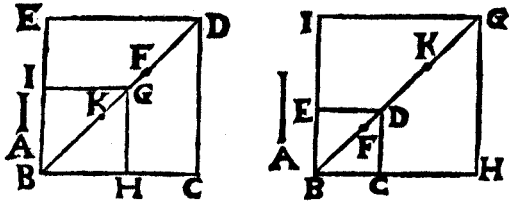
& latus CE, lateri BD, æquale sit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circumferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo E D C, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum A B G, triangulo B A C, æquilaterum, & sic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes constituant quasi angulum rectum, qualia sunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcunque idem interuallum bini arcus describantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per intersectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, secabunt se se in centro H, &c. Aptissima quoque essent tria puncta G, B, D, quamuis angulus D B G, acutus sit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO excessu diametri Quadrati supra latus: Item dato excessu diametri Rhombi supra latus, vel lateris supra diametrum (quando illud maius est) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea excessu diametri rectanguli supra vtrumlibet laterum inæqualium, vna cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato deniq; excessu diametri Rhóboidis supra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriusuis inæqualium laterũ supra diametrum (quando illud maius est) vna cũ vno angulo Rhomboidis, & insuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel insuper cum proportione duorum laterum inæqualiũ; Quadratum ipsum, Rhombũ, Rectangulũ, & Rhomboides constituere.

Hoc

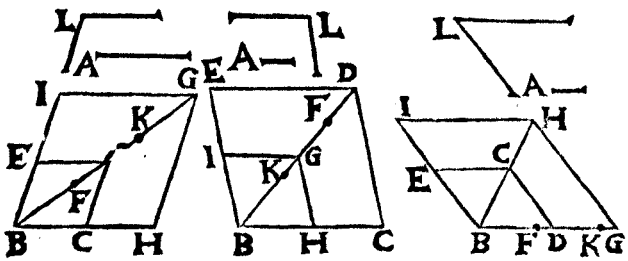
Hoc problema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. absoluimus. Sit A, datus excessus diametri quadrati cuiuspiam supra latus. Fiat quodcunque quadratum B C D E, cuius diameter B D, excedat latus



excessu D F; qui si æqualis fuerit dato excessui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [a] fiat vt DF, ad datum excessum A, ita diameter BD, ad BG, perficiaturque quadratum H I; quod dico esse id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipsi A, æquali, quoniam est per constructionem, vt tota BD, ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc est, ad GK, ablatam; [b] erit quoq; vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK,. [c] Est autem vt BD, ad BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales sint; cum DF, ponatur excessus diametri BD, supra latus BC.) [d] Et vt BD, ad BC, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad B H; [e] Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, superat latus BH, hoc est, BK, recta GK, quæ dato excessui A, æqualis est. Quod est propositum.

a 12. sexti.
b 19. quinti.
c 7. quinti.
d 4. sexti.
e 9. quinti.

SIT deinde A, excessus diametri in Rhombo aliquo supra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in secundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, siue datum angulum B, secare, vt in secundo, ducatur diameter B D, excedens latus B C, recta DF, quæ si æqualis fuerit dato excessui A, factum erit, quod iubetur: Si ve-



ro inæqualis, [f] fiat vt D F, ad excessum datum A, ita diameter B D, ad B G, compleaturque Rhombus HI, quem dico esse, eum, qui quæritur. Abscissa enim recta GK, excessui dato A, ęquali, adhibenda est, eadem omnino demonstratio, quæ in quadrato facta est.

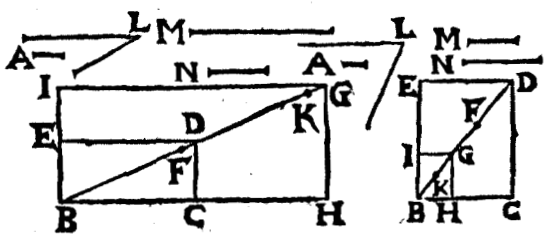
f 12. sexti.

QVOD

QVOD si diameter latere Rhombi minor fuerit, sit datus excessus A, lateris in aliquo Rhombo supra diametrum, vna cum angulo L. Construatur Rhombus quantuscunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus superet diametrum, ducenda est diameter per angulos obtusos, [a] (quod diameter per acutos angulos ducta semper maior est Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quę si æqualis fuerit excessui dato A, factum erit, quod jubetur: Si verò inæqualis: fiat vt DF, ad excessum A, ita BD, latus ad BG, compleaturque Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico esse quæsitum. Abscissa namq; recta GK, æquali excessui A: fiet demonstratio, vt in quadrato, vt perspicuum est, si loco diametrorum BD, BG, in quadrato, sumantur hic latera BD, BG. [a] 19. primi.

TVNC autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum semissis anguli obtusi maior fuerit angulo acuto eiusdē Rhombi. Nam si in tertio Rhombo angulus CBD, qui semissis est anguli obtusi B, vt in schol. propos. 34. lib. 1. Euclid. ostendimus, maior sit angulo acuto D; [b] erit latus BD, hoc est, CD, maius diametro BC, in triangulo BCD. Quando autem semissis anguli obtusi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo secundo; [c] erit diameter latere maior in triangulo BCD. [b] 19. primi. [c] 19. primi.

TERTIO sit datus excessus A, diametri rectanguli alicuius, supra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L, quem diameter cum eo latere constituit, vel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, est semirecto minor, vel certè proportio M, ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, excessus diametri supra maius latus: Si verò angulus L, est maior semirecto, vel proportio M, ad N, minoris inæqua-

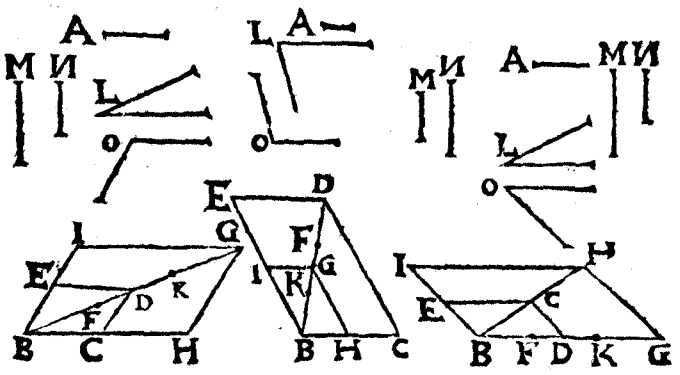


litatis, erit A, excessus diametri supra minus latus. Constituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa assumptam diametrum BD. Vel fiat BC, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo CE, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ si fuerit æqualis dato excessui A, constructum erit rectangulum CE, quod quæritur: Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad excessum datum A, ita BD, ad BG, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæsitum. Abscissa enim recta GK, æquali excessui A, demonstrabitur propositum, vt in quadrato.

QVARTO & vltimo sit in aliquo Rhomboide datus excessus A, diametri supra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & insuper cum angulo L, quem diameter cum latere, cuius excessus sumptus est, effi-

cit, vel insuper cum proportione M, ad N, quam latus illud ad alterum latus habet. Constituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in secunda dato angulo O, æqualis. Deinde siue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, siue datum angulũ CBE, secare, vt in secũda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, secetque CD, rectam BD, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhomboides compleatur CE, cuius diameter latus BC, excedat recta DF. quæ si æqualis fuerit dato excessui A, factum erit, quod iubetur. Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad excessum A, ita BD, ad BG, compleaturque Rhomboides HI, circa eandem diametrum BD, quod dico esse quæsitum. Nam si resecetur GK, excessui A, æqualis, adhibenda est eadem demonstratio, quæ in præcedentibus.

QVOD si diameter Rhomboidis cuiuspiam minor fuerit latere maiore, vt in tertia figura. Sit datus excessus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide supra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & insuper cum angulo L, quem



diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel insuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Constituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et si est acutus, fiat in B, angulus DBC, angulo L, æqualis, (si datus angulus Rhomboidis foret obtusus, nimirum DBE, constituendus esset angulus DBC, in ipso angulo dato) secetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita BD, ad DC; ac Rhomboides cõpleatur DE, cuius latus BD, diametrum BC, superet recta DF, quæ si æqualis fuerit dato excessui, factum erit, quod iubetur: Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad BG, perficiaturque Rhomboides GI, quod dico esse quæsitum. Nam si capiatur GK, æqualis ipsi A, demonstrabitur propositum, vt supra in quadrato, si loco diametrorũ BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perspicuum est.

TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior est acuto angulo Rhomboidis. Nam si in tertia figura angulus BCD, maior est angulo D; [a] erit recta BD, maior, q̃ BC.

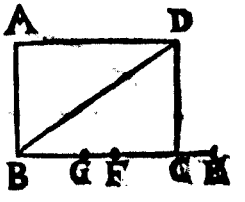
[a] 19. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, sumptis excessibus, quibus diameter duo latera superat; Rectangulum sub differentia excessuum, & minore excessu

re excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus bis sumpto, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus minorem excessum superat.

SIT rectangulum AC, cuius diametro BD, æqualis sit recta BE, vt excessus minor, quo diameter maius latus BC, superat, sit CE; Sumpta autem BF, æquali minori lateri CD, vt EF, excessus sit, quo diameter BD, vel illi æqualis BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, superat: ac proinde CF, sit differentia excessuum EC, EF. [a] Et quia latera BC, CD, maiora sunt latere BD hoc est, recta BE, dempta communi BC, erit reliqua CD, maior, quam reliqua CE; ideoque & BF, æqualis ipsi CD, maior erit, quam CE. Abscissa ergo FG, ipsi CE, æquali, erit BG, excessus quo minus latus BF, minorem excessum FG, superat. Dico rectangulum bis sumptum sub FC, differentia excessuum, vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale esse quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. [b] Quoniam enim quadratum rectæ BE, æquale est quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulo bis sub BC, CE, hoc est, rectangulo semel sumpto sub BC, & recta ipsius CE, dupla: [c] Est autem rectangulum sub BC, & dupla ipsius CE, æquale rectangulis sub BF, & dupla ipsius CE, æquale rectangulis sub BF, & dupla ipsius CE, & sub FC, & dupla ipsius CE; hoc est, rectangulo sub BF, & CE, bis vna cum rectangulo sub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, siue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis; Ac proinde & quadrata rectarum BC, CD, [d] quæ quadrato rectæ BD, æqualia sunt, æqualia erunt quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc est, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadrato rectæ CE. Addito igitur communi quadrato rectæ FG, erunt quadrata rectarum BF, FG, æqualia rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. [e] Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia sunt rectangulo sub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulum quoque sub BF, FG, hoc est, sub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis sub BF, CE, bis, & sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarũ CE, FG. Ablato ergo cõmuni rectangulo sub BF, CE, bis sumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo sub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG: hoc est, rectangulum sub FC, differentia excessuum, & CE, minore excessu bis sumptum, vna cum quadrato minoris excessus CE, bis sumpto, æquale est quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem excessum FG, superat. quod erat demonstrandum.

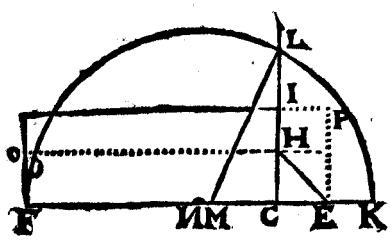


[a] 20. primi.
[b] 4. secundi.
[c] 1. secundi.
[d] 47. primi.
[e] 7. secundi.

PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus excessibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus superat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT datus excessus FE, diametri supra latus minus, & CE, supra maius, ita vt differentia excessuum sit FC. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI, EK, minori excessui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales sint, vt pote ipsius CE, duplæ, perficiaturque parallelogrammum FI. Diuisa deinde FK, bifariam in N, describatur ex N, per F, & K, semicirculus FLK, secans CL, in L. Ducta denique HE, sumatur illi æqualis CM, iungaturque recta LM. Dico LM, differentiam esse inter minus latus quæsitum, & minorem excessum datum CE, ita vt CE, addita ad LM, efficiat minus latus; cui si addatur FC, differentia datorum excessum, fiat maius latus. (Est enim differentia excessuum diametri supra vtrumque latus rectanguli æqualis excessui maioris lateris supra minus: vt in figura præcedentis propos. patet; vbi diameter est BD, vel BE; excessus maior FE, quo diameter minus latus BF, superat; excessus minor CE, quo eadem diameter maius latus BC, superat: estque FC, differentia excessuum, excessus, quo maius latus BC, superat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuēto adijciatur minor excessus CE, vt diameter habeatur. quæ omnia ita demonstrabuntur. Per præcedentem, rectangulum sub FC, differentia excessuum, & CE, minori excessu bis sumptum, hoc est, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam sumpto, hoc est, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale est quadrato rectæ, qua minus latus quæsitum, minorem excessum CE, superat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale sit rectangulo FI, vt ex demonstratione vltimæ propos. lib. 2. Euclid. constat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiusdem rectæ, qua minus latus quæsitum superat minorem excessum CE, a Ac proinde cum quadratis rectarum CL, CM, sit æquale quadratum rectæ LM: erit quoque quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæsitum minorem excessum CE, superat. Est ergo LM, excessus minoris lateris quæsiti supra minorem excessum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæsitum: cui si addatur FC, differentia excessuum, fiet maius latus quæsitum: cui si tandem minor excessus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæsita. quæ omnia demonstranda erant.



a 47. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale est rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & dupla minoris excessus CE, comprehenso vna cum duplo quadrati excessus minoris CE, addita minori excessui CE, efficit minus latus quæsitum, &c.

IMMO quia quadratum rectæ, CL, rectangulo FI, sub FC, differentia excessuum, & CK, duplo minoris excessus CE, comprehenso æquale est, vt in demonstratione dictum est; & rectangulum CP, duplum est quadrati excessus minoris CE, hoc est, quadrato rectæ CM, æquale: erit quadratū rectæ LM, toti rectāgulo FP, sub maiori excessu FE, & EP, dupla minoris excessus CE, contento

æquale;

æquale; [a] ideoque L M, media proportionalis erit inter maiorem excessum, ac duplum minoris excessus. Quocirca si inter maiorem excessum, & duplum minoris excessus, sumatur media proportionalis LM, habebitur rursus differentia inter minus latus, & minorem excessum, &c. [a] 17. sexti.

SCHOLIVM.

Hoc problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi transmissum est, ab ingenioso quodam Geometra demonstratum fuit, cuius nomen, si mihi esset cognitum, hic libenter asscriberem. Idem tamen problema ad finem lib. 2. Euclid. ex Marino Gheraldo Patritio Ragusino aliter quoque demonstrauimus non infeliciter.

PROBL. 9. PROPOS. 17.

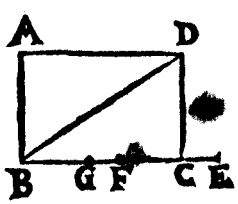
DATO excessu diametri rectanguli supra maius latus, & excessu maioris lateris supra minus: vtrumque latus, ac diametrum inuenire.

QVONIAM, vt in præcedenti problem. dictum est, excessus maioris lateris supra minus, æqualis est differentiæ inter excessus diametri supra vtrumque latus: fit vt excessus diametri supra maius latus, additus ad excessum maioris lateris supra minus, conficiat excessum diametri supra minus latus. Quare cum cogniti sint excessus diametri supra vtrumque latus, reliqua cognoscentur, vt in præmisso problemate traditum est.

PROBL. 10. PROPOS. 18.

SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei versus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compositæ æquale sit quadrato rectæ adiunctæ; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo segmento prioris lineæ conflatur.

IN figura propos. 15. sit recta EF, secta in C, vtcunque, oporteatque ei versus F, adiungere rectam, ita vt quadratum totius compositæ sit æquale, quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex segmento F C, & adiuncta compositæ.



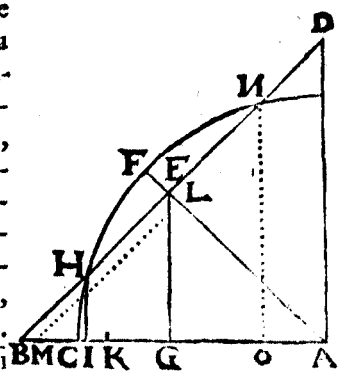
Statuantur EF, EC, excessus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus superat. Atque ex propos. 16. inueniatur minus latus BF. Dico rectam BF, ipsi EF, adiunctam efficere, quod proponitur. Fiat enim rectangulum AC, sub BC, & CD, ipsi BF, æquali comprehẽsum. Et quia FC, differentia excessuum addita minori lateri inuẽto BF, facit maius latus, vt propos. 16. dictũ est, erit BE, diametro BD æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel CD, recta EF, & maius recta EC. [b] Quoniam verò quadratum rectæ BE, hoc est, diametri BD, æquale est quadrato rectæ CD, id est, adiunctæ BF, vna cum quadrato rectæ B C, compositæ ex adiuncta BF, & proximo segmento FC, liquidò constat id, quod proponitur. [b] 47. primi.

PROBL. II. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore descripti non superet: maiorem ita secare in duas partes inæquales, vt earum quadrata simul sumpta quadrato minoris lineæ sint æqualia,

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt AB, non sit maior diametro quadrati ex AC, descripti. Erigatur perpendicularis AD, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, secetur bifariam in E, iungaturque recta AE, [a] quæ ad BD, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos semirectos: [b] Sunt autem & B, D, semirecti. [c] Igitur latera EA, EB, æqualia sunt; ac proinde AB, diameter erit quadrati rectæ AE. Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, sed vel maior, vel æqualis. Si namque minor esset AC, quam AE, sumpta ipsi æquali AL, ductaque LM, ipsi EB, parallela, esset AM, diameter quadrati minoris AL, ideoque maior AB, superaret diametrum quadrati ex minore descripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque AE, vt AF, ipsi AC, sit æqualis, describatur ex A, per C, F, circulus secans BD, in H, N, demittaturque HI, ad AB, perpendicularis. Dico maiorem AB, ita esse sectam in I, vt quadrata rectarum AI, IB, æqualia sint quadrato minoris AO. Quoniam enim angulus I, rectus est, & B, semirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, semirectus; [d] ideoque latera BI, HI, æqualia erunt. [e] Cum ergo, ducta recta AH, quadrata rectarum AI, IH, quadrato rectæ AH, æqualia sint; erunt quoque quadrata segmentorum AI, IB, æqualia quadrato rectæ AH, hoc est, quadrato rectæ AC. quod est propositum.

[a] schol. 26. primi.
[b] 2. coroll. 32. primi.
[c] 6. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.



SIT deinde minor linea data AK, æqualis ipsi AE, ita vt maior AB, diametro quadrati ex minore AE, descripti æqualis sit. Demittatur perpendicularis EG, [f] quæ & basem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in semirectos. Dico AB, ita esse sectam in G, vt quadrata segmentorum æqualium AG, GB, æqualia sint quadrato minoris AK, vel AE. [g] Erunt enim rursus latera EG, GB, æqualia, ob semirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. [h] Cum ergo quadrata rectarum AG, GE, æqualia sint quadrato rectæ AE, erunt quoque quadrata segmentorum AG, GB, æqualia quadrato AE, vel minoris lineæ AK. quod est propositum.

[f] schol. 26. primi.
[g] 6. primi.
[h] 47. primi.

SI ex altera sectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, secta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata segmentorum BO, OA, æqualia sint quadrato minoris AC, vel AH. [i] Cum enim rectæ BD, BA, sectæ sint proportionaliter in H, I, & N, O, sintque æquales BH, ND; [k] (propterea quod perpendicularis AE, secat HN, bifariam. Ablatis ergo æqualibus EH, EN, ex æqualibus EB, ED, reliquæ

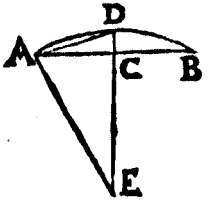
[i] 2. sexti.
[k] 3. tertii.

reliquæ B H, D N, æquales erunt) erunt quoque BI, A O, æquales; nec non B O, A C, &c.

PROBL. 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vsque educitur: quot gradus, vel palmos tam arcus, quam semidiameter circuli complectitur, inuenire.

SIT data chorda AB, palmorum 74. & perpendicularis CD, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta AD; quoniam in triangulo rectangulo ACD, latera AC, CD, nota sunt, quod CD, sit 10. & AC, 37. semissis nimirum chordæ AB, 74. [a] Si fiat vt CD, 10. ad sinum totum 100000. ita AC, 37. ad aliud; inuenietur AC, 370000, tangēs anguli A D C; ac proinde ipse angulus erit gr. 74. min. 53. fere. Et si concipiatur duci AE, ad centrum E, erit quoque angulus D A E, gr. 74. min. 53. fere; [b] quippe cum anguli A D E, DAE, æquales sint. Quod si vtriusque summa gr. 149. min. 46. fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc est, ex gr. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro gr. 30. min. 14. fere, ac tot idem grad. erit arcus A D; ideoque eius duplus A D B, grad. 60. min. 28. fermè.



[a] 8. triang. rectil.

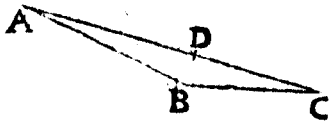
[b] 5. primi.

[c] Quia verò quadratum ex AC, æquale est rectangulo sub CD, & reliqua parte diametri: si AC, 37. palm. ducatur in se, & productus numerus 1369. diuidatur per CD, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. 136 $\frac{9}{10}$. ac proinde addita CD, palm. 10. tota diameter erit palm. 146 $\frac{9}{10}$. & semidiameter palm. 73. $\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita 146 $\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circumferentia circuli palm. 430 $\frac{9}{11}$. Ergo si rursus fiat, vt tota circumferentia grad. 360. ad palmos 430 $\frac{9}{11}$. ita arcus ADB, grad. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus palm. 72 $\frac{545\,17}{1800000}$. hoc est, 72 $\frac{10}{39}$. paulò amplius.

[c] 35. tertii.

THEOR. 9. ROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus est, quam duplum summæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus descriptorum.



IN triangulo A B C, maximum latus sit A C, & angulus oppositus B, obtusus. Si namque rectus esset, vel acutus; [d] esset quadratum rectæ A C, vel æquale duobus quadratis rectarum A B, B C; [e] vel minus: ac proinde multo minus duplo summæ quadratorum AB, BC. Ex maiore latere A C, dematur A D, recta æqualis lateri A B. [f] Et quia duo latera A B, B C, maiora

[d] 47. primi.

[e] 13. secundi.

[f] 20. primi.

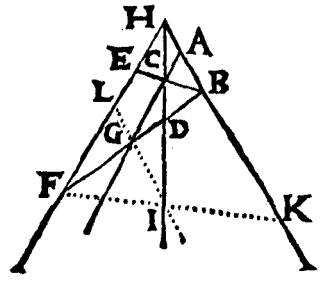
maiora sunt latere AC; erit reliqua CD, minor latere BC; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, BC. Est autem quadratum AC, minus duplo quadratorum AD, DC: [a] propterea quod æquale est duobus quadratis AD, DC, vna cum rectangulo bis sub AD, DC; quod quidem rectangulum bis, minus est duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propos. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonstrandum.

a 4. secundi.

PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, nisi quando extremæ à media æqualiter distant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, si omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius segmenta inter mediam, & extremas sint inter se æqualia, vel datam habeant proportionem.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, secans omnes tres. qua secta bifariam in G, si quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si verò G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipsi EF, (dummodo ei non æquidistet media CD) parallela AG, secans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidistare ipsi EF, secabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam AG. Quod si CD, ipsi EF, æquidistaret, ducenda esset per G, ipsi AB, parallela. Postremò ex B, puncto ductæ rectæ BF, sumpto in extrema AB, cui non æquidistat AG, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, secat, recta BC, secans EF, in E. Dico rectas BC, CE, æquales esse. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, sit basi EF, parallela: [b] erit vt BG, ad GF, ita BC, ad ad CE; Sed BG, ipsi GF, per constructionem, æqualis est. Igitur & BC, ipsi CE, æqualis erit.



b 2. sexti.

QVOD si per G, agatur ipsi AB, parallela GI, secans mediam CD, in I; erit ducta FIK, secta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, basi BK, æquidistat; [c] ideoque sicut BF, in G, diuisa est bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam secabitur.

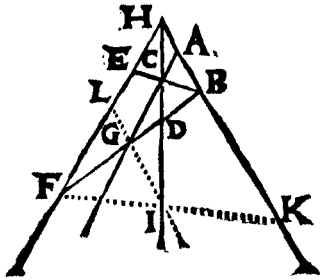
c 2. sexti.

Ex his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidistare, sed vel neutri, vel alteri tantum. Nam si vtrique æquidistaret, [d] recta per G, ducta parallela alterutra extremarum, æquidistaret quoque mediæ, ac proinde eam non secaret. Quod si neutri æquidistet, duci poterit per G, parallela vtrilibet extremarum. Si verò vni extremarum æquidistet, ducenda erit per G, alteri parallela.

d 30. primi.

IAM verò si tres datæ rectæ coeant in eodem puncto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamsi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat

debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in media, alterutri extremarum, vt ipsi HF, parallela CA, secante alteram extremam in A; & ipsi HA, æqualis capiatur AB, secabitur ducta BCE, in C, bifariã: [a] quippe cũ sit BC, ad CE, vt recta BA, ad rectam AH, &c. Sic etiam si detur punctum I, in media; ducta per I, alterutri extremarum, vt ipsi HB, parallela LI, sumptaque ipsi HL, æquali LF, secabitur ducta FIK, in I, bifariam; [b] propterea quod est FI, ad IK, vt FL, ad LH, &c.



[a] 2. sexti.

[b] 2. sexti.

EADEM ratione ducemus lineam, quæ à media secetur in duas partes datam habentes proportionem. Si namque ducta BF, vtcunque secetur in datam proportionẽ in G, & reliqua fiant, vt supra; [c] erit rursus vt FG, ad GB, ita EC, ad CB; Vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlicet proportio data est FG, ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiam si tres rectæ datæ coeant in H; ducta GA, ipsi EF, parallela, fiatque HA, ad AB, vt antecedens datæ proportionis ad consequens: si ducatur BCE, [d] erit EC, ad CB, vt HA, ad AB. Et si fiat HA, ad AB, vt consequens datæ proportionis ad antecedens, erit rursus BC, ad CE, vt BA, antecedens ad consequens AH.

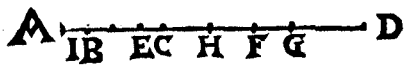
[c] 2. sexti.

[d] 1. sexti.

PROBL. 14. PROPOS. 23.

CVIVSLIBET lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcunque, etiamsi circino ipsa non accipiatur.

SIT sumenda verbi gratia lineolæ AB, tripla. Extenso circino quantumlibet ex A, ad C, sumantur ipsi AC, duæ æquales CF, FD, vt tota AD, ipsius AC, sit tripla. Item ipsi CB, sumantur tres æquales DG, GH, HE. Dico AE, esse ipsius AB, triplam. Quoniam enim tam multiplex est AD, totius AC, quam multiplex est ablata DE, ablatæ CB, nimirum tripla: erit quoque ita multiplex reliqua EA, reliquæ AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod est propositum.



PROBL. 15. PROPOS. 24.

EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas,

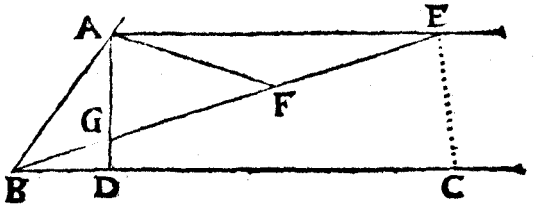
IN figura præcedentis propos. sit ex lineola AB, detrahenda tertia pars. Per præcedentem sumatur ipsius AB, tripla AE, quæ, si videatur nimis exigua, multiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata est, usque ad D; ita vt AD, sit ipsius AB, duodecupla: (quod scietur, si numerus partium AE, nimirum 3. ducatur

catur in numeru partium ipsius AD, ipsi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde si AB, diuisa esse intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca si in instrumento partisi lib. 1. cap. 1. constructo interuallum AD, statuatur inter partes 36. 36. Deinde interuallū inter 35. 35. (nimirum tota AD, vna parte minus) tranferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipsius AB, hoc est, pars trigesima sexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigesimas sextas partes totius AD, erit AG, ipsius AB, pars tertia. quod est propositum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PROBLEMA hoc veteres Geometras diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vsque diem Geometrice est solutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud soluere conatus est per descriptionem hyperboles. Nos idem



absoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propos. 15. huius ex Nicomede descripsimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demissa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, sumatur ipsius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, describatur linea Conchoideos CE, secans rectam AE, ipsi BC, ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE, esse tertiam partem dati anguli ABC; hoc est, angulum ABE, duplum esse anguli CBE, adeò vt diuiso angulo ABE, bifariam, totus angulus ABC, sectus sit in tres partes æquales. Quoniam enim ex descriptione Conchoideos, recta GE, ipsi DC, æqualis est; ac proinde ipsius AB, dupla: si secetur bifariam in F, erit vtraque semissis ipsi AB, æqualis. [a] Quia verò circulus ex F, circa GE, descriptus transit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA, vtrique semissi FE, FG, ideoque & ipsi AB, æqualis. [b] Igitur tam anguli FAE, FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. [c] Est autem externus AFB, duobus internis FAE, FEA. æqualis: ideoque ipsius FEA, duplus. Igitur & ABF, eiusdem FEA, [d] hoc est, alterni CBE, duplus erit.

[a] *schol. 31. tertii.*
[b] *5. primi.*
[c] *32. primi.*
[d] *29. primi.*

SI angulus datus rectus est, diuidetur in tres æquales angulos, vt in scholio propos. 32. lib. 1. Euclid. tradidimus.

SI verò est obtusus, secabimus eum bifariam, & semissem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius semissis efficient propositi anguli obtusi tertiam partem, vt perspicuum est.

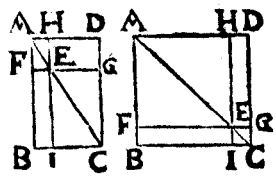
PROBL.

PROBL. 17. PROPOS. 26.

SI per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum sub segmentis diametri comprehensum æquale duobus rectangulis sub segmentis duorum laterum comprehensis.

IN rectangulo BD, per E, punctum diametri AC, ductæ sint FG, HI, lateribus parallelæ. Dico rectangulum sub AE, EC, æquale esse rectangulis sub AF, FB, & sub BI, IC. [a] Quoniam enim quadratum ex AC, æquale est quadratis ex AE, EC, vna cum rectangulo bis sub AE, EC. [b] Sunt autem quadrata ex AB, BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis sub AE, EC, æqualia quadratis ex AB, BC. [c] Sed quadratum ex AB, æquale est quadratis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis sub AF, FB; Et quadratum ex BC, æquale est duobus quadratis ex BI, IC, vna cum rectangulo bis sub BI, IC. Igitur duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis sub AE, EC, æqualia erunt quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis sub AF, FB, & sub BI, IC. [d] Cum ergo quadratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc est, ex AF, BI: & quadratum ex EC, quadratis ex EI, IC, hoc est ex FB, IC: æquale sit; Erunt quatuor quadrata ex AF, BI, FB, IC, vna cum rectangulo bis sub AE, EC, æqualia quatuor quadratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis sub AF, FB, & sub BI, IC; Ablatisque vtrobique prædictis quatuor quadratis communibus, erit reliquum rectangulum bis sub AE, EC, reliquis rectangulis bis sub AF, FB, & sub BI, IC, æquale. Ideoque rectangulum semel sub AE, EC, rectangulis semel sub AF, FB, & sub BI, IC, erit æquale. quod erat demonstrandum.

[a] 4. secundi.
[b] 47. primi.
[c] 4. secundi.
[d] 47. primi.



COROLLARIVM.

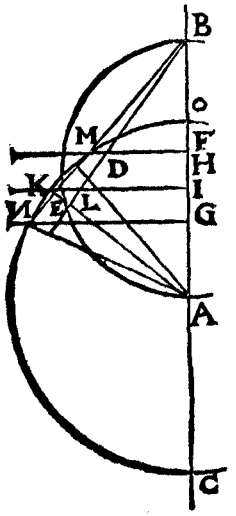
ITAQVE in quadrato, vt in posteriori figura, rectangulum sub segmentis diametri AE, EC, comprehensum æquale est duobus complementis DE, BE, quippe cum complementa sub segmentis laterum comprehendantur.

PROBL. 18. PROPOS. 27.

DATO centro Ellipsis in linea in infinitum producta, vna cum duobus punctis ad easdem partes axis, vel centri, per quæ transire dicatur Ellipsis: vtrumque axis vtriusque extremum inuenire.

HOC problema conicum est, & acutum. Sit A, centrum, id est, punctum medium alicuius Ellipsis in linea axis maioris BC, quantacunq; : Et duo puncta in eadem Ellipsi D, E, versus eandem partem, hoc est, siue supra centrum A, siue infra; è quibus ad BC, perpendiculares ducantur DF, EG: Eritque DF, minor

quam EG, quod perpendicularis remotior à centro minor semper sit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, secabit lineam axis in B. Secta autem AB, bifariam in H, describatur ex H, circa AB, semicirculus AKB. Diuisa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK, ad AB, perpendicularis secans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, secante perpendiculares DF, EG, in M, N, iunganturrectæ AM, AK, AN. [a] Et quoniam est, vt FI, ad IG, æqualem, ita MK, ad KN, erit quoque MK, ipsi KN, æqualis. Igitur duo latera AK, KM, duobus lateribus AK, KN, æqualia erunt. Cum ergo & angulos æquales comprehendant, vtpote rectos, [b] quod angulus AKB, in semicirculo rectus sit; [c] erunt bases AM, AN, æquales. Circulus igitur ex A, per N, descriptus transibit per M, secabitque BC, in O, & C. Dico OC, esse axem Ellipsis maiorem. [d] Cum enim sit, vt MD, ad DF, ita NE, ad EG, transibit necessariò Ellipsis, quæ per O, D, C, describitur, (posse autem Ellipsim describi circa OC, tanquam axem maiorem, per punctum D, constat ex iis, quæ ad finem scholij propos. 8. lib. 1. Gnomonices, & in scholio Lemmatis 50. lib. 1. Astrolabij scripsimus) per punctum E, ex scholio Lemmatis 51. Astrolabij: Ac proinde Ellipsis per data puncta D, E, circa centrum A, descripta transibit per O, C, ita vt ab Ellipsi per O, D, C, descripta non differat. Alioquin Ellipsis Ellipsim in 8. punctis secaret, nimirum in D, E, & aliis duobus respondentibus ex altera parte axis: deinde in aliis 4. infra centrum respondentibus. quod est absurdum [e] quippe cum Ellipsis Ellipsim in 4. tantum punctis secet.



a 2. sexti.

b 31. tertii.

c 4. primi.

d schol. 4.

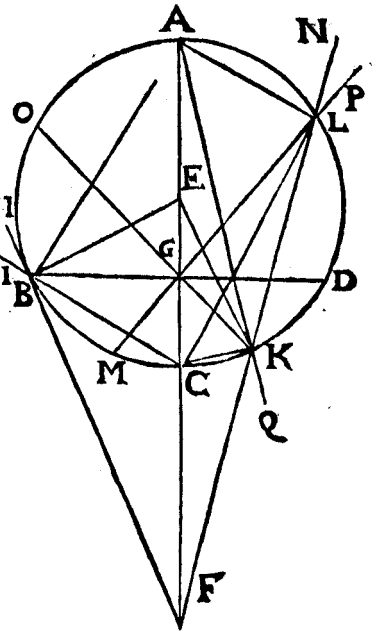
e 25. quinti Apollonii.

THEOR. 10. PROPOS. 28.

SI in circuli diametro producta punctum sumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehensum bifariam. Item si ab eodem puncto in diametro producta assumpto recta ducatur circulum secans, & ab alterutro sectionis puncto ad intersectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari recta iungatur: Recta ex eodem sectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremum ducta secabit quoque angulum à linea secante, & illa alia, quæ per intersectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.

In circulo ABCD, cuius centrum E, producta sit diameter AC, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda BD, secans

secans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturque ad extrema diametri rectæ BC, BA. Dico tam angulos CBF, CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG, esse æquales. [a] Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno segmento æqualis est. [b] & angulus CBD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales CB, CD; [c] (vel etiam angulus CBG, angulo BAC, æqualis est; quod BG, in triangulo rectangulo ABC, ad basem AC, perpendicularis sit) erunt anguli CBF, CBG, inter se quoque æquales. Producta autem CB, ad I, si ex rectis angulis ABC, ABI, tollantur æquales CBG, HBI, [d] (cum enim CBF, æqualis sit angulo HBI, ad verticem: & angulus CBG, angulo CBF, ostensus æqualis; erit quoque angulus CBG, angulo HBI, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ABG, ABH, inter se æquales. quod est primum.



[a] 32. tertij.
[b] 27. tertij.
[c] 8. sexti.
[d] 15. primi.

DEINDE ducatur recta FN, secans circulum in K, L, ductisque rectis KGO, LGM, per G, iungantur tam rectæ KC, KA, quam LC, LA, ad extrema diametri. Dico rursus, tam angulos CLF, CLG, quam ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quam AKG, AKL, esse æquales. Ductis enim ex centro rectis EB, EK; [e] erit angulus EBF, rectus: [f] Igitur erit FB, media proportionalis inter EF, FG: [g] Ideoque rectangulum sub EF, FG, quadrato ex FB, æquale erit; [h] Est autem eidem quadrato æquale quoque rectangulum sub LF, FK. Igitur rectangulum sub EF, FG, rectangulo sub LF, FK, æquale erit: [i] Ac proinde erit vt EF, prima ad FK, secundam, ita LF, tertia ad FG, quartam. Quare cum triangula EFK, LFG, habeant latera circa communem angulum F, proportionalia; [k] erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppositi æquales. [l] Est autem angulus FEK, in centro anguli CIK, ad circumferentiam, (cum habeat eandem basem CK,) duplus. Igitur & angulus FLG, eiusdem anguli CLK, duplus erit; ac proinde angulus FLG, sectus erit bifariam à recta LC, hoc est, anguli CLF, CLG, æquales erunt. Producta autem CL, ad P, si ex rectis angulis ALC, ALP, demantur æquales anguli CLG, PLN, (Cum enim CLF, ostensus sit æqualis angulo CLG, [m] & CLF, & æqualis sit angulo PLN, ad verticem, erit quoque CLG, eidem angulo PLN, æqualis.) erunt quoq; reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rursus quia anguli CLK, CLM, ostensi sunt æquales; [n] erunt arcus CK, CM, æquales. [o] Igitur anguli CGK, CGM: [p] Ideoq; & anguli AGO, AGL, ad verticem æquales erunt: [q] Ac proinde arcus etiam AO, AL, æquales erunt: [r] ideoque & anguli AKO, AKL, erunt æquales. Producta autem AK, ad Q, si ex rectis angulis CKA, CKQ, auferantur æquales AKG, FKQ, (Cum enim angulus AKG, angulo AKL, ostensus sit æqualis: [s] hic autem angulo FKQ, ad verticem sit æqualis; erit quoque angulus AKG, angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli CKG, CKF, inter se æquales. Quæ omnia demonstranda erant.

[e] 18. tertij.
[f] coroll. 8. sexti.
[g] 17. sexti.
[h] 36. tertij.
[i] 16. sexti.
[k] 6. sexti.
[l] 20. tertij.
[m] 15. primi.
[n] 26. tertij.
[o] schol. 29. tertij.
[p] 15 primi
[q] schol. 29. tertij.
[r] [illegible] tertij.
[s] [illegible]

SCHOLIVM.

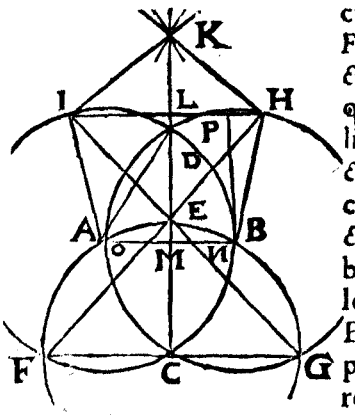
Hoc Theorema valdè vtile est ad descriptionem paralleli cuiusuis circuli maximi per datum punctum in Astrolabio, vt ex propos. 18. lib. 2. Astrolabij perspicuum est: cum multa ibi demonstrari possint per hoc Theorema, sine ijs, quæ ex Astrolabij descriptione pendent.

THEOR. 11. PROPOS. 29.

DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes fere Architecti, atq; artifices approbant, falsam esse, demonstrare.

PRAXIS hæc est. Sit data recta AB. Ex centris A, B, & interuallo eodem AB, describantur duo circuli se se intersecantes in C, D. Ducta autem CD, quãtacunque, describatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam CD, in E, & priores circulos secans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ secantes priores circulos in H, I. Denique eodem interuallo ex HI, duo arcus descripti se se intersecent in K iunganturque rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo Durerus, pentagonum ABHKI, esse æquilaterum, & æquiangulum. quod falsum est. Nam æquilaterum quidem est, ex descriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifestum fiat, demonstranda sunt prius nonnulla.

1. ARCVS tres FA, AB, BG, sextæ partes circuli sunt, quod rectæ eos subtẽdentes semidiametri sint circuli FABG, ex constructione. Igitur FABG, semicirculus est, cuius diameter FG; [a] ideoque angulus FEG, in semicirculo rectus: [b] Et diameter FG, rectæ AB, parallela, ob arcus AF, BG, æquales. Et quoniã, vt constat ex demonstratione praxis scholij propos. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, secat rectam AB, bifariam in M, & ad angulos rectos; [c] secabit eadem parallela quoque FG, ad angulos rectos in C. [d] Eadem quoq; CD, secabit arcum AB, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; [e] ideoq; rectæ EF, EG, latera sunt quadrati in circulo FABG, descripti, eiusque diameter FG. [f] Igitur anguli F, G, semirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti sint, [g] erunt quoque OEM, NEM, semirecti; ideoq; & EOM, ENM, semirecti. [h] Ac proinde tam latera EM, NO, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & OM, NM, inter se æqualia erunt; nec non & totæ OB, NA, æquales erunt. [i] Immo & EO, EN, erunt æquales, quod latera EM, MO, laterib. EM, MN, æqualia sint, cõprehendãtq; angulos æquales, vt pote rectos.



[a] 31. tertij.
[b] schol. 27. tertij.
[c] 29. primi.
[d] schol. 27. tertij.
[e] 6. quarti.
[f] schol. 34. primi.
[g] 32. primi.
[h] 6. primi.
[i] 4. primi.

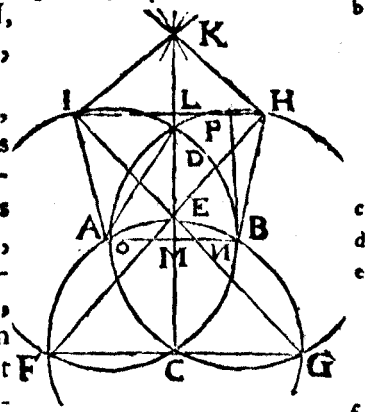
2. DEINDE quia latera AN, AI, lateribus BO, BH, æqualia sunt; sintq; anguli N, O, semirecti æquales, & vterque reliquorum angulorum I, H, minor recto; [k] quod vterque minor sit semirecto ad O, & N, propterea quod tam latus AN, minus est latere AI, q̃ latus BO, latere BH: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Eu-

[k] 19. primi.

1. Euclid. demonstrauimus, tam bases NI, OH, quam anguli A, B, & I, H, æquales. Igitur duo anguli A, B, in pentagono æquales inter se sunt.

3. RVRSVS demptis OE, NE, æqualibus ex æqualibus OH, NI, reliquæ rectæ EH, EI, æquales sunt: [a] erunt anguli EIH, EHI, æquales, ac proinde semirecti, cum HEI, sit rectus; [b] Sunt autem & anguli H, I, in Isoscele KIH, æquales. Igitur toti anguli H, I, in pentagono æquales sunt.

[a] 5. primi.
[b] 5. primi.



4. POSTREMO cũ latera EL, EI, lateribus EL, EH, sint æqualia, contineantque angulos æquales semirectos; [c] erunt & bases LI, LH, æquales, & anguli ad L, ideoque recti. Ex quo efficitur, [d] rectas AB, HI, esse parallelas: [e] quod etiam constat ex eo, quod alterni anguli INA, NIH, æquales sint, nimirum semirecti. Hinc etiam sequitur, rectam CDL, productam cadere in angulum K, diuidereque eum bifariam. Si enim dicatur non cadere in K, [f] diuidet perpendicularis ex K, ad HI, demissa basem Isoscelis KIH, bifariam in alio puncto, quam in L, quod est absurdum. Quia ergo latera KI, KL, lateribus KH, KL, æqualia sunt, & basis IL, basi HL, ostensa æqualis: [g] erunt anguli ad K, æquales.

[c] 4. primi.
[d] 28. primi.
[e] 27. primi.
[f] schol. 26. primi.
[g] 8. primi.

HIS ita præmissis, demonstrabimus iam pentagonum ABHKI, non esse æquiangulum, hoc modo. [h] Omnes 5. anguli in pentagono quolibet, siue sit ęquilaterum, & æquiangulum, siue non, æquales sunt 6. rectis, hoc est, gra. 540. quibus diuisis per 5. efficitur vnus angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli grad. 108. At vterlibet duorum angulorum A, B, in pentagono Dureri maior est, quam grad. 108. & vterlibet duorum H, I, minor, & angulus K, maior quolibet reliquorum quatuor. vt ostendemus. Igitur pentagonũ Dureri non est æquiangulum. Hoc autem ita fiet perspicuum.

[h] schol. 32. primi.

QVONIAM posito sinu toto AB, 10000000. eius semissis BM, sinus videlicet grad. 30. est 5000000. cui si addatur MO, id est, ME, sinus versus grad. 30. nimirum 1339746. fiet tota BO, 6339746. Quia ergo in triangulo BHO, duo latera dantur BH, 10000000. & BO, 6339746. vna cum angulo O, grad. 45. nec non cum specie anguli H, qui supra ostensus fuit recto minor: [i] Si fiat,

[i] 15. triang. rectil.

Vt latus BH,	*ad 707 068. sinum anguli O, grad. 45.*	*Ita latus BO,*	*ad aliud,*
10000000.		*6339746.*	

inuenietur sinus anguli B[illegible]O, 4482877[illegible]. ferme, qui in tabula sinuum offeret ipsum angulum grad. 26.[illegible].38. cui si addatur angulus BOH, grad. 45. fiet summa angulorum H, O, grad. 71. min. 38. quæ summa dempta ex duobus rectis, id est, ex grad. 180. relinquet angulum OBH, grad. 108. min. 22. Igitur vterque angulus A, B, in pentagono maior est verò angulo pentagoni grad. 108.

DEINDE ducta BP, ad HI, perpendiculari, si iterum statuatur BH, sinus totus 10000000. erit HP, 3150970. anguli HBP, grad 18. min. 22. quire linquitur, si rectus angulus ABP, grad 90. detrahatur ex angulo ABH, inuento grad. 108. min. 22. Si igitur addatur PL. 5000000. [k] cum sit æqualis ipsi BM, semissi sinus totius, fiet tota HL, sinus anguli HKL, 8150970. Ac propterea angulus ipse erit grad. 54. min. 36. qui duplicatus dabit totum angulum HKI, grad. 109. min. 12. maiore verò angulo pentagoni grad. 108.

[k] 34. primi.

IAM

IAM verò si summa trium angulorum A, B, K, inuentorum, nimirum grad. 325. min. 56. auferatur ex grad. 540. summa omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet summa angulorum H, I, grad. 214. min. 4. Ac proinde vterque erit grad. 107. min. 2. minor verò angulo pentagoni grad. 180. Non ergo æquiangulum est Dureri pentagonum, sed solum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli cõficiunt summam grad. 540. sicut in pentagono æquilatero, atque æquiangulo, vt hæ formula indicat.

Angulus	A	Grad.	108	min.	22
	B	Grad.	108	min.	22
	H	Grad.	107	min.	2
	I	Grad.	107	min.	2
	K	Grad.	109	min.	12
Summa			540	min.	0

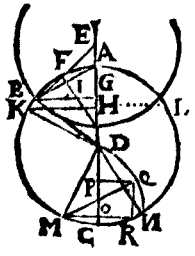
SCHOLIVM.

SVNT alij nonnulli, qui ad interuallum cuiusuis rectæ AB, descriptis ex cẽtris A, B, duobus circulis se intersecantibus in C, D, vt in superiori figura, ducunt rectam AD, affirmantque AD, latus esse pentagoni in circulo, cuius semidiameter DM, inscripti. sed toto cœlo aberrant. Est enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti. [a] Nam quia latus pentagoni potest & latus hexagoni, & latus decagoni circuli eiusdem: [b] Potest autem AD, rectas DM, MA; [c] & DM, latus est hexagoni in circulo, cuius semidiameter DM, esset AM, latus decagoni in eodem circulo. quod falsum est. Quoniam enim latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quod duo latera decagoni supra latus Pentagoni constituant Isosceles [d] in quo duo latera maiora sunt latere pentagoni: Erit AM, semissis ipsius AB, vel AD, minor latere decagoni. Igitur AD, minor est latere pẽtagoni; [e] quandoquidem latus pentagoni potest & latus hexagoni DM, & latus decagoni, quod maius est, quam AM, semissis ipsius AD, vt diximus.

[a] *10. tertij decimi.*
[b] *47. primi.*
[c] *coroll. 15. quarti.*
[d] *20. primi.*
[e] *10. tertij decimi.*

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibusdam tradi, demonstrare.



CAROLVS Marianus Cremonensis totum vnum libellũ edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE, æqualis quartæ parti semidiametri AD, ita vt AE, quinta pars sit rectæ DE. Descripto autem ex E, ad interuallum semidiametri AD, circulo secante datum circulum in B, iũgatur recta AB, quam dicit esse latus heptagoni, quod falsum esse, ita ostendemus. Si AB, esset verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali semidiametro DB, (quod fiet, si ex B, ad

B, ad interuallum semidiametri recta DE, secetur in E,) secante arcum AB, in F, diuideretur arcus AB, in F, vel angulus ADB, bifariam. quod tamen in eius descriptione non contingit, vt demonstrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus est heptagoni. Ductis enim rectis DB, DF, si AB, est septima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, ([a] qui æquales sunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. [b] Ergo reliqui DAB, DBA, simul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterque ipsorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. [c] Cum ergo DAB, æqualis sit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi simul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, solus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. [d] Et quia ADF, duplus est ipsius ABE, propter eandem basem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id est, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum est, continebit quoq; BDF, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF, BDF.

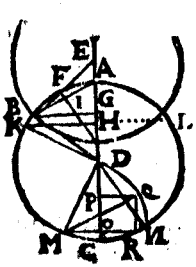
[a] 5. primi. [b] 32. primi. [c] 32. primi. [d] 20. tertij.

SED iam AB, sit inuenta per constructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipsi DB. Si ergo AB, esset verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non est. Posita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. [e] Cum ergo sit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, sectus sit bifariam) erit componendo, summa ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum sub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum sub CE, 9. & EA, 1. erit 9. quod est absurdum; [f] cum hæc rectangula sint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, intersectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum sub BE, EF, æquale non est rectangulo sub CE, EA, sed minus: Ac proinde non rectè illa ratione latus heptagoni inuenitur.

[e] 3. sexti. [f] 1. coroll. 36. tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (sumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque sextam partē circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, semissem illius lateris esse latus heptagoni. quod similiter falsum est. Nam KH, omnino æqualis est rectæ AB, quam proximè demonstrauimus non esse latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. [g] Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde posita DK, vel DA, 4. erit DH, 2. Quocirca si detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, [h] reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus esse quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, est 16. hoc est, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, secat in Isoscele EBD, basem ED, bifariam. Cum ergo ED, sit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum est $\frac{25}{4}$) [i] erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, est $\frac{9}{4}$. quod recta AG, sit $1\frac{1}{2}$. [k] Igitur quadratum AB, erit $\frac{48}{4}$. id est, 12. quod est propositum.

[g] Schol 26. primi. [h] 47 primi. [i] 47. primi. [k] 47 primi.



FRANCISCVS Flussas Candalla vir nobilissimus, ac doctissimus conatus est construere triangulum Isosceles habens vtrumuis angulorum æqualiū ad basem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipsius in dato circulo heptagonum inscribatur, vt in scholio propos. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo scribit. Sit triangulum æquilaterum DMN, in quo perpendicularis DO, ad basem secetur bifariam in P. Descripto deinde ex M, per N, D, circulo, quem secet per-

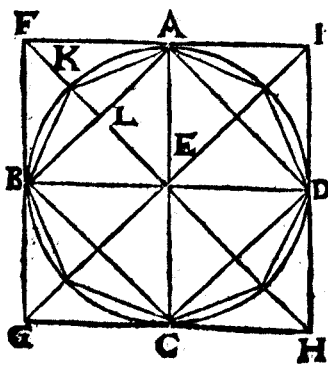
pendicularis P Q in Q, iungantur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Isoscele MNQ, vtrumlibet angulorum N, Q, triplum esse anguli M. quod falsum esse, hinc intelligi potest. Demissa perpendiculari QR, pro sinu arcus QN, vel anguli N, posito sinu toto MQ, vel MN, 10000000. [a] Quoniam latus DN, potentia sesquitertium est perpendicularis DO, si fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. [b] quod cum sit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipsumque latus QR, erit 4330127. verò minus, vel 4330128. vero maius, cui in tabula sinuum (adhibita parte proportionali) respondent grad. 25. min. 39. sec. 32. pro arcu QN, vel angulo MNQ, quo ablato ex duobus rectis, siue ex grad. 180. reliqua erit summa angulorum æqualium ad basem QN, grad. 154. min. 20. sec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. sec. 14. qui maior est, quam triplus anguli MNQ grad. 25. min. 39. sec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. sec. 36. Falsum ergo est, quod Candalla nititur probare. Paralogismos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non est huius loci manifestare: satis nobis est, indicasse eos non rectè descripsisse heptagonũ æquilaterũ, & æquiangulũ.

[a] 12. quartidecimi.
[b] schol. 4. secundi.

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inscriptum medio loco proportionale est inter quadratum eidem circulo circũscriptum, & quadratum inscriptum.

Hoc Theorema est Orontij, quod facilè ita demonstrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duæ diametri AC, BD, secantes se se in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inscriptum ABCD, vt ex demonstratione propos. 6. lib. 4. Euclid. constat. Ducantur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circumscriptum FGHI, vt patet ex demonstratione propos. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, [c] secabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro sunt omnes æquales, [d] nimirum semirecti: [e] ac proinde & latera quadrati inscripti diuisa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et si iungantur rectæ, AK, KB, &c. descriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita esse quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniam enim triangula AEF, EAL, æquiangula sunt, quod rectos habeant angulos, & semirectos: [f] Erit EF, ad FA, hoc est, ad EK, (est namque EK, ipsi EA, hoc est, ipsi AF, æqualis) vt EA, hoc est, vt EK, ad AL, hoc est, ad EL, [g] quod AL, EL, sint æquales, propter angulos semirectos A, E, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectæ EF, EK, EL, continue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, continue erunt proportionalia: [h] na basibus EF; EK, EL, sint proportionalia; [i] Ac proinde & eorũ octupla con-



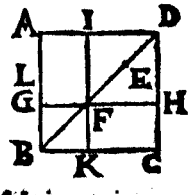
[c] 27. tertij.
[d] schol. 34. primi.
[e] schol. 27. tertij.
[f] 4. sexti.
[g] 6. primi.
[h] 1. sexti.
[i] 11. quinti.

pla continuerunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum AKBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula sint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale est inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonstrandum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipsius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter est linea, quæ relinquitur, si latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel si idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

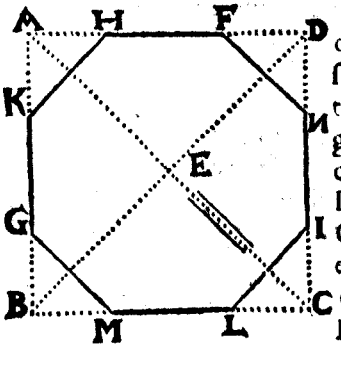
Ex diametro BD, quadrati ABCD, abscindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vsque ad F, ita vt EF, sit ipsi DE, æqualis: vel (quod idem est) reliqua DE, siue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc est, ex BE, auferatur. Dico DE, vel EF, latus esse quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipsis AD, AB; [a] erunt GK, HI, circa diametrum quadrata. Dico rectam EF, vel DE, æqualem esse lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit post detractionem DE, bis ex diametro BD. [b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum est quadrati ex IF, siue ex AG, [c] & quadruplum quadrati ex EF; si quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. [d] Est autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. [e] Igitur erit vt recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia sunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipsi BF, æqualis ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis sit. Erit igitur quoq; AG, ad AL, vt BF, siue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. [f] Quo circa AL, siue EF, & BG, æquales sunt. quod erat ostendendum.



[a] *coroll. 4. secundi.*
[b] *schol. 47. primi.*
[c] *schol. 4. secundi.*
[d] *schol. 47. primi.*
[e] *22. sexti.*
[f] *9. quinti.*

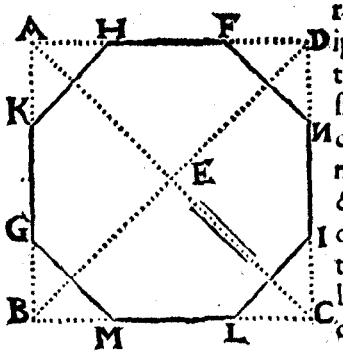
PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemue constituere.



SIT ad altitudinem datam AB, construendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Descripto ex AB, quadrato ABCD, ductisque diametris AC, BD, se in E, secantibus bifariam, & ad angulos rectos; abscindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL; CM, CN, iunganturq; rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, esse æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ A H, A K; B G, B M; C L, C I; D F, D N, relinquuntur post detractionem

rectæ



rectæ AE, ex lateribus æqualibus quadrati ABCD, ipsæ inter se æquales erunt; ideoq; & earũ, quadrata erunt æqualia. [a] Cũ ergo quadratũ ex KH, ęquale sit quadratis ex AH, AK, ipsum duplũ erit tã quadrati ex AH, q̃ quadrati ex AK. Quia verò AB, diameter est quadrati ex AE, descripti, abscissaq; est recta BK, lateri AE, æqualis; [b] erit reliqua AK, latº quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur post detractionem ipsius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, semel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter se erunt; ideoque & rectæ KH, KG, æquales erunt. Eadem ratione ostendemus, eandem GK, æqualem esse rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML, & sic de cæteris. Æquilaterum ergo est octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales sunt duobus rectis; [e] suntque anguli acuti versus angulos quadrati omnes inter se æquales: [f] immo semirecti, quod KH, GM, &c. sint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. descriptorum: Erunt reliqui anguli obtusi in octogono æquales; ideoque octogonum æquiangulum etiam est. quod est propositum.

[a] 47. primi.
[b] 32. huius.
[c] schol. 47. primi.
[d] 13 primi.
[e] 4. primi.
[f] schol. 34. primi.

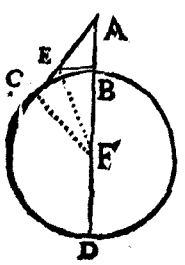
SCHOLIVM.

Hæc praxis, quamantè aliquot annos à quodam Architecto sine demonstratione tamen accepi, pulcherrima est: quippe quæ non requirat diuisionem circuli in octo partes æquales, & describat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonstrarem, oportuit prius demonstrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propositum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

CIRCA finem cap. 1. sphęræ Ioan. de Sacro bosco proposui rationem, qua Franciscus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inuestigare docuit, quæ talis est. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editissimus aliquis mons, (ipse in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium censuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. vel potius vt in scholio problem. 7. ac 9. tradidimus. Deinde ex A, vertice montis mensuretur totum illud spacium pelagi, seu terrę, (vbi tamen montes non sint) quod inde conspicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ superficiẽ contingat in C. Hoc autẽ fiet per ea, quæ in problemat. ib. citatis tradita sunt. Ex his postea explorat magnitudinẽ lineæ tangẽtis AC, [g] ꝓpterea q̃ ei° quadrato æqualia sunt quadrata AB, BC, (sumpto spacio BC, ꝓ linea recta) [h] cuius



[g] 47. primi.
[h] 36. tertij.

quadratum

quadratum æquale est rectangulo sub AD, AB, quo diuiso per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua si dematur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [a] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.

[a] *coroll. 2. de Dimens. circuli lib. 4. huius.*

SED quia in hac ratione metiendi ambitus terrestris assumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non est, quando mons tam altus est, vt spacium 200. vel 300. milliariorum cerni possit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolomæo positum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non rectè linea tangens AC, ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons est ad angulos rectos: Redigemus rationem hanc ad meliorem formam multis viis hoc modo. Deprehenso angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius visualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certissimè fiet, cum per dioptram conspicitur Sol, aut alia stella, quando oritur, vel occidit. Deprehenso, inquam, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulò ante citata. [b] Et recta AE, ex duabus AB, BE. Si enim ad AE, adiicietur BE, hoc est, EC, [c] quæ ipsi BE, æqualis est, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt supra dictum est, & diameter terræ BD, & circumferentia inuestigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [d] reperietur tam latus BE, [e] quam basis AE, sine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis, &c.

[b] *47. primi.*
[c] *2. coroll. 36. tertii.*
[d] *4. triang. rectil.*
[e] *5. triang. rectil.*

VEL sic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [f] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia verò ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia sunt, comprehenduntque angulos æquales, nempe rectos: [g] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus sit, vt proximè diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam semissis ipsius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AE, [h] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atque eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoscetur semidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc est, in partibus altitudinis montis AB; ideoque & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod est propositum.

[f] *18. tertii.*
[g] *4. primi.*
[h] *4. triang. rectil.*

DENIQVE hoc etiam modo idem assequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius visualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementum. Ergo huius anguli secans AF, cognita erit in partibus sinus totius FC. Ex qua secante, si dematur sinus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus sinus totius BF. Si igitur fiat, vt altitudo montis AB, nota in partibus sinus totius ad eandem AB, notam in data mensura, ita sinus totus BF, ad aliud; proueniet semidiameter BF, nota in partibus altitudinis montis, &c.

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac vicissim Cylindro Prisma æquale, & Cono æqualem Pyramidem constituere.

Si basi prismatis, vel pyramidis construatur circulus æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. scripsimus: Et super hunc circulum extruatur cylindrus, vel conus eiusdem altitudinis cum prismate, vel pyramide; erit cylindrus prismati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam bases, quam altitudines æquales sint: producatur autem prisma, & Cylindrus ex base in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte basis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifestum est, cylindrum prismati, & conum pyramidi esse æqualem.

Si vicissim basi cylindri, vel coni constituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & super hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat prisma, vel pyramis eiusdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit prisma cylindro, & pyramis cono æqualis. quod est propositum.

PROBL. 22. PROPOS. 36.

DATO Cylindro, aut prismati æqualem conum, vel pyramidem sub eadem altitudine. Et vicissim dato cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut prisma eiusdem altitudinis constituere.

[a] 16. sexti. huius. [b] 10. duodecimi. [c] corell. 7. duodec. [d] 11. & 6. duodec. [e] 9. quinti. [f] 16. sexti. huius. [g] 11. & 10. duodec. [h] 6 & 7. duodec. [i] 9. quinti.

[a] Si tam basis cylindri, quam prismatis tripletur, & super triplicatam extruatur conus, vel pyramis eiusdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. [b] Cum enim cylindrus triplus sit coni eandem cum illo basem, & altitudinem habentis: [c] Item prisma triplum pyramidis eandem cum illo basem, atque altitudinem habentis: [d] Sit autem & conus extructus eiusdem illius coni triplus; necnon & pyramis constructa eiusdem illius pyramidis tripla. [e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis constructa prismati. quod est propositum.

[f] Si vicissim bases coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & super tertias has partes cylindrus erigatur, & prisma: Erit tam cylindrus dato cono, quam prisma datæ pyramidi æquale. [g] Quoniam enim tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus est coni eandem basem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo. [h] Item tam data pyramis, quam prisma extructum, triplum est pyramidis eandem habentis basem, atque altitudinem cum prismate extructo. [i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam prisma constructum datæ pyramidis æquale. quod est propositum.

COROLLARIVM I.

[k] 35. huius. [l] 36. huius.

QVIA igitur [k] omne prisma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in prisma, & conus in pyramidem: [l] Item cylindrus in conum, & prisma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in prisma conuerti potest; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam prisma transmutari possit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut prisma æquale.

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifestè colligitur, omnem cylindrum, ac prisma; similiter & conum, ac pyramidem conuerti posse in parallelepipedum rectangulum, cuius basis sit quadrata. [a] Nam conuerso cylindro, aut cono, vel pyramide in prisma qualecunque, si basi prismatis fiat quadratum æquale, & supra illud erigatur parallelepipedum eiusdem altitudinis; [b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, ac proinde & proposito cylindro, vel cono, aut pyramidi.

[a] *35. & 36. huius.*
[b] *2. coroll. 7. duodec.*

PROBL. 23. PROPOS. 37.

DATVM cylindrum, vel prisma: similiter datum conum, vel pyramidem cuiuscunque altitudinis, in æqualem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum, reuocare.

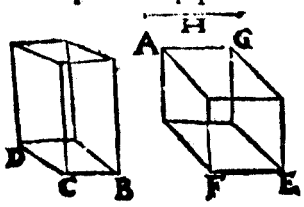
In proportione, quam data altitudo ad altitudinem propositi solidi habet, [c] augeatur vel minuatur basis eiusdem solidi dati. Nam solidum supra hanc basem auctam, vel diminutam secundum datam altitudinem constructum, erit id, quod quæritur. [d] Erit enim æquale dato solido: quippe cum altitudines cum basibus reciprocæ sint. Quod si basi constructi solidi fiat æqualis basis quotcunque angulorum & supra eam constituatur solidum sub data altitudine; erit hoc etiam solidum solido proposito æquale.

[c] *16 sexti. huius.*
[d] *15. & 9. duodec.*

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem describere.

Si parallelepipedum non habet basem quadratam, [e] fiat eius basi quadratum æquale BCD, supra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiusdem altitudinis AB, cum parallelepipedo dato, [f] quod æquale erit dato parallelepipedo. Huic ergo cubum æqualem construemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF, H: ita vt sit BC, ad EF, quemadmodum EF, ad H, & H, ad AB. Et super EF, propinquiorem lateri BC, construatur cubus EFG. [g] qui parallelepipedo ABCD, æqualis erit.



[e] *14. secundi.*
[f] *2. coroll. 7. duodec.*
[g] *Lemma 18. sexti huius.*

Quod si fortè accidat, tres dimensiones parallelepipedi dati, cuius basis quadrata non sit, esse continuè proportionales; [h] erit cubus ex media descriptus parallelepipedo æqualis.

[h] *36. undec.*

COROLLARIVM.

[i] Cum igitur omnis cylindrus, omne prisma, conus ac pyramis in rectangulum parallelepipedum possit commutari, liquidò constat, cuilibet solido eiusmodi, cubum posse construi æqualem.

[i] *2. coroll. 36. huius.*

PROBL.

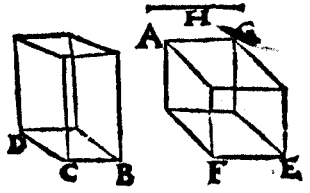
PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

[a] *11. ſexti.* SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB, ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale.[a] Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia proportionalis BC. Et fiat rectangulum BD, comprehenſum ſub tertia proportionali BC, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur ſub tribus rectis AB, CD, BC, hoc eſt, ſub AB, EF, BC, continuè proportionalibus;[b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, deſcripto. quod eſt propoſitum.

[b] *36. vndec.*

[c] *45. primi.* SIT deinde data baſis BD, quæ ſi non eſt parallelogrammum,[c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionem habeat baſis data BD, ad baſem cubi dati, eam habet latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, ſi ſupra latus cubi EF, fiat rectangulum æquale baſi BD, & ſuper alterum latus huius rectangulialiud rectangulum æquale quadrato lateris cubi EF.[d] Namtunc erit, vt primum rectangulum, id eſt, baſis BD, ad ſecundum rectangulum, id eſt, ad quadratum, vel baſem cubi, ita primi rectanguli baſis, videlicet EF, ad baſem ſecundi rectanguli.) Nam ſi ſupra baſem BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB,[e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum baſes, & altitudines ſint reciprocæ, ex conſtructione. quod eſt propoſitum.



[d] *1. ſexti.*

[e] *34. vndec.*

COROLLARIVM.

[f] *coroll. 38. huius.* QVONIAM igitur cuilibet cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulum conſtrui poteſt æquale:[g] ſi huic parallelepipedo fiat cubus æqualis;[h] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel baſe data æquale: commutatus erit cylindrus, priſma, conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis.

[g] *38. huius.*

[h] *39. huius.*

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, Cylindrus rectus, cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo diametro eiuſdem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram:[i] Habet autem idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis, cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri ſphæræ, proportionem quoque ſeſquialteram;[k] erit poſterior hic cylin-

[i] *14. vndec.*

[k] *9. quinti.*

cylindrus sphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro [a] fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ sphæræ æqualis. quod est propositum. [a] *coroll. 38. huius.*

VEL quia per eandē propos. 32. Archimedis, sphæra quadrupla est coni, cuius basis est maximus sphærę circulus, & altitudo semidiameter sphæræ æqualis: [b] Est autem eiusdem coni quadruplus etiam conus eiusdem altitudinis, basem habens circuli maximi in sphæra quadruplam, hoc est, basem habens circulum, cuius semidiameter æqualis diametro maximi circuli; [c] erit posterior hic conus sphæræ æqualis. [d] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus sphæræ datæ æqualis. quod est propositum. [b] *11. duodec.* [c] *9. quinti.* [d] *coroll. 38. huius.*

SIT vicissim dato cubo fabricanda sphæra æqualis. [e] Fiat cubo, tanquam Prismati, cylindrus æqualis. Deinde sphæra fabricetur, habens diametrum sesquialteram aititudinis cylindri. [f] Hæc enim sphæra cylindro, ac proinde cubo dato æqualis erit: propterea quod cylindrus eiusdem basis altitudinem habens æqualem diametro sphæræ, [g] sesquialter est tam prioris cylindri, [h] quam datæ sphæræ. quod est propositum. [e] *35. huius.* [f] *9. quinti.* [g] *14. duodec.* [h] *32. lib. 1. de sph. & cyl.*

COROLLARIVM I.

QVIA verò [i] si basi cubi fiat æqualis figura quotcunq; laterum, siue ea regularis sit, siue non; & supra hanc figuram erigatur solidum rectangulum ad altitudinē cubi [k] solidum hoc cubo est æquale: fit vt sphæræ datæ construi possit æquale solidum rectangulum supra basem quotlibet angulorum; [l] si nimirum prius construatur cubus æqualis: deinde huic cubo solidum rectangulum æquale, vt proximè dictum est. [m] Item quia cuicunque prismati pyramis construi potest æqualis: si cubo, qui sphærę est æqualis, tanquam prismati, fiat pyramis æqualis; erit quoque eadem pyramis sphærę æqualis. [n] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri potest æqualis: si cylindrus extruatur sphærę æqualis, supra basem videlicet maximo circulo in sphæra æqualē, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propos. ostendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; constitutus erit conus quoque datæ sphærę æqualis. [i] *25. sexti.* [k] *2. coroll. 7. duodec.* [l] *40. huius.* [m] *36. huius.* [n] *36. huius.*

VICISSIM [o] quia cuilibet prismati construi potest cubus æqualis: [p] Si huic cubo fiat æqualis sphæra, erit eadem hæc sphæra constituta æqualis dato prismati supra basem quotcunque angulorum. [o] *37. huius.* [p] *40. huius.*

COROLLARIVM II.

QVIN etiam colligitur, posse sphęram construi æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem ostensum est hac propos. 40. De Tetraedro vero, siue Pyramide regulari patet. Nam si Pyramidi [q] fiat Parallelepipedum æquale: [r] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur sphęra æqualis; erit eadem hæc sphæra Tetraedro, siue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icosaedro, & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus basibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quę lib. 4. huius Geometrię cap. 4. Num. 4. tradidimus; & super hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet basem ductę, hoc est, altitudini vnius pyramidis ex iis, in quas corpus diuid.tur è centro: [s] Erit hæc pyramis [q] *2. coroll. 36. huius.* [r] *38. eiusd.* [s] *9. quinti.*

[a] 6. duodec. corpori regulari æqualis; [a] quippe cum ita se habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidem corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidem, vt basis illius, vel bases omnium pyramidum corporis, ad vnam basem; propterea quod in Octaedro proportio est vtrobique octupla: In Icosaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare si toti illi pyramidi cubus construatur æqualis, vt paulò ante de Tetraedro dictum est: atque huic tandem cubo sphæra æqualis fabricetur; erit eadem sphæra illi pyramidi, hoc est, corpori regulari æqualis.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

[b] 39. huius. Si supra basem superiorem primi cubi, [b] construatur parallelepipedum rectangulum secundo cubo æquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et supra huius parallelepipedi basem superiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & sic deinceps, si plures adsint cubi, constructum erit parallelepipedum propositis cubis æquale. Huic ergo [c] si fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur.

[c] 38. huius.

SCHOLIVM.

EADEM arte quotlibet figuris solidis non cubis, construetur cubus æqualis: [d] si nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c.

[d] 37. huius.

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinque elegeris, æquale construere.

SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia construendum sit æquale Dodecaedrum. [e] Fiat quodcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propos. dicta sunt, fiat æqualis cubus, cuius latus C. [f] Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum supra latus D, constructum, æquale esse dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonstratione propos. 37. lib. 11. Eucl. patet, ita est cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Est autem per constructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [g] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, æqualis. quod est propositum.

[e] 17. tertiidecimi.

C. A. B. D.

[f] 12. sexti.

[g] 14. quinti.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, residuoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA

SVPRA basem maioris cubi [a] construatur parallelepipedum cubo minori æquale. Et ex latere cubi maioris abscindatur recta æqualis altitudini constructi parallelepipedi. Si enim per punctum abscissionis ducatur planum basibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo constructo æquale, cum habeat eandem basem & altitudinem cum illo, hoc est, minori cubo æquale. [b] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur. [a] 39. huius. [b] 38. huius.

SCHOLIVM.

IDEM fieri potest in aliis figuris solidis; [c] si prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non sunt parallelepipeda. [d] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c. [c] 1. & 2. coroll. 36. huius. [d] 38. huius.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus sphæris, sphæram vnam æqualem constituere.

SPHÆRIS propositis [e] construantur cubi æquales: [f] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam sphæris datis erit æqualis. [g] Si igitur huic cubo extruatur sphæra æqualis; factum erit, quod iubetur. [e] 40. huius. [f] 41. huius. [g] 40. huius.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori sphæra minorem sphæram detrahere, residuoque sphæram æqualem exhibere.

[h] VTRAQVE sphæra in cubum reuocetur. [i] Detracto deinde minore ex maiore, [k] si residuo sphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur. [h] 40. huius. [i] 43 huius. [k] 40. huius.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum aut parallelepipedum, secundum proportionem datam secare.

SI namque vnum latus in base cubi, aut parallelepipedi secetur secundum datam proportionem, & per punctum sectionis ducatur planum duabus basibus erectis solidi parallelum, diuidens ipsum solidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [l] Habent enim proportionem inter se eandem, quam bases. [m] Cum ergo bases habeant eandem proportionem, quam segmenta lateris secundum datam proportionem diuisi; constat id, quod propositum est. [l] 32. vn. dec. [m] 1. sexti.

SCHOLIVM.

NON aliter prisma quodlibet, aut cylindrus secundum datam proportionem secabitur, si altitudo in datā secetur proportionem, & per punctū sectionis

a *schol. 14. duodec.* planum ducatur basibus parallelum. Hoc enim secabit [a] tam prisma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

b *14. duodec.*

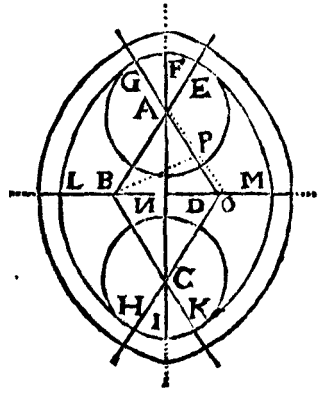
PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipsi similem, quam ouatam dicunt, circino describere.

LIBET miscellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini describere solent figuram ouatam Ellipsi similem, ita vt nulli anguli appareant: cum non rarò eiusmodi figura à Geometris in suis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. nostræ Gnomonicę in scholio propos. 8. qua ratione vera Ellipsis, quę conica sectio est, describenda sit: Sed hic similem figuram ex segmentis circulorum constantem describendam proponimus. Ita ergo, vt ex variis scriptoribus colligitur, agemus. Construantur duo triangula æquilatera, vel Isoscelia supra basem communem AC, in diuersas partes ABC, ADC. (Æquilatera venustiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productisque lateribus, describantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vsque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus describantur, [c] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non secabunt, constitutaque erit figura ouata.

c *15. primi.*

d *schol. 13. tertii.*



BENE autem vides, ex eisdem centris A, C, B, D, describi posse varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

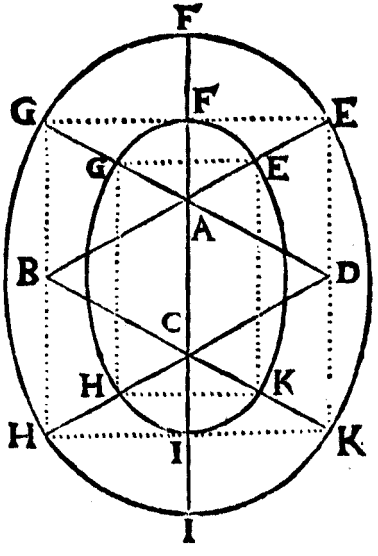
QVOD si triangula constituta sint Isoscelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri basę AC, vel minora. In figura nostra sunt minora.

POTES etiam, si placet, primo loco ex centris B, D, describere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ describendę: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam sine constructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos se secantibus in N; sumptisque æqualibus NA, NC, quantiscunque pro longitudine figurę, describantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout desideras extremitates figurę secundum longitudinem habere angustiores, latioresue. Deinde acceptis aliis duabus rectis æqualibus NB, ND, quantiscunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo angustior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vsus magister optimus facilè docebit, quantæ debeant esse rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ secantes priores arcus in E, K, &c. Nam si ex B, D, per puncta E, K, &c. alij duo arcus describantur, perfecta erit figura Ellipsi similis.

VT autem videas, venustiores figuras describi, si triangula ABC, ADC, sint æqui-

æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus seruari solet, descripsimus hic duas figuras. In minori est latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

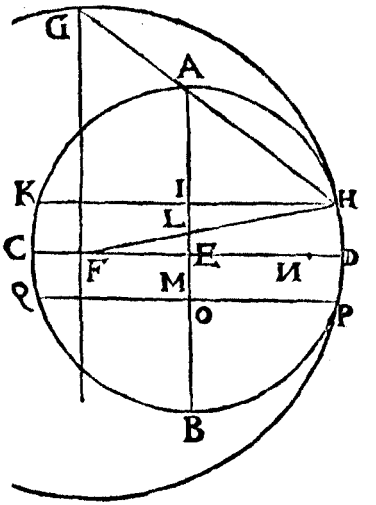


IAM verò area figuræ ouatæ, beneficio trianguli æquilateri descriptæ, quam artifices non raro expetunt, facilè inuenietur, hoc modo. Sector BEK, est sexta pars circuli, cuius semidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli æquilateri BEK, quod est in maiori figura duplum lateris AB, assumpti ad libitum: in minori vero sesquialterum est eiusdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. cap. 7. docuimus, si ex eius sexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita sunt: reliquum fiet segmentum EK, ac proinde & GH, notum. Item sector AGE, est pars duodecima circuli, cuius semidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri assumpto AB, vel semissis ipsius. Si igitur ex duodecima parte areæ illius circuli auferatur area Isoscelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. scripsimus: remanebit segmentum GFE, notum, ideoque & segmentum HIK. Quocirca si quatuor segmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoscetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda sit sextæ partis circuli, hoc est, semidiametro æquale: at EF, sit sinus grad. 60. id est, semissis chordæ grad. 120.

Area figuræ ouatæ hic descripta.

VERVM quia hac ratione describi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam si longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta sit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, descripti raro transeunt per electa puncta latitudinis: Si verò eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, descripti raro etiam per electa puncto longitudinis transeant: vt perspicuum est.) docebimus cum Ioan. Baptista Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latiudine figura Ellipsi similis describenda sit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ se bifa-

riam, & ad rectos angulos secent in E. Ex latitudine CD, abscindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim nisi fiat, describi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, describatur circulus DG, qui necessario vltra punctum A, transibit, quippe cum semidiameter FD, maior posita sit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela secante circulum descriptum in G; ducatur ex G, per A, recta secans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, secans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, similia sunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipsi FH, sit æqualis; erit quoque AL, ipsi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, descriptus transibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipsi EI, & EM, ipsi EL, ducaturque POQ per O, rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, describatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique sumpta EN, ipsi EF, æquali, describatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q, perfectaque erit figura ouata.



[a] *coroll. 4. sexti.*
[b] *4. sexti.*
[c] *schol. 13. tertij.*

SED quia, vt dictum est, constatque ex descriptione, nisi latitudo CD, tanta sit, vt ex ea abscindi possit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione describi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum assumi non possint; instituetur operatio alio modo, sumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent se in prima figura longitudo, latitudoque FI, IM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & sumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores semisse latitudinis LN; describanturque ex A, & C, per F, & I, circelli EFG, HIK. Sumpta deinde MO, semidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, secet recta PB, secans LM, etiam productum, si opus est, in B, ducaturque BA, vsque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB, æqualia sunt, angulosque continent rectos, id est, æquales: [d] erunt bases OB, AB, æquales; additisque æqualibus OM, AE, (sumpta namque fuit MO, æqualis semidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Descriptus ergo circulus ex B, per M, transibit per E, [e] ibique circellum GFE, tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur sumpta ND, ipsi NB, æquali, describatur ex D, per L, circulus tangens eosdem priores circellos in G, H, absoluta erit figura.

[d] *4. primi.*
[e] *schol. 13. tertij.*

SCHOLIVM.

QVO autem semidiameter FA, sumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrum B, reperietur vt liquet.

ROGATV

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorũ, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vsque ad 1000. producuntur: propterea quod huiusce tabulæ multiplex, & insignis est vsus cum in alijs rebus Mathematicis, tum verò maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt post tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras non superantibus: propterea quod si extenderetur vsque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda esset. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile possit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctissimus Maginus in sua tabula Tetragonica vsque ad radicem 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATORUM, & Cuborum, quorum radices maiores non sunt, quam 1000.

Tabula.

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
1	1	1	41	1681	68921	81	1656	531441
2	4	8	42	1764	74088	82	4672	551368
3	9	27	43	1849	79507	83	6889	571787
4	16	64	44	1936	85184	84	9705	592704
5	25	125	45	2025	91125	85	7225	614125
6	36	216	46	2116	97336	86	7396	636056
7	49	343	47	2209	103823	87	7569	658503
8	64	512	48	2304	110592	88	7744	681472
9	81	729	49	2401	117649	89	7921	704968
10	100	1000	50	2500	125000	90	8100	729000
11	121	1331	51	2601	132651	91	8281	753571
12	144	1728	52	2704	140608	92	8464	778688
13	169	2197	53	2809	148877	93	8649	804357
14	196	2744	54	2916	157464	94	8836	830584
15	225	3375	55	3025	166375	95	9025	857375
16	256	4096	56	3136	175616	96	9216	884736
17	289	4913	57	3249	185193	97	9409	912673
18	324	5832	58	3364	195112	98	9604	941192
19	361	6859	59	3481	205379	99	9801	970299
20	400	8000	60	3600	216000	100	10000	1000000
21	441	9261	61	3721	226981	101	10201	1030301
22	484	10648	62	3844	238328	102	10404	1061208
23	529	12167	63	3969	250047	103	10609	1092727
24	576	13824	64	4096	262144	104	10816	1124864
25	625	15625	65	4225	274625	105	11025	1157625
26	676	17576	66	4356	287496	106	11236	1191016
27	729	19683	67	4489	300763	107	11449	1225043
28	784	21952	68	4624	314432	108	11664	1259712
29	841	24389	69	4761	328509	109	11881	1295029
30	900	27000	70	4900	343000	110	12100	1331000
31	961	29791	71	5041	357911	111	12321	1367631
32	1024	32768	72	5184	373248	112	12544	1404928
33	1089	35937	73	5329	389017	113	12769	1442897
34	1156	39304	74	5476	405224	114	12996	1481544
35	1225	42875	75	5625	421875	115	13225	1520875
36	1296	46656	76	5776	438976	116	13456	1560896
37	1369	50653	77	5929	456533	117	13685	1601613
38	1444	54872	78	6084	474552	118	13924	1643032
39	1521	59319	79	6241	493039	119	14161	1685159
40	1600	64000	80	6400	512000	120	14400	1728000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
121	14641	1771561	161	25921	4173281	201	40401	8120601
122	14884	1815848	162	26244	4251528	202	40804	8242408
123	15129	1860867	163	26569	4330747	203	41209	8365427
124	15376	1906624	164	26896	4410944	204	41616	8489664
125	15625	1953125	165	27225	4492125	205	42025	8615125
126	15876	2000376	166	27556	4574296	206	42436	8741816
127	16129	2048383	167	27889	4657463	207	42849	8869743
128	16384	2097152	168	28224	4741632	208	43264	8998912
129	16641	2146689	169	28561	4826809	209	43681	9129329
130	16900	2197000	170	28900	4913000	210	44100	9261000
131	17161	2248091	171	29241	5000211	211	44521	9393931
132	17424	2299968	172	29584	5088448	212	44944	9528128
133	17689	2352637	173	29929	5177717	213	45369	9663597
134	17956	2406104	174	30276	5268024	214	45796	9800344
135	18225	2460375	175	30625	5359375	215	46225	9938375
136	18496	2515456	176	30976	5451776	216	46656	10077696
137	18769	2571353	177	31329	5545233	217	47089	10218313
138	19044	2628027	178	31684	5639752	218	47524	10360232
139	19321	2685619	179	32041	5735339	219	47961	10503459
140	19600	2744000	180	32400	5832000	220	48400	10648080
141	19881	2803221	181	32761	5929741	221	48841	10793861
142	20164	2863288	182	33124	6028568	222	49284	10941048
143	20449	2924207	183	33489	6128487	223	49729	11089567
144	20736	2985984	184	33856	6229504	224	50176	11239424
145	21025	3048625	185	34225	6331625	225	50625	11390625
146	21316	3112136	186	34596	6434856	226	51076	11543176
147	21609	3176523	187	34969	6539203	227	51529	11697083
148	21904	3241792	188	35344	6644672	228	51984	11852352
149	22201	3307949	189	35721	6751269	229	52441	12008989
150	22500	3375000	190	36100	6859000	230	52900	12167000
151	22801	3442951	191	36481	6967871	231	53361	12326391
152	23104	3511808	192	36864	7077888	232	53824	12487168
153	23409	3581577	193	37249	7189057	233	54289	12649337
154	23716	3652264	194	37636	7301384	234	54756	12812904
155	24025	3723875	195	38025	7414875	235	55225	12977875
156	24336	3796416	196	38416	7529536	236	55696	13144256
157	24649	3869893	197	38809	7645373	237	56169	13312053
158	24964	3944312	198	39204	7762392	238	56644	13481272
159	25281	4019679	199	39601	7880599	239	57121	13651919
160	25600	4096000	200	40000	8000000	240	57600	13824000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
241	58081	13997521	281	78961	22188041	321	103041	33076161
242	58564	14172488	282	79524	22425768	322	103684	33386248
243	59049	14348907	283	80089	22665187	323	104329	33698267
244	59536	14526784	284	80656	22909304	324	104976	34012224
245	60025	14706125	285	81225	23149125	325	105625	34328125
246	60516	14886936	286	81796	23393656	326	106276	34645976
247	61009	15069223	287	82369	23639903	327	106929	34965783
248	61504	15252992	288	82944	23887872	328	107584	35287552
249	62001	15438249	289	83521	24137569	329	108241	35611289
250	62500	15625000	290	84100	24389000	330	108900	35937000
251	63001	15813251	291	84681	24642171	331	106561	36264691
252	63504	16003008	292	85264	24897088	332	110224	36594368
253	64009	16194277	293	85849	25153757	333	110889	36926037
254	64516	16387064	294	86436	25412184	334	111556	37259704
255	65025	16581375	295	87025	25672375	335	112225	37595375
256	65536	16777216	296	87616	25934336	336	112896	37933056
257	66049	16974593	297	88209	26198073	337	113569	38272753
258	66564	17173512	298	88804	26463592	338	114244	38614472
259	67081	17373979	299	89401	26730899	339	114921	38958219
260	67600	17576000	300	90000	27000000	340	115600	39304000
261	68121	17779581	301	90601	27270901	341	116281	39651821
262	68644	17984728	302	91204	27543608	342	116964	40001688
263	69169	18191447	303	91809	27818127	343	117649	40353607
264	69696	18399744	304	92416	28094464	344	118336	40707584
265	70225	18609625	305	93025	28372625	345	119025	41063625
266	70756	18821096	306	93636	28652616	346	119716	41421736
267	71289	19034163	307	94249	28934443	347	120409	41781923
268	71824	19248832	308	94864	29218112	348	121104	42144192
269	72361	19465109	309	95481	29503629	349	121801	42508549
270	72900	19683000	310	96100	29791000	350	122500	42875000
271	73441	19902511	311	96721	30080231	351	123201	43243551
272	73984	20123648	312	97344	30371328	352	123904	43614208
273	74529	20346417	313	97969	30664297	353	124609	43986977
274	75076	20570824	314	98596	30956144	354	125316	44361864
275	75625	20796875	315	99225	31255875	355	126025	44738875
276	76176	21024576	316	99856	31554496	356	126736	45118016
277	76729	21253933	317	100489	31855013	357	127449	45499293
278	77284	21484952	318	101124	32157432	358	128164	45882712
279	77841	21717639	319	101761	32461759	359	128881	46268279
280	78400	21952000	320	102400	32768000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
361	130321	47045881	401	160801	64481201	441	194481	85766121
362	131044	47437928	402	161604	64964808	442	195364	86350888
363	131769	47832147	403	162409	65450827	443	196249	86938307
364	132496	48238544	404	163216	65939264	444	197136	87528384
365	133225	48627125	405	164025	66430125	445	198025	88121125
366	133956	49027896	406	164836	66923416	446	198916	88716536
367	134689	49430863	407	165649	67419143	447	199809	89314623
368	135424	49836032	408	166464	67917312	448	200704	89915392
369	136161	50243409	409	167281	68417929	449	201601	90518849
370	136900	50653000	410	168100	68921000	450	202500	91125000
371	137641	51064811	411	168921	69426531	451	203401	91733851
372	138384	51478848	412	169744	69934528	452	204304	92345408
373	139129	51895117	413	170569	70444997	453	205209	92959677
374	139876	52313624	414	171396	70957944	454	206116	93576664
375	140625	52734375	415	172225	71473375	455	207025	94196375
376	141376	53157376	416	173056	71991296	456	207936	94818816
377	142129	53582633	417	173889	72511713	457	208849	95443993
378	142884	54010152	418	174724	73034632	458	209764	96071912
379	143641	54439939	419	175561	73560059	459	210681	96702579
380	144400	54872000	420	176400	74088000	460	211600	97336000
381	145161	55306341	421	177241	74618461	461	212521	97972181
382	145924	55742968	422	178084	75151448	462	213444	98611128
383	146689	56181887	423	178929	75686967	463	214369	99252847
384	147456	56623104	424	179776	76225024	464	215296	99897344
385	148225	57066625	425	180625	76765625	465	216225	100544625
386	148996	57512456	426	181476	77308776	466	217156	101194696
387	149769	57960603	427	182329	77854483	467	218089	101847563
388	150544	58411072	428	183184	78402752	468	219024	102503232
389	151321	58863869	429	184041	78953589	469	219961	103161709
390	152100	59319000	430	184900	79507000	470	220900	103823000
391	152881	59776471	431	185761	80062991	471	221841	104487111
392	153664	60236288	432	186624	80621668	472	222784	105154048
393	154449	60698457	433	187489	81182737	473	223729	105823817
394	155236	61162984	434	188356	81746504	474	224676	106496424
395	156025	61629875	435	189225	82312875	475	225625	107171875
396	156816	62099136	436	190096	82881856	476	226576	107850176
397	157609	62570773	437	190969	83453453	477	227529	108531333
398	158404	63044792	438	191844	84027672	478	228484	109215352
399	159201	63521199	439	192721	84604519	479	229441	109902239
400	160000	64000000	440	193600	85184000	480	230400	110592000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
481	231361	111284641	521	271441	141420761	561	314721	176558481
482	232324	111980168	522	272484	142236648	562	315844	177504328
483	233289	112678587	523	273529	143055667	563	316969	178453547
484	234256	113379904	524	274576	143877824	564	318096	179406144
485	235225	114084125	525	275625	144703125	565	319225	180362125
486	236196	114791256	526	276676	145531576	566	320356	181321496
487	237169	115501303	527	277729	146363183	567	321489	182284263
488	238144	116214272	528	278784	147197952	568	322624	183250432
489	239121	116930169	529	279841	148035889	569	323761	184220009
490	240100	117649000	530	280900	148877000	570	324900	185193000
491	241081	118370771	531	281961	149721291	571	326041	186169411
492	242064	119095488	532	283024	150568768	572	327184	187149248
493	243049	119823157	533	284089	151419437	573	328329	188131518
494	244036	120553784	534	285156	152273304	574	329476	189119224
495	245025	121287375	535	286225	153130375	575	330625	190109375
496	246016	122023936	536	287296	153990656	576	331776	191102976
497	247009	122763473	537	288369	154854153	577	332929	192100033
498	248004	123505992	538	289444	155720872	578	334084	193100552
499	249001	124251499	539	290521	156590819	579	335241	194104539
500	250000	125000000	540	291600	157464000	580	336400	195112000
501	251001	125751501	541	292681	158340421	581	337561	196122941
502	252004	126506008	542	293764	159220088	582	338724	197137368
503	253009	127263527	543	294849	160103007	583	339889	198155287
504	254016	128024064	544	295936	160989184	584	341056	199176704
505	255025	128787625	545	297025	161878625	585	342225	200201625
506	256036	129554216	546	298116	162771336	586	343396	201230056
507	257049	130323843	547	299209	163667323	587	344569	202262003
508	258064	131096512	548	300304	164566592	588	345744	203297472
509	259081	131872229	549	301401	165469149	589	346921	204336469
510	260100	132651000	550	302500	166375000	590	348100	205379000
511	261121	133432831	551	303601	167284151	591	349281	206425071
512	262144	134217728	552	304704	168196608	592	350464	207474688
513	263169	135005697	553	305809	169112377	593	351649	208527857
514	264196	135796744	554	306916	170031464	594	352836	209584584
515	265225	136590875	555	308025	170953875	595	354025	210644875
516	266256	137388096	556	309136	171879616	596	355216	211708736
517	267289	138188413	557	310249	172808693	597	356409	212776173
518	268324	138991832	558	311364	173741112	598	357604	213847192
519	269361	139798359	559	312481	174676879	599	358801	214921799
520	270400	140608000	560	313600	175616000	600	360000	216000000

Tabula Quadratorum, & cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
601	361201	217081801	641	410881	263374721	681	463761	315821241
602	362404	218767208	642	412164	264609288	682	465124	317214568
603	363609	219256227	643	413449	265847707	683	466489	318611987
604	364816	220348864	644	414736	267089984	684	467856	320013504
605	366025	221445125	645	416025	268336125	685	469225	321419125
606	367236	222545016	646	417316	269586136	686	470596	322828856
607	368449	223648543	647	418609	270840023	687	471969	324242703
608	369664	224755712	648	419904	272097792	688	473344	325660672
609	370881	225866529	649	421201	273359449	689	474721	327082769
610	372100	226981000	650	422500	274625000	690	476100	328509000
611	373321	228099131	651	423801	275894451	691	477481	329939371
612	374544	229220928	652	425104	277167808	692	478864	331373888
613	375769	230346397	653	426409	278445077	693	480249	332812557
614	376996	231475544	654	427716	279726264	694	481636	334255384
615	378225	232608375	655	429025	281011375	695	483025	335702375
616	379456	233744896	656	430336	282300416	696	484416	337153536
617	380689	234885113	657	431649	283593393	697	485809	338608873
618	381924	236029032	658	432964	284890312	698	487204	340068392
619	383161	237176659	659	434281	286191179	699	488601	341532099
620	384400	238328000	660	435600	287496000	700	490000	343000000
621	385641	239483061	661	436921	288804781	701	491401	344472101
622	386884	240641848	662	438244	290117528	702	492804	345948408
623	388129	241804367	663	439569	291434247	703	494209	347428927
624	389376	242970624	664	440896	292754944	704	495616	348913664
625	390625	244140625	665	442225	294079625	705	497025	350402625
626	391876	245314376	666	443556	295408296	706	498436	351895816
627	393129	246491883	667	444889	296740963	707	499849	353393243
628	394384	247673152	668	446224	298077632	708	501264	354894912
629	395641	248858189	669	447561	299418309	709	502681	356400829
630	396900	250047000	670	448900	300763000	710	504100	357911000
631	398161	251239591	671	450241	302111711	711	505521	359425431
632	399424	252435968	672	451584	303464448	712	506944	360944128
633	400689	253636137	673	452929	304821217	713	508369	362467097
634	401956	254840104	674	454276	306182024	714	508796	363994344
635	403225	256047875	675	455625	307546875	715	511225	365525875
636	404496	257259456	676	456976	308915776	716	512656	367061696
637	405769	258474853	677	458329	310288733	717	514089	368601813
638	407044	259694072	678	459684	311665752	718	515524	370146232
639	408321	260917119	679	461041	313046839	719	516961	371694959
640	409600	262144000	680	462400	314432000	720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
721	519841	374805361	761	579121	440711081	801	641601	513922401
722	521284	376367048	762	580644	442450728	802	643204	515849608
723	522729	377933067	763	582169	444194947	803	644809	517781627
724	524176	379503424	764	583696	445943744	804	646416	519718464
725	525625	381078125	765	585225	447697125	805	648025	521660125
726	527076	382657176	766	586756	449455096	806	949636	523606616
727	528529	384240583	767	588289	451217663	807	651249	525557943
728	529984	385828352	768	589824	452984832	808	652864	527514112
729	531441	387420489	769	591361	454756609	809	654481	529475129
730	532900	389017000	770	592900	456533000	810	656100	531441000
731	534361	390617891	771	594441	458314011	811	657721	533411731
732	535824	392223168	772	595984	460099648	812	659344	535387328
733	537289	393832837	773	597529	461889917	813	660969	537367797
734	538756	395446904	774	599076	463684824	814	662596	539353144
735	940225	397065375	775	600625	465484375	815	664225	541343375
736	541696	398688256	776	602176	467288576	816	665856	543338496
737	543169	400315553	777	603729	469097433	817	667489	545338513
738	544644	401947272	778	605284	470910952	818	669124	547343432
739	546121	403583419	779	606841	472729139	819	670761	549353259
740	547600	405224000	780	608400	474552000	820	672400	551368000
741	549081	406869021	781	609961	476379541	821	674041	553387661
742	550564	408518488	782	611524	478211768	822	675684	555412248
743	552049	410172407	783	613089	480048687	823	677329	557441767
744	553536	411830784	784	614656	481860304	824	678976	559476224
745	555025	413493625	785	616225	483736625	825	680625	561515625
746	556516	415160936	786	617796	485587656	826	682276	563559976
747	558009	416832723	787	619369	487443403	827	683929	565609283
748	559504	418508992	788	620944	489303872	828	685584	567663552
749	561001	420189749	789	622521	491169069	829	687241	569722789
750	562500	421875000	790	624100	493039000	830	688900	571787000
751	564001	423564751	791	625681	494913671	831	690561	573856191
752	565504	425259008	792	627264	496793088	832	692224	575930368
753	567009	426957777	793	628849	498677257	833	693889	578009537
754	568516	428661064	794	630436	500566184	834	695556	580093704
755	570025	430368875	795	632025	502459875	835	697225	582182875
756	571536	432081216	796	633616	504358336	836	698896	584277056
757	573049	433798093	797	635209	506261573	837	700569	586376253
758	574564	435519512	798	636804	508169592	838	702244	588480472
759	576081	437245479	799	638401	510082399	839	703921	590589719
760	577600	438976000	800	640000	512000000	840	705600	592704000

Tabula Quadratorum, & cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
841	707281	594823321	881	776161	683797841	921	848241	781229961
842	708964	596947688	882	777924	686128968	922	850084	783777448
843	710649	599077107	883	779689	688465387	923	851929	786330467
844	712336	601211584	884	781456	690807504	924	853776	788889024
845	714025	603351125	885	783225	693154125	925	855625	791453125
846	715716	605495736	886	784996	695506456	926	857476	794022776
847	717409	607645423	887	786769	697864103	927	859329	796597983
848	719104	609800192	888	788544	700227072	928	861184	799178752
849	720801	611960049	889	790321	702595369	929	863041	801767089
850	722500	614125000	890	792100	704969000	930	864900	804357000
851	724201	616295051	891	793881	707347971	931	866761	806954491
852	725904	618470208	892	795664	709732288	932	868624	809557568
853	727609	620650477	893	797449	712121957	933	870489	812166237
854	729316	622835864	894	799236	714516984	934	872356	814780504
855	731025	625026375	895	801025	716917375	935	874225	817400375
856	732736	627222016	896	802816	719323136	936	876096	820025856
857	734449	629422793	897	804609	721734273	937	877969	822656953
858	736164	631628712	898	806404	724150792	938	879844	825293672
859	737881	633839779	899	808201	726572699	939	881721	827936019
860	739600	636056000	900	810000	729000000	940	883600	830584000
861	741321	638277381	901	811801	731432701	941	885481	833237621
862	743044	640503928	902	813604	733870808	942	887364	835896888
863	744769	642735647	903	815409	736314327	943	889249	838561807
864	746496	644972544	904	817216	738763264	944	891136	841232384
865	748225	647214625	905	819025	741217625	945	893025	843908625
866	749956	649461896	906	820836	743677416	946	894916	846590536
867	751689	651714363	907	822649	746142643	947	896809	849278123
868	753424	653972032	908	824464	748613312	948	898704	851971392
869	755161	656234909	909	826281	751085429	949	900601	854670349
870	756900	658503000	910	828100	753571000	950	902500	857375000
871	758641	660776311	911	829921	756058031	951	904401	860085351
872	760384	663054848	912	831744	758550528	952	906304	862801408
873	762129	665338617	913	833569	761048497	953	908209	865523177
874	763876	667627624	914	835396	763551944	954	910116	868250664
875	765625	669921875	915	837225	766060875	955	912025	870983875
876	767376	672221376	916	839056	768575296	956	913936	873722816
877	769129	674526133	917	840889	771095213	957	915849	876467493
878	770884	676836152	918	42724	773620632	958	917764	879217912
879	772641	679151439	919	844561	776151559	959	919681	881974079
880	774400	681472000	920	846400	778688000	960	921600	884736000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
961	923521	887503681	975	950625	926859375	989	978121	967361669
962	925444	890277128	976	952576	929714176	990	980100	970299000
963	927369	893056347	977	954529	932574833	991	982081	973242271
964	929296	895841344	978	956484	935441352	992	984064	976191488
965	931225	898632125	979	958441	938313739	993	986049	979146657
966	933156	901428696	980	960400	941192000	994	988036	982107784
967	935089	904231063	981	962361	944076141	995	990025	985074875
968	937024	907039232	982	964324	946966168	996	992016	988047936
969	938961	909853209	983	966289	949862087	997	994009	991026973
970	940900	912673000	984	968256	952763904	998	996004	994011992
971	942841	915498611	985	970225	955671625	999	998001	997002999
972	944784	918330048	986	972196	958585256	1000	1000000	1000000000
973	946729	921167317	987	974169	961504803			
974	948676	924010424	988	976144	964430272			

DE

DE DIFFERENTIIS QVADRATORUM & cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonstrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proximè insequentem sit dupla radicis minoris, addita insuper vnitate. Itaque duobus modis tabula quadratorum componi potest, & continuari. Vno modo, si omnes numeri impares ordine ponantur, initio sumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1. & 3. fit secundus 4. cui si addatur sequens impar 5. fit tertius 9. & si addatur impar sequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipsum conficiunt. Vt quia solus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix est 1. Deinde quia duo impares 1. & 3. conficiunt secundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. componunt quadratum 144. erit eius radix 12. & sic de cæteris. Atq; in hũc modum si semper sequens numerus impar adiiciatur ad quadratum præcedentem, conflatur sequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: si tamen prius series numerorum imparium continuetur. Radices serie numerorum naturali progrediuntur.

Differentia quadratorum

Compositio tabulæ quadratorum.

Numeri impares.	Quadrati.	Radices.
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, sine numerorum imparium serie, si omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus sit 1. cuius radix 1. si hæc radix duplicata, addita insuper 1. addatur primo quadrato 1. fit secundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata, & insuper addita 1. si adiiciatur secundo quadrato 4. fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & insuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & sic in infinitum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium, hoc modo. Descripta serie imparium numerorum ab 1. incipientium, pri-

Generatio cuborum.

mus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde sequentes 3. 5. coaceruati præbent secundum cubum 8. cuius radix 2. Tres insequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundem in modũ sequentes quatuor impares conficiẽt quartum cubum, & insequentes quinq; quintum, & sic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipsum componunt.

Numeri impares.	Cubi	Radices.
1	1	1
3 5	8	2
7 9 11	27	3
13 15 17 19	64	4
21 23 25 27 29	125	5

PRODVCITVR quoq; cubus cuiuscunque radicis, si ea radix in suum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. est 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratum eiusdem radicis.

VERVM quia permolestum est, tam seriem numerorum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum est, quã radices omnes per suos quadratos multiplicare, obseruauit Ioan. Baptista Villalpandus nostræ Societatis sacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis specimẽ præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hierosolymitani, præsertim verò in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione, obseruauit in quam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine sine magna difficultate reperiuntur, quæ postea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiunt cubos insequentes. Res autem sic se habet. In columna sinistra scribatur progressio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In secunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1. & 6. conflatur. Post hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac secundæ columnæ simul additi conficient numerum inferiorem in secunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum secundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus est 1. cui si addas sequentem differentiam 7. facies secundum cubum 8. & addendo differentiam sequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella apposita iuxta quemlibet cubum

Differentiæ cuborum quo modo reperiantur.

Constructio tabulæ cuborum.

bum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

Progreſſio ſenarij.	Differētiæ cuborum.	Cubi.	Radices.
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

EÆDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturq; radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proximè maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplum radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differentia 127. quæſita. Atque hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborum ope progreſſionis ſenarij, extendetur tabula cuborum, quantum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſſionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60. ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA verò diximus, cubos gigni ex additione numerorum imparium, nimirum primum eſſe 1. ſecundum ex duobus ſequentibus 3. 5. confici, & tertium ex tribus ſequentibus 7. 9. 11. &c. ita vt quilibet ex tot imparibus coaceruetur, quot vnitates in eius radice continentur; ſi curioſus quiſpiam noſſe deſideret,

Qui numeri impares datum cubum componant.

(quod scire non iniucundum est) quotnam sint illi numeri impares propositum cubum componentes, hoc est, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo desinant, consequetur id hoc artificio. Radix propositi cubi, si impar est, multiplicetur per semissem numeri proximè minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæsitorum. Quod si radix fuerit par, ducatur eius semissis in numerum proximè minorem radice, & duplo producti adiiciatur 1. Rursus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propositus sit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coaceruatus. Duco radicem 5. quia est impar, in 2. semissem numeri 4. proximè minoris, efficioque 10. duplico. fiunt 20. & addita 1. fit primus imparium 21. Ergo quinque impares quæsiti sunt. 21. 23. 25. 27. 29. qui in vnam summam collecti constituunt cubum 125. Rursus datus sit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus, Semissem radicis, quia par est, nimirum 6. duco in 11. numerum proximè minorem radice, numerumq; productum 66. duplico, addoq; 1. Numerus enim compositus 133. erit primus 12. imparium, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133. 135. 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. conficientes cubum 1728.

REGVLA hæc sic demonstratur. Quando radix impar per semissem numeri proximè minoris multiplicatur, vel semissis radicis paris per numerum proximè minorem radice, producitur summa terminorum seriei naturalis numerorum ab 1. vsque ad numerum proximè minorem radice, vt in progressione Arithmetica diximus, hoc est, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæsitum præcedunt in serie numerorum imparium; cum primus sit vnus, deinde sequantur duo, postea tres, &c. Igitur ea summa indicat, quotum locum occupet impar numerus imparem quæsitum antecedens: quia verò is locus duplicatus, dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, si ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæsitorum. Verbi gratia, si quæratur primus septem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus prius summam 6. terminorum seriei naturalis, quæ est 21. quod fit, si ad 6. addo 1. & summam 7. id est, radicem imparem, ducam in 3. semissem 6. terminorum. Igitur impar numerus præcedens primum quæsitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoq; 1. fit primus impar quæsitus 43. Sunt ergo septem quæsiti 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. qui constituunt cubum 343.

SED vt certi simus, quando radix est magna, num primus imparium rectè sit inuentus, ne cogamur omnes impares cõtinuare, quod laboriosum est, inuestigabimus vltimum ex primo, deinde summam omnium, hoc modo. Differentiam progressionis numerorum imparium, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumq; primo inuento addemus. Conflatus enim numerus erit postremus imparium quæsitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & summæ semissem in numerum terminorum, id est, in radicem cubi propositi ducamus, producetur propositus cubus, si primus imparium rectè inuentus est. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. si ad 43. primum imparem inuentum addamus 12. numerum scilicet productum ex 2. in radicẽ 7. minus vno, fit septimus numerus impar quæsitus 55. ad quem si apponatur primus 43. fiunt 98. Et si huius numeri semissis 49. ducatur in radicẽ 7. producetur cub° 343. &c.

ALIA etiam ratione per facili eosdem numeros impares datum cubum componen-

ponentes reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum summa sit 117649. Ponamus primum imparem esse 1. ℞. id est, 1. Radicem (vt in Algebra fieri solet) Et quia differentia numerorum imparium est 2. erit secundus impar 1. ℞. † 2. hoc est, 1. ℞. plus 2. tertius 1. ℞. † 4. Et ne cogamur continuare omnes 49. terminos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem posuimus esse 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quęsitus 1. ℞. † 96. cui si addamus primum, videlicet 1. ℞., fit summa 2. ℞. † 96. cuius semissis 1. ℞. † 48. ducta in 49. numerum terminorum, facit numerum 49. ℞. † 2352. qui æquatur cubo proposito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2352. remanebunt 49. ℞. æquales numero 115297. quo diuiso per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæsito. quod vt probemus, ducemus differentiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumque 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimũ terminum 2449. Deinde primum huic adijciemus, & summæ 4802. semissem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreabiturque numerus 117649. qui dato cubo æqualis est. Recte ergo primus impar inuentus est.

VSVS PRÆCEDENTIS TABVLÆ quadratorum, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet superior tabula quadratorum, & cuborum egregium vsum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam statim expediantur tria prima puncta ad sinistram, simulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex apposito numero. Primum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.

quæro inter quadratos numerum 117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proximè minorem quadratum 117649. eiusque radicem 343. in Quotiente pono. Inuento autem quadrato subtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo sequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiso per 686. duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiso per 6860. duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Est ergo tota radix 34305 $\frac{27139}{68611}$.

SIT deinde ex apposito numero extrahenda radix cubica. Primum inter

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9

cubos quæro numerum 4250954. trium primorũ punctorum, quem quia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum sua radice 161. qui cubus ex tribus punctis subtractus relinquit 77673. ita vt sequens punctum sit 77673961.

PARO ergo diuisorem, vt lib. 6. ad finem propos. 19. docuimus, multipli-

cando radicis inuentæ quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921. per 300. qui erit 7776300. per quem si meum punctum diuido, reperio Quotiẽtem 9. & facta operatione remanent 7295302. adeo vt vltimum punctum sit 7295302307

DENIQVE paro nouum diuisorem, multiplicando radicis 1619. inuentæ quadratum 2621161. per 300. qui erit 786348300. per quem si vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9. Facta autem operatione, remanent 214232708. absolutaque est extractio.

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica. quod est eiusmodi. Quando nouus diuisor parandus est, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum supputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars sit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum inuenta quarta figura 9. in dato exemplo, partiemur radicem inuentam 1619. in 1610. & 9. quas partes bis scribemus, vt in apposita formula vides. Si igitur singulas partes in singulas partes ducemus, producetur quadratus quæsitus radicis 1619. vt ad propos. 1. lib. 2. Euclid. demonstrauimus. Verbi gratia quia præcedens quadratum numeri 161. fuit 25921. appositis duabus cifris, habebimus productum 2592100. ex 1610. in 1610. cui si addemus 14490. bis numerum videlicet productum ex 1610. in 9. vel ex 9. in 1610. & insuper 81. productum ex 9. in 9. conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione si huius numeri 16199. quadratum desideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161. numeri 1619. appositis duabus cifris, habebimus 2621161 00. quadratum numeri 16190. cui si addemus 145710. bis, productum videlicet ex 16190. in 9. vel ex 9. in 16190. & insuper 81 productum ex 9. in 9. efficiemus 262407601. quadratum numeri 16199. & sic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum semper præcedentis radicis inuentæ quadratum habeamus, & appositis duabus cifris, quadratum conficiamus eiusdem radicis, apposita ei vna cifra, &c.

1610. 9.
1610. 9.

1619 0. 9.
1619 0. 9.

BENE autem vides, si tabula superior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4. aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionem radicum. Sed quia tabula excresceret hac ratione in immensum, contenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad summum, cum eã quilibet ex ijs, quæ diximus, extendere possit, & continuare.

FINIS LIBRI OCTAVI.

INDEX.
ALPHABETICVS RERVM, AC VERBORVM.

A.

ACCLIVEM distantiã mõtis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti imposita, etiam non visam, vnà cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 132

Accliuem montis ascensum à loco mensoris vsq; ad basem altitudinis monti imposita, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrantis notum efficere. 79

Aceruus tritici, quo pacto mensuretur. 209

Ædificij cuiuscumq; ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadrantem reperire. 80

Ædificij cuiusuis ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratũ efficere cognitam. 134

Æquilateri trianguli area. 166

Agri, campiue, aut vrbis, vel regionis situ in plano describere. 148

Agro proposito figuram similem in charta describere. 172

Alberti Dureri quadratura circuli per numeros falsa est. 318

Aliquotæ partes similes plurium magnitudinũ eandem habent proportionem. 218

Altera parte longioris area. 158

Altimetra scala quid. 85

Altitudinem ad cuius basem pateat accessus beneficio speculi plani, vnà cum distantia speculi à cacumine altitudinis deprehendere. 144

Altitudinem, cuius basis imposita sit monti, vel alteri cuipiã altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdem puncti infimi distantia à loco mensoris cognita nõ sit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 131

Altitudinem cuiuslibet rei erecta, per eius distantiam ab oculo mensoris, beneficio quadrati conijcere. 106

Altitudinẽ cuiuslibet rei erectæ, et si eius distantia ab oculo mensoris neq; data sit, neq; inuenta, per duas stationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere. 107

Altitudinem cuius basis imposita sit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni possit, etiamsi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiusdẽ puncti infimi distantia à loco mensoris cognita non sit, per quadrantẽ ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 77

Altitudinẽ cuiusq; rei erecta, ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, si nota fuerit, per quadratũ deprehendere. 140

Altitudinem inaccessibilem beneficio speculi plani, vna cum speculi distantia tam à base etiam non visa, quam à cacumine altitudinis, cognoscere. 145

Altitudinem inaccessibilem, quando neq; distantia à loco mensoris ad eius basem nota est, neq; è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoque distantiam elicere. 72

Altitudinem inaccessibilem, cuius basis nõ videatur, & ad quam per nullum spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solũ ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per quadrantẽ explorare. 72

Altitudinem inaccessibilem, cuius basis non videatur, & ad quã per nullũ spatiũ secundũ rectã lineã accedere possit

mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare. 129

Altitudinem inaccessibilem, quando distantia à loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano factas per quadrantem dimetiri. Atque hinc distantiam quoq; ipsam eruere, etiamsi extremus eius terminus non cernatur. 57

Altitudinem maiorem ex minori incognita, si tamen basis maioris cerni possit, per quadratum venari. 130

Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamsi solum maioris vertex cernatur, per quadratum efficere notam. 129

Altitudinem maiorem ex minori cognita, per duas stationes in summitate, vel in duabus fenestris factas, etiamsi solum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atq; hinc distantiam quoq; inter altitudines colligere. 74

Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo basis maioris cerni possit, per quadrantem perscrutari. 75

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris cerni non possit, per quadratum scrutari. 130

Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris appareat, per quadratum elicere. 130

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet basis minoris non cerni possit, ope quadrantis perueſtigare. Atq; hinc distantiam quoq; inter altitudines duas eruere. 76

Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo basis minoris videri possit, per quadrantem explorare. Atque hinc distantiam quoque inter duas altitudines conijcere. 76

Altitudinem montis, vel turris ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa vel etiam inter signũ quodpiam ac turrim cognitum est, per quadratũ conijcere 123

Altitudinẽ montis, aut turris ex eius vertice per duas stationes in eiusdem summitate factas, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantẽ dimetiri. Atq; hinc ipsam quoq; distantiam à turru base, vel perpendiculo montis ad signum illud inueſtigare. 59

Altitudinem monti impositam, si modo altitudinis basis possit conspici: vel portionem superiorem alicuius turris, beneficio speculi plani efficere notam. 146

Altitudinem montis metiri per quadrantem. 57 & 59

Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas stationes in hasta aliqua erecta, vel in duabus fenestris turris, quarum vna supra aliam existat, factas, è quibus signũ aliquod in Horizonte videri possit, per quadrantem metiri. Atq; hinc distãtiã quoq; a ppẽdiculo mõtis vel turris, vsq; ad signũ visũ cognoscere. 62

Altitudinẽ montis, aut turris ex eius vertice per quadrantem metiri, si in plano, cui insistit, spatiũ aliquod è directo mẽsoris notum sit, deprehendere. 64

Altitudinẽ per vnicã stationẽ metiri p quadrantẽ, quando distantia nota est. 56

Altitudo pyramidum, in quas corpora regularia è centris resoluuntur. 214

Altitudinem propositã singulari quodam modo inueſtigare. 108. & 109

Altitudinem propositam, eiusq; distantiam ab oculo mensoris, vnà cum hypotenusa ab oculo ad fastigium altitudinis extensa, venari ope quadrati stabilis per vnicam stationem, etiamsi solum fastigiũ rei erectæ cernatur. 112

Altitudinem propositam, quando distantia ab oculo mensoris neq; data est, neq; inuenta, neque è directo altitudinis duæ stationes in aliqua hasta erecta factas, per quadratum indagare. 111

Altitudo quãdo maior sit, quã distãtia, & quando æqualis, & quando minor. 140

Altitudinem Solis, vel stellæ cuiusuis per quadratum obseruare. 87

Altitudi-

Altitudinem turris, aut alterius rei per baculum indagare. 137
Altitudinem turris vel mõtis ex eius summitate per vnicam stationem, ope quadrati stabilis metiri, vna cum distantia signi in Horizonte visi vsq; ad turrem, vel montis perpendiculum. 118
Altitudinem turris ex eius vertice per vnicam stationem per quadrantem metiri, si distantia signi in Horizonte visi vsq; ad basem turris nota sit. 64
Altitudinẽ turris, aut montis, ex eius summitate per quadratum dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti aequidistante duæ stationes fieri possunt, & signũ aliquod in Horizonte cernitur. 114
Altitudinẽ turris, vel montis ex eius summitate per duas stationes in hasta alioqua erecta factas, inuestigare per quadratum, quando signum aliquod in Horizonte videri potest. 116
Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inuestigare. 138
Altitudinis portionem ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 131
Altitudinis maioris portionem ex minori altitudine, & minoris portionem ex maiori per quadrantem cognoscere. 76
Altitudinis minoris portionem ex minore altitudine, & maioris portionem ex minore, per quadratum elicere. 131
Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri. 366
Anguli quantitas, quem latera instrumẽti partium continent, quo pacto cognoscatur. 11
Angulorum, & linearum quarundam mechanicam mensurationem admittendam esse. 169
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis cõprehenso, reperire. 48
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito, (si modo constet species anguli alteri lateri oppositi, quando datus angulus acutus est) expiscari. 48
Angulos omnes tres trianguli obliquanguli ex omnibus tribus lateribus perquirere. 49
Angulum acutum trianguli rectanguli ex base, & vno latere inquirere. 46
Angulum acutum trianguli rectanguli ex vtroq; latere reddere cognitum. 46
Angulum rectilineum datum in tres aequales angulos diuidere. 356
Angulus incidentiæ cur angulo reflexionis sit aequalis. 341
Angulus obseruationis quis. 52
Angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, quando offerat altitudinem Solis, vel stellæ, & quando complementum altitudinis. 88
Arabum quadratura circuli per numeros falsa est. 318
Arcus circuli ad arcum simile alterius circuli est, vt chorda ad chordã & cõtra 397
Arcus datorum grad. ac Min. quo pacto ex circulo quouis ope instrumenti partium abscindantur. 9. & 10
Area altera parte longioris. 158
Area campi, intra quem lacus, vel sylua existat. 172
Area campi, quando in triangula resolui non potest, 171
Area circuli accuratior. 198
Area circuli cui triangulo rectangulo sit aequalis, secundum Archimedem. 182
Area circuli aequalis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semisse circumferentiæ circuli. 294
Area circuli tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 192
Area Conoidis Hyperbolici. 233
Area Conoidis parabolici. 233
Area corporis planis superficiebus contenti, & circa sphæram circumscriptibilis, cui solido rectangulo sit aequalis. 307
Area corporum omnino irregularium, quæ. 234
Area cuiuslibet portionis sphæræ. 231
Area cuiusuis figuræ pulchra inuentio. 173

Area cuiuslibet trianguli cui rectangulo sit aqualis. 292
Area data Ellipsis. 203
Area data parabola. 203
Area doliorum. 233
Area figura lenticularis. 200
Area figura quadrilatera omnino irregularis. 170
Area figura ex variis circulorum segmentis cogmentata. 200
Area figura regularis, cuius latus est vnitas, quo pacto inueniatur. 180
Area figura regularis, cui rectãgulo aqualis sit. 293
Area figura regularis, quo pacto ex area alterius figura similis cognita eruatur. 179
Area figura regularis, cui triangulo rectangulo sit aqualis. 294
Area figurarũ regulariũ à triãgulo vsq; ad Dodecagonũ, quãdo latus est vnitas. 180
Area frusti pyramidis, & coni. 208
Area frusti sphara. 231
Aream circuli vera maiorem ex diametro inuestigare. 197
Aream circuli vera minorem, ex circumferentia concludere. 197
Aream circuli vera maiorem, ex diametro colligere. 197
Aream circuli vera maiorem, ex circumferentia inferre. 197
Areã figura Ellipsi similis, qua circino describitur, inquirere. 375
Area multilatera figura irregularis q̃. 171
Area parallelogrammorum. 170
Area parallelepipedorum, Prismatum, & cylindrorum. 204
Area portionum sphaeroidis. 232
Area pyramidis cui solido rectangulo sit aqualis. 307
Area pyramidum, & conorum. 206
Area quadrati. 158
Area quadrilaterorum non rectangulorum. 169
Area quinque corporum regularium qua. 210. & 214
Area rectangulorum. 158
Area regularium figurarum. 175
Area Rhombi, & Rhomboidis. 169
Area sectoris circuli. 199
Area semicirculi, quadrantis, octaua partis, &c. 193
Area segmentorum circuli. 199
Area segmentorum sphara. 229
Area sphara vera minor, ex diametro circuli maximi. 228
Area sphara vera maior, ex circumferentia maximi circuli. 228
Area sphara vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 228
Area sphara vera maior, ex diametro circuli maximi. 228
Area sphara aqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro, & tertia parte superficiei conuexa. 229
Area sphara, & superficies eiusdem conuexa. 218. & 223
Area, vel soliditas sectoris sphara. 230
Area, vel soliditas hemisphaerij. 230
Area sphaeroidis. 232
Area trapezij nulla habentis latera parallela. 170
Area trapezij habentis duo latera parallela. 170
Area triangulorum. 158. & 161
Area trianguli rectanguli. 165
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 168
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur. 168
Area trianguli rectanguli, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 167
Area trianguli Isoscelis. 165
Area trianguli aquilateri. 166
Area trianguli obliquanguli, ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso. 168
Area trianguli obliquanguli, ex vno latere, ac duobus angulis. 168
Area vasis excauati. 209
Arundinis, vel baculi beneficio distantiã

propos

propositam metiri. 99
Ascensum accliuem montis à loco mensoris usq; ad basem altitudinis monti imposita, etiam non visam, una cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrantis efficere cognitum. 79

B

Baculi beneficio distantiam interpedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest. 137
Bacul. beneficio turrim, aut alterius rei altitudinem metiri. 137
Baculi, aut arundinis beneficio distantiam propositam metiri. 99
Basem trianguli rectanguli ex vno latere, & vno angulo acuto inuestigare. 45
Basem trianguli rectanguli ex vtroque latere perscrutari. 45
Basis quadratricis, semidiameter quadrātis, & quadrans sunt continue proportionales. 324

C

Campano ascripta circuli quadratura per lineas falsa est. 318
Campi, agriue, aut vrbis, vel regionis situm in plano describere. 148
Campi area, quando in triangula resolui non potest. 172
Campi, intra quem lacus, vel sylua existat, area. 172
Campo proposito figuram in charta similē describere. 172
Centesima, vel millesima partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope instrumenti partium. 6
Chorda alicuius arcus data, vna cum perpendiculari ex medio eius puncto ad arcum educta; quot gradus, vel palmos tam arcus, quam semidiameter complectitur, inuenire. 253
Circuli pulcherrima proprietas. 358
Circuli quadraturam esse possibilem. 320
Circuli quadratura per Hyppocratem Chium falsa est. 319
Circuli quadratura per lineas Campano ascripta falsa est. 318
Circuli quadratura per numeros secundū Arabes falsa est. 318
Circuli quadratura per numeros ex Alberto Durero falsa est. 318
Circuli quadratura per lineas. 317
Circuli area tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 192
Circuli area accuratior. 198
Circuli aream vera maiorem, ex diametro inuestigare. 197
Circuli aream vera minorem, ex diametro colligere. 197
Circuli aream vera minorem, ex circumferentia inferre. 197
Circuli aream vera maiorem, ex circumferentia concludere. 197
Circuli area cui triangulo rectangulo sit aqualis, secundum Archimedis doctrinam. 182
Circuli area aqualis est rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semisse circumferentiæ circuli. 294
Circuli dimensio ex Archimede. 181
Circuli diameter quam proportionem habeat ad peripheriam, secundum Archimedem. 185
Circuli diameter in numeris ex dato arcu. 201
Circuli diameter ex data peripheria, & peripheria ex data diametro accuratior. 198
Circuli diametrum vera maiorem ex data circumferentia indagare. 194
Circuli diametrum vera minorem ex data peripheria inuestigare. 194
Circuli diameter ducta in 3 $\frac{1}{7}$. gignit numerum maiorem circumferentia. 191
Circuli peripheria, ac diameter, ex eius area. 201
Circuli peripheria ex data diametro, & diameter ex data peripheria accuratior. 198
Circuli peripheria quam proportionē habeat ad diametrum, secundum Archimedem. 185
Circuli peripheria diuisa per 3 $\frac{1}{7}$. facit numerum

merum minorem diametro. 191
Circuli peripheriam vera maiorem, ex data diametro reperire. 193
Circuli peripheriam vera minorem, ex data diametro elicere. 193
Circuli parti octauæ, decimæsextæ &c. rectangulum constituere Isoperimetrum, & æquale. 214
Circuli sectoris area. 199
Circulo figuram rectilineam æqualem, & alteri similem constituere. 329
Circulo dato quadratum æquale constituere. 327
Circulo quadratũ æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 327
Circulorum peripheriæ inter se sunt, vt diametri. 195. & 336
Circulorũ duorũ, vel figurarum similium ꝓportio, ex datis diametris circũferentiisue, vel duob. laterib. homologis. 201
Circulorum diametri inter se sunt, vt circumferentiæ. 194. & 336
Circulũ quadrato æqualẽ describere. 329
Circulum, vel figuram planam rectilineam, in data proportione augere vel minuere. 272
Circulum cuilibet figuræ rectilineæ æqualem describere. 329
Circulum per tria puncta describere, inuẽtis nimirum aliis punctis, per quæ transire debet. 344
Circulum pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ datæ sunt, æqualem: Et figuram similem pluribus figuris similibus, quarum latera homologa data sint, æqualem describere. 202
Circulus ad quadratum diametri proportionem habet quam 11. ad 14 proxime, secundum Archimedem. 191
Circulus ad quadratum circumferentiæ maiorẽ proportionẽ habet, quam 7. ad 88. minorẽ vero, quam 71. ad 892. 196
Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus sibi Isoperimetris maior est. 306
Circulus omnium figurarum rectilinearũ sibi Isoperimetrarũ maximꝰ est. 306
Circulus ad quadratum diametri maiorẽ proportionem habet, quam 223. ad 284 minorẽ vero, quam 11. ad 14 196
Circumferentiæ circuli ad diametrũ proportio accuratior, quæ. 198
Compendium pulchrum in longitudinibus metiendis ꝑ quadratum stabile. 98
Conchoideos lineæ descriptio, eiusque duæ proprietates insignes. 270
Coni, & cylindri superficies conuexa. 235
Conicæ superficiei proportio ad suam basem. 235
Conoidis Hyperbolici soliditas. 233
Cono, cylindro prismati, ac pyramidi cubũ æqualem efficere. 369
Cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut prisma sub eadem altitudine: Et contra cylindro, vel prismati æqualem conum, aut pyramidem sub eadem altitudine constituere. 368
Conoidis parabolici soliditas. 232
Conorum, ac pyramidum area. 206
Constructio tabulæ Gnomonicæ facillima, eiusque vsus. 89
Constructio & vsus tabellæ pro minutis, & secundis. 18
Constructio & vsus tabulæ ꝑ minutis, & sec. cognoscendis ex quadrante. 20
Constructio quadrantis ad min. & sec. cognoscenda. 15
Constructio quadrati Geometrici. 84
Constructio pinnacidiorum pro radio visuali. 17
Constructio regulæ loco filij cum perpendiculo. 17
Constructio instrumenti partium. 4. & 13
Conum, ac pyramidem in cylindrum, & prisma: Item prisma, & cylindrum in conũ, ac pyramidem transmutare. 368
Conum, cylindrũ, prisma, ac pyramidem inæqualẽ sub data altitudine, & supra basem quotuis angulorũ reuocare. 369
Conum, cylindrum, prisma, ac pyramidem in parallelepipedum æquale datæ altitudinis vel basis commutare. 368
Conũ datæ sphæræ cõstituere æqualem. 371
Conũ pyramidi, & cylindrum prismati æqualem: Ac vicissim pyramidem cono

aequalem, & prisma cylindro aequale constituere. 368
Conum, pyramidem, prisma, & cylindrum in parallelepipedum supra basem quadratam conuertere. 369
Corpori regulari sphaeram aequalem exhibere. 371
Corporum quinque regularium superficies conuexa. 214
Corporum quinque regularium area quae. 210. & 214
Corporum omnino irregularium area. 234
Corpus regulare quoduis dato cubo aquale constituere. 372
Corpus planis superficiebus contentum, & circa sphaeram circumscriptibile, cui solido rectangulo sit aequale. 307
Cubicam, & quadratam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 290
Cubica radicis extractio. 281
Cubica & quadrata radicis extractio ex data minutia. 287
Cubo dato corpus regulare quodcunque aequale construere. 372
Cubo dato parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel supra datam basem, aequale constituere. 270
Cuborum differentiae quo pacto reperiantur. 388
Cuborum, & quadratorum tabula vsque ad radicem 1000. 378
Cuborum generatio. 388
Cubum cylindro, prismati, cono, ac pyramidi aequalem construere. 370
Cubum datae sphaerae aequalem: Et sphaeram dato cubo aequalem efficere. 370
Cubum datum aut parallelepipedum in datam proportionem secare. 373
Cubum duobus, aut pluribus cubis aequalem construere. 372
Cubum minorem ex maiori detrahere residuumq; in cubum conuertere. 373
Cubum parallelepipedo rectangulo aequalem construere. 369
Cubum solidis quotlibet aequalem constituere. 372
Cubus alterutrius medianum proportionalium inter duas rectas, aequalis est parallelepipedo sub quadrato extremae propemediam assumptam & altera extrema comprehenso. 275
Cubus diametri sphaerae ad sphaeram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quã 426. ad 223. 222
Cubus circumferentiae maximi circuli in sphaera ad sphaeram, maiorem proportionem habet, quam 298374. ad 5041. minorem autem, quam 2904. ad 49. 221
Cylindri, & coni superficies conuexa. 235
Cylindrica superficies, demptis basibus. 235
Cylindrorum, prismatum, ac parallelepipedorum area. 205
Cylindro, aut prismati aequalem conum, vel pyramidem sub eadem altitudine; Et vicissim cono, vel pyramidi aequalem cylindrum, aut prisma eiusdem altitudinis constituere. 368
Cylindro prismati, cono, ac pyramidi cubũ aequalem constituere. 369
Cylindrum datae sphaerae constituere aequalem. 370
Cylindrum, ac prisma in pyramidem, & conum: Item conum, ac pyramidem in cylindrum, vel prisma aequale transmutare. 368
Cylindrum, aut prisma datum in proportionem datam diuidere. 373
Cylindrum, conum, prisma, ac pyramidem in parallelepipedũ rectangulum aequale datae altitudinis, vel basis cõmutare. 370
Cylindrum, prisma, conum, ac pyramidem cuiuscunque altitudinis, in aequalem sub data qualibet alia altitudine, & supra basem quotcunque angulorum conuertere. 368
Cylindrum prismati, & conum pyramidi aequalem: Et vicissim prisma cylindro aequale, & pyramidem cono aequalem construere. 368
Cylindrum prisma, conum, & pyramidem in parallelepipedum supra basem quadratam conuertere. 369

D.

DEcimæ partes millesimarum, quo pacto sumantur, etiamsi instrumentum partium diuisum sit in 100. partes duntaxat. 8
Decimæ, vel centesimæ partes quotcunque, quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuisæ per circinum auferantur. 44
Declinationem cuiuslibet paralleli in diametro Astrolabii, per instrumentum partium inuenire. 11
Diameter circuli, ac peripheria, ex eius area. 201
Diameter circuli in numeris, ex dato arcu. 201
Diametri circuli ad circumferentiam proportio accuratior, quæ. 198
Diameter circuli ducta in $3\frac{1}{7}$. facit numerum maiorem circumferentia. 191
Diametrum circuli vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 194
Diametrum circuli vera minorem, ex data circumferentia inuestigare. 194
Diameter circuli quam proportionem habeat ad peripheriam, secundum Archimedem. 185
Diameter circuli ex data peripheria, & peripheriã ex data diametro accuratior. 198
Diametri circulorum inter se sunt, vt circumferentiæ. 194. & 336
Differẽtiæ cuborũ quo pacto reperiãtur 388
Differentiæ quadratorum. 387
Differentia stationum quid. 52
Difficultas in extractionibus radicum quæ sit, & quo pacto superetur. 283
Dimensiones quo modo sine numerorum supputatione fiant. 55.58.61.64
Dimensio altitudinis quo pacto fiat, sine reductione vmbræ versæ ad rectam, quando in vna statione vmbra recta, & versa in altera secatur. 110
Dimensiones distantiarum eodẽ modo fiunt in quadrato stabili, ac pendulo. 102
Dimensio distãtiæ quo modo fiat sine reductione vmbrarum rectarum ad versas, quando in vtraque statione latus vmbræ rectæ secatur. 104
Dimensio distantiæ quo modo fiat sine reductione vmbræ rectæ ad versam, quando in vna statione vmbra recta & in altera versa secatur. 105
Dimensio circuli ex Archimede. 181
Dioptræ portio intra quadratum stabile quo pacto reperiatur. 113
Distantiam ab oculo vel pede mensoris ad quoduis punctum in Horizonte notatum, per vnicam stationem, per quadrantem metiri. 67
Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum efficere cognitam, beneficio quadrantis. 78
Distantiam accliuem montis à loco mensoris vsque ad basem altitudinis monti impositæ, etiam non visam, vna cum ipsa altitudine, quando mensor in ascensu montis consistit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 132
Distantiam a summitate turris, vel muri vsque ad signum aliquod in Horizonte positum, licet ad illud accessus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque mensor existat. 128
Distantiam horizontalẽ inter turrim aliquam, & aliud quodpiã signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna ad perpendiculum sit sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit. per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70
Distantiã ab oculo, vel pede mensoris (vbicunq; existat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine, vel etiam in Horizonte notatum per quadratum exquirere, per vnicam etiam stationem. 123. & 126
Distantiam inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem sit rectum, siue inclinatum per quadrantem metiri. 67
Distantiam in plano, siue accessibilis ea sit,

sive inaccessibilis, per duas stationes in eodem plano factas per quadrantem tam pendulum, quam stabilem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipsam elicere. 52, & 55

Distantiam à base turris ad signum propositum in Horizonte, ex summitate turris, vel ex aliqua eius fenestra, per quadratum cognoscere. 119

Distantiam ab oculo, vel pede mensoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas stationes in plano factas, per quadrantem metiri. 65

Distantiam inter signum quodpiam in Horizonte positum, & summitatem turris, vel muri alicuius licet ad ipsum signum accessus non pateat, per quadrantem colligere. 72

Distantiam inter te, & signum quodcunq; in plano Horizontis positum, per quadratum perueſtigare. 96. & 97

Distantiam in Horizonte inter mensorem, & signum aliquod visum, per simplicissimũ quoddã instrumentũ indagare. 142

Distantiam in plano per duas stationes in eodem plano factas, per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo aliqua perpendicularis, etiamsi infimum eius extremum non cernatur. 100

Distantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, per simplicissimum quoddam instrumentum reperire. 142

Distantiam in plano Horizõtis inter mensorem, & signum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 138

Distantiam inter duo signa in plano, cui altitudo insistit, si ea distantia è directo mensoris iaceat, & vtrumq; eius extremum cerni possit, ex altitudinis fastigio, etiamsi altitudo sit mensoris statura, per quadratum comprehendere. 121

Distantiam in plano Horizontis, quæ non sit valdè magna, facillimo quodam modo dimetiri. 139

Distantiam inter pedes mensoris, & signum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus distantiæ videri potest. 140

Distantiam inter duo signa, vel puncta in quolibet plano sive recto ad Horizontẽ, sive inclinato, per quadratũ metiri. 126

Distantiam per vnicam stationem metiri per quadrantem, quando altitudo nota est. 59

Distantiam, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo est distantia, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 68

Doliorum capacitas. 233

E.

Ellipsis centro dato in linea axis, vna cum duobus punctis Ellipsis, vtrumq; axis vtriusq; extremum reperire. 357

Ellipsis data area. 203

Ellipsi similem figuram, quam ouatam dicunt, circino describere. 374

Examen extractionis radicum. 280

Extrahere radicem cuiusuis generis ex dato numero. 276

F.

Facilis inuentio linea recta cuiuis circũferentiæ æqualis, ex ppria figura. 327

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis. 328

Figura regularis circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 330. & 335

Figura numeri, ex quo radix extrahitur, quo modo per puncta signentur. 277

Figura rectilinea cuilibet circulum æqualem describere. 329

Figura regularis area, cui triãgulo rectangulo sit æqualis. 294

Figura regularis area, cui rectangulo æqualis sit. 293

Figuram Ellipsi similem, quam ouatam dicunt, circino describere. 374

Figuram rectilineam circulo æqualem, & alteri similem constituere. 329

Figuram rectilineã in quotuis partes æquales per-

lei per rectam data recta parallelam distribuere. 260
Figuram solidam quamcunq; ex iis, de quibus Euclidi. in Stereometria agit augere vel minuere in data proportione. 273
Figuram rectilineam ex dato angulo, vel puncto in latere, in quotuis partes aquales partiri. 252
Figuram planam rectilineam, vel circulum, in data proportione augere, vel minuere. 272
Figuram similem pluribus figuris similibus, quarum latera homologa data sint, aequalem. Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferètiaue date sint, aequalem describere. 202
Figurarum duarum similium, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiisue. 201
Figurarum isoperimetrarum latera numero aqualia habentium, maxima & aequilatera est, & aquiangula. 303
Figurarum regularium Isoperimetrarum maior est illa, qua plures continet angulos pluraue latera. 296
Figuris rectilineis regularibus circulus, cui isoperimetra sunt, maior est. 306
Filum perpendiculi secãs vmbram rectam facit angulum complementi altitudinis: secans verò vmbram versam, angulum constituit ipsius altitudinis. 89
Fractionem magnam ad minorem ferè aquiualentem reducere. 178
Fractionis inter duas media facilis inuentio. 178
Frusti marmoris regularis soliditas. 209
Frusti pyramidis, & coni area. 208
Frusti sphara soliditas. 231

G.

GEneraradicum innumera. 276
Generatio cuborum. 388
Generatio quadratorum. 387
Geodesia, ac Geometria quid. 236
Geometrici quadrati constructio. 85
Gnomonica tabula. 91
Gnomonica tabula facillima constructio, eiusq; vsus. 89
Gnomon, seu latus quadrati medio loco proportionale est inter vmbram rectam, ac versam. 87
Gradus ac Min. in dato arcu quot contineantur, per instrumentum partium cognoscere. 10
Gradus, ac Min. quotlibet, quo pacto ex circulo quouis, ope instrumeti partium, abscindantur. 9. & 10

H.

HEmisphærii conuexa superficies. 229
Hemisphærii soliditas. 230
Heptagoni latus non rectè à Carolo Mariano, Alberto Durero, & Francisco Flussate inueniri. 362
Hyperbolici Conoidis soliditas. 233
Hypotenusa inuentio per quadrantem. 53. 58. 61. 63

I.

IMpares numeros quemlibet cubũ componentes inuenire. 390
Imperata pars quo pacto ex data recta abscindatur, per instrumentũ partium. 10
Inaccessibilem altitudinem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullũ spatium secundum rectam lineam accedere possit mensor, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis cernatur, per quadratum explorare. 128
Inaccessibilem altitudinem, cuius basis non videatur, & ad quam per nullũ spatium secundum lineam rectam accedere possimus, aut recedere, vt duæ stationes fieri possint, sed solum ad dextram, sinistramue ad locum, è quo eius basis appareat, per quadrantem explorare, 72
Inaccessibilem altitudinem, quando distantia a loco mensoris ad basem altitudinis ignota est, per duas stationes in plano, sectas, per quadrante dimetiri. Atq; hanc distantiam quoq; ipsam eruere, etiamsi extremus eius terminus nõ cernatur. 57
Inaccessibilem altitudinem, quando neque distantia a loco mensoris ad eius basem

nota est, neq; è directo ipsius duæ stationes in plano fieri possunt, neque denique basis appareat, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipsam quoq; distantiam elicere. 73

Inaccessibilem altitudinem beneficio speculi plani, vnà cum speculi distantia tam à base, etiam non visa, quam à cacumine altitudinis cognoscere. 145

Inaccessibilem distantiã per quadrantem tam pendulum, quam stabilem metiri, quando in eius extremo erecta est altitudo perpẽdicularis, etiamsi infimũ eius extremum non cernatur. Atq; hinc altitudinem quoq; ipsam elicere. 52. & 55

Incidentia angulus cur angulo reflexionis sit æqualis. 341

Instrumenta mensurandi varia. 51

Instrumenti, quod Italis Squadra zoppa dicitur, constructio, & vsus. 150

Instrumentum partium quid, & quo pacto construatur. 3. & 4

Instrumentum partium quo pacto aliter construatur. 13

Instrumentum pro librationibus aptissimum. 153

Interuallum, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant & ipsum interuallum productum ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68

Interuallum è directo mensoris positum cuius vtrumque extremum, vel alterum non appareat, nisi mensor ad dextram, vel sinistram accedat, per quadrantem comprehendere. 71

Interuallũ in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarũ vna sit ad perpendiculum sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70

Interuallũ in Horizonte, inter mensorem, & signũ aliquod visum, per simplicissimũ quoddam instrumentũ indagare. 142

Interuallũ in plano Horizontis inter mensorem, & signum quoduis beneficio Normæ adinuenire. 138

Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizontem sit rectum, siue inclinatũ, per quadrantem metiri. 67

Interuallum inter duo signa, vel puncta in quolibet plano siue recto ad Horizontẽ, siue inclinato, per quadratũ metiri. 126

Interuallum, quãdo mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo interuallũ est, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 68

Interuallum transuersum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri potest, per quadratum metiri. 128

Interuallum inter pedes mensoris, & signũ aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus interualli videri potest. 137

Interuallum transuersum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, per quadrantem efficere notum. 69

Iosephus Scaliger perperam Archimedem de Dimensione circuli reprehendit. 184

Irregularium omnino corporum area. 334

Isoperimetra figura quæ, & tractatio de eis instituta. 291

Isoperimetrarum figurarum regularium maior est illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera. 296

Isoperimetrarum figurarum latera numero habentium æqualia, maxima & æquilatera est, & æquiangula. 303

Isoperimetrorum triangulorum eandem habentium basem, maius est illud, quod duo latera habet æqualia. 297

Isoscelis trianguli area. 165

Isoscelia duo triangula similia basium inæqualium, simul maiora sunt duobus Isoscelibus simul super easdem bases, quæ quidem inter se sunt dissimilia prioribus verò Isoperimetra, habeantq; quatuor latera inter se æqualia. 300

Isoscelibus duobus trianguliis datis, quorum bases inaequales sint, & duo latera vnius duobus alterius aequalia: super eisdem basibus triangula Isoscelia similia, & prioribus simul sumptis Isoperimetra constituere. 299

L.

LAtera duo trianguli obliquanguli, ex tertio latere, & duobus quibusuis angulis, inuenire. 46

Latera tria in quadrilatero maiora sunt quarto latere. 344

Lateris trianguli obliquanguli segmenta a perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoscere. 46

Laterum proportiones ex datis angulis cuiusuis trianguli patefacere. 44

Latus figura regularis, quo pacto ex eius area deprehendatur. 181

Latus figura regularis quo pacto ex semidiametro circuli circumscripti cognoscatur. 178

Latus polygoni propositi quo pacto in dato circulo per instrumentum partium inueniatur. 11

Latus quadratricis aequale est quadranti circuli, cuius semidiameter est basis quadratricis. 326

Latus trianguli rectanguli, ex base, & alterutro angulorum acutorum, notum efficere. 45

Latus trianguli rectanguli, ex base, & altero cognoscere. 45

Latus trianguli rectanguli ex altero latere & alterutro angulo acuto eruere. 45

Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis comprehenso colligere. 47

Latus trianguli obliquanguli ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibusuis angulis, addiscere. 47

Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum opposito, (si modo constet species anguli alteri lateri dato oppositi, quando datus angulus acutus est) exquirere. 48

Lenticularis figura area. 200

Libra re spatium terra inaequale, producendis aquis: aut etiam si lubet, Horizonti aequidistans efficere. 153

Linea recta diuisa in quotuis partes aequales, quot eiusmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope instrumenti partium cognoscere. 6

Linea recta in quotuis partes aequales diuisa, quot decimae, vel centesimae, &c. in quauis particula vnius partis contineatur, per circinum deprehendere. 42

Linea superficies, ac solida, penes quid mensurentur. 157

Linea recta sub dimensionem cadentes quae sint. 51

Linea dua, vna recta, & altera inflexa, nunquam concurrentes, licet in infinitum producantur, & semper magis vna ad alteram accedat. 270

Lineam quadratricem describere. 320

Lingam rectam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa linea recta producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68

Lineam rectam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna ad perpendiculum sit sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo sit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70

Lineam rectam datam per instrumentum partiũ diuidere, vt alia recta diuisa est. 12

Lineam rectam è directo mensoris positam cuius vtrumq; extremum, vel alterum, non appareat, nisi ad dextram vel sinistram mensor accedat, per quadrantem comprehendere. 71

Lineam rectam in Horizonte per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremum videre non potest, neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem

dere potest ad locum, è quo alterum extremum appareat. 121
Lineam rectam arcui quadrantis equalem reperire. 325
Lineam rectã in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem ad locum aliquẽ ire possit mensor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 121
Lineam rectã, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo est linea, perpendiculari existens alterum extremum videre potest, per quadrantem metiri. 68
Lineam rectam transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri potest, per quadrantem metiri. 127
Lineam rectam transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, per quadrantem notam efficere. 69
Linearum quarundã, & angulorũ mechanicã mensurationẽ admittendã esse. 169
Longitudinem transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inspici potest, per quadrantem notam efficere. 69
Longitudinem trabis ad Horizontem inclinata, cuius portio superior tantum conspiciatur, vnà cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigii supra Horizontem, per quadratum metiri. 151
Longitudinem rectæ è diametro mensoris posita, cuius vtrumq; extremum vel alterum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram accedat mensor, per quadrantem comprehendere. 71
Longitudinem vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando proiectæ altitudo est cognita, ope quadrati adipisci. 141
Longitudinem lineæ rectæ, quando mensor in vno eius extremo, vel in altitudine aliqua nota, quæ perpendicularis sit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, existens alterum extemũ videre potest, per quadrantem comprehendere. 68
Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris quarum vna sit sub alia ad perpendiculum, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo ignota sit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70
Longitudinem in Horizonte extensam per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterũ videre non potest, propter tumorem aliquem interiectũ, neq; altitudo in promptu est, sed solum ad dextrã, vel sinistram per lineã perpendicularẽ recedere potest ad locũ, è quo alterum extremum appareat. 121
Longitudinem in Horizonte è directo mensoris iacentem, per quadratũ cognoscere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neq; è loco mensoris eam dimetiri, neq; vlla adsit altitudo: dũmodo ad dextrã, vel sinistrã per lineam perpendicularem ad locũ aliquem ire possit mensor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 122
Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa longitudo producta ad pedes mensoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68
Longitudinem ascensus alicuius montis, si eius iacumen ab oculo in radice constituto videatur, per instrumentum simplicissimum cognoscere. 143

M.

Magnitudinum quatuor proprietas quædam. 331
Magnitudinibus in partes proportionales sectis, si in singulis vna pars vtrum secetur proportionaliter, erunt ibidem tota etiam secta proportionaliter. 237
Marmoris regularis solidita. 209
Mechanica mensuratio in non nullis lineis, & angulis admittenda est. 169

Medias duas proportionales inter duas dadas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 270
Medias duas pportionales inter duas datas, ex Diocle, prope verum, inquirere. 268
Medias duas proportionales inter datas duas, ex Herone, & Apollonio Pergao, prope verum, inuenire. 266. & 267
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum inquirere. 268
Medium numerum proportionalem, vel duos medios inter duos datos numeros comperire. 274
Menſorum ratio communis in area cuiuſuis figurae, vel agri inueſtiganda. 173
Menſurandi varia inſtrumenta. 51
Menſurae linearum, ſuperficierum, ac ſolidorum penes quid ſumantur. 157
Milleſimarum docimae partes quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentũ partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 8
Milleſimae partes quomodo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Milleſimae, vel centeſimae partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6
Minuta quotlibet quo pacto ex gradu quouis abſcindantur per circinum. 41
Minuta ac ſecũda quo pacto per circinum in quauis particula gradus deprehendantur. 39
Minuta, & ſecũda quo pacto ex qualrante conſtructo reperiantur. 18
Minutia, cuius Numerator ex duarum minutiarũ Numeratoribus, & Denominator ex denominatoribus conflatur, maior eſt minore, & maiore minor. 178
Minutiae inter duas mediae facilis inuentio. 178
Minutiam magnam ad minorem ferè aequiualentem reducere. 178
Montis altitudinem metiri per quadrantem. 57. & 59
Montis vel turris altitudinem ex eius ſummitate per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſq; ad perpendiculum montis, aut turris. 117
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 64
Montis, aut turris altitudinẽ ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quãdo in plano ſummitatis Horizonti aequidiſtante duae ſtationes fieri poſſunt, & ſignũ aliquod in Horizonte cernitur. 114
Montis aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam factas, è quibus ſignũ aliquod in Horizõte videri poſſit, per quadrantẽ metiri. Atq; hinc diſtantiã quoq; à perpẽdiculo mõtis, vel turris, vſq; ad ſignum viſum cognoſcere. 62
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc ipſam quoq; diſtantiam à montis perpendiculo, vel turris baſe ad ſignum illud inueſtigare. 59
Montis vel turris altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris intervallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum coniicere. 122
Montis, vel turris altitudinẽ ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 116
Multilaterae figurae irregularis area quae. 171
Muri cuiuſque ſoliditas. 209

N.

Normae beneficio altitudinem turris, aut alterius rei inueſtigare. 139
Normae beneficio diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignũ quoduis percipere. 139
Numeri particulares pro ſingulis radicum ſpeciebus, quo modo reperiantur. 278

Nume-

Numeros impares datum cubum componentes reperire. 390
Numerum aliquo concipiente, quot ei vnitates remaneant post tres operationes imperatas, conjicere. 341

O

Obliquanguli trianguli area, ex vno latere, ac duobus angulis. 168
Obliquanguli trianguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipsis cõprehẽso. 168
Obliquangulorũ quadrilaterorũ area 169
Obliquangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 46
Obseruationis angulus quis. 52
Ouatam figuram Ellipsi similem circino describere. 374
Octogonum regulare ad datam altitudinẽ latitudinemue constituere. 365
Octogonum regulare circulo inscriptum medio proportionale est inter quadratum circulo circumscriptum, & quadratum eidem inscriptum. 364

P

Parabolici Conoidis solidtas. 232
Parabolæ datæ area. 203
Parallelepipedũ sub quadrato alterutrius extremarum, (si sint quatuor lineæ cõtinue proportionales) & altera extrema comprehensum, æquale est cubo media proportionalis, quæ priori extremæ assumptæ est propinquior. 275
Parallelepipedorum, Prismatum, & cylindrorum area. 204. & 205
Parallelepipedo rectangulo cubum æqualem exhibere. 369
Parallelepipedum, aut cubum in datam proportionem diuidere. 373
Parallelepipedum rectangulum sub data altitudine, vel supra datam basem dato cubo æquale constituere. 370
Parallelogrammum datum in quotcunq; partes æquales diuidere per rectas duobus lateribus oppositis parallelas. 206
Parallelogrammum datum per rectam ex puncto siue extra, siue intra ipsum, siue in aliquo latere dato ductam bifariã secare. 266
Parallelogrammum in dato angulo æquale dato quadrilatero constituere. 338
Pars imperata quo pacto ex data recta abscindatur, per instrumentum partiũ. 10
Partes aliquotæ similes plurium magnitudinum eandem habent proportionẽ. 218
Partes decimæ millesimarum quo pacto sumantur, etiamsi instrumentũ partium diuisum sit in 100 partes duntaxat. 8
Partes centesimæ, vel millesimæ in quauis recta linea, quo pacto ope instrumenti partium capiantur. 6
Partes quotcunq; decimæ, vel cẽtesimæ, &c. quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuisa per circinũ auferãtur. 45
Partes millesimæ, quo modo capiantur, etiamsi in instrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Particula qualibet vnius partis centensimæ instrumenti partium, quot partes decimas vnius centesimæ, vel quot millesimas totius lateris instrumenti cõplectatur, quo pacto cognoscatur. 9
Partium instrumentum quid, & quo pacto construatur. 3. & 4
Partium instrumentum, quo pacto aliter construatur. 13
Pendulus quadrans quid. 18
Pentagonum regulare non rectè construi ab Alberto Durero, & aliis. 360
Peripheria circuli ex data diametro; & diameter ex data peripheria, accuratior. 198
Peripheria circuli, ac diameter, ex eius area. 201
Peripheria circuli quã proportionẽ habeat ad diametrũ, secundũ Archimedẽ. 185
Peripheria circuli diuisa per 3½ gignit numerum maiorem diametro. 191
Peripheriæ circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 198
Peripheriæ circulorum inter se sunt, vt diametri. 194. & 336
Peripheriam circuli vera maiorem, ex data diametro reperire. 193
Peripheriã datæ rectæ æqualẽ reperire. 329
Peripheriam circuli vera minorem, ex data diametro elicere. 193

Perpendicularem in latus quodcunq; trianguli ex angulo oppofito cadentē, ex omnib. tribus lateribus efficere notā. 49
Perpendicularisque fegmenta faciat in latere trianguli obliquanguli. 46
Perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiffa, in quodnam punctum femidiametri cadat, per inftrumentum partium cognofcere. 11
Perpendicularis in triangulo quando eft numerus furdus, quid agendum. 165
Perpendicularis in triangulo æquilatero quo pacto cognofcatur. 175
Perpendicularis è centro figura regularis, quo pacto cognofcatur. 175
Perpendiculi filum fecans vmbrā rectam facit angulum complementi altitudinis: fecans vero vmbram verfam, angulum conftituit ipfius altitudinis. 89
Pinnacidia pro radio vifuali quo pacto cōftruenda fint. 17
Pinnacidia quo pacto in quadrante fint affigenda. 17
Polygoni propofiti latus quo pacto in dato circulo per inftrumentum partium inueniatur. 11
Portionem altitudinis maioris ex minori altitudine, & minoris portionē, ex maiori per quadrantem cognofcere. 76
Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionē ex maiore, per quadratum percipere. 131
Portionis fphæra fuperficies conuexa. 229
Portionis fphæra foliditas. 231
Portionum fphæroidis foliditas. 232
Primi inter fe numeri fi ambo nō fint quadrati, aut cubi; neque vlli eorum æque multiplices quadrati erunt aut cubi. Et fi duorum numerorum æque multiplices fint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipfi quadrati erunt aut cubi. 343
Prifma, ac cylindrum in conum, & pyramidem: Item, conum, ac pyramidem in cylindrum, vel prifma æquale tranfmutare. 369
Prifma, conum, cylindrū, ac pyramidē in æqualē fub data altitudine, & fupra basē quotuis angulorum conuertere. 369
Prifma, cylindrum, conum, ac pyramidem in parallelepipedum fupra bafem quadratam conuertere. 369
Prifmati, cono, cylindro, ac pyramidi cubū æqualem conftruere. 370
Prifmati cuicunq; cylindrum æqualem, & pyramidi conum æqualem: Ac vicifſim cylindro prifma æquale, & cono æqualem pyramidem conftruere. 368
Prifmati dato fpharam æqualem conftruere. 371
Prifma pyramidem, cylindrum, & conum in parallelepipedum rectangulū æquale datæ altitudinis, vel bafis cōmutare. 370
Prifma, vel cylindrum datum in datam proportionem diuidere. 373
Prifmati, aut cylindro æqualem pyramidē vel conum fub eadem altitudine: Et cōtra pyramidi, vel cono æquale prifma, vel cylindrum conftituere eiufdem altitudinis. 368
Prifmatum, parallelepipedorum, & cylindrorum area. 204. & 205
Probatio extractionis radicum. 280
Problemata 3.4.5.6. & 7. libri 3. quo pacto per vnicam ftationem, ope quadrati ftabilis abfoluantur. 112
Problemata triangulorum rectilineorum rectangulorum. 44
Profunditatem putei, vel ædificij cuiufuis ad perpendiculum erecti, fi modo angulus fundi, vel fignum aliquod in fundo pofitum confpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 134
Profunditatem putei, vel ædificij cuiufcūque ad perpendiculum erecti, fi modo angulus fundi, vel fignum aliquod infundo pofitum confpiciatur, per quadrantem reperire. 80
Profunditatem vallis, eiufdemque defcenfum obliquum, fi non fit valde inæqualis, eiufq; terminus, vel aliquod in valle fignum confpici poffit per quadrantem fcrutari. 82
*Profunditatem vallis eiufdemque defcenfum obliquum, fi non fit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea fignum

signum conspici possit, per quadratum cognoscere. 136
Propinquam radicem vera, in numeris nõ quadratis non cubis, nõ Zensi Zensis, non surdesolidis, &c. inuenire. 284
Proportionalem numerum medium, vel duos medios, inter datos duos numeros reperire. 274
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Diocle. ppe verũ inuestigare. 268
Proportionales duas medias inter duas datas, ex N. comede, prope verum, adinuenire. 270
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Philone Bysantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 267
Proportionales duas medias inter datas duas rectas, prope verum. ex Herone, & Apollonio Pergao inuenire. 267
Proportiones laterum ex datis angulis cuiusuis trianguli patefacere. 44
Proportionalis tertia, & quarta quo pacto p instrumentum partium reperiatur. 13
Proprietas pulchra quadrati. 365
Proprietas circuli pulcherrima. 358
Proprietas quadam quatuor magnitudinum. 331
Proprietas pulchra Quadratricis. 323
Punctum, in quo duæ rectæ ad inuicem inclinatæ concurrant, inuenire. 55
Punctum declinationis cuiuslibet parallelis in diametro Astrolabij per instrumẽtum partium inuenire. 11
Putei, vel ædificij cuiuscunque ad perpendiculum erecti profunditatem, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadrantem reperire. 80
Putei, vel ædificij cuiusuis ad perpendiculum erecti profunditatem, si modo angulus fundi, vel signum aliquod in fundo positum conspiciatur, per quadratum efficere cognitam. 134
Pyramidẽ, conũ, cylindrũ, ac prisma in æqualẽ sub data altitudine, & supra basem quotuis angulorum reuocare. 369
Pyramidem, prisma, conum, & cylindrũ in parallepipedum rectangulũ æquale data altitudinis, vel basis commutare 370
Pyramidem data sphæra æqualem extruere. 371
Pyramidem, prisma, cylindrum, & conum in parallelepipedum supra basem quadratam conuertere. 369
Pyramidi, cono, cylindro, ac prismati cubũ æqualem efficere. 369
Pyramidi conum æqualem, & prismati cylindrum æqualem: Et contra cono pyramidem æqualem, & cylindro prisma æquale construere. 368
Pyramidi, vel cono æquale prisma, vel cylindrum eiusdem altitudinis: Et vicissim cylindro, vel prismati æqualem conum, vel pyramidem sub eadem altitudine constituere. 367
Pyramidum, & conorum area. 206
Pyramis cui solido rectangulo æqualis sit. 307

Q

Quadrans pendulus quid. 18
Quadrans stabilis quid. 18
Quadrans, semidiameter, & basis Quadratricis, continue sunt proportionales. 324.
Quadrantis lib. 1. cap 2. constructi vsus in minutis, & secundis exquirendis. 18
Quadranti circuli rectangulum constituere Isoperimetrum & æquale. 214
Quadrantis constructio ad Min. & Sec. cognoscenda. 15
Quadrati area. 158
Quadrata radicis extractio. 279
Quadrata, & cubica radicis extractio ex data minutia. 288
Quadratam & cubicam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 289
Quadrati Geometrici constructio. 84
Quadrati pulchra proprietas. 365
Quadratorum differentia. 387
Quadratorum, & cuborum tabula vsque ad radicem 1000. 378
Quadratorum generatio. 387
Quadratum, altera parte longius, Rhombum ac Rhomboides, ex excessu diametri supra latus, &c. describere. 345

Quadra-

Quadratum numerum in quotlibet quadratos destribuere. 342
Quadrilateri tria latera maiora sunt quarto latere. 344
Quadrato circulũ aqualẽ describere. 329
Quadratricis latus aquale est quadranti circuli, cuius semidiameter est basis quadratricis. 326
Quadratricis basis, semidiameter quadrantis, & quadrans sunt continue ꝓportionales. 324
Quadratricis pulchra proprietas. 363
Quadratricem lineam describere. 324
Quadratum pendulum, ac stabile, quomodo vsurpetur. 86
Quadratum circumferentiæ circuli maximi in sphæra ita est ad superficiem sphæræ, vt circumferentia circuli maximi ad diametrum. 219
Quadratum circulo aquale, quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 328
Quadratum dato circulo aquale constituere. 327
Quadratum diametri circuli maximi in sphæra ad superficiẽ sphæræ, maiorẽ proportionem habet quam 7. ad 22. minorẽ vero, quam 71. ad 223. 220
Quadratum datæ figuræ aquale, quo pacto facile construatur. 173
Quadratum diametri circuli ad circulũ proportionem habet, quam 14. ad 11. ꝓximè, secundum Archimedem. 191
Quadratũ diametri circuli ad circulum habet maiorẽ proportionẽ, quã 14. ad 11. minorem vero, quam 284. ad 223. 195
Quadratũ circũferentiæ circuli ad circulũ habet maiorẽ ꝓportionẽ, q̃ 892. ad 71 minorẽ vero, quam 88. ad 7. 196
Quadratũ circũferentiæ circuli maximi in sphæra ad superficiẽ conuexã sphæræ, maiorẽ proportionẽ habet, q̃ 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 221
Quadratũ maximi lateris triãguli minus est, q̃ duplũ summæ quadratorũ ex reliquis duobus lateribus descriptorum. 353
Quadratura circuli per numeros secundũ Arabes falsa est. 318
Quadratura circuli per lineas Campano ascripta falsa est. 318
Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falsa est. 318
Quadratura circuli per lineas. 317
Quadratura circuli per Hyppocratem Chium falsa est. 318. & 319
Quadraturam circuli esse possibilem. 320
Quadrilateri omnino irregularis area. 171
Quadrilatero aquale parallelogrammum facile construere in dato angulo. 338
Quadrilaterorũ nõ rectangulorũ area. 169
Quantitas anguli, quẽ latera instrumenti partiũ cõtinẽt, quo pacto cognoscatur. 12
Quarta & tertia proportionalis, quo pacto ꝓ instrumentum partium reperiatur. 13

R

Radicis cubicæ extrahendæ regula propria. 283
Radicis cubicæ extractio. 281
Radicis quadratæ, & cubicæ extractio ex data minutia. 288
Radicis quadratæ extractio. 279
Radicis surdesolidæ extractio. 281
Radicem cuiuslibet generis extrahere ex dato numero. 276
Radicem cuiusque generis ex data minutia extrahere. 287
Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 290
Radicem veræ propinquam in numeris nõ quadratis, non cubis, non Zensizensis, non surdesolidis, &c. inuenire. 244
Radicum infinita species. 276
Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. 166
Radix qualibet extrahenda quot figuras habere possit. 279
Recta linea in quotuis partes aquales diuisa quot decimæ, vel centesimæ, &c. in quanis particula vnius partis continentur per circinum deprehendere. 42
Recta ducta ex angulo acuto trianguli rectãguli in oppositũ lat°, maior est ꝓportio huius lateris ad eius segmentũ prope rectum angulum, quam illius anguli acuti ad

cuti ad eius partem dicto segmento lateris oppositam. 295
Recta linea diuisa in quotuis partes aequales, quot eiusmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope instrumēti partium, cognoscere. 6
Recta data, quamuis minima, partem, vel partes imperatas ex ea auferre. 355
Recta connectens duos angulos oppositos in duobus triangulis aequalibus latus commune habentibus, & in diuersas partes vergentibus, à communi latere bifariam diuiditur. 260
Recta cuiuis circūferentia aequalis, quo pacto facile reperiatur ex ppria figura. 327
Recta duae tangentes circulum, & in vno puncto coeuntes, maiores sunt omnibus chordis interceptum arcum diuidentibus in quotcunque partes aequales. 332
Recta linea adiungere rectam, ita vt quadratum totius composita aequale sit quadato recta adiuncta, vna cum quadrato recta, quae ex adiuncta, & proximo segmento prioris linea conflatur. 351
Recta tres circulum tangentes, & in duobus punctis coeuntes, maiores sunt omnibus chordis arcus duos interceptos in partes aequales secantibus. 332
Recta linea circumferentiam aequalem reperire. 329
Recta quamuis minima exhibere multiplicem quamcunque, etiamsi circino ipsa non accipiatur. 355
Recta linea sub dimensionem cadentes quae sint. 51
Rectam lineā transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremū inspici potest, per quadrantem notam efficere. 69
Rectam linem transuersam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri potest, per quadratum metiri. 127
Rectam lineam ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipsa recta linea producta ad pedes mēsoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadratem metiri. 69
Rectam lineam in Horizonte per quadratum metiri, quando mensor in vno eius extremo existens alterum extremū videre non potest neque altitudo in promptu est, sed solum ad dextram, vel sinistram per lineam perpendicularem recedere potest ad locum, è quo alterum extremum appareat. 121
Rectam lineam, quando mensor in vno eius extremo, vel in aliquo altitudine nota ad planum, in quo est recta, perpendiculari existens alterum extremū videre potest, per quadrantem metiri. 68
Rectam lineam è directo mensoris positam, cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, nisi ad dextram, vel sinistram mensor accedat, per quadrantem comprehendere. 71
Rectam lineam in Horizonte è directo mēsoris iacentem, per quadratum cognoscere, ad cuius extrema neq; accedere liceat, neque è loco mensoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel sinistrā per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire possit mensor, ex quo vtrūque extremum appareat. 122
Rectam lineam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam signum, ex turri per duas stationes in fastigio factas, vel in duabus fenestris, quarum vna sit ad perpendiculū sub alia, quando spatium inter illas fenestras notum est, etiamsi totius turris altitudo sit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70
Rectā arcui quadrātis aequalē reperire. 325
Rectam lineam datā per instrumentū partium diuidere, vt alia recta diuisa est. 11
Rectanguli trianguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 167
Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 168
Rectangulorum duorum triangulorum similium proprietas quaedam. 398
Rectanguli trianguli area, ex vno latere

circa angulum rectum & latere, quod recto angulo opponitur. 168
Rectanguli trianguli area. 165
Rectangulo dato supra datã rectã aquale rectangulum facile construere. 162
Rectangulum, cuius duo excessus dantur, quibus diameter vtrumque latus superat, constituere. 350
Rectangulum dato rectilineo aquale facilè construere. 339
Rectangulum, in quo excessus diametri supra maius latus, & maioris lateris supra minus datur, constituere. 351
Rectangulum sub differentia excessuum, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus superat, & minore excessu bis sumptum, vnà cum quadrato minoris excessus bis sumpto aquale est quadrato rectæ, qua minus latus minorem excessum superat. 349
Rectangulum sub segmentis diametri alicuius rectanguli (ductis per idem punctum diametri parallelis) comprehensum, aquale est duobus rectangulis sub segmentis duorum laterum inaqualium comprehensis. 357
Rectangulum sub diametro, & circumferentia maximi circuli in sphæra, quadruplum est circuli maximi, & superficiei conuexæ eiusdẽ sphæra aquale. 219
Rectangulorum area. 157
Rectangularum triangulorum rectilineorum problemata. 44
Rectarum duarum proportionem habentiũ, quã latus quadratricis ad basẽ, maior aqualis est quadranti circuli, cuius semidiameter est minor recta. 326
Rectilineã figurã planã, vel circulũ in data proportione augere, vel minuere. 272
Rectilineum angulum in tres aquales angulos diuidere. 356
Rectis tribus datis in vno plano non parallelis, rectam ducere, etiam per datum interdum punctum in media, ita vt eius segmenta inter mediã, & extremas sint aquales, vel datã habeãt ꝓportionẽ. 354
Rectilineis duobus inaqualibus datis, ex maiore ꝑ lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineũ minori aquale. 243
Rectilineo cuilibet aquale rectangulum facilè construere. 339
Rectilineo dato aquale quadrilaterũ inter duas rectas super datam rectam per lineam parallelam constituere. 239
Rectilineo in triangulo resoluto ex vno aliquo puncto, rectas ipsis triangulis ordine proportionales inuenire. 246
Rectilineo dato parallelogrãmũ rectangulũ aquale, & Isoperimetrũ cõstituere. 216
Rectilineum datum per rectam à quouis angulo, vel puncto lateris, in datam ꝓportionem secare. 248
Rectilineum datum ex angulo, vel puncto dato in latere, in quotuis partes aquales distribuere. 252
Rectilineũ datum in quotuis partes aquales distribuere. 260
Rectilineũ datũ ꝑ rectã datæ rectæ parallelã in datam proportionem diuidere. 253
Rectilineorum triangulorum obliquangulorum problemata. 47
Rectilineorum triangulorum rectangulorum problemata. 44
Regionis, aut vrbis, vel campi situm in plano describere. 147
Rectis duabus datis, quarum maior diametrum quadrati minoris non superet: maiorem ita secare, vt partium quadrata simul sumpta quadrato minoris lineæ sint aqualia. 352
Reflexionis angulus cur angulo incidentiæ sit aqualis. 341
Regula communis mensorum in area cuiusuis figuræ, vel agri inuestiganda. 173
Regula propria extractionis radicis cubica. 283
Regula vnica ad omnes rectas dimetiẽdas, quando rerum extrema videntur. 152
Regulæ constructio loco fili cum perpendiculo. 17
Regulare corpus quodlibet dato cubo aquale constituere. 372
Regulari corpori sphæram aqualem exhibere. 371

Regu-

Regularis figura area, cui rectangulo aqualis sit. 293
Regularis figura area, cui triangulo rectangulo sit aqualis. 294
Regularis figura circulo circumscripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 330. & 331
Regularibus figuris rectilineis circulus, cui Isoperimetra sunt, maior est. 306
Regularium figurarum Isoperimetrarum maior est illa, qua plures continet angulos, pluraue latera. 296
Regularium figurarum area à triangulo vsque ad Dodecagonum, quando latus est vnitas. 180
Regularium figurarum area. 175
Regularium quinque corporum area qua. 210. & 214.
Regularium quinque corporum superficies conuexa 214
Rhomboidis, ac Rhombi area. 170
Rhombi, ac Rhomboidis area. 170
Rhombum, ac Rhomboides, ex excessu diametri supra latus, &c. describere. 346

S

SAccus tritici, quo pacto mensuretur. 209
Saxi regularis soliditas. 209
Scala altimetra quid. 85
Secantes ac sinus quo pacto in instrumento partium capiantur. 8
Sectoris circuli area. 199
Sectoris sphaera soliditas. 230
Segmenta lateris trianguli obliquanguli à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoscere. 46
Semicirculo, quadranti, octaua parti circuli, &c. rectangulum constituere Isoperimetrum, & aquale. 214
Semidiametri circuli inuentio ex latere figure regularis inscripta. 178
Similem figuram pluribus figuris similib°, quarum latera homologa data sint, aqualem: Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferentiaue date sint, aqualem describere. 202
Similium duorum triangulorum rectangulorum proprietas quadam. 298
Similium duarũ figurarũ, aut circulorũ ꝓportio ex datis duob. laterib. homologis, vel diametris, circũferentiisue. 201
Similes partes aliquota pluriũ magnitudinum eandem habent proportionem. 218
Sinus totus quando tam paruus est, vt in instrumentum partium transferri nequeat, quid agendum. 12
Sinu toto posito 10000. quo pacto in instrumento partium Tangentes sumantur. 8
Sinu toto posito 100. quo pacto Tangentes ꝑ instrumentum partium capiantur. 6
Sinus ac secantes quo pacto in instrumento partium capiantur. 7
Solidã figurã quamcunq; ex iis, de quibus Eucl. in Stereometria agit secundũ proportionẽ datã augere, vel minuere. 273
Solida, vel corpora precipua, quorum area inuestigantur, qua. 204
Solida, superficies, ac linea penes quid mensurentur. 157
Soliditas cuiusuis portionis sphaera. 231
Soliditas sphaera. 223
Soliditas sphaera vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 228
Soliditas sphaera vera maior, ex diametro circuli maximi. 228
Soliditas sphaera vera minor, ex diametro maximi circuli. 228
Soliditas sphaera vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 228
Soliditas sphaeroidis. 232
Soliditas, vel area hemisphaerij. 230
Soliditas portionum sphaeroidis. 232
Soliditas sectoris sphaera. 230
Soliditas muri cuiusque. 209
Soliditas frusti regularis marmoris. 209
Soliditas frusti sphaera. 231
Soliditas Conoidis Hyperbolici. 233
Soliditas Conoidis parabolici. 232
Soliditas vasis excauati. 209
Solidum planis superficiebus contentum, & circa sphaeram circumscriptibile, cui solido rectangulo sit aquale. 307
Solidorum quinque regularium area qua. 210. & 214.
Solidorum quinque regularium super

ficies conuexa. 214
Solidorum omnino irregulariũ area. 334
Solidum minus ex maiori detrahere, residuumq; in cubum transformare. 373
Solidum rectangulum supra basem quotcunque angulorum, datæ sphæræ æqualem construere. 371
Solis, vel stellæ cuiusuis altitudinem per quadratum obseruare. 88
Spatium terræ inæquale pro ducẽdis aquis librare: aut etiam, si lubet, Horizonti æquidistans efficere. 153
Spatiũ inter duo pũcta in quolibet plano eleuato, siue illud ad Horizõ. sit rectũ, siue inclinatũ, per quadrantẽ metiri. 67
Species radicum infinitæ. 276
Speculi plani beneficio altitudinem monti impositam, si modo altitudinis basis possit conspici: Vel portionem superiorem alicuius turris, metiri. 147
Speculi plani beneficio altitudinem, ad cuius basem pateat accessus, vnà cum distantia speculi à cacumine altitudinis, deprehendere. 144
Speculi plani beneficio altitudinem inaccessibilem, vna cum speculi distantia tã à base, etiam non visa, quam à cacumine altitudinis, cognoscere. 145
Sphæra ad cubum circumferentiæ maximi circuli, maiorem proportionem habet, quam 49. ad 2904. minorem vero, quam 5041. ad 298374. 221
Sphæra quolibet cono, & cylindro sibi Isoperimetro maior est. 313
Sphæra æqualis est solido rectangulo comprehenso sub semidiametro, & tertia parte superficiei conuexæ. 309
Sphæra maior est omnis corpore regulari sibi Isoperimetro. 311
Sphæra omnibus corporibus sibi Isoperimetris, quæ planis superficiebus contineantur, circaq; alias sphæras circumscriptibilia sint, maior est. 311
Sphæra omnibus corporibus sibi Isoperimetris, & circa alias sphæras circumscriptibilibus, quæ superficiebus conicis cõtineantur, maior est. 311
Sphæra area, vel soliditas, ex diametro maximi circuli. 228
Sphæra data conum efficere æqualem. 371
Sphæra data cylindrũ æquale exhibere. 371
Sphæra data cubum æqualem: Et dato cubo æqualem sphæram efficere. 370
Sphæra data piramidem constituere æqualem. 371
Sphæra data solidum rectangulum æquale supra basem quotcunque angulorum constituere. 371
Sphæra superficies vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 227
Sphæra superficies vera minor, ex diametro circuli maximi. 227
Sphæra superficies vera maior, ex diametro circuli maximi. 227
Sphæra area, seu soliditas vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 228
Sphæra area, seu soliditas maior, quã vera, ex circumferentia maximi circuli. 228
Sphæra area, siue soliditas, ex diametro maximi circuli. 228
Sphæra soliditas. 223
Sphæra ad cubum diametri sphæræ maiorem proportionem habet, quam 223. ad 426. minorẽ verò, quàm 11. ad 21. 222
Sphæra superficies conuexa cui rectangulo sit æqualis. 219
Sphæra superficies conuexa ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22 minorem verò, quàm 71. ad 223. 221
Sphæra segmentorum area. 229
Sphæra superficies ad quadratũ circũferẽtiæ circuli maximi est, vt diameter ad circumferentiam circuli maximi. 219
Sphæra superficies vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 226
Sphæra portionis superficies conuexa. 229
Sphæra portionis soliditas. 231
Sphæra area, eiusdemque superficies conuexa. 218. & 223
Sphæra superficies ad quadratum diametri sphæræ, vel circuli maximi, maiorẽ proportionem habet quam 223. ad 71. minorem vero quam 22. ad 7. 221

Spha-

Spharam duabus, aut pluribus sphaeris aqualem describere. 373
Spharam dato corpori regulari aqualem constituere. 371
Spharã dato prismati aqualẽ construere. 371
Spharam minorẽ ex maiori detrahere, residuoq; aqualem spharam exhibere. 373
Spheroidis portionum soliditas. 232
Spharoidis area, vel soliditas. 232
Spharam, vel figuram solidam in data proportione augere, vel minuere. 273
Squadra Zoppa apud Italos quid, eiusque vsus. 150
Stabilis quadrans quid. 17
Stationum differentia quid. 52
Stella cuiusuis, vel Solis altitudinem per quadratum obseruare. 87
Superficies conuexa quinque corporum regularium. 214
Superficiei conica, pportio ad suã basem. 235
Superficies conuexa sphaerae, eiusdemque area. 218. & 225
Superficies conuexa hemisphaerii. 229
Superficies conuexa sphaerae ad quadratum circumferentia circuli maximi, maorẽ proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem verò, quam 71. ad 223. 221
Superficies, linea, ac solida, penes quid metiuntur. 57
Superficies conuexa sphaerae cui rectangulo sit aqualis. 29
Superficies sphaera vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 226
Superficies sphaera vera maior, ex diametro maximi circuli. 227
Superficies sphaera vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 227
Superficies sphaerae ad quadratũ circumferentia circuli maximi est, vt diameter ad circumferentiã circuli maximi. 219
Superficies conuexa portionis sphaerae. 229
Superficies sphaerae ad quadratum diametri circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem verò quam 22. ad 7. 221
Superficies conuexa cini, & cylindri recti. 235
Superficies cylindrica, demptis basibus. 235
Superficies frusti coni, demptis basibus. 235
Surdesolidae radicis extractio. 281

T.

Tabula continens latera figurarum regularium à triangulo vsque ad figurã 80. laterũ, posita diametro 20000000. vel sinu toto 10000000. 177
Tabula mirifica ad depromendos numeros pro singulis radicum speciebus. 277
Tabula constructio & vsus pro minutis, & sec. ex quadrante cognoscendis. 20
Tabula gnomonica. 91
Tabula gnomonicae facillima constructio, eiusq; vsus. 89
Tabula pro minutis ad plures quadrantes extensio sine regula aurea. 20
Tabula pro minutis, & secundis ex quadrante inuestigandis. 22
Tabula quadratorum, & cuborum vsque ad radicem 1000. 378
Tabella pro min. & sec. cognoscendis ex quadrante constructo. 19
Tangens quando superat sinum totũ, quid agendum, vt per vnicam translationem per instrumentum partium punctum quaesitum reperiatur. 12
Tangentes, posito sinu toto 10000. quo pacto in instrumento partium sumantur. 8
Tangentes quo modo inueniantur ope instrumenti partiũ, posito sinu toto 1000. 7
Tangentes tres in duobus punctis coeuntes, maiores sunt omnib° chordis duos arcus interceptos in partes aquales secantib. 332
Tangẽtes duae in vno puncto coeũtes, maiores sunt omnibus chordis arcũ interceptũ in quotcũq; partes aquales diuidẽtib. 332
Tangentes quo modo accipiãtur respectu sinus totius 100. ope instrumenti partium. 6
Tangentes quo pacto sumantur, quando instrumentũ partium cõtinet 1000. partes. 6
Tangente aliqua inuenta in latere instrumenti partium, quo pacto eadem reperiatur respectu dati sinus totius. 8
Tangentes perexigua quo pacto in instrumento partium sumantur. 8
Terrae ambitũ ex edito aliquo mõte metiri. 366

Tertia & quarta proportionalis, quo pacto per instrumentum partium reperiatur. 12
Trabis longitudinem ad Horizontẽ inclinata, cuius portio superior tantum conspiciatur, vnà cum angulo inclinationis, distantia basis à mensore, & altitudine fastigii supra Horizontem, per quadratum metiri. 151
Trapezii habentis duo latera parallela, area. 170
Trapezii irregularis facilis dimensio. 175
Triangula duo Isoscelia similia basium inaequalium, simul maiora sunt duobus Isoscelibus simul super easdem bases, quae quidem inter se sint dissimilia, prioribus verò Isoperimetra, habeantq; quatuor latera inter se aequalia. 300
Trianguli Isoscelis area. 165
Trianguli obliquanguli area. 168
Trianguli rectanguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & latere, quod recto angulo opponitur. 167
Trianguli pulchra proprietas, si in eo ducatur vni lateri parallela, &c. 261
Triangulis duobus Isoscelibus datis, quorum bases sint inaequales, & duo latera vnius duobus alterius aequalia: super eisdem basibus duo triangula Isoscelia similia, & prioribus simul sumptis Isoperimetra constituere. 299
Trianguli aequilateri area. 166
Trianguli cuiuslibet area cui rectangulo sit aequalis. 292
Trianguli rectanguli area. 165
Trianguli rectãguli area, ex vno latere circa angulũ rectũ & vno angulo acuto. 169
Trianguli rectãguli area, ex latere, q̃ recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 167
Trianguli insignis proprietas, si in eo à duobus angulis ad media puncta oppositorum laterum rectæ ducantur, &c. 252
Triangulo duorum laterum inaequalium supra tertium latus triangulum constituere priori Isoperimetrum duorum aequalium laterum. 297
Triangulo parallelogrammum aequale, & Isoperimetrum constituere. 214
Triangulorum rectilineorum rectangulorum problemata. 44
Triangulorum duorum rectangulorum similium proprietas quaedam. 298
Triangulorum Isoperimetrorum eandem habentium basem, maius erit illud, quod duo latera habet aequalia. 297
Triangulorum rectilineorum obliquangulorum problemata. 46
Triangulum datũ ex dato puncto in latere in quotlibet partes aequales diuidere. 262
Triangulum datum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet partes aequales distribuere. 263
Triangulum datum per rectum ex puncto extra triangulum dato in duas partes aequales partiri. 264
Triangulum totum ad triangulum abscissum per rectam, est, vt rectangulum sub duobus lateribus sectis ad rectangulum sub duobus lateribus trianguli abscissi comprehensum. 262
Tritici acerus, quo pacto mensuretur. 209
Tritici saccus, quo pacto mensuretur. 209
Turris, aut montis altitudinẽ, ex eius summitate per quadratũ dimetiri, quando in plano summitatis Horizonti aequidistante duae stationes fieri possunt, & signum aliquod in Horizonte cernitur. 114
Turris, aut alterius rei altitudinem per baculum indagare. 137
Turris aut alterius rei altitudinem, per Normam inuestigare. 139
Turris, vel montis altitudinẽ ex eius summitate per duas stationes in hasta aliqua erecta factas inuestigare per quadratũ, quando signum aliquod in Horizonte videri potest. 116
Turris altitudinem ex eius vertice per vnicam stationem per quadrantem metiri, si distantia signi in Horizonte visi vsque ad basem turris nota sit. 64
Turris, vel montis altitudinẽ, ex eius summitate per vnicam stationem, ope quadrati stabilis metiri, vna cum distantia, signi visi in Horizonte vsq; ad turrem vel montis perpendiculum. 119

I N D E X.

Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, si in plano, cui insistit, spatiũ aliquod è directo mensoris positum notum sit. 64

Turris, vel mõtis altitudinẽ ex eius fastigio, quando è directo mensoris interuallum aliquod inter duo signa, vel etiam inter signum quodpiam, ac turrim cognitum est, per quadratum coniicere. 123

Turris, aut montis altitudinem ex eius vertice per duas stationes in eiusdẽ summitate factas, è quibus signum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc ipsam quoq; distantiam à turris base, vel perpediculo montis ad signum illud inuestigare. 79

Turris, aut montis altitudine ex eius vertice per duas stationes in hasta aliqua erecta, vel in duabus fenestris turris, quarũ vna sit supra aliã, factas, è quibus signũ aliquod in Horizonte videri possit, per quadrantẽ metiri. Atq; hinc distantiam quoq; à perpendiculo turris, vel montis, vsq; ad signum visum cognoscere. 62

Turrium duarũ summitatibus visis, etiãsi bases propter edificia interiecta occultentur, distantiã tam inter earum bases, quàm inter earundem fastigia, vnà cum ipsarum altitudinibus, ac distantiis à mensore, per quadratum coniicere. 152

V.

Vallis profunditatem, eiusdemque descensum obliquum, si non sit valdè inaequalis, eiusq; terminus, vel aliquod in valle signum conspici possit, per quadrantem scrutari. 82

Vallis profunditatẽ, eiusdemq; descensum obliquũ, si nõ sit valdè inaequalis, & eius terminus, vel aliquod in ea signũ conspici possit, per quadratum cognoscere. 136

Varia instrumenta mensurandi. 51

Vasis excauati soliditas. 209

Vasis excauati capacitas. 209

Vmbra recta, ac versa quo pacto in quadrato Geometrico cognoscenda sit. 86

Vmbra longitudinem ab altitudine, Sole lucente, proiecta, quando altitudo est cognita, ope quadrati adipisci. 141

Vmbra recta ac versa in quadrato quae & in quot partes à Geometris vtraque secetur. 85

Vmbra recta ac versa in quot partes in hoc opere diuidatur. 85

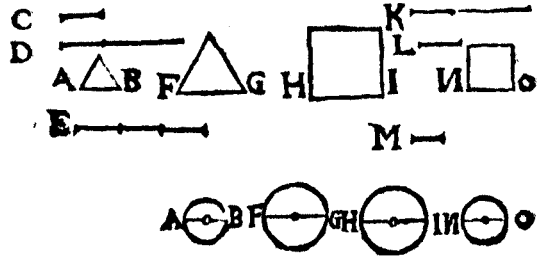
Vmbra recta ad versam reductio, & contra. 87

Vrbis, vel campi, aut regionis situm in plano describere. 147

Vsus & constructio tabulae pro minutis & sec. cognoscendis ex quadrante. 19

Vsus quadrantis constructi in minutis, & secundis exquirendis. 17

Vsus tabulae quadratorum & cuborum in extrahendis radicibus quadratis & cubicis. 391

E R R A T A.

In tabula quadratorum & cuborum. pag. 378. in quadrato Radicis 117. loco quinto à dextera pro 5. restitue 9. Pag. 381. in cubo Rad. 364. loc. quarto pro 3. r. 2. P. 381. in cubo Rad. 432. loco sexto pro 6. r. 5. P. 382 in cubo Rad. 573. loco vlt. pro 8. r. 7. P. 383. in quadrato Rad. 714. loco tertio pro 8. r. 9. P. 384. in quadrato Rad 735. loco primo pro 9 r. 5. P. 385. in cubo Rad. 884. loco antepen. pro 5. r. 2. In cubo Rad. 929. loco sexto pro 7. r. 5. In cubo Rad. 864. loco pen. pro 5. r. 4. In quadr. Rad. 946. pro 7. r. 8. In cubo Rad. 909. pro 5. r. 9. P. 272. in propositione 16. desideratur hic subiecta figura.