PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

A L'USAGE DES COMMENÇANS

PAR

J. D. BLASSIÈRE,

LE FILS.

A LA HAYE,

Chez JEAN MENSERT,
Marchand Libraire

MDCCLXXXII.

A

LEURS ALTESSES SERENISSIMES

MON SEIGNEUR

GUILLAUME FREDERIC

ET

MON SEIGNEUR

GUILLAUME GEORGE FREDERIC,

PRINCES D'ORANGE ET DE NASSAU,
ETC. ETC. ETC.

SERENISSIMES PRINCES!

Les Mathématiques faisant parties des Sciences auxquelles Vos Altesses Serenissimes, s'appliquent avec un si grand succès, je prens la liberté de VOUS dédier cet Ouvrage, dans l'espérance que VOUS voudrez le recevoir avec bonté.

La Protection, dont L. L. A. A. S. & R. VOS AUGUSTES PARENS veulent bien honorer mon Père, me fait espérer que V. V. A. A. S. S. daigneront la continuer à celui qui a l'honneur d'être avec le plus profond respect.

SERENISSIMES PRINCES!

DE VOS ALTESSES SERENISSIMES

Le très humble & très Obeissant Serviteur

J. D. BLASSIERE.

PREFACE.

L'*Ouvrage que je présente au Public est un extrait de celui que mon Père a publié sous le Titre* de Inleiding tot de Beschouwende en Werkdaadige Meetkunde, en het gebruik van dezelve in het Landmeeten en Waterpassen enz. op eene Nieuwe en Eenvoudige manier voorgesteld en betoogd door J. J. BLASSIÈRE, (*) 2 Deelen *'s Hage* by *J. Mensert* 1776. (**).

Mon but en y travaillant a été de m'instruire & le desir d'être utile aux Commençans me le fait publier.

On y trouvera les premiers principes de la Géométrie élémentaire exposés avec toute la briéveté & la clarté nécessaire pour se mettre en état de lire & d'entendre toutes les parties de cette Science, contenues dans les ELEMENS D'EUCLIDE *& dans les ouvrages des autres Auteurs qui ont traité cette matière* (***).

Cet

(*) Instituteur en Mathématique & Physique des Enfans de la Fondation de MADAME DE RENSWOUDE à la Haye.

(**) On trouve chez le même Libraire, outre l'ouvrage cité, & celui ci, *l'Institution du Calcul Numérique & Littéral qui contient les principes de l'Arithmétique & de l'Algèbre, par* J. J. BLASSIÈRE, 2 Parties, la Haye 1770.

(***) Après *la Table des principaux Articles* il y a un renvoi des Propositions des six Premiers & de l'Onzième & Douzième Livre des Elemens d'Euclide, aux Articles de cet Abrégé.

Cet Abrégé, qui contient nombre de Propositions nouvelles ou peu connues, est divisé en quatre parties.

La Première (a) contient la Théorie de l'intersection des lignes ainsi que la Théorie des figures Géométriques; les démonstrations sont Synthétiques telles qu'on les trouve dans les quatre premiers Livres des ELEMENS D'EUCLIDE.

On traite dans la seconde partie (b) de la Doctrine des Proportions, qui y est réduite à peu de Principes, faciles à entendre, à rétenir & à appliquer.

Les Commençans auront occasion de voir dans la troisième partie, (c) qui contient l'application des proportions aux figures Géométriques, combien la méthode Analytique est propre à démontrer les vérités Géométriques de la manière la plus simple & la plus facile.

La quatrième & dernière partie (d) traite de l'Intersection des plans & des propriétés des Corps Géométriques.

Je prie le Lecteur d'avoir égard à mon jeune Age (e) & de ne pas juger de mon style avec trop de sévérité, vû le peu d'occasion que j'ai eu d'étudier la langue Françoise, qui m'est étrangère.

Si le succès de cet Abregé répond à mon attente, j'espère de publier par la suite, un pareil extrait du second Tome de l'ouvrage cité, qui contient la pratique de l'Art *ou* l'Arpentage, *&c.*

(*a*) Depuis le §. 1. jusqu'au §. 179.
(*b*) Depuis le §. 180. jusqu'au §. 198.
(*c*) Depuis le §. 199. jusqu'au §. 271.
(*d*) Depuis le §. 272. jusqu'a la fin.
(*e*) *Quinze Ans*

TABLE
DES PRINCIPAUX
ARTICLES.

Propriétés générales des figures rectilignes.

De la manière de faire des quarrés & des paralelogrammes.

I. De

De la Proportion qui a lieu entre les circonférences & les surfaces des figures Géométriques.

Propriétés des plans Géométriques.

De la Geométrie des corps Solides.

Ren-

Renvoi des Propositions des Livres d'Euclide aux Articles de cet ouvrage.

LIVRE PREMIER.

La Proportion	se trouve au §.
1	111
4	117
5, 6	106, 108
8	113, 115
9	77
10	43
11	41
12	42
13	25
14	26
15	27
16	101
17	102
18, 19	105
20	104
22	112
23	28
24	118
25	119
26	116
27	39
28	36
29	36, 37 & 38
30	40
31	44
32	96 & 100
33	125
34	124
35	158
36	159
37, 38	160

LIVRE PREMIER.

La 39 Proposition se trouve au	164
40 ——————	164
41 ——————	161
43 ——————	130
46 ——————	132
47 ——————	168
48 ——————	168

LIVRE SECOND.

La 1 Proposition se trouve au §.	165
4 ——————	166
7 ——————	167
12 ——————	169
13 ——————	170

LIVRE TROISIÉME.

La 1 Proposition se trouve au §.	79
2 ——————	54
3 ——————	46, 47 & 48
4 ——————	53
5 ——————	148
6 ——————	150
7 ——————	146
8 ——————	145
9 ——————	147
10 ——————	149
11 ——————	152
12 ——————	152
13 ——————	153
14 ——————	58
15 ——————	57
16 ——————	61
17 ——————	75
18 ——————	60
19 ——————	61

L I-

LIVRE TROISIÉME.

La 20 Propoſition ſe trouve au §.	63 & 64
21	65
22	66
23	72
24	73
25	80
26	51
27	67
28	20 & 47
29	51
30	76
31	69—71
32	62 & 68
34	81
35	217
36	218
37	219

LIVRE QUATRIÉME.

Les §. 78, 81, 143 & 144. contiennent la partie la plus eſſentielle de ce Livre qui eſt l'inſcription des Polygones réguliers dans le cercle.

LIVRE CINQUIÉME.

La 1 Propoſition ſe trouve au §.	198
3, 4	190
7, 8, 9, 10	188
11	197
12	198
15	192
16	196

L L

LIVRE SIXIÉME.

La Proposition	se trouve au §.
1	232 & 233
2	121 & 202
3	207
4	202
5	203
6	204
7	205
8	212
9	224
10	224
11	222
12	220
13	221
14	236 & 239
15	237 & 240
16	194
17	195
18	265
19	241
20	242 & 243
21	226
23	230 & 238
24	226
31	244, 261--264
33	255--260

LIVRE ONZIÉME.

La Proposition	se trouve au §.
1	274
2	275 & 281
3	263
4	278
5	272
6	280
7	282
8	280
9	280
10	292

LIVRE ONZIÉME.

La 11 Propofition fe trouve au §.	296
11	297
13	285
14	288
15	292
16	287
17	289 & 290
18	272
19	
20	294
21	295
24	306
25	354
26	301
28	357
29	
30	353
31	
32	354
33	374
34	356
36	258
37	374
38	272
39	359
40	357

LIVRE DOUZIÉME.

La 1 Propofition fe trouve au §.	245
2	246
5	363
6	
7	362
8	374
9	368
10	363

LI-

LIVRE DOUZIÉME.

La 11 Propofition fe trouve au §. 354
12 ———————— 374
13 ———————— 356
14 ———————— 355
15 ———————— 356 & 368
18 ———————— 374

EXPLICATION DES SIGNES

dont on s'eſt ſervi dans cet Ouvrage.

$=$ Signific le mot *égal.*
$+$ ———————— *plus.* Par Exemple $3 + 4 = 7$ déſigne que la ſomme de 3 plus 4 eſt égale à 7.
$-$ ———————— moins: ainſi $14-12 = 2$, ou 14 moins 12 eſt *égal* au nombre 2.
$\times$ ou ( ) ———— *multiplié*: ainſi $4 \times 3 = 12$ & $(3 + 1)\,3 = 12$, dénote que 4 ou $3 + 1$ étant multiplié par 3 le produit eſt *égal* à 12.
$\frac{4}{5}$ ———————— 4 *diviſé* par 5.
$>$ ———————— *plus grand.* P. Ex. $6 > 3$ ou 6 *plus grand* que 3.
$<$ ———————— *plus petit.* ——— $5 < 7$ ou 5 *plus petit* que 7.
$\triangle$ ———————— *triangle.*
$\odot$ ———————— *cercle.*
$\sim$ ———————— *ſemblable.*
$\perp$ ———————— *perpendiculaire.*
$\forall$ ———————— *angle.*
$\sqrt{}$ ———————— *racine quarrée.*
Pgr. ———————— *Parallelogramme.*
Rgle ———————— *Rectangle.*
Prs. ———————— *Prisme.*

PRINCIPES

DE GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES COMMENÇANS.

Objets de la Géométrie.

§. 1. LA *Géométrie est cette partie des Mathématiques, qui a pour objet, les Grandeurs, connues sous le nom d'étendue.*

L'Etendue peut être considérée.

1. Comme *longueur.*
2. Comme *surface.*
3. Comme *corps* ou *solide.*

§. 2. L'étendue considérée comme longueur, est appellée ligne. *Une ligne est donc une étendue, dans laquelle on ne considére que la longueur, sans avoir égard a sa largeur ou a son épaisseur.*

 Les

Les extrémités d'une ligne ſont appellés des points: Ainſi on definit communement *le point comme une marque ſans parties.*

§. 3. *On conſidère la ſurface, comme ayant de la longueur & de la largeur ſans profondeur.*

§. 4. *Le corps ou le Solide, a trois dimenſions, ſavoir, de la longueur, de la largeur & de la profondeur, ou épaiſſeur.*

§. 5. La conſidération de ſes objets ont donné lieu, a diviſer la Géométrie en trois parties, qui ſont,

La *Longimètrie*, ou l'art de méſurer des lignes ou des longueurs.

La *Planimètrie*, ou la manière de méſurer des ſurfaces.

La *Stéréométrie*, ou la manière de méſurer les corps, ou les ſolides.

PRO-

PROPRIETÉS GÉNÉRALES DES LIGNES.

IL y a deux ſortes de lignes; ſavoir, *des lignes droites & des lignes courbes.*

§. 6. *Une ligne droite eſt celle dont toutes les parties ſont ſituées dans la même poſition ou direction, ſans s'écarter ni a droit ni a gauche;* c'eſt-à-dire, *la ligne droite eſt également ſituée entre ſes extrémités.*

Ainſi la ligne *AB* (Fig. 1.) eſt appellée une ligne droite.

§. 7. *Dans la ligne courbe les parties ſucceſſives ne ſont point dans la même direction.*

Ainſi *EF* & *GH* ne ſont point des lignes droites, mais des lignes courbes.

Les proprietés des lignes droites ſe rapportent aux trois ſuivantes.

§. 8. I. *Toutes les parties d'une ligne droite, ſont dans la même direction, & elle méſure la plus courte diſtance qu'il y a entre deux points.*

II. *Deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite; au lieu qu'on a besoin de plus de deux points pour exprimer le cours d'une ligne courbe.*

III. *Il n'y a qu'une espèce de ligne droite, au lieu qu'il y a une infinité de lignes courbes.*

DES LIGNES PARALLELES ET DES DIFFERENTES SORTES D'ANGLES RECTILIGNES.

§. 9. *Les lignes Paralleles sont celles, qui sont toujours, a la même distance les unes des autres; & qui, quoique prolongées ne se rencontrent jamais.*

Ainsi les droites *AB* & *CD* (Fig. 4.) sont paralleles.

§. 10. *Toutes les fois, que deux lignes droites se rencontrent non directement, elles forment une espace qu'on nomme angle Rectiligne:* & qui reçoit différens noms, selon qu'il est plus ou moins ouvert: c'est-à-dire, selon que l'inclinaison de ces lignes est plus ou moins grande.

§. 11. *Une ligne Perpendiculaire est celle, qui tombant sur une autre droite, ne panche pas plus d'un côté que de l'autre:* ainsi *FH* sera perpendiculaire sur *EG*, (Fig. 5)

§. 12. *L'espace indéfinie HFG ou HFE formée ou comprise entre les lignes FH, FG, ou FH, EF est nommée un angle droit.*

§. 13. *Un angle obtus KLM est plus ouvert, qu'un angle droit Z LM* (Fig. 8.)

 §. 14.

§. 14. *Un angle aigu KLN est moins ouvert, qu'un angle droit Z LN* (Fig. 7.)

Il n'y a qu'un espèce d'angles droits qui sont tous égaux, mais il y a un nombre indefini d'angles obtus & d'angles aigus, de grandeur différente.

Il faut bien rémarquer, que la longueur des côtés ou des Jambes d'un angle ne fait rien a sa grandeur; mais que c'est du plus ou du moins d'inclinaison mutuelle de ces Jambes, que depend la grandeur de l'angle.

Par Exemple, les angles dont nous venons de parler resteront inégaux, quel que soit la longueur des lignes dont ils sont composés.

DES-

DESCRIPTION DU CERCLE, ET SON USAGE A MESURER DES ANGLES RECTILIGNES.

§. 15. *Un cercle est une figure plane terminée par une ligne courbe, nommée circonférence; au milieu de laquelle il y a un point, dont toutes les lignes tirées jusques a la circonférence sont également longues.* (Fig. 9 & 10.)

§. 16. On nomme les lignes *CA*, *AD*, *AF* &c. *des rayons*, & les lignes *FAB* & *HAb* sont *des Diamètres.*

En décrivant un cercle sur une ligne droite *AB* on peut rémarquer, qu'a mésure qu'on avance du point *B* pour monter vers *H*, l'arç *BCH* accroit ou devient plus grand, & que l'angle aigu *CAB* augmente ou devient aussi plus grand, de manière que l'arc *HCB* mésure ou soustant l'angle droit *HAB*: & l'arc *KHB* mésure ou soustant l'angle obtus *KAB*: or comme la même chose aura lieu quelque grand ou petit, que l'on suppose le rayon avec lequel le cercle aura été decrit, on peut dire en général que la circonférence du cercle doit servir de mésure a l'angle réctiligne.

Cette considération donne lieu a la résolution du Problême suivant.

§. 17. PROBLEME. *Mésurer la grandeur des angles différens EAF, KCL & MDN & GBH.* (Fig. 11.)

SOLUTION Décrivez du sommet de chacun des angles donnés, un arc de cercle avec la même ouverture du compas: c'est-à-dire, décrivez du sommet *A* comme centre, l'arc de cercle *ab*; du sommet *B* l'arc, *cd*; du sommet *C* l'arc *ef*, & du sommet *D* l'arc *gh*. Ceci fait, on trouvera que ∀ *EAF* est le plus petit ou le moins ouvert des angles donnés, parceque l'arc *ab* est le plus petit: au contraire l'∀ *KCL* est le plus grand de tous. *L'*∀ *GBH* est plus grand que ∀ *EAF* & plus petit que *MDN*; & *MDN*, plus petit que *KCL*.

DE

DE LA MÉSURE DES ANGLES RECTILIGNES.

§. 18. POur mésurer avec facilité la grandeur d'un angle, on a divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales qu'on nomme dégrés: chacun de ces degrés en soixante parties égales qu'on nomme minutes, &c. (*a*)

§. 19. *Les arcs, qu'on décrit d'un même centre avec des rayons inégaux font chacun une même partie de leurs cercles différents*, par exemple, l'arc *bc* est une même partie de son cercle que les arcs, *BC* & *bc* le sont de leurs cercles. (Fig. 12.)

Les principes, dont on fait usage dans la mésure des angles peuvent se rapporter aux suivants.

§. 20. I. *Les angles égaux sont mesurés par des arcs égaux: & réciproquement, les arcs égaux sont mésurés par des angles égaux.*

§ 21. II. *Quand on connoît la grandeur de l'angle, on*

(*a*) Pour éviter d'écrire le mot Dégré, a la suite du nombre qui désigne la grandeur d'un angle; on a coûtume de mettre un Zero a la suite de ce nombre. Ainsi pour écrire 360 dégrés on mettra 360°, Au lieu du mot *égal* on écrit le signe = ainsi pour exprimer *qu'un angle est égal à 60 dégrés* on écrira = 60°

on sçait quel arc de cercle on peut placer entre ses jambes.

§. 22. III. *La mésure d'un angle droit est* 90°; *celle d'un angle obtus, est plus grand* 90°, *& celle d'un angle aigu est moins de* 90°.

§. 23. IV. *Toute la circonference du cercle occupe ou mésure quatre angles droits.* (Fig. 15.)

§. 24. V. *La Mésure de tous les angles qu'on peut faire sur une surface plane par le moyen de deux ou plusieurs lignes autour d'un même point, est de* 360°.

§. 25. VI. *Quand une ligne droite CF ou CE* (Fig. 17.) *tombe sur une autre droite AB; la somme des deux angles ACF + FCB ou bien ∀ ACE + ∀ ECB est égale a* 180° *ou forme deux angles droits.*

En décrivant du point C un demi cercle sur la ligne *AB*, la propofition devient évidente, par ce que nous avons dit précédemment, au §. 18.

§. 26. VII. On peut encore démontrer par le même raisonnement, *que toutes les fois que deux lignes droites AC & CB en rencontrent un autre CF ou CE, de manière que la somme des deux angles ACF + FCB ou ACE + ECB forment un demi cercle ou* 180°: *les deux lignes AC & CB font une même droite ACB, ou sont situées dans la même direction AB.*

§. 27. VIII. *Quand deux lignes AB, DE se coupent, les angles opposez au sommet sont égaux:* c'est-à-dire ∀ *x* = ∀ *y* & ∀ *r* = ∀ *s* (Fig. 18.)

D'é-

Décrivez du sommet C, comme centre (avec un ouverture de compas a volonté) un arc de çercle *mnop*.

Nous venons de faire voir au § 25. que la somme des deux angles x & r, mésurés par le demi cercle *mno*, font deux angles droits ou 180°.

Ainsi $\forall\ x + r = 180^\circ$.

De même l'arc *nop* étant aussi un demi cercle, la somme des angles $r + y$ fait de même deux angles droits ou 180°.

Ainsi $\forall\ r + y = 180^\circ$.

Or c'est un principe reçu en Mathématiques *que deux Grandeurs ou deux quantités égales a une même troisième sont égales entr'elles.*

Ainsi $\forall\ x + r = \forall\ r + y$

De même, *lorsque de deux Grandeurs égales on retranche les mêmes parties, les restes seront égaux.*

Si donc on retranche de $\forall\ x + r = \forall\ r + y$

de part & d'autre $\forall\ r = \forall\ r$

Il restera $\forall\ x = \forall\ y$.

Pour démontrer que l'angle r est égal $\forall\ s$ il faut considérer, que $\forall\ s + y$ pris ensemble sont aussi égaux a 180°; c'est-à-dire $\forall\ s + y = 180^\circ$.

par conséquent $\forall\ x + r = \forall\ s + y$

En retranchant $\forall\ x = y$

Il restera $\forall\ r = \forall\ s$.

§. 28. PROBLEME I. *Faire sur une ligne donnée AB* (Fig. 16) *un angle CAB ou y, égal a un angle donné FEG ou x.*

SOLUTION Décrivez du point E, un arc fg.

Décrivez du point A avec une même ouverture de de compas, un arc indefini *nce*, qui coupe la ligne *AB* au point *c*. Coupez de *nce* un arc *ec* égal a l'arc *fg*.

Tirez par les points *A* & *C*, la droite *AC* qui formera avec la donnée *AB* un angle *y*, égal a l'angle donné *FEG* ou *x*.

§. 29 PROBLÈME II. *Connoissant la grandeur de l'angle DCB* (Fig. 19); *déterminer la grandeur de l'angle adjacent DCA ou x*; c'est-à-dire, si l'∀ *DCB* est = 74°. combien sera la valeur de l'angle *x* ou *ACD*.

SOLUTION. La somme des deux angles

$$ACD + DCB = 180^\circ \ (\S\ 25)$$

& l'angle $DCB = 74^\circ$

retranchant ces valeurs égales de part & d'autre, il restera ∀ $ACD = 106^\circ$

§. 30. PROBLEME III. *Etant donné un des angles verticaux de deux lignes, qui s'entre coupent; déterminer la valeur de trois autres angles*; c'est-à-dire (Fig. 20.) *supposant que* ∀ *AFB* = 24° *trouver les trois autres* x, y & z.

SOLUTION, selon le § 27. l'∀ $x = 24^\circ$.

Comme étant opposé au sommet a l'angle donné.

Le §. 25. donne ∀ $24^\circ + y = 180^\circ$.

par conséquent ∀ $y = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ$.

Mais ∀ y = ∀ z, (§ 27.) par conséquent ∀ z sera aussi = 156°.

PRO-

PROPRIÉTÉS DES LIGNES PARALLELES ET DES PERPENDICULAIRES EU EGARD A DES LIGNES OBLIQUES.

§. 31. Nous avons dit au §. 9. qu'on *nomme lignes Paralleles des lignes, qui, quoique prolongées de part & d'autre ne se rencontrent jamais.* Nous alons faire voir qu'elles sont les propriétés de ces lignes.

De toutes les lignes Ac, Ab, AE, AC (Fig. 21.) *qu'on peut tirer d'un point A entre deux paralleles EB, KL; la Perpendiculaire AC est la plus petite ou la plus courte, & toutes les fois qu'on doit mésurer l'espace qu'il y a, entre deux paralleles EB & KL on doit le faire au moyen d'une perpendiculaire AC tirée èntre ces lignes.*

Ce qui est évident par l'inspection de la figure 21, dans la quelle les lignes *AD Ad, Af, Ag, AC* sont également longues.

§. 32. *Les Perpendiculaires MN, OP* (Fig. 24.) *tirées entre deux Paralleles EB, KL sont également longues; & réciproquement si des Perpendiculaires MN & OP tirées entre deux lignes EB, KL sont égales; ces lignes EB, KL seront Paralleles.*

Ces vérités sont une suite du §. 31.

§. 33. *D'un même point A ou D* (Fig. 22.) *situé dans*

dans une Perpendiculaire ACD, on ne peut tirer que deux lignes égales AF, AH ou DH, DF a deux points F & H équidistants dans la ligne Horizontale KL; c'est-à-dire, *toutes les fois que FC est égale a CH, la ligne oblique FA ou FD sera égale a AH ou DH.*

Cette proposition est encore une suite du §. 31. car si la ligne *AC* est la plus courte, qu'on peut mener d'un point *A* a une ligne *KL* (voyez Fig. 25.) toute ligne *AF* & *AH* tirée du même point *A* de-part & d'autre sur *KL* seront d'autant plus courtes ou plus longues qu'elles s'approchent on s'éloignent du point *C*. Par conséquent elles devront être également grandes a égales distances.

§. 34. *Une ligne droite sera donc Perpendiculaire sur une autre KL; toutes les fois que deux points A & C pris dans la Perpendiculaire AC sont équidistants a deux points F & H situées dans la base KL*; c'est-à-dire, *AC sera Perpendiculaire sur KL toutes les fois que FC = CH & AF = FH ou FD = DH* (Fig. 22 & 25)

§. 35. Remarque. Il est aisé de voir, que les deux angles aigus, formés au point *A* ou au point *D* (Fig. 22) par la Perpendiculaire *AC* & les lignes obliques *AF*, *AH* doivent-être égaux entre eux: c'est-à-dire, que ∀ *FAC* = ∀ *CAH* & ∀ *FDC* = ∀ *CDH* parcequ'il diminuent ou augmentent également, a mésure que les points *A* ou *D* pris dans la Perpendiculaire *AC* sont plus près ou plus éloignés de la base *KL*.

§. 36

§. 36 *Quand deux lignes Paralleles EBKL*, (Fig. 23.) *ſont coupées par une ligne oblique AD, l'angle interne p ſera égal a l'angle externe o qui lui eſt oppoſé*; parce-que l'oblique *AD* ayant la même inclinaiſon par rapport a ces deux lignes, doit auſſi les rencontrer de la même manière: c'eſt-à-dire que ſi l'on ſuppoſoit que l'inferieure *KL* fut approchée de la ſuperieure *EB* ſans changer de direction, ces deux lignes en ſe rapprochant ſe toucheroient en toutes leurs longueurs & l'angle *o* tomberoit ſur l'angle *p*.

§. 37. *Quand deux lignes Paralleles EB, KL* (Fig, 28.) *ſont coupées par une autre ligne CD; les angles alternes ſont égaux.* ' C'eſt-à-dire $\forall\, p = \forall\, s = \forall\, o = \forall\, r$ & $\forall\, m = \forall\, n = \forall\, z = \forall\, x$.

Nous avons démontré tantôt que $\forall\, o = \forall\, p$, & au §. 27. que $\forall\, o = \forall\, r$ & $\forall\, s = \forall\, r$. Nous pouvons donc conclure que $\forall\, o = \forall\, p = \forall\, s = \forall\, r$.

§. 38. *Dans deux lignes Paralleles EB, KL* (Fig. 28) *qui ſont coupées par une même ligne CD, les angles externes ou internes priſes du même côté de la ligne CD, ſont égaux a* 180° *ou deux angles droits*: c'eſt-à-dire $\forall\, p + z = 180^o = 2 \llcorner$ & $\forall\, n + r = 180^o = 2 \llcorner$.

Au §. 25 nous avons démontré que $\forall\, p + n = 180^o$
& au §. 27. que $\forall\, r = p$

Subſtituant $\forall\, r$ a la place de $\forall\, p$, on obtient $\forall\, r + n = 180^o = 2 \llcorner$.

§. 39. *Quand une ligne CD* (Fig. 29.) *coupe deux li-*

lignes EB, KL & qu'on trouve que les angles alternes o & p sont égaux entre eux, la ligne EB sera Parallele a la ligne KL.

Car selon le §. 27. l'∀ p = ∀ r
& l'on suppose que ∀ p = ∀ o
d'ou nous concluons que ∀ r = ∀ o (*)
& que par consequent, la ligne *EB* est Parallele à la ligne *KL* §. 36.

§. 40. *Les lignes CD, EF* (Fig. 30.) *qui sont Paralleles a une même ligne AB, sont aussi Paralleles entr'elles;* c'est-à-dire, si *AB* est Parallele à *CD* & à *EF*; la droite *CD* sera aussi Parallele a *EF*.

Pour le démontrer, tirez une ligne oblique *GH*, qui coupe les trois lignes *AB*, *CD* & *EF*.

Puisque l'on suppose, que *AB* est Parallele a *CD* ∀ o sera = ∀ p (§. 36.)

Mais parceque *AB* est aussi Parallele a *EF*, l'∀ o sera = ∀ r; (§. 37.) de même puisque l'∀ o = ∀ p & ∀ o = ∀ r, il s'ensuit que ∀ p = ∀ r & la ligne *CD* Parallele à la ligne *EF* (§. 39)

(*) Parceque deux grandeurs égales a une même troisième sont égales entr'elles.

PROBLÉMES RÉLATIFS A L'ÉLEVATION DES PERPENDICULAIRES &c.

§. 41. **P**ROBLÉME I. *D'un point donné dans une ligne indefinie* AB *élever une Perpendiculaire* CD (Fig. 31)

SOLUTION. Prenez dans la ligne *AB* de part & d'autre du point *C*, des diſtances égales *EC* & *CF*: c'eſt-à-dire: prenez *EC* a volonté & rendez *CF* = *CE*.

Décrivez des points *E* & *F* avec la même ouverture de compas deux arcs de Cercle qui ſe coupent en *D*.

Tirez du point *D* au point *C* la ligne *DC*, qui ſera Perpendiculaire ſur *AB*, ſelon le §. 34.

§. 42. PROBLÉME II. *Tirer du point* C *donné une Perpendiculaire* CG *ſur* AB (Fig. 32.)

SOLUTION. Décrivez du point donné *C*, un arc de cercle, qui coupe la ligne *AB* en deux points *E* & *F*.

Décrivez de ces points *E* & *F*, deux arcs de cercle, qui ſe coupent dans un point *D* plus haut ou plus bas que le point donné *C*.

Tirez par ces points *C* & *D* une ligne droite *CDG* jusqu'a la ligne *AB*; cette droite ſera la Perpendiculaire cherchée, ſelon le §. 34.

§. 43. PROBLÉME III. *Diviser une ligne droite terminée* AB *en deux parties égales* AC, CB, (Fig. 33.)

SOLUTION. Décrivez des extrémités *A* & *B* de la ligne donnée & avec des rayons égaux, deux arcs de cercle qui se coupent en *D* & *E*.

Tirez la ligne *DE*, qui coupera la ligne *AB* en deux parties égales en C, selon le §. 34.

§ 44. PROBLÉME IV. *Tirer par un point donné E* (Fig. 34.) *une ligne AB Parallele a une ligne donnée CD.*

On peut résoudre ce Probléme des deux maniéres suivantes.

PREMIÉRE SOLUTION. Tirez par le point donné *E* une ligne *EF* perpendiculaire sur *CD*, par le §. 42.

Prenez un autre point *H* dans la même ligne *CD*, & élevez y une seconde perpendiculaire indefinie *GH*, par le §. 41.

Coupez de la ligne indeterminée *GH*, une partie égale à *EF*.

Tirez par les points *G* & *H*, une ligne *AB* qui sera parallele à *CD*, par le §. 32.

SECONDE SOLUTION. Prénez sur la ligne donnée *CD*, un point *F* à volonté (Fig. 35.)

TI-

Tirez du point *E* jusques en *F* une ligne droite *EF* qui forme un angle *r* avec la ligne donnée *CD*.

Faites au poiut *F* un angle o égal à ∀ *r*. (§. 28.)

Prolongez *EB* jusques en *A* & la ligne *AB* sera parallele à la ligne donnée *CD*, par le §. 39.

DE QUELQUES PROPRIÉTES DU CERCLE RELATIVEMENT A DES LIGNES DROITES TIRÉES AU DEDANS ET AU DEHORS DE CETTE FIGURE.

I. *Des cordes & des Tangentes.*

§. 45. *Toute ligne droite AB (Fig. 36.) tirée dans le cercle & terminée de part & d'autre a la circonference se nomme* une corde; *& la ligne EG qui passe par le centre est appellée* Diamètre.

Quand on tire par le milieu *F* d'une corde *AB*, une ligne *MFC* jusque dans le centre, & que de plus on tire les rayons *AC*, *CB* & les cordes *AM*, *MB* les propriétés suivantes auront lieu.

§. 46. I. *La ligne CF sera Perpendiculaire sur la corde AB.*

§. 47. II. *La corde AM sera égale a la corde MB.*

§. 48. III. *L'arc de cercle AnM sera égale a l'arc MmB.*

La ligne *MFC* étant tirée par le centre *C* & par le milieu de la ligne *AB*; il s'ensuit, que $AF = FB$ & $AC = CB$, par conséquent les deux points *C* & *F* de la ligne *CM* sont a la même distance de deux points de la ligne *AB*: d'où il suit, que la ligne *CM* est Perpendiculaire sur la corde *AB* (§. 34.)

Si

Si donc la ligne *CM* eſt Perpendiculaire ſur la ligne *AB* & *AF* = *FB*, le point *M* doit-être a la même diſtance des deux points *A* & *B*: c'eſt-à-dire la corde *AM* eſt égale a la corde *MB*: & comme on a démontré (§. 35.) que lorſque *FC* eſt Perpendiculaire ſur *AB*; l'∀ o ſera = ∀ *p* & que les angles égaux ſont ſouſtendus par des arcs égaux (§. 20.) il s'enſuit que l'arc *A n M* = l'arc *M m B*.

§. 49. I. *Il ſuit de la, que toutes les fois qu'on tire du centre d'un cercle, une Perpendiculaire ſur une corde, cette Perpendiculaire diviſera la corde en deux parties égales.*

§. 50. II. *Quand on diviſe un angle placé dans le centre d'un cercle en deux parties égales, cette ligne diviſera auſſi l'arc ſouſtendu en deux également.*

§. 51. III. *Dans un même cercle des arcs égaux ſouſtendent des cordes égales.*

§. 52. IV. *La ligne FC qui eſt Perpendiculaire ſur le milieu de la corde AB, étant prolongée paſſera par le centre.*

§. 53. *Les parties AM, MG & FM, MH de deux cordes AG & FH* (Fig 37.) *qui ſe coupent dans un cercle, ſont inégaux;* c'eſt-à-dire, *il n'eſt pas poſſible qu'il ſe coupent en deux parties égales.*

Car ſi cela étoit, la ligne *LM* dévroit être Perpendiculaire ſur *AG* & ſur *FH*; ſelon le §. 46. ce qui n'eſt pas poſſible.

§. 54. *Si l'on prend sur la circonference du cercle, deux points A & B, & qu'on les joint par une ligne droite AB cette ligne droite sera entiérement dans le cercle* (Fig. 38.)

La ligne la plus longue qu'on peut tirer du centre jusqu'à la circonference, étant le rayon.

Il s'ensuit que les deux rayons *CA*, *CB* tirez aux extrêmités de la corde *AB*, doivent-être plus longues, que les droites *CN* ou *CF*.

D'ou il paroît, que toutes les parties de la ligne *AB* tombent dans le cercle.

§. 55. *Si dans un cercle on tire une corde AB* (Fig. 39) *Parallele au diamètre EG, les arcs AE, GB compris entre ces lignes seront égaux.*

Tirez du centre *C* le rayon *CF* Perpendiculaire sur *AB*; ainsi que les rayons *AC*, *CB*.

Comme *CF* est Perpendiculaire sur *AB*, elle la sera aussi sur *EG* (§. 38.)

Par conséquent $\forall\, o + r = \forall\, p + n = \llcorner$ (§. 22)

Retranchant $\forall\, o = \forall\, p$ (§. 35.)

Il restera $\forall\, r = \forall\, n$.

D'ou il paroît que l'arc *EA* est égal a l'arc *GB* (§. 20.)

§. 56. I. *Il suit de ce que nous venons de dire: que les cordes Paralleles interceptent des arcs égaux*: c'est-à-dire (Fig. 40.) que l'arc *KE* étant = a l'arc *LG* l'arc *AE* = *GB* & l'arc *EAG* = l'arc *HMG*. Il s'ensuit, que l'arc *AG* = *HB*, l'arc *GAEK* = *HBGL*.

§. 57.

§. 57. II. *A mésure que la corde KL ou GH est plus petite que le diamètre EG, elle se trouve plus éloignée du centre:* c'est-à-dire, que de deux cordes inégales tirées dans le même cercle, la plus courte sera plus éloignée du centre que celle qui est plus longue & qui se trouvera plus près du diamètre.

§. 58. III. *Les cordes égales AB, DE* (Fig. 41.) *sont également éloignées du centre:* c'est-à-dire, *que toutes les fois que la corde AB est égale a la corde DE la Perpendiculaire CF sera égale a la Perpendiculaire CG. Et réciproquement la corde AB sera égale a la corde DE, toutes les fois que la* $\perp$ *CF est* $=$ $\perp$ *CG.*

§. 59. *On nomme tangente d'un cercle, la droite RS,* (Fig. 42.) *qui touche le cercle dans un point M sans le couper.*

§. 60. *Le Rayon CM tiré du centre C au point de contact M d'une tangente, sera Perpendiculaire sur cette tangente* (Fig. 42.)

Nous avons démontré au §. 31. que de toutes les lignes *CM*, *CK*, qu'on peut tirer d'un point C, sur une droite *RS*; la Perpendiculaire est la plus courte.

Or le rayon *CM* est moins long que les lignes *CK* &c. parceque les points *K* pris dans la droite *RS* tombent hors du cercle selon §. 59. précédent. Par conséquent le rayon *CM* sera Perpendiculaire sur la tangente *RS*.

§. 61. Il suit de la, *que la Perpendiculaire MC tirée du point de contact, passera par le centre du cercle.*

II. DES ANGLES FORMÉS A LA CIRCONFERENCE DU CERCLE.

§. 62. *L'angle BAD* (Fig. 45.) *formé par la tangente AD & par la corde AB est mésuré par la moitié de l'arç soustendu AHB:* c'est-à-dire, *la mésure de l'angle a, est la moitié de l'arc AHB.*

Tirez par le centre *C*, une ligne *GCF* Parallele à *AB*. §. 44.

Tirez aussi *CKH* Perpendiculaire sur *AB* & le diamétre *ACL*.

Puisque *CH* est ⊥ sur *AB* elle sera aussi Perpendiculaire sur la ligne Parallele *GF*, (§. 37.) & par conséquent $\forall\ n = c + d = 90°$ & $\forall\ b = \forall\ c$. (§. 38.)

AD étant une tangente ;& *AC* un rayon, l'$\forall\ a + b = 90°$ (§. 60) par conséquent $\forall\ c + d = \forall\ a + b$. Et comme $\forall\ c = \forall\ b$, si l'on rétranche d'un côté $\forall\ c$ & de l'autre son égal $\forall\ b$, le reste, savoir $\forall\ d$ sera $= \forall\ a$.

Or comme l'angle *d* est mésuré par l'arc *AH* qui est la moitié de l'arc *AB* (§. 48.) Il s'ensuit que $\forall\ a$ ou $\forall$ *BAD* sera aussi mésuré par la moitié de l'arc *AHB*.

Pour démontrer que l'angle obtus *EAB* est mésuré par la moitié de l'arc *AFLB*, on doit considérer que $\forall$ *EAL* est un angle droit, & l'arc *AFL* un demi cercle, & puisqu'on a démontré (§. 22.) que

que la mésure d'un angle droit est la moitié d'un demi cercle; l'∀ *EAL* sera mésuré par la moitié du demi cercle *AFL*.

Or il est démontré que ∀ b = ∀ c, l'arc *FA* = l'arc *LG* = l'arc *GB*; & que l'arc *FA* est la mésure de ∀ c (§. 19 & 55.)

Par conséquent l'∀ *EAL* + b sera mésuré par l'arc *AFLGB*: c'est-à-dire, que l'angle obtus *EAB* a pour mésure la moitié de l'arc *AFB*.

§. 63. *L'angle BAC* (Fig 46.) *formé par deux cordes AB, AC qui se rencontrent a la circonférence d'un cercle, est mésuré par la moitié de l'arc BC compris entre les jambes AB, AC.*

Tirez du point *A*, la tangente *GD*.

Nous avons démontré (§. 62.) que ∀ *BAD* est mésuré par le demi arc *BCA*.

C'est-à-dire, la mésure de ∀ $a + b$ = ½ arc *BCA*.
la mésure de ∀ b = ½ arc *CA*.

Si donc on rétranche de la valeur supérieure, la valeur inférieure, on trouvera que la mésure de l'∀ $a + b - b$ = ½ arc *BCA* — ½ arc *CA*.

C'est-à-dire, la mésure de l'∀ a = ½ arc *BC*.

§. 64. *L'angle BFC dont le sommet est placé au centre & dont les jambes passent par les mêmes points A & B avec ceux de l'angle CAB, dont le sommet est a la circonférence, sera le double de cet angle*: c'est-à-dire, *quand sur un même arc BC un angle CAB est posé a la circonférence, & un autre CFB, dans le centre; le dernier sera le double du premier, ou bien* ∀ F = 2 ∀ a.

Nous avons démontré (§. 22.) que la mésure de l'angle posé dans le centre, est égal a l'arc total *BC*, & que la mésure de l'∀ *a* est la moitié de cet arc (§. 63.)

Par conséquent ∀ *F* sera = 2 ∀ *a*.

§. 65. *Tous les angles a, b, c, d, e,* (Fig. 47.) *formés a la circonférence d'un même cercle & soustendus par le même arc GKH, sont égaux entr'eux.*

C'est à-dire, ∀ *a* = ∀ *b* = ∀ *c* = ∀ *d* = ∀ *e*.

Puisque chacun de ces angles est mésuré par la moitié du même arc *GKH*; tous ces angles seront aussi égaux entr'eux. (§. 63.)

§. 66 *Quand quatre points A, B, C & D, pris sur la circonférence d'un cercle, sont joints par quatre lignes droites AB, BC, CD & DA; la somme des deux angles opposés sera égale a deux angles droits ou a 180°.* (Fig. 49.)

C'est-à-dire, ∀ *A* + *C* = 180° & ∀ *B* + *D* = 180°.

L'angle *A* est mésuré par la moitié de l'arc *DCB*

L'angle *C* est mésuré par la moitié de l'arc *DAB* (§ 63.) par conséquent les mésures des angles *A* & *C* pris ensemble formeront la moitié de toute la circonférence & seront égaux a la moitié de 360° ou a 180°.

On peut démontrer de même, que ∀ *D* + *B* = 180.

§. 67. *Dans des cercles égaux: les angles égaux, tant ceux au centre que ceux a la circonférence sont soustendus par des arcs égaux.*

§. 68. *L'angle BAD* (Fig. 48.) *formé par la tan-*

gen-

gente ED & par la corde AB, est égal à l'angle AFB, situé dans le segment de cercle opposé: c'est-à-dire, $\forall x = \forall y$.

Ceci est une suite des principes démontrés dans les §. 62 & 63.

§. 69. I. *L'angle BAC* (Fig. 50.) *placé a la circonférence d'un cercle & soustendu, par le demi cercle BMC, est un angle droit.*

§. 70. II. *L'angle EDF* (Fig. 51.) *soustendu par un arc ENF, plus petit qu'un demi cercle; est aigu.*

§. 71. III. *L'angle HGK* (Fig. 52.) *soustendu par un arc HPK, plus grand qu'un demi cercle; est obtus.*

Ces trois principes sont une suite du §. 63. ou l'on a démontré que l'angle a la circonférence est mésuré par la moitié de l'arc soustendu.

§. 72. *Des segmens de cercle sont semblables, lorsqu'ils sont une même partie de leur cercle:* c'est à-dire, deux demi, ou deux quarts de cercle, sont semblables, parcequ'ils sont une même partie de leurs cercles respectifs.

§. 73. Il suit de cette definition. *Que lorsque les cordes qui soustendent des segmens de cercles semblables, sont égales; ces segmens seront aussi également grands,*

APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DU CERCLE DANS LA RESOLUTION DES PROBLEMES.

§. 74. PROBLÉME I. *Tirer une tangente a un point donné A sur la circonference d'un cercle* [Fig. 58.]

SOLUTION. Tirez par le point donné *A* & par le centre *C* du cercle un rayon *BAC.*

Elévez au point *A* la Perpendiculaire *AD*, (§. 41.) qui sera la tangente demandée, selon le §. 61.

§. 75. PROBLÉME II. *Par un point donné B située au dehors de la circonference du cercle, tirer une tangente BD a cette figure* [Fig. 59.]

SOLUTION, joignez le point *B* avec le centre C, par la ligne *CB.*

Décrivez sur *CB* comme diamètre, un demi cercle *BDC* qui coupera le cercle en un point *D.*

Tirez par les points *B* & *D* une ligne droite *BD*, qui sera la tangente demandée.

Car, puisque *BCD* est un demi cercle & ∀ *x* un angle droit (§. 69) la droite *AD* sera tangente, (§. 60.)

§. 76, PROBLÉME III. *Diviser un arc donné EF en deux parties égales.* [Fig. 60.]

SOLUTION. Tirez par les extrémités *E* & *F* de l'arc donné, une ligne *EF.*

Di-

Divisez cette ligne *EF* en deux parties égales (§. 43.) Elévez au point *H*, une ligne *HI*, Perpendiculaire sur *EF*; qui divisera l'arc en deux parties égales, selon les §. 41 & 43.

§. 77. PROBLÉME IV. *Diviser un angle donné ACB en deux parties égales par une ligne* CD [Fig. 61.]

SOLUTION. Posez un des jambes du compas dans le sommet *C*, & décrivez avec l'autre, un arc *FEG*, qui coupe les deux lignes *AC*, *CB* en *F* & en *G*.

Divisez l'arc *FEG* en deux parties égales par le §. précédent.

Tirez par les points C & *E*, une ligne *DC*, qui coupera l'angle *ACB* en deux parties égales *x* & *y*. (§. 22.)

§ 78. PROBLÉME V. *Faire passer la circonférence d'un cercle par trois points A, B & C;* c'est-à-dire, *trouver un point K qui soit placé a l'égard des trois points A, B & C, de telle manière que la circonférence du cercle décrit avec le rayon AK & du centre K, passe aussi par les deux points B & C.* (Fig. 62.)

SOLUTION. Joignez les points *A*, *B* & *C* par deux lignes *AB*, *BC*.

Divisez les lignes *AB*, *BC* en deux parties égales aux points *D* & *F* [§. 43.]

Elévez sur *D*, une Perpendiculaire *DE*, & sur *F* une Perpendiculaire *FG* qui se couperont en *K* (§. 41.)

Dé-

Décrivez du point *K*, comme centre, & avec le rayon *KA* un cercle, qui passera par les points *B* & C.

§. 79. PROBLÉME VI. *Trouver le centre* C *d'un cercle* [Fig. 63.] *dont la circonférence est donnée.*

SOLUTION. Prenez deux points *A* & *B* sur la circonférence donnée & joignez les par une ligne *BA*.

Divisez cette corde en deux parties égales en *D* (§. 43.)

Tirez par le point *D*, une Perpendiculaire *EC* & prolongez la jusques a la circonférence en *F* (§. 41.)

Divisez cette ligne *EF* en deux parties égales en *C*, (§. 43.) Le point *C* sera le centre demandé.

§. 80. PROBLÉME VII. *Achéver la circonférence d'un cercle. dont l'arc ABC est donné* [Fig. 64.]

SOLUTION, Prenez trois points *A*, *B* & *C* sur l'arc donné. Joignez les par deux droites *AB*, *BC*, & achévez le reste selon le *Probléme* V.

§. 81. PROBLÉME VIII. *Couper d'un cercle donné une partie BAF, dont l'angle a la circonférence soit égal a un angle donné N.* (Fig. 48.)

SOLUTION. Tirez la Tangente *ED*. (§. 74.) Faites au point *A*, un angle *x* égal a l'angle donné *N* (§. 28.) & prolongez la jambe *AB* jusques a la circonférence en *B*; le segment de cercle *AFB* sera le démandé, selon le §. 68.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES
DES
FIGURES RECTILIGNES.

I. *Définitions des figures a trois & quatre côtés.*

§. 82. *Toutes les fois que des lignes enferment de toute part un espace, cet espace est appellé une figure.*

Si les lignes (qui se nomment alors des côtés de la figure) sont droites, elle est appellée *figure Rectiligne.*

Ces figures rectilignes ont des noms différens.

On nomme *Triangle* la figure qui a trois côtés.

On nomme *Quadrilatère* une figure qui a quatre côtés.

Les figures terminées par plus que quatre lignes, sont nommées des *Polygones.*

On distingue trois sortes de triangles rélativement aux côtés dont ils sont composés, & trois eu égard aux angles.

§. 83.

§. 83. *Un triangle équilateral ABC est celui dont les trois côtés sont égaux:* c'est-a-dire le $\triangle$ *ABC* est équilateral toutes les fois que $AB = BC = CA$. [Fig. 67.]

§ 84. *Un triangle DEF est Isoscèle lorsque deux de ces côtés sont égaux, mais le troisième plus grand ou plus petit que les deux autres:* c'est-à-dire le $\triangle$ *DEF* est Isoscèle, lorsque $DE = DF$, mais *EF* $>$ ou $<$ que *DE* ou *DF*. (Fig. 68.)

§. 85. *Un triangle Scalène est celui, dont les trois côtés sont inégaux*, comme *GHI*. (Fig. 69. 70 & 71.)

Les noms particuliers, qu'on donne aux triangles par rapport a leurs angles, sont.

§. 86. *Un triangle rectangle est celui, qui a un angle droit L,* (Fig. 70.)

§ 87. *Un triangle obtus angle ou ambligone NOP, est celui qui a un angle obtus N.* (Fig. 71)

§. 88. *Un triangle aigu angle ou oxygone GHI est celui qui a un angle aigu H.* (Fig. 69)

Les figures Quadrilatères sont.

§. 89. *Le quarré ABCD, dont tous les côtés & tous les angles sont égaux* (Fig 72.)

C'est-à-dire, la figure *ABCD*, est un quarré, lorsque $AB = BC = CD = DA$, & $\forall A = \forall B = \forall C = \forall D = \llcorner$.

§. 90. *Un quarré long ou un rectangle EFGH,* *est une figure, dont les côtés ne sont pas égaux, mais dont tous les angles sont droits.* (Fig. 73.)

C'est-à-dire; la figure *EFGH* est rectangle, par ceque ∀ *E* = ∀ *F* = ∀ *G* = ∀ *H* = ∟.

§. 91. *Un Rhombe IKLM, est une figure Quadrilatère qui est équilaterale mais non équiangle* (Fig. 74.)

§. 92. *Un Rhomboïde ou Paralelogramme NOPR est un Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.* (Fig. 75)

Le Quarré, le Rectangle, le Rhombe & le Rhomboïde ayant leur côtés opposés, égaux & parallèles, on les désigne tous par le nom genéral de Parallelo grammes, rectangles ou obliques, selon que leurs angles sont droits ou non.

§. 93 *Un Trapése est un Quadrilatère irrégulier, qui a des côtés & des angles inégaux.* (Fig. 76 & 77.)

§. 94. On range les polygones sous deux classes, savoir.

I°. *Polygones Reguliers*, c'est-à-dire, ceux dont les côtés & les angles sont égaux entr'eux. Voyez les Figures 106. 107 & 108.

II^e^. *Polygones Irréguliers*, c'est-à-dire, ceux dont les côtés & les angles sont inégaux. Voyez Fig. 105.

PRO.

PROPRIETÉS DES
TRIANGLES.

§. 95. I. *Tout triangle ABC* (Fig. 78.) *peut-être inscrit dans le cercle*: c'est-a-dire, *il est possible de circonscrire autour d'un triangle donné une circonférence de cercle, qui passe par les sommets des angles du Triangle.*

Cette propofition eft évidente par le §. 78, ou nous avons donné la méthode de faire paffer la circonférence d'un cercle par trois points donnés.

§. 96. II. *La fomme de tous les angles d'un Triangle est égale à deux angles droits.* (Fig. 78)

C'eft-à-dire, $\forall\, a + b + c = 2 \llcorner = 180^{\circ}$.

Pour le démontrer il faut décrire un cercle *AHBGCF*, autour du triangle donné *ABC.*

Nous avons fait voir au §. 63. que l'angle a la circonférence du cercle eft mefuré par la moitié de l'arc qu'il foutend.

Par conféquent la méfure de $\forall\, a = \frac{1}{2}$ arc *BCG*,
de $\forall\, b = \frac{1}{2}$ arc *AFC*,
de $\forall\, c = \frac{1}{2}$ arc *AHB*,

Or l'arc *BCG*, plus l'arc *AFC*, plus l'arc *AHB* compofent le cercle total ou comprennent 360°.

Ainfi la méfure de $\forall\, a + \forall\, b + \forall\, c$ fera $= 180^{\circ}$.

§. 97. III. *Il fuit de là, que dans un Triangle EFD il ne peut y avoir qu'un angle droit F ou qu'un an-*

gle obtus F, & alors les deux autres angles E & D, seront aigus. (Fig. 79.)

§. 98. IV. *Puisque les trois angles d'un Triangle pris ensemble sont égaux a deux angles droits, il s'ensuit que dans le Triangle rectangle, les deux angles aigus pris ensemble sont égaux a un angle droit.*

§. 99. V. *Quand les deux angles d'un Triangle pris ensemble sont moins que 90°, le troisième angle sera obtus: puis qu'il est égal a 180° moins les deux angles aigus.*

Par exemple, lorsque la somme des deux angles aigus est 50° l'angle obtus sera égal a 130°, parceque $50 + 130 = 180°$.

§. 100. VI. *Quand on prolonge un des côtés BC d'un Triangle ABC* (Fig. 80.) *jusqu'en D, l'angle externe ACD sera égal a la somme des deux angles internes opposés a + b.*

Nous avons fait voir dans le §. 25.

que $\forall\ c + x = 180°$.
& au §. 96 que $\forall\ a + b + c = 180°$.
par conséquent $\forall\ c + x = \forall\ a + b + c$.
mais $\forall\ c = \forall\ c$.

ainsi $\forall\ x = \forall\ a + b$.

§. 101. VII. *Il suit de là, que l'angle exterieur x d'un triangle ABC est toujours plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.*

C'est-à-dire $\forall\ x > \forall\ a$ ou $\forall\ b$.

§. 102. VIII. *La somme de deux angles d'un triangle est toujours moindre que 180° ou 2* ∟.

C'est-

C'est-à-dire, $\forall a + b$ ou $\forall a + c$ ou $\forall b + c$ sont moindre que 180°.

§. 103. IX. *Quand on connoît la grandeur de deux angles d'un triangle, on pourra aussi calculer le troisième angle.*

Par exemple si $\forall a = 60°$ & $\forall b = 55°$. alors $\forall c = 65°$ parceque $\forall c = 180° - \forall a - \forall b = 180° - 55° - 60°$.

Ou $\forall c = 180° - 115° = 65°$.

§. 104. X. *Les deux côtés d'un triangle pris ensemble sont plus longs que le troisième côté,* (Fig. 81.)

C'est-à-dire: $DE + DF > EF$.

Selon le §. 8. la ligne droite *EF* est la plus courte qu'on peut tirer entre deux points *E* & *F*; ainsi $DE + DF$ doivent-être plus longues que *EF*.

§. 105. XI. *En tout triangle Scalène dont les côtés sont inégaux, le plus grand côté est opposé au plus grand angle & le plus petit côté au plus petit angle.* (Fig. 83.)

C'est-à-dire, lorsque dans le triangle *GHI*, le côté *HI* est plus grand que *GI*, alors l'angle *g* sera plus grand que $\forall b$; parceque le plus grand arc soustend le plus grand angle; & le plus petit arc le plus petit angle, selon le §. 57.

§. 106. XII. *Dans le triangle Isoscèle ABC* (Fig. 84.) *les angles opposés a des côtés égaux, sont égaux.*

§. 107. XIII. *Dans le triangle équilateral tous les angles sont égaux entr'eux.* (Fig. 85.)

Pour le démontrer, il faut décrire autour de chaque triangle un cercle selon le §. 78.

Puisque dans la Figure 84. $AB = AC$; l'arc AKB doit-être égal a l'arc ALC.

Par conséquent $\forall\ b = \forall\ c$.

Comme le $\Delta\ DEF$ (Fig. 85.) est équilatéral, les cordes égales DE, EF & DF foustendent des arcs égaux selon le §. 51.

Par conséquent $\forall\ d = \forall\ e = \forall\ f$.

§. 108. XIV. *Si dans un triangle Isoscèle on prolonge les deux cotés égaux AB & AC, jusques en D & en E, les angles x & y au dessous de la base seront aussi égaux entr'eux.* (Fig. 86.)

Nous avons démontré § 25 que $\forall\ b + x = 180^\circ = \forall\ c + \forall\ y$

ainsi $\forall\ b + x = \forall\ c + y$

Si on rétranche de part & d'autre $\forall\ b \quad = \forall\ c$

Il restera $\forall\ x = \forall\ y$

§. 109. XV. *Lorsque l'on connoit un des angles d'un triangle Isoscèle, on peut aussi calculer les deux autres angles.*

Que l'angle au sommet a soit $= 30^\circ$

$\forall\ b + c = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Mais $\forall\ b = \forall\ c$.

Par conséquent chacun est la moitié de 150°

C'est-à-dire $\forall\ b = \forall\ c = 75^\circ$.

§. 110. XVI. *La Perpendiculaire AD tirée du sommet d'un triangle Isoscèle sur la base, divise le triangle & la base en deux parties égales* (Fig. 87.)

C'est-

C'est-à-dire, si AD est perpendiculaire sur CB; alors l'∀ p = ∀ r & DB = DB.

Car si du point A comme centre & du rayon AB on décrit un arc de cercle BGC; l'∀ p sera = ∀ r. (§. 34.) & $BD = DC$. (§. 49.)

§. 111. PROBLÉME I. *Décrire sur une ligne donnée AB un triangle équilateral ABC.* [Fig. 95.]

SOLUTION. Décrivez du point A comme centre, avec le rayon AB, un arc de cercle FCB.

Posez le compas en B & décrivez l'arc de cercle ACG, qui coupera le premier en C.

Tirez les lignes AC & CB, & le triangle ABC sera équilateral, parceque AB est $= BC = CA$. (§. 88.)

§. 112. PROBLÉME II. *Faire un triangle DEF dont les côtés soient égaux a trois lignes données.* (Fig. 81.)

SOLUTION. La solution de ce Problème est la même dans le fond que la précédente.

Par Exemple, pour construire le triangle DEF, le cercle décrit du point D doit avoir pour rayon la ligne DE, & le cercle décrit du point F, pour rayon, la ligne EF.

DE LA COMPARAISON MUTUELLE DES TRIANGLES EGAUX.

Les figures peuvent être comparées de deux manières.

I. Rélativement a la position de leurs côtés & de leurs angles.

II. Rélativement a leurs surfaces, sans avoir égard a l'égalité des angles ou des côtés.

Nous traiterons ici, de la prémiere manière de comparer, en nous réservant de parler de la seconde, lorsque nous considérerons les figures rélativement a leurs surfaces.

§. 113. I. *Deux triangles ABC, DEF* (Fig. 88.) *seront semblables & égaux, toutes les fois que les cotés & les angles du triangle ABC, sont égaux a ceux du triangle DEF.*

C'est-a-dire, si $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$ & $\forall A = \forall D$, $= \forall B = \forall E$, & $\forall C = \forall F$.

§. 114. II. *Deux triangles DEF, GHI* (Fig 89) *seront semblables quand les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.*

C'est-à-dire, le triangle DEF sera semblable au triangle GHI; lorsque $\forall D = \forall G$, $\forall E = \forall H$, & $\forall F = \forall I$.

On nomme les côtés opposés a des angles égaux, des *côtés homologues.*

C'est-

C'eſt ainſi que le côté *ED* eſt homologue au côté *GH*, le côté *EF* au côté *GH*, & *DF* au côté *GI*.

§. 115. III. *Deux triangles* (Fig. 88.) *dont les côtés homologues ſont égaux, ſeront équiangles & égaux entr'eux.*

§. 116. IV. *Deux triangles ſont égaux lorſque les trois angles de l'un étant égaux au trois angles de l'autre, il s'y trouve deux côtés homologues égaux entr'eux.*

C'eſt-à-dire (Fig. 88.) lorſque dans le △ *ABC*, les trois angles *A*, *B*, *C* & le côté *BC* ſont reſpectivement égaux aux trois angles *D*, *E*, *F* & au côté *EF* du △ *DEF*; ces deux triangles ſeront égaux & ſemblables.

§. 117. V. *Deux triangles ſeront encore égaux entr'eux, lorſque les deux côtés, & l'angle compris entre ces deux côtés de l'un ſont égaux aux deux côtés & a l'angle compris de l'autre triangle.*

C'eſt à-dire (Fig. 88.) ſi *AB* eſt = *DE*, *AC* = *DF* & ∀ *A* = ∀ *D*, alors le △ *ABC* ſera = △ *DEF*, la baſe *BC* égal a la baſe *EF*: ∀ *B* = ∀ *E* & ∀ C = ∀ *F*.

§. 118. VI. *Quand dans deux triangles ABC acd* (Fig. 90.) *le coté AB eſt égal au côté ac, & AC = ad, mais que l'angle A au ſommet dans le triangle ABC eſt plus grand que l'angle a dans le triangle acd; alors la baſe CB du triangle ABC ſera plus grande que la baſe cd, dans le triangle acd.*

§. 119. VII. *Quand deux triangles ont deux côtés homologues égaux, mais que la base du premier soit plus grande que la base du second, l'angle au sommet du premier sera aussi plus grand que celui du second.*

C'est a-dire, si AB est $=$ ac, AC $=$ ad mais la base BC plus grande que la base cd; alors l'angle A sera plus grand que l'angle a (Fig. 90.)

Les sept propositions que nous devons d'enoncer, peuvent être considérées comme autant d'axiomes, par ce qu'elles doivent toutes être démontrées par la superposition: c'est-à-dire, qu'en appliquant les côtés & les angles homologues de ces triangles l'un sur l'autre, ils se couvriront exactement, horsmis dans la sixième & la septième, ou la base BC excedera la base cd: ainsi qu'il est évident par l'inspection des figures.

§. 120. VIII. *Quand deux triangles inégaux mais semblables, GHI, GKL (Fig. 91.) sont tellement posés l'un sur l'autre, que deux cotés GL, GK & un des angles G du petit triangle GKL couvrent les côtés GH, GI, & le sommet G; alors l'autre côté LK du petit triangle GKL, tombera dans le grand triangle, & sa position donnera LK Parallele a HI.*

§. 121. IX, *Quand d'un point L* (Fig. 91.) *pris dans le côté GH du triangle GHI. on tire une ligne LK, parallele au coté opposé HI, cette ligne formera un triangle GLK qui sera semblable au grand triangle GHI.*

C'est-à-dire le $\triangle$ GKL sera $\backsim$ $\triangle$ GHI parceque LK est parallele a HI.

Les

Les deux dernières Propoſitions ſont évidentes par la definition, que nous avons donné des triangles ſemblables §. 114. & par les propriétés des lignes Paralleles, que nous avons établis au §. 39.

PROPRIÉTÉS
DES
FIGURES QUADRILATERES.

§. 122. Il y a deux ſortes de figures quadrilatères, ſçavoir

I. Celles dont les côtés & les angles ſont inégaux, & qu'on nomme *Trapéſes*.

II. Celles dont les côtés oppoſés ſont paralleles, & qu'on nomme *Quarré*, *Quarré long*, *Rhombe & Rhomboïde ou Paralelogramme*. Voyez les §. 89, 90, 91 & 92.

Ces figures ont des propriétés communes, qu'on peut démontrer de la manière ſuivante, en faiſant uſage des *Figures* 96, 97, 98 & 99.

Pour cet effet ſoient tirez la ligne *AC* parallele à *FD* & *GI* parallele a *MK*. Que les paralleles *AC* & *FD* ſoient coupées par les trois perpendiculaires & paralleles *AF*, *BE* & *CD*; de manière, que la diſtance entre *A* & *B* ſoit égale a la diſtance entre *A* & *F* & celle de *B* a C, plus grande ou plus petite. Cela étant, la figure *ABEF* ſera un quarré, & *BCDE* un quarré long. ou un rectangle.

Si entre la ſeconde paire de lignes *GI*, *MK*. (Fig 98.) on tire trois autres paralleles *GM*, *HL* & *KI*, dans une direction oblique; ayant ſoin de ren-

rendre *GM* égale a *GH* mais *HI* plus grande ou plus petite que *HL*; on formera deux Quadrilatères *GH LM* & *HIKL*, dont le premier se nomme un *Rhombe* ou *Quarreau*, & le second, un *Rhomboïde* ou *Quarreau long*.

§. 123. *Le nom général qu'on donne au quatre figures, est celui de Paralelogramme qui est droit ou oblique, selon que les secondes paralleles sont Perpendiculaires ou non.*

Les lignes transversales *AE*, *BD*, *GL*, & *HK*, sont nommées les *diagonales des Paralelogrammes.*

Ces quatre Figures 96, 97, 98 & 99, ont communes les propriétés suivantes.

§. 124. I. *Que chaque ligne tirée d'un angle a l'autre, coupe la figure en deux parties égales.*

§. 125. II. *Que les côtés & les angles opposés dans chacune de ces figures sont égaux entr'eux. Et que toutes les fois que deux côtés opposés sont égaux, & paralleles, les deux autres le seront aussi.*

Car $\forall\, a = \forall\, b$ & $\forall\, c = \forall\, d$, (§. 37.) parceque les côtés opposés font égaux, ainsi selon le §. 116 on obtiendra pour l'égalité des triangles.

$\triangle\, AFE = \triangle\, ABE$; $\triangle\, BDE = \triangle\, BCD$.

$\triangle\, GLM = \triangle\, GHL$; $\triangle\, HKL = \triangle\, HKI$.

D'ou il paroît, que les côtés & les angles opposés sont égaux entr'eux &c.

§. 126. III. *Les deux diagonales AC, DB* (Fig. 100.) *d'un Paralelogramme ou quarré, le coupent en quatre triangles; dont les deux opposés sont égaux.*

C'est-

C'est-à-dire △ *ABE* = △ *CDE*, & △ *BEC* = △ *EAD*.

Car *AB* étant parallele a *BC*.

On aura ∀ *a* = ∀ *c A* ∀ *b* = ∀ *d*. (§. 37.) donc △ *ABE* = △ *DEC*. (§. 116.)

On prouvera par un raisonnement semblable, que le △ *AED* est = △ *BEC*.

§. 127. *Il suit de la, que le point E est le centre de la figure:* parceque *AE* = *EC* & *DE* = *EB*.

§. 128. IV. *Quand on tire par le milieu E* (Fig. 100.) *d'un paralelogramme ABCD une ligne FG; cette ligne coupera la figure en deux parties égales & la coupante FG sera aussi divisée en deux parties égales*, parceque les triangles opposés *BEG*, *FED* &c. seront égaux (§. 116.)

§. 129 V. *Lorsque par le milieu E d'une diagonale AC d'un paralelogramme ABCD on tire deux lignes FG, HI* (Fig. 101.) *paralleles aux côtés opposés, ces lignes couperont la figure en quatre paralelogrammes égaux.* Comme il est évident par l'inspection de la figure.

§. 130. VI. *Toutes les fois que le point E* (Fig. 102.) *n'est pas placé dans le milieu de la diagonale AC les lignes paralleles GF, HI, formeront quatre paralelogrammes; dont les deux GEHD & BIEF par lesquels la diagonale ne passe point, seront égaux entr'eux.*

C'est-

C'est-à-dire, si *CE* est plus grand que *EA*, le paralelogramme *EHDG* sera = paralelogramme *BIEF*. (*)

Nous avons demontré que le △ *DCA* est = △ *BCA*. (§. 124) or le △ *EGC* = △ *CIE* & le △ *FEA* = △ *HEA*.

Si donc on rétranche du △ *CIE* les triangles *ECG* & *HEA*, & du triangle *BAC*, les triangles *ECI* & *FEA*, on obtiendra le paralelogramme *DH EG* = paralelogramme *BIEF*.

§. 131. VII. *Lorsque dans un quarré* (Fig. 104) *les deux lignes paralleles PR, LM ne passent point par le milieu de la diagonale AC, les deux figures ALEP & EMCR par lesquelles la diagonale passe, seront deux quarrés l'un de la ligne AP ou DR, l'autre de la ligne PB ou RC.*

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les △△ *ALE*, *APE*; *ERC* & *EMC* sont Isosceles & deux a deux égaux entr'eux.

La ligne *AD* étant égale à *DC*: Il s'ensuit que ∀ *a* = ∀ *d* (§. 106.)

Or *LM* est parallèle à *DC*. Par conséquent ∀ *b* = ∀ *d* (§ 36.)

Donc ∀ *b* = ∀ *a* (*parceque deux grandeurs égales a une même troisième sont égales entr'elles.*)

Le △ *ALC* sera donc Isoscèle (§. 106.) & la figure *ALEP* un quarré formé sur la ligne *LE* (§. 89.)

(*) On nomme ces paralelogrammes *DHEG* & *BIEF* par lequel la diagonale ne passe point, *des Complemens*.

89.) Mais la ligne *LE* = *DR* = *AP*. (§. 125.)

Par conféquent la figure *ALEP* eft le quarré de la ligne *AP* ou *DR*.

On démontrera par un raifonnement femblable, que $\forall\, c = \forall\, d$. Le $\triangle$ Ifofcèle *ERC* = $\triangle$ *EMC* & la figure *REMC*, le quarré fur *RC*, ou *PB*.

DE LA MANIERE DE FAIRE

DES

QUARRÉS

ET DES

PARALELOGRAMMES &c.

§. 132. **PROBLÊME I.** *Sur une ligne donnée AB faire un Quarré ABCD,* [Fig. 92.]

SOLUTION. Tirez du point *A* une ligne *AE* perpendiculaire sur *AB* [§. 41.]

Faites *AD* = *AB*, & tirez par le point *B* une ligne *CB* parallèle à *AD*, & par *D* une ligne *DC*, parallèle a *AB*, (§. 44.) & la figure *ABCD* sera un quarré selon le §. 89.

§. 133. PROBLÊME II. *Faire un rectangle EFGH dont les côtes opposés soient égaux aux deux lignes A & B* (Fig. 93.)

SOLUTION. Tirez une ligne *EF* = *B*.

Faites $\vee E = \llcorner$ (§. 41.) & la ligne *EH* = *A*.

Tirez par *H* une ligne *HG* parallèle a *EF*, & par *F* une ligne *FG* parallèle a *HE* (§. 41.) La figure *EFGH* sera un rectangle; par le §. 90; puisque *EF* = *GH* & *HE* = *FG*, & les angles droits.

§. 134. PROBLÊME III. *Faire un paralelogramme, dont l'angle n soit égal à l'angle donné N,* (Fig. 94.)

SOLUTION. Tirez une ligne $IK = B$, & faites a l'extrêmité I de la ligne IK un angle n égal à l'angle N. (§. 28) Faites $IM = A$. Tirez par M une ligne ML parallele a IK (§. 41.) & par K la ligne KL parallèle a MI; la figure $IKLM$ sera le Paralelogramme démandé (§. 92.)

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES

POLYGONES RÉGULIERS

ET

IRRÉGULIERS.

§. 135. I. *Tout Polygone peut être divisé en autant de triangles que la figure a de côtés* (Fig. 105.)

Car si on tire du point *C* pris au dedans de la figure, des lignes droites aux angles, on formera autant des triangles, que l'on aura tiré de lignes.

§. 136. II. *Chaque Polygone équilateral & équiangle, peut être inscrit dant un cercle:* c'est-à-dire, *on peut décrire un cercle autour d'un Polygone régulier, dont les angles passeront par la circonference du cercle* (Fig. 106.)

Il suffit pour la démonstration de ce Principe, de faire voir; que dans chaque Polygone régulier il se trouve un point C, a égale distance des angle *A*, *B*, *D*, *E*, &c.

Pour cet effet, divisez trois angles du Polygone en deux parties égales. (§. 77.)

C'est-à-dire faites $\forall o = \forall r$; $\forall p = \forall s$; $\forall n = \forall m$.

Puisque le Polygone est équi-angle, $\forall o = \forall r = \forall p = \forall s = \forall n = \forall m$.

Par conséquent les triangles ACB & BCD feront Isoscèles & égaux entr'eux. (§. 116.)

D'ou il fuit, que $AC = BC = CD$, & le cercle décrit avec le rayon AC paffera par les points A, B & D. Et comme la même démonftration a lieu par rapport a toutes les autres lignes tirées du point C, aux autres angles du Polygone régulier. Il s'enfuit, que le cercle décrit du point C avec le rayon AC paffera par tous les angles de la figure.

§. 137. III. Il fuit de là, *que les rayons tirés du centre d'un Polygone équilateral & équi-angle, divifent la figure en autant de triangles égaux & Isofcèles, quelle a de côtés.*

§. 138. IV. *Chaque côté d'un Polygone peut-être confideré comme une corde d'un arc de 360° divifé par le nombre des côtés de la figure.*

§. 139. V. *Le côté AB de l'hexagone ABDEFG décrit dans un cercle eft égal au rayon.* (Fig 107.)

C'eft-à-dire, *fi dans un cercle on décrit un hexagone équilateral, les côtés AB, BD, DE, EF, FG & GA de cette figure feront chacun égal au rayon: ou en d'autres termes; le rayon AC peut-être appliqué fix fois dans la circonference du cercle.*

Par le §. 138. l'arc foutendu par le côté AG la fixième partie de 360.

C'eft-à-dire que $\forall\, x = 60°$.

Si on rétranche les 60 ou la valeur de cet angle x de la fomme des trois angles $x + y + a = 180°$, on obtiendra $\forall\, y + a = 120°$.

Or

Or les angles y & a sont égaux entr'eux (§. 106.) & chacun de ces angles sera de 60°.

D'ou il suit, que le triangle ACG est équilateral (§. 107.) & par conséquent $AC = AG = AB = CD = CE = CF = FG$.

§. 140. VI. *Dans tout Polygone régulier on peut inscrire un cercle, qui touche tous les cotés de cette figure* (Fig. 107 & 108.)

Nous avons fait voir dans le §. 136; que toutes les fois qu'un polygone régulier est inscrit dans le cercle, les côtés de cette figure peuvent être considérés comme autant de cordes égales appliquées a la même circonférence.

Or les cordes égales ont une même distance du centre (§. 58)

C'est-a-dire, que lorsque $AB = BD = DE$ &c. la perpendiculaire CH sera égale a la perpendiculaire CI & a la perpendiculaire CK (Fig. 108.)

Dans le §. 60. il est démontré, que les tangentes sont perpendiculaires sur les rayons, tirés aux points de leur contact.

Par conséquent *le cercle décrit du centre d'un Polygone avec un de ces perpendiculaires CH, CI ou CK &c. touchera tous les cotés du Polygone.*

§. 141. V. *Lorsqu'au point de milieu H & I de deux cotés AB, BD, on éleve des perpendiculaires, ces lignes se couperont dans le centre C du Polygone régulier.*

§. 142. VI. *Toutes les fois, qu'un coté d'un Polygone est coupé dans le milieu par une perpendicu-*

 lai-

laire KC & qu'un des angles de cette même figure soit aussi coupé en deux également par un autre ligne EC, ces deux lignes se rencontreront dans le centre.

Voyez la Fig. 108, dans laquelle la ⊥ *KC* coupe la corde *ED* en deux parties égales & la ligne *EC*, l'angle *FED* du Polygone.

DE LA MANIERE D'INSCRIRE ET DE CIRCONSCRIRE DES POLYGONES *AU DEDANS OU AU DEHORS* DU CERCLE.

§. 143. PROBLÉME I. *Incrire dans un cercle donné un Polygone équilateral & équi angle.*

SOLUTION. Divisez 360 degrés par le nombre des côtés du Polygone, qu'on doit inscrire.

Prenez au moyen d'un rapporteur (ou d'un demi cercle divisé en 180°) sur la circonference un arc d'autant de dégrés.

La corde de cet arc, sera un des côtés demandés du Polygone requis.

Achevez la figure en y appliquant cette corde autant de fois qu'il faut pour la former.

§. 144. PROBLÉME II. *Décrire un cercle, autour d'un Polygone donné.*

SOLUTION. Pour le faire, cherchez le centre du Polygone équilateral & équiangle selon ce qui a été enseigné au §. 141 & 142.

Décrivez de ce centre un cercle dont le rayon égale la distance du centre à un des angles: &, la circonférence touchera tous les angles du Polygone, selon le §. 138.

PROPRIÉTÉS
DU
CERCLE.

§. 145. I. *De toutes les lignes AG, AF, AE, AB, AC, AD* (Fig. 109.) *tirées d'un point A hors du cercle à la circonference concave.*

1. *La ligne AB qui passe par le centre, sera plus longue que les lignes AC, AF, AG qui ne passent point par le centre.*

2. *Des lignes AC, AF & AG qui ne passent point par le centre, celle qui en est le plus près sera plus grande que celle qui en est plus éloignée.*

C'est-à-dire, que $AB > AE$ & $AE > AF$ & $AF > AG$.

3. *Les lignes tangentes AG AD sont les plus petites de toutes les lignes qu'on peut tirer à la circonférence concave.*

4. *On ne peut tirer que deux lignes qui soient également longues de part & d'autre de la plus longue AB.*

Et au contraire.

5. *De toutes les lignes AG, AM, Ab, AO, AD tirées d'un point A à la circonférence convexe; la droite Ab, qui prolongée passeroit par le centre, est la plus petite.*

6. Les

6. *Les lignes AM, AN deviennent plus grandes que la ligne Ab, a mésure qu'elles en sont plus éloignées.*

7. *Les plus longues de ces lignes sont les tangentes AG & AD.*

8. *On ne peut tirer que deux lignes égales entr'elles de chaque côté de la ligne Ab.*

Pour démontrer ces différentes propriétés il faut tirer les rayons *TG*, *TF*, *TE*, *TC*, &c.

Ceci fait, on obtient plusieurs triangles *GTA*, *FTA* &c. qui ont tous le même côté *TA*, & un rayon de cercle, pour second côté.

1. Dans le $\triangle$ *AET*, les côtés $AT + TE$ sont $>$ *AE* (§. 104.) or $TE = TB$, comme rayons d'un même cercle, donc $AT + TE = AT + TB = AB$.

C'est-à-dire $AB > AE$.

2 & 3. Pour prouver que *AE* est plus longue que *AF*, il faut considérer les $\triangle\triangle$ *ATE* & *ATF*: dans lesquels $TE = TF$ mais $\forall\ ATE > \forall\ ATF$.

C'est pourquoi $AE > AF$ (§. 118.)

On démontrera de même, que $AF > AG$ & $AC > AD$.

4. Toutes les fois que $\forall\ ETb$ sera $= \forall\ bTC$, la ligne *AE* sera $= AC$ (§. 117.)

5. Le $\triangle$ & *ATO* fait voir, que comme $TA < AO + OT$ & $OT = Tb$.

La ligne *Ab* sera $< OA$.

6. & 7. Les $\triangle\triangle$ *AMT* & *AGT* donnent $AM < AG$ (§. 119.) parceque $TM = TG$ & l'$\forall\ ATM < \forall\ ATG$.

8. Enfin toutes les fois que l'on formera au cen-

tre T de part & d'autre de la ligne TA deux angles égaux ; les lignes tirées du point A la circonference seront égales entr'elles.

§. 146. II. *De toutes les lignes droites* AD, DB, DE *&* DF *tirées dans un cercle d'un point* D. (Fig. 110.)

1. *La plus longue de toutes, sera celle qui passe par le centre.* C'est à-dire, que AD est plus longue que DG, DB, DE &c.

2. *A mésure que les lignes s'éloignent de la droite* AB *elles deviennent plus petites:* ou bien, $AD > DB$, $DB > DE$, $DE > DF$.

3. *On ne peut tirer de part & d'autre de la plus longue* AD, *que deux droites égales* DG, DB.

Pour le démontrer il faut tirer les rayons CG, CB, CE, qui formeront trois triangles ; savoir CDG, CDB, CDE, qui ont tous de commun le côté CD, & les côtés CG, CB, CE égaux entr'eux comme étant des rayons d'un même cercle. Voici ce qui résulte de cette préparation.

1°. Dans le $\triangle$ DCB, les côtés $CD + CB$ sont $> DB$. (§ 104.)

2°. Les $\triangle\triangle$ BCD, DCE ont de commun le côté DC; de plus $CB = CE$ mais $\forall$ $DCB > \forall$ DCE donc $BD > DE$ (§. 118.)

Dans le $\triangle$ DCE, on trouve $CD + DE > EC$ (§. 104.)

Or $CE = CF = CD + DF$.

Par conséquent $CD + DE > CD + DF$.

Ro-

Retranchant de part & d'autre, la partie commune CD; on obtient $DE > DF$.

3°. Toutes les fois que $\forall x = \forall y$ le $\Delta\ CDG$ sera $= \Delta\ DCB$. (§. 103.)

Ainsi on ne pourra tirer du point D de part & d'autre de la plus longue AD, que deux droites égales.

§. 147. III. Il suit de là, *que toutes les fois qu'il est possible de tirer trois ou plusieurs lignes égales, d'un point pris au dedans du cercle, ce point sera le centre.*

§. 148. IV. *Les cercles DEB, ADF* (Fig. 111), *dont les circonférences se coupent, n'ont par le même centre.*

Car si ces cercles avoient le même centre, les rayons CD, AC & BC, dévroient être égaux entr'eux par le §. 15.

C'est-à-dire $CD = CA = CB$. Ce qui est impossible.

§. 149. V. *Il est impossible, que deux cercles KGH & KGM se coupent en plus que dans deux points* (Fig. 112.)

Car si la chose étoit possible, les trois rayons CI, CG & CH de l'un des cercles seroient en même temps rayons de l'autre.

C'est-à-dire, que ces deux figures auroient le même centre, ce qui est contraire au §. 148.

§. 150. VI. *Deux cercles PRT, PUS* (Fig. 114) *qui se touchent intérieurement en P, n'ont pas le même centre C.*

Car

Car si cela étoit possible les rayons *CR* & *CS*, devroient être également grand, parceque selon la supposition *CP* seroit $= CR = CS$. (§. 15.) ce qui ne scauroit avoir lieu.

§. 151. VII. Il suit de là, *que les circonférences de deux cercles qu'on décrit d'un même point avec des rayons différens, ne peuvent jamais se toucher: mais que leurs circonférences sont toujours parallèles entr'elles* (Fig. 113.)

§. 152. VIII. *Quand deux cercles se touchent interieurement ou exterieurement, & que par les deux centres C & B de ces cercles, on tire une ligne droite CB, cette ligne CB passera par le point d'attouchement A.* (Fig. 114 & 115.)

Tirez par le point *A* une tangente *MN*. (§. 74.)
Tirez aussi les rayons *CA* & *CB*.
Alors $\forall NAC = \forall NAB = 90°$. (§. 60.)
Par conséquent ces lignes *AC*, *AB* doivent être dans la même direction (§. 26.)
C'est-à-dire, la ligne droite *CB* tirée par les deux centres passe par le point d'attouchement *A*.

§. 153. IX. Il suit de la, que *deux cercles ne peuvent se toucher extérieurement ou intérieurement que dans un point.* Voyez les Figures 115 & 116.

DE LA GRANDEUR
OU
SURFACE DES FIGURES,
ET DE LA
MANIERE DE LES CALCULER.

I. DE LA SURFACE DES PARALLELOGRAMMES ET DES TRIANGLES.

§. 154. *Un pied Quarré*, est un quarré, dont chaque côté est un pied.

Une verge Quarrée, est un quarré, dont chaque côté est long de douze pieds.

Une toise Quarrée, est un quarré, dont chaque côté est long de six pieds.

§. 155. *Pour donner une idée de quelle manière on peut parvenir a déterminer la surface des figures, nous proposerons l'exemple suivant.*

Supposons qu'un homme muni d'un pied quarré *V* (Fig. 117.) se propose de mésurer la surface du rectangle *ABCD*, dont la longueur est de trois pieds & la hauteur d'un pied: voici l'opération qu'il fera.

Il appliquera le quarré *V* sur la figure le long du du côté BA & marquera la première ligne ponctuée 1.

Ceci étant fait, il lévera son pied quarré pour l'appliquer une seconde fois entre les deux lignes ponctuées 1 & 2.

Enfin il appliquera le quarré V contre CB, pour achéver d'arpenter la figure $ABCD$.

Si on mésure de même la figure $EFGH$, dont la base HG est de trois pieds & la hauteur de deux, on trouvera que le rectangle $EFGH$ contient six pieds quarrés.

§. 156. Il suit de la, I. *que la surface d'un rectangle doit être déterminée par le produit de la base multiplié par la hauteur.*

C'est-à-dire, que la surface du rectangle $EFGH$ est $= HG \times EH$ ou $HG \times FG$.

Si la base d'un rectangle étoit de douze pieds, & la hauteur de cinq: la figure contiendroit *cinq multiplié par douze*, ce qui seroit *soixante pieds quarrés.*

Si la longueur étoit de sept & la hauteur de quatre pieds, elle contiendroit vingt huit pieds quarrés.

§. 157. II. Il suit de la, *que la grandeur d'un quarré ABCD est égale a la base DC multipliée une fois par elle même.*

C'est-à-dire, le quarré $ABCD = DC \times DC = \overline{DC}^2$ (*)

§. 158.

(*) Pour éviter d'écrire deux fois, une quantité multipliée par elle même, on a coutume de l'écrire une

§. 158. III. *Les Paralelogrammes ABCD, ABFE, qui sont situés sur la même base & entre les mêmes parallèles sont égaux.* (Fig. 118.)

C'est-à-dire, si *DF* est Plle a *AB*, le rectangle *ABCD* contiendra autant de surface que le Pgr. obtus angle *EFBA*.

Nous avons démontré au §. 125. que dans un Paralelogramme, les côtés opposés sont égaux.

Ainsi *AD* = *BC*, *EA* = *BF*, *AB* = *DC* & *AB* = *EF*, d'ou il suit que *DE* est = *CF*.

Le triangle *DEA* est donc égal au triangle *CBF*. (§. 115.)

Si on rétranche de ces deux triangles, la partie commune *CEG*, les parties restantes seront égales entr'elles.

C'est-à-dire, figure *DCGA* = figure *DEFB*.

Ajoutant le triangle *AGB* de part & d'autre, on aura, figure *DCGA* + △ *AGB* = figure *DEFB* + △ *AGB*.

C'est-à-dire, Pgr. *ABCD* = Pgr. *AEFB*.

§. 159. IV. D'ou il suit, *que les paralelogrammes ABCD, EFGH, dont les bases AB, GH sont égaux, & qui sont placés entre les mêmes lignes parallèles DF & HA, sont égaux.* (Fig. 119.)

§. 160.

une seule fois, en tirant un trait par dessus & en plaçant le nombre *deux* a la suite de ce trait, ainsi que nous venons de le faire dans le texte: de même si une quantité doit être multipliée deux fois par elle même on y placera un *trois*.

§. 160. V. *Les triangles ABC, ABD, qui ont les mêmes bases, & qui sont placés entre les mêmes lignes paralleles AB, CF, ont la même surface.* (Fig. 121.)

Ceci est évident par l'inspection de la Figure 121, dans laquelle, △ *ABC* est égale a la moitié du Pgr. *CEBA* & le △ *ABD* la moitié du Pgr. *ADFB*. (§. 124.)

§. 161. VI. *Quand un Paralelogramme ABEC* (Fig. 123.) *& un triangle ABD ont la même base & la même hauteur, le paralelogramme sera une fois plus grand que le triangle.*

§. 162. VII. *La surface d'un paralelogramme, rectangle ou oblique, peut être exprimée par le produit, qui provient de la multiplication de la base par la hauteur perpendiculaire de la figure.*

§. 163 VIII. *La surface d'un triangle rectangle, aigu ou obtus angle, est égale a la moitié de la base multipliée par la hauteur perpendiculaire.*

C'est-à-dire (Fig. 125.) la surface du triangle rectangle $ABC = \frac{BC \times AB}{2}$, ou bien $= \frac{1}{2} BC \times AB$; ou bien encore $= BC \times \frac{1}{2} AB$.

La surface du triangle oblique *DEF* est $= \frac{EF \times \perp DG}{2} = \frac{1}{2} EF \times \perp DG = EF \times \frac{1}{2} \perp DG$.

Supposons que dans le triangle *ABC*, la base *AB* est longue de douze pieds, & *BC* égale a sept, alors la surface du triangle *ABC* sera $= \frac{12 \times 7}{2} = 6 \times 7 = 42$ pieds quarrés.

Lors-

Lorsque EF est égale a huit, & la perpendiculaire DG égale a quatorze pieds; la surface du triangle DEF sera $= \frac{8 \times 14}{2} = 56$ pieds quarrés.

§. 164. IX L'Inverse des §. 158. &c. est; *lorsque des paralelogrammes ou des triangles sont placés sur la même base, ou sur une même ligne, & du même côté, ces paralelogrammes ou ces triangles seront situés entre les mêmes paralléles.*

C'est-à-dire, la ligne, qui passera par le sommet de ces figures, sera parallele à celle qui leur sert de base. Voyez les Figures 119, 120, 121, 122, 123 & 124.

II. DE LA SURFACE DES DIFFERENS RECTANGLES, QU'ON FAIT EN COUPANT LES BASES DE CES FIGURES PAR DES LIGNES PARALLELES.

§. 165 I. *Quand de deux lignes données AD & AE* (Fig. 126) *l'une est divisée en autant de parties AB, BC, CD, que l'on voudra, le rectangle compris entre AD & AE sera égal a tous les rectangles, qu'on peut faire par la ligne AE, & par chacune des parties, AB, BC, CD de la ligne divisée.*

C'est à dire, $AE \times AD = AE \times AB + AE \times BC + AE \times CB$, comme cela est évident par l'inspection de la figure, dans laquelle $AE = BF = CG = DH$.

§. 166. II. *Si un quarré ABCD* (Fig 129) *est divisé par deux lignes FG, HI, parallèles aux côtés du quarré & passant par le même point E de la diagonale; on obtiendra les quarrés & les rectangles suivants.*

1e. *La figure sera coupée en deux quarrés & en deux rectangles.*

2e. *Le quarré EGCI est égal a celui qu'on peut faire*

faire sur la ligne DH, & le quarré EFAH a celui de la ligne AH.

3e. *Les deux rectangles DHEG & EFBI, qui sont égaux entr'eux, peuvent être exprimés par le produit* 2 $DH \times HA$ *des deux parties de la ligne divisée* DA.

C'est-à-dire, $\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2 + 2\ DH \times AH$.

Pour le démontrer, il faut savoir que $CD = DA$ (§. 89.)

Et que par conséquent $\forall\ n = \forall\ x$ (§. 106.)

Mais comme HI est parallèle a AB & GF parallèle a DA, l'$\forall\ x$ sera $= \forall\ z$, & $\forall\ r = \forall\ y$ (§. 106.)

De plus les triangles CGE & EHA sont Isoscèles & $CI = GE = DH = GC = EI = BF$ & $EH = GD = FA = AH = EF = IB$ (§. 32.)

D'ou il suit, que les figures $CIEG$ & $EFAH$, sont des quarrés; & les figures $GDHE$ & $EFBI$ des rectangles. (§. 131.)

Donc $\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HA}^2 + 2\ DH \times AH$.

§. 167. III. *Quand sur une ligne AD,* (Fig. 129.) *divisée a volonté en H, on forme un quarré; ce quarré* $\overline{AD}^2$ *de la ligne entière, ajouté au petit quarré* $\overline{AH}^2$, *sera égal au quarré* $\overline{DH}^2$ *de l'autre partie DH, ajouté a deux fois le rectangle AD × AH de toute la ligne AD, & de la partie AH.*

C'est-à-dire, $\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{DH}^2 + 2\,AD \times AH$.

Selon le §. 166 précédent il est constaté que $\overline{AD}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2 + 2\,DH \times AH.$,

ajoutez $\overline{AH}^2 = \overline{AH}^2$

Il viendra $\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{DH}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 2\,DH \times AH$.

Or $2\,\overline{AH}^2 + 2\,DH \times AH = 2\,AH \times AH + 2\,DH \times AH = (2\,AH + 2\,DH)\,AH = 2\,DA \times AH$.

Par conséquent $\overline{AD}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{DH}^2 + 2\,DH \times AH$.

III. DE

III. DE LA SURFACE DES QUARRES, FORMES SUR LES CÔTES DES TRIANGLES.

§. 168. I *Quand sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC* (Fig. 130.) *on décrit trois quarrés, le quarré fait sur le plus grand côté AC sera seul aussi grand que les quarrés formés sur les deux autres côtés CB & AB.*

C'est à-dire, si le triangle ABC est rectangle, le quarré sur AC, ou la figure $ACDE$ sera égale aux deux quarrés $ABGF$ & $BHIC$: ou bien encore

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Pour le démontrer tirez de l'angle droit B, une ligne BK parallèle au côté AE ou CD du grand quarré, & prolongez la jusques en K; cette ligne coupera la figure en deux rectangles $AEKL$ & $LKDC$.

Tirez de plus des lignes AI, BD, BE & FC, qui formeront quatre triangles, lesquels deux a deux feront égaux entr'eux.

C'est-à-dire, il faut démontrer que $\triangle\ ACI = \triangle\ BCD$ & le $\triangle\ EAB = \triangle\ FCA$.

Ensuite nous ferons voir, que le triangle ACI est égal a la moitié du quarré $BCIH$; & le triangle BCD égal a la moitié du quarré $CKDL$; le triangle FAC égal a la moitié du quarré $ABGF$, & le triangle EAB égal a la moitié du quarré $EAKL$.

 Dans

Dans un quarré tous les côtés sont égaux, & tous les angles droits. (§. 89.)

Par conséquent GB & BC, de même que AB, & BH seront dans la même direction (§. 26.)

C'est-à-dire, AH est une ligne droite aussi bien que GC, la premiere est parallèle a CI, la seconde a HI (§ 125.)

Le $\triangle$ ACI est $=$ $\triangle$ BCD; (§. 117.) car $AC = CD$; $CI = BC$ & $\forall\ x + z = \forall\ y + z$.

Le triangle $EAB = \triangle\ FAC$, parceque $AE = AC$, $AF = AB$ & $\forall\ s + r = \forall\ r + t$.

Car $\forall\ x = \forall\ y = \forall\ t = \forall\ s = 90°$. De plus.

$$\left.\begin{array}{l} \text{le } \triangle\ ACI = \tfrac{1}{2}\ \square\ BCIH = \tfrac{1}{2}\ \overline{BC}^2 \\ \text{le } \triangle\ BCD = \tfrac{1}{2}\ \text{Rgle } LKCD \\ \text{le } \triangle\ EAB = \tfrac{1}{2}\ \text{Rgle } LKEA \\ \text{le } \triangle\ FAC = \tfrac{1}{2}\ \square\ ABGF = \tfrac{1}{2}\ \overline{AB}^2 \end{array}\right\} \text{§. 161.}$$

Le $\triangle$ ACI étant $=$ $\triangle$ BCD, il s'ensuit que $2\ \triangle\ ACI = 2\ \triangle\ BCD$, ou le quarré $\overline{BC}^2 =$ Rgle $LKDC$: & comme $\triangle\ FAC = \triangle\ EAB$, on aura $2\ \triangle\ FAC = 2\ \triangle\ EAB$.

C'est-à-dire, le quarré $\overline{AB}^2 =$ Rgle $LKEA$.

Ajoutant les Rgles ensemble, on obtiendra

$$LKCD + LKEA = \text{quarré } ACDE = \overline{AC}^2$$

Ce qui donne enfin $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

§. 169. II. *Dans un triangle obtus angle DEH* (Fig. 131.) *le quarré fait sur le plus grand côté DE est égal a la somme des deux quarrés faits sur les côtés qui forment l'angle obtus, ajouté a deux fois le rec-*

rectangle du côté DH sur la quelle la perpendiculaire AE tombe (qui est tirée de l'angle aigu E, sur le prolongement de DH) & de la partie comprise entre l'angle obtus H & l'angle droit A. (*)

C'est-à-dire, quand de l'angle aigu E, d'un triangle obtus angle DEH on tire une perpendiculaire EA sur le prolongement de la base DH; le quarré qu'on suppose décrit sur ED sera non seulement aussi grand que la somme des deux quarrés sur DH & HE, mais il excedera la surface de ces quarrés de la valeur de deux rectangles formés sur la base prolongée (sur la quelle on a fait tomber la perpendiculaire) multipliée par la partie HA comprise entre l'angle obtus H & l'angle droit A.

C'est-à-dire que $\overline{DE}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{EH}^2 + 2\,DH \times AH.$

Ce principe peut être démontré de la manière suivante.

Comme la ligne AD est divisé en H. Il s'ensuit par le §. 166. que

$$\overline{DA}^2 = \overline{DH}^2 + 2\,DH \times AH + \overline{HA}^2$$

$$\text{Ajoutez } \overline{AE}^2 = \overline{AE}^2$$

On aura $\overline{DA}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{DH}^2 + 2\,DH \times AH + \overline{HA}^2 + \overline{AE}^2$

Mais

(*) Les quarrés dont il est ici question, ne se trouvent point exprimés sur la figure 131. Les Commençans feront bien de les tracer en grand sur le papier ou sur l'ardoise.

Mais $\overline{DA}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{DE}^2$; & $\overline{HA}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{EH}^2$ selon le §. 168.

Substituant ces valeurs dans l'égalité précédente, on obtient enfin

$$\overline{DE}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{EH}^2 + 2\ DH \times AH$$

§. 170. III. *Quand le triangle DHF est aigu en H (Fig. 132.) le quarré sur le côté opposé DF sera plus petit que la somme des quarrés sur les autres côtés du triangle, de la valeur de deux rectangles formés sur la base DH & la partie AH comprise entre l'angle aigu H & la perpendiculaire AF tiré du sommet F au dedans du triangle.*

C'est-à-dire; quand du sommet F d'un triangle FHD, on tire une perpendiculaire sur la base DH: il faudra ajouter au quarré de DF deux fois le rectangle formé sur la base & la partie AH comprise entre l'angle aigu & la perpendiculaire AF.

Ou bien $\overline{DF}^2 + 2\ DH \times AH = \overline{DH}^2 + \overline{FH}^2$.

Nous avons fait voir au §. 167.

Que $\overline{AD}^2 + 2\ DH \times AH = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2$

ajoutant $\overline{AF}^2 \qquad = \qquad \overline{AF}^2$

Il vient $\overline{AD}^2 + \overline{AF}^2 + 2\ DH \times AH = \overline{DH}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AF}^2$.

Or les $\Delta\Delta$ rectangles donnent selon le §. 168.

$$\overline{AD}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{DF}^2;\ \&\ \overline{FA}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{FH}^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité précédente, on obtiendra.

$$\overline{DF}^2 + 2\ DH \times AH = \overline{DH}^2 + \overline{FH}^2.$$

IV. DE

IV. DE LA SURFACE DES POLYGONES.

§. 171. I. *La surface d'un Polygone regulier ou irrégulier ABCDE* (Fig. 133.) *est égale a celle de tous les triangles ABE + BCE + ECD, qui composent la figure.*

Cette verité est une suite de cet axiome. *Que le tout est égal a toutes ses parties prises ensemble.*

Par Exemple, si pour déterminer la surface du Polygone *ABCDE*, on suppose que $BE = 7$, $EC = 7,3$; $\perp AF = 2,1$; $\perp BH = 3,1$ & $\perp DG = 3$.

Alors $\triangle ABE = \frac{1}{2} BE \times AF = 3,5 \times 2,1 = 7,35$

$\triangle BCE = \frac{1}{2} CE \times BH = 3,65 \times 3,1 = 11,315$

$\triangle ECD = \frac{1}{2} CE \times DG = 3,65 \times 3 = 10,95$

Ainsi la surface de ce Polygone *ABCDE*, sera égale a 29,615 pieds quarrés.

§. 172. II. *La surface d'un Polygone régulier ABDEF* (Fig. 135.) *est égal au produit de la somme des côtés égaux, multiplié par la moitié de la perpendiculaire tirée du centre sur un des côtés.*

C'est-à-dire la surface d'un Polygone régulier $ABDEF = (AB + DB + DE + EF + FA) \frac{1}{2} CG$.

Nous avons démontré (§. 137.) qu'un Polygone régulier peut être divisé en autant de triangles équilatéraux & Isoscèles, que la figure a de côtés.

La surface du triangle *ABC* est $= AB \times \frac{1}{2} \perp GC$.

Donc celle du Polygone entier, sera égale autant de fois $AB \times \frac{1}{2} \perp GC$ que la figure a de côtés.

C'est-à-dire, la surface du Polygone $ABDEF =$ $\frac{1}{2}\, GC\,(AB + BD + DE + EF + FA)$.

§. 173. III. *Quand la circonference d'un Polygone régulier, décrit dans un cercle, est multiplié par la moitié du rayon de ce cercle, le produit donnera la surface d'un Polygone de deux fois autant de côtés.*

C'est-à-dire, si la circonférence du Polygone $ABGIL$ (Fig. 136.) qui est $AB + BG + GI + IL + LA$; est multipliée par la moitié du rayon CE; le produit $(AB + BG + GI + IL + LA)$ $\frac{1}{2}\, CE$ donnera la surface du Polygone $AEBFGHIKLMA$ (*).

Pour le démontrer tirez les rayons AC & CB & par le milieu D du côté AB, le rayon CE: tirez de plus les cordes AE, EB.

Le triangle ABC sera la cinquiéme partie du pentagone $ABGIL$ & les côtés AE, EB ceux du décagone $AEBFG$, &c.

La figure quadrilatère $ACBE$ contient les deux triangles ACE & CEB.

Or

(*). Ce Théoreme est annoncé dans *les Trois coups d'essais Géométrique* Imprimés à *Strasbourg* en 1770. comme de l'invention de Mr. MARSSON, & lui à servi a la démonstration de plusieurs singulieres propriétés des Polygones circonscrit & inscrit au cercle.

Le même Théorême se trouve dans un ouvrage Hollandois de LUDOLF VAN CEULEN, imprimé a Leide en 1651. qui s'est rendu célébre par *son rapport du diamètre du cercle a la circonférence*, & qu'on a substitué depuis a celui D'ARCHYMEDE.

Nous parlerons de ce rapport au §. 248.

Or comme la ligne AB est $\perp$ sur la ligne CE (§. 46.) Il s'ensuit que la surface de ces deux triangles peut être exprimée par les produits suivants $CE \times \frac{1}{2} AD + CE \times \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} CE \times AD + \frac{1}{2} CE \times BD = \frac{1}{2} CE (AD + BD) = \frac{1}{2} CE \times AB$ (§. 163.)

Or la droite CE est un rayon du cercle & la ligne AB est un côté du pentagone régulier.

Par conséquent, cinq fois le produit $CE \times \frac{1}{2} AB$ sera égal a toute la surface du décagone régulier; c'est-à-dire.

$(AB + BG + GI + IL + LA) \frac{1}{2} CE =$ surface du décagone $AEBFGHIKLM$.

La même demonstration a lieu quel que soit le nombre des côtés du Polygone régulier inscrit dans un cercle; donc &c.

§. 174. IV. *La surface d'un Polygone inscrit est plus petite que celle du cercle.*

§. 175. V. *Plus le Polygone inscrit a de côtés, & plus sa surface approche de celle du cercle auquel il est inscrit.*

§. 176. VI. *La surface d'un Polygone circonscrit au cercle est plus grand que le cercle.*

§. 177. VII. *Les surfaces des Polygones circonscrits approchent d'autant plus de celles du cercle inscrit que ces Polygone ont un plus grand nombre de côtés.*

C'est-à-dire, que le pentagone circonscrit $ABEDF$ (Fig. 137.) est plus grand que décagone *abcdefghik*.

§. 178. VIII. Nous venons de voir, *que le Polygone*

gone inſcrit augmente de ſurface a-méſure que le nombre de côtés dévient plus grand, & s'approche d'autant plus de celle du cercle circonſcrit; & qu'au contraire les ſurfaces des Polygones circonſcrits deviennent d'autant plus petits que le nombre de leurs côtés augmentent. Il s'enſuit donc, que la ſurface d'un Polygone inſcrit ou circonſcrit au cercle, dont le nombre de côtés eſt très grand, approchera tellement de celle du cercle, qu'on pourra les prendre l'un pour l'autre. C'eſt-à-dire, *que la ſurface d'un cercle peut être conſidérée comme égale a celle d'un Polygone inſcrit ou circonſcrit, dont le nombre des côtés eſt très grand.*

§. 179. IX. Nous avons démontré au §. 173. *que la ſurface d'un Polygone régulier ABEDF* (Fig. 137) *eſt égale a ſa circonference multipliée par la moitié de la perpendiculaire KL.*

Par conſéquent

La ſurface d'un cercle ſera égale au produit de ſa circonference multipliée par la moitié du rayon.

DES RAPPORTS
ET DES
PROPORTIONS.

I. DEFINITIONS.

§. 180. Lorſque l'on compare deux grandeurs entr'elles (par exemple les différentes longueurs de deux lignes, l'étendue de deux ſurfaces, ou le volume de deux corps) cette comparaiſon peut ſe faire de deux manières différentes.

1°. En déterminant de combien la première grandeur eſt plus grande ou plus petite, qu'elle a plus ou moins étendue, que la ſeconde.

2°. En cherchant combien de fois la première grandeur contient la ſeconde, ou en eſt contenue.

La première de ces comparaiſons eſt appellée *Raiſon* ou *Rapport Arithmétique*, & ſert a déterminer qu'elle eſt la difference, qu'il y a entre deux grandeurs. (Elle eſt de peu d'uſage dans la Géométrie.)

La Seconde manière de comparer les grandeurs entr'elles deux a deux, appellée *Raiſon* ou *Rapport Géométrique* s'effectue au moyen de la diviſion, & peut-être conſidérée comme la clef de toutes les ſciences Mathématiques.

Pour

Pour donner aux Commençants une idée de la différence qu'il y a entre la raiſon Arithmétique & la Géométrique, nous fairons uſage des deux nombres 4 & 12.

§. 181. Le rapport Arithmétique ſe détermine au moyen de la ſouſtraction, en rétranchant ou en otant le plus petit nombre du plus grand, (ſelon que le premier terme eſt plus grand ou plus petit que le ſecond, auquel on le compare). Ainſi en comparant 4 ou 12 on trouvera $12 = 4 + 8$: c'eſt-à-dire, que la différence de 4 a 12 eſt 8; ou bien, qu'il faut ajouter 8 a 4 pour former le ſecond terme 12.

En comparant 12 a 4, on trouvera $12 - 4 = 8$: ce qui dénote, que 12 ſurpaſſe 4 de *huit unités.*

Les deux termes des rapports 4 a 12 ou 12 a 4 ont différens noms, rélativement a la place qu'ils occupent. On nomme le premier terme *Antécedent* & le ſecond *Conſéquent.*

Ainſi dans la prémiere comparaiſon 4 a 12, le nombre 4 eſt l'*antécedent*, & le ſecond 12 eſt *le conſéquent.*

Au lieu que dans le ſecond rapport; le nombre 12 eſt *Antécedent* & le 4 eſt le *Conſéquent.*

§. 182. Pour déterminer le rapport Géométrique des deux nombres 4 & 12, on a coûtume de diviſer l'antécedent par ſon conſéquent, & le quotient qui en réſulte, ſoit entier, ſoit fractionaire, déſigne la grandeur rélative du premiér terme comparé au ſecond.

C'eſt

C'est ainsi, que dans le premier rapport 4 a 12, le résultat de la division indiquée sera $\frac{4}{12}$ ou $\frac{1}{3}$ & dans le second rapport 12 a 4, ce resultat est $\frac{12}{4}$ ou 3.

Ces résultats différens, font voir que dans la premiere comparaison l'antécédent est le tiers de son conséquent; au lieu que dans le second, le quotient 3 dénote, que l'antécédent est le triple de son conséquent.

De ce que nous venons de dire, on peut inférer.

§. 183. *Que la Raison ou le Rapport Géométrique, est la rélation mutuelle qui a lieu entre deux grandeurs homogénes, (ou de même nature) lorsqu'on fait servir la quantité de l'une pour déterminer celle de l'autre.*

On appelle *Exposant* du Rapport Géométrique, la quantité qui denote combien de fois le terme antécédent est contenu ou contient le conséquent.

C'est ainsi, que dans le rapport 12 a 4 le nombre $\frac{12}{4} = 3$ est appellé l'exposant de ce rapport, au lieu que la fraction $\frac{1}{3}$ est l'exposant du rapport 4 a 12.

§. 184. Dans la Géométrie, ainsi que dans la plupart des autres sciences Mathématiques, il n'est pas toujours possible de se servir de nombres, pour dé-

signer

ſigner ou pour exprimer les grandeurs, qu'on veut comparer enſemble; c'eſt pourquoi il eſt ſouvent néceſſaire d'avoir récours aux lettres de l'Alphabet; non dans l'intention de donner des valeurs numérales à ces lettres, mais uniquement comme dévant ſervir à aſſigner la place que chaque quantité occupe dans le rapport. C'eſt ainſi, par exemple, qu'en voulant comparer les différentes longueurs des rayons de deux cercles, on ſuppoſera la longueur du premier rayon être déſigné par la lettre *R*, & la longueur du ſecond par la lettre *r*.

Le rapport de la longueur du rayon du premier cercle, ſera alors à la longueur du rayon du ſecond cercle, comme *R* eſt à *r*, (*).

De même en déſignant deux lignes de longueur différente, par les lettres *A* & *B*; & deux autres lignes par *C* & *D*; le rapport des deux premiéres ſera exprimé par *A* eſt à *B* ou bien *A* : *B* & celui des deux dernières par *C* eſt à *D* ou par *C* : *D* (en ſubſtituant les deux points à la place des mots *eſt à*)

§. 185.

(*). Les Commençans feront bien de conſulter ici, & même pour tout ce qui ſuit, rélativement aux Rapports & aux Proportions, les *Inſtitutions du Calcul Numérique & Litteral, que mon Pere a publié en* 1770. en deux volumes in Octâvo, depuis le § 69. jusqu'au § 83. de la premiére Partie & dans la ſeconde Partie depuis le §. 237 juſqu'au §. 259. De même que ſon *Inleiding tot de beſchouwende en werkdaadige Meetkunde*, in Octavo 1776, depuis le §. 214. juſqu'au §. 241.

§. 185. *On appelle raison composée, celle qui provient de la multiplication des termes correspondents ou homologues de plusieurs raisons simples.*

Par exemple soient données les raisons simples.

$$\begin{array}{c} A : B \\ C : D \\ E : F \\ \hline \end{array}$$

Les produits $ACE : BDF$ formeront la raison composée.

Exemple en Nombres.

$$\text{Raisons simples} \left\{ \begin{array}{c} 2 : 3 \\ 4 : 5 \\ 6 : 7 \end{array} \right.$$

$$\text{Raisons composée } 2 \times 4 \times 6 : 3 \times 5 \times 7$$

$$\text{ou } 48 : 105$$

§. 186. *Lorsque les raisons composantes sont les mêmes, la raison résultante, sera doublée ou triplée, selon le nombre des raisons composantes, dont on a fait usage.*

Par exemple, si la raison numérique $2 : 5$ est multipliée une fois par elle même, la provenante $2 \times 2 : 5 \times 5$ ou $4 : 25$ est appellée *raison doublée* & si on la multiplie deux fois par elle même: la provenante sera appellée *raison triplée.*

De même, la raison triplée de $2 : 5$ est $2 \times 2 \times 2 : 5 \times 5 \times 5$ ou $8 : 125$

La raison simple $A : B$ est doublée dans le produit. $AA : BB$

& triplée dans $AAA : BBB$

§. 187. *Lorsque quatre nombres, ou grandeurs ont deux a deux le même rapport Géométrique, ces quatre nombres formeront une proportion.*

Et réciproquement, *toute proportion Géométrique de quatre termes, est composée de deux raisons égales.*

Exemple en Nombres.

Les nombres 2 : 3 & 4 : 6 ayant le même rapport Géométrique [puisque $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$] peuvent-être rangés en proportion de la maniere suivante.

$$2 : 3 = 4 : 6$$

Ce qui s'énonce; 2 est a 3 comme 4 est a 6.

Les nombres suivans forment aussi des proportions.

$$2 : 3 = 4 : 6$$
$$7 : 9 = 21 : 27$$
$$5 : 4 = 25 : 20$$

De même, en se servant de quantités littérales; si l'on suppose que la raison de $A : B$ est égale a celle de $C : D$, ces quantités formeront la proportion qui suit

$$A : B = C : D$$

Formule, dont nous nous servirons, en expliquant les propriétés générales des proportions, dont on fait le plus d'usage dans la Géométrie.

II. Pro-

II. Propriétés des Proportions Géométriques.

§ 188. I. *Toutes les fois, que le premier terme d'une proportion Géométrique est égal au second terme, le troisième sera égal au quatrième.*

Ex. La pésanteur d'un livre, est a celle de seize onces, comme un florin est a vingt sols.

Si dans la proportion littérale

$$A : B = C : D$$

Le prémier terme A se trouve égal au second, ou que $A = B$; alors C sera $= D$.

De même si $A = C$, le terme B sera $= D$.

§. 189. II. *Si l'on multiplie, ou que l'on divise les deux termes correspondens d'une proportion par la même quantité, la proportion ne sera point troublée.*

Exemple en Nombres.

Soit donnée la proportion.

$$10 : 12 = 15 : 18.$$

Multipliant les deux prémiers termes par trois, on obtient

$$30 : 36 = 15 : 18$$

Divisant le premier & le troisième terme de la dernière par 15, il en résulte.

$$2 : 36 = 1 : 18$$

Il suit de là, que par quelque nombre qu'on multiplie ou diviſe les termes homologues d'une proportion ; les réſultats ſeront encore en proportion.

Des deux principes, que nous venons d'établir aux §. 188. & 189. on peut déduire les ſuivants.

§. 190. III. *Lorſque les quatre termes d'une proportion ſont multipliés par les quatre termes d'une autre proportion, les réſultats ſeront encore en proportion.*

Exemple en Nombres.

Soient données les proportions Géométriques.

$$\begin{array}{r}2 : 3 = 4 : 6\\ \underline{7 : 9 = 21 : 27}\end{array}$$

Les réſultats $14 : 27 = 84 : 162$

ſont encore en proportion, parce que les fractions $\frac{14}{27}$ & $\frac{84}{162}$ ſont égaux. Voyez §. 187.

Exemple en quantités Litterales.

Soient données $\left\{\begin{array}{l} A : B = C : D \\ E : F = G : H \end{array}\right.$

La réſultante $AE : BF = CG : DH.$

Dans laquelle les expoſants $\frac{AE}{BF}$ & $\frac{CG}{DH}$ ſont égaux comme étant compoſés de deux produits égaux $\frac{A}{B} \times \frac{E}{F}$ & $\frac{C}{D} \times \frac{G}{H}$ Voyez §. 187.

§. 191. IV. *Les grandeurs sont proportionnelles a leurs équimultiples.*

C'est-à-dire $2:3 = 2\times 2 : 3\times 2 = 7\times 2 : 7\times 3$.
ou $2:3 = 4 : 6 = 14 : 21$ &c.
De même $A:B = 2A : 2B = 3A : 3B$ &c.

§. 192. V. *Les grandeurs sont proportionnelles a leurs moitiés, a leurs tiers, ou en général a leurs équisous-multiples.*

C'est-à-dire.

$$2 : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{3} = \frac{2}{4} : \frac{3}{4} \text{ \&c.}$$

$$A : B = \frac{A}{2} : \frac{B}{2} = \frac{A}{3} : \frac{B}{3} \text{ \&c.}$$

§. 193. VI. *Lorsque quatre grandeurs sont en proportion, les quarrés ou les cubes de ces quantités seront en proportion, ainsi que leurs mêmes racines.*

Exemple en Nombres.

Si $2 : 3 = 4 : 6$
$2\times 2 : 3\times 3 = 4\times 4 : 6\times 6$
ou $4 : 9 = 16 : 36$
De même $4\times 2 : 9\times 3 = 16\times 4 : 36\times 6$
ou $8 : 27 = 64 : 216$
$\sqrt{4} : \sqrt{9} = \sqrt{16} : \sqrt{36}$
C'est-à-dire $2 : 3 = 4 : 6$

EXEMPLES EN QUANTITES LITTERALES:

$$\begin{array}{llcll} \text{Si} & A : & B = & C : & D \\ \text{Alors} & AA : & BB = & CC : & DD \\ \text{Et} & AAA : & BBB = & CCC : & DDD \\ & \sqrt{A} : & \sqrt{B} = & \sqrt{C} : & \sqrt{D}\ (*) \end{array}$$

§. 194 VII. *Si quatre grandeurs sont en proportion, le produit des extrêmes sera égal au produit des moyens.*

La vérite de ce principe est manifeste dans les proportions numériques, que nous avons donnécs pour les articles precédents, (a) mais il n'est pas si facile aux Commençans a la concevoir dans la proportion littérale.

$$A : B = C : D$$

Nous tacherons de le démontrer d'une manière aisée.

Au §. 189. nous avons établi. que lorsque

(*). Lorsque l'on veut faire connoître qu'on doit extraire la racine quarrée d'une quantité, on a coutume d'y faire précéder le signe $\sqrt{}$. Ainsi pour anoncer qu'on doit prendre la Racine quarrée du nombre 4 on ecrira $\sqrt{4}$. voyez à ce sujet *Les Institutions du calcul Numérique & Litteral. Partie II.* §. 196. &c. De même *Inleiding tot de Beschouwende en werkdaadige Meetkunde.* tweede Deel. §. 482.

(a) Par exemple, dans la proportion

$$2 : 3 = 4 : 6$$

Les produits $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$

Dans la proportion $7 : 11 = 21 : 33$

Les produits $7 \times 33 = 11 \times 21 = 231$

que l'on multiplie deux termes homologues d'une proportion, par une même quantité, la proportion ne fera point troublée (§. 191.) multipliant le premier & le troisième terme de la proportion $A:B = C:D$ par la quantité B, on obtient

$$AB : B = CB : D$$

Multipliant ensuite le second & le quatrième terme de cette dernière proportion, par A, il viendra

$$AB : AB = CB : AD.$$

Or nous avons dit au §. 188. que toutes les fois, que le premier terme est égal au second; le troisième terme doit-être égal au quatrième; & dans la derniere proportion les deux premiers termes font égaux.

C'est-à-dire que $AB = AB$. Par conséquent CB est $= AD$.

§. 195. VIII. *Deux produits égaux peuvent être décomposés en une proportion:* C'est-à-dire si AD est $= CB$.

On pourra former la proportion

$$A : B = C : D$$

Car puisque $AD = CB$ on peut comparer ces produits égaux a deux autres $AB = AB$; ce qui donnera la proportion suivante

$$AB : AB = BC : AD$$

Divisant le premier & le troisième terme par B le second & le quatrième par A, selon le §. 192. les résultats feront en proportion.

C'est-à-dire

$$A : B = C : D$$

Exemples en Nombres.

Puisque $2 \times 12 = 8 \times 3$; on pourra conclure que

$$2 : 3 = 8 : 12.$$

De même de $16 \times 5 = 8 \times 10$

on pourra former les proportions

$$16 : 10 = 8 : 5$$

ou

$$5 : 8 = 10 : 16$$
$$16 : 8 = 10 : 5$$
$$5 : 10 = 8 : 16$$

§. 196. IX. *Les quatres termes d'une proportion peuvent être disposés de différentes manières, sans cesser d'être proportionnels.*

La proportion des quantités ne sera point troublée, tant que le produit des extrêmes sera égal au produit des moyens. Par conséquent on pourra changer la position des quantités

$$A : B = C : D$$

de la manière suivante, en gardant toujours $AD = BC$

$$A : B = C : D$$
$$A : C = B : D$$
$$B : A = D : C$$
$$B : D = A : C$$
$$C : D = A : B$$
$$C : A = D : B$$
$$D : C = B : A$$
$$D : B = C : A. \text{ (*)}$$

§. 197.

(*) La résolution de la *Régle de trois*, ou *Régle de proportion*, si connue dans l'Arithmétique, est fon

déé

§. 197. X *Lorsque trois ou plusieurs raisons sont égales, ou bien, que les grandeurs sont deux a deux en même proportion, les termes de la première raison seront proportionnels a ceux de la dernière.*

EXEM-

dée sur cette Régle, ainsi que mon Père l'a fait voir dans *son Institution du Calcul Numérique & Littéral, qui contient les Principes de l'Aritbmétique & de l'Algèbre la Haye* 1770. depuis le §. 78. jusqu'au §. 107. & dans son *Eerste beginselen der Reekenkunde*, Hage 1769. §. 78. &c. dans lesquels il a prouvé, *que le quatrième terme d'une proportion est égale au produit du second terme multiplié par le troisième & divisé par le premier.*

C'est-à-dire, que dans la proportion

$$A : B = C : D$$

Le quatrième terme D est $= \dfrac{BC}{A}$

Et dans la proportion $4 : 5 = 8 : 10$

Le quatrième terme $10 = \dfrac{5 \times 8}{4}$

Lorsque l'on suppose que le quatrième terme d'une proportion est désignée par la lettre x.

Et que les trois premier termes sont désignés par les nombres 5, 7 & 20, on pourra écrire cette proportion de la manière suivante

$$5 : 7 = 20 : x$$

Or comme dans une proportion Géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (§. 194.)

Il s'ensuit que

$$5\ x \text{ est} = 140.$$

EXEMPLE EN NOMBRES.

Si $2 : 3 = 4 : 6 = 18 : 27$
Alors $2 : 3 = 18 : 27$

EXEMPLE POUR LES QUANTITÉS LITTERALES.

$$\begin{array}{rl} \text{Si} & A : B = C : D \\ & C : D = E : F \\ \hline \text{Alors} & A : B = E : F \end{array}$$

La démonstration de ce principe se fait de la manière qui suit.

Puisque $A : B = C : D$
& $C : D = E : F$

Multipliant les termes homologues, on obtient
$$AC : BD = CE : DF$$

Divisant le prémier & le troisième terme par C, le second & le quatrieme par D, on aura
$$A : B = E : F$$

§. 198.

Divisant de part & d'autre par cinq on obtiendra.

$$x = \frac{140}{5} \text{ ou } x = 28.$$

D'ou il paroît, que le nombre cherché est $= 28$.

Ce principe est le fondement de la résolution de tous les Problémes qu'on peut proposer rélativement aux Proportions des quantités; connus dans l'Arithmétique sous le noms de *Regle* de *Trois simple* & *composés*, *Règle* de *Compagnies*, *Regles conjoints*, celles *d'Interest*, *de Rabats & de Courtages*, &c. qu'on trouve communement dans tous les Livres d'Arithmétique, la plupart du tems sans la moindre démonstration.

§ 198. XI. *Lorsque plusieurs quantités ont même raison, deux a deux : ou ce qui revient au même, lorsque plusieurs raisons sont égales ; la somme de tous les antécédens sera a la somme de tous les conséquens, comme un des antécédens est a son conséquent.*

Exemple en Nombres.

Si $2 : 3 = 4 : 6 = 8 : 12 = 18 : 27 = 36 : 54$ &c.

Alors $2 + 4 + 8 + 18 + 36 : 3 + 6 + 12 + 27 + 54 = 2 : 3$

C'est-à-dire, $68 : 102 = 2 : 3$ parceque $68 \times 3 = 102 \times 2 = 204$.

Exemple pour les quantités Litterales.

Soient les proportions

$$A : B = C : D = E : F = G = H$$

Alors $A + C + E + G : B + D + F + H = A : B$

On peut démontrer cette vérité de la manière qui suit.

Puisque par la nature des proportions,

$A : B = A : B$, le produit AB sera $= AB$

Or $A : B = C : D$ $\quad AD = BC$

$A : B = E : F$ $\quad AF = BE$

$A : B = G : H$ $\quad AH = BG$

Ajoutant tous ces produits égaux ; on obtient l'égalité suivante.

$$AB + AD + AF + AH = AB + BC + BE + BG$$

Ce qui donne $A\,(B + D + F + H) = B\,(A + C + E + G)$

Et

Et enfin (par le §. 195)

$A + C + E + G : B + D + F + H = A : B.$

Il suit de là,

XII. *Lorsque quatre quantités sont en proportion, la somme des deux premiers termes sera au second terme, comme la somme des deux derniers termes est au dernier.*

EXEMPLE EN NOMBRES.

Dans la proportion	8	$: 5 =$	$24 : 15$	
On peut conclure que	$8 + 5$	$: 5 =$	$24 + 15 : 15$	
C'est-à-dire	13	$: 5 =$	$39 : 15$	
Puisque	13	$\times 15 =$	$5 \times 39 = 195$	

EXEMPLE POUR LES QUANTITÉS LITTERALES.

Dans la proportion

$$A : B = C : D$$

On peut conclure que

$$A + B : B = C + D : D$$

Voici comment on peut demontrer ce Principe.

La proportion

$$A : B = C : D$$

Donne $AD = BC$ (§. 194.)

Ajoutant $BD = BD$

On obtient $AD + BD = BC + BD$

Ou bien $D(A + B) = B(C + D)$

Ce qui donne par le § 195.

$$A + B : B = C + D : D.$$

DE LA

PROPORTION DES LIGNES, QUI FORMENT LES CÔTÉS DES FIGURES GEOMETRIQUES.

I. Des Triangles Semblables.

§ 199. I. *Quand deux lignes AB, AC* (Fig. 138.) *qui forment un angle BAC, sont coupées par quelques lignes équidistantes & parallèles EF, EF, EF &c. toutes les parties AG, GH, HK &c. de la ligne AB seront égales entr'elles, ainsi que les parties AO, OP, PQ &c. de la ligne AC.*

C'est-à-dire, $AG = GH = HK = KL = LM$;

De même $AO = OP = PQ = QR = RS$.

Pour démontrer cette vérité il faut faire la préparation suivante.

Tirez des points G, H, K, L, des points O, P, Q, R, des perpendiculaires; Gg, Hh, &c. ces lignes formeront des triangles rectangles égaux: C'est-à-dire, le $\triangle$ AGz sera $= \triangle$ GHg; le $\triangle$ $KHh = \triangle$ kLK; le $\triangle$ $AOz = \triangle$ OPo & $\triangle$ $PQp = \triangle$ QRq &c.

Les

Les côtés obliques de ces triangles seront donc aussi égaux entr'eux.

C'est-à-dire, $AG = GH = HK = KL = LM$, & $AO = OP = PQ = QR = RS$.

Il suit de là,

§. 200. II. *Qu'un certain nombre de parties égales prises sur la ligne AM ont la même proportion a un même nombre de parties sur AS, comme toute la ligne AM est a toute la ligne AS.*

C'est à-dire,

$AG : AO = GH : OP = HK : PQ = KL : QR = LM : RS = AM : AS$.

§. 201. III. *Toutes les fois que deux triangles rectangles ADS AzO ont un angle aigu commun, leurs côtés homologues seront proportionnels.*

C'est-à-dire, $AS : AD = AO : Az$.

Ces deux principes sont évidents par les §. 198 & 199: car les différentes parties des lignes AM, AD, AS interceptées entre les parallèles EF, EF étant respectivement égales entr'elles; la somme des parties de la ligne AS doivent avoir la même proportion a la somme du même nombre de parties de AD; comme la partie AO est a la partie homologue AD.

§. 202. IV. *Quand deux triangles ABC, DEF* (Fig. 139.) *sont équiangles, ces triangles seront aussi semblables, & leurs côtés homologues seront proportionnels.*

C'est-à-dire, quand $\forall B = \forall E$ & $\forall A = \forall D$ & $\forall C = \forall F$

Alors

Alors $AB : BC = DE : EF$
$AB : AC = DE : DF$
& $BC : AC = EF : DF$

Prenez du point B une partie $Bd = DE$ & $Bf = EF$

Tirez la ligne df

Alors le triangle Bdf sera = au triangle DEF, par le §. 117.

Mais le △ ABC est équiangle au △ DEF.

C'est pourquoi ∀ Bdf = ∀ D = ∀ A.
Et ∀ Bfd = ∀ F = ∀ C.

Par conséquent la ligne df est parallèle a AC, (§. 39.)

D'ou il suit, que △ Bdf est ∾ △ ABC, (§. 121.)

Et $Bd : Bf = AB : BC$

Ou parceque $Bd = ED$ & $EF = Bf$, on peut former la proportion

$AB : BC = DE : EF$.

§. 203. V. *Les triangles dont les côtés homologues sont proportionnels, seront aussi équiangles & semblables.*

C'est-à-dire, lorsque

$AB : BC = DE : EF$
$AB : AC = DE : DF$
$BC : AC = EF : DF$

Alors ∀ E sera = ∀ B; ∀ A = ∀ D & ∀ C = ∀ F

Pour le démontrer, formez au dessous de la base EF en E, un ∀ o = ∀ B & en F un ∀ p = ∀ C (§. 28.) Achévez le △ EFG.

Ceci fait, le △ EFG sera équiangle au △ ABC (§. 96

(§. 96 & 115.) & par conséquent ses figures seront semblables. (§. 202).

D'ou il suit, que $AB : BC = EG : EF$

Mais $AB : BC = EG : DF$

Par conséquent $DE : EF = EG : EF$ selon le §. 197.

ou $EF : EF = DE : EG$ selon le §. 196.

Or comme dans cette dernière proportion le premier terme est égal au second: le troisième terme sera égal au quatrième §. *188*.

C'est-à-dire $DE = EG$.

On prouvera de la même manière, que $FG = FD$

Par conséquent le $\triangle\ EFD \sim \triangle\ ABC$ (§. 202.)

§. 204. VI. *Lorsque dans deux triangles il se trouve un angle égal compris entre deux côtés proportionnels & homologues, ces deux triangles seront équiangles & semblables* (Fig. 13.)

C'est-à-dire; si dans les triangles ABC, DEF; l'$\forall B$ est $= \forall E$ & que $AB : BC = DE : EF$: alors $\forall F = \forall C$ & $\forall A = \forall D$.

Pour le demontrer, rendez $Bd = ED$

Tirez par le point d, une ligne df parallèle a AC (§. 44.)

Le triangle Bdf sera $\sim \triangle\ ABC$. (§. 202.)

Par conséquent

$$AB : BC = Bd : Bf$$

Mais on suppose que les côtés homologues sont proportionnels, ce qui donne

$$AB : BC = DE : EF$$

C'est pourquoi,

$$DE : EF = Bd : Bf \text{ (§. 197)}$$

Or $DE = Bd$ & $EF = Bf$, par construction

Donc

Donc $\triangle\ DEF = \triangle\ Bdf$ (§. 117.)
Mais $\triangle\ Bdf$ est $\sim \triangle\ ABC$ (§ 121)
Par conséquent $\triangle\ DEF$ est $\sim \triangle\ ABC$.

§. 205. VII. *Quand dans deux triangles ABC, DEF* (Fig. 139.) *un angle B est égal a un angle E, que les côtés AB, AC, ED, DF, qui forment les deux autres angles, sont proportionnels, & de plus que les angles C & F sont aigus ou obtus; les deux autres angles restants A & D, (compris par les côtés proportionnels,) seront aussi égaux; & les deux triangles ABC, DEF seront des figures semblables.*

C'est-à-dire; quand $\forall B = \forall E$, $AB : AC = DE : DF$ & les angles C & F sont aigus ou obtus, alors l'$\forall A$ sera $= \forall D$; $\forall F = \forall C$ & le $\triangle\ ABC \sim$ au $\triangle\ DEF$.

Tirez deux perpendiculaires AK & DK sur les bases BC & EF

Puisque $\forall B = \forall E$ & les triangles ABK & DEH rectangles & semblables; (c'est-à-dire $\triangle\ ABK \sim \triangle\ DEH$)

On pourra former la proportion suivante

$$BA : DE = \perp AK : \perp HD$$

Mais comme l'on suppose que

$AB : AC = DE : DF$ ou $AB : DE = AC : DF$

On doit conclure que

$$AC : DF = \perp AK : \perp HD \text{ (§. 197.)}$$

Dans les deux triangles rectangles ACK, & DHF il y a donc deux paires de lignes proportionnelles.

Par conséquent $\triangle\ ACK \sim \triangle\ DFH$, & $\forall C = \forall F$ (§. 204.)

G D'ou

D'ou il suit; que le triangle ABC est équiangle DEF (§. 103.)

Par conséquent le Δ ABC sera $\sim$ Δ DEF (§. 202.).

§. 206. VIII. *Les circonférences de deux triangles semblables, sont entr'elles comme deux de leurs côtés homologues.*

Car dans les deux triangles semblables ABC, DEF il y a selon le §. 202.

$$AB : DE = AC : DF = BC : FE$$

Et par conséquent $AB + AC + BC : DE + DF + FE = AB : DE$ (§. 198.)

II. Des lignes proportionnelles, tirées dans le cercle, et dans les triangles.

§. 207. I. *Lorsque l'angle A d'un triangle ABC* (Fig. 140.) *est coupé en deux parties égales par une ligne AD, cette ligne coupera le côté opposé BC en deux parties BD, DC, qui seront proportionnelles aux deux autres côtés du triangle ABC.*

C'est-à-dire, si $\forall o = \forall p$, on pourra faire la proportion suivante

$$AB : AC = BD : DC$$

Prolongez le côté AB jusques en E, & tirez du point C la ligne CE, parallèle a la ligne AD.

Ceci fait l'$\forall m = \forall o$, $\forall p = \forall n$, (§. 37 & 38.) mais on a fait $\forall o = \forall p$; donc $\forall m = \forall n$

Par conséquent le triangle AEC est Isoscèle (§. 106.)

C'est-à-dire, $AE = AC$

Mais selon le §. 114 & 202 on peut former la proportion

$$AB : AE = BD : DC$$

Si donc on y substitue AC pour AE, on obtiendra.

$$AB : AC = BD : DC$$

§. 208. II. *Lorsqu'entre deux lignes droites & parallèles ED, IH* (Fig. 141.) *on tire deux autres GB, CF qui s'entre-coupent dans un point A, les parties de ces lignes seront respectivement proportionnelles,* C'est-à-dire, lorsque *DE* est parallèle a *HI* & que deux lignes obliques *BG*, *FC*, s'entre coupent en *A*; les deux triangles *ABC* & *FAC* feront semblables & donneront la proportion qui suit

$$AB : AG = AC : AF$$

Car la ligne *DE* étant parallèle a *HI*.

Il s'ensuit que ∀ m = ∀ n & ∀ o = ∀ p (§ 37.)

Par conséquent les △△ *ABC* & *AFG* équiangles & semblables, donnent selon le §. 202. la proportion suivante.

$$AB : AG = AC : AF$$

Il suit de la

§. 209. III. *Que les triangles BCA, FAG, formés par deux lignes qui se coupent entre deux parallèles, sont semblables.*

§. 210. IV. *Lorsque dans l'angle obtus A* (Fig. 143.) *d'un triangle amblygone ABC, on forme deux angles égaux aux deux angles aigus de la base, de manière que l'∀ m formé sur le côté AB soit égal a l'∀ aigu C, & l'∀ n, formé sur le côté AC soit égal a l'∀ aigu B & que de plus, on prolonge les lignes AD & AE jusqu'a la base BC: on obtiendra les résultats suivans.*

1°. *Les triangles ABD & AEC seront semblables entr'eux & semblables au grand triangle ABC.*

2°. *La ligne AD sera égale a la ligne AE*

3°. *La superficie du quarré construit sur le côté AB sera égale a celle d'un rectangle formé par la base BC*

&

& par la partie BD: c'est-à-dire, $\overline{AB}^2 = BC \times BD$.

4o. *La superficie du quarré construit sur le côté AC sera égale a celle d'un rectangle formé par la base BC & par l'autre partie CE*: c'est-à-dire, $\overline{AC}^2 = BC \times CE$.

1° Pour démontrer que les $\triangle\triangle$ *ABD*, *AEC* & *ABC* sont semblables entr'eux, il faut rémarquer que l'$\angle\, m = \angle\, C$ & que l'$\angle\, B$ est commun aux deux $\triangle\triangle$ *ABC*, *ABD*.

Par conséquent le $\triangle$ *ABC* sera équiangle & semblable au $\triangle$ *ABD* (§. 202.)

De même le $\triangle$ *ABC* sera équiangle & semblable au $\triangle$ *ACE*: comme ayant l'$\angle\, C$ commun & l'$\angle\, n = \angle\, B$.

D'ou il suit, que les $\triangle\triangle$ *ABC*, *ABD* & *AEC* sont semblables.

2°. L'angle s est $= \angle\, m + \angle\, B$ & $\angle\, r = \angle\, n + \angle\, C$ (§. 100.)

Mais par la construction $\angle\, m = \angle\, C$ & $\angle\, n = \angle\, B$

Par conséquent $\angle\, r = \angle\, s$.

D'ou il suit, que le $\triangle$ *ADE* est Isoscèle & par conséquent la ligne $AD = AE$. (§. 106.)

3°. Les triangles semblables *ABC* & *ABD*, donnent la proportion

$$BC : AB = AB : BD \text{ (§. 202.)}$$

Multipliant les extrêmes & les moyens selon le §. 194, on obtient

$$AB \times AB \text{ ou } \overline{AB}^2 = BC \times BD.$$

4° Enfin, les triangles ſemblables ABC & ACE donnent la proportion

$$BC : AC = BC : CE$$

Et par conſéquent $\overline{AC}^2 = BC \times CE$ (§. 194.)

§. 211. V. *Quand un triangle ABC* (Fig. 144.) *eſt rectangle en A, & qu'on fait l'angle m égal a l'angle aigu oppoſé C, l'angle reſtant n ſera égal a l'angle oppoſé B, & la coupante AF ſera perpendiculaire ſur la baſe CB.*

Car ſelon le §. 96, les $\forall\forall\ B + C + (m + n) = 180° = 2 \llcorner$

Or $\forall\ m + n = \llcorner$: donc $\forall\ B + \forall\ C = \llcorner$, de plus $\forall\ r + s = 2 \llcorner$ §. 25; & $\forall\ r = \forall\ n + \forall\ C$: $\forall\ s = \forall\ m + \forall\ B$, (§. 100) & par la conſtruction l'$\forall\ m = \forall\ C$ & $\forall\ n = \forall\ B$.

Par conſéquent $\forall r = \forall s = \llcorner$ & la ligne $AF \perp$ ſur BC (§. 11.)

Il ſuit de la,

§. 212. VI. *Que ſi de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, la figure ſera diviſée en deux triangles rectangles FAB, FAC, qui ſeront ſemblables entr'eux & ſemblables au grand triangle BAC.*

§. 213. VII. *Les perpendiculaires abaiſſées de deux angles égaux ſur les côtés oppoſés de deux triangles ſemblables, ſeront proportionnelles entr'elles, & aux cotés de leurs triangles.*

C'eſt-à-dire, lorſque dans deux triangles ſemblables ABC, DEF, on tire des mêmes angles A & E

(Fig.

(Fig. 161.) deux perpendiculaires AG & EH ſur les côtés oppoſés BC, DF, les proportions ſuivantes, auront lieu

$AB : BC = DE : DF = AC : EF = \perp AG : \perp EH.$

Cette vérité eſt évidente par les §. §. 202 & 203.

Car le $\triangle\ BGC$ ſera $\sim \triangle\ EDH$.

Et par conſéquent

$$AC : EF = \perp AG : \perp EH$$

§. 214. VIII. *La perpendiculaire AF* (Fig. 144) *tirée d'un angle droit ſur le grand côté d'un triangle rectangle, eſt moyenne proportionnelle entre les parties de cette ligne.*

C'eſt-à-dire, lorsque la ligne AF tirée de l'angle droit eſt $\perp$ ſur le côté oppoſé BC : la proportion ſuivante aura lieu

$$BF : AF = AF : FC$$

Cette vérité eſt une ſuite du §. 212.

§. 215. IX. *La perpendiculaire AF* (Fig. 145.) *tirée ſur le diamètre BC d'un cercle, & prolongée juſqu'a la circonférence, eſt moyenne proportionelle entre les deux parties BF & FC du diamètre.*

C'eſt-à-dire, lorſque d'un point F du diamètre BC on éléve la perpendiculaire FA, prolongée juſques a la circonférence: cette perpendiculaire FA ſera moyenne proportionnelle entre les parties BF & FC du diamètre, & la proportion ſuivante aura lieu

$$BF : FA = FA : FC$$

Cette vérité eſt une ſuite des §. 69 & 214, comme il eſt aiſé de le voir en tirant les lignes AB, & AC.

Il suit de la

§. 216. X. *Que le quarré de la perpendiculaire AF est égal au rectangle des deux parties de la perpendiculaire.*

Car de la proportion

$$BF : FA = FA : FC$$

On peut conclure,

par le §. 194 que $\overline{AF}^2 = BF \times FC$

§. 217. XI. *Quand deux cordes AB, DE d'un même cercle s'entre coupent dans un point C* (Fig. 146.) *le rectangle des deux parties d'une des lignes sera égal au rectangle des deux parties de l'autre.*

C'est-à-dire, lorsque deux diamètres, ou un diamètre & une corde, ou bien deux cordes, s'entre coupent en C, le rectangle $AC \times CB$, formé des parties de la ligne AB, sera égal au rectangle $DC \times CE$ des parties de la ligne DC: ou ce qui révient au même $AC \times CB = DC \times CE$.

Pour démontrer cette vérité, il faut tirer les lignes AD & BE.

Comme les ∀∀ n & o sont placés a la circonférence sur le même arc EA, l'∀ n = ∀ o (§. 65.) & de plus les angles opposés en C, égaux. (§. 27.) Le △ BEC sera ∾ △ CDA (§. 202.) Ce qui donne la proportion.

$$AC : DC = CE : CB.$$

Multipliant les extrêmes & les moyens selon le §. 194, on obtient.

$$AC \times CB = DC \times CE.$$

§. 218. XII. *Quand d'un point A pris hors du cercle* (Fig. 147.) *on tire une tangente AC, & une sécante AB, le quarré de la tangente AC, sera aussi grand, que le rectangle de toute la sécante AB, multipliée par la partie extérieure AD.*

C'est-à-dire, $\overline{AC}^2 = AB \times AD$

Tirez les lignes BC & DC

Le $\triangle$ BAC est équiangle au $\triangle$ ACD (§. 202.)

Car $\forall y = \forall x$ (§. 68.) & $\forall A$ est commun aux deux triangles.

Les côtés qui sont situés autour d'un même angle A, sont donc proportionnels. (§. 204.)

C'est-à-dire,

$$AB : AC = AC : AD$$

Si l'on multiplie la première grandeur AB avec la dernière AD & la seconde avec la troisième selon §. 194 il viendra

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD$$

Il suit de la

§. 219. XIII. *Que si d'un même point A* (Fig. 148.) *on tire plusieurs sécantes AB, AD, AE, & une tangente AC: le rectangle de chacun de ces sécantes par sa partie extérieure, sera égal au quarré de la tangente.*

C'est-à-dire,

$$\overline{AC}^2 = AB \times AF = AD \times AG = AE \times AH$$

III. Problemes, relatifs a la maniere de chercher des lignes proportionnelles.

§. 220. PROBLEME I. *Trouver une quatrième proportionnelle a trois lignes données.*

C'est-à-dire, on demande une ligne cF (Fig. 151.) dont la longueur soit proportionnelle a trois lignes données AB, AC, & BD.

SOLUTION. Faites un angle ZAX a volonté.

Rétranchez de la ligne AZ la partie $Ab = AB$ & $bd = BD$, & de la ligne AX une partie $Ac = AC$.

Joignez les points b & c par la ligne bc, & tirez par le point d, la droite dF parallèle a bc, (§. 44.)

La ligne cF sera la proportionnelle demandée; parceque $\triangle$ Abc est $\sim$ $\triangle$ AFd.

Et $Ab : bd = Ac : cF$ (§. 200.)

Si on substitue AB, AC, BD, en place des lignes Ab, Ac, & bd, il en résultera

$$AB : AC = BD : cF$$

§. 221. PROBLEME II. *Trouver une moyenne proportionnelle BD entre deux lignes droites données AB, BC,* (Fig. 152)

SOLUTION. Joignez les deux lignes AB, & BC dans une même direction AC.

Décrivez sur AC un demi cercle ADC.

Elé-

Elévez au point *B* une ligne *BD* perpendiculaire sur *AC* (§. 41.): cette perpendiculaire sera la moyenne proportionnelle démandée selon le §. 215.

§. 222. PROBLÉME III. *Trouver une troisiéme proportionnelle BD a deux lignes données AB, BC* (Fig. 153.)

C'est-à-dire, trouver une ligne *BD* qui fasse une proportion continue avec deux lignes données *AB, BC*

On peut résoudre ce Probléme de deux maniéres.

PRÉMIÉRE METHODE. Quand dans le I Probléme on suppose que *AC* est = *BD*, la droite *cF* sera la troisiéme proportionnelle. (Fig. 151.)

SECONDE METHODE. Joignez les lignes *AB* & *BC* de manière qu'elles forment un angle droit *ABC* (Fig. 153.)

Tirez *AC* & faites au point *C* un angle droit *ACD*.

Prolongez les lignes *AB* & *CD* jusqu'a ce qu'elles se rencontrent en *D*.

La ligne *BD* sera la troisiéme proportionnelle (§. 214.)

§. 223. PROBLÉME IV. *Trouver une progression de lignes, dont les deux prémières soient données.*

SOLUTION. Tirez deux lignes a volonté *FH* & *GE*, qui se coupent a angle droit en *B*. (Fig 154.)

Prenez sur *FH* une partie *AB* égale a la prémiere re ligne donnee & ſur *GE* une partie *BC*, égale la ſeconde ligne donnée.

Tirez *AC*, & faites en *C* un angle droit *ACD*.

Prolongez *CD* juſqu'a la ligne *FH*, & la droite *BD* ſera une troiſième proportionnelle (§. 214.)

Faites de réchef en *D* un angle droit *CDE*, & prolongez la ligne *DE* juſques en *E* & la droite *BE* ſera la quatrième proportionnelle au trois lignes *AB* *BC*, *BD* (§. 212.)

Continuez l'opération de la même manière, & les lignes, *AB*, *BC*, *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, & *BH* ſeront en proportion continue.

§. 224. PROBLÉME V. *Diviſer une ligne donnée AB* (Fig. 155, 156.) *en pluſieurs parties égales*, Par exemple en cinq parties.

PREMIÉRE METHODE. Tirez une ligne *AC* (Fig. 155) qui faſſe un angle *CAB* avec la donnée *AB*.

Prenez ſur *AC* cinq parties égales.

Tirez par *C* & *B* une ligne *CB*, & par les points 1, 2, 3, 4, les lignes droites, *a* 1, *b* 2, *c* 3, *d* 4, parallèles a *CB*; (§. 44.) ces lignes couperont la donnée *AB* en cinq parties égales. (§. 200.)

SECONDE METHODE. Tirez par *A* (Fig. 156.) une ligne *AC* & par *B* une ligne *BD* parallèle a *AC*. § 44.

Prenez ſur ces lignes *AC* & *BD* cinq parties égales.

Tirez par les points 1, 2, 3, 4, des droites, qui couperont la donnée aux points *a*, *b*, *c*, *d*, en cinq par les égales.

TROI-

TROISIÉME METHODE. Tirez une ligne *CD* (Fig. 157.)

Prénez ſur cette ligne cinq parties égales.

Conſtruiſez ſur *CD* un triangle équilateral *CDF* (§. 111.) & tirez par ces points, des lignes droites, qui coupent le triangle *CDF* en cinq triangles égaux. (§. 160.)

Appliquez la donnée *AB* le long des côtés *FC*, & *FD* du triangle équilatéral *FOD* dans les points *a* & *b*.

Joignez les points *a* & *b* par la ligne *ab*, qui ſe trouvera diviſée en cinq parties égales.

La Démonſtration de ces trois différentes Methodes de réſoudre le Problême propoſé, eſt fondée ſur le §. 202. parceque les $\triangle\triangle$ *ACB* & *Aa* 1, &c. ſont $\sim$ & parconſéquent leurs côtés proportionnels.

DE LA PROPORTION,

QUI A LIEU ENTRE LES

CIRCONFERENCES

ET LES

SURFACES

DES

FIGURES GÉOMÉTRIQUES.

I. *De la proportion qui a lieu entre les Circonférences & les Surfaces des Figures dissemblables.*

§. 225. Les figures dissemblables sont celles qui n'ont pas la même forme; c'est-à-dire, dont les côtés ne sont point proportionnels entr'eux, ni les angles également grands.

§ 226. Au contraire, *les figures semblables ont le même nombre d'angles égaux, & les côtés, qui forment ces angles proportionnels entr'eux.*

Pour se former une idée de deux figures semblables, il faut les considérer (tant rélativement a leurs côtés & a leurs angles, que rélativement a leurs surfaces) comme composées d'un même nombre de points ou de petites parties tellement dis-

posées

posées, qu'il ne se trouve aucune d'elles dans une de ses figures, qui n'aye sa partie correspondante dans l'autre; que pour cette raison il ne se trouve dans l'une aucune partie qui ne puisse se rapporter a sa correspondante dans l'autre ; & que par conséquent, chacune de ces figures, est composée d'une même nombre de parties homologues, semblables & semblablement posées: D'ou il suit, que la différence de grandeur de deux figures semblables, ne provient que de la différente grandeur, qu'il y a entre les parties ou les points correspondans, qui forment les contours, & les surfaces de ces figures semblables.

Par exemple, quand deux triangles, deux cercles, ou deux polygones équilateraux & équiangles, sont tellement construits, que dans la premiére de ces figures, chaque côté ou le diamétre soit 10 pieds & celle des autres de 10 verges; la surface de la figure, dont le côté est de 10 pieds, sera exprimée par des pieds quarrés, & celle de la seconde figure, dont la mésure étoit de 10 verges, sera exprimée par le même nombre de verges quarrées.

On peut conclure de ce raisonnement.

§. 227. I. *Que les circonférences de deux figures semblables sont entr'elles comme deux de leurs côtés homologues.*

Par exemple, la somme des quatre côtés d'un quarré sont a la somme des quatres côtés d'un autre quarré, comme un des côtés du premier est a un des côtés du second.

§. 228.

§. 228. II. *Dans deux cercles inégaux les circonférences seront entr'elles comme les rayons ou les diamètres de ces figures semblables.*

§. 229. III. *Les circonférences de deux figures irrégulières sont comme la somme de tous les côtés de chaque figure.*

§. 230. IV. *Les surfaces de deux Paralelogrammes sont entr'elles en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.*

C'est-à-dire, que la surface du paralelogramme M (Fig. 158.) est a la surface du paralelogramme N, comme la base AB, multipliée par la hauteur perpendiculaire DE du Pgr. M, est au produit de la base EF multipliée par la hauteur HI du Pgr. N.

Car la surface du Pgr $M = AB \times \perp DE$
La surface du Pgr $N = FE \times \perp HI.$ §. 162.
Donc $M : N = AB \times \perp DE : FE \times \perp HI$ (§. 187).

§. 231. V. *Lorsqu'on tire les diagonales DE & HF, on formera deux triangles DAB, HEF, qui seront chacun les moitiés de leurs Paralelogrammes* (§. 161.)

D'ou l'on peut deduire (§. 192) la proportion suivante.

$\triangle ABD : \triangle EHF = AB \times \perp DE : FE \times \perp HI$

Il suit de là,

Que les surfaces de deux triangles sont entr'elles en raison composée de leurs bases multipliées par leurs hauteurs.

§. 232. VI. Si l'on suppose que $\perp DE = \perp HI$, ou ce qui révient au même, que les Paralelogrammes

mes ont la même hauteur les grandeurs $\perp DE$ $\perp HI$ des deux dernières termes pourront être effacées selon le §. 189, & la nouvelle proportion sera.

$$M : N = AB : EF$$

Ce qui fait voir, que

Les surfaces des Paralelogrammes qui ont la même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.

§. 233. VII. Quand on suppose la $\perp ED = \perp HI$ a l'égard de la proportion

$$\triangle ABD : \triangle EFH = AB \times \perp ED : EF \times \perp HI$$

C'est-à-dire, quand les triangles ABD, EFH ont la même hauteur, on obtiendra en effaçant les grandeurs égales, (§. 189.) cette nouvelle proportion

$$\triangle ABD : \triangle EFH = AB : EF$$

C'est-à-dire, *les surfaces des Triangles qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.*

§. 234. VIII. Au contraire, quand dans la proportion

$$M : N = AB \times \perp DE : EF \times \perp HI$$

on suppose que les paralelogrammes ont les mêmes ou des bases égales; les grandeurs AB, EF pourront être effacees, & la proportion deviendra

$$M : N = \perp DE : \perp HI$$

C'est-à-dire, *les Paralelogrammes, qui ont les mêmes ou des bases égales, sont entr'elles en même raison de leurs hauteurs particulieres.*

§. 235. IX. De même, *les surfaces de deux triangles, qui ont les mêmes, ou des bases égales, sont entr'elles, comme les différentes hauteurs de ces triangles.*

§. 236. X. Quand on suppose dans la proportion

$$M : N = AB \times \perp DE : EF \times \perp HI$$

que le Pgr M est $=$ Pgr N; les deux dernièrs termes de cette proportion seront aussi égaux entr'eux. (§. 188.)

C'est-à-dire, quand les Paralelogrammes sont égaux, ou que

$$AB \times \perp DE = EF \times \perp HI$$

on pourra former la proportion suivante, selon le §. 195.

$$AB : EF = \perp HI : \perp DE.$$

Il suit de ce raisonnement.

Que dans les Paralelagrammes égaux, les bases sont entr'elles dans la raison inverse de leurs hauteurs.

C'est-à-dire, quand la surface de la figure M est aussi grande que celle de la figure N, la base de la première figure, est a celle de la seconde, comme la hauteur de la seconde, est a la hauteur de la première.

§. 237. XI. Cette vérité a aussi lieu par rapport aux triangles égaux;

C'est-à-dire, *que dans des triangles égaux, les bases sont entr'elles en raison inverse des hauteurs de ces figures.*

§. 238. XII. Toutes les fois, que la figure M est équiangle a la figure N, ou que $\forall A = \forall E$; le $\triangle ADB$ sera équiangle & égal au $\triangle EDF$, & par conséquent, les deux proportion suivantes auront lieu.

$$\left.\begin{array}{l} AD : EH = \perp DE : \perp HI \\ AB : EF = AB : EF \end{array}\right\} \text{§. 202.}$$

Si

Si l'on multiplie les termes homologues, il viendra (§. 190.)

$AD \times AB : EH \times EF = AB \times \perp DE : EF \times \perp HI$

Mais $M : N = AD \times \perp DE : EF \times \perp HI.$ (§ 230.)

Par conséquent $M : N = AD \times AB : FF \times EH$ (§. 197.)

Ce qui fait voir

Que les surfaces des paralelogrammes équiangles sont entr'elles en raison composée de leurs côtés homologues.

§. 239. XIII. Quand dans la dernière proportion

$M : N = AD \times AB : EH \times EF$

on suppose les deux premiers termes égaux, entr'eux, ou le Pgr $M =$ Pgr N; alors $AD \times AB$ sera $= EF \times EH$ (§. 188.)

Et par conséquent

$AB : EF = EH : AD.$ (§. 195)

Proportion, qui exprimée en paroles, donne le principe suivant.

Dans des Paralelogrammes équiangles de même grandeur, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

C'est-à-dire, la base AB du prémier est a la base EF du second, comme le côté EH du second est au côté AD du prémier. (Fig. 158.)

§. 240. XIV. De même *quand deux triangles de même surface ont un angle égal, les côtés autour de cet angle seront réciproquement proportionnels*: ou bien, quand la surface du $\triangle ACB =$ celle du $\triangle DEC$ & $\forall m = \forall n$ (Fig. 160.) les deux côtes AC, CB du $\triangle ABC$, seront réciproquement proportionnels aux deux côtés CD & EC du triangle DEC.

C'est-à-dire, $AC : CD = EC : CB$.

Pour démontrer cette vérité il faut que les $\triangle\triangle$ ACB & ECD soyent posés de maniere, que les deux côtés AC & CD forment une ligne droite AD: & alors BC & CE seront aussi en ligne droite BE (§. 27.) parceque $\forall m = \forall n$. Tirez aussi la ligne BD.

Les $\triangle\triangle$ ABC & BCD étant situés sur la même ligne droite AD, & les $\triangle\triangle$ FCD & DCE sur BE; il s'ensuit que

$$\left[\begin{array}{l} \triangle\ ABC : \triangle\ BCD = AC : CD \\ \triangle\ DEC : \triangle\ BCD = CE : BE \end{array}\right] \text{§. 233.}$$

Mais le $\triangle$ ABC est $= \triangle$ DCE.

Ainsi $\triangle\ ABC : \triangle\ BCD = \triangle\ ECD : \triangle\ DCB$ (§. 188.)

Et par conséquent

$AC : CD = CE : CB$ (§. 197.)

II. De la proportion qui a lieu entre les surfaces des figures semblables.

§. 241. I. *Les surfaces de deux triangles semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues* (Fig. 161.)

C'est-à-dire, quand les deux △△ *ABC*, *DEF* sont semblables, la surface du triangle *ABC* sera à celle du triangle *DEF*, comme le quarré construit sur la ligne *AB* est au quarré construit sur la ligne *DE*.

C'est-à-dire,

$$\triangle\ ABC : \triangle\ DEF = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$$

Tirez des angles *A* & *E*, deux perpendiculaires *AG* & *HE*. (§. 41.)

Les △△ *ABC*, *DEF* & *BAG*, *DHE* étant deux à deux semblables, donnent les proportions suivantes.

$$AB : DE = BC : DF \text{ (§. 202.)}$$
$$AB : DE = \perp AG : \perp HE \text{ (§. 213.)}$$

Les termes homologues de ces proportions étant multipliés donnent (selon les §. 190 & 157.)

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BC \times \perp AG : DF \times \perp HE$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mais } BC \times \perp AG = 2\ \triangle\ BAC \\ \&\ FD \times \perp HE = 2\ \triangle\ DEF\end{array}\right\}\ \text{§. 156 \& 161.}$$

Substituant ces grandeurs dans la dernière proportion, on obtient

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = 2\ \triangle\ ABC : 2\ \triangle\ DEF$$

Les

Les derniers termes étant divisés par *deux*, donneront

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = \triangle\ ABC : \triangle\ DEF.$$

§. 242. II *Deux figures semblables M & N* (Fig. 163) *peuvent-être divisées en un même nombre de triangles semblables, par des diagonales tirées des angles homologues.*

C'est-à-dire, quand les figures *ABCDE*, & *FGHIK* sont semblables & qu'on tire des angles *A* & *F*, deux diagonales *AC*, *AD*, *FH* & *FI*, ces diagonales diviseront les figures, en des triangles semblables, ou bien

$$\triangle\ BAC \sim \triangle\ FGH$$
$$\triangle\ ACD \sim \triangle\ FHI$$
$$\triangle\ AED \sim \triangle\ FIK.$$

Puisque l'on suppose que les figures *ABCDE* & *FGHIK* sont semblables, les côtés homologues seront proportionnels, & les angles égaux. (§. 226.)

Par conséquent $\triangle\ ABC \sim \triangle\ FGH$

& $\triangle\ ACD \sim \triangle\ FHI$ &c. (§. 204.)

§ 243. III. *Les surfaces des figures semblables M & N sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

C'est-à-dire, quand le polygone *ABCDE* est semblable au polygone *FGHIK*, la surface de la première figure sera a celle de la seconde, comme le quarré sur *AB* est au quarré sur *FG*, ou bien

$$M : N = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$$

Lorsque les figures *M* & *N* sont coupées en un mê-

même nombre de triangles semblables, selon le §. précédent, on pourra faire les proportions suivantes.

$\triangle ABC : \triangle FGH = \triangle ADC : \triangle FHI = \triangle EAD : \triangle KIF$

Prenant la somme des antécédens pour prémier terme, & celle des conséquens pour second terme, on aura. (§. 198. XI.)

$\triangle ABC + \triangle ADC + \triangle AED ; \triangle FGH + \triangle FHI + \triangle FKI = \triangle ABC : \triangle FGH.$

Mais

$\triangle ABC + \triangle DAC + \triangle AED = Fig.\ M.$

$\triangle FGH + \triangle FHI + \triangle IFK = Fig.\ N.$

Donc $Fig.\ M : N = \triangle ABC : \triangle FGH$

Mais $\triangle ABC : \triangle FGH = \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$ (§. 241.)

Par conséquent

$$Fig.\ M : Fig.\ N = \overline{AB}^2 ; \overline{FG}^2$$

§. 244. IV. *Si sur les trois côtés d'un triangle rectangle on décrit trois figures semblables, la surface de la figure faite sur le côté opposé a l'angle droit, sera aussi grande que celles qui sont formées sur les deux autres côtés du triangle.*

C'est-à-dire, lorsque sur les trois côtés AC, AB & BC (Fig. 165.) d'un triangle rectangle ABC, on décrit trois figures semblables G, E & H; la figure G opposé a l'angle droit aura autant de surface que les deux figures $E + H$ prises ensemble: ou bien la Fig. G = Fig. E + Fig. H.

Car puisque les Figures E, G & H sont semblables

$$\left.\begin{array}{l} H : G = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 \\ E : G = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 \end{array}\right\} \text{§. 243.}$$

Par conséquent

$$H + E : G = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 \quad (\text{§ 198. XII.})$$

Les triangle rectangle donne $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$. (§. 168,)

C'est-a-dire, le troisième terme égal au quatrième.

Par conséquent le premier doit aussi être égal au second; (§ 188.) ce qui donne

$$Fig.\ E + Fig.\ H = Fig.\ G.$$

§. 245. V. *Les surfaces de deux polygones semblables inscrits dans des cercles, sont entr'elles comme les quarrés des diamétres de ces cercles* (Fig. 166.)

C'est à-dire, quand les polygones semblables P & Q sont inscrits dans des cercles, leurs surfaces seront entr'elles comme les quarrés formés sur les diamètres EL, GM: ou bien

$$Fig.\ P : Fig.\ Q = \overline{EL}^2 : \overline{GM}^2.$$

Pour démontrer de principe, il faut tirer des deux angles homologues E & G, deux diagonales EB & GK & les deux diamètres EL, GM.

Tirez encore les diagonales AL, FM.

1e Le $\triangle\ EAB$ est $\sim \triangle\ GKF$. (§. 202.)

Car les côtés EA, AB sont proportionnels aux cô'és GF, FK; comme étant placés autour de deux angles égaux.

Par conséquent $\forall b = \forall k$.

2e. De plus $\forall b = \forall ALE$ & $\forall k = \forall FMG$. (§. 65) comme étant appuyés sur des arcs semblables AE, FG: donc $\forall ALE = \forall FMG$ (§. 65.)

3e. Les

3°. Les triangles rectangles LAE & FMG sont semblables. (§ 202.)

Par conséquent

$$EL : GM = AE : FG$$

$$\& \quad \overline{EL}^2 : \overline{GM}^2 = \overline{AE}^2 : \overline{FG}^2 \quad (§.\ 193.)$$

Mais les polygones semblables P & Q donnent.

$$P : Q = \overline{AE}^2 : \overline{FG}^2 \quad (§.\ 243.)$$

Par conséquent

$$P : Q = \overline{EL}^2 : \overline{GM}^2. \quad (§.\ 197.)$$

§. 246. VI. Dans le §. 178. nous avons fait ré-marquer, que les cercles peuvent être considérés comme des polygones d'un grand nombre de côtés, & la démonstration, que nous venons de donner, est applicable a tout espéce de polygone inscrit: si donc on veut considérer les cercles comme des polygones, on pourra conclure.

Que les surfaces de deux cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres.

CALCUL DE LA SURFACE
DU CERCLE
CONNU SOUS LE NOM DE
QUADRATURE.

§. 247. La manière Géométrique de trouver la circonférence du cercle, consiste a chercher en premier lieu combien est grande la surface d'un polygone inscrit dans un cercle, & en second lieu combien est celle d'un polygone circonscrit a ce même cercle & ensuite a prendre le milieu arithmétique entre ces deux résultats.

C'est ainsi, que le GRAND ARCHIMEDE est parvenu a connoître par approximation, quel est le rapport du diamètre a la circonférence du cercle, en inscrivant & en circonscrivant a cette figure un polygone de nonante six côtés.

Le résultat de ces calculs donne *le rapport du diametre, a la circonférence du cercle, comme le nombre sept est a vingt deux.* C'est-à-dire, si le diamètre est supposé être long de sept pieds, la circonférence sera a peu près vingt deux de ces mêmes pieds.

§. 248. Ce rapport de *sept a vingt deux* a été considéré comme la vraye expression du diamètre a la circonférence, jusqu'au tems, qu'un de nos concitoyens nommé LUDOLF VAN CEULEN, a déterminé par une

une méthode laborieuse, que ce rapport pouroit être exprimé plus précisement au moyen d'une ſérie de fractions décimales.

Voici le réſultat de ces calculs.

Le diamètre eſt a la circonférence, comme 1 *eſt a* 3, 141 592 653 589 793 238 46 a peu près.

Ce rapport, qui eſt très embaraſſant, comme contenant beaucoup de chiffres, n'eſt d'uſage, que lorsque l'on ſe propoſe une très grande exactitude dans le calcul, on ne s'en ſert que dans le cas ou le cercle, dont on veut connoître la circonférence, a beaucoup d'étendue.

Dans la pratique on ne fait communement uſage que des ſept premiers décimaux, & alors le rapport eſt 1 : 3, 141592. Même on rejette ſouvent les quatres derniers chiffres, ce qui donne pour le rapport du diamètre a la circonférence = 1, 3, 14. C'eſt de ce rapport dont nous nous ſervirons dans la ſuite.

§. 249. Quand on déſigne le diamètre du cercle par la lettre d, & la circonférence de cette figure par p, la proportion réduite de Van Ceulen pourra s'exprimer par la *formule.* 1 *eſt à* 3, 14 *comme le diamètre à la circonférence.*

Ou bien $1 : 3, 14 = d : p$

Et par conſéquent $p = 3, 14\, d$, ſelon le §. 194.

C'eſt-à-dire, *la circonférence d'un cercle eſt égale au diamètre multiplié par* 3, 14.

§. 250. Selon le §. 179. l'aire ou la ſurface d'un cercle eſt égale a la circonférence, multipliée par la quatrième partie du diamètre.

Par

Par conféquent l'aire d'un cercle pourra être defigné par la formule.

$$p \times \frac{1}{4} d = \frac{pd}{4} = \frac{3,14dd}{4}$$

Mais $\frac{3,14}{4} = 0,785$ (*)

Par conféquent $\frac{pd}{4} = \frac{3,14dd}{4} = 0,785\,dd.$

Formule qui étant exprimée en paroles, donne le rapport fuivant.

§. 251. *La furface du cercle eft égale au quarré du diamètre multiplié par* 785 *&* *divifé par* 1000.

Par conféquent.

§. 252. *L'aire du cercle eft au quarré décrit fur fon diamètre comme* 785 : 1000.

(*) Voyez les *Inftitutions du Calcul Numérique & Littéral*, de J. J. Blaffière, pag. 122. I. Part. & fon *Eerfte beginfelen der Reekenkunde* pag. 142.

I. De la Proportion, qui a lieu entre les differens élémens du Cercle.

§. 253. Nous avons fait voir au §. 19, que tout angle placé au centre d'un cercle, a pour mésure l'arc de cercle compris entre ses jambes, & que par conséquent, les angles égaux ont pour mesure des arcs égaux (§. 20.), Il suit de là, qu'a mésure qu'un angle augmente ou diminue, l'arc qui le mésure, deviendra plus grand ou plus petit. Ceci posé, on doit récevoir au nombre des axiomes les propositions suivantes.

§ 254 I. *La circonférence entière du cercle est a l'arc ADB, comme tous les angles, formés autour du point C ou 360^{o} sont a l'$\angle ACB$* (Fig. 167.)

C'est-à-dire,

Circonf. : l'arc $ADB = 360_{o} : \angle ACB$

Par consequent les trois proportions suivantes auront encore lieu (en faisant usage des §. 191. & 192.)

$\angle ACB : \angle BCE =$ arc ADB : arc BFE

$\angle ACB : \angle ACE =$ arc ADB : arc AGE

$\angle BCE : \angle ACE =$ arc BFE : arc AEG

ou bien

Surface du $\odot$: surface $ACBD = 360_{o} : \angle ACE$

§. 256. III. *Les surfaces de deux secteurs d'un même cercle sont entr'elles comme la grandeur des angles de ces secteurs.*

C'est-à-dire,

ACBD

$$ACBD : BCEF = \forall ACB : \forall ECB$$
$$ACBD : ACEG = \forall ACB : \forall ACE$$
$$BCEF : ACEG = \forall BCE : \forall ACE.$$

§. 257. IV. *Les surfaces des secteurs semblables, pris dans des cercles différens sont entr'elles, comme les cercles, dont ils sont partie,*

C'est-à-dire : quand les secteurs *ACBD acbd* (Fig. 168.) sont des parties semblables de leurs cercles, la surface du grand cercle est a celle du petit, comme le secteur de cercle *ACBD* est au secteur semblable *adbc* (*).

§. 258. V. Par conséquent, *les parties ou les secteurs semblables de deux cercles inégaux sont entr'elles comme les quarrés des rayons de ces cercles.* (§. 246.)

§. 259. VI. *Quand dans deux cercles inégaux on tire les lignes AB, ab, les segmens de cercle, qui en proviennent sont aussi semblables;* & par conséquent on pourra faire les proportions suivantes.

$$\text{Segm. } ADB : \text{Segm. } adb = \odot\, ADBF : \odot\, adbf$$
$$\text{Segm. } AFB : \text{Segm. } afb = \odot\, ADBF : \odot\, adbf.$$

§. 260. VII. *Les segmens de cercle semblables sont en-*

(*) On appelle *secteurs semblables* ceux qui sans être également grands sont une même partie du cercle dont ils sont partie. Par Ex. dans les deux cercles inégaux de la Fig 168, les secteurs *ACBD*, & *acbd* sont des parties semblables de leurs cercles respectifs, parceque l'$\forall$ C est $= \forall$ c.

Il en est de même de tous les *segmens semblables.*

entr'eux, comme les quarrés des rayons ou des diamètres des ces segmens semblables. (§. 246.)

§. 261. VIII. *Lorsque sur les trois côtés d'un triangle rectangle on décrit trois cercles M, N & R,* (Fig. 169.) *le cercle R décrit sur le côté opposé a l'angle droit sera aussi grand que les deux autres cercles M & N décrits sur les côtés AB; BC.*

C'est-à-dire: si le $\triangle\, ABC$ est rectangle le $\odot\, R = \odot\, M + \odot\, N$.

Nous avons fait voir au §. 246, que

$$\odot\, M : \odot\, N = \overline{CB}^2 : \overline{BA}^2$$

Par conséquent

$$\odot\, M + \odot\, N : \odot\, M = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{BC}^2$$

Or $\odot\, M : \odot\, R = \overline{CB}^2 : \overline{AC}^2$ (§. 246.)

Donc aussi

$$\odot\, M + \odot\, N : \odot\, R = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 \text{ (§. 198. XII.)}$$

Mais $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ (§. 168.)

Par conséquent

$$\odot\, M + \odot\, N = \odot\, R \text{ (§. 188.)}$$

§. 262. IX. Remarque Si l'on compare, ce que nous venons de dire en dernier lieu, avec ce que nous avons fait voir precédemment aux §. 168 & 244, rélativement aux figures semblables décrits sur les trois côtés du triangle rectangle: on pourra conclure en général, *que de toutes les figures semblables décrites sur les trois côtés d'un triangle rectangle, celle qui se trouve sur le plus grand côté* ap-

(appellé l'Hypothenuse) est égale a la somme de celles qui sont décrites sur les deux autres côtés (nommés cathêtes)

§. 263. X. Quand (Fig. 170.) *A est le centre commun de deux cercles ADCE & BAGF, & la droite BC une perpendiculaire, sur le rayon AD, (prolongée jusqu'a la circonférence en C); la surface de l'anneau comprise entre les deux circonférences BFG & ECD sera aussi grande que celle du cercle dont BC seroit le rayon.*

Pour le démontrer, on doit tirer le rayon *AC*.

Ceci fait, on obtient un triangle rectangle *ABC*.

Or selon le §. 261, le ⊙ sur *AC* = ⊙ sur *BC* + ⊙ sur *AB*.

Retranchez ⊙ sur *AB* = ⊙ sur *AB*.

Il restera ⊙ sur *AC* — ⊙ sur *AB* = ⊙ sur *BC*.

Mais ⊙ sur *AC* — ⊙ sur *AB* = a l'anneau *CDEGFB*.

Par conséquent l'anneau = *CDEFGB* = ⊙ sur *BC*.

§. 264. XI. *Lorsque sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC* (Fig. 171.) *on décrit trois demi cercles, de telle manière que le demi cercle BEAFC décrit sur le plus grand côté couvre le triangle & rétranche de chacun des demi-cercles (décrits sur les deux autres côtés un segment) alors les surfaces des deux lunules BGAE + AHCF pris ensemble seront égales a celle du triangle rectangle.*

C'est-à-dire la surface du △ *ABC* sera = lunule *BGAE* + la lunule *AHCF*.

Ce

Ce Principe est une suite de §. 261.

Car le demi ⊙ $BEAFC = \frac{1}{2}$ ⊙ $BGAB + \frac{1}{2}$ ⊙ $AHCA$.

Rétranchant de part & d'autre les petits segmens $BEAB + AFCA$

Il restera △ ABC = lunule $BGAE$ + lunule $AHFC$.

II. Problèmes rélatifs a la Methode de construire des figures Semblables, et au Calcul de la Surface du Cercle, &c.

§. 265. PROBLÉME I. *Sur une ligne donnée AD construire une figure M semblable a la figure N* (Fig. 172)

SOLUTION. *Première Methode.* Tirez dans la figure N une diagonale FH, par laquelle cette figure sera divisée en deux triangles FHE, FGH.

Faites au point A sur la ligne AD, un ∀ A = ∀ E & en D un ∀ m = ∀ n. (§. 28.)

Prolongez les côtés de ces angles pour former le △ ABD, qui sera équiangle au △ FEH (§ 202.)

Faites la même chose a l'égard du △ FGH.

La figure M sera ∾ & équiangle a la figure N selon le §. 242.

Seconde Méthode. Faites au point A sur AD un ∀ A = ∀ E.

Cherchez une quatrième proportionnelle *AB* aux trois lignes *EH*, *EF* & *AD*.

C'est-à-dire, faites cette proportion.

$EH : EF = AD : AB$ (§. 220.)

Le second côté *AB* de la figure *M* étant ainsi determiné, on passe a la ligne *BC* en la faisant encore proportionnelle aux côtés.

$EF : FG = AB : BC.$

Après que l'on aura fait $\forall B = \forall F$.

On continue ainsi a chercher des proportionnelles jusqu'a ce que toute la figure est achevée.

§. 266. REMARQUE. C'est selon cette méthode, que l'Arpenteur forme le plan d'une campagne ou d'une contrée. La Verge ou la Toise est la mésure, dont il se sert pour mésurer le terrein: & une échelle ou une mésure divisée en parties égales lui sert d'unité semblable sur le papier, sur lequel il se propose de tracer son plan. Le Graphomètre ou quelqu'autre récipiangle est la machine, dont il fait usage pour mésurer les angles sur le terrein, & le Transporteur ou Demicercle divisé en dégrés, lui sert a tracer les angles observés, sur le papier. L'abregé du second Volume de la Géométrie Theorétique & Pratique de mon Père, (*) que je me propose de donner dans la suite, contiendra la manière dont on opere, pour faire des Plans avec la justesse réquise.

§. 267.

(*) *Inleiding tot de beschouwende en Werkdaadige Meetkunde, en het gebruik derzelver in het Landmeeten, Waterpassen enz.* II Deel, 's Hage 1776.

§. 267. PROBLÈME II. *Calculer l'aire ou la surface de la figure M semblable a la figure N; étant connus, la longueur des côtés AD & EH en nombres & surface de la figure N.* (Fig 172.)

Par exemple, si on suppose $AD = 100$ verges, $EH = 40$ verges & la surface de la figure $N = 250$ verges quarrés.

SOLUTION. Selon le §. 243 on peût faire la proportion

$$\overline{EH}^2 : \overline{AD}^2 = \text{surface } N : \text{surface } M.$$

Si dans cette proportion, on substitue les nombres donnés, & la lettre x pour la surface de la figure M, il viendra

$$40 \times 40 : 100 \times 100 = 250 : x$$
$$\text{ou } 1600 : 10000 = 250 : x$$

Et par conséquent

$$1600\,x = 2500000$$

$$\text{C'est-à-dire } x = \frac{2500000}{1600} = \frac{25000}{16} = 1562,5.\ (*)$$

D'ou il paroît, que la surface de la figure M est égale a 1562, 5 verges quarrées.

§. 268.

(*) Nous supposons ici que le Lecteur est instruit dans l'Arithmétique vulgaire & qu'il connoisse les fractions décimales Ceux qui ont envie de s'en instruire peuvent consulter les *Institutions du Calcul Numérique & Littéral*: ou bien *de Eerste Beginselen der Reekenkunde*, que nous avons eu occasion de citer précédemment.

§. 268. PROBLEME III. *Déterminer la circonférence d'un cercle, dont le diamètre est long 128 pieds?*

SOLUTION. Faites selon le §. 248. la proportion

$$1 : 3,14 = 128 : x$$

D'ou il provient, en multipliant les extrèmes & les moyens, selon le § 194.

$$x = 3,14 \times 128 = 401,92.$$

Par conséquent la circonférence du cercle, dont le diamètre est long de 128 pieds sera = 401, 92 de ces mêmes pieds.

§ 269 PROBLÉME IV. *Déterminer ou calculer l'aire d'un cercle, dont le diamètre est de 256 pieds?*

SOLUTION. On peut résoudre ce Problême par le §. 252. qui donne la proportion suivante

$1000 : 785 = 256 \times 256$: l'aire du cercle demandé, ou $1000 : 785 = 65536 : x$

(En supposant $x =$ a la surface demandée)

Par conséquent $1000\, x = 785 \times 65536$ (§. 194.)

Et $x = 51445,76$

C'est-à-dire la surface du cercle demandé, dont le diamètre est 256 est égale a 51446, 76 pieds quarrés.

§. 270. PROBLÉME V. *Combien est grand l'aire d'un secteur de cercle ACBD* (Fig. 168.) *dont l'an-*

l'angle C est de 48°, & le rayon AC long de 60 pieds?

SOLUTION. On doit résoudre ce problème par les §. 252 & 254.

Comme le rayon *AC* est de 60 pieds, le diamètre du cercle doit être long de 120 pieds.

Par conséquent l'aire du cercle se détermine par la proportion

1000 : 785 = 120 × 120 : *l'aire du cercle.*

Ou bien 100 : 785 = 14400 : x

C'est-à-dire, 1000 x = 785 × 14400 (§. 194.)

ou x = 11304

L'aire du cercle total est par conséquent 11304.

Pour trouver la surface de la partie donnée, ou du Secteur, on fait cette proportion (§. 254)

$$360 : 48 = 11304 : y$$

$$\& \quad 360\, y = 11304 \times 48$$

$$\text{ou} \quad y = \frac{11304 \times 48}{360} = 1507 \frac{1}{5}$$

L'aire du Secteur de cercle demandé sera donc = 1507, 2 *pieds quarrés.*

§. 271. PROBLÈME VI. *Combien est grand l'anneau CDF dont le plus grand diamètre est de 20 pieds & le plus petit 12 pieds?* (Fig. 170.)

SOLUTION. La surface de l'anneau *CDF* est égale a l'aire du grand cercle *CDF* moins celle du petit cercle *FB*.

L'aire du grand cercle est $= 0,785 \times 400 = 314$ pieds quarrés, par le §. 251.

Celle du petit $= 0,785 \times 144 = 113,04$ pieds quarrés.

Par conséquent l'aire de l'anneau *CDF* $= 314 - 113,04 = 200,96$ *pieds quarrés*.

PROPRIÉTÉS DES PLANS GEOMÉTRIQUES.

I. Des lignes droites qu'on peut tirer sur une Surface plane.

Jusques ici nous avons ſuppoſé, que les lignes & les figures, dont nous avons parlé, étoient poſées ou décrites ſur une ſurface plane; maintenant nous allons faire voir, de quelle manière un tel plan ou une telle ſurface plane peut-être formée.

§. 272. Suppoſons une ligne droite indefinie *AE* (Fig. 173.), a laquelle une autre *CD* ſoit fixée perpendiculairement, ſuppoſons de plus que *AE* tournant ſur elle même, faſſe tourner auſſi la perpendiculaire *CD*, de manière, qu'elle décrive la ſurface d'un cercle.

C'eſt-à-dire, que *CD* en tournant décrira un plan *CCCDDD*, qui ſera poſé perpendiculairement ſur *AE*, ou pour dire la même choſe en d'autres termes, un plan ſur la quelle la ligne *AE* ſera perpendiculaire.

§. 273. I. *Un plan Géométrique eſt donc une ſurface, qui a cette propriété, que tous les points d'une ré-*

gle ou d'une ligne droite posée sur elle, la touchent de toutes parts.

Si les lignes *KF*, *KG* (Fig. 174.) n'étoient point perpendiculaire l'une sur l'autre, la révolution de la droite *KG* autour de *KF* ne formeroit point un plan, mais cette ligne décriroit une surface convexe ou concave selon que l'angle *FKG* seroit aigu ou obtus.

Il suit delà

§ 274 II. *Que toute les parties d'une même ligne droite doivent être situées dans un même plan.*

§. 275. III. *Lorsque deux points d'une même ligne droite sont situées dans un plan Géométrique, toute la ligne s'y trouvera.*

§. 276. IV. *Trois points qui ne se trouvent point dans la même ligne droite, suffisent pour déterminer la position d'un plan Géométrique.*

Car supposant qu'un plan Géométrique se meuve autour d'une ligne droite, dont deux points suffisent pour en déterminer la position (§. 8.) ; (de même que le couvercle d'une tabatière autour de sa charnière) ce plan sera arrêté dans sa révolution a la rencontre du premier point situé hors de la ligne droite autour de la quelle il tourne: donc &c.

§ 277. V. *Toutes les parties d'un même triangle sont situées dans un même plan Géométrique.*

C'est-à-dire, lorsque par la rencontre mutuelle de trois lignes droites on forme un triangle, ces trois li-

lignes (ou tout le triangle) feront pofés dans un même plan.

§. 278. VI. *Une ligne droite qui eſt perpendiculaire ſur un plan Géométrique ſera auſſi perpendiculaire ſur toutes les lignes droites tirées dans ce plan par le point de contact ou par le pied de cette perpendiculaire* (Fig. 173.)

C'eſt-à-dire, lorſque la droite *AE*, eſt perpendiculaire ſur le plan *CCCDDD*, cette même ligne ſera auſſi perpendiculaire ſur toutes les droites *DC*, *DC* &c.

Et réciproquement,

§. 279. VI. *Lorſque AE eſt perpendiculaire ſur deux droites CD, CD ſituées dans le même plan Géométrique: cette droite AE ſera auſſi perpendiculaire ſur ce plan.*

Ce principe eſt une ſuite du §. 272.

§. 280. VII. *Quand deux lignes droites ſont perpendiculaires ſur un plan, ou également incliné du même côté, elles ſeront auſſi parallèles.*

C'eſt-à-dire, quand ſur le plan *PM*, (Fig. 175.) les droites *AB* & *DC* ſont perpendiculaires, ou les lignes *EB*, *CF* également inclinés d'un même côté; de manière que ∀ *EBC* ſoit = ∀ *FCK*, la droite *AB* ſera parallèle à *DC* & *EB* à *FC*.

Pour le démontrer, tirez par les points *B* & *C*, ſitués dans le plan *PM*, la ligne *BCK*.

Comme *AB* & *DC* ſont ſuppoſées être perpendiculaires ſur le plan *PM* : les angles *ABC* & *BCD* feront des angles droits. (§. 272.)

Par conséquent *AB* est parallèle a *DC.*

Quand les lignes *EB* & *CF* ont la même inclination, l'angle *EBC* doit être égale a l'angle *ECK.*

Par conséquent *EB* est parallèle a *CF.* (§ 39.)

§. 281. VIII. *Deux lignes droites, qui se coupent, sont dans un même plan.*

§. 282. IX. *Quand deux lignes droites parallèles & situées dans le même plan sont coupées par une troisième; cette coupante sera aussi dans le même plan avec les deux parallèles:* parceque les points de section de cette coupante doivent aussi se trouver dans un même plan avec les deux lignes parallèles; selon ce qui a été dit au §. 275.

§. 283. X. *Il n'est pas possible, que trois points soyent situés dans deux plans différens, a moins, que ces trois points se trouvent dans une même ligne droite.*

Car toutes les fois, que les trois points en question ne sont point dans la même direction pour former une ligne droite, on pourra construire un triangle entre ces points. Or nous avons démontré au §. 277, que toutes les parties d'un même triangle sont situées dans un même plan: donc &c.

Il suit de là

§. 284 XI. *Que la commune section de deux plans qui s'entre coupent, forme une ligne droite.*

II. De la Section commune de deux ou de plusieurs Plans.

§. 285. I. *On ne peut élever qu'une seule perpendiculaire AB* (Fig. 177.) *d'un même point A pris sur le plan: à d'un même point B situé hors du plan PM; & on ne peut faire tomber sur ce plan PM qu'une seule perpendiculaire AB.*

§. 286. II. *La distance d'un point B a un plan PM est mesurée par la perpendiculaire AB.*

Tirez dans le plan *PM* par le point *A* une ligne *CAD.*

Tirez par le point *B* jusqu'a cette ligne *CD* la droite *CB.*

La figure *BCA* sera un triangle, & par conséquent l'angle en *C* ne peut être un angle droit, parceque l'angle en *A* est droit: (§. 97.) par conséquent la ligne *AB* est < *BC.* (§. 105.)

§. 287. III. *Quand un plan TV est coupé par deux plans parallèles PM, RS* (Fig. 178.) *les angles internes opposés seront égaux: & si deux ou plusieurs plans parallèles sont coupés par un autre plan, les sections communes seront des lignes parallèles* (*).

C'est.

(*) On entend ici par *plans parallèles* des plans géométriques dont toutes les parties correspondantes gardent toujours la même distance: (tels que sont les planchés des differens étages d'un même édifice.) & qui, quoique prolongés en tout sens, ne se rencontrent jamais.

C'est-à dire, lorsque par un point x d'une Section commune xN on tire deux lignes Px, TV perpendiculaires sur cette Section, & par y aussi une perpendiculaire RS sur la même Section commune; les lignes Px, TV, RS sont dans un même plan. (§. 272.)

Par conséquent $\forall\ PxF = \forall\ Mxy = \forall\ xyR = \forall\ SVy$. (§. 36.)

Car les lignes xN & yz sont perpendiculaires sur le même plan, dans lequel les lignes TV, PM & RS sont situés: & par conséquent xN & yz doivent être aussi parallèles entr'elles. (§ 280.)

D'ou il suit,

§. 288. IV. *Que quand une ligne est perpendiculaire sur une des plans parallèles, cette ligne doit aussi être perpendiculaire sur l'autre plan. Et réciproquement: Deux plans PM & RS seront parallèles entr'eux, lorsque la même droite Gy leur est perpendiculaire.*

§. 289. V. *Toutes les fois que les deux jambes AB, BD* (Fig. 179.) *d'un angle rectiligne ABD sont coupées par deux plans parallèles PM, QN; les lignes ad, AD tirées par les points par ou les lignes AB, BD passent, sur chacun de ces plans, seront parallèles.*

Au § 281. Nous avons démontré, que deux lignes AB, BD, qui se rencontrent en un point B, sont situées dans le même plan. Par conséquent ADB doit être considéré comme un plan qui coupe deux plans parallèles PM & QN. Or nous avons dé-

démontré, (§. 287.) que les communes sections *ad*, *AD*, d'un plan, qui en coupe deux autres parallèles doivent aussi être parallèles.

Donc la section *AD* est parallèle a la section *ad*

Il suit de là

§. 290 VI. *Que les parties de deux lignes, qui passent par deux ou par plusieurs plans parallèles seront proportionnelles, soit que ces lignes se touchent, soit que ces lignes soyent placés dans des plans differens.*

C'est-à-dire (Fig. 179) lorsque deux lignes *AB*, *AD* se rencontrent en *B*, & que les plans *PM* & *QM* sont parallèles, on pourra faire la proportion

$$Ba : aA = Bd : Dd.$$

§. 291. VII. *Lorsque les lignes AB, BD* (Fig. 180.) *qui traversent les trois plans parallèles ne se touchent non seulement pas, mais qui plus est, que même ces lignes ne sont pas situées dans un même plan; les parties de ces lignes, comprises entre les plans parallèles seront encore proportionnelles.*

C'est-à-dire, $Ba : Aa = Bd : Dd.$

Le premier Cas (Fig. 179.) se déduit immédiatement du §. 289, dans lequel on a démontré, que dans le triangle *ABD* la ligne *ad* est parallèle a *AD*, & par conséquent

$$Ba : Aa = Bd : Dd.$$

Pour démontrer le second Cas (Fig. 180.) il faut tirer les lignes *BD*, *BB*, *af*, *fd* & *AD*.

Ceci fait, toutes les parties du △ *BAD* sont dans un même plan. (§. 276.)

Par conséquent

$$Ba : Aa = Bf : fD.$$

Mais

Mais les parties du triangle *BBD* sont dans un même plan. (§. 276.)

Donc

$Bf : fD = Bd : dD.$

Et enfin

$Ba : Aa = Bd : dD.$ (§. 197.)

§. 292. VIII. *Lorsque deux droites AB, BC* (Fig. 181.) *qui se touchent en B, sont parallèles a deux autres droites situées dans un plan différent, qui se rencontrent en E; ces lignes comprendront des angles égaux.*

C'est-à-dire, si *AB* est parallèle a *DE* & *BC* à *EF* ces lignes, quoique situées dans des plans différens formeront l'∀ *ABC* = ∀ *DEF.*

Pour le démontrer, il faut faire la préparation qui suit.

Retranchez des lignes *AB*, *BC*, *ED*, *EF*, quatre parties égales;

C'est-à-dire, faites $BG = BI = EH = EK.$

Tirez les lignes *BE*, *GH*, *IK*, *GI*, *HK.*

Maintenant comme *BG* est égale & parallèle a *EH* & *BI*, égale & parallèle a *EK.*

Il s'ensuit que *BE* est aussi égale & parallèle a *GH* & *IK* (§. 125.).

Par conséquent △ *GBI* = △ *HEK* & l'∀ *GBI*, ou *ABC* = ∀ *HEK* ou *DEF.* (§. 115.)

III. Propriétés des angles solides.

§. 293. Toutes les fois que trois (ou plusieurs) lignes *AB*, *AD*, *AC* (Fig. 182.) non situées dans un même plan, se rencontrent en un même point *A*, les plans qui passeront par ces lignes pris deux a deux, (a savoir un plan par *AB* & *AD*, un second par *AB* & *AC*, & un troisième par *AC* & *CD*) formeront un angle solide.

Un angle solide est donc formé par l'intersection mutuelle de plusieurs angles plans, dont les communes sections (pris deux a deux) se reunissent dans un même point A.

§. 294. I. *Si trois angles plans CAB, BAD, DAC, (Fig. 183.) forment un angle solide A: deux de ces angles pris comme l'on voudra seront plus grand que le troisième.*

C'est-à-dire, ∀ *BAD* + ∀ *CAB* sont plus grand que le troisième angle *CAD*; ou bien ∀ *CAB* + ∀ *d* > ∀ *b* + *c*.

Pour le démontrer, il faut faire la préparation suivante.

Formez sur la ligne *AC* & dans le plan du △ *CAD* un ∀ *b* = ∀ *CAB*.

Faites *AE* = *AB*. Tirez par les points *C* & *E* la droite *CE* prolongée jusqu'au *D*.

Tirez encore les droites *CB* & *BD*.

Ceci fait, le △ *BCA* sera = △ *CAE*. (§. 117.)

par-

parceque $\forall\, b = \forall\, CAB$, que AB eſt $= AE$ & la droite AC commune aux deux triangles.

Par conſéquent $BC = CE$.

Dans le $\triangle\, BCD$ (que l'on ſuppoſe couché ſur le papier) deux côtés pris enſemble ſont plus grand que le troiſieme, c'eſt-à-dire, $CB + BD > CD$. (§. 105.)

Si l'on rétranche de $CB + BD$ la partie BC & de CD une égale partie CE: les reſtes, ſavoir BD & ED ſeront inégaux: c'eſt à dire, $BD > ED$.

Et conſidérant les $\triangle\triangle\, ABD$ & AED on trouvera $AD = AD$; $AB = AE$, mais $BD > DE$

Par conſéquent $\forall\, d > \forall\, c$. (§. 119)

Donc $\forall\, d + \forall\, CAB > \forall\, b + c$ (parceque $\forall\, CAB = \forall\, b$) c'eſt-à-dire, que les deux angles plans pris enſemble ſont plus grand que le troiſième.

§. 295, II *La ſomme de tous les angles plans BAC, CAD & BAD qui forment un angle ſolide eſt moindre que 360°.*

Prenez ſur les communes ſections, trois parties égales: c'eſt-a-dire, faites $AB = AC = AD$.

Tirez les droites BC, CD & BD, qui étant ſituées dans un même plan ſelon le § 277. formeront trois autres angles ſolides, B, C & D.

Dans le §. précédent nous avons démontré que l'angle plan BDC eſt plus petit que $\forall\, ADB + ADC$; l'$\forall$ plan $CBD < \forall\forall$ plan $CBA + ABD$

l'$\forall$ plan $BCD < \forall\forall$ plan $BCA + ACD$.

Il paroît donc que la ſomme des trois angles plans du $\triangle\, BCD$ eſt plus petite que celle des ſix angles

des

des $\Delta\Delta$ *ABC*, *ACD*, *ABD*, contigus aux angles solides *B*, *C* & *D*.

Or la somme des trois angles plan du Δ *CAD* est $=$ 180°. (§. 96.)

Par conséquent la somme des six angles mentionés sera plus grande que 180°.

Mais la somme des neuf angles qui forment les triangles *ABC* + *ACD* + *ABD* faisant six angles droits, ou trois fois 180°. (§. 96.)

Il s'ensuit, que les trois angles plans qui forment l'angle solide sont moindre que quatres angles droits ou 360°.

IV. DE LA MANIÉRE D'ELÉVER ET D'ABAISSER DES PERPENDICULAIRES SUR LES PLANS GÉOMÉTRIQUES.

§. 296. PROBLÉME I. *D'un point A* (Fig. 184) *situé hors d'un plan ZX, faire tomber une perpendiculaire sur ce plan.*

SOLUTION. Tirez dans le plan *ZX*, une ligne *BC*.

Tirez du point *A* sur cette ligne *BC* une perpendiculaire *AD* (§. 42.)

Le point *D* étant situé dans le plan *ZX*, on peut y tirer sur la ligne *BC* & au point *D* une seconde perpendiculaire *DH*.

Cette ligne *DH* assigne la place du plan qui passe par les lignes *DH* & *DA*. (§ 281.)

Tirez dans ce nouveau plan une ligne *AH* perpendiculaire sur *DH* (§. 42.) qui sera aussi perpendiculaire sur le plan *ZX*.

Pour démontrer, cette construction on doit tirer dans le plan *ZX* une ligne *EF* parallele a *BC*. (§. 44.)

Puisque *BC* & *EF* sont paralléles & que la première est perpendiculaire sur *DH*; la droite *EF* sera aussi perpendiculaire sur cette même ligne (§. 36.)

Par conséquent *EF* sera aussi perpendiculaire sur le plan *DHA* (§. 279.)

Mais

Mais la ligne *AH* eft dans le plan *DHA* & de plùs elle eft perpendiculaire fur *DH*.

Par conféquent *AH* fera auffi perpendiculaire fur le plan *ZX* (§. 279)

§. 297. PROBLÉME II. *D'un point A fitué dans un plan PM élever une perpendiculaire fur ce plan* (Fig. 177.)

SOLUTION. Prenez un point *H* hors du plan *PM*.

Tirez de ce point *H*, une perpendiculaire *HC* fur le plan *PM*, (par le §. 296.)

Tirez par les points *C* & *A* une ligne a volonté *CAD*, & dans le plan *HCD*, qui paffe par les lignes *HC*, *CD*, une ligne *AB* parallèle à *HC* qui fera perpendiculaire fur *PM* (§. 279.)

§. 298. PROBLÉME III. *Comment mefure t'on, l'angle, que forme une ligne oblique AD par rapport a un plan horizontal ZX.* (Fig. 184)

SOLUTION. Tirez (comme dans le Problème §. 296.) une ligne *BC*, perpendiculaire fur *AD* & dans ce même plan une ligne *DH* $\perp$ fur *BC* (§ 42.) ceci fait, le plan *DAH* fera $\perp$ fur le plan *ZX* (§. 278, 282.) La ligne *AH* $\perp$ fur *DH* faira connoître l'inclinaifon de la ligne *AD* rélativement au plan horizontal *ZX*.

§. 299. PROBLÉME IV. *Quelle eft la meilleure manière de méfurer l'angle MTX ou BAD, que forment deux plans inclinés ZM & ZX.* (Fig. 186.)

SOLUTION. Prenez ſur la ſection commune *ZY*, le point *A*.

Tirez par ce point deux perpendiculaires, l'une *AB* dans le plan *ZM*, & l'autre *AD* dans le plan *ZX*. (§. 43.)

Le plan, qui paſſera par ces deux lignes ſera perpendiculaire ſur les plans *ZM* & *ZX*, comme étant perpendiculaire ſur la ſection commune. (§. 279.)

Tirez enfin par *B* une perpendiculaire *BC*, ſur *AD*, ou bien décrivez de *A* avec le rayon *AB* un arc de cercle.

La première de ces opérations fait connoître la grandeur du triangle rectangle *ABC*: la ſeconde montre la grandeur de l'angle par le moyen de l'arc de cercle. (§. 19.)

§. 300. PROBLÉME V. *Comment doit on poſer un plan PM pour être parallèle au deſſus d'un plan donné ZX* (Fig. 187.)

SOLUTION. Prenez dans le plan *ZX* trois points *A*, *B* & *C*, qui ne ſoient pas dans la même direction mais qui forment un angle *ABC*.

Tirez de chacun de ces points, des perpendiculaires égales *DA*, *BE*, *CF*, (§. 297.)

Joignez les points *DE*, *EF* par des lignes droites; le plan *PM*, qui paſſera par ces lignes *DE*, *EF* ſera parallèle au plan donné *ZX* (§. 286 & 287)

§. 301. PROBLÉME IV. *Quelle eſt la méthode la plus ſimple, pour méſurer la grandeur d'un angle ſolide, & pour le copier.* (Fig. 188.)

SOLUTION. Poſez l'angle ſolide, par un de ces côtés ou de ces angles plans, ſur un plan *ZX*. Ceci fait, on peut méſurer par le §. 298 & 299, l'obliquité de la ligne *AB*.

REMARQUE. Si l'angle ſolide eſt composé de plus de trois angles plans, on reïtére l'opération pour chacun de ces côtés.

DE LA GÉOMÉTRIE DES CORPS SOLIDES.

I. Definitions et description des differens Corps Solides Géométrique.

§. 302. Un corps Solide peut être consideré sous trois dimensions : c'est à-dire, comme ayant de *la longueur*, *de la largeur & de la profondeur ou de l'épaisseur.*

Communément on ne considère dans la Géométrie que les corps Solides, proprement dit : c'est-à-dire, ceux dont les parties immuables conservent toujours la même place : une planche, un poutre, un édifice ou une partie de ces corps, sont des solides, au lieu que la mésure des fluides ne fait point l'objet de la Géométrie, que lorsqu'ils sont renfermés ou contenus dans des bassins, dont les parois sont des solides & c'est alors qu'on les mésure par la capacité de leurs bassins.

§. 303. Les corps qui font l'objet de la Géométrie peuvent-être rangés en trois Classes.

La première Classe contient les corps dont les sur-

surfaces sont des plans, & qui sont connus sous le nom de *polyëdres.*

La seconde, les corps, qui sont terminés par des surfaces courbes, convexes ou concaves, nommés des corps ronds ou sphériques.

La troisième, les corps, dont les surfaces sont en partie plans & en partie courbes.

§. 304. Les ANCIENS divisoient les corps solides sous les noms de *corps réguliers* & de *corps irréguliers.*

Par des solides réguliers ils entendoient ceux, qui sont compris par des surfaces semblables & égaux. Tels sont. *Le dez ou le cube, le Globe* &c.

Ils y en ajoutoient encore quatre autres, nommés

Le *Tétraëdre*; qui est une Pyramide terminée par quatre triangles équilateraux & égaux.

L'*Octaëdre;* qui est un solide terminé par huit triangles équilateraux & égaux.

Le *Dodecaëdre;* qui est un solide terminé par douze Pentagones équilatéraux & égaux.

L'*Icosaëdre;* qui est un solide terminé par vingt triangles équilateraux & égaux.

Par des corps irréguliers ils entendoient les corps solides terminés par des surfaces irréguliéres & inégales.

Pour ce qui est des corps, que nous avons désigné sous le nom général de Polyëdres, ou corps a plu-

plusieurs côtés, on doit y ranger, outre les corps réguliers des ANCIENS, dont nous venons de parler, encore deux autres espèces sçavoir.

I. *Les corps totalement irréguliers*, ou ceux, dans les quels les plans & les angles, qui les terminent, sont dissemblables.

II. *Les corps Symmétriques*, c'est-à-dire ceux, qui sans être entièrement réguliers ont les plans & les angles opposés parallèles & égaux: c'est principalement de ces sortes de corps, dont on traite dans la Géométrie des Solides, ainsi que nous allons le faire voir.

§. 305. Les corps Symmétriques terminés par des Plans, se rangent sous deux classes.

I. LES PRISMES.

II LES PYRAMIDES.

§. 306. *Un Prisme*, est un corps solide, dont la base, qui est un plan polygone, est égale a la platte forme, ou au dessus du corps & dont les plans, qui forment les côtés de ce corps sont des paralelogrammes. (Voyez *Figures* 189. 191. 193. 201. 202. 205 & 208.)

Le *Prisme est droit*, lorsque la surface superieure est perpendiculaire sur la base, & que les côtés du corps sont tous des paralelogrammes rectangles. (comme *ABEF* Fig. 189.)

Le *Prisme est oblique*, toutes les fois que les côtés de ce corps sont des Paralelogrammes obliques comme *HKLN*.

§. 307. *Une Pyramide*, est un corps, dont la base est une figure polygone & dont les plans qui forment les côtés, sont des triangles, qui se terminent tous en un même point. (Fig. 190.)

La Pyramide est droite, lorsque son sommet est perpendiculaire sur le milieu de sa base.

La Pyramide est oblique, lorsque la ligne tirée du sommet jusqu'au centre du plan de la base, est oblique sur cette base.

§. 308. Les Prismes & les Pyramides ont des noms différens selon le nombre de côtés qui forment le polygone, qui leur sert de base.

Par exemple, un Prisme ou une Pyramide dont la base est un plan triangulaire, quadrilatère, ou pentagone se nomme *Prisme ou Pyramide triangulaire, quadrilatère ou pentagone, &c.*

§ 309. Le Prisme, dont la base est un quarré ou un paralelogramme, & dont par conséquent les côtés opposés sont des figures semblables & égales est nommée *Poutre* ou *Paralelipipède.*

C'est ainsi, que le corps *A* (Fig. 191.) est un *paralelipipède droit*, & *B* un *Paralelipipède oblique.*

§. 310. Pour ce qui est des corps solides, qui sont terminés par des plans courbes, la *Sphère* ou le *Globe* tient le premier rang.

On nomme *Globe* ou *Sphère*, un corps solide régulier terminé par un plan courbe, dont tous les points sont la même distance d'un point C situé dans le corps, & au quel on a donné le nom de centre (*Fig.* 192.)

Chaque ligne tirée de ce point C de part & d'autre jusqu'a la circonference est nommée *Diamètre* ou *Axe de la Sphère.*

§. 311. La troisième espèce de corps solides, nommement ceux, dont les surfaces sont en parties rectilignes, en parties des surfaces courbes, on les distingue en deux classes, savoir.

I. Les Cylindres.

II. Les Cones.

Un *Cylindre* est un corps, terminé aux deux extrémités opposés par des cercles égaux & parallèles & dont le côté est formé par un plan courbe, plié autour des circonférences des bases opposés.

§. 312. Un cône est une pyramide, dont la base est un cercle, & dont la surface ronde concoure en un point (Fig. 174. 190. 196. 197.)

§. 313. Un *Cylindre est droit,* lorsque la ligne qui passe par les centres des deux cercles opposés, est perpendiculaire sur les deux surfaces (Fig. 202. *E*)

Un *Cylindre est oblique*, toutes les fois, que la ligne, tirée par les deux centres des plans opposés n'est pas perpendiculaire sur ces plans. (Fig. 209.)

§. 314.

§. 314. La ligne, tirée par les deux centres eſt appellée l'*axe du Cylindre.* (Voyez les lignes *CD*, *cd*, Fig. 209.).

§. 315. *Le cône eſt droit*, lorſque l'axe de ce corps tiré du ſommet au centre de la baſe, eſt perpendiculaire ſur cette baſe. (Voyez la ⊥ *KL*. Fig. 190.) Au contraire *le cône eſt oblique*, lorſque l'axe n'eſt pas perpendiculaire ſur la baſe.

§. 316. Les corps ſolides qui ſont l'objet de la Géométrie, peuvent être rapportés ſous trois genres.

Premier Genre. *Les Prismes,*

A ce genre ſe rapportent.

1°. *Les Prismes triangulaires*, dont les baſes opposé ſont des triangles égaux.

2°. Les *Poutres* ou *Paralelipipèdes* & les *cubes.*

3°. Les *Prismes polygones*, &c. dont les baſes opposées & parallèles ſont des polygones de cinq ou ſix côtés, &c.

4°. Le *Cylindre*, dont les baſes opposés ſont deux cercles égaux & parallèles.

Second Genre. *Les Pyramides.*

A ce genre ſe rapportent.

1°. Les *Pyramides*, dont les baſes ſont des figures

res rectilignes, & dont les côtés, montants sont des triangles. qui concourent au sommet.

2°. *Le cône*, dont la base est un cercle.

TROISIEME GENRE *Le Globe ou la Sphère.*

§. 317. Tous les corps du premier Genre peuvent être considérés comme composés d'une multitude de tranches ou de surfaces égales & très minces, entassées les unes sur les autres pour former le corps solide.

C'est ainsi qu'un rame de papier, ou les feuillets d'un livre forment un Paralelipipède composé d'une grande multitude de feuillets ou de surfaces très minces.

Le Dèz ou le Cube, peut-être considéré comme composé d'une multitude de quarrés très minces posés réguliérement les uns sur les autres.

Le *Prisme droit*, comme une multitude de polygones équilatéraux & équiangles, posés rectangulairement les uns sur les autres.

Le *Prisme oblique*, comme une multitude de surfaces égales, qui n'étant point posés rectangulairement les unes sur les autres, le sont dans une situation oblique.

§. 318. Tous les corps du second Genre peuvent être considérés comme composés d'une multitude de polygones ou cercles posés les uns sur les autres, qui n'étant pas de même grandeur, diminuent

nuent régulièrement de bas en haut, jusques dans le sommet.

§, 319. La formation des corps du troisième Genre, savoir la Sphère peut se conçevoir de la manière suivante.

Lorsque l'on fait tourner un demi cercle autour de son diamètre, ce demi cercle décrira en tournant une Sphère, tandis que la periphérie du demi cercle, décrit la surface de ce corps (Fig. 198.)

Le Diamètre immobile, autour du quel se meut le demi cercle Générateur, est appellé *l'axe de la Sphère.*

II. Definitions des Corps Semblables.

§. 320. *Deux corps de même espèce sont semblables, lorsque les trois dimensions du premier sont proportionnels aux trois dimensions du second, & que les corps sont équiangles.*

C'est-à-dire, deux corps sont semblables, lorsqu'ils sont formés par un même nombre de plans semblables & homologues.

§. 321. *Deux Prismes sont semblables*, lorsque les bases étant des figures semblables, & les lignes montantes, qui separent les côtés (ayant la même direction, rélativement a leurs plans,) ont la même proportion entr'elles, que deux côtés homologues pris dans leurs bases.

§. 322. *Deux Pyramides sont semblables entr'elles*, lorsque leurs bases étant des figures semblables, les lignes, tirées du sommet jusques a un angle homologue, ont la même direction, & sont proportionnelles a deux côtés homologues de leurs bases.

§. 323. *Deux Cilyndres ou deux cônes sont semblables*, lorsque leurs axes ayant la même direction ou inclinaison rélativement a leurs bases, sont entr'eux comme les diamètres de ces bases.

PRO-

PROPRIÉTÉS DES

PRISMES, CYLINDRES, PYRAMIDES, CONES ET SPHERES,

LORSQUE CES CORPS SONT COUPÉS PAR DES PLANS.

§. 324. I. *Toutes les fois, qu'un prisme ACG* (Fig. 189.) *est coupé par un plan adfg parallèle a la base ADFG, cette section aura la même forme & la même grandeur, que la base du corps.*

La section parallèle d'un cube ou d'un dez donne un quarré égal a la base du cube.

Celle du Cylindre donne un cercle, qui est aussi grand que la base du corps.

On peut démontrer ces vérités de la manière suivante.

Puisque le plan *ADF* & *adfg* est parallèle a la base *ADFG*; la ligne *AD* sera parallèle à la ligne *ad*; *DF* à *df*; *FG* à *fg* &c.

Par conséquent les figures *AadD*, *dDfF*, *FfgG* &c. sont des paralelogrammes. (§. 122.)

D'ou il suit, que $AD = ad$, $DF = df$, $FG = fg$, &c. (§. 125.)

Et

Et la figure *ADF* semblable & égale a la figure *adfg*. (§. 199 & 226.)

La Section sera donc de la même forme, & de la même grandeur, que la base du prisme.

La même méthode de démontrer a lieu, dans le Cylindre, toutes les fois qu'on considéré les bases opposées de ce corps comme des Polygones semblables d'un même nombre de côtés, selon ce qu'il a été dit aux §. 178 & 246.

§. 325. II. *Lorsqu'une pyramide ou un cône* (Fig. 190.) *est coupé par un plan parallèle a sa base: cette section formera une figure semblable a celle de la base; mais elle sera d'autant plus petite, qu'elle approchera plus du sommet du corps coupé.*

Puisque dans la pyramide *ABCD*, on suppose que la section *bcd* est parallèle a la base de la Pyramide, il s'ensuit que

$$Ab : bB = Ac : cC. \quad (\S.\ 290.)$$

Par conséquent *bc* est parallèle à *BC*.

On prouvera de la même manière, que *BD* est parallèle à *bd*, & *DC* à *dc*.

D'ou il suit, que la figure *bcd* est semblable a la base *BCD*.

§. 326. La partie inferieure de la pyramide ou du cône; après qu'on en a enlévé la pointe par une section parallèle a la base se nomme *une pyramide ou un cône tronqué*.

C'est ainsi que la partie *BbdcCD* est nommée une pyramide tronquée.

La

La partie *GHIF* du cone *FGK* est un cone tronqué.

§ 327. III *Lorsqu'une Sphère* (Fig. 192.) *est coupé par un plan, la section plane sera un cercle, soit que le plan coupant passe par le centre soit qu'il n'y passe point.*

1°. Lorsque la section *DE* passe par le centre, le point *C* sera le centre de la commune section: comme ayant la même distance de la circonférence *DE* décrite sur la surface de la Sphère.

2°. Lorsque la section ne passe point par le centre du Globe, elle formera cependant un cercle. Ainsi que nous allons le démontrer.

Pour cet effet supposons que l'axe *CA* soit tiré ⊥ sur le plan *DF*.

Tirez plusieurs lignes *dC*, *Ce*, &c. du centre *C* jusqu'a la circonférence de la figure *de*.

Les lignes *Cd*, *Ce*, &c. tirées du centre a la circonférence sont égales entr'elles (§ 310.)

Par conséquent ces droites *Cd*, *Ce* sont a égales distances du point *F* (§. 49.)

D'ou il paroît, que le cercle décrit du point *F* avec le rayon *Fd* ou *Fe*, passe par tous les points de la circonference; : c'est-à-dire, que cette figure est un cercle.

§. 328. Il paroît par la démonstration que nous venons de donner, que la section de la Sphère, qui passe par le centre, donne le plus grand cercle.

 C'est

C'est pourquoi qu'on appelle *grand cercle de la Sphère, celui qui a le même centre avec ce corps: au lieu que les autres sections sont nommées des petits cercles, parceque leurs rayons sont plus petits, que celui de la Sphère.*

DE

DE LA SURFACE DES CORPS GÉOMÉTRIQUES

I. De la Surface des Prismes, des Pyramides &c.

§. 329. I. *La surface des Paralelogrammes rectangles, qui forment les côtés d'un prisme droit, sont (pris ensemble) égales a un paralelogramme d'égale hauteur avec le prisme, & dont la base est aussi longue que la circonférence de corps.* (Fig. 193.)

C'est-à-dire, que les surfaces des paralelogrammes $AabB + BbcC + CcdD + DdeE + EeaA =$ au paralelogramme $AaaA$, dont la base aa est $= ab + bc + cd + de + ea$, & dont la hauteur est Aa; comme il est évident par les §. 158 & 306.

§. 330. II. *La surface convexe d'un Cylindre droit $FfgG$* (Fig. 194.) *est égale a celle d'un paralelogramme rectangle de la même hauteur que le Cylindre & dont la base est aussi longue que la circonférence de la base du Cylindre.*

Comme il est évident par les §. 311. 316. & 329.

§. 331. III. *La surface convexe d'un Cylindre, dont la hauteur est égale au diamètre de la base du Cylindre est quatre fois si grande la base.*

Car lorsque l'on suppose la hauteur du Cylindre égale au diamètre de la base circulaire, la surface convexe sera égale a la circonference de ce cercle multiplié par le diamètre; or nous avons démontré (§. 179.) que la surface d'un cercle est égale a sa circonférence, multiplié par le quart de son diamètre.

Par conséquent, la surface convexe d'un Cylindre, dont la hauteur est égale au diamètre de sa base, sera quatre fois plus grande que sa base.

§. 332. IV. *La surface montante d'une pyramide est égale a celle de tous les triangles, qui l'entourent; & lorsque la pyramide est droite, cette surface sera équivalente a celle d'un triangle, dont la hauteur est égale a la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide, sur un des côtés, & dont la base est égale a la longueur du circuit de la base.*

§. 333. V. Le cone pouvant être considéré comme une pyramide, dont la base est un cercle (ou un polygone d'un grand nombre de côtés); il s'ensuit, *que la surface convexe d'un cóne est égale a un secteur de cercle ABCB* (Fig. 196). *ou un triangle de même hauteur AB que le cône, & dont l'arc, ou la base BCB est égale a la circonférence de cercle BC.*
Ce Theorème est une suite des §. 307. 312. 316 & 332.

§. 334. VI. *La surface montante d'un cône ou d'une* *ne pyramide tronquée est égale a celle d'un trapése, dont la base (parallèle au côté supérieur) est aussi longue, que le circuit inferieur du corps, & le côté d'enhaut aussi longue que le circuit supérieur.* (Fig. 197.)

C'est-à-dire, que la surface du cône tronqué *BbcC*, est égale au trapése *EefF*: dans lequel *ef* est = circonférence du cercle *bc*, & la droite *EF* = a la circonférence du cercle *BC*, & dont la ⊥ *eE* = *Bb*.

Pour le démontrer, il faut achéver le cône, en prolongeant les côtés jusqu'a leur rencontre en *A*.

Nous venons de faire voir, que la surface du cône entier *BAC*, est égale a celle du △ *DEF*, lorsque *EF* est égale a la circonférence de la base *DE*, & que sa hauteur égale le côté *BA* du cône.

De même, la surface du cône defficient *Abc* sera égale a celle du triangle *Def*, lorsque *eD* = *Ab* & *af* = a la circonference du cercle *bc*.

En retranchant le △ *eDf* du grand △ *DEF*, le reste, savoir le trapése *FEef* répresentera la surface du cône tronqué.

REMARQUE. Lorsqu'on tire par le milieu *G* de la ligne *Ee* une ligne *GH* parallèle a *EF*, cette ligne sera une moyenne entre les lignes *ef* & *EF*.

Par conséquent la surface du trapése *efEF* pourra être exprimée par *Ee* × *GH*.

Il suit de la, que

§. 335. VII. *La surface d'un cône tronqué est égale a la circonference d'un cercle décrit sur le milieu de sa* *surface convexe multipliée par la hauteur de ce même cône tronqué.* (*).

II. Methode de Determiner la Surface d'une Sphere.

§. 336. Nous avons dit au §. 319. que la Sphère peut-être considerée comme produite par la révolution d'un demi cercle *AcbB* autour de son diamètre *AB* (Fig. 198.) Si l'on suppose que la surface du cercle Générateur est composée ou couverte d'un nombre infini de lignes perpendiculaires *cC*, *dD*, & qu'on aye inscrit ou circonscrit au dedans ou autour de ce cercle, un polygone d'un même nombre de côtés; de manière, que chacun des côtés de ce polygone soit compris entre deux de ces perpendiculaires *cC*, *dD*; alors les surfaces de ces polygones inscrit & circonscrit seront chacun à peu près égale a celle du demi cercle (selon le §. 178.) & le polygone inscrit sera divisé en un nombre infini de petit trapéses, dont un d'eux est exprimé par la figure *DdcC*.

Si

(*) Lorsque la ligne *EF* répresente le circuit d'une pyramide tronquée & la droite *ef* le circuit supérieur, la ligne *GH* sera encore une moyenne proportionnelle entre ces deux circuits; & alors le principe que nous venons d'établir pour le cône tronqué sera aussi applicable aux pyramides.

Si donc l'on fait faire, a ce demi cercle & a son polygone, (inscrit ou circonscrit) une révolution entiere autour de son axe *AB*: le demi cercle d'écrira une Sphère, & le polygone un polyëdre composé d'autant de cônes tronqués, qu'il y aura de perpendiculaires sur *AB*, ou de côtés dans le polygone inscrit ou circonscrit.

Il paroit de ce raisonnement.

§. 337. I. *Que la Sphère peut être considerée comme composée d'un nombre infini de cônes tronqués, entassés les uns sur les autres autour d'un axe commun.*

II. *Que les bases des deux plus grands cônes sont un grand cercle de la Sphère, & que les bases des cônes suivants diminuent de part & d'autre du centre* C *dans la même raison, que les perpendiculaires, qui couvrent la surface du demi cercle générateur,*

III. *La surface de la Sphère sera aussi, (peu s'en faut) égale, a celle du polyëdre inscrit ou circonscrit* c'est-a-dire, *que la surface de la Sphère, pourra être supposée égale a la somme des surfaces de tous les anneaux circulaires, qui forment les surfaces convexes des cônes tronqués, & dont on suppose que les polyëdres sont composés.*

IV. *La même methode, ou le même calcul, qui doit servir a déterminer la surface de tous ces cônes tronqués, dont ces polyëdres sont composés, donnera aussi la surface de la Sphère.*

Nous allons tacher de dévélopper cette methode, avec toute la clarté & la brièveté possible.

§. 338. Suppoſons (Fig. 199) que *ABdDEGH ILMQP*, ſoit une Sphere compoſée des cônes tronqués *BOFD*; *ABDE*, *PAEG*; *PQHG*; *QNIH*; *NMKI*, &c.

Si maintenant on démontre, *que la ſurface de chacun de ces cônes tronqués BODF, ABDE*, &c. *eſt égale a l'axe, ou a l'épaiſſeur dF, Ex du cône tronqué, multiplié par la circonférence du grand cercle de la Sphère;* on pourra conclure, que la ſomme des ſurfaces de ces cônes tronqués, dont la Sphère eſt compoſée, eſt égale a la ſomme de tous les axes de ces cônes, (ou de la ligne *dL*) multipliés par la circonférence du grand cercle de la Sphère.

Pour cet effet tirez par le milieu *y* du côté *AB* une ligne *yR* parallele aux plans *BD*, *AE*. (§. 44)

Tirez *ys* perpendiculaire ſur *AB*: cette ligne paſſera par le centre *C*; & ſera un axe de la Sphere (§. 61. & 819.)

Tirez par le point *B* la ligne *Bz* $\perp$ ſur *AE*, (§. 42.) cette ligne *Bz* ſera égale a l'axe *Tx* du cône tronqué (§. 32.)

Tirez enfin la droite *Rs*.

Le $\triangle$ *ABz* ſera $\sim$ $\triangle$ *yRs*. (§. 202.)

Car l'$\forall$ *ABz* eſt = $\forall$ *Rys*, parceque l'$\forall$ *ByR* a la même meſure que $\forall$ *Rys*. (§. 62.)

De plus ces triangles ſont rectangles, le premier en *z*, & le ſecond en *R*.

Ainſi la proportion ſuivante aura lieu

$$Bz \text{ ou } Tx : AB = yR : ys.$$

Mais les circonférences des cercles ſont entr'elles comme leurs diamétres (§. 228.) Par conſéquent *Tx* ſera à *AB*, comme la circonférence du cercle dé-

décrit sur le diamètre yR est a celle qui est décrit sur le diamètre ys : c'est-à dire, a la circonférence d'un grand cercle de la Sphère. (§. 328.)

Si l'on substitue les circonférences, que nous venons d'indiquer, a la place de leurs diamètres, dans la dernière proportion, on aura Tx : AB = circonf. yR : circonf de la Sphère.

Multipliant les extrèmes & les moyens, selon le §. 194 on obtient les résultats suivans.

L'axe Tx $\times$ circonférence du grand cercle est égal au côté AB $\times$ circonférence du cercle yR.

Or nous avons démontré au §. 334, que AB $\times$ circonférence yR est égal a la surface convexe du cône tronqué $ABDE$.

Par conséquent cette surface sera aussi égale a la circonférence d'un cercle de la Sphère, multipliée par l'axe du même cône tronque Tx (§. 194)

On peut démontrer par une méthode semblable, que la surface du cône tronqué $APGE$ est égale a une même circonférence du grand cercle, multipliée par l'axe xC de ce cône.

Il paroît donc, *que la surface de chaque cône tronqué, dont la Sphère est composée, est égale a la circonférence d'un grand cercle, multipliée par son axe: & que par conséquent, la somme de tous ces produits:* c'est-a-dire, *la surface de tous les cônes tronqués, est égale a la circonférence d'un grand cercle, de la Sphère, multipliée par toutes les parties* dT, Tx, xC, CL &c. *qui composent l'axe* dL *de la Sphère.*

D'ou il paroit.

§. 339. *Que la surface d'une Sphère est égale a la circonférence de la Sphère multipliée par son axe.*

Nous avons fait voir au §. 179. que la surface d'un cercle est égale à sa circonférence multipliée par le quart de son diamètre. Par conséquent, *la surface d'une Sphère sera égale a la surface de quatre grands cercles de cette Sphère.*

Il est démontré au §. 331. que la surface convexe d'un cylindre, dont la hauteur égale le diamètre de sa base, est aussi égale à quatre fois la surface du cercle, qui lui sert de base.

Il paroit donc.

§. 340 *Que lorsque la hauteur d'un cylindre est égale au diamètre de sa base, ou a l'axe d'une Sphère, ces deux corps auront la même surface; c'est-a-dire, la surface de la Sphère sera égale a la surface convexe du cylindre.*

Il suit encore de ce raisonnement

§. 341. *Que la surface convexe d'un segment de Sphère terminée par un plan circulaire est égale a la surface convexe du cercle correspondant*

C'est-à-dire, la surface de la partie *aBc* (Fig. 200.) est égale la circonférence du cylindre *AECD* multipliée par la hauteur *AD.*

III. De la Comparaison des Surfaces des Corps Géométriques.

Dans les §. 329. &c. nous avons fait voir, que les surfaces des corps Géométriques sont égales aux produit de deux de leurs dimensions; par exemple, au produit de la longueur de leur circuit, multiplié par leur hauteur &c. Voici les principes qui découlent de ce raisonnement.

§. 342. I. *Les surfaces de deux corps de même genre (comme deux Cylindres, deux Pyramides &c.) sont entr'elles comme les produits de deux de leurs dimensions.* (Voyez les §. 329—332.)

§. 343. II. *Lorsque deux corps de même genre ont une même dimension égale, (soit la même hauteur ou le même circuit) leurs surfaces seront entr'elles comme les autres dimensions.*

C'est-à-dire, quand deux Prismes, deux Cylindres, &c. ont la même hauteur; les surfaces de ces corps seront entr'elles comme les circuits ou les circonférences de leurs bases.

§. 344. III Et réciproquement. *Lorsque ces corps ont le même circuit, leurs surfaces seront entr'elles comme leurs hauteurs.*

§. 345. IV. *Lorsque deux dimensions de ces corps sont réciproquement proportionnelles: ces corps auront la même surface.*

C'est-à-dire, lorsque dans deux Cylindres, deux

Py-

Pyramides, &c. les circuits des baſes ſont entr'eux en raiſon inverſe des hauteurs: les ſurfaces latérales de ces corps ſeront également grandes. (Voyez §. 329—332.)

§. 346. V. *Les ſurfaces des corps ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leur dimenſions homologues.*

C'eſt-à-dire, *les ſurfaces de deux cubes, priſmes, cylindres, pyramides, ou cônes ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de deux côtés homologues.* Voyez les §. 241, 243, 320—323, 329—332.

§. 347. VI. *Les ſurfaces de deux Sphères ſont entr'elles comme les quarrés de leurs axes.* (Voyez §. 246, 319, 339.)

DE

DE LA MÉSURE DES CORPS SOLIDES.

I. De la Mésure des Prismes et des Cylindres.

§. 348. *Nous entendons par la solidité des corps Géométriques, la quantité de matière contenue ou renfermée entre leur surfaces.*

Par exemple, la quantité d'eau contenuë dans une citerne, le nombre de pierres, qu'on peut arranger dans un magazin, ou dans un vaisseau, la quantité de terre émployée a la construction d'un rempart ou d'une digue, &c.

Ainsi *la Solidité ou la capacité d'un corps depend du nombre des particules dont ce corps est composé, ou qu'il peut contenir.*

Nous avons dit au §. 317. que le prisme doit être consideré comme composé d'une multitude de surfaces très minces entassées les unes sur les autres. Ainsi la solidité d'un tel corps sera égale a la somme de toutes les surfaces, dont il est composé.

§. 349. *Pour mésurer la solidité des corps, on se sert du* *du cube.* (*) Ainsi un corps de cent pieds cubes, est un corps, dans lequel un pied cube, est contenu cent fois.

Un corps de soixante pouces cubes, est un corps, qui contient soixante pouces cubiques.

Comme chaque pied quarré contient 144 pouces quarrées, un pied cube sera composé de 144 × 12 pouces. C'est-à-dire de 1728 pouces cubiques.

Il suit de la

§. 350. I. *Que toutes les fois, que la solidité d'un corps est exprimé par un nombre, ce nombre indiquera des pieds, ou des pouces cubiques, selon l'unité ou la mésure, dont on s'est servi pour déterminer les dimensions.*

§. 351. II. *La solidité d'un Prisme ou d'un cylindre droit ou oblique, est égale a la surface de la base multipliee par la hauteur du corps.*

C'est-a-dire, que si la surface de la base d'un tel corps est exprimée par des pieds quarrés, & sa hauteur par des pieds lineaires, la solidité de ce corps sera égale au produit de ces nombres.

Par exemple, lorsque la base du prisme ou du cylindre, est vingt pieds quarrés, & la hauteur perpendiculaire de ces corps sept pieds; la solidité sera $20 \times 7 = 140$ pieds cubiques.

§. 352. III. *Les solidités de deux Prismes ou de deux*

(*) Un cube ou Tetraëdre est un corps terminé par six quarrés égaux, tel est le dez a jouer. Voyez le §. 316.

deux Cylindres sont entr'elles en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.

C'est-à-dire, (Fig. 201.) la solidité du corps O est a celle du corps P; comme la base $AB \times \perp DC$ est au cercle $GF \perp FE$, &c.

Ou bien

Corps O: corps P = pgr $AB \times \perp DC$: cercl. $GF \times \perp EF$.

Corps O: corps Q = pgr $AB \times \perp DC$: pol. $KI \times \perp HI$.

Corps P: corps Q = cerc $GF \times \perp EF$: pol. $KI \times \perp HI$.

§. 353 IV. *Les Prismes & les Cylindres, qui ont des bases égales & la même hauteur, ont la même solidité, soit que ces corps soient droit ou oblique.* (Fig. 202.)

C'est à-dire, les corps E, F, G, H, ont la même solidité, parce qu'ils ont les mêmes hauteurs, & que les surface de leurs bases sont égales (quelque soient leur forme.)

§. 354. V. *Les solidités de deux Prismes ou de deux Cylindres qui ont la même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.* (Fig. 203)

C'est-à-dire, si $\perp EF$ est = $\perp CB$, on aura la proportion.

Prisme DE : Cyl. CB = pgr. DF : cercle AB

$$\left.\begin{array}{l}\text{Car la solidité du prisme}\\ DE = \text{pgr } DF \times \perp EF\\ \text{la solidité du Cylindre}\\ CB = \text{cerc. } AB \times \perp CB\end{array}\right\}\ \text{§. 351.}$$

Ainsi on pourra former l'analogie suivante (§. 188.)

Pr.

Pr. DE : Cyl. CB = Pgr. $DF \times \perp EF$: Cercl. $AB \times \perp CB$.

Effaçant dans les deux derniers termes, la partie $\perp EF = \perp CB$ on obtiendra selon le §. 192.

Pr. DE : Cyl. CB = Pgr. DF : cercle AB.

§. 355. Si au contraire, on suppose, que ces deux corps ont des bases égales; ou ce qui révient au même, que dans la proportion générale.

Pr. DE : Cyl. CB = Pgr $DF \times \perp EF$: cercle $AB \times \perp CB$; le Pgr DF est = cercle AB; on pourra effacer ces quantités égales dans les deux dernier termes, selon le §. 189; ce qui donnera

Pr. DE : Cyl. $CB = \perp EF : \perp CB$.

Laquelle étant exprimée en paroles donne le principe qui suit.

VI. *Les solidités des Prismes, & des Cylindres, qui ont des bases égales, sont entr'elles comme les différentes hauteurs de ces corps.*

§. 356. Enfin, si dans la proportion générale on suppose, que le Prisme a la même solidité, que le Cylindre.

C'est-à-dire, que Prisme DE = Cylindre CB.

Les deux derniers termes seront aussi égaux entr'eux (§. 188.) ou bien

Pgr $DF \times \perp EF$ = cercle $AB \times \perp BC$

Et par le §. 195.

Pgr DF : cercle $AB = \perp BC : \perp EF$

Ce qui fait voir, que

VII. *Dans les prismes & les Cylindres, dont la soli-*

lidité est la même, les bases sont réciproquement proportionelles aux différentes hauteurs de ces corps.

C'est-à dire, *que la base du premier solide est a la base du second, comme la hauteur du second est a la hauteur du premier.*

§. 357. VIII. *Le plan CFED* (Fig. 205.) *qui passe par les diagonales opposées CF, ED du paralélipipède GBHA divise ce corps en deux prismes triangulaires égaux EAC & EDB.*

Dans le §. 309. nous avons dit, que le paralèlipipède est un prisme dont la base est un paralelogramme.

D'ou il paroit que le Pgr. *HDAE* = Pgr. *BCGF.*

Or le △ *HDE* = △ *DEA* = △ *FCG* = △ *BFC.*

De plus, Pgr. *FGAE* = Pgr. *BHDC*, & le Pgr. *BFEH* = Pgr. *CGAD* (Voyez les §. 124. 159. 161. & 309.)

Par conséquent les corps *EBD* & *EGD* sont des prismes triangulaires égaux.

§. 358. IX. *Lorsque trois lignes AB, AD, AC,* (Fig. 206.) *sont proportionnelles, le paralelipipède BCD, formé de ces trois lignes sera égal en solidité a un cube DADD dont la ligne AD est un des côtés.*

C'est-à-dire, lorsque

$$AB : AD = AD : AC$$

Le paralelipipède *BCD* sera = cube *DADD.*

Car les lignes proportionelles donnent la proportion suivante

$$AB : AD = AD : AC$$

Par conséquent $AB \times AC = \overline{AD}^2$. (§. 194.)

 Mul-

Multipliant les deux produits égaux par la même quantité *AD* on obtient

$$AB \times AC \times AD = \overline{AD}^2 \times AD \text{ (§. 191.)}$$

Or le premier produit donne le paralelipipède *BCD* & le second le cube *DADD.* (§. 351.)

Par conséquent le paralelipipède *BCD* est égal au cube *DDD.*

II. De la Solidité des Pyramides et des Cones.

§. 359. I. *Lorsque dans un cube AFEDCBH* (Fig. 207.) *on suppose quatre diagonales, AD, BE, CF, & GH: ces lignes s'entre couperont tous dans un même point O.*

Pour le démontrer, il faut tirer sur deux plans opposés du cube *FEGD* & *AHCB*, deux diagonales homologues *EG*, *HB*.

Nous avons démontré.

1°. Que deux lignes, qui s'entrecoupent, sont situées dans le même plan. (Voyez §. 281.)

2°. Que les trois côtés d'un même triangle sont situés dans un même plan. (Voyez §. 277.)

Par conséquent les six lignes *EG*, *EB*, *EH*, *HG*, *HB* & *GB* sont toutes situées dans un même plan.

Or les △△ *EOH*, *HOB*, *OGB* & *OEG* étant égaux (§. 126.)

Il s'ensuit, que le point *O*, est au centre du plan *EGBH.* (§. 127.)

On

On prouvera, de la même manière, que

$HO = OA = BO = OC = OG = OD = OE$

Et que par conséquent le point *O* est au centre du Cube.

Il suit de ce raisonnement

§ 360. II. *Que les triangles formés par les côtés & par les diagonales AD, BE, HG, CF du cube, coupent ce corps, en six pyramides égales & semblables, dont les bases quarrées forment les plans du cube & dont tous les sommets se réunissent au centre O.*

C'est-à-dire, que les six pyramides *AHOCB*, *DCBOG*, *DOEHC*, *AOHFE*, *AOFGB* & *EODGF* sont toutes égales entr'elles.

Par l'inspection de la Figure 207, il est évident que les deux pyramides opposées *FEGO* + *HCOBA* ont ensemble la hauteur du cube, ainsi la hauteur de chacune de ces pyramides est égale a la moitié de celle du cube. Et par conséquent

La solidité du cube est égale a six fois celle d'une pyramide, qui a la même base, & la moitié de la hauteur. D'ou il suit

§. 361. III. *Que la moitié du cube ou ce qui revient au même, que le prisme qui à la même base & la même hauteur qu'une pyramide, est trois fois plus grand que la pyramide.*

La solidité d'une pyramide sera donc égale au produit de la base de ce corps, multipliée par le tiers de sa hauteur.

§. 362. La pyramide devient cône, toutes les fois que sa base devient un cercle: & nous avons fait voir au §. 353. qu'un cylindre & un prisme, qui ont des bases égales, & la même hauteur, ont la même solidité. Ainsi le cône sera au cylindre, ce que la pyramide est au prisme, c'est-à-dire:

§. 363. IV, *Que la solidité d'un cône sera égale au tiers de celui du cylindre de même base & de même hauteur; ou bien, la solidité du cône sera égale au produit de sa base multiplié par le tiers de sa hauteur.*

§. 364. V. *Lorsque la hauteur de l'axe d'un cône est égale au diamètre de sa base, la solidité de ce corps sera exprimée par le produit de sa base multipliée par le tiers de son diamètre.*

§. 365. Ce que nous avons demontré dans le §. 351—356. touchant la solidité des prismes & des cylindres, sera donc applicable aux pyramides & aux cônes: c'est-à-dire.

VI. *Que les solidités des pyramides & des cônes qui ont des hauteurs différentes sont entr'elles en raisons composées de leurs bases & leurs hauteurs* (Fig. 190.)
C'est-à-dire:

Prs $ABCD$: cône $FKG = BCD \times \perp AN : GF \times \perp KL$

§. 366. VII. *Les solidités des pyramides & des cônes, qui ont mêmes hauteurs, sont entr'elles comme les surfaces de leurs bases.*

§. 367. VIII. *Les solidités des pyramides & des cônes, dont les bases sont égales, sont entr'elles comme les hauteurs de ces corps.*

§. 368

§. 368. IX. *Lorsque des pyramides ou des cônes ont la même solidité: les bases de ces corps seront réciproquement proportionnelles a leurs hauteurs.*

III. De la Solidité de la Sphère.

§. 369. La Sphère, que nous avons considérée au §. 337. en parlant de sa surface, comme composée d'nn nombre infini de cônes tronqués, entassez les uns sur les autres; peut aussi (en la considerant rélativement a sa solidité) être composée d'un même nombre de cônes pointus, égaux & extrémement minces, dont les sommets se rassemblent, se reunissent ou coïncident au centre, & dont les bases rangées les unes a côté des autres, forment la surface de ce corps.

La solidité de la Sphère sera donc égale a la somme de tous ces cônes: ou bien a un seul cône de même hauteur que le rayon de la Sphère, mais dont la base circulaire est égale a toute la surface de la Sphère.

§. 370. Nous avons démontré au §. 362, que la solidité d'un cône est égale au produit, de la surface de sa base multipliée par le tiers de la hauteur.

Par conséquent.

La solidité de la Sphère sera égale au produit de sa surface multipliée par la sixième partie de son diamètre.

§ 371. Selon le §. 339 la surface de la Sphère est égale a celle de quatre grands cercles.

La solidité de la Sphère sera donc égale a la surface de quatre grands cercles, multipliée par la sixième partie du diamètre. C'est-à-dire, *que cette solidité pourra être exprimée par quatre sixièmes ou deux tiers de la surface du grand cercle multiplié par le diamètre.*

§. 372. Nous avons fait voir au §. 351. que la solidité d'un cylindre, dont la hauteur égale le diamètre de sa base, peut être exprimée par le produit de la surface de cette base multipliée par le diamètre de ce même cercle.

Et au §. 364. Que lorsque la hauteur de l'axe d'un cône égale le diamètre de sa base circulaire, la solidité de ce corps doit-être exprimée par le produit de la surface de la base multipliée par le tiers de sa hauteur, ou par le tiers du diamètre de cette base.

Si donc les diamètres des bases la hauteur du cylindre & celle du cône égalent le diamètre de la Sphère, les solidités du cône, de la Sphère & du cylindre seront entr'elles comme les nombres UN, DEUX *&* TROIS.

C'est-à-dire, *lorsque les dimensions de ces trois corps sont égales; la Sphère sera le double, & le cylindre le triple du cône.*

$$\text{Car le cône} = \text{surf. de sa base} \times \frac{1}{3}\ \text{diamètre}$$

$$\text{La Sphère} = \text{surf. du cercle} \times \frac{2}{3}\ \text{diamètre}$$

$$\text{Le cyl.} = \text{surf. de sa base} \times \frac{3}{1}\ \text{diamètre}$$

$$\text{Or ces produits sont entr'eux comme } \frac{1}{3} \text{ à } \frac{2}{3} \text{ à } 1.$$

C'est-à dire. comme 1 à 2 à 3. (§. 192.)

IV. De

IV. DE LA COMPARAISON DES CORPS SEMBLABLES.

§. 373. Dans le §. 320 nous avons définis, *les corps semblables, comme composés ou compris par le même nombre de plans semblables & homologues.*

Ainsi deux Cubes ou deux Sphères sont des corps semblables.

Deux Prismes ou deux Pyramides seront des corps semblables, toutes les fois que leurs bases étant des figures semblables, les plans, qui forment leurs côtés sont des paralelogrammes ou des triangles semblables.

Or comme tous les cercles sont des figures semblables, & que par conséquent les bases des Cylindres & des Cônes ne sauroient donner un terme de comparaison, on a choisi pour cet effet dans ces corps, leurs axes, les diamètres de leurs bases, & l'angle d'inclinaison que forment les axes avec les plans de ces bases.

On nommera donc cylindres ou cônes semblables, ceux, dont les axes ayant la même inclinaison, sont proportionnels aux diamètres de leurs bases respectives.

§. 374. Le principe général pour la comparaison des corps semblables, est.

Que les solidités des corps semblables sont entr'elles comme les cubes décrits sur leurs côtés homologues.

Nous allons démontrer cette vérité pour chaque genre de corps.

Pour les Priſmes ſemblables. (Fig. 208.)

§ 375. I. Comme l'on ſuppoſe que les corps *ABCDE* & *abcde* ſont ſemblables, leurs baſes doivent être des figures ſemblables, & leurs hauteurs des lignes proportionnelles aux côtés homologues de ces figures (§. 373.)

Ainſi on pourra former les proportions ſuivantes.

Fig. $ABCD$: Fig. $abcd = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ §. 243.

Haut. EF : Haut. $ef = BC : bc$

Multipliant les termes homologues de ces proportions reſpectivement l'un par l'autre, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fig. } ABCD \times \text{haut } EF = \text{priſme } ABCDE \\ \text{Fig } abcd \times \text{haut } ef = \text{priſme } abcde\end{array}\right\}\ \text{§. 351.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}^2 \times BC = \overline{BC}^3 \\ \overline{bc}^2 \times bc = \overline{bc}^3\end{array}\right\}\ \text{§. 193.}$$

Subſtituant ces valeurs dans la proportion indiquée, on obtient

Pr. $ABCDE$: Pr. $abcde = \overline{BC}^3 : \overline{bc}^3$

Pour les Cylindres ſemblables. Fig. 209

§ 376. II. Comme l'on ſuppoſe que les Cylindres ſont ſemblables, les angles d'inclinaiſon DCE, dce doivent être égaux entr'eux (§ 373)

Le $\triangle$ DCE ſera $\backsim$ $\triangle$ dce (§. 202.) & les axes ſeront proportionnels aux diamètres des baſes, ainſi $DE : de = CD : cd = AB : ab.$

De plus baſe AB : baſe $ab = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (§. 246.)

haut. ED : haut. $de = AB : ab.$

Mul-

Multipliant & réduiſant comme dans l'article précédent, on obtient

$$\text{Cyl. } ABD : \text{Cyl. } abd = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$$

Pour les Pyramides & les cônes ſemblables (Fig. 210.)

§ 377. III. Les axes des Pyramides & des cônes ſemblables étant dans le même cas que dans les Cylindres ſemblables : on pourra faire les trois proportions ſuivantes.

$$CD : cd = AB : ab$$

$$\text{Ou } \tfrac{1}{3}\, CD : \tfrac{1}{3}\, cd = AB : ab. \ (\S.\ 191.)$$

$$\text{baſe } AB : \text{baſe } ab = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2. \ (\S.\ 243\ \&\ 246).$$

Multipliant les termes homologues des deux dernières proportions, on obtiendra les réſultats ſuivants

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}\, CD \times \text{baſe } AB = \text{cône } ABCD \\ \tfrac{1}{3}\, cd \times \text{baſe } ab = \text{cône } abcd \end{array}\right\} \S.\ 362.$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \times \overline{AB}^2 = \overline{AB}^3 \\ ab \times \overline{ab}^2 = \overline{ab}^3 \end{array}\right\} \S.\ 193.$$

Subſtituant ces valeurs pour la nouvelle proportion, on obtient

$$\text{Cône } ABCD : \text{cône } abcd = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$$

Pour les Sphères. (Fig. 211.)

§. 378. IV. Nous avons fait voir au §. 347. que les ſurfaces de deux Sphères ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres.

On pourra donc faire les deux proportions qui ſuivent.

$$\text{Surf. } ABCD : \text{ſurf. } abcd = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

$$\tfrac{1}{6}\ AB : \tfrac{1}{6}\ ab = AB : ab.$$

 Mul-

Multipliant les termes homologues, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} \text{Surf. } ABCD \times \tfrac{1}{6}\, AB = \text{ſol. de la Sph. } ABCD \\ \text{Surf. } abcd \times \tfrac{1}{6} . ab = \text{ſol. de la Sph. } abcd \end{array}\right\} \text{§. 370.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB}^2 \times AB = \overline{AB}^3 \\ \overline{ab}^2 \times ab = \overline{ab}^3 \end{array}\right\} \text{§. 293.}$$

Subſtituant ces valeurs comme dans les cas précédens, on aura

$$\text{Sphère } ABCD : \text{Sphère } abcd = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3.$$

V. Problémes rélatifs au calcul des Surfaces et des Solidités des corps Semblables.

§. 379. PROBLÉME I. *Déterminer la ſurface & la ſolidité d'un priſme ou d'un cylindre, dont la hauteur, le contour & la ſurface de la baſe ſont connus.*

SOLUTION. Que la hauteur du priſme *BEcb* (Fig. 193.) ſoit = 12 pieds: le contour ou la ſomme des lignes $ab + bc + cd + de + ea = 40$ pieds; & la ſurface de la baſe = 115 pieds quarrés.

La ſurface laterale du corps, ou celles de tous les Pgrs. qui entourrent le corps, ſera $= 40 \times 12 = 480$ pieds quarrés. (§. 329.)

Lorſque l'on ajoute à cette ſomme la ſurface du plan ſuperieur qui eſt = 115 toute la ſurf. du corps *BEcb* ſera $= 450 + 115 = 595$ pieds quarrés.

Pour déterminer la ſolidité de ce corps, on doit (§. 351)

(§. 351) multiplier la furface de la bafe (exprimée par 115 pieds quarrés) par la hauteur.

Ainfi la folidité du prisme *BEeb* fera $= 115 \times 12$ $= 1380$ pieds cubiques.

REMARQUE. Pour calculer la furface & la folidité d'un cylindre, il fuffit de connoître la hauteur de ce corps & le diamètre de fa bafe, puisqu'alors on peut calculer par les §. 248 & 251, la circonférence & la furface.

§. 380. PROBLÉME II. *Déterminer la furface & le folidité d'une Pyramide.*

SOLUTION. Que dans le $\triangle$ *BCD* (Fig. 190) la ligne *BC* foit $= 5$; $BD = 4$ & $DC = 3$ pieds, & de plus la furface de $\triangle$ $BCD = 6$ pieds quarrés.

Lorfque la Pyramide eft droite, les triangles qui l'entourent auront la même hauteur. Que cette hauteur foit $= 12$ pieds.

La furf. de la pyr. fera = a la moitié du produit de fon contour $\times$ par la hauteur (§. 332).

C'eft-a-dire $= (3 + 4 + 5)\ 6 = 12 \times 6 = 72$ pieds quarrés.

Pour déterminer la folidité de cette Pyramide, on doit multiplier la bafe par le tiers de la hauteur perpendiculaire (§. 362.)

Si l'on fuppofe cette hauteur perpendiculaire *AN* $= 9$ pieds; la folidité de la Pyramide fera $= 3 \times 6$ $= 18$ pieds cubiques.

§. 381. PROBLÉME III. *Déterminer la furface & la folidité d'un cône droit KFG* (Fig. 190)

SO-

SOLUTION. Que la ⊥ KL soit = 50 pieds: le diamétre de sa base FG = 40, & la hauteur laterale KF = 53,8.

Alors selon le §. 249, la circonf. de la base sera = 3,14 × 40 = 125,6 pieds, & la surface du ⊙ = 125,6 × 10 = 1256. (§. 179.)

La surface d'un cône est égale a sa circonf. multipliée par la moitié de sa hauteur latérale (§ 332.)

$$\text{c. a. d., surface cône } FHG = \frac{53,8}{2} \times 125,6 =$$

= 26,9 × 125,6 = 3378,64 pieds quarrés.

La solidité du cône est égale a sa base multipliée par le tiers de sa hauteur (§ 362)

Donc la surface du cône FHG

$$= \frac{50}{3} \times 1256 = \frac{62800}{3} = 20933\tfrac{1}{3} \text{ p. cub.}$$

§. 382. PROBLÉME IV. *Déterminer la surface & la solidité d'un cône tronqué* $BbcC$ (Fig. 197.)

SOLUTION. Supposons le diamètre BC de la base = 40 pieds, le diamètre de la partie superieure = 16, la hauteur du côté oblique bB = 36 & la hauteur perpendiculaire = 32.

Cela étant on obtient par le §. 248. la circonf. du grand cercle BC = 40 × 3,14 = 125,6: & celle du petit bc = 16 × 3,14 = 50,24.

La surface du cercle BC = 125,6 × 10 = 1256 pieds quarrés, celle de bc = 50,24 × 8 = 401,92.

Par le §. 334. la surface d'un cône tronqué est égale a la moitié des deux circonf. multipliée par la hauteur oblique du cône tronqué.

Donc

Donc la surface cherchée sera

$$\frac{(125,6 + 50.24)\,36}{2} = 175,84 \times 18 = 3165,12$$

pieds quarrés.

Pour déterminer la solidité du cône tronqué, on cherchera celle du cône entier, en ensuite celle de la partie retranchée, la différence entre ces deux produits donnera la solidité demandée.

Selon le § 362, la solidité du cône entier *BAC* est égale à la surface de la base multipliée par le tiers de sa hauteur. Ainsi la solidité du cône *ABC* sera.

$$= \frac{1256 \times 50}{3} = 20933,33 \text{ pieds cubes.}$$

Donc la solidité du cône tronqué *BbcC* sera $=$ $20933,33 - 2411,52 = 18521,81$ p. cub.

§. 383. PROBLÊME V. *Déterminer la surface & la solidité d'une Sphère dont le diamètre est donnée.*

SOLUTION. Soit le diamètre donné $= 60$ pieds.

La circonf. du grand cercle sera (§. 248.) égale à $60 \times 3,14 = 188,4$ pieds.

Et par le § 339, la surface de la Sphère $= 60 \times 188,4 = 1130,4$ pieds quarrés.

Or la solidité de la Sphère est égale à sa surface multipliée par la sixième partie de son diamètre (§. 372)

Ainsi la solidité cherchée sera $= 1130,4 \times 10 = 11304$ pieds cubes.

§. 384. PROBLÊME VI. *Déterminer la surface & la solidité d'un segment de Sphère a B c* (Fig. 209.)

SO-

SOLUTION. Selon le § 341, la ſurface convexe du ſegment *aBc* eſt égale a la circonférence du cylindre *ADEC* multipliée par la hauteur *DA*.

Or cette circonference eſt $= 3{,}14 \times AC$

Donc la ſurface du ſegment de Sphere *aBc* ſera $= 3{,}14 \times AC \times \perp AD$.

Si $AC = 40$ & $\perp AD = 10$ pieds, la ſurface ſera $3{,}14 \times 40 \times 10 = 3{,}14 \times 400 = 1256$ p. quarrés.

Pour déterminer la ſolidité, il faut faire le raiſonnement ſuivant.

1°. On peut conſidérer le ſegment comme un cône tronqué dont la ſurface de la baſe eſt celle que nous venons de calculer, & dont la hauteur eſt la $\perp AD$. (§. 338.)

2°. Si le cône que nous venons de ſuppoſer, n'étoit point tronqué ſa hauteur ſeroit égale a la moitié du diamètre *AC* (§. 370.)

Il ſuit de raiſonnement que la ſolidité d'un tel cône eſt égale au cercle décrit ſur *AC* multiplié par la ſixième partie du même *AC*: c'eſt-à-dire $= \odot$

$$AC \times \frac{1}{6} AC.$$

De ce cône on doit rétrancher, la partie tronqué, dont la baſe eſt le cercle *ac* & dont la hauteur eſt déſignée par $\frac{1}{2} Dd - AD = \frac{1}{2} AC - AD$.

La ſolidité du cône que nous venons de ſuppoſer pourra donc être exprimée de la manière ſuivante.

$$\frac{\odot ac}{3} \left(\tfrac{1}{2} AC - AD\right)$$

Donc la ſolidité du ſegment *a B c*

$$= \odot AC \times \frac{1}{6} AC \text{ moins } \frac{\odot ac}{3} \left(\tfrac{1}{2} AC - AD\right)$$

§. 381.

§. 385. PROBLÊME VII. *Déterminer la solidité d'un corps irrégulier, par exemple celle d'une grappe de raisins.*

SOLUTION. La méthode la plus facile pour déterminer la solidité d'un petit corps irrégulier & mobile est de le plonger dans un vase rempli d'eau & de mésurer combien le corps en déplace ou en fait sortir par son immersion. Cette quantité d'eau déplacée exprimera le volume ou la solidité Géométrique du corps.

F I N.

FAUTES A CORRIGER.

Pag 7 ligne 17 *il y a* ſouſtant *liſez* ſouſtend

--- 12 ---- 4 ---- *A* & *C* --- *A* & *c*

--- 30 ---- 3 & 17. *ajoutez* Comme il eſt évident par le §. 52.

--- 39 ---- 2 *Il y a* $BD = BD$ *liſez* $BD = DC$

--- 46 ---- 4 ---- *A* --- &

--- 47 ---- 7 ---- △ *CIE* --- △ *ADC*

--- 69 ---- 4 d'enbas, *Il y a* quarré *CKLD* *liſez* Rgle *CKLD*

Ibid, derniere ligne ---- ---- *EKLA* --- Rgle *EKLA*.

--- 73 ---- 4 ---- Fig. 133 --- Fig. 134.

--- 91 ---- 15 ---- $G = H$ --- $G : H$

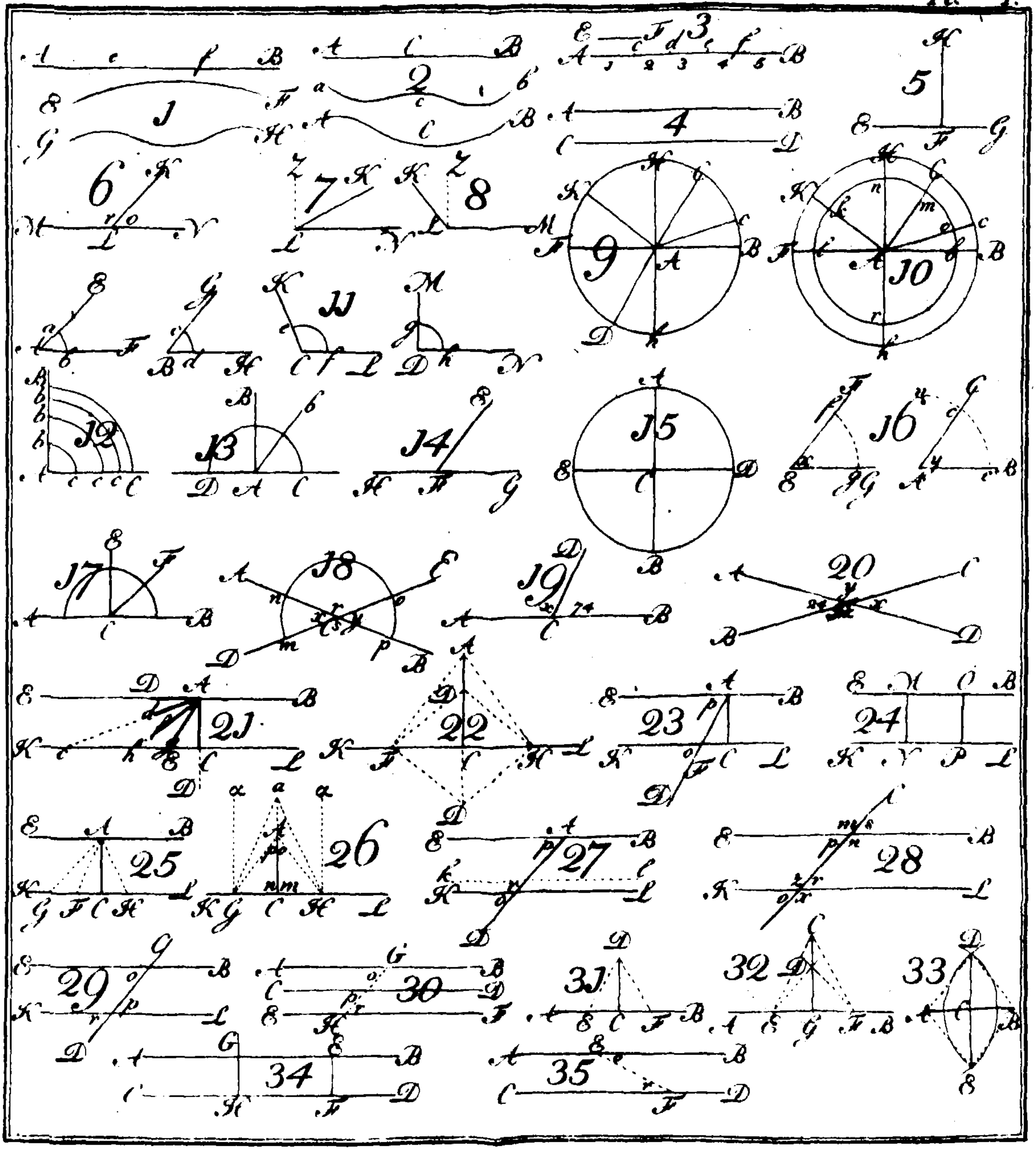
--- 102 ---- 3 ---- $BC : AC = BC : CE$ --- $BC : AC = AC : CE$.

--- 127 ---- 13 ---- BC --- $\overline{BC}^2$

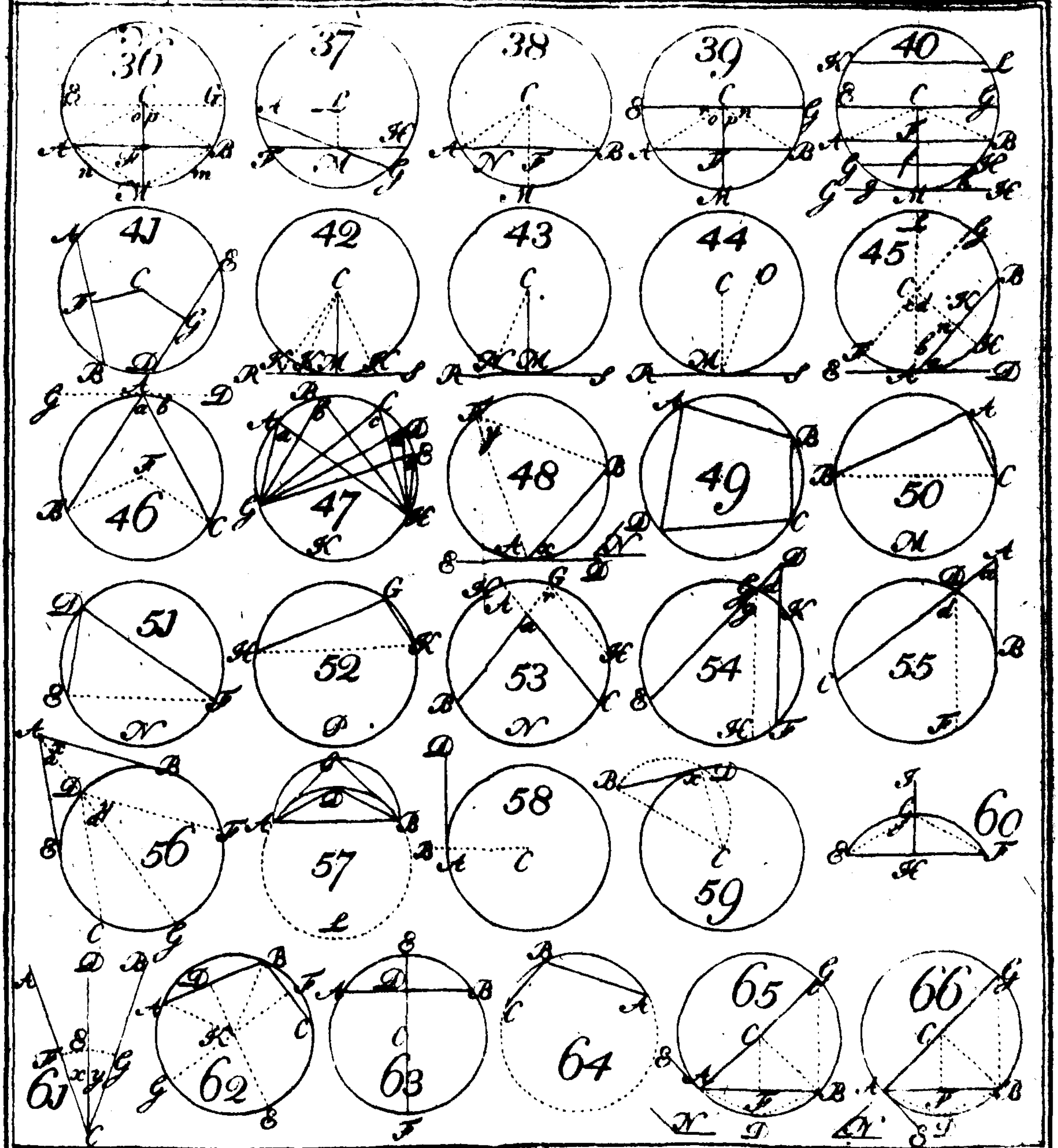
--- 132 ---- 24 ---- 51446,76 --- 51445,76

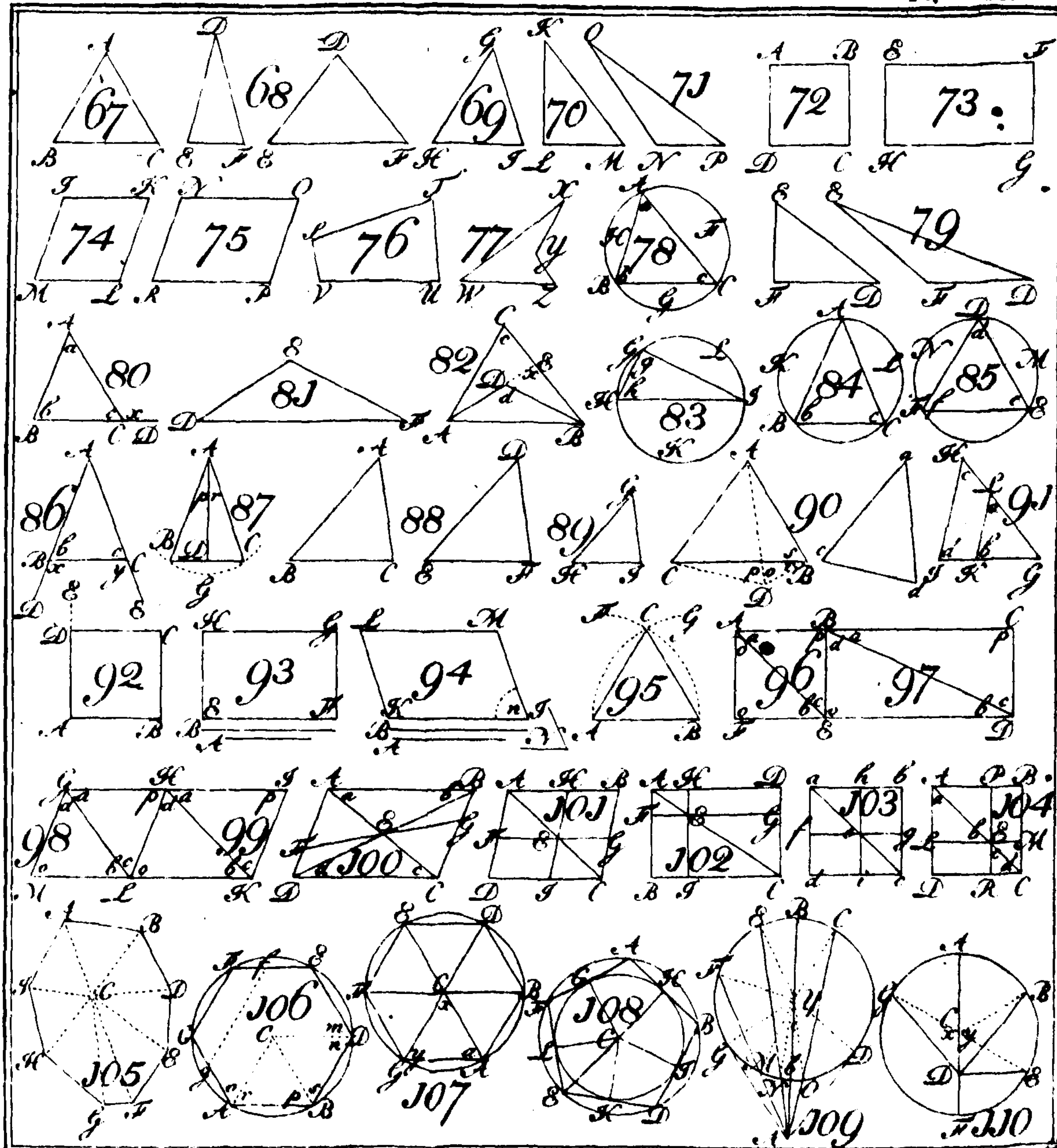
--- 160 ---- 6 ---- conſidéré --- conſidère

Pl: 1.

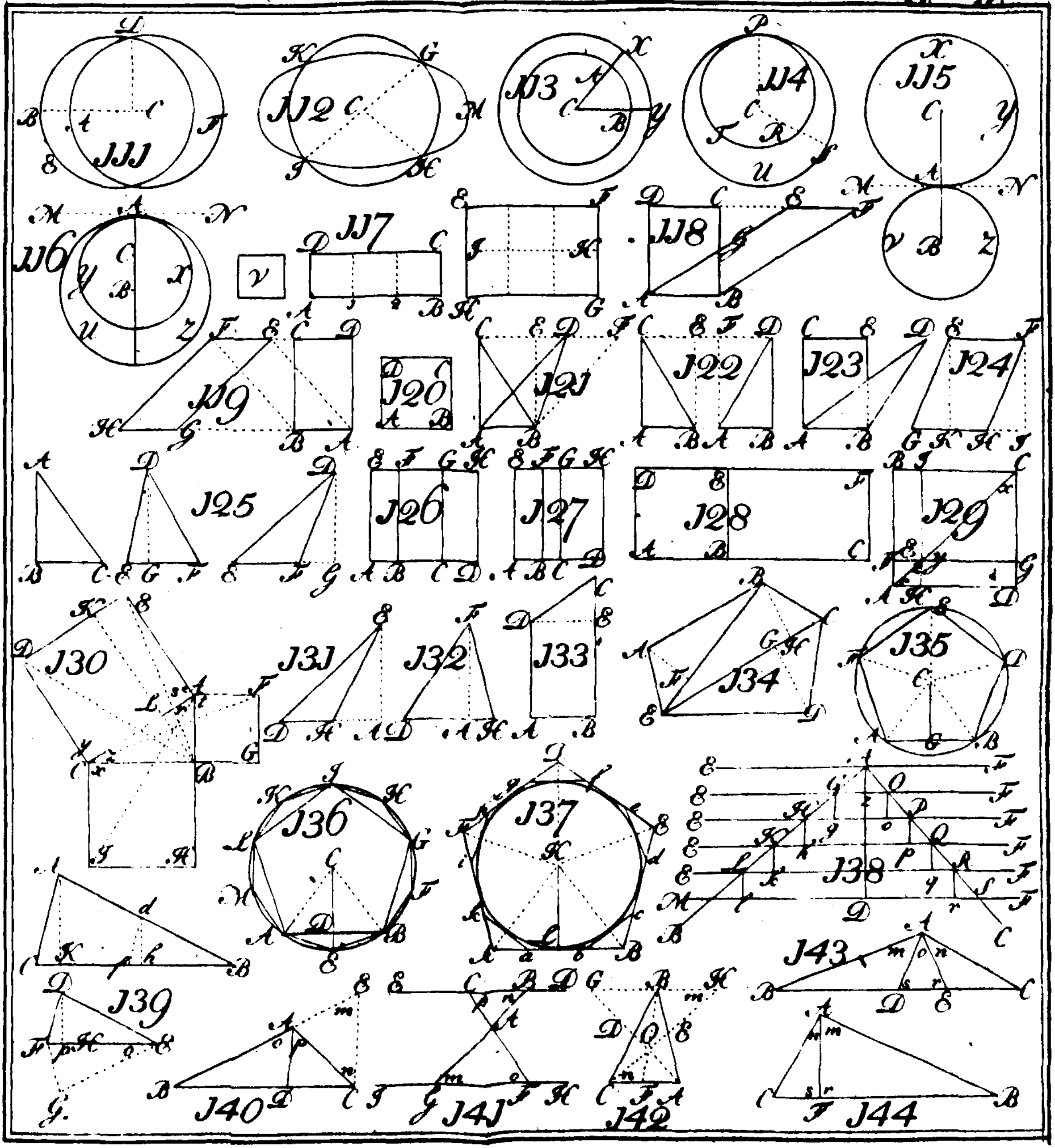

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35

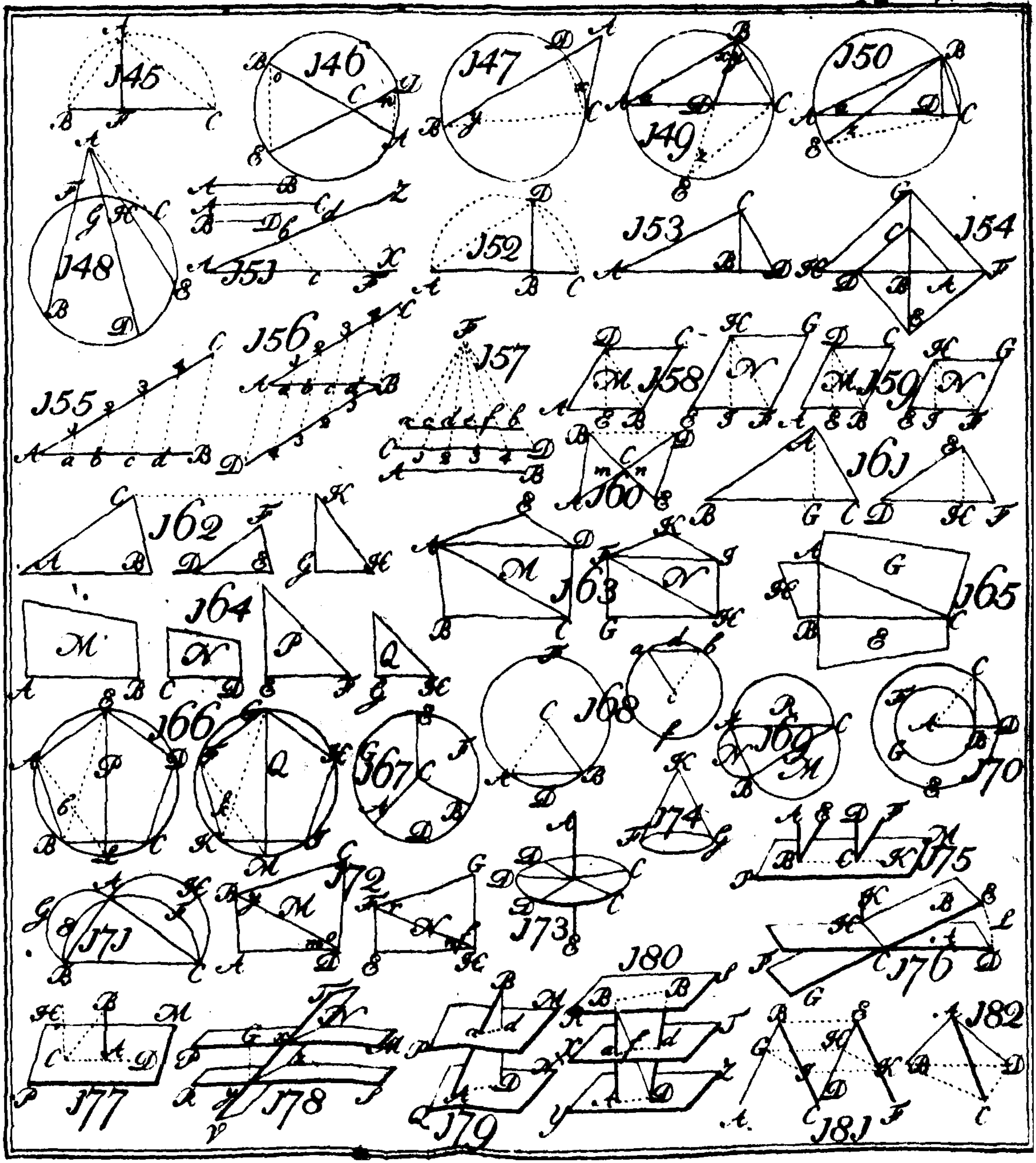
Pl. II.

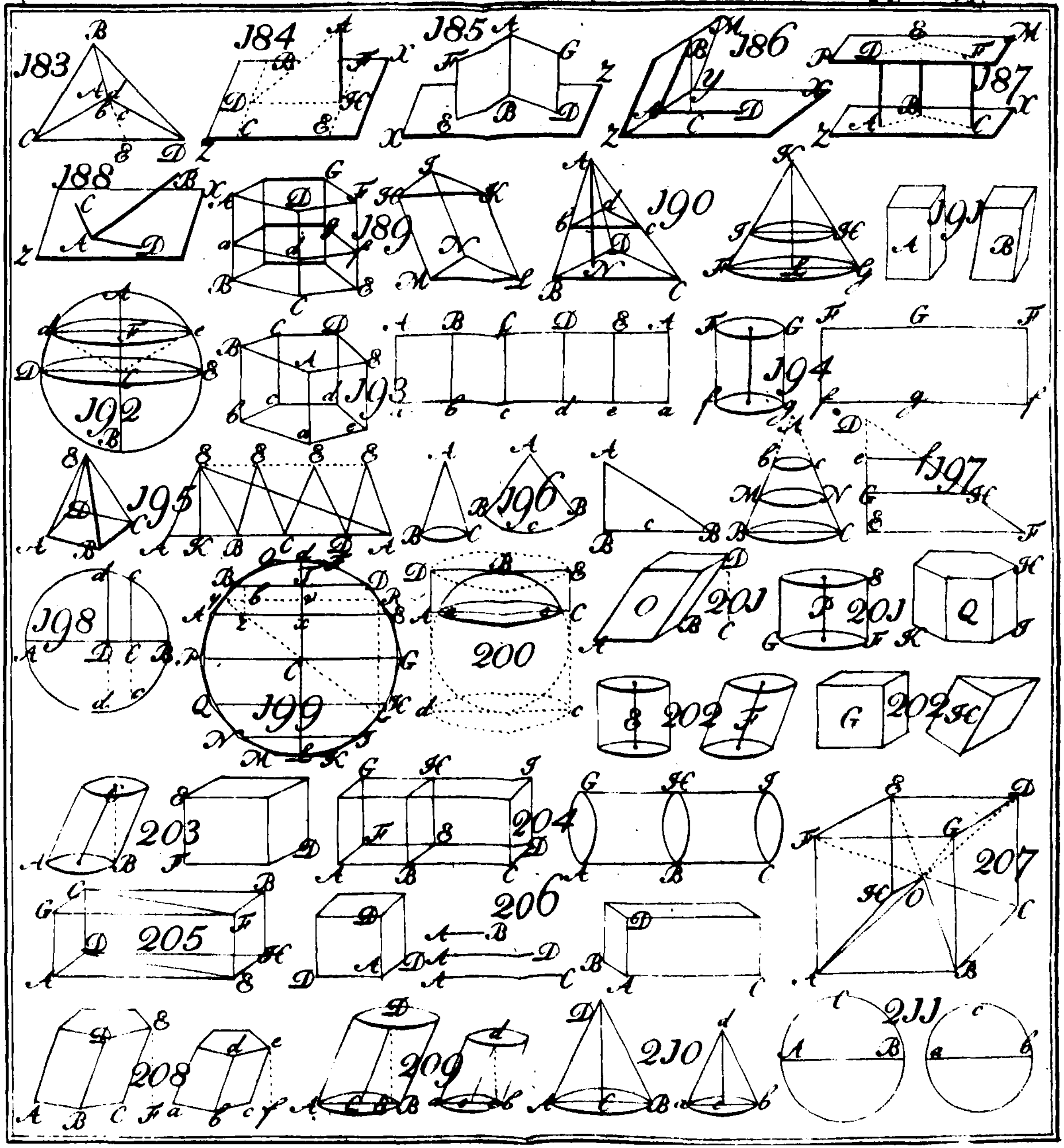

36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66



67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110


111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144


145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182


183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
201
202
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211