KARE BOOK
QA
35
.T7
1758

PREMIERS TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES,

Dictés en l'Université de Paris,

Pour servir d'Introduction à la Physique générale.

*Par feu M. *** Professeur Émerite en Philosophie.*

U.S.C. AND C. SURVY.
LIBRARY AND ARCHIVES
Acc. No. 8231
570.2
P92

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLVIII.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009

U. S. C. & G. SURVEY
LIBRARY
AND
ARCHIVES
No. F 2,37
Shelf 5702
Case P 92

This Book is the Property of the
U. S. COAST AND GEODETIC SURVEY,
and must be carried on Book inventory
if not returned before the Expiration
of the Calendar Year.

Blank page retained for pagination

PRÉFACE.

L'OUVRAGE que l'on donne ici, a été composé en 1714 pour être inséré dans le Cours de Philosophie qui fut dicté pour lors au Collége d'Harcourt, & que l'on a imprimé en ces derniers temps. La doctrine des anciens Philosophes, traitée si long-temps dans les Écoles publiques sans le secours des Mathématiques, a été assujétie d'ailleurs, durant le dernier siècle éclairé, à de foibles systèmes qui l'ont souvent fait changer de face. La Philosophie sembloit donc exiger un nouveau plan depuis le renouvellement des Lettres & sur-tout depuis la fin de nos guerres civiles, pour arriver au point où nous la trouvons aujourd'hui; mais il s'en falloit beaucoup que toutes les Sciences qui concourent au progrès de la Philosophie, marchassent pour lors d'un pas égal.

Si l'on en cherche les causes, on s'aperçoit bien-tôt que, durant une longue suite de siècles, faute d'avoir pû parvenir à appliquer avec succès les premières idées métaphysiques & les notions les plus simples à des questions compliquées qui les renferment, & qui les supposent déjà devenues familières, l'on a dû méconnoître très-long-temps ce qui devoit servir de base & de fondement à l'étude de la Philosophie ; qu'ainsi, faute d'avoir sû y introduire d'abord la Géométrie & l'Arithmétique, ensuite l'Analyse, & enfin les nouveaux calculs qui nous donnent la quadrature des courbes, l'on a dû constamment s'égarer dans la recherche des principes philosophiques, de même que dans la solution de presque toutes les questions composées. De-là tant de distributions & sous-divisions inutiles de ces mêmes questions, tant d'opinions si différentes & qui ont subi les plus grandes variations, sur-tout en Physique dont il a

fallu créer, pour ainſi dire, une ſcience nouvelle. Il falloit vaincre encore les effets ſinguliers qu'entraînoient néceſſairement tant d'opinions ſi variées, & le Philoſophe ne devoit pas oublier qu'elles avoient des influences juſque dans la Morale. Comment pouvoir ſe flatter de ſurmonter tout d'un coup l'oppoſition conſtante & les obſtacles qu'apportoient ſans ceſſe au progrès de la Phyſique, ceux qui lui empêchoient de prendre quelque conſiſtance! Ne ſait-on pas auſſi combien le calcul de la quadrature des courbes, dans ſa naiſſance, ou pluſtôt le calcul différentiel & intégral, avoit ſouffert lui-même d'oppoſitions de la part de quelques Auteurs pour lors célèbres, mais qui, faute de le bien entendre, en combattoient les principes! On ne doit donc pas être étonné de voir rappeler ici ce que l'on vient d'avancer au ſujet des principes de Phyſique, auxquels on avoit ſongé à appliquer ces deux genres de calculs preſqu'auſſi-tôt qu'ils furent découverts.

Il falloit d'ailleurs s'exercer long-temps & se familiariser, pour ainsi dire, avec ces nouveaux calculs, & il faut avouer qu'il n'y a peut-être pas encore trente ans que l'on est universellement parvenu à substituer la vraie méthode de philosopher aux opinions anciennes: tant il est vrai que jusque dans la Philosophie, l'homme s'y montre quelquefois comme dans tous les autres états, & qu'il ne balance jamais, sinon dans des cas bien rares, entre une étude pénible, ses intérêts & ses usages.

Les Arabes, qui avoient conquis la plus grande partie de l'Empire Romain & de l'Asie, firent quelques progrès, pendant le dixième siècle, dans l'Arithmétique & dans l'Algèbre: ils nous conservèrent en même temps les Livres anciens, qu'ils traduisirent la plusspart en leur langue; mais ayant adopté la philosophie d'Aristote, l'unique ouvrage en ce genre qui fût connu pour lors, cette doctrine se répandit bien-tôt parmi leurs Docteurs

& autres gens de Loi. Or nous n'avons en cela que trop ſuivi, au renouvellement des Lettres, leurs Théologiens, la pluſpart adonnés à la Dialectique, & occupés ſans ceſſe de queſtions ſubtiles en Métaphyſique : ils imitèrent les Grecs, qui avoient pour la pluſpart déja ſéparé, vers le temps d'Alexandre, les Mathématiques d'avec la Philoſophie, lors de la décadence des ſciences & des arts dans ces contrées ſi célèbres. Ils remuèrent les queſtions les plus difficiles & les plus délicates, & ne s'attachèrent néanmoins qu'aux explications les plus vagues, & ſur-tout à celles qui n'étoient plus ſuſceptibles de calcul ni d'être traitées à l'aide d'aucune autre ſcience exacte.

Galilée fut enfin l'un des premiers reſtaurateurs de la Philoſophie, vers le commencement du XVII.e ſiècle : il s'attacha principalement aux Méchaniques & à l'Aſtronomie. Bien-tôt ce rare génie eſſaya de frayer aux Philoſophes une nouvelle route : il dé-

couvrit les loix de l'accélération des corps graves, dont les espaces parcourus pendant leur chûte sont comme les quarrés des temps écoulés; & c'est à lui qu'il faut remonter, si l'on recherche l'origine de la science du mouvement, laquelle sert aujourd'hui de fondement à la Physique générale.

Ce n'est pas ici le lieu de traiter ces matières en leur donnant trop d'étendue, ni même d'en faire un extrait, tel qu'il pourroit convenir à la préface d'un Traité de Physique; l'on aura occasion d'insister davantage sur ce sujet, lorsqu'on donnera au Public la Physique générale, tirée du même cours de Philosophie déjà cité, de même que la Méchanique avec des additions: l'on fera pour lors en sorte que les ouvrages de M. le Monnier soient précédés de l'histoire du progrès & des découvertes faites depuis Galilée dans l'une des plus curieuses parties de la Philosophie.

A l'ingénieuse théorie sur l'accélération des corps qui tombent d'en

haut, ont ſuccédé celles de Képler, de Deſcartes, Huyghens & Newton. Ces premiers inventeurs ont appliqué ſucceſſivement les ſciences exactes ou les Mathématiques pures, aux différentes parties de la Phyſique; & l'on eſt fort peu avancé dans cette ſcience aujourd'hui, ſi l'on ignore les règles de Képler, ſa dioptrique, ou bien celle de Deſcartes, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, enfin les différentes méthodes & les nouveaux genres de calcul que Huyghens & le fameux Newton ont appliqués ſi heureuſement aux queſtions phyſiques, pour approfondir nos recherches.

Ainſi, pour nous préparer à l'étude de la Phyſique, l'on procède d'abord du calcul Arithmétique à l'étude de l'Aſtronomie, des Méchaniques & de l'Optique; & l'on a été plus que jamais convaincu, en liſant les ouvrages de Huyghens & de Newton, de la néceſſité de joindre à ce calcul un autre beaucoup plus étendu & qui

lui eſt intimement lié. Il eſt connu depuis environ deux cens ans ſous le nom d'*Algèbre* ou *Calcul littéral;* l'un de nos plus illuſtres Magiſtrats, qu'on peut nommer à juſte titre l'inventeur de l'analyſe, l'ayant publié, ſous cette forme, dès le règne de Henri III. En effet il lui a donné toute l'étendue que les Anciens ne lui avoient pas reconnue, comme il eſt aiſé de s'en convaincre par la lecture des ouvrages de *Diophante*, lequel n'avoit cultivé que l'une des branches de l'Algèbre, la ſeule qui ait été tranſmiſe des Grecs aux Arabes. Au reſte ceux-ci, de même que divers Auteurs Italiens qui ont précédé Cardan, lui ont donné quelque accroiſſement; mais c'eſt principalement l'application de l'Algèbre à la Géométrie, tentée ſi heureuſement par Viète, & pouſſée au plus haut degré de perfection par Deſcartes, qui nous a fait faire en Phyſique les plus grandes découvertes. Enfin cette méthode analytique, dont on s'eſt

toûjours servi à l'exemple de Descartes qui a sû la produire, fut appliquée par divers auteurs à la méthode des Tangentes : on la faisoit servir déjà aux questions de *maximis* & *minimis*, de sorte qu'elle conduisit bien-tôt les Mathématiciens à cette fameuse méthode du calcul des fluxions, ou plustôt à celui que *Leibnitz* inventa sous le nom de *calcul différentiel & intégral*, qu'il a publié en 1687.

C'est de ces sources si naturelles que découlent assez promptement les théories des forces centrifuges & des forces centrales ; aussi ces mêmes théories ont-elles été enseignées dès le commencement du siècle dans le Collége Royal de France, d'autant qu'elles servent d'introduction à la Physique céleste, qu'elles en sont la base & le vrai fondement ; enfin c'est-là l'époque d'un nouveau genre de révolution dont nous sommes témoins, & qui est arrivé aux autres Écoles.

On étoit tellement accoûtumé à regarder autrefois comme deux genres

d'étude qu'il falloit ſéparer, les Mathématiques & la Philoſophie, que l'on avoit multiplié pour cet effet les Chaires deſtinées à des objets qu'on croyoit ſi différens entre eux : on a aujourd'hui des idées toutes contraires, & en voici les preuves. Lorſqu'on vient à parcourir les Cours imprimés dans le ſiècle précédent & dans celui-ci, des quatre parties de la Philoſophie, l'on s'aperçoit bien-tôt que ces mêmes ouvrages, dénués du ſecours des Mathématiques, n'ont ajoûté que très-peu de choſe à nos connoiſſances, & que l'on avoit trop ſéparé ces deux genres d'étude. Il étoit d'autant moins facile d'en convenir alors, que c'eût été entreprendre de réformer un grand abus, & il parut ſuffiſant d'avoir recours à la Phyſique expérimentale. Cependant la pluſpart des Chaires de Mathématiques vinrent à s'éteindre, & il a fallu ſonger enfin à des créations nouvelles. Ces anciennes Chaires de Mathématiques avoient néanmoins donné naiſſance à différens traités élémentaires très-utiles ;

& dans un genre plus élevé, nous avons des fragmens d'excellens ouvrages, tels que la Dioptrique [a] de M. Picard, & l'application de l'Algèbre à la Géométrie [b] de M. Guisnée.

Au reste, l'inutilité si reconnue d'occuper les esprits, dans les écoles, à des genres de disputes, qui, sans nous éclairer, ne servoient qu'à flatter ceux qui s'en emparèrent lorsqu'ils donnèrent tant de vogue à la Dialectique, ne pouvoit être combattue qu'en introduisant les Mathématiques dans un cours de Philosophie. M. le Monnier l'exécuta, & a préparé les esprits à cette révolution, non sans y trouver bien des obstacles & bien des difficultés à vaincre : il n'a pas voulu s'assujétir à l'ancien usage, ni qu'on se bornât uniquement, durant le cours de deux années, à fatiguer en vain de bons esprits naturellement Logiciens, ni à leur expliquer d'une manière vague la Physique expérimentale. A peine y

[a] Dictée dans la Chaire de *Ramus*.
[b] Dictée au Collége de M.[e] Gervais.

expliquoit-on, au commencement de ce siècle, quelques définitions de la Géométrie *, sans que l'on se souciât d'insister sur les démonstrations de la Statique, & autres parties de la Méchanique, si connues des Anciens. Quelques disciples de Descartes avoient déjà inutilement essayé de répandre ces démonstrations dans leurs écrits, & sur-tout dans des traités de Physique; mais on laissoit aux Professeurs Royaux le soin de s'en occuper, comme si c'eût été une science étrangère à un cours de Philosophie.

La révolution arrivée en ce genre est d'autant plus surprenante, que la fureur de disputer sur les bancs s'est tout d'un coup ralentie, qu'elle paroît même avoir entièrement cessé. Enfin il n'y a guère de Professeurs de Philosophie dans l'Université, qui n'enseignent aujourd'hui publiquement les

* Les Élémens de Mathématiques de Malézieu publiés en 1704, & ceux de Polinière à qui l'on ne rendit pas assez de justice, furent entièrement négligés dans les Écoles.

ſciences exactes, & même preſque tous les élémens des différentes parties des Mathématiques.

D'un autre côté, les Profeſſeurs Royaux, ſoit de Mathématiques, ſoit de Philoſophie, ont enſeigné conſtamment pluſieurs traités publiés depuis l'invention du calcul différentiel & intégral; & il ſeroit fort à ſouhaiter, quant à ce calcul, que l'ancienne fondation d'une Chaire de Mathématiques par *Ramus* (l'objet actuel des vûes ſi ſages & de l'attention conſtante du Miniſtère) fût deſtinée uniquement à enſeigner, chaque année, les élémens & les méthodes nouvelles déjà fort ſimplifiées que l'on publie ſucceſſivement ſur le calcul intégral.

Lorſqu'on vient à lire les élémens d'Euclide, & principalement le cinquième livre, l'on eſt étonné de la multitude de propoſitions différentes, données par cet Auteur ſur les rapports & ſur les proportions géométriques: la pluſpart ſont néanmoins néceſſaires pour les livres ſuivans, & ſur-tout pour

démontrer les propoſitions des ſeptième, huitième, neuvième & dixième livres. On ſeroit encore plus étonné, en parcourant ces derniers, ſi l'on ne ſavoit qu'anciennement l'Arithmétique ſe démontroit à l'aide des ces propoſitions. Il n'eſt pas même néceſſaire de remonter au-delà de deux ſiècles, pour s'aſſurer qu'on en faiſoit uſage; cela ſe voit dans Clavius ou dans l'Arithmétique de Chauvet, augmentée par Taillefer. Il ſemble néanmoins que ces Commentateurs ont peu approfondi la démonſtration de la règle de fauſſe poſition.

La règle de fauſſe poſition eſt ſi ingénieuſe, & s'applique ſi fréquemment à tant d'objets, qu'elle mérite une attention toute particulière. Ces conſidérations ont déterminé à indiquer la voie la plus ſimple d'en rechercher la démonſtration.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE SPÉCULATIVE ET PRATIQUE,

Pour servir d'introduction aux leçons de Physique de l'Université de Paris, mis en françois avec des additions.

ON trouvera à la fin de ce Traité, lorsqu'il sera question de donner les règles pour résoudre les équations du 1.er & du 2d degré d'Algèbre, le Discours préliminaire que l'Auteur faisoit servir d'introduction aux Élémens de Mathématiques. Au reste, l'on entend vulgairement par le mot de *quantité* tout ce qui peut être augmenté ou diminué.

ARITHMÉTIQUE

Spéculative & Pratique.

L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience des nombres; le nombre eſt une collection ou aſſemblage d'unités; l'unité eſt ce qui conſtitue un tout.

L'Arithmétique eſt en partie ſpéculative & en partie pratique; elle eſt ſpéculative en ce qu'elle découvre la nature & les propriétés des nombres, mais elle eſt pratique en ce qu'elle donne des règles pour diſpoſer les nombres connus d'une manière propre à faire découvrir d'autres nombres inconnus.

L'on diſtingue deux ſortes de nombres, le nombre *entier* & le nombre *rompu*. Un nombre entier eſt une collection de pluſieurs quantités conſidérées comme formant un tout, & d'abord l'on voit que le nombre de cent écus eſt un nombre entier, ſoit qu'il ſoit compoſé de chaque écu, ce qui forme ſéparément autant de touts, ſoit qu'il ſoit compoſé de dix écus & un quart, & quatre-vingt-neuf écus & trois quarts; ce qui réuni forme encore le nombre de cent écus. Un

nombre rompu eſt une collection de plusieurs quantités conſidérées comme faiſant partie d'un même tout. Si l'on partage une aune en quatre parties & que l'on en prenne trois, ce qui forme les trois quarts, ce dernier ſe nomme nombre rompu.

Dans tous les nombres ſoit entiers, ſoit rompus, lorſqu'on les compare les uns avec les autres, il faut conſidérer deux choſes, ſavoir, leur *raiſon* ou *rapport*, & leur *proportion*. La raiſon des nombres eſt le rapport ou la relation qu'ils ont entr'eux: la proportion des nombres eſt l'égalité de deux raiſons. Le rapport, par exemple, de deux à quatre, qui eſt d'en être la moitié, repréſente la raiſon de deux à quatre; & comme ſix eſt auſſi la moitié de douze, il y a proportion entre deux & quatre d'une part, & entre ſix & douze de l'autre part, parce qu'il y a égalité de rapport ou de raiſon.

Voici l'ordre que l'on ſuivra dans ce Traité: l'on examinera d'abord les raiſons ou rapports qui ſont entre les nombres entiers; en ſecond lieu l'on parlera des raiſons qui ſont entre les nombres rompus; en troiſième lieu il faudra rechercher la nature & les propriétés des proportions qui ſe trouvent entre les

nombres, tant entiers que rompus; en quatrième lieu l'on exposera ce que l'on entend par les puissances des nombres & par les extractions des racines de ces puissances, avec la manière d'élever un nombre à telle puissance qu'on voudra, comme aussi celle d'extraire ou de trouver les racines de la deuxième puissance & même de la troisième; enfin l'on joindra à ce Traité une manière générale de faire toutes sortes de multiplication.

Définitions ou Explications des mots.

I. Un nombre homogène est un assemblage de plusieurs quantités qui sont absolument semblables, par exemple, d'écus.

II. Un nombre hétérogène est une collection de plusieurs quantités différentes: l'on considérera ici particulièrement les quantités dont les unes sont partie des autres, telles que la collection d'écus, sols & deniers.

III. L'on entend par théorème une proposition qu'il faut démontrer dans l'arithmétique: celui-ci, par exemple, le produit est en même raison à un des multiplicateurs, que de l'autre multiplicateur à l'unité; c'est-à-dire, que si l'on suppose donné le produit

de deux nombres quelconques 3 & 4, il y aura même raiſon de 12 à 3 qu'il y-a de 4 à 1; ce qui forme un théorème ou vérité qu'il faut prouver dans toute ſon étendue.

Pareillement, lorſque les Géomètres propoſent de démontrer que les trois angles d'un triangle rectiligne ſont égaux à deux droits, cela s'appelle un théorème de Géométrie.

IV. Un problème eſt une propoſition qui énonce qu'il faut faire quelqu'opération en Arithmétique, ou quelque conſtruction ſi c'eſt en Géométrie, en ſorte que l'on puiſſe démontrer enſuite que la manière que l'on preſcrit pour l'exécuter eſt infaillible.

Telles ſont les opérations d'addition, ſouſtraction, multiplication, diviſion, &c. en Arithmétique; telle eſt en Géométrie cette propoſition-ci, partager une ligne droite en deux parties égales.

L'on s'attache bien plus à démontrer les problèmes d'Arithmétique par leurs opérations inverſes, qu'à des démonſtrations plus rigoureuſes, parce que chaque opération porte ſa preuve; mais en Géométrie l'on auroit tort de ſe détacher des démonſtrations les plus rigoureuſes des problèmes qu'il y faut réſoudre.

V. Corollaire eſt une propoſition qui ſuit néceſſairement, ou qui, pour ainſi dire, découle d'une autre dont on a démontré la vérité.

VI. Un lemme eſt une propoſition dont on ne démontre la vérité que parce qu'elle ſert à faire voir plus facilement la vérité d'une autre qui va ſuivre.

Axiomes ou vérités premières & ſimples.

Un axiome eſt une propoſition ſi évidente par elle-même, qu'elle n'a point beſoin de preuve, comme les propoſitions ſuivantes.

1. Le tout eſt plus grand qu'aucune de ſes parties.

2. Le tout phyſique eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

3. Les quantités égales à une troiſième ſont égales entr'elles.

4. Si à des quantités égales vous ajoûtez d'autres quantités égales, les touts qui en réſulteront ſeront égaux.

5. Si de quantités égales vous retranchez des parties égales, les reſtes ſeront égaux.

6. Si à des quantités égales vous ajoûtez d'autres quantités inégales, les touts qui en réſulteront ſeront inégaux.

7. Si de quantités égales vous retranchez des parties inégales, les restes seront inégaux.

8. Si de plusieurs quantités la première est plus grande que la seconde, la seconde plus grande que la troisième, celle-ci plus grande que la quatrième, & ainsi consécutivement, la première sera plus grande que la dernière.

Demandes ou suppositions.

Je suppose 1.° que les dix caractères suivans 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, qu'on nomme chiffres & qui nous viennent des Arabes, peuvent être employés pour signifier toutes sortes de nombres finis, de manière que le premier signifie une unité, le second deux, &c. le dernier ne signifie rien tout seul & ne sert qu'à augmenter la valeur de ceux qui le précèdent, comme nous allons le voir.

Je suppose 2.° que si plusieurs de ces dix caractères sont écrits de suite, le dernier vers la droite signifie des unités simplement, le second signifie des dixaines d'unités, le troisième des dixaines de dixaines, & ainsi de suite par une progression décuple: tous les hommes sont convenus de cette supposition.

Je ſuppoſe 3.° que les dixaines de dixaines s'appellent centaines, que les dixaines de centaines ſe nomment milles, que les dixaines de centaines de milles s'appellent millions, & ainſi de ſuite, comme dans la Table ſuivante: c'eſt encore une convention faite entre les hommes.

Nombres...			*Nombres...*			*Nombres...*			*Nombres...*			*Nombres...*		
Dixaines...			*Dixaines...*			*Dixaines...*			*Dixaines...*			*Dixaines...*		
Centaines...			*Centaines...*			*Centaines...*			*Centaines...*			*Centaines...*		
3	2	1	8	0	4	8	2	7	2	1	4	8	9	3	5	0	7
d'Objets.			de Milles.			de Millions.			de Billions.			de Trillions.			de Quatrillions.		

Je ſuppoſe enfin que deux dixaines ſe nomment *vingt*, trois dixaines *trente*, quatre dixaines *quarante*, cinq dixaines *cinquante*, ſix dixaines *ſoixante*, ſept dixaines *ſoixante-dix* ou *ſeptante*, huit dixaines *quatre-vingt* ou *octante*, neuf dixaines *quatre-vingt-dix* ou *nonante*.

PREMIER PROBLÈME.

Nommer ou aſſigner la valeur de tout

nombre fini, marqué par les caractères ci-dessus.

Il faut d'abord partager de trois en trois les chiffres qui sont écrits, en commençant vers la droite; il faut ensuite observer que le dernier caractère de la première tranche vers la droite signifie les unités de l'objet dont il s'agit, le second les dixaines, & le troisième les centaines. De même que le premier chiffre de la seconde tranche signifie des unités de milles, le second des dixaines de milles, & le troisième des centaines de milles, & ainsi de suite, comme dans la figure précédente.

Si l'on propose donc d'appeler ou d'assigner la valeur du nombre qui est écrit dans la figure, je le partage d'abord de trois en trois, en allant de droite à gauche, & je remarque qu'il contient six tranches complètes de trois chacune; c'est pourquoi j'appelle ainsi le nombre écrit dans la figure, cinq cens sept quatrillions, huit cens quatre-vingt-treize trillions, deux cens quatorze billions, huit cens vingt-sept millions, huit cens quatre milles, trois cens vingt-un.

Il faut remarquer que je n'ai point appelé ni les dixaines de quatrillions, ni les dixaines

de milles, parce qu'en la place de ces dixaines j'ai trouvé le signe dixième ou zéro.

SECOND PROBLÈME.

Exprimer par les caractères arabiques tout nombre fini qu'on aura pensé ou qu'on vous exprimera par paroles.

Pour exécuter ce qui est proposé, remarquez d'abord que le nombre qu'il s'agit d'exprimer en chiffres commence ou par des unités, ou par des dixaines. Remarquez ensuite ce qu'on appelle après les unités des tranches de trois en trois; car on appellera ou les objets mêmes, ou les milles, ou les millions, &c. ce qui est évident suivant la figure ci-dessus. Observez enfin qu'il faut remplir avec des zéros les places de chaque tranche dans lesquelles on n'aura rien appelé: ces choses étant remarquées,

Je suppose qu'on appelle ce nombre cent soixante millions, trois cens sept milles, cinquante-quatre, & qu'il faille exprimer ce nombre en chiffres.

1.° Puisqu'on n'a appelé qu'une centaine de millions avec six dixaines, sans unités de millions, j'écris 1, ensuite 6, & ensuite 0.

2.° Parce qu'on a appelé ensuite, trois

centaines avec ſept unités de milles ſans dixaines, j'écris 3, puis 0, puis 7.

3.° Puiſqu'on a appelé cinq dixaines & quatre unités ſimples ſans les centaines, j'écris 0, puis 5, puis 4: je dis donc que j'ai exécuté ce qui étoit propoſé, c'eſt-à-dire, que le nombre appelé eſt exprimé par ces chiffres 160307054.

Il n'y a point de démonſtration de ces deux problèmes, parce que leur vérité dépend du choix & de la convention des hommes.

PREMIÈRE PARTIE.

Du rapport des Nombres entiers.

IL y a quatre principaux rapports entre les nombres entiers, ſavoir, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion; c'eſt pourquoi nous allons donner des règles & des préceptes pour faire les opérations qui regardent ces quatre rapports.

De l'addition des Nombres entiers.

L'addition eſt une opération par laquelle connoiſſant pluſieurs nombres finis & par-

ticuliers, on cherche & on découvre un nombre qui leur soit égal, ou bien connoissant toutes les parties d'un tout, on cherche & on découvre ce tout.

Il y a deux sortes d'addition des nombres entiers, la simple & la complexe; la simple est lorsque ces nombres particuliers sont homogènes, l'addition complexe lorsqu'ils sont hétérogènes.

PREMIER PROBLÈME.

Plusieurs nombres entiers homogènes étant connus, trouver un nombre qui leur soit égal, & que l'on nomme la somme *de ces nombres.*

SOLUTION.

Disposez les nombres donnés les uns au dessous des autres, en sorte que toutes les unités soient dans la même colonne, les dixaines directement sous les dixaines, & les centaines sous les centaines, &c. comme dans l'exemple suivant, & ayant tiré une ligne au dessous de tous ces nombres,

Assemblez toutes les unités en une somme, cette somme peut s'exprimer par un seul chiffre, ou par deux, ou par trois: si elle peut s'exprimer par un seul caractère, écrivez-

le au dessous de la ligne, directement sous les unités des nombres connus. Si elle ne peut s'exprimer que par deux ou par trois chiffres, écrivez le dernier sous les unités, & retenez dans votre esprit, ou l'autre, ou les deux autres caractères.

Passant ensuite aux dixaines des nombres connus, assemblez les caractères retenus avec ces dixaines, & voyez si la somme peut s'exprimer par un seul chiffre, ou s'il en faut deux ou trois. Si elle peut s'exprimer par un seul caractère, écrivez-le directement sous les dixaines; si elle ne peut s'exprimer que par deux ou par trois caractères, écrivez le dernier directement sous les dixaines des nombres connus, & retenez dans votre esprit, ou l'autre, ou les deux autres caractères qu'il faudra ajoûter aux centaines des nombres connus, & ainsi de même pour les centaines, pour les milles, &c.

Quand vous serez parvenu à la dernière colonne des nombres connus vers la gauche, après avoir écrit le dernier chiffre de l'assemblage de cette colonne, il faut écrire en avant les caractères que vous aurez retenus dans votre esprit, & votre opération sera achevée, c'est-à-dire que le nombre écrit

au dessous de la ligne sera la somme cherchée.

Soient, pour exemple, les quatre nombres suivans, & qu'il faille trouver un nombre qui leur soit égal.

Addition simple.

89650
7534
6346
19065
Somme totale... 122595

1.° Les ayant écrits de manière que les unités soient directement sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, comme on le voit, & ayant tiré une ligne au dessous, je commence par assembler les unités en disant, 4 & 6 sont 10, & 5 sont 15; & comme le nombre 15 est de deux chiffres, j'écris directement sous les unités le caractère 5, & je retiens une dixaine.

2.° Passant à la colonne des dixaines, je dis, 1 retenu & 5 sont 6, & 3 sont 9, & 4 sont 13, & 6 sont 19; & comme

ce nombre s'exprime par ces deux caractères 19, j'écris le dernier 9 directement sous les dixaines, & je retiens le premier 1.

3.° Passant aux centaines, je dis, 1 de retenu & 6 sont 7, & 5 sont 12, & 3 sont 15; j'écris sous les centaines le dernier caractère 5, & retiens 1.

4.° Passant aux unités de milles, je dis 1 retenu & 9 sont 10, & 7 sont 17, & 6 sont 23, & 9 sont 32; j'écris le dernier caractère 2 sous les unités de milles, & je retiens le premier caractère 3.

5.° Enfin passant aux dixaines de milles, je dis 3 retenus & 8 sont 11, & 1 sont 12, j'écris directement au dessous le chiffre 2 & retiens 1; mais parce qu'il n'y a plus d'autres chiffres à assembler, j'écris le caractère 1 dans la place qui répondroit aux centaines de milles.

Je dis donc que le nombre écrit au dessous de la ligne, savoir, 122595, est le nombre cherché, ou qu'il est équivalent aux quatre nombres proposés.

Démonstration.

Un nombre est précisément égal à plusieurs autres donnés, quand il contient autant

d'unités, de dixaines, de centaines, &c. que ces plusieurs donnés: or le nombre écrit au dessous de la ligne contient autant d'unités, de dixaines, de centaines, &c. que les quatre donnés; car dans la colonne des unités des nombres donnés, il y a cinq unités & une dixaine; & dans le nombre écrit au dessous, il y a aussi cinq unités. Dans la colonne des dixaines, il y a neuf dixaines & une centaine (y ayant ajoûté l'unité retenue); & dans le nombre écrit au dessous, il y a neuf dixaines. Dans la colonne des centaines, après y avoir ajoûté l'unité retenue, il y a cinq centaines & une unité de milles; & dans le nombre qui est au dessous, il y a aussi cinq centaines. Dans la colonne des unités de milles, après y avoir ajoûté l'unité retenue, il y a deux unités de milles & trois dixaines de milles; & dans le nombre au dessous, il y a deux unités de milles. Dans la colonne des dixaines de milles, après y avoir ajoûté les trois retenus, il y a deux dixaines & une centaine, & dans le nombre écrit au dessous il y a deux dixaines, & il y aura aussi une centaine, si j'écris vers la gauche l'unité de centaines que j'ai retenue. Il y a donc dans le nombre écrit au dessous de

de la ligne autant d'unités, de dixaines, de centaines, &c. qu'il y en a dans les quatre nombres proposés. Ce nombre est donc égal aux quatre proposés.

Soient encore, pour s'exercer, les six nombres suivans, auxquels il faille trouver un nombre égal.

Deuxième Exemple.

97543
8073
89426
54395
6898
43665
Somme totale...300000

En observant les règles prescrites ci-dessus; on trouvera ce nombre 300000 équivalant aux six nombres proposés.

REMARQUES.

1.° Si après avoir additionné ou assemblé les nombres d'une colonne, la somme doit être exprimée par deux chiffres, dont le dernier soit zéro, il faudra écrire zéro directement sous cette colonne, & retenir le premier caractère.

2.° Si les nombres proposés sont en si grande quantité que la collection de chacune des colonnes devienne trop difficile, il faudra distribuer la quantité de ces nombres, par exemple, de dix en dix, & ensuite faire l'addition de chacune de ces dixaines, en écrivant à part la somme de chacune: car si vous faites en dernier lieu l'addition de ces sommes particulières, vous aurez une somme totale égale à tous les nombres proposés.

SECOND PROBLÈME.

Connoissant plusieurs nombres entiers hétérogènes, trouver leur somme.

SOLUTION.

1.° Disposez tous les nombres qui signifient des objets semblables, les uns sous les autres, unités sous unités, dixaines sous dixaines; &c. laissant un espace notable entre les chiffres qui signifient des objets différens, & mettez au haut les signes de ces objets.

2.° L'on doit connoître combien il faut d'unités des espèces inférieures pour composer une unité d'une espèce immédiatement supérieure: par exemple, il faut connoître que douze deniers composent un sol, que deux

dixaines de ſols compoſent une livre, que trois livres compoſent un écu, &c.

3.° Faites l'addition de tous les nombres de la plus baſſe eſpèce, de manière que quand en additionnant vous aurez une unité de l'eſpèce ſupérieure, vous marquiez à côté ou un point ou une croix. Si après avoir achevé l'addition, il reſte quelque choſe qui ne puiſſe égaler une unité de l'eſpèce ſupérieure, écrivez ce reſte ſous l'eſpèce dont vous venez de faire l'addition.

4.° En paſſant à l'eſpèce ſupérieure, vous y ajoûterez autant d'unités que vous aurez marqué de points ou de croix, & ainſi de ſuite.

Suppoſons pour exemple, les quatre nombres entiers & hétérogènes que voici.

Addition complexe.

	1970^{l}	15^{f}	8^{d}
	452.	9.	10x
	346.	18.	6x
	8573.	17.	11.
Somme totale...	11344^{l}	1^{f}	11^{d}

1.° Je commence par les deniers, & je dis 8 & 10 font 18; & comme il en faut douze pour faire un ſol, je mets une croix

à côté & je prends le ſurplus qui eſt 6; je dis enſuite 6 & 6 ſont 12, je mets encore une croix à côté & je ne retiens rien; & parce qu'il ne reſte que 11 deniers, je les écrits au deſſous de la ligne.

2.° Paſſant aux ſols, je dis, 2 (marqués par les croix) & 5 ſont 7, & 9 ſont 16, & 8 ſont 24, & 7 ſont 31, j'écris directement au deſſous 1, & retiens 3 dixaines que j'ajoûte aux trois dixaines qui ſont écrites, cela fait ſix dixaines de ſols, dont la moitié eſt égale à trois livres que je retiens.

3.° Paſſant aux livres, je dis 3 retenus & 2 ſont 5, & 6 ſont 11, & 3 ſont 14, j'écris directement au deſſous 4 & retiens 1, que j'ajoûte aux dixaines, & ainſi de ſuite, comme dans le premier problème: le nombre marqué au deſſous de la ligne eſt celui que je cherchois.

La démonſtration de ce problème eſt à peu près la même que celle que nous avons rapportée pour le premier, & d'ailleurs la vérité en eſt aſſez évidente par ce que nous avons dit.

REMARQUES.

1.° Si après avoir fait l'addition des

deniers & avoir marqué des croix à côté, il ne restoit aucuns deniers, il ne faudroit rien écrire sous les deniers, ou si vous voulez, écrivez zéro.

2.° Si le nombre des dixaines de sols est impair, il faut en écrire une directement au dessous, & prendre la moitié des autres pour les ajoûter aux livres.

3.° Pour faire toutes sortes d'additions de nombres entiers & hétérogènes, il faut connoître la valeur des espèces inférieures par rapport aux supérieures, comme nous l'avons dit. Voici une liste des objets qui se rencontrent plus fréquemment dans la société civile.

L'écu d'argent se divise en trois livres, la livre en vingt sols, & le sol en douze deniers.

Il y a une autre livre qui est de poids, qui se divise en deux marcs, le marc en huit onces, l'once ℥ en huit gros, le gros ʒ en trois deniers ou scrupules, & le denier ou scrupule ℈ en vingt-quatre grains.

L'arpent se divise en cent perches quarrées, dix en longueur & dix en largeur; la perche courante & non quarrée aux environs de Paris en trois toises; dans les forêts du Roi, la perche a 22 pieds ou 3 toises $\frac{2}{3}$;

elle varie dans les provinces. Les autres mesures sont fixes & constantes ; la toise se subdivise en six pieds ; le pied en douze pouces ; le pouce en douze lignes.

L'espace considéré selon toutes ses dimensions, c'est-à-dire, selon sa longueur ; sa largeur & sa profondeur, se divise en toises cubiques, pieds cubiques, pouces cubiques & lignes cubiques.

Le cercle se divise en trois cens soixante parties égales, qui se nomment *degrés;* chaque degré se subdivise en soixante parties égales qui s'appellent minutes, chaque minute en soixante secondes, chaque seconde en soixante tierces, & ainsi de suite par soixantièmes.

L'heure se divise en soixante parties égales qu'on nomme minutes, chaque minute en soixante secondes, chaque seconde en soixante tierces, &c. d'où il suit que ces mots minute, seconde, &c. sont équivoques, & pour l'éviter, on dit minutes de degré, secondes de degré, &c. minutes d'heure, secondes d'heure, &c.

Voici la manière abrégée de les écrire.

$$o^{d}\ oo'\ oo''\ oo'''$$
$$o^{h}\ oo.\ oo.\ oo.$$

L'on a trouvé occasion d'ajoûter ici ce

qui ſuit pour les uſages de la Chymie, & pour les beſoins de la vie civile.

Le muid de grain, meſure de Paris, ſe partage en douze ſetiers, le ſetier en deux mines, la mine en deux minots, le minot en trois boiſſeaux, le boiſſeau en ſeize litrons * de trente-ſix pouces cubes chacun: le muid d'avoine eſt double de celui de blé.

Le muid de ſel contient douze ſetiers, le ſetier quatre minots, le minot quatre boiſſeaux, & le boiſſeau ſeize litrons.

La voie ou le muid de charbon de bois contient vingt mines pour les bourgeois, & ſeize pour les marchands; la mine deux minots, & le minot huit boiſſeaux.

La voie ou muid de charbon de terre contient quinze minots, & le minot ſix boiſſeaux.

Le muid de chaux contient quarante-huit minots, le minot trois boiſſeaux, & le boiſſeau ſeize litrons.

Le muid de plâtre contient trente-ſix ſacs, & le ſac doit contenir deux boiſſeaux.

Le muid de vin contient, meſure de Paris, trente-ſix ſetiers ou deux demi-muids,

* Si on le forme ſur le ſetier de M. Picard, il excède 40 pouces.

ou deux cens quatre-vingt-huit pintes; y compris la lie: le demi-muid deux quarteaux ou cent quarante-quatre pintes; le quarteau contient ſoixante-douze pintes, le ſetier contient quatre quartes, la quarte deux pintes, la pinte deux chopines, la chopine deux demi-ſetiers, le demi-ſetier deux poiſſons.

La pinte contient d'ailleurs 48 pouces cubes.

La queue de Bourgogne ou d'Orléans contient deux demi-queues ou quatre cens trente pintes, la demi-queue contient deux cens quinze pintes.

La queue de Champagne contient deux demi-queues ou quarante-huit ſetiers, ou environ trois cens quatre-vingt-quatre pintes, y compris la lie, qui valent environ un muid & un tiers; la demi-queue contient deux quarteaux ou cent quatre-vingt-douze pintes, le quarteau quatre-vingt-ſeize pintes.

La voie de bois ou demi-corde contient à Paris 4 pieds de longueur ſur 4 pieds de hauteur, ce qui répond à 56 pieds cubes.

Dans les anciennes ordonnances la voie de bois de compte ou moule, eſt de ſoixante-deux bûches au plus, compris les douze témoins & rempliſſant trois anneaux: les bûches ayant 3 ½ pieds de long ſur 18 pouces au moins de groſſeur.

De la Soustraction des nombres entiers.

La soustraction est une opération, par laquelle connoissant deux nombres inégaux, l'on cherche & l'on découvre de combien le plus grand surpasse le plus petit.

Il y a deux espèces de soustraction, la simple, lorsque les deux nombres connus sont homogènes; & la complexe, lorsque les deux nombres connus, ou du moins l'un des deux est hétérogène: c'est pourquoi nous donnerons deux problèmes.

PREMIER PROBLÈME.

Deux nombres homogènes & inégaux étant connus, trouver l'excès du plus grand sur le plus petit.

En premier lieu, il faut écrire le plus petit nombre sous le plus grand, en sorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. & tirer une ligne au dessous.

Secondement, ôtez, s'il se peut, les unités, les dixaines, les centaines, &c. du petit nombre, des unités, dixaines & centaines correspondantes du plus grand, & écrivez au dessous de la ligne les restes ou excès

chacun dans ſon rang : par exemple, ſi l'on connoît les deux nombres inégaux qui ſuivent, je les écris le plus petit ſous le plus grand de cette manière.

Souſtraction ſimple.

	78965
Nombre à ſouſtraire...	37424
Le reſte...	41541
Vérification...	78965

Enſuite j'ôte les unités du petit nombre, ſavoir 4, des unités du plus grand, ſavoir de 5, & j'écris au deſſous de la ligne ſous les unités l'excès 1. Paſſant aux dixaines, j'ôte 2 de 6, & j'écris directement au deſſous l'excès 4 : paſſant aux centaines, j'ôte 4 de 9, & j'écris au deſſous l'excès 5 : paſſant aux unités de milles, j'ôte 7 de 8, & j'écris au deſſous l'excès 1 : enfin paſſant aux dixaines de milles, j'ôte 3 de 7, & j'écris l'excès 4 directement au deſſous, & l'opération eſt finie. Ainſi je dis que le nombre écrit au deſſous de la ligne eſt l'excès du plus grand des deux nombres ſur le plus petit.

Troiſième ment, ſi quelques caractères du

plus petit nombre ſont plus grands que ceux du grand nombre auquel ils répondent, il faut imaginer une dixaine ajoûtée à chacun des caractères du plus grand nombre qui ſe trouveront plus petits que les caractères du plus petit nombre, & l'on pourra faire la ſouſtraction: mais quand cette ſouſtraction ſera faite & qu'on paſſera au caractère antérieur du plus petit nombre, il faudra lui ajoûter la dixaine imaginée, & ainſi de ſuite. Par exemple, ſoient les deux nombres connus & inégaux.

Deuxième Exemple.

	8432
Nombre à ſouſtraire...	5674
Le reſte...	2758
Vérification...	8432

Ayant tiré une ligne au deſſous, je veux ôter 4 de 2, cela ne ſe peut; c'eſt pourquoi j'imagine une dixaine ajoûtée à 2, ce qui fait 12, dont j'ôte 4, & j'écris au deſſous le reſte 8: paſſant enſuite aux dixaines du petit nombre, ſavoir à 7, je leur ajoûte la dixaine imaginée ou empruntée, ce qui fait 8; j'ôte 8 de 3, ce qui ne ſe peut.

j'emprunte une dixaine laquelle jointe à 3, fait 13, dont j'ôte 8, & j'écris au dessous le reste 5: passant aux centaines du petit nombre, savoir à 6, je leur ajoûte la dixaine empruntée, ce qui fait 7; j'ôte 7 des quatre centaines correspondantes, ce qui ne se peut, & j'emprunte une dixaine, laquelle jointe à 4, fait 14, d'où j'ôte 7, & j'écris au dessous le reste 7: enfin passant aux unités de milles du petit nombre qui sont 5, j'y joins l'unité empruntée, ce qui fait 6, & j'ôte ces 6 du nombre correspondant 8, & j'écris le reste 2 immédiatement au dessous, & je dis que le nombre écrit au dessous de la ligne, savoir 2758, est l'excès du plus grand des deux nombres proposés sur le plus petit.

Si l'on observe cette dernière règle dans l'exemple suivant, on trouvera que le nombre 33258, est l'excès du plus grand sur le plus petit de ces deux nouveaux nombres.

Troisième Exemple.

$$\begin{array}{r} 90000 \\ 56742 \\ \hline 33258 \end{array}$$

DÉMONSTRATION.

Les nombres qu'on écrit au deſſous de la ligne marquent ce qui manque au petit nombre pour égaler le grand; donc ſi l'on fait une ſomme du petit nombre & de ce qui eſt au deſſous de la ligne, il doit réſulter une ſomme égale au plus grand des nombres connus.

La raiſon de la ſeconde pratique, ou du ſecond exemple, ſe tire de ce que s'il falloit ôter 18 de 21, je dirois 8 de 1 ne ſe peut, j'emprunte une des deux dixaines qui précèdent l'unité, pour avoir 11 d'où j'ôte 8, & j'écris ſous la ligne le reſte 3 : j'ajoûte l'unité empruntée à la dixaine du nombre à ſouſtraire, ce qui fait 2 que j'ôte de 2, il ne reſte rien. Or c'eſt la même choſe que ſi j'avois tranſporté une des deux unités de dixaines du grand nombre pour la joindre aux unités ſimples; ce qui eût fait 11, d'où j'aurois ôté 8, les dixaines antérieures reſtant par-là égales, & ſe détruiſant.

SECOND PROBLÈME.

Connoiſſant deux nombres hétérogènes inégaux, ou dont l'un ſeulement ſoit hétérogène; trouver l'excès du plus grand ſur le plus petit.

Premièrement, ſi le plus petit nombre eſt homogène & le plus grand hétérogène, écrivez le plus petit ſous le plus grand, comme dans le problème précédent, & ayant tiré une ligne au deſſous écrivez les eſpèces inférieures du plus grand nombre au deſſous de cette ligne, comme un reſte ou un excès: venant enſuite aux unités, dixaines & centaines du petit nombre, faites la ſouſtraction, comme dans le premier problème, ou bien comme vous voyez dans l'exemple ſuivant.

Souſtraction complexe.

	4578[l]	10[f]	7[d]
Nombre à ſouſtraire...	2799.	0.	0
Le reſte...	1779.	10.	7
Vérification...	4578.	10.	7

Secondement, ſi le petit nombre eſt hétérogène & le plus grand homogène, il faut écrire les unités, dixaines & centaines homogènes du petit nombre ſous les unités,

dixaines & centaines du plus grand, & les eſpèces inférieures du petit à quelque diſtance vers la droite, comme dans l'addition des nombres hétérogènes; & ayant tiré une ligne au deſſous, ôtez l'eſpèce la plus baſſe du nombre hétérogène, d'une unité de l'eſpèce immédiatement précédente, que vous imaginerez tranſportée à la place des eſpèces les plus baſſes, & écrivez le reſte au deſſous de la ligne: enſuite ajoûtant cette unité empruntée à l'eſpèce immédiatement ſupérieure, ôtez-en la ſomme d'une autre unité de l'eſpèce précédente, que vous imaginerez tranſportée au deſſus de l'eſpèce ſur laquelle vous opérez, & n'oubliez pas d'ajoûter cette unité empruntée à l'eſpèce précédente, & ainſi de ſuite, comme vous voyez dans l'exemple ſuivant, où je dis:

Deuxième Exemple.

	7533^{l}	0^{s}	0^{d}
Nombre à ſouſtraire...	4687.	15.	6
Le reſte...	2845.	4.	6
Vérification...	7533.	0.	0

Six deniers ôtés de zéro de deniers, cela ne ſe peut; je feins une unité de ſols portée

aux deniers qui en vaut 12, j'ôte 6 deniers de 12, & j'écris le reste 6 au dessous: passant ensuite aux sols, je dis 1 sol emprunté & 15 sont 16, j'ôte 16 sols de zéro sol, cela ne se peut; j'imagine une unité de livres transportée à la place des sols, laquelle vaut 20 sols; de 20 sols j'ôte 16, & j'écris le reste 4 au dessous de la ligne: passant delà aux unités de livres, je dis 7 livres & une livre empruntée font 8, j'ôte 8 de 3, cela ne se peut; je feins une dixaine ajoûtée aux trois unités, cela fait 13, d'où j'ôte 8, & j'écris le reste 5 au dessous de la ligne: passant aux dixaines, j'ajoûte l'unité empruntée aux huit dixaines du petit nombre, ce qui fait 9, j'ôte 9 de 3, ce qui ne se peut; j'imagine donc une autre dixaine qui jointe à 3, fait 13, d'où j'ôte 9, & j'écris le reste 4 au dessous, & j'achève comme ci-devant.

Troisièmement, si les deux nombres connus sont hétérogènes, il faudra les écrire comme ci-dessus, en observant que les espèces les plus basses du petit nombre répondent aux espèces de même nom du grand nombre; & après avoir tiré une ligne au dessous, faites la soustraction comme dans les deux exemples suivans.

De

1.er *Exemple.* de...	8764l	15f	8d
ôtez...	5432.	8.	4.
Reste...	3332.	7.	4.
Vérification...	8764.	15.	8.

2.me *Exemple.* de...	5789l	4f	6d
ôtez...	2889.	15.	8.
Reste...	2899.	8.	10.
Vérification...	5789.	4.	6.

REMARQUE.

Pour reconnoître si l'on ne s'est point trompé dans l'opération de la soustraction, il faut faire une addition du plus petit nombre & du reste écrit au dessous de la ligne: alors si la somme égale le plus grand des deux nombres connus, on est assuré que l'opération est bonne, comme il est évident par la démonstration.

De la Multiplication des nombres entiers.

La Multiplication est une opération par laquelle connoissant deux nombres égaux ou inégaux, on cherche & on découvre un troisième nombre qui contienne un des deux

connus autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre: par exemple, connoiſſant 6 & 5, je cherche un nombre qui contienne autant de fois 6, qu'il y a d'unités dans 5; ou bien qui contienne autant de fois 5, qu'il y a d'unités dans 6.

Le nombre qu'on prend pluſieurs fois, ſe nomme *multiplicande;* celui qui exprime combien de fois le multiplicande eſt pris, s'appelle *multiplicateur,* & le nombre qu'on découvre par cette opération, eſt appelé *produit;* les deux nombres connus avant l'opération ſont nommés tantôt *facteurs,* tantôt *côtés,* ou bien *racines,* & *produiſans.*

Il eſt viſible préſentement que le produit ſera toûjours le même, ſoit que l'on prenne le premier des deux nombres pour multiplicande & le ſecond pour multiplicateur; ſoit que l'on prenne le premier pour multiplicateur & le ſecond pour multiplicande; car ce ſera la même choſe, par exemple, de dire *quatre fois cinq* ou *cinq fois quatre,* puiſqu'il en réſultera toûjours le même produit, ſavoir, vingt.

La multiplication ſe nomme ſimple, lorſque les nombres propoſés ſont homogènes; mais on la nomme complexe, lorſque les

nombres proposés, ou du moins l'un des deux nombres est hétérogène.

PREMIER PROBLÈME.

Multiplier un nombre entier & homogène par un autre qui soit pareillement entier & homogène.

Si le multiplicateur n'est que d'un seul chiffre ou caractère, écrivez-le sous les unités du multiplicande, & tirez au dessous une barre; ensuite prenez le produit du multiplicateur par les unités qui sont au multiplicande, & faites attention si le produit est d'un ou de deux caractères. Dans le premier cas, écrivez-le au dessous des unités immédiatement; mais dans le second cas, s'il y a deux caractères au produit, écrivez uniquement le chiffre postérieur, & retenez par mémoire l'autre: après quoi prenez encore le produit du multiplicateur par le caractère qui est aux dixaines du multiplicande, & ajoûtez à ce produit le nombre que vous avez retenu par mémoire, afin d'écrire ce dernier, ou du moins son chiffre postérieur, s'il y en a deux, directement au dessous des dixaines: il faudra, comme ci-devant, retenir par mémoire le premier des deux nombres

de ce nouveau produit, s'il y en a deux. L'on opérera précisément de même pour les centaines & les milles, &c. ajoûtant toûjours le chiffre que l'on aura retenu au produit, jusqu'à ce qu'on ait multiplié successivement tous les caractères du nombre supérieur, & l'on écrira enfin au devant du dernier produit le chiffre qu'on aura retenu, s'il y en a. Cela fait, je dis que les nombres qui sont au dessous de la barre, représenteront le produit que l'on cherche.

Voici pour exemple deux nombres entiers & homogènes, dont l'un n'est d'abord exprimé que par un seul caractère & doit être pris, puisque cela est plus commode, pour le multiplicateur.

Multiplication simple.

	3757
Multiplicateur.....	7
Produit . . .	26299.

C'est-à-dire qu'ayant écrit directement le multiplicateur sous le rang des unités du nombre multiplicande, & ayant tiré au dessous une ligne ou petite barre, je commence par dire, sept fois 7 sont 49, & j'écris

directement au dessous le chiffre 9, retenant 4 par mémoire : je continue à dire, sept fois 5 sont 35, y ajoûtant le chiffre retenu 4, cela fait 39, & j'écris 9 au dessous des dixaines, retenant 3 : je dis encore, sept fois 7 sont 49, y ajoûtant 3 que j'ai retenus, cela fait 52, & j'écris 2 au dessous des centaines, ayant soin de retenir 5 : enfin je dis, sept fois 3 sont 21, y ajoûtant 5 que j'ai retenus, cela fait 26, & j'écris 6 au dessous des milles, retenant 2 par mémoire; mais parce qu'il ne se trouve pas davantage de caractère dans le multiplicande, j'avance 2 que j'ai retenus, c'est-à-dire, je le place sous les dixaines de milles. Ainsi le nombre 26299 qui se trouve écrit, après l'opération, au dessous de la barre, sera le produit que l'on cherche.

Que si l'un & l'autre nombre proposé contiennent plusieurs caractères, il faut se conformer aux préceptes suivans. 1.° L'on disposera tellement les caractères du multiplicateur sous le multiplicande, que les unités de l'un répondent directement sous les unités de l'autre, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c. après quoi l'on tirera une barre au dessous.

2.° Il ne faut multiplier tous les chiffres du multiplicande que par le caractère qui contient les unités du multiplicateur, & cela comme s'il n'y avoit que ce seul caractère, opération semblable à celle de l'exemple précédent.

3.° L'on multipliera de même tous les chiffres du multiplicande, par l'autre caractère du multiplicateur qui contient les dixaines, & cela comme s'il n'y en avoit pas d'autre que celui des dixaines ; mais l'on aura soin, dans cette seconde multiplication, de placer le premier chiffre du produit sous les dixaines du multiplicande, & les autres successivement en avançant vers la gauche.

4.° Multipliez pareillement tous les chiffres du multiplicande par le troisième caractère du multiplicateur qui contient les centaines, comme s'il n'y en avoit pas d'autre que celui-là. L'on aura soin de placer aussi, dans cette troisième multiplication, le premier chiffre du produit sous les centaines du multiplicande, & les autres à la gauche. Enfin l'on continuera d'opérer pareillement pour les milles & pour un plus grand nombre de chiffres dans le multiplicateur, s'il y en a.

5.° L'on tirera une barre au dessous de

tous les produits, & par l'addition l'on réunira en une ſomme tous les produits particuliers qui ont été faits, en écrivant leur ſomme au deſſous de la barre: après cette opération, il eſt viſible que cette ſomme ſera le produit total que l'on cherche.

Autre opération.

Soit, par exemple, le nombre 3754
qu'il faut multiplier par un autre nombre 365

	18770
	22524
	11262
Produit total.	1370210

Pour faire cette multiplication, j'écris d'abord le multiplicateur au deſſous du multiplicande, comme il a été preſcrit, & ayant tiré une barre au deſſous, je dis, en commençant par le dernier chiffre 5 du multiplicateur, cinq fois 4 ſont 20, & j'écris 0 au deſſous des unités, retenant 2 par mémoire : enſuite je dis, cinq fois 5 ſont 25, y ajoûtant 2 que j'ai retenu, c'eſt 27, & j'écris 7 au deſſous du rang des dixaines, retenant 2. Je continue diſant, cinq fois 7 ſont 35, y ajoûtant 2, c'eſt 37, & j'écris

7 au dessous des centaines, retenant 3. Je dis encore, cinq fois 3 sont 15, y ajoûtant 3, c'est 18, & j'écris 8 au dessous de mille, retenant 1 ; mais parce qu'il ne reste plus de chiffre à multiplier, j'avance 1 que j'ai retenu, lequel se trouve ainsi au dessous des dixaines de milles.

Cette première opération est précisément la même que celle de l'exemple précédent, & celles que l'on va faire n'en diffèrent que parce que l'on recule d'abord d'un rang vers la gauche dans celle qui suit immédiatement, de deux rangs dans l'opération suivante, & ainsi de suite tant qu'il y aura de chiffres au multiplicateur.

En second lieu, l'on passera aux dixaines du multiplicateur, & l'on dira, six fois 4 sont 24, j'écris 4 au dessous des dixaines du multiplicande, retenant 2 : on continuera disant, six fois 5 sont 30, y ajoûtant 2, c'est 32, j'écris 2 au dessous des centaines & je retiens 3. L'on dira encore, six fois 7 sont 42, y ajoûtant 3, c'est 45, j'écris 5 au dessous des milles du multiplicande, & je retiens 4. Enfin on dira, six fois 3 sont 18, y ajoûtant 4, c'est 22, j'écris 2 au dessous des dixaines de milles & je retiens

2, & n'y ayant plus d'autres caractères pour opérer dans le multiplicande, j'avance 2 vers la gauche, lequel sera précisément au dessous des centaines de milles de ce multiplicande.

En troisième lieu, je passe aux centaines du multiplicateur, où je trouve le chiffre 3, & je dis, trois fois 4 sont 12, j'écris 2 au dessous des centaines du multiplicande, & je continue comme ci-dessus sur les autres caractères, en avançant les produits vers la gauche.

Enfin ayant additionné en une somme tous les produits, je trouve 1370210, & il reste à prouver que c'est-là le produit que l'on cherche.

Démonstration.

Il est certain qu'un nombre est le produit d'une multiplication, lorsqu'il contient autant de fois le nombre multiplié qu'il y a d'unités dans le multiplicateur : cela s'ensuit tant des deux définitions qu'on trouve aux premières pages, que de celle qu'on vient de donner de la multiplication : or le produit trouvé dans notre premier exemple contient autant de fois le nombre multiplié qu'il y a d'unités

dans le multiplicateur 7, puiſque, ſelon l'opération, chaque caractère du multiplicande a été pris ſept fois ſucceſſivement; donc il eſt vrai de dire que l'on a trouvé ce que l'on cherche. Semblablement, dans le ſecond exemple, la ſomme de chaque produit particulier contient autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités dans le multiplicateur: en effet, chaque caractère du multiplicande a été pris, cinq fois, ſoixante fois & trois cens fois; partant il eſt encore vrai de dire que l'on a trouvé ce que l'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si l'on propoſoit de multiplier quelque nombre par 10, ou par 100, ou par 1000, l'opération ſeroit bien ſimple, puiſqu'il ſuffit d'ajoûter au multiplicande autant de *zéros* vers la droite qu'il s'en trouve dans le multiplicateur, à quoi ſe réduit uniquement l'opération propoſée, c'eſt-à-dire que la multiplication ſera ainſi achevée tout-à-fait. Soit, par exemple, le nombre 365 que l'on propoſe de multiplier par 100, ajoûtez deux *zéros* au multiplicande, & le produit que l'on cherche ſera 36500. La raiſon de ce

procédé eſt que zéro ne multipliant pas, ce caractère ne ſert uniquement qu'à augmenter en dixaines, centaines, &c. la valeur des caractères qui précèdent. D'un autre côté, multipliant par 1, l'on ne change aucunement la valeur du multiplicande; d'où il s'enſuit que, pour abréger, il faut ajoûter autant de zéros au multiplicande, qu'il s'en trouve dans le multiplicateur.

L'expérience a fait auſſi connoître que ceux qui commencent, de même que les moins exercés, trouvent quelques difficultés. & n'obtiennent que péniblement chaque multiplication particulière de deux chiffres: l'on a imaginé un remède bien ſimple pour ces produits particuliers. Car puiſqu'ils ne trouvent pas tout d'un coup le produit de deux chiffres qui ſe multiplient, tels que 8 par 9, ou bien 8 par 7; pour y remédier juſqu'à ce qu'ils en aient contracté l'habitude, voici la Table de *Pythagore* dont ils pourront faire uſage.

TABLE DE PYTHAGORE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Voici l'uſage de cette Table. L'on voit au haut de la Table le chiffre qui repréſente le multiplicande, & dans la première colonne en deſcendant à gauche, le chiffre qui repréſente le multiplicateur: regardez enſuite quel eſt le nombre qui répond dans le petit quarré qui eſt à plomb immédiatement au deſſous du multiplicande, & de niveau ou vis-à-vis du multiplicateur; je dis que ce nombre ſera le vrai produit que l'on cherche.

Si l'on propoſe, par exemple, de trouver le produit qui réſulte de la multiplication de 8 par 7, cherchez dans le haut de la Table

le nombre 8 & 7 dans la première colonne à gauche; voyez ensuite quel est le petit quarré qui répond perpendiculairement au dessous du chiffre 8 d'en haut, & vis-à-vis 7 vers la droite, & trouvant qu'il est écrit dans le quarré 56, ce sera le produit que l'on cherche. Au reste, le fréquent exercice & l'habitude que l'on pourra acquerir, doivent dispenser dans la suite d'avoir recours à une Table que l'on n'a pas toûjours sous la main.

SECOND PROBLÈME.

Multiplier une quantité hétérogène par une autre semblablement hétérogène, ou bien par une autre qui est homogène.

L'on trouvera sur la fin de ce Traité la solution de ce problème, qu'on sera plus en état pour lors de résoudre, de même que d'autres qui ont rapport à la multiplication des nombres hétérogènes.

De la Division des Nombres entiers.

La Division est une opération qui consiste à chercher & à découvrir combien de fois un nombre connu est contenu dans un autre nombre pareillement connu.

Il faut d'abord faire attention que le nombre qui contient l'autre s'appelle le *dividende* ou le nombre à diviſer, au lieu que le nombre qui eſt contenu s'appelle le *diviſeur:* enfin le nombre que l'on cherche, lequel ſignifie & fait voir combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, s'appelle le *quotient.*

La diviſion s'appelle diviſion ſimple, lorſque les deux nombres connus & propoſés ſont homogènes; elle eſt complexe, quand tous les deux nombres propoſés ou l'un des deux ſeulement eſt hétérogène: voici divers problèmes ſur la diviſion.

PREMIER PROBLÈME.

Diviſer un nombre homogène par un autre qui eſt pareillement homogène.

Ayant écrit le dividende, tirez une barre au deſſous, que vous prolongerez vers la droite autant qu'il ſera néceſſaire; enſuite coupez cette ligne quarrément vers la gauche par un trait, immédiatement après le dernier chiffre du dividende; enfin au deſſous de la ligne prolongée vers la droite, écrivez le diviſeur.

Première Règle.

Si le diviſeur n'a qu'un ſeul chiffre, voyez d'abord s'il eſt contenu dans le premier chiffre à gauche du dividende: s'il y eſt contenu, comptez combien il y a de chiffres dans le dividende, & marquez autant de points avec la plume au deſſus du diviſeur, c'eſt-à-dire au deſſus de la barre prolongée vers la droite, ſavoir, le premier point immédiatement au deſſus du diviſeur, & les autres en avant vers la gauche. Préſentement cherchez combien le diviſeur eſt contenu de fois dans le premier chiffre du dividende qui eſt à la gauche, & écrivez-en le quotient à la place du premier point qui eſt du côté du dividende: il faut multiplier enſuite le quotient par le diviſeur, & en ſouſtraire le produit du premier chiffre du dividende ſur lequel on vient d'opérer; après quoi, s'il reſte quelque choſe, on l'écrira directement au deſſus. L'on marquera enſuite un point ſous le ſecond chiffre du dividende, & l'on ſaura par-là quel eſt le nombre qui réſulte, tant de ce qui reſte, que du chiffre qui ſuit immédiatement. Maintenant cherchez combien de fois le diviſeur eſt contenu, ou dans

le nombre qui résulte, &c. s'il y a eu un reste, ou seulement dans le second caractère du diviseur s'il n'est rien resté après la soustraction, & écrivez-en le quotient à l'endroit où est le second point au dessus du diviseur : multipliez ensuite ce nouveau quotient par le diviseur, & soustrayez-en, comme on l'a déjà fait, le produit, après quoi écrivez le reste, s'il y en a, au dessus. L'on continuera de procéder de la même manière jusqu'à ce que l'on parvienne au dernier chiffre du dividende.

S'il arrive que le diviseur ne soit pas contenu dans le premier caractère vers la gauche du nombre à diviser, il ne faudra en ce cas marquer autant de points au dessus du diviseur, qu'il y a de chiffres dans le dividende, mais il faudra commencer du second chiffre seulement.

Lorsqu'on finit l'opération, s'il y a un reste & qu'on l'ait écrit au dessus des unités du dividende, il faut le séparer de ce qui précède par un arc de cercle, & l'opération de la division sera achevée ; car le nombre qui se trouvera écrit successivement à la place des points au dessus du diviseur, sera le quotient que l'on cherche.

L'on

On remarquera qu'il ne faut pas omettre d'écrire un *zéro* à la place d'un des points dont on vient de parler, s'il arrivoit que le diviſeur (dans quelqu'une des opérations) ne fût pas contenu dans le chiffre correſpondant du dividende : or, en pareil cas, on n'oubliera pas non plus de regarder le chiffre du diviſeur comme ſi c'étoit un reſte, afin de le joindre au chiffre qui ſuit immédiatement, & par-là on ſera en état de continuer l'opération. Soit, par exemple, le nombre 972323 à diviſer par 4, ce dernier étant le diviſeur & l'autre le dividende.

Exemple de la Diviſion ſimple.

Reſte... ~~7~~ ~~7~~ ~~9~~ 0 (3		
Dividende... ~~9~~ ~~7~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~2~~ ~~3~~	243080	Quotient.
	• • • • • •	
	4	Diviſeur.

Ayant diſpoſé ces nombres comme il a été preſcrit, j'examine d'abord ſi le diviſeur 4 eſt contenu dans le premier chiffre à gauche du dividende, c'eſt-à-dire dans 9, & je trouve qu'en effet 4 y eſt contenu : ainſi, puiſqu'il y a ſix chiffres au dividende, je marque ſix points au deſſus du diviſeur, de telle

ſorte que le dernier tombe préciſément ſur 4 : je demande à préſent combien de fois 4 eſt contenu dans 9, & j'en écris le quotient 2 au deſſus du premier point à gauche : je multiplie le quotient 2 par le diviſeur 4, & je ſouſtrais le produit 8 du chiffre 9 ; & barrant ce 9, j'écris le reſte de la ſouſtraction 1 au deſſus.

En ſecond lieu, puiſque ce reſte 1, joint avec le caractère ſuivant du diviſeur, fait 17, je demande, combien de fois le diviſeur 4 eſt-il contenu dans 17 ? je trouve qu'il y eſt contenu quatre fois : j'écris donc ce ſecond quotient 4 au deſſus du deuxième point ; & le multipliant par le diviſeur 4, cela produit 16 que je ſouſtrais de 17, & barrant les caractères 1 & 7, j'écris le reſte, qui eſt 1, directement au deſſus de 7.

En troiſième lieu, puiſque ce reſte 1, joint avec le caractère ſuivant 2, qui eſt le troiſième du dividende, fait 12, je demande donc, combien de fois le diviſeur 4 eſt-il contenu dans 12 ? je trouve qu'il y eſt contenu trois fois, & j'écris ce nombre 3 pour troiſième quotient, au deſſus du troiſième point ; & le multipliant par 4, qui eſt le diviſeur, le produit eſt 12, que je ſouſtrais de 12, & barrant les caractères

1 & 2, je n'écris qu'un *zéro* au dessus, parce qu'il ne reste rien après la soustraction.

En quatrième lieu, je demande, combien le diviseur 4 est-il contenu dans le chiffre suivant ou quatrième chiffre 3 du dividende? & je trouve qu'il n'y est pas compris: ainsi, pour quatrième quotient, j'écris 0 au dessus du quatrième point.

Cinquièmement, parce que 3, joint au caractère suivant 2 du dividende, donne 32, je demande donc, combien de fois le diviseur 4 est-il contenu dans 32? je trouve qu'il y est contenu huit fois: ainsi j'écris 8 au dessus du cinquième point, & le multipliant par 4, je soustrais le produit 32 du nombre 32 du dividende; & barrant les chiffres, il ne reste rien ou *zéro* à écrire au dessus.

Sixièmement enfin, je demande, combien de fois le diviseur est-il contenu dans le dernier caractère 3 du dividende? & je trouve qu'il n'y est pas contenu: ainsi, pour sixième quotient, j'écris 0 au dessus du sixième point, & barrant le chiffre 3 je le remonte & le sépare par un arc de cercle du reste du dividende.

Ainsi le nombre 243080 sera le quotient que l'on cherche: l'on indiquera ci-après, lorsqu'il s'agira des fractions, quel

doit être l'uſage du nombre qui reſte, & que l'on vient de ſéparer par un arc de cercle.

Seconde Règle.

Si le diviſeur contient deux caractères, l'on ſuivra la même diſpoſition que dans l'exemple précédent, & en premier lieu l'on examinera ſi le premier chiffre ou caractère du diviſeur qui eſt à la gauche, eſt contenu dans le premier chiffre du dividende qui eſt pareillement à la gauche. Que s'il y eſt contenu, mais cependant avec cette condition, que le ſecond caractère du diviſeur ſoit de même contenu autant de fois, ſoit ſimplement dans le ſecond chiffre du dividende, ſoit, lorſque le cas arrive, dans celui-là conjointement avec ce qui reſte du premier chiffre, alors on marquera deux points ſous les deux premiers caractères du dividende. Au contraire, s'il arrive que le premier chiffre ou caractère du diviſeur ne ſoit pas contenu dans le premier chiffre du dividende, ou bien que le ſecond caractère du diviſeur ne ſoit pas contenu dans le reſte joint au ſecond caractère du dividende; alors, quoiqu'il faille marquer deux points (c'eſt-à-dire autant qu'il y a de chiffres au diviſeur) le premier de ces deux points doit être placé

encore à la gauche, mais au dessous du second caractère du dividende, & par conséquent le point suivant sera sous le troisième caractère du dividende. Présentement l'on placera à l'ordinaire, au dessus du diviseur, autant de points qu'il y a de caractères dans le dividende, à commencer depuis le second des deux points à droite, que l'on y a marqués.

En second lieu, il faut chercher combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu, soit dans le premier, soit dans les deux premiers caractères du dividende, & l'on écrira le quotient au dessus du premier point à gauche de ceux qui sont marqués au dessus du diviseur, comme cela s'est pratiqué dans l'exemple précédent. L'on multipliera ensuite le quotient par le dernier chiffre du diviseur, afin d'écrire aussi le dernier chiffre du produit au dividende, sous le second point que l'on y a marqué, retenant par mémoire le premier des deux chiffres du produit, s'il s'en trouve: l'on continuera de multiplier le même quotient par le premier caractère du diviseur, y ajoûtant le chiffre que l'on a retenu, & l'on en écrira le produit au dessous du premier point qui est marqué sous le diviseur à la gauche, en sorte que si

ce produit là eſt de deux chiffres, le ſecond en ſoit écrit au deſſous du premier point marqué ſous le dividende, & le premier chiffre en avançant vers la gauche. Préſentement il faut ſouſtraire le produit total des chiffres correſpondans, qui ſont dans le dividende, & les ayant barrés, l'on écrira au deſſus le reſte, s'il s'en trouve. Que ſi le produit total ſurpaſſe les nombres correſpondans du dividende, c'eſt une marque que l'on a pris un trop grand nombre pour quotient. Voilà pourquoi, lorſque l'on demande combien de fois le premier caractère du diviſeur eſt contenu, ſoit dans le premier chiffre, ſoit dans les deux premiers chiffres du dividende, il ne faut pas toûjours écrire pour cela le nombre qui exprime combien de fois il y eſt contenu, & qu'il faut prévoir auparavant ſi le produit total qui naît de la multiplication du diviſeur par le quotient, peut ſe ſouſtraire en effet des chiffres correſpondans du dividende. C'eſt auſſi en cela que conſiſte la principale difficulté de la pratique de la Diviſion, & l'on ne peut guère vaincre cette difficulté qu'à force d'exercice, & par une attention redoublée dans ces ſortes d'opérations : l'on rappellera bien-tôt les moyens de réſoudre cette difficulté.

En troisième lieu, pour continuer la division, l'on avancera d'un pas, vers la droite, l'un & l'autre points marqués sous le diviseur; ensuite l'on demandera combien de fois le premier chiffre du diviseur est contenu, soit dans le premier chiffre uniquement, soit dans les deux premiers chiffres, si besoin est, du dividende, marquant soigneusement le premier point au dessous du chiffre du diviseur, qui peut lui être correspondant. L'on ne négligera pas d'observer précisément la même chose dans cette seconde opération que dans la précédente, & l'on continuera les autres opérations pareillement.

AVERTISSEMENT.

1.° Les points marqués au dessus du diviseur indiquent, comme on l'a dit, combien il y aura de chiffres ou de caractères au quotient; au lieu que les points marqués au dessous du dividende ne représentent que les caractères du diviseur, appliqués successivement à ceux du dividende; d'où l'on voit en général, quant à ces derniers, qu'il doit toûjours y en avoir autant que de chiffres au diviseur, c'est-à-dire, trois, si le diviseur est de trois chiffres; quatre, si le

diviſeur a quatre chiffres, & ainſi de ſuite.

2.° Si lorſque l'on avancera d'un pas, vers la droite, les points marqués ſous le dividende, l'on s'aperçoit que le premier caractère du diviſeur n'eſt pas contenu dans le caractère du dividende, qui correſpond au premier des points marqués au deſſous vers la gauche, il ne faut pas oublier, en ce cas, de marquer o au quotient, & l'on avancera à l'ordinaire d'un pas les points marqués ſous le dividende, comme ſi l'on eût opéré, & que la multiplication & ſouſtraction euſſent été faites.

3.° Si au quotient l'on trouve un nombre plus grand que 9, l'on auroit mal opéré; car on ne doit pas y écrire de nombre qui ſurpaſſe 9, c'eſt-à-dire qu'on ne doit jamais écrire à chaque fois plus d'un ſeul caractère au quotient.

4.° On ſe ſert d'un vers latin pour mieux retenir les opérations qu'il faut faire ſucceſſivement, lorſqu'il s'agit de diviſer un nombre par un autre :

Divide, multiplica, ſubſtrahe, promoveas.

Premier Exemple.

Soit le nombre 1023248 propoſé pour

dividende, le diviſeur étant 26 : l'on diſpoſera à l'ordinaire les nombres, comme cela a été dit ci-devant.

	~~11~~(18	
	~~24944~~	
Dividende...	~~1024248~~	39355 Quotient.
	••	•••••
	~~7848000~~	26 Diviſeur.
	~~2372~~	
	~~11~~	

Or, premièrement, je trouve que le premier chiffre 2 du diviſeur n'eſt point contenu dans le premier caractère ou chiffre du dividende, lequel eſt 1 ; c'eſt pourquoi je place le premier des deux points qu'il y faut marquer, ſous le ſecond caractère 0, & l'autre point ſous le caractère ſuivant 2. Je compte enſuite, à commencer depuis ce dernier point, le nombre des caractères qui reſtent du diviſeur, & je trouve qu'il y en a cinq : ainſi je marque cinq autres points au deſſus du diviſeur, de manière que celui qui eſt à droite ſoit préciſément au deſſus du dernier chiffre (lequel eſt ici 6) du diviſeur.

Secondement, je cherche combien de fois

le premier caractère 2 du diviſeur eſt contenu dans 10, & je trouve cinq fois: mais parce que multipliant le ſecond caractère 6 du diviſeur par ce prétendu quotient 5, cela fait 30, lequel produit ne ſe peut ſouſtraire du caractère ſuivant du dividende, ſavoir 2, je n'écris donc pas 5 au quotient: je n'y écris pas même 4, parce qu'il ne reſteroit que 2 de la première ſouſtraction, ce qui, réuni au chiffre ſuivant du dividende, feroit 22; au lieu que multipliant 4 par le ſecond chiffre 6 du diviſeur, l'on auroit 24 qui excède encore le nombre 22, dont il faudroit ſouſtraire ce dernier produit. Ainſi donc, il ne faudra prendre que 3 pour quotient, & l'écrire au deſſus du premier point à gauche, dans le rang des quotients. Préſentement je multiplie le ſecond caractère 6 du diviſeur par le quotient 3, dont le produit étant 18, j'écris 8 au deſſous du ſecond point à droite ſous le dividende, & je retiens 1: je multiplie encore le premier caractère 2 du diviſeur par ce quotient 3, & j'ajoûte 1 que j'ai retenu au produit 6, ce qui fait 7 que j'écris au deſſous du premier point à gauche marqué au dividende: j'ôte auſſi 78 de 102, le reſte étant 24, je barre les trois premiers caractères 102,

écrivant 24 au dessus, savoir, 4 au dessus du 2 barré, & 2 au dessus du *zéro* barré; après quoi j'avance mes deux points d'un pas vers la droite sous le dividende.

Troisièmement, je demande combien 2 est contenu dans 24, & je trouve douze fois; mais, selon le troisième avertissement ci-dessus, puisque je ne saurois écrire plus de 9 au quotient, j'essaie ce quotient 9, lequel, s'il étoit écrit, me donneroit, en le multipliant par le diviseur, un produit qu'on peut soustraire des caractères qui lui sont correspondans au diviseur. Je ne balance donc pas à écrire 9 au quotient, c'est-à-dire au dessus du second point à droite. Présentement je multiplie 6 par 9, & le produit étant 54, j'écris 4 au dessous du second point dans le dividende, & je retiens 5 : je multiplie encore 2 par 9, & ajoûtant 5 que j'ai retenus au produit 18, j'en écris la somme 23 au dessous des 24 qui restent après l'opération précédente, ce qui donne lieu de soustraire ces trois nombres 234 de 243 qui leur correspondent au dessus du dividende : il faut écrire le reste 9 au dessus du caractère 3 du dividende, ayant soin de barrer les trois caractères dont on vient de

ſouſtraire, & j'achève la diviſion ſuivant le même procédé, que je réitère juſqu'à ce que cinq chiffres marqués au deſſus des points au quotient, me donnent un nombre 39355, que je trouve être le quotient que l'on cherche, avec un reſte qui eſt 18.

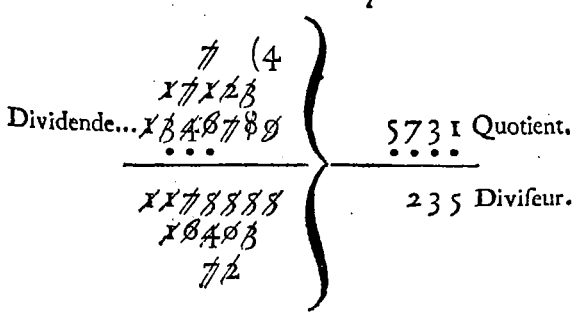
Troiſième Règle.

S'il ſe trouve au diviſeur plus de deux caractères, il faudra marquer ſoigneuſement autant de points au deſſous du dividende, commençant, ſoit par le premier, ſoit par le ſecond des deux premiers caractères du dividende vers la gauche, ſelon que le premier chiffre du diviſeur ſera contenu, ou dans le premier chiffre uniquement du dividende, ou dans les deux premiers pris enſemble : enſuite il faudra marquer autant d'autres points au deſſus du diviſeur, qu'il reſte de caractères dans le dividende, & cela en commençant à compter du dernier des points à droite, qui y ſont marqués. Le reſte s'achevera comme dans l'exemple précédent, ayant cependant une grande attention à ne pas écrire chaque chiffre au quotient plus grand ou plus petit qu'il ne doit être, ce que l'on connoîtra par les produits particuliers

de chacun de ces chiffres comparés à leurs correſpondans du dividende, & en baiſſant leur valeur, s'ils ſont trop grands, ſucceſſivement, ne les diminuant que d'une unité à chaque eſſai.

Soit donc le nombre 1346789 propoſé pour dividende, qu'il faut diviſer par 235.

Deuxième Exemple.



Selon ce qui a été preſcrit dans les règles précédentes, l'on trouve 5731 pour le quotient que l'on cherche, avec un reſte qui eſt 4.

Autre Méthode plus uſitée.

Soit propoſé le nombre à diviſer 89450, & que le diviſeur ſoit 432 : j'écris à l'ordinaire le dividende, & le diviſeur au deſſous de la barre vers la droite.

Exemple particulier de la Méthode vulgaire.

Dividende...	89450	207	Quotient.
	•••	•••	
	3050	432	Diviſeur.
	•••		
	26		

En premier lieu je dis, puiſque le premier caractère du diviſeur eſt contenu dans le premier caractère du dividende, je me figure dès-lors que les chiffres du diviſeur, qui ſont ici au nombre de trois, ſoient écrits au deſſous des trois premiers chiffres du dividende; & pour les repréſenter, j'y marque ſeulement trois points. Mais parce que comptant depuis le dernier de ces points, qui eſt à la droite, les chiffres du dividende, je trouve qu'il en reſte trois, cela me fait connoître qu'il y aura pareillement trois chiffres au quotient; ainſi je marque ces trois nouveaux points au deſſus du diviſeur.

En ſecond lieu, je demande combien de fois le premier caractère du diviſeur 4 eſt contenu dans le premier caractère du dividende 8, & je trouve qu'il y eſt deux fois, ſans reſte: j'eſſaie à préſent ſi tous les caractères du diviſeur, ou ſeulement les deux

autres, 3 & 2, multipliés par le quotient 2, se peuvent soustraire des chiffres correspondans du dividende; ce qui étant possible, j'écris donc 2 au quotient de la même manière qu'il a été prescrit ci-dessus. Je commence à multiplier ensuite le dernier caractère 2 du diviseur par le quotient 2, & je soustrais le produit 4 du chiffre 4 correspondant du dividende, c'est-à dire de celui au dessous duquel l'on se figure qu'est écrit le dernier chiffre du diviseur: il ne reste rien après la soustraction, & j'écris néanmoins 0 au dessous, car cela ne doit pas s'oublier. Je continue à multiplier le second caractère 3 du diviseur par le quotient 2, & je soustrais le produit 6 du caractère correspondant 9 du dividende, écrivant le reste 3 directement au dessous. Enfin je finis par multiplier le premier caractère 4 par le quotient 2, & je soustrais le produit 8 du caractère correspondant 8 du dividende, ce qui donne 0 pour reste. Or le zéro étant le dernier chiffre vers la gauche, comme il ne peut servir à faire valoir les chiffres qui suivent, il est inutile de l'écrire.

En troisième lieu, puisqu'il se trouve trois caractères dans le diviseur, & qu'il n'y en a

que deux uniquement dans ce qui reste, je descends donc, d'une ligne au dessous, le chiffre suivant 5 du dividende, & alors je vois que 305 sont à diviser par les trois caractères du diviseur, que l'on peut se figurer écrits au dessous; mais essayant, je vois que le premier caractère 4 du diviseur, n'est pas contenu dans le premier caractère 3 de ce dividende, j'écris donc 0 après le premier chiffre du quotient.

En quatrième lieu, puisque dans ce nouveau cas d'opération l'on se figure encore les trois chiffres du diviseur représentés par trois points, reculés d'un pas vers la droite, je descends aussi le chiffre suivant 0 du dividende vis-à-vis le nombre 305, ce qui donne 3050. Nous avons vû que le premier point qui représente vers la gauche le premier chiffre du diviseur, devoit être sous le second chiffre 0 de ce restant du dividende, & les deux autres points en avançant vers la droite. Procédant donc comme aux articles ci-dessus, je demande, combien de fois le chiffre 4 est-il contenu dans 30? je trouve sept fois, & je vois, après les essais, qu'on peut écrire 7 au quotient, c'est pourquoi j'écris ce caractère 7 après les deux quotients déja trouvés.

Je

Je commence à multiplier ensuite le dernier chiffre 2 par le nouveau quotient 7, & j'en soustrais le produit 14 de 20 qui forment les correspondans au dessus, écrivant le reste 6 directement au dessous, & n'oubliant pas de retenir 2, parce que j'ai été obligé de les emprunter pour faire 20; après quoi je multiplie encore le même quotient 7 par le second caractère 3 du diviseur, & j'ajoûte 2 que j'ai retenus au produit, afin de soustraire la somme, qui est 23, de 25 qui forment les correspondans au dessus, écrivant le reste 2 directement au dessous, & retenant par mémoire 2, c'est-à-dire les deux centaines qui ont été empruntées. Je finis enfin par multiplier 4 par 7, & ajoûtant 2 que j'ai retenus au produit, & je soustrais la somme 30 de 30 qui sont à la gauche dans le dividende, ce qui donne 0 pour reste. L'on aura donc le nombre 207 pour le quotient que l'on cherche, & 26 pour le reste.

Démonstration de l'une & de l'autre Méthode.

Il est certain que l'opération de la division est bien faite, si le quotient que l'on a trouvé exprime ou signifie combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; c'est-là

l'unique définition que l'on a donnée de la division : or il eſt viſible que par l'une ou l'autre méthode, l'on a trouvé préciſément ce quotient. Car, en premier lieu, dans l'une ou l'autre opération, l'on a cherché à découvrir combien le diviſeur eſt contenu de fois dans les premiers caractères correſpondans du nombre à diviſer ; & en ſecond lieu, s'il y a eu quelque excédant ou reſte, cela a été trouvé en faiſant la multiplication du diviſeur & la ſouſtraction de ce produit des chiffres correſpondans du dividende : l'on a eu ſoin auſſi de joindre ce qui reſtoit aux chiffres ſuivans du dividende. En troiſième lieu, l'on a encore trouvé combien de fois le diviſeur étoit contenu dans les caractères ſuivans du dividende, que l'on a joints, comme il a été dit, à ce qui reſtoit de l'opération précédente, & l'on a continué toûjours ſuivant la même voie ; donc le quotient exprime parfaitement (à un reſtant près, moindre que l'unité, lequel eſt ſéparé par l'arc de cercle) la quantité que l'on cherche. *C. Q. F. D.*

L'examen ou preuve de la diviſion ſe fait en multipliant le quotient par le diviſeur ; car ſi vous ajoûtez à ce produit, le reſtant ſéparé par l'arc de cercle, vous devez retrouver le

dividende, comme cela eſt viſible, ſelon les définitions dónnées de la multiplication & de la diviſion.

COROLLAIRES.

1.° Si vous diviſez un certain nombre de deniers par 12, le quotient exprimera des ſols, parce qu'un ſol vaut douze deniers.

2.° Si vous diviſez un certain nombre de ſols par 20, le quotient exprimera des livres tournois, parce que vingt ſols font une livre. L'on expédie cette dernière opération plus promptement, comme il ſuit. Soit un certain nombre de ſols à convertir en livres, tel que 46289 ſols; l'on ſéparera par un trait le dernier chiffre qui eſt à droite, & commençant par la gauche, l'on prendra ſucceſſivement la moitié de ce qui reſte. La raiſon eſt qu'en ſéparant le dernier chiffre, l'on a déjà trouvé des dixaines; mais il en faut prendre la moitié, parce que l'on demande des vingtaines.

Premier Exemple.

4628|9 ſols
2314 Donc...2314^{l} 9^{s}

Deuxième Exemple.

5837|9^{s}
2918^{l} 19^{s}

Que ſi, après la dernière opération, il reſte, comme dans le ſecond exemple, une

dixaine qui précède le chiffre séparé, il faudra écrire à part cette dixaine, précisément avant le chiffre séparé, & l'on aura les livres & les sols excédans que l'on cherche.

3.° L'Arithmétique par décimales se réduit uniquement aux mêmes opérations que ci-devant, comme s'il n'y avoit pas de traits ou virgules pour séparer ces décimales. S'il s'agit de la multiplication, il ne faut pas, au produit, oublier de marquer la virgule après l'opération, & cela en comptant autant de chiffres depuis la droite, qu'il y en a après les virgules, tant dans le multiplicateur que dans le multiplicande. Quant à la division, l'on placera de même la virgule au quotient, ayant compté combien il y a de décimales après les virgules, tant du dividende que du diviseur, & la différence de ces décimales indiquera combien il doit y avoir de chiffres au quotient, séparés par la virgule vers la droite.

EXEMPLE.

Dividende...278,553 } 112,2 Quotient.

3145 } 24,71 Diviseur.

6743

(1801

Autre Quotient.

11,272885

L'un des premiers usages que l'on peut faire de la division par décimales, s'applique aux quantités qui restent après la division. L'on a trouvé dans la seconde méthode expliquée pour la division, que le nombre 89450, divisé par 432, donnoit au quotient 207 avec un reste, savoir, 26 qui restent à diviser par 432, ce qui n'est pas, à beaucoup près, un entier. Soit repris le même exemple, avec des zéros pour décimales au dividende seulement.

Divid. 89450 } 207,06018. Quot.
305,0 } 432 Diviseur.
26,00
00800
3680
224

Ainsi le quotient sera 207,06, c'est-à-dire six centièmes de l'unité en surplus, ou plus exactement, 207,0602, à très-peu de chose près, c'est-à-dire six cens deux dix millièmes parties d'une unité en surplus.

L'on pourra pousser ainsi cette division aussi loin qu'on voudra.

SECOND PROBLÈME.

Diviser un nombre hétérogène par un autre nombre homogène.

Premièrement, divisez, s'il se peut, le nombre de la plus grande valeur par l'autre qui est homogène, & s'il reste quelque chose, réduisez-le, suivant une opération inverse à ce qui a été exposé aux Corollaires précédens, à la valeur d'une espèce inférieure, qui est celle qui suit immédiatement, & ajoûtez-en le produit au nombre qui se trouve précisément de cette espèce dans le dividende, divisez le total qui en résulte par le même diviseur, & continuez de la même manière, jusqu'à ce que le quotient soit rempli avec tous les titres du dividende hétérogène.

Ainsi, soient 5450 toises 2 pieds 3 pouces à diviser par 7.

1.re Division.		*2.e Division.*		*3.e Division.*	
toises.	toises.	pieds.	pieds.	pouces.	pouces
5450	778	26	3	63	9
550	7	(5	7		7
60					
(4					

Le 1.er reste 4 multiplié par 6 donne 24, ajoûtez-y deux pieds, c'est 26 : le 2.d reste 5 multiplié par 12 donne 60 ; ajoûtez-y trois pouces, c'est 63. Ainsi, le quotient général est 778 toises 3 pieds 9 pouces, & c'est-là la septième partie que l'on demande de 5450 toises 2 pieds 3 pouces.

Secondement, s'il arrive que la première partie du nombre hétérogène à diviser (c'est la même chose pour les autres titres, s'il s'en trouve dans le même cas) est moindre que le diviseur, l'on traitera cette partie comme un reste, qu'il faudra réduire à la valeur de l'espèce inférieure, n'oubliant pas d'y ajoûter ce qui se trouve aussi dans le dividende de ce nombre qui est inférieur, & les ayant joints, l'on continuera comme ci-dessus.

TROISIÈME PROBLÈME.

Diviser un nombre hétérogène par un autre nombre hétérogène.

Il faut réduire la valeur de l'un & de l'autre nombre à la plus petite espèce, ce qui retombera alors dans le cas de la division ordinaire, & ayant trouvé le quotient, l'on se servira de ce qui est dit aux corollaires pour réduire ce quotient aux différentes valeurs

des eſpèces ſupérieures dans leſquelles ſera exprimé le quotient que l'on cherche.

SECONDE PARTIE,

Où l'on traite du rapport des nombres rompus.

UNE fraction ou nombre rompu eſt une quantité qui exprime premièrement en combien de parties égales un tout a été partagé, ſecondement combien l'on prend de ces parties égales; ainſi chaque fraction ne ſauroit être autrement exprimée que par deux nombres, l'un qui déſigne les parties égales appelées *aliquotes*, dans leſquelles le tout a été diviſé, & l'autre combien l'on a pris de ces parties égales. Si vous ſuppoſez, par exemple, un tout diviſé en quatre parties égales, & ſi l'on n'en prend que trois, l'on aura dès-lors beſoin, tant d'un nombre qui exprime ces quatre parties égales, que d'un autre nombre qui déſigne que l'on en a pris trois. Préſentement, il faut écrire ces deux nombres de manière que celui qui déſigne les quatre parties égales dans leſquelles le tout eſt diviſé, ſoit placé au deſſous de l'autre,

& on les séparera par une barre; pour lors le nombre inférieur s'appelle le *dénominateur*, parce que c'est lui qui indique en combien de parties le tout a été divisé; le nombre qui est au dessus s'appelle le *numérateur*, parce qu'il sert à compter combien l'on a pris de ces parties égales. Voici donc comme l'on écrira la fraction des deux nombres dont on vient de parler, $\frac{3}{4}$, ce qui répond aux trois quarts d'un entier ou d'un tout.

REMARQUES.

1.° Non seulement l'on peut exprimer les fractions d'un tout, comme nous venons de le voir, mais l'on peut aussi avoir besoin de fractions de cette fraction-là, & de même d'une autre fraction de cette dernière, & ainsi de suite à l'infini. L'on a besoin, par exemple, de $\frac{1}{3}$ ou du tiers d'une toise; mais l'on peut avoir encore besoin du tiers de ce tiers-là, & d'un autre tiers de ce dernier, & ainsi à l'infini.

2.° Après avoir fait la division des nombres entiers dans la première partie de ce Traité, ce qui reste, & que l'on a distingué en le séparant par un arc de cercle, étant placé au dessus du diviseur, & séparé par une

barre, forme précisément une fraction; car si on l'écrit à part, ce reste représentera le *numérateur*, & le diviseur le *dénominateur* de la fraction.

Nous pouvons aussi distinguer deux sortes de fractions, savoir, la fraction de l'espèce dont nous venons de parler, & que l'on nomme *vulgaire;* l'autre est la fraction décimale. C'est pourquoi la fraction vulgaire est celle qui peut représenter à son dénominateur tel nombre fini que l'on voudra; mais lorsqu'il n'y a que l'unité avec des *zéros* au dénominateur, c'est-à-dire, lorsqu'on n'y trouve que 10, 100, 1000, 10000, &c. c'est une fraction décimale.

Des Fractions vulgaires.

Les fractions vulgaires, de même que les nombres entiers, se traitent, puisqu'elles ont entre elles des raisons ou rapports, par les quatre opérations de l'Arithmétique, l'addition, la soustraction, la multiplication & la division; mais comme il se présente certaines difficultés dans la pratique, pour les mieux traiter & y réussir, voici quelques théorèmes antérieurs & problèmes qui y préparent.

PREMIER THÉORÈME.

Les fractions gardent conſtamment la même valeur, ſoit que leurs numérateurs ſoient contenus de la même manière dans leurs dénominateurs, ſoit qu'ils contiennent de la même manière ces dénominateurs, c'eſt-à-dire, ſuivant le langage des Mathématiciens, quand il y a même rapport du numérateur d'une fraction à ſon dénominateur, que du numérateur d'une autre fraction à ſon dénominateur. Voici, par exemple, deux fractions d'une même valeur, $\frac{1}{2}$ & $\frac{6}{12}$; car 1 eſt contenu deux fois dans 2, & pareillement 6 eſt contenu deux fois dans 12: l'on voit donc d'abord la raiſon de cette égalité qu'ont ces deux fractions; car c'eſt la même choſe, ſi vous diviſez un écu en deux parties & que vous n'en preniez qu'une ſeule, ou bien ſi vous le diviſez en 12 parties & que vous en preniez ſix: dans l'un ou l'autre cas, il ſera toûjours vrai de dire que vous avez pris la moitié d'un écu.

Semblablement ces deux fractions, $\frac{2}{1}$ & $\frac{12}{6}$, ſont parfaitement égales, & ſignifient deux fois un écu.

SECOND THÉORÈME.

Si on multiplie par un même nombre entier le numérateur & le dénominateur d'une ſeule & unique fraction, le produit donnera préciſément une même valeur, c'eſt-à-dire qu'il n'y aura aucun changement au rapport de la fraction propoſée. Si, par exemple, vous multipliez tant le numérateur que le dénominateur de cette fraction-ci $\frac{1}{3}$ par 4, le produit ſera $\frac{4}{12}$, lequel a la même valeur que $\frac{1}{3}$.

La raiſon eſt la même qu'au théorème précédent, puiſque de même que 1 eſt contenu trois fois dans 3, ainſi 4 ſe trouve contenu trois fois dans 12, d'où il s'enſuit que ces deux fractions ſont égales.

TROISIÈME THÉORÈME.

Si l'on diviſe par un même nombre entier le numérateur & le dénominateur d'une ſeule & unique fraction, l'on aura au quotient préciſément une même valeur que celle de la fraction propoſée. Si, par exemple, l'on diviſe le numérateur & le dénominateur de cette fraction-ci $\frac{4}{12}$ par 4, le quotient ſera celle-ci, $\frac{1}{3}$, laquelle a la même valeur que

la fraction qu'on propose à diviser, $\frac{4}{12}$; la démonstration s'ensuit de ce qui vient d'être prouvé aux deux théorèmes précédens.

Corollaires.

1.° Si le numérateur d'une fraction surpasse son dénominateur, c'est une marque que cette fraction a une plus grande valeur que le tout dans lequel son dénominateur est divisé ; ainsi $\frac{5}{4}$ d'un écu valent plus d'un écu.

2.° Si le numérateur, au contraire, est moindre que le dénominateur, alors cette fraction sera moindre que le tout dont elle représente la fraction ; ainsi $\frac{3}{4}$ d'un écu sont moindres qu'un écu.

3.° Enfin si le numérateur est égal au dénominateur, alors cette fraction est la même chose précisément que le tout dont elle se trouve ici la fraction ; ainsi $\frac{4}{4}$ d'un écu valent précisément un écu.

Ces trois corollaires sont évidens, & découlent de la définition générale ou des notions que l'on a d'abord données touchant les fractions. Venons présentement aux problèmes préparatoires.

PREMIER PROBLÈME.

Réduire, toutes les fois qu'il sera possible, une fraction à ses moindres termes.

Pour y réussir, il faut tâcher de découvrir une *mesure commune*, tant du numérateur que du dénominateur, & employer la plus grande de toutes celles qui se trouvent: voici le moyen le plus sûr, c'est-à-dire la grande règle générale. Divisez le plus grand nombre par le plus petit, & laissant à part le quotient, faites attention à ce qui reste: que si d'abord il ne reste rien du tout, le plus petit des deux nombres (lequel en ce cas étoit le diviseur) sera la plus grande mesure commune que l'on cherche. Mais si après avoir fait la division, il reste quelque nombre, faites-en le diviseur du premier diviseur, & laissant-là le quotient, voyez encore s'il reste quelque nombre; s'il n'y a rien, ce sera le second diviseur qui représentera la plus grande mesure commune, au lieu que s'il reste en effet quelque nombre, l'on en formera un troisième diviseur, par lequel on divisera le second reste, & l'on continuera toûjours de même jusqu'à ce que l'on trouve enfin un diviseur sans reste. C'est présentement ce dernier diviseur sans reste,

qui doit représenter la plus grande mesure commune. Que si l'on parvient pourtant à un reste exprimé par l'unité, ce sera une preuve que la fraction ne sauroit se réduire à de moindres termes.

Enfin, dans tous les cas, divisez tant le numérateur que le dénominateur de la fraction proposée, par ce plus grand diviseur commun, & les quotients donneront une nouvelle fraction qui sera précisément celle que l'on cherche, réduite à ses moindres termes.

Soit, en premier lieu, cette fraction-ci $\frac{4}{12}$, qu'on propose de réduire à ses moindres termes: d'abord je divise le plus grand terme 12 par le plus petit 4; & parce qu'après avoir fait la division il ne reste plus rien, il s'ensuit que le diviseur 4 est la plus grande mesure commune que l'on cherche. En second lieu, je divise le numérateur par cette plus grande mesure commune, de même que le dénominateur de la fraction proposée, & je trouve les deux quotients 1 & 3; ainsi la fraction proposée, $\frac{4}{12}$, réduite à ses moindres termes, sera $\frac{1}{3}$.

Soit pris pour second exemple cette fraction-ci $\frac{15}{20}$, qu'il est nécessaire de réduire

à ses moindres termes: d'abord je divise 20 par 15, & négligeant le quotient, je trouve qu'il reste 5. En second lieu, je divise 15 par le reste 5, & je m'aperçois qu'il ne reste plus rien; ainsi le diviseur 5 est la plus grande mesure commune que l'on cherche. Je divise donc, en troisième lieu, tant le numérateur que le dénominateur de la fraction proposée par 5, & j'ai pour les deux quotients, 3 & 4, d'où il s'ensuit que la fraction proposée, réduite à ses moindres termes, sera $\frac{3}{4}$.

Soit supposée, pour troisième exemple, cette fraction-ci $\frac{3}{10}$, qu'il faut réduire à ses moindres termes: je divise le dénominateur 10 par le numérateur 3, & parce que le reste est 1, c'est une marque que la fraction proposée ne sauroit être réduite à de moindres termes que ceux qui l'expriment.

Démonstration.

Puisqu'en premier lieu l'on ne trouve d'autre diviseur sans reste que le dernier diviseur qu'on a découvert, il doit s'ensuivre que ce dernier diviseur sera la plus grande mesure commune, n'y en ayant point d'autre d'un nombre au dessus: en second lieu, si l'on divise

divise tant le numérateur que le dénominateur d'une fraction par un même nombre entier, l'on aura toûjours une fraction de même valeur précisément que la précédente (par le théorème 3.e ci-dessus) en sorte que la division étant faite par la mesure commune que l'on a trouvée, la nouvelle fraction sera de même valeur que la fraction proposée. En troisième lieu, si l'on a enfin 1 pour diviseur, il est visible que cette fraction ne sauroit se réduire à de moindres termes, puisque toutes les fois qu'on divise un nombre par 1, le quotient est le même que le dividende; donc, &c. *C. Q. F. D.*

Remarquez que si dans le numérateur & le dénominateur de la fraction qu'on propose de réduire, il se trouve des zéros ou seulement o vers la droite, l'on pourra dès-lors réduire de semblables fractions à moins de termes, mais non pas toûjours, comme on le verra tout-à-l'heure, à de moindres termes. Pour cet effet, il suffit de retrancher égal nombre de zéros en haut & en bas de la fraction. Que l'on propose, par exemple, de réduire cette fraction ci-$\frac{200}{300}$; je retranche deux zéros, tant du numérateur que du dénominateur, & la fraction se trouve réduite

à $\frac{2}{3}$, j'opère pareillement dans d'autres cas ſemblables : la raiſon eſt que par ce moyen l'on diviſe en effet tant le numérateur que le dénominateur par un même nombre entier, ſavoir, par 10, ou par 100, ou par 1000, &c. ce qui ne change pas pour cela la valeur de la fraction. Celle-ci $\frac{400}{1200}$, ſe réduit d'abord à $\frac{4}{12}$, & enfin, ſelon le premier exemple, à $\frac{1}{3}$.

SECOND PROBLÈME.

Réduire pluſieurs fractions de différentes dénominations, ou ayant différens dénominateurs, à d'autres équivalentes & qui aient toutes un même dénominateur.

Il faut, en premier lieu, multiplier les dénominateurs ſucceſſivement, c'eſt-à-dire le premier par le ſecond, & le produit par le troiſième, enfin ce nouveau produit par le quatrième, & ainſi de ſuite. L'on aura d'abord un produit total, qui ſera le dénominateur commun des fractions propoſées, & ce dénominateur commun équivaudra aux premiers : il reſte à trouver chaque nouveau numérateur.

Secondement, pour découvrir ces numérateurs des nouvelles fractions, diviſez le

dénominateur, que l'on vient de trouver, séparément par chaque dénominateur des premières fractions proposées, & multipliez chaque quotient successivement par chaque numérateur de ces premières fractions, le produit donnera à chaque fois le numérateur des nouvelles fractions, lesquelles équivaudront aux premières.

Soient, par exemple, ces trois fractions-ci de différentes dénominations, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, qu'on propose de réduire à trois autres équivalentes, mais qui aient toutes un même dénominateur. Pour cet effet je multiplie successivement les dénominateurs, disant 3 fois 4 font 12, & cinq fois le produit 12 font 60, de sorte que ce second produit 60 sera le dénominateur commun que l'on cherche, c'est-à-dire pour chacune des nouvelles fractions que l'on va donner.

Je divise ensuite ce dénominateur commun 60, par le dénominateur de la première fraction proposée, c'est-à-dire par 3, & je multiplie le quotient 20 par le numérateur 2 : cela fait, je dis que le produit 40 sera le numérateur de la première des nouvelles fractions.

Semblablement je divise le dénominateur commun 60 par le dénominateur de la

ſeconde fraction propoſée, c'eſt-à-dire par 4, & je multiplie le quotient 15 par le numérateur 3; cela donne pour produit 45, qui ſera le numérateur de la ſeconde des nouvelles fractions.

Enfin je diviſe le même dénominateur commun 60, par le dénominateur de la troiſième fraction propoſée, c'eſt-à-dire par 5, & je multiplie le quotient 12 par le numérateur 4, ce qui donne au produit 48, & c'eſt le numérateur de la troiſième & dernière des nouvelles fractions: ainſi, au lieu des trois premières fractions propoſées, il s'en trouve trois nouvelles, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, équivalentes aux premières, & ayant toutes même dénomination.

Démonſtration.

Il eſt clair que le produit total qui naît de la multiplication faite ſucceſſivement des produits par chaque dénominateur, peut être diviſé ſans reſte par tel dénominateur qu'on voudra des premières fractions propoſées: d'ailleurs, lorſque le produit total 60, dans l'exemple qu'on vient de donner, eſt diviſé par 3, l'on a au quotient le tiers du produit total, ſavoir 20, d'où il s'enſuit que puiſque

ce tiers eſt multiplié par le numérateur de la première fraction propoſée, ſavoir par 2, il en réſulte par conſéquent les deux tiers du tout, lequel en ce cas ſe trouve diſtribué en ſoixante parties. L'on voit donc clairement que c'eſt la même choſe d'avoir les deux tiers d'un tout diviſé en ſoixante parties égales, ou de n'avoir que les deux tiers d'un tout qui eſt diviſé ſeulement en trois parties égales, puiſque dans l'un & dans l'autre cas l'on a conſtamment les deux tiers d'un tout. L'on peut faire le même raiſonnement, proportion gardée, ſur les deux autres fractions; donc, &c. *C. Q. F. D.*

TROISIÈME PROBLÈME.

Trouver à combien d'entiers équivaut une fraction dont le numérateur ſurpaſſe le dénominateur.

Diviſez, pour cet effet, le numérateur par le dénominateur, & le quotient indiquera les entiers que l'on cherche. Si l'on propoſe, par exemple, de trouver à combien d'entiers équivaut cette fraction-ci $\frac{30}{6}$, diviſez le numérateur 30 par le dénominateur 6, & le quotient 5 indiquera que la fraction propoſée équivaut cinq touts ou

cinq entiers. La raiſon eſt que $\frac{6}{6}$ valant un entier, ſelon ce qui a été dit ſur la fin du quatrième théorème, l'on aura $\frac{6}{6}$ contenu cinq fois dans $\frac{30}{6}$, d'où il s'enſuit que cette fraction équivaut à cinq entiers.

Semblablement, ſi l'on cherche à combien d'entiers répond cette autre fraction-ci $\frac{27}{5}$, il faut diviſer de même le numérateur 27 par le dénominateur 5, & le quotient 5 indiquera que cette fraction équivaut à cinq entiers & un reſte qui eſt $\frac{2}{5}$ d'un entier : ce ſera le même procédé à ſuivre pour toutes les autres fractions.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Réduire un nombre entier quelconque, en une fraction qui ait tel dénominateur que l'on voudra.

Il ſuffit pour cela de multiplier le nombre entier par le dénominateur propoſé, & le produit ſera le numérateur de la fraction que l'on demande, cette fraction ayant pour dénominateur celui que l'on a propoſé. Soit, par exemple, le nombre entier 15 que l'on propoſe de réduire en une fraction dont le dénominateur ſoit 4 : l'on multipliera 15 par 4, & ſous le produit 60 l'on écrira le nombre 4, ce qui donne $\frac{60}{4}$ pour la

fraction que l'on cherche. La raiſon de cette pratique eſt fondée ſur ce qu'en multipliant 15 par 4, chaque unité du nombre 15 ſe trouve par-là diviſée en quatre parties égales.

Corollaires.

I. Si au deſſous d'un nombre entier quelconque l'on écrit l'unité, laquelle devient par-là ſon dénominateur, alors l'on a une fraction préciſément de même valeur que le nombre entier propoſé : ainſi $\frac{4}{1}$ eſt une fraction qui vaut quatre entiers, ce qui eſt viſible & s'enſuit du troiſième problème.

II. Si l'on veut réduire un nombre entier avec la fraction qui en dépend, en une ſeule & unique fraction, il faudra multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction, & l'on ajoûtera au produit le numérateur de cette fraction, ce qui donnera le numérateur de la fraction totale, laquelle doit conſerver le dénominateur de la fraction propoſée. Soit, par exemple, le nombre entier 5, & $\frac{3}{4}$ pour la fraction qui en dépend : pour réduire cette valeur $5\frac{3}{4}$ en une ſeule fraction, multipliez 5 par 4, & ajoûtez au produit 20 le numérateur 3, la ſomme ſera 23, c'eſt-à-dire le numérateur de la fraction

proposée, laquelle conservera 4 pour dénominateur; car, selon le troisième problème, $\frac{23}{4}$ équivaut à cinq entiers & $\frac{3}{4}$ de plus.

CINQUIÈME PROBLÈME.

Réduire une fraction quelconque, & la fraction de cette fraction, & encore la fraction de celle-ci, &c. en une seule & unique fraction.

Il faut multiplier successivement les numérateurs l'un par l'autre, & le produit général sera le numérateur de la fraction que l'on cherche: ensuite l'on multipliera aussi successivement les dénominateurs l'un par l'autre, & l'on aura pareillement pour produit général le dénominateur de la fraction que l'on cherche. Si l'on propose, par exemple, de réduire en une seule fraction le $\frac{1}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$; ayant fait les multiplications telles qu'on vient de l'indiquer, il en résultera pour la fraction que l'on demande, $\frac{6}{60}$, ou, si l'on veut la réduire aux moindres termes, l'on aura $\frac{1}{10}$. La raison de cette pratique est fondée sur ce que les dénominateurs multipliés successivement, indiquent au produit général en combien de parties le tout dont il s'agit a été distribué, & que pareillement les numérateurs multipliés

ſucceſſivement, indiquent au produit général combien l'on a pris de ces mêmes parties.

SIXIÈME PROBLÈME.

Étant connue la valeur d'un entier, connoître la valeur d'une fraction quelconque de cet entier, pourvû que cette fraction-là ne ſoit pas un produit compoſé de la multiplication de pluſieurs autres fractions.

Multipliez la valeur de l'entier par le numérateur de la fraction, & diviſez-en le produit par le dénominateur de la fraction, le quotient indiquera la valeur que l'on cherche. Si l'on demande, par exemple, la valeur de $\frac{3}{5}$ d'aune, celle du drap étant de 20^{l}; multipliant 20 par le numérateur 3, & diviſant le produit par le dénominateur 5, le quotient 12 indiquera que la fraction d'aune propoſée vaut douze livres. Voici encore une autre manière de réſoudre cette queſtion : diviſez la valeur de l'entier par le dénominateur de la fraction, c'eſt-à-dire, diviſez 20 par 5 qui eſt le dénominateur de notre fraction propoſée, enſuite multipliez le quotient, lequel eſt ici 4, par le numérateur 3, le produit 12 indiquera le prix ou la valeur qui répond à la fraction d'aune

propoſée. La raiſon de ce dernier procédé eſt que l'entier eſt diſtribué en cinq parties égales, d'où il arrive que quand ſa valeur, qui eſt 20, ſe trouve diviſée par 5, l'on a pour quotient la valeur, 4^{l}, d'une cinquième partie: multipliant donc ce quotient 4^{l} par le numérateur de la fraction, l'on doit avoir trois fois 4^{l}, qui eſt la valeur de cette même fraction. En un mot, il revient au même de diviſer la valeur de l'entier par le dénominateur de la fraction, & d'en multiplier le quotient par le numérateur, ou bien de multiplier la valeur de l'entier par le numérateur, & d'en diviſer le produit par le dénominateur: l'opération, de quelque manière qu'on la faſſe, tend au même but dans l'un ou l'autre cas.

SEPTIÈME PROBLÈME.

Augmenter ou diminuer à volonté une fraction quelconque.

1.° Si l'on propoſe, par exemple, de doubler, tripler, quadrupler, &c. une fraction quelconque, il ne faut que doubler, tripler ou quadrupler, &c. le numérateur, ſans changer le dénominateur, & l'on aura fait ce qui eſt propoſé. Que l'on propoſe,

par exemple, de tripler la fraction $\frac{2}{3}$; multipliant le numérateur 2 par 3, la fraction $\frac{6}{3}$ sera triple de la première.

2.° Si l'on veut diminuer la valeur d'une fraction proposée, en sorte que l'on soit dans le cas d'être obligé d'en prendre la moitié, ou le tiers, ou telle autre partie déterminée que l'on voudra, multipliez son dénominateur par 2, 3, &c. sans rien changer au numérateur, & l'opération sera achevée. S'il s'agit, par exemple, de prendre le tiers de cette fraction-ci $\frac{2}{3}$; laissant subsister le numérateur sans l'altérer, multipliez le dénominateur par 3, & la fraction $\frac{2}{9}$ sera le tiers de celle qui étoit proposée. La raison de ces deux procédés est aisée à déduire de ce qui précède, ou bien de ce qui a été expliqué aux problèmes précédens.

De l'addition des Fractions.

Il faut distinguer plusieurs cas dans l'addition des fractions; car, ou les fractions que l'on propose d'ajoûter en une somme ont une même ou différente dénomination, ou bien il s'y trouve des entiers mêlés qu'il faut ajoûter avec ces fractions, ou enfin il y a des fractions de fractions à ajoûter,

ſoit à des fractions ſimples, ſoit à d'autres fractions de fractions, ce qui fournit, ſelon les différens cas, les problèmes ſuivans.

PREMIER PROBLÈME.

Ajoûter en une ſomme pluſieurs fractions qui ont même dénomination.

Il faut uniquement ajoûter en une même ſomme les numérateurs, & écrire au-deſſous le dénominateur, & l'on aura la fraction qui exprimera la ſomme de toutes les autres. Soient, par exemple, ces fractions-ci $\frac{2}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{10}{16}$, $\frac{12}{16}$, qu'il faut ajoûter enſemble. La ſomme des numérateurs eſt 36, au deſſous duquel nombre il faut écrire le dénominateur 16, & l'on aura pour la ſomme totale que l'on demande, $\frac{36}{16}$, c'eſt-à-dire deux entiers & $\frac{4}{16}$, ou bien, en réduiſant aux moindres termes, l'on aura $2\frac{1}{4}$. La raiſon de ce procédé eſt évidente, car $\frac{2}{16}$ & $\frac{4}{16}$ donnent $\frac{6}{16}$, & ainſi de ſuite; donc, &c. *C. Q. F. T.*

SECOND PROBLÈME.

Ajoûter en une ſomme pluſieurs fractions qui ont différente dénomination.

Il faut commencer par réduire les fractions propoſées à un même dénominateur

par le ſecond des problèmes antérieurs, enſuite l'on ajoûtera, ſelon le problème précédent, toutes ces nouvelles fractions en une ſeule. C'eſt ainſi que l'on trouvera que la ſomme de ces trois fractions ci $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ eſt $\frac{164}{160}$ ou bien $1\frac{1}{40}$; car en réduiſant d'abord à même dénomination, l'on a $\frac{64}{160}$, $\frac{40}{160}$, $\frac{60}{160}$, dont la ſomme eſt telle qu'on vient de la ſuppoſer ci-deſſus.

TROISIÈME PROBLÈME.

Ajoûter en une même ſomme des entiers & des fractions.

1.° Il faut d'abord ajoûter à part les entiers, s'il y en a pluſieurs, & pareillement à part les fractions les unes avec les autres, n'oubliant pas auparavant de les réduire à même dénomination, ſi les dénominateurs ſont différens; faiſant enſuite la réduction aux moindres termes, l'on aura ce que l'on cherche.

2.° Si l'on veut enſuite réduire en une ſeule & unique ſomme les entiers & les fractions déjà additionnés, il faut réduire chaque entier avec ſa fraction à une ſeule fraction, ſuivant le quatrième des problèmes antérieurs, après quoi l'on ajoûtera toutes

ces fractions, ſelon l'un ou l'autre procédé expliqué aux deux problèmes précédens.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Ajoûter en une même ſomme pluſieurs fractions de fractions.

Il faut d'abord réduire à une ſeule fraction chacune des fractions de fractions, ſuivant la méthode expliquée au cinquième des problèmes antérieurs, après quoi il faudra réduire chacune des fractions totales à un même dénominateur, & l'on finira par les ajoûter toutes enſemble, ſelon le premier problème.

De la ſouſtraction des Fractions.

PREMIER PROBLÈME.

Souſtraire une fraction d'une autre de même dénomination.

Il faut ſouſtraire ſimplement le numérateur de la fraction propoſée à ſouſtraire, du numérateur de l'autre, & écrire, au deſſous de ce qui reſte, le dénominateur commun aux deux fractions propoſées. Soit, par exemple, la fraction $\frac{4}{9}$ à ſouſtraire de $\frac{7}{9}$: l'on ôtera 4 de 7, & il reſtera $\frac{3}{9}$. La raiſon

de cette pratique eſt d'autant plus évidente, qu'en ajoûtant le reſte $\frac{3}{9}$ à la fraction qu'on a propoſé de ſouſtraire, la ſomme devient égale à l'autre fraction propoſée.

SECOND PROBLÈME.

Souſtraire une fraction d'une autre qui n'a pas même dénomination.

L'on commencera par réduire chaque fraction à un même dénominateur, ſelon ce qui a été enſeigné au ſecond des problèmes antérieurs ; enſuite l'on achevera comme au précédent problème. Qu'on propoſe, par exemple, d'ôter $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$: réduiſant d'abord à une même dénomination, ſavoir, $\frac{15}{20}$ & $\frac{16}{20}$, l'on retranchera préſentement 15 de 16, & le reſte étant 1, l'on écrira au deſſous le dénominateur commun 20, de ſorte que le reſte ſera $\frac{1}{20}$.

TROISIÈME PROBLÈME.

Souſtraire une fraction quelconque, d'un nombre compoſé d'un entier & d'une fraction.

1.° Si la fraction qui accompagne le nombre entier eſt plus grande que la fraction à ſouſtraire, il ſuffit de réduire uniquement l'une & l'autre à un même dénominateur,

& l'on achevera comme ci-dessus : ainsi le nombre entier & la fraction qui reste, donneront précisément ce que l'on cherche.

2.° Mais si la fraction qui accompagne le nombre entier est plus petite que l'autre, l'on détachera une unité du nombre entier & l'on en formera une plus grande fraction, ayant réduit cette unité au dénominateur de la plus petite des deux fractions, pour n'en former qu'une fraction totale, ainsi qu'il a été enseigné au deuxième corollaire du quatrième des problèmes antérieurs : l'on achevera ensuite l'opération comme ci-dessus. Soit, par exemple, $4\frac{1}{5}$ dont il faut ôter $\frac{2}{5}$, je réduis le premier nombre à $3\frac{6}{5}$, d'où retranchant $\frac{2}{5}$, il reste après la soustraction, cette valeur, $3\frac{4}{5}$.

3.° Si d'un entier & d'une fraction il faut soustraire un entier & une fraction, il faut d'abord essayer de soustraire la fraction de la fraction, de même que l'entier de l'autre entier ; autrement il faudra réduire les entiers avec leurs fractions, à deux fractions totales, & réduisant ensuite à même dénomination, l'on achevera la soustraction comme au premier problème.

QUATRIÈME

QUATRIÈME PROBLÈME.

Soustraire une fraction de fraction, d'une autre fraction de fraction.

Il faut, en premier lieu, réduire chaque fraction de fraction uniquement à des fractions simples, selon ce qui a été enseigné au cinquième des problèmes antérieurs.

En second lieu, l'on réduira à une même dénomination la plus petite & la plus grande fraction, suivant le second problème antérieur; enfin l'on achevera comme aux Problèmes précédens.

De la multiplication des Fractions.

PREMIER PROBLÈME.

Multiplier une fraction par une autre fraction.

Il faut multiplier premièrement les numérateurs l'un par l'autre, & le produit sera le numérateur de la fraction que l'on demande: l'on opérera de même sur les dénominateurs, & après les avoir multipliés l'un par l'autre, le produit qui en doit résulter, sera le dénominateur que l'on cherche. Il est visible qu'il n'est pas nécessaire ici de

s'embarrasser si les deux fractions ont une même ou différentes dénominations.

Soient, par exemple, ces deux fractions-ci, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, qu'il faut multiplier l'une par l'autre : d'abord le produit des numérateurs 2 & 4 sera 8 qu'il faut écrire à part ; ensuite le produit des dénominateurs 3 & 5 sera 15, qu'il faudra écrire au dessous du premier produit 8, de manière que le produit des deux fractions proposées sera $\frac{8}{15}$. Pour peu que l'on se rappelle ici la définition claire & succincte que l'on a donnée *(p. 35)* de la multiplication en général, il sera aisé d'apercevoir la raison de cette pratique.

SECOND PROBLÈME.

Multiplier un nombre entier par une fraction quelconque.

Il suffit ici de multiplier le nombre entier par le numérateur de la fraction proposée, & d'écrire au dessous du produit le dénominateur de la fraction : l'opération sera ainsi achevée, & la nouvelle fraction sera le produit que l'on demande. Si l'on propose, par exemple, de multiplier 8 par $\frac{3}{4}$, l'on multipliera 8 par 3, & l'on écrira au dessous

du produit 24 le dénominateur 4, ce qui donne pour produit $\frac{24}{4}$ ou ſix entiers, en réduiſant comme il a été enſeigné ci-devant.

TROISIÈME PROBLÈME.

Multiplier un nombre entier & la fraction qui en dépend, par un autre nombre entier qui eſt joint pareillement à une fraction.

Il faut d'abord réduire (ſuivant ce qui a été enſeigné au cinquième des problèmes antérieurs) chaque nombre entier avec la fraction qui lui eſt jointe, à une ſeule fraction; enſuite l'on multipliera ces deux fractions l'une par l'autre, comme cela vient d'être enſeigné au premier problème.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Multiplier une fraction de fraction par une autre fraction de fraction.

L'on réduira ſéparément, ſelon le cinquième des problèmes antérieurs, chaque fraction de fraction à une ſeule fraction; enſuite l'on multipliera les deux nouvelles fractions l'une par l'autre, comme il eſt enſeigné au premier de ces quatre derniers problèmes.

AVERTISSEMENT.

Il faut bien prendre garde, lorſqu'on veut connoître la valeur du produit d'une fraction par une autre, de ne pas confondre le nouveau produit avec la valeur de l'entier, déſignée d'abord, comme au ſixième des problèmes antérieurs ; car il ne ſauroit y être comparé qu'autant que l'on aura multiplié cette valeur de l'entier par elle-même. Que l'on demande, par exemple, la valeur de ce produit-ci, $\frac{3}{12}$, lequel provient de la multiplication des deux fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$, la valeur de l'entier étant d'abord ſuppoſée 12 : il ne faut pas comparer le produit $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ avec 12, mais avec 12 fois 12 ou 144, qui eſt le produit de la multiplication de cet entier par lui-même ; ainſi la valeur de ce produit ſera 36^{l}, parce que 36 eſt le quart de 144.

La raiſon eſt fondée ſur ce que tout produit doit être uniquement comparé avec un nombre de même eſpèce, c'eſt-à-dire, conſtamment avec un pareil produit qui doit en même temps naître de la multiplication. Pour ſe former une idée plus juſte de cette vérité, conſidérons que $\frac{1}{3}$ de 12^{l} vaut 4^{l},

& que $\frac{3}{4}$ de 12^{l} valent 9^{l}, & que multipliant 4^{l} par 9^{l}, l'on aura 36^{l}, comme il s'ensuit en effet de la précédente opération. Enfin, si l'on construit une figure géométrique, en divisant chaque côté d'un quarré d'un pied en douze parties, & par conséquent la surface en cent quarante-quatre quarrés d'un pouce (en tirant des parallèles par chaque division) l'on verra d'abord que quatre pouces de hauteur sur neuf pouces de largeur, donnent un rectangle de trente-six pouces quarrés.

De la division des Fractions.

PREMIER PROBLÈME.

Diviser une fraction par une autre fraction.

Multipliez le numérateur de la fraction à diviser, par le dénominateur de la fraction qui divise, & le produit sera le numérateur du quotient que l'on cherche: l'on en trouvera le dénominateur, en multipliant celui de la fraction à diviser, par le numérateur de celle qui divise.

Soit, par exemple, cette fraction-ci $\frac{2}{3}$ à diviser par $\frac{3}{4}$: il faut, en premier lieu, multiplier le numérateur 2 de la fraction à diviser, par 4, c'est-à-dire, par le dénominateur

de la fraction qui divise, & l'on aura 8 pour numérateur du quotient que l'on cherche. En second lieu, l'on multipliera le dénominateur de la fraction à diviser, c'est-à-dire 3, par le numérateur de celle qui divise, lequel est aussi 3, & le produit 9 sera le dénominateur du quotient que l'on cherche, en sorte que le quotient rassemblé sera $\frac{8}{9}$. La preuve de calcul de cette opération se réduit à multiplier le quotient $\frac{8}{9}$ par le diviseur $\frac{3}{4}$, ce qui donne au produit $\frac{24}{36}$, qui est une fraction à réduire à ses moindres termes, & l'on aura $\frac{2}{3}$ ou précisément la même chose que le dividende proposé. Voici présentement la raison de cette multiplication *en croix*, à quoi s'est réduite uniquement l'opération de la division que l'on vient de faire. Il est visible d'abord qu'en multipliant, par un même nombre entier, le numérateur & le dénominateur de la fraction à diviser; qu'en les multipliant, dis-je, par le produit qui seroit formé de la multiplication du numérateur de la fraction qui sert de diviseur par son dénominateur, cela ne changeroit pas la valeur de la fraction à diviser: l'on auroit en ce cas, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{24}{36}$ qui est une fraction équivalente, selon ce qui a été

démontré au ſecond des problèmes antérieurs ; mais, dans cette ſuppoſition, remarquez qu'il n'y a plus de difficulté à diviſer le numérateur 24 de la nouvelle fraction, par le numérateur 3 de la fraction qui ſert de diviſeur, & que le quotient doit donner le numérateur 8 de la fraction que l'on cherche, tel qu'on l'a trouvé préciſément ci-deſſus. Pareillement, ſi l'on diviſe le dénominateur 36, de la nouvelle fraction ſubſtituée au dividende $\frac{2}{3}$, par celui de la fraction qui ſert de diviſeur, ſavoir, par 4, l'on aura ſans difficulté au quotient le dénominateur 9, tel qu'on l'a trouvé pour la fraction que l'on cherche. Ainſi la méthode employée ci-deſſus n'étant qu'un expédient bien ſimple pour abréger l'opération, elle doit être regardée à juſte titre comme une pratique très-ſûre : au reſte il eſt aiſé de s'en convaincre en écrivant avec les ſignes de l'Algèbre, $\left\{\begin{matrix}\frac{2}{3}\times 3\times 4=\frac{24}{36}\\ 3\times 3\times 4=36\end{matrix}\right\}$ la multiplication par 3 étant inutile au numérateur, puiſque 3 doit diviſer pour achever l'opération à ce numérateur ; & pareillement la multiplication par 4 eſt inutile au dénominateur, puiſqu'on doit diviſer enſuite ce dénominateur par 4.

SECOND PROBLÈME.

Diviſer un nombre entier par une fraction.

L'on écrira l'unité au deſſous du nombre entier, ce qui doit paſſer pour ſon dénominateur, puiſque ſa valeur n'eſt aucunement changée par-là : l'on traitera enſuite ces deux fractions comme au problème précédent, c'eſt-à-dire, en faiſant la multiplication en croix, & l'on aura une fraction qui indiquera le quotient que l'on cherche.

TROISIÈME PROBLÈME.

Diviſer un nombre entier joint à une fraction par une fraction quelconque.

L'on commencera par réduire le nombre entier & ſa fraction, à une ſeule & unique fraction (ſelon le ſecond corollaire du quatrième problème antérieur) & l'on achevera la diviſion comme au premier problème de la diviſion des fractions.

Que ſi l'on propoſoit à diviſer un nombre entier joint à une fraction, par un autre nombre entier joint pareillement à une fraction, il faudroit réduire chaque nombre entier avec ſa fraction en une ſeule fraction,

& multipliant en croix, la division s'achevera comme ci-dessus.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Diviser une fraction de fraction par une autre fraction de fraction.

Réduisez chacune des fractions de fraction à une seule fraction, selon ce qui a été enseigné au cinquième des problèmes antérieurs; ensuite faites la division comme il vient d'être enseigné au premier problème.

Des Fractions décimales.

L'on a déjà dit que la fraction décimale est celle dont le dénominateur est toûjours l'unité suivie d'un ou de plusieurs *zéros*, tel que 10, 100, 1000, 10000, &c. en sorte qu'il y ait constamment autant de *zéros* au dénominateur que de chiffres dans le numérateur.

Les Mathématiciens étant demeurés d'accord que le calcul des fractions décimales est des plus commodes & très-facile, il faut voir ici, en premier lieu, par quel artifice ils ont coûtume de réduire les fractions vulgaires en fractions décimales: c'est ce qui doit précéder les règles qu'ils ont données

de l'addition, ſouſtraction & autres opérations ſur les fractions décimales, comme on va les rapporter tout-à-l'heure.

PREMIER PROBLÈME.

Réduire une fraction vulgaire quelconque à une fraction décimale.

Pour réſoudre ce problème, il ſuffit de chercher à découvrir une fraction décimale proportionnelle à la fraction propoſée : cela ſuppoſe la règle de proportion, dont on va traiter au commencement de la troiſième partie de ce Traité.

Il faut donc faire cette analogie ou proportion, ſavoir, le dénominateur de la fraction propoſée eſt au dénominateur que l'on veut aſſigner à la fraction décimale, en même raiſon que le numérateur de la fraction donnée, eſt à un quatrième terme : ce dernier étant trouvé par le calcul, ſera le numérateur de la fraction décimale que l'on cherche.

Soit, pour un premier exemple, cette fraction-ci, $\frac{3}{5}$, que l'on propoſe de réduire en fraction décimale : il faut dire, ſi 5 donnent, par exemple, 100, combien donneront 3 ? l'on trouvera 60 pour quatrième terme ;

c'eſt pourquoi, au lieu de la fraction propoſée, $\frac{3}{5}$, l'on aura $\frac{60}{100}$, qui ſera la fraction décimale équivalente que l'on cherche.

Soit, pour ſecond exemple, cette fraction-ci, $\frac{18}{60}$, c'eſt-à-dire 18 tierces de degré, & que l'on veut réduire en fraction décimale: l'on fera, comme 60 eſt à 100, ainſi 18 ſont à 30, & la fraction décimale que l'on cherche ſera $\frac{30}{100}$. L'on va indiquer bien-tôt quel eſt l'avantage de cette dernière réduction des tierces en fraction décimale.

REMARQUES.

I. Quelques-uns appellent *primes* les numérateurs des fractions décimales, lorſqu'elles n'ont que 10 au dénominateur, & ainſi de ſuite, *ſecondes*, *tierces* & *quartes*, les ſecond, troiſième & quatrième termes des numérateurs, à meſure que les dénominateurs ſont exprimés par 100, 1000, 10000, &c.

II. Les Mathématiciens ſont convenus auſſi de ne point exprimer le dénominateur des fractions décimales, en ſorte qu'il eſt toûjours ſous-entendu; car les numérateurs étant, de même que les nombres entiers, en proportion décuple, il eſt facile par-là de les ajoûter, ſouſtraire, &c. de même que

les autres nombres entiers, ayant égard à la ponctuation ou virgule, comme nous l'avons déjà vû sur la fin des opérations sur la division des nombres entiers.

III. Soit le mouvement apparent & uniforme d'une étoile de 65′ 18″ en soixante-douze années *, dont la sixième partie, 10′ 53″, étant retranchée, le reste, 54′ 25″, nous indique le mouvement du même astre en soixante ans, c'est-à-dire de 54″ 25‴ par an : il faut réduire ces dernières tierces en décimales; l'on trouvera, comme au second exemple ci-dessus, pour quatrième terme, $\frac{41}{100}$: c'est pourquoi le mouvement annuel sera de 54″, 411, au lieu de la valeur proposée, 54″ 25‴.

Si l'on vient à changer la valeur trouvée, 54″, 411, en celle-ci, 544″, 11, cette dernière donnera le mouvement en dix années.

SECOND PROBLÈME.

Ajoûter en une somme plusieurs fractions décimales.

Lorsqu'on propose de réunir en une somme plusieurs fractions décimales, il peut arriver

* Voyez le Catalogue Britannique.

qu'elles ne ſoient aucunement précédées par des entiers, ou bien qu'il y ait des entiers ſuivi de décimales.

Dans le premier cas, il faut diſpoſer ſur une même colonne les primes ſous les primes, les ſecondes ſous les ſecondes, les tierces ſous les tierces, &c. comme cela s'eſt pratiqué dans l'addition des nombres entiers, & l'on additionnera ici préciſément de la même manière : l'on obſervera ſeulement qu'après l'addition des primes, s'il y a deux caractères, il en faudra écrire le dernier ſous les primes, & l'autre en avant vers la gauche dans le rang des entiers, ce qu'il ne faut pas oublier de diſtinguer par un point de ſéparation ; ou, ſi l'on veut, par une virgule.

Soient, par exemple, les quatre fractions décimales ſuivantes, 0, 90047 : 0, 30506 : 0, 41234 & 0, 12303 : on propoſe de les ajoûter en une ſomme.

Addition des Fractions décimales.

	90047
	30506
	41234
	12303
La ſomme....	1, 74090

Dans le ſecond cas, lorſque les fractions décimales ſont jointes à des nombres entiers, l'on écrira, comme ci-deſſus, les décimales ſous les décimales, & les entiers tellement ſous les entiers, que chaque caractère ſoit immédiatement ſous un caractère de pareille dénomination, & l'on fera l'addition à l'ordinaire.

Addition des entiers joints aux décimales.

	1, 45311
	2, 41232
	3, 13154
	1, 30151
La ſomme...	8, 29848

TROISIÈME PROBLÈME.

Souſtraire une fraction décimale d'une autre fraction décimale.

Il faut d'abord écrire la plus petite fraction ſous la plus grande, en ſorte que les caractères de l'une ſoient immédiatement ſous les caractères correſpondans de l'autre, & l'on achevera la ſouſtraction comme cela s'eſt pratiqué pour les nombres entiers.

En ſecond lieu, lorſqu'il faudra ſouſtraire la fraction décimale des entiers uniquement,

l'on aura ſoin de marquer après la virgule, vers la droite des entiers, autant de *zéros* qu'il y a de caractères dans la fraction décimale : on écrira enſuite la fraction décimale ſous les *zéros*, & l'on opérera à l'ordinaire.

Premier Exemple.

	27, 4570
Décimale à ſouſtraire.....	2348
Le reſte...	27, 2222

Deuxième Exemple.

	39, 000
Décimale à ſouſtraire.....	915
Le reſte...	38, 085

L'on a traité ſuffiſamment *(pages 68 & 69)* de la multiplication & de la diviſion des fractions décimales.

Exemple de multiplication des Fract. décimales.

	00, 56
	00, 15
	280
	56
Produit total...	0,0840

AVERTISSEMENT.

Dans l'Aſtronomie, où les opérations ſe ſont plus fréquemment ſur les ſexagéſimales, il y a quelques obſervations à faire ici quant à la ſouſtraction. Le cercle qui indique les révolutions périodiques, ſe diviſe d'abord en douze parties de trente degrés chacune, que l'on nomme *ſignes*; après cela, l'on ſous-diviſe les degrés en minutes, ſecondes, tierces, &c. à l'ordinaire.

Or il y a d'abord quelque embarras dans la ſouſtraction, de même que dans l'addition des degrés, parce qu'au lieu d'emprunter 60, il faut ſe reſſouvenir que c'eſt 30 ſeulement qu'il faut emprunter au rang des degrés, à cauſe que trente degrés forment un ſigne.

En ſecond lieu, il arrive quelquefois que le nombre à ſouſtraire eſt le plus grand, auquel cas il faut emprunter 12, c'eſt-à-dire le cercle entier ou une révolution, & l'on écrira au deſſous ce qui reſte après la ſouſtraction.

EXEMPLE.	4^{f}	28^{d}	$37'$	$23''$
Nombre à ſouſtraire...	5.	29.	18.	27
Le reſte ſera...	10.	29.	18.	56

Commençant

Commençant par les ſecondes, je dis, 27 à ôter de 23, cela ne ſe peut; j'emprunte ſoixante ſecondes, valeur d'une minute, ce qui fait 83, d'où ôtant 27, le reſte eſt 56 ſecondes: paſſant aux minutes, je dis 18 minutes & une que j'ai empruntée ſont 19, à ôter de 37, il reſte ici 18 minutes: après quoi venant aux degrés, je dis 29 de 28, cela ne ſe peut; j'emprunte un ſigne ou trente degrés, ce qui fait 58 degrés, d'où ôtant 29, il reſte 29 degrés que j'écris au deſſous: enfin 1 ſigne que j'ai emprunté & 5 ſignes ſont 6 ſignes à ôter de 4 ſignes, cela ne ſe peut; j'emprunte 12 ſignes ou une révolution, ce qui, joint à 4 ſignes, donne 16 ſignes, d'où ôtant 6 ſignes, le reſte eſt 10 ſignes que j'écris au deſſous.

TROISIÈME PARTIE.

Des Proportions.

LE mot de *proportion*, en général, ſignifie *égalité de rapports*, c'eſt-à-dire qu'il y a proportion entre des quantités, quand la raiſon ou le rapport de la première à la ſeconde

eſt entièrement ſemblable au rapport ou raiſon de la troiſième à la quatrième quantité. L'on diſtingue communément trois eſpèces de proportions, ſavoir, la *proportion harmonique*, la *proportion arithmétique*, & la *géométrique*.

On appelle *proportion harmonique*, celle où l'on trouve trois quantités inégales & homogènes à comparer, de telle ſorte que la plus grande ſoit à la plus petite, comme la différence qui ſe trouve entre les deux plus grandes, eſt à la différence des deux plus petites: l'on aura, par exemple, ces trois nombres-ci 3, 4, 6, en proportion harmonique, parce que le plus grand, 6, eſt au plus petit, 3, comme la différence, 2, qui eſt entre les deux plus grands, 4 & 6, eſt à la différence 1 qui ſe trouve entre les deux plus petits, 4 & 3. C'eſt principalement dans la Muſique que l'on fait uſage de ce genre de proportion.

La *proportion arithmétique* eſt celle où l'on trouve la différence entre deux quantités quelconques, préciſément la même que celle qui ſe trouve entre deux autres quantités: ainſi les quatre nombres ſuivans, 2, 5, 9, 12, ſont en proportion arithmétique, parce

que de même que l'on a 3 pour différence entre les deux premières quantités, 2 & 5, l'on a pareillement 3 pour différence entre les deux dernières quantités, 9 & 12.

La *proportion géométrique* eſt celle où la première des quantités contient ou eſt contenue autant de fois dans la ſeconde, que la troiſième contient ou eſt contenue dans la quatrième quantité : l'on a, par exemple, les quatre nombres ſuivans, 2, 4, 6, 12, ou bien ceux-ci, 4, 2, 12, 6, en proportion géométrique; car, dans la première des quatre quantités en proportion, de même que 2 eſt contenu deux fois dans 4, l'on trouve pareillement 6 contenu deux fois dans 12; & dans la ſeconde, de même que 4 contient deux fois 2, l'on a pareillement 12 qui contient deux fois 6.

La définition générale de la proportion géométrique eſt l'égalité de rapports ou de raiſons géométriques : or la raiſon géométrique eſt la relation ou le rapport qu'ont entr'elles deux quantités homogènes; elle peut être conſidérée de telle ſorte que ſi l'on diſtribue l'une en un certain nombre de parties égales, l'autre contiendra un nombre donné des mêmes parties.

Pour développer ceci davantage, il faut se rappeler ici, en premier lieu, qu'une fraction est composée d'un numérateur & d'un dénominateur, de manière que celui-ci exprime en combien de parties le tout a été divisé, & que le numérateur indique combien l'on a pris de ces mêmes parties. En second lieu, il faut se rappeler que deux fractions ont une même valeur, quand le numérateur de l'une contient autant de parties de son dénominateur, que le numérateur de l'autre contient de parties dans lesquelles est divisé son dénominateur : ceci étant supposé, la raison géométrique est la relation du numérateur au dénominateur, ce qui revient au même que si l'on disoit, c'est la relation de l'antécédent à son conséquent; ainsi la proportion géométrique n'est autre chose qu'une égalité de fractions, lesquelles ont une même valeur.

L'on remarquera que toutes les fois qu'on parle de proportions, sans spécifier ni déclarer de laquelle on veut faire usage, il faut toûjours sous-entendre, en ce cas, que c'est la proportion géométrique.

Quoique la proportion arithmétique appartienne naturellement à ce Traité, & qu'elle

ſoit d'un uſage étendu en bien des cas, principalement dans la conſtruction des logarithmes, cependant, comme elle revient moins ſouvent dans la pratique que la proportion géométrique, dont les uſages ſont ſi variés, nous traiterons ici uniquement de la proportion géométrique des nombres, & cela dans l'ordre ſuivant, ſavoir, en diſcutant d'abord ſa nature & ſes eſpèces; en ſecond lieu, en donnant les règles ſimples, qu'on nomme *règles de Trois;* en troiſième lieu, en propoſant les règles de *Société*, ſimples & complexes; en quatrième lieu, celles d'*Alliage;* enfin l'on finira par les règles ſimples de fauſſe poſition, & par la double règle de fauſſe poſition.

De la nature & des eſpèces de Proportions géométriques.

L'on diſtingue d'abord deux ſortes de proportions géométriques, ſavoir, la *proportion diſcrète* & la *proportion géométrique continue.* La proportion diſcrète eſt celle qui a ſon troiſième terme différent du ſecond terme, comme dans cette proportion-ci, 2, 4, 6, 12. On l'écrit communément ſous les deux formes ſuivantes, 2 : 4 : : 6 : 12, ou

bien $\frac{2}{4} :: \frac{6}{12}$. La proportion géométrique continue est celle qui a son troisième terme égal au second terme, comme dans celle-ci, 2 : 4 :: 4 : 8, & il y a une manière particulière de l'écrire, que voici, ∺ 2 : 4 : 8. Lorsqu'il y a plus de trois termes en proportion géométrique continue, cela s'appelle pour lors *progression ;* ainsi ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32, &c. sont en progression géométrique.

Dans toute proportion, il doit toûjours s'y trouver, comme cela s'ensuit de la définition, quatre termes exprimés, ou dont l'un est sous-entendu : or, de ces quatre termes, le premier & le troisième se nomment *antécédens,* au lieu que le second & le quatrième se nomment *conséquens.* L'on appelle aussi le premier & le quatrième termes les *extrêmes,* & le second avec le troisième termes les *moyens proportionnels,* ou simplement les *moyens.*

Dans le dessein de développer davantage ici la nature de la proportion, voici quelques théorèmes utiles à ce sujet.

Premier Théorème.

Le produit de la multiplication est au nombre multiplié, comme le multiplicateur

eſt à l'unité. On peut l'énoncer auſſi de la manière ſuivante: l'unité eſt au multiplicateur, comme le multiplicande eſt au produit.

La raiſon en eſt évidente, puiſque, ſelon la définition donnée ci-devant de la multiplication, le produit doit contenir autant de fois le nombre multiplié, qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.

SECOND THÉORÈME.

Le dividende eſt au diviſeur, comme le quotient eſt à l'unité; ou bien encore, l'unité eſt au quotient, comme le diviſeur eſt au dividende : cela s'enſuit de la définition donnée de la diviſion, puiſque l'unité doit être compriſe autant de fois dans le quotient, que le diviſeur eſt contenu dans le dividende.

3.e THÉORÈME FONDAMENTAL.

Le produit qui naît de la multiplication des extrêmes d'une proportion, eſt égal au produit des deux moyens l'un par l'autre. Soient, par exemple, ces quatre nombres en proportion, 2 : 4 : : 6 : 12, le produit des deux extrêmes, 2 & 12, multipliés l'un par l'autre, ſavoir, 24, eſt égal au produit des deux moyens, 4 & 6, multipliés pareillement

l'un par l'autre, c'eſt-à-dire que de même que 2 fois 12 font 24, l'on doit trouver auſſi que 4 fois 6 font le même nombre 24, & que cela s'obſerve généralement dans toute proportion.

Démonſtration.

Il faut d'abord ſe rappeler ce qui a été prouvé aux problèmes antérieurs qui précèdent le calcul des fractions dans la ſeconde partie de ce traité.

Or, ſuivant le ſecond des problèmes antérieurs, il eſt certain que le rapport du premier antécédent à ſon conſéquent demeurera conſtamment le même, ſi l'on multiplie l'un & l'autre en même temps par tel nombre qu'on voudra: pareillement l'on aura toûjours le même rapport du ſecond antécédent de la proportion à ſon conſéquent, tant qu'on les multipliera par un même nombre.

C'eſt pourquoi ſi l'on multiplie le premier antécédent & ſon conſéquent, ſavoir, 2 & 4, par un même nombre, lequel ſera ici 12, c'eſt-à-dire par le conſéquent du ſecond rapport, il eſt clair qu'au lieu du premier rapport ou de la fraction $\frac{2}{4}$, l'on aura celle-ci qui lui ſera égale, $\frac{24}{48}$. Si l'on multiplie auſſi le ſecond

antécédent de la proportion en même temps que ſon conſéquent, ſavoir, 6 & 12, par un même nombre, lequel ſera 4, conſéquent du premier rapport, alors, au lieu de la ſeconde fraction $\frac{6}{12}$, l'on aura $\frac{24}{48}$, qui exprimera le même rapport ou une fraction équivalente à $\frac{6}{12}$. C'eſt pourquoi écrivant ces quatre fractions en proportion, l'on comparera les deux proportions que voici, la première 2 : 4 : : 24 : 48, & la ſeconde 6 : 12 : : 24 : 48, où l'on voit d'abord que la raiſon de 2 à 4, & celle de 6 à 12, qui ſont égales, doivent donner une même raiſon, ſavoir, celle de 24 à 48, & partant qu'il y a même raiſon dans l'un & l'autre cas de 24 à 48, c'eſt-à-dire, que la raiſon du ſecond antécédent à ſon conſéquent ſera la même dans l'une & l'autre proportion. Mais puiſque les deux derniers conſéquens de chacune de ces nouvelles proportions, ſavoir, 48 & 48, ſont reconnus égaux, l'un & l'autre ayant été formés en multipliant 4 par 12, c'eſt-à-dire exactement par les mêmes nombres, il doit donc s'enſuivre que les deux antécédens, 24 & 24, de ces nouvelles proportions, quoique formés par différens nombres, ſeront parfaitement égaux. L'un de ces produits,

ſavoir, 24, eſt celui des extrêmes de la première proportion propoſée, & l'autre produit 24 eſt celui des moyens de la même proportion; partant il eſt généralement vrai de dire qu'en toute proportion le produit des extrêmes ſera égal à celui des moyens. *C. Q. F. D.*

La même démonſtration s'applique facilement aux caractères algébriques, ſur leſquels il ne ſera pas inutile de s'exercer.

COROLLAIRES.

I. Si trois termes ſont en proportion géométrique continue, le produit du ſecond terme multiplié par lui même, ſera égal au produit du premier multiplié par le troiſième terme ; ainſi ∺ 2 : 4 : 8 étant trois termes en proportion géométrique continue, le produit du premier terme 2, par le troiſième terme 8, ſera égal au quarré du terme moyen 4.

II. Si l'on connoît les trois premiers des quatre termes d'une proportion, il ſera facile d'en découvrir le quatrième terme; car en multipliant le ſecond par le troiſième terme, c'eſt-à-dire, les deux moyens l'un par l'autre, & diviſant le produit par le premier terme,

le quotient ſera le quatrième terme que l'on cherche.

III. Pareillement, ſi l'on connoît les deux premiers termes d'une proportion géométrique continue, l'on trouvera le troiſième terme en multipliant le ſecond terme par lui-même, & diviſant le produit par le premier terme; car le quotient ſera préciſément le troiſième terme que l'on cherche.

QUATRIÈME THÉORÈME.

Si quatre quantités ſont en proportion géométrique, de quelque manière que l'on en place les termes, il y aura toûjours proportion ou égalité de rapports, pourvû que l'on obſerve ces deux exceptions, ſavoir, que le premier terme n'ait pas le quatrième pour conſéquent, ou bien celui-ci le premier terme.

La vérité de ce théorème eſt fondée ſur ce que, dans quelque tranſpoſition que ce ſoit de ces mêmes termes, les deux cas ci-deſſus exceptés, l'on aura toûjours le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

Voici huit différentes manières de tranſpoſer ces quatre termes proportionnels, & à chaque tranſpoſition l'on a joint les noms uſités parmi les Mathématiciens.

Différens genres de Proportions.

1 : 2 : : 3 : 6,	proportion directe proposée.
3 : 6 : : 1 : 2,	la même, en transposant les rapports.
2 : 1 : : 6 : 3,	rapports inverses...*invertendo.*
6 : 3 : : 2 : 1,	rapports inverses & par transposition.
3 : 1 : : 6 : 2,	en permutant les antécédens.
6 : 2 : : 3 : 1,	en permutant les conséquens.
1 : 3 : : 2 : 6,	proportion alterne.
2 : 6 : : 1 : 3,	alterne de la seconde espèce.

Il y a aussi deux autres genres de proportions formées de la première, & qui sont d'un grand usage.

1 + 2 : 2 : : 3 + 6 : 6, proportion composée, c'est-à-dire, en additionnant les antécédens avec les conséquens, & conservant les conséquens, *componendo.*

1 — 2 : 2 : : 3 — 6 : 6, proportion divisée, *dividendo*, qui consiste à soustraire les antécédens de leurs conséquens, sans altérer ceux-ci.

CINQUIÈME THÉORÈME.

1.° Dans toute progression qui croît par le double de chaque terme moyen, si l'on retranche le premier des quatre termes du dernier, le reste sera égal à la somme des trois termes

qui précèdent le dernier terme; ainsi dans la progression ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32, &c. si l'on prend quatre termes à volonté, mais qui se suivent, tels que sont ceux-ci, ∺ 4 : 8 : 16 : 32, le premier retranché du quatrième sera égal à la somme des trois premiers termes; ceci s'étend à plus de quatre termes.

2.° Dans toute progression qui croît par les triples, si l'on retranche le premier terme du dernier, le reste sera *double* de la somme de tous les termes qui précèdent le dernier terme; ainsi dans la progression ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81, &c. si l'on retranche 1 de 81, la moitié, 40, de ce qui reste, sera égale à la somme des termes 27, 9, 3, 1.

3.° Dans toute progression qui croît par le quadruple de chaque terme moyen, le dernier terme, moins le premier, sera *triple* de la somme de tous les termes qui précèdent ce dernier terme; ainsi ∺ 1 : 4 : 16 : 64 : 256, &c. le dernier terme, moins le premier, donne une quantité dont le tiers, 85, sera égal à la somme des termes 64, 16, 4, 1.

Ces trois théorèmes, qui se démontrent facilement par l'Algèbre, c'est-à-dire, en donnant aux caractères arithmétiques toute

leur généralité, ne ſuppoſent autre choſe, pour y parvenir, qu'un examen réfléchi ſur les rapports qui ſe trouvent entre les termes de chaque progreſſion, comme on pourra s'en convaincre lorſqu'on réſoudra les équations.

L'on peut demander ici quels ſont les ſignes que les Mathématiciens ont introduits dans l'Arithmétique traitée dans toute ſa généralité, laquelle a conſervé, depuis que chaque caractère a la ſignification la plus étendue, le nom d'*Algèbre:* en voici les principaux. Le ſigne + déſigne l'addition & ſe nomme *plus;* celui-ci — déſigne la ſouſtraction, & ſe nomme *moins;* enfin ce dernier = déſigne l'égalité, c'eſt-à-dire qu'il ſe place conſtamment entre deux quantités égales.

On ſe ſert encore de ce ſigne > pour indiquer que l'antécédent ſurpaſſe le conſéquent, ou que la grandeur qui précède ſurpaſſe celle qui ſuit immédiatement.

Au contraire celui-ci < indique que la grandeur qui précède eſt plus petite que celle qui ſuit.

Avant que de finir cet article, il n'eſt pas inutile d'enſeigner, au ſujet de la pro-

portion arithmétique, comment trois termes étant connus, l'on peut découvrir le quatrième, ce qui eſt fort en uſage dans le calcul des expoſans algébriques ou des logarithmes.

L'opération ſe réduit à ſouſtraire le premier terme de la ſomme des ſecond & troiſième termes que l'on aura d'abord ajoûtés enſemble, & le reſte ſera le quatrième terme que l'on cherche. Soient, par exemple, ces trois termes-ci d'une proportion arithmétique, 2, 5, 9, dont on demande le quatrième terme. J'ôte de la ſomme de 5 & de 9, ſavoir, 14, le premier terme 2, & le reſte 12 ſera le quatrième terme que l'on cherche, c'eſt-à-dire qu'il ſurpaſſera autant le terme 9, que le ſecond terme 5 ſurpaſſe le premier terme 2; les quatre termes ſeront ainſi: 2 · 5 : 9 · 12.

La raiſon de cette opération eſt fondée ſur ce que dans cette eſpèce particulière de proportion, la ſomme des deux moyens eſt égale à la ſomme des deux termes extrêmes, comme il eſt facile de le prouver.

Au reſte, ſi la proportion arithmétique eſt continue, il ſuffit de doubler le ſecond terme & d'en ſouſtraire le premier pour avoir un reſte qui ſera le terme que l'on cherche.

Ainsi dans la proportion arithmétique continue ÷ 2 . 5 . 8, si l'on double 5 & que l'on retranche 2, le troisième terme que l'on cherche sera 8; pareillement, si l'on double 8, & que l'on en retranche 5, le quatrième terme de la proportion continue sera 11.

De la Règle de Proportion simple, ou *Règle de Trois.*

L'on appelle vulgairement *règle de Trois,* celle où l'on est parvenu à pouvoir proposer trois termes d'une proportion, & où l'on demande quel doit être le quatrième terme; on l'a nommée aussi *règle d'or,* à cause de sa grande utilité.

L'on distingue deux sortes de règles de trois, savoir, celle qui est directe, & l'indirecte; l'on appelle *règle de trois* ou *de proportion directe,* celle qui a pour objet des quantités qui s'élèvent constamment à un plus haut terme, ou bien qui s'abaissent à de plus bas termes; au lieu que la proportion indirecte procède du plus grand à un moindre terme, ou du moindre terme à un plus grand: celle-ci se nomme autrement *proportion inverse* ou *réciproque;* il faut développer ceci davantage.

I. Une

I. Une proportion s'élève & procède d'un plus grand à un plus grand terme, si le second antécédent surpassant le premier, le second conséquent surpasse pareillement le premier conséquent, tel que dans celle-ci, 1 : 2 : : 3 : 6.

II. pareillement une proportion s'abaisse d'un moindre terme à un autre plus petit, s'il arrive que le second antécédent étant moindre que le premier, le second conséquent devienne pareillement moindre que le premier conséquent, ainsi que dans la proportion suivante, 3 : 6 : : 1 : 2.

III. Au contraire, une proportion procède d'un plus grand à un moindre terme, lorsque le second antécédent surpassant le premier, l'on trouve dans l'autre sens le second conséquent moindre que le premier conséquent. Telle est la proportion inverse, 2 : 6 : : 4 : 3, c'est-à-dire, que le premier antécédent est au second antécédent, réciproquement comme le premier conséquent est au second conséquent.

IV. Enfin la proportion procède d'un moindre à un plus grand terme, quand le second antécédent étant moindre que le premier, l'on a au contraire le second conséquent

plus grand que le premier conséquent, comme dans cette autre proportion inverse ou réciproque, 4 : 3 : : 2 : 6.

REMARQUES.

1.° Il est visible que les trois premiers termes étant proposés tels qu'on vient de les représenter dans les deux derniers cas (dont on verra ci-après plus d'un exemple) il faut bien prendre garde que dans ces proportions inverses le premier & le second terme doivent être regardés comme les deux moyens proportionnels.

2.° Dans chaque proportion géométrique, les deux antécédens doivent toûjours être formés de quantités semblables ou homogènes, & l'on doit observer aussi la même loi pour les conséquens, lesquels d'ailleurs peuvent répondre à des objets différens, c'est-à-dire, à des quantités souvent hétérogènes à celles des antécédens.

3.° La règle de trois ne doit pas s'appliquer aux nombres entiers uniquement, puisqu'on peut l'étendre également aux fractions ou à des quantités composées d'entiers & de fractions.

Première Règle de Proportion.

Soient d'abord proposés trois nombres entiers, dont le premier & le troisième soient homogènes, exprimant des quantités de même nature, pour trouver un quatrième terme qui soit homogène au second terme, & en proportion directe, multipliez le troisième nombre par le second, ou bien le second par le troisième, selon qu'il paroîtra plus commode; ensuite divisez le produit par le premier terme, & le quotient sera le quatrième terme que l'on cherche.

L'on se sert d'un vers latin pour mieux retenir la règle que l'on vient de donner; le voici :

Duc terminum in medium, productum divide primo.

Cette règle se démontre aisément, sachant d'ailleurs, selon le troisième théorème fondamental, que le produit des extrêmes d'une proportion est égal au produit des moyens; car si l'on divise le produit des moyens par le premier terme, l'on doit trouver au quotient un nombre qui, multiplié par le diviseur, donnera un produit égal au dividende, c'est-à-dire égal au produit des moyens, d'où

il s'enſuit que ce quotient eſt en effet le quatrième terme de la proportion.

Soient propoſés ces trois nombres, 36, 24 & 54, qui ſignifient, pour un cas particulier, que 36 heures de travail, par exemple, ſont payées 24 francs, l'on demande combien, à proportion, doit-on payer pour 54 heures?

Je multiplie le troiſième terme 54 par le ſecond terme 24; enſuite je diviſe le produit 1296 par le premier terme 36, & trouvant 36 au quotient, ce ſera le quatrième terme que l'on cherche; ainſi l'on aura $36^h : 24^l :: 54^h : 36^l$.

Seconde Règle.

Si l'on propoſe trois fractions, telles que la première & la troiſième, répondent à des quantités de même nature, pour trouver le quatrième terme de la proportion directe, il ſuffit de multiplier, comme dans le cas précédent, la troiſième fraction par la ſeconde, & d'en diviſer le produit par la première fraction, & le quotient ſera la quatrième fraction que l'on cherche.

Soient donc ces trois fractions, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, qui ſignifient que $\frac{2}{3}$ d'aune valent $\frac{3}{4}$ d'un

écu, l'on demande ce que vaut $\frac{1}{3}$ d'aune?

Je multiplie la troisième fraction $\frac{1}{3}$, par la seconde fraction $\frac{3}{4}$; ensuite je divise le produit $\frac{3}{12}$, ou son égal $\frac{1}{4}$, par la première fraction $\frac{2}{3}$, & le quotient $\frac{3}{8}$, sera la quatrième fraction que l'on cherche. Ainsi l'on dira, si $\frac{2}{3}$ d'aune valent $\frac{3}{4}$ d'un écu ou 45 sols, à proportion $\frac{1}{3}$ d'aune de la même matière vaudra $\frac{3}{8}$ d'écu, c'est-à-dire 22 sols 6 deniers.

Troisième Règle.

Si l'on propose trois nombres entiers joints à des fractions, mais qui soient toûjours tels que le premier & le troisième signifient des quantités de même nature, l'on trouvera le quatrième terme en réduisant chaque entier avec sa fraction à une seule fraction, selon le deuxième corollaire du second des problèmes antérieurs qui précèdent le calcul des fractions; ensuite l'on cherchera ce quatrième terme de la même manière que dans la seconde règle ci-dessus.

De la Règle de Trois inverse.

Quatrième Régle.

Soient d'abord proposés trois nombres

entiers, & qu'il faille trouver le quatrième terme d'une proportion inverſe ou réciproque, je multiplie le premier terme par le ſecond, ou bien le ſecond terme par le premier, ſelon qu'il ſera plus commode, enſuite je diviſe le produit par le troiſième terme, & le quotient ſera le quatrième terme que l'on cherche.

Voici donc trois nombres entiers, 8, 24, 12, qui répondent à la queſtion ſuivante, ſavoir, ſi huit travailleurs demandent 24 jours pour conſtruire un foſſé, combien faudra-t-il de jours, augmentant juſqu'à 12 le nombre des travailleurs ?

L'on voit d'abord que la proportion doit être ici inverſe ou réciproque, puiſque l'on procède du plus grand au moindre.

Je multiplie 8 par 24, & je diviſe le produit 192 par le troiſième terme 12 ; trouvant 16 au quotient, ce ſera le quatrième terme, c'eſt-à-dire, le nombre de jours que l'on cherche.

Pour comparer ici les rapports, il eſt évident que l'on auroit 8 à 12 réciproquement comme 24 à 16, & partant $8 \times 24 = 12 \times 16$.

Cinquième & ſixième Règles.

Si l'on propoſe trois fractions, & qu'il faille trouver le quatrième terme de la proportion inverſe ou indirecte ; ou bien ſi l'on propoſe trois entiers avec leurs fractions, &c. l'on procédera comme aux deuxième & troiſième règles, avec cette différence qu'on diviſera chaque fois par le troiſième terme le produit du premier par le ſecond, ou le produit du ſecond par le premier terme.

AVERTISSEMENT.

Si dans les proportions ſimples, ſoit directes, ſoit inverſes, il ſe trouve des entiers qui ſoient hétérogènes, il faudra les réduire à la plus petite eſpèce, afin que le nombre total ſoit uniquement d'une même eſpèce, & par conſéquent homogène. Si l'on a, par exemple, dans une proportion directe ſimple, des quantités, telles que le ſens de la queſtion ſoit celui-ci : Si deux toiſes trois pieds & quatre pouces valent 20^{l} 15^{f} 6^{d}, combien vaudront trente toiſes deux pieds & dix pouces ?

Je réduis d'abord le premier terme en pouces, & je trouve que le nombre total

eſt 184; en ſecond lieu, je réduis le ſecond terme en deniers, ce qui donne 4986^{d}; en troiſième lieu, réduiſant le troiſième terme en pouces, je trouve pour un nombre total 2194. Enfin cherchant à réſoudre la queſtion, ſelon la première règle, je trouve au quatrième terme $59452\frac{29}{46}$ deniers qu'il faudra réduire enſuite, par les opérations de la diviſion, en $247^{l}\ 14^{f}$ & $4^{d}\frac{2}{3}$.

De la Règle de Trois complexe.

L'on appelle *règle de Trois complexe* celle qui a rapport à une proportion complexe, c'eſt-à-dire, à une proportion dont deux des trois premiers termes entraînent en même temps deux autres termes acceſſoires, & d'où dépend abſolument la recherche du quatrième terme que l'on veut découvrir.

Il s'enſuit de-là que dans toute proportion complexe, il y a au moins cinq termes connus, ſavoir, trois termes principaux, comme dans la proportion ſimple, & deux autres termes acceſſoires; ce qui étant reconnu, voici les différentes règles.

Première Règle.

Si les cinq nombres entiers ſont tels que

deux des trois principaux repréſentent des objets ſemblables, avant que de rechercher le ſixième terme de la proportion directe, il faut d'abord reconnoître par le ſens de la queſtion, quels ſont les termes principaux, & quels ſont auſſi les termes acceſſoires ; en ſecond lieu l'on multipliera chacun des termes principaux par ſon acceſſoire; en troiſième lieu, l'on diſpoſera tellement le terme qui n'a pas d'acceſſoire, relativement aux deux produits déjà trouvés, qu'il devienne le ſecond terme de la proportion, de cette manière le premier & le troiſième termes repréſenteront des quantités ſemblables. Enfin l'on multipliera le troiſième terme par le ſecond, comme cela s'eſt pratiqué à la première règle de proportion ſimple, & diviſant le produit par le premier terme, le quotient ſera le ſixième terme que l'on cherche.

Soient, par exemple, les cinq nombres ſuivans, 4, 8, 10, 15 & 25, dont le ſens de la queſtion ſignifie: Si quatre hommes conſtruiſent en 8 jours 10 toiſes cubes, combien quinze hommes conſtruiront-ils à proportion pendant 25 jours?

D'abord on s'aperçoit que les jours ſont les quantités acceſſoires, relativement aux

hommes que l'on emploie; ainſi l'on multipliera le nombre des hommes, qui eſt 4, par celui des jours, lequel eſt 8, ce qui donne 32 au produit; ſemblablement l'on multipliera l'autre nombre d'hommes, qui eſt 15, par les 25 jours, & le produit ſera 375; diſpoſant ces produits avec le terme 10, au ſecond rang, comme la règle vient de le preſcrire, l'on aura 32 : 10 : : 375; multipliant donc le troiſième terme par le ſecond, & diviſant le produit 3570 par le premier terme 32, le quotient $117\frac{6}{32}$ ſera le ſixième terme que l'on cherche.

Voici la raiſon qui fait encore mieux concevoir pourquoi les jours ne ſont ici que des nombres acceſſoires; car lorſque quatre hommes, par exemple, travaillent pendant un certain nombre de jours, c'eſt la même choſe que ſi un ſeul homme y employoit un nombre de jours quadruple; d'où il s'enſuit que ſi quatre hommes travaillent huit jours, il y auroit trente-deux jours de travail pour un ſeul homme.

Seconde Règle.

Si l'on propoſe cinq fractions, dont deux repréſentent des objets ſemblables, pour

trouver en proportion directe la sixième fraction, l'on aura soin, comme dans la règle précédente, de distinguer les termes principaux d'avec ceux qui leur sont accessoires; l'on multipliera ensuite chaque fraction principale par son accessoire, & l'on disposera tellement les deux produits, relativement à la fraction qui reste, que le premier produit & le troisième représentent des objets semblables; enfin l'on multipliera le second par le troisième terme, l'on en divisera le produit par le premier terme, & le quotient sera la sixième fraction que l'on cherche.

Soient, par exemple, ces cinq fractions-ci, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, lesquelles signifient: Si $\frac{3}{4}$ d'une aune, dont la largeur est $\frac{2}{3}$, valent $\frac{2}{5}$ d'écus, combien à proportion doit valoir $\frac{1}{3}$ d'aune de la même matière sur $\frac{1}{2}$ aune de largeur?

Il est visible que les largeurs sont ici accessoires, puisqu'elles appartiennent à des fractions d'aune; ainsi l'on multipliera $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, & le premier produit sera $\frac{6}{12}$, ou bien $\frac{1}{2}$; pareillement l'on multipliera $\frac{1}{3}$ par le cinquième terme $\frac{1}{2}$, & le second produit sera $\frac{1}{6}$; l'on mettra au second terme, parmi ces deux produits, la fraction $\frac{2}{5}$, laquelle n'a

pas de terme acceſſoire, & l'on fera $\frac{1}{2} : \frac{2}{5} :: \frac{1}{6}$; le calcul s'achevera comme à la ſeconde règle de proportion ſimple.

Troiſième Règle.

Si l'on propoſe cinq nombres entiers avec leurs fractions, en ſorte qu'il y en ait deux qui ſignifient des objets ſemblables, pour trouver dans la proportion directe le ſixième terme, l'on réduira d'abord chaque nombre entier avec ſa fraction en une ſeule fraction; en ſecond lieu il faudra multiplier chaque nombre principa par ſon acceſſoire, & achever le calcul comme dans la règle précédente; que s'il ſe trouve quelqu'un des nombres entiers qui n'ait pas ſa fraction, on le rendra fractionnaire en écrivant l'unité au deſſous.

Conclusion.

Ce ſeroit ici le lieu de donner trois autres règles concernant les proportions complexes & inverſes; mais ces règles ne ſeroient que la répétition continuelle de ce qui a été preſcrit ci-devant: l'on y obſervera cependant, auſſi-tôt après avoir diſpoſé les termes que l'on aura eu ſoin de réduire à trois principaux, de multiplier le premier par le ſecond

terme, puiſque la proportion eſt inverſe; enſuite on diviſera le produit par le troiſième terme, ce qui donnera le ſixième terme que l'on cherche.

Des Règles ſimples de Sociétés ou *de Compagnies.*

L'on nomme *règles ſimples de Sociétés*, celles qui font découvrir le gain ou la perte qui doit être diſtribuée proportionnellement entre ceux qui, pendant un même intervalle de temps, ont mis une certaine ſomme en ſociété; car l'on déduit la proportion des différentes ſommes que chaque aſſocié a fournies à la bourſe commune, laquelle ſeule doit participer au gain ou à la perte de la compagnie.

Quoique les Auteurs aient coûtume de donner à ce ſujet différentes règles relativement aux nombres entiers & aux nombres rompus, l'on n'en propoſera néanmoins ici qu'une ſeule avec deux exemples, puiſque cela paroît ſuffiſant pour diriger les Praticiens à toutes les diverſes opérations qui peuvent avoir rapport à ce genre de ſociété. Soit donc, pour cet effet, la règle ſuivante.

Règle générale.

Si l'on propose un nombre quelconque, qui signifie le gain ou la perte, à distribuer entre plusieurs associés, savoir, relativement aux différentes sommes d'argent que chacun d'entr'eux a fournies pour un même intervalle de temps, il faut d'abord réunir en une somme chacune des sommes particulières d'argent que les associés ont fournies; en second lieu, il faudra opérer sur autant de règles de trois qu'il y a d'associés, & l'on dira: Si la somme générale de ce que chaque associé a fourni, donne pour gain ou pour perte le nombre proposé, combien donnera à proportion celle dont chaque particulier a contribué? Le quatrième terme de chaque proportion indiquera la quantité ou partie, soit de gain, soit de perte, qu'il faudra attribuer à chacun des associés.

Que si le nombre des associés s'accroît au point qu'il seroit trop laborieux de faire une règle de trois pour chacun d'entr'eux, il sera plus facile de construire une table semblable à celle dont on va faire usage dans l'exemple suivant; il y a encore une autre abréviation dont il sera parlé ci-après.

Supposons que trois cens hommes aient confié à une même caisse différentes sommes d'argent, en sorte que toutes ces sommes réunies fassent 2000000^{l}; supposons aussi que la caisse se soit trouvée vuide par l'évasion du Caissier, & que les fonds en aient passé chez l'Étranger; qu'enfin les intéressés aient leurs recours sur les biens du Caissier, & qu'en ayant fait l'état, ils ne recouvrent uniquement que 600000^{l}, l'on demande, en ce cas, ce qu'il doit revenir à chacun sur ces 600000^{l}, à proportion de la somme que chacun d'entr'eux aura avancée.

Il faut d'abord se servir de la règle de trois suivante: Si 2000000^{l} donnent 600000^{l}, à proportion combien 1^{l}? Le quatrième terme sera une fraction, savoir, $\frac{3}{10}$, & l'on s'en servira pour construire la table.

1[l] vaut $\frac{3}{10}$	20[l] valent 6[l]	200[l] valent 60[l]
2 ..... $\frac{6}{10}$	30 9	300 90
3 ..... $\frac{9}{10}$	40 ... 12	400 .. 120
4 .... $1\frac{2}{10}$	50 ... 15	500 .. 150
5 .... $1\frac{5}{10}$	60 ... 18	600 .. 180
6 .... $1\frac{8}{10}$	70 ... 21	700 .. 210
7 .... $2\frac{1}{10}$	80 ... 24	800 .. 240
8 .... $2\frac{4}{10}$	90 ... 27	900 .. 270
9 .... $2\frac{7}{10}$	100 ... 30	1000 .. 300
10 .... 3[l]		

2000[l] valent 600[l]	20000[l] valent 6000[l]
3000 900	30000 9000
4000 ... 1200	40000 ... 12000
5000 ... 1500	50000 ... 15000
6000 ... 1800	60000 ... 18000
7000 ... 2100	70000 ... 21000
8000 ... 2400	80000 ... 24000
9000 ... 2700	90000 ... 27000
10000 ... 3000	100000 ... 30000

L'usage de cette table est fort simple, puisque si l'un des associés, par exemple, a d'abord

d'abord contribué pour la ſomme de 35645^{l}, l'on trouvera dans la dernière table le nombre 30000^{l}, & l'on écrira à part le nombre qui lui répond, ſavoir, 9000^{l}; en ſecond lieu il faudra chercher ce qui répond à 5000^{l}, & les 1500^{l} qui lui répondent, ſeront écrites à part au deſſous du nombre que l'on y a déjà écrit; en troiſième lieu, on cherchera dans la table ce qui répond au nombre 600^{l}, & l'on écrira à part, au deſſous des deux nombres précédens, le nombre 180^{l}, qui lui répond; en quatrième lieu l'on cherchera dans la table le nombre 40^{l}, & l'on écrira, comme auparavant, ſon correſpondant 12^{l} au deſſous des autres nombres; enfin il reſte le nombre 5, lequel, dans la table, a pour correſpondant $1^{l}\frac{5}{10}$: écrivant donc celui-ci à part ſous les quatre précédens, l'on aura toutes les valeurs correſpondantes au nombre 35645^{l}; c'eſt pourquoi il ne reſte d'autres opérations à faire que d'ajoûter toutes les ſommes que l'on a écrites à part, & l'on trouvera que l'aſſocié, dont il eſt ici queſtion, ne doit recevoir que 10693^{l} 10^{ſ}.

9000 liv.	Total.
1500	$10693^{l}\frac{5}{10}$
180	
12	
$1\frac{5}{10}$	

Règle ſimple de Compagnie.

Premier Exemple.

Quatre Marchands ſont en ſociété pour un même temps ; le premier, que j'appelle *A*, a mis dans la caiſſe 2000^{l}, *B* a contribué de 1400^{l}, *C* de 2530^{l}, & enfin *D* de 820^{l} ; l'emploi de tout cet argent a donné pour gain 2600^{l}, l'on demande quelle eſt la part du gain qui revient à chaque Marchand.

Il faut d'abord ajoûter enſemble les différentes ſommes que chaque Marchand a fournies, & l'on trouvera 6750^{l} : en ſecond lieu, je dis, ſi 6750^{l} donnent 2600^{l}, c'eſt-à-dire le gain entier, à proportion combien donneront 2000^{l}, c'eſt-à-dire la ſomme qu'a fournie le premier Marchand *A* ! le quatrième terme donnera ſa part du gain, ſavoir, 770$^{l}\frac{2500}{6750}$: je dis encore, ſi 6750^{l} donnent 2600^{l}, combien 1400^{l}, c'eſt-à-dire la ſomme fournie par *B* ! & je trouve pour ſa part du gain 539$^{l}\frac{1750}{6750}$: je continue en diſant, ſi 6750^{l} donnent 2600^{l}, combien 2530, c'eſt-à-dire la ſomme dont le marchand *C* a contribué ? il revient pour ſa

part $974^{l}\frac{3500}{6750}$; enfin je finis, disant, si 6750^{l} donnent 2600^{l}, combien 820^{l}, qui est la somme fournie par le quatrième marchand *D.* l'on trouvera pour sa part du gain $315^{l}\frac{5750}{6750}$. La preuve que l'on aura opéré sans erreur sera évidente, si en a oûtant ces quatre gains particuliers en une somme, l'on en trouve le résultat conforme au gain total.

Ce calcul peut s'abréger, si l'on considère que les premier & second termes sont ici constans dans chaque règle de proportion ou règle de trois : l'on en parlera ci-après.

Deuxième Exemple.

Trois associés ont contribué chacun d'une somme pour leur négoce, savoir, le premier de $\frac{1}{4}$, le second des $\frac{2}{3}$, & le troisième de $\frac{1}{12}$, le gain a été de 3672^{l}, l'on demande quelle est la part du gain qui revient à chaque associé.

Je réduis d'abord les trois fractions à une même dénomination, choisissant pour cet effet le plus grand des trois dénominateurs, & je trouve $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{1}{12}$; ensuite j'ajoute ces mêmes fractions, & je trouve que leur somme est $\frac{12}{12}$. Présentement je dis, si $\frac{12}{12}$ donnent 3672 livres de gain, à proportion

combien $\frac{3}{12}$? le quatrième terme donnera 918^{l}, qui eſt la part du premier aſſocié; je continue diſant, ſi $\frac{12}{12}$ donnent 3672^{l}, combien $\frac{8}{12}$? l'on trouvera au quatrième terme 2448^{l}, ce qui ſera la part du ſecond aſſocié; enfin l'on dira, ſi $\frac{12}{12}$ donnent 3672, combien $\frac{1}{12}$? & l'on trouvera 306^{l} pour la part du gain dûe au troiſième aſſocié. Que ſi l'on additionne ces trois parts 918^{l}, 2448^{l}, & 306^{l}, leur ſomme étant égale au gain total, c'eſt une preuve que les calculs ſont exempts d'erreurs, & que l'on a parfaitement opéré.

L'opération abrégée dont on aura occaſion de parler tout-à-l'heure, ſuppoſe une autre manière de pratiquer la règle de trois.

Des Règles complexes de Sociétés ou *de Compagnies.*

Les règles complexes de ſociétés ſont celles qui diffèrent des précédentes, en ce que le temps écoulé n'eſt pas ſuppoſé le même, ni conſtant pour chaque aſſocié : ainſi le nombre propoſé pour gain ou pour perte, doit être diſtribué entr'eux, non ſeulement à raiſon des ſommes d'argent que chacun a fournies, mais encore à raiſon du temps écoulé, dont la diverſe durée entraîne une

variation néceſſaire dans l'intérêt de l'argent.

Quoiqu'il faudroit s'étendre ici ſucceſſivement ſur ce qui regarde les nombres entiers, rompus, &c. l'on ne s'arrêtera cependant qu'à une ſeule règle avec deux exemples, comme on vient de le pratiquer dans la règle ſimple de compagnie.

Règle générale.

S'il eſt néceſſaire de diſtribuer un nombre quelconque, lequel exprime le gain ou la perte, entre divers aſſociés, relativement aux ſommes qu'ils ont fournies & aux temps écoulés, il ſuffit de multiplier d'abord la ſomme de chaque aſſocié par le temps écoulé qui lui convient ; en ſecond lieu il faut additionner toutes ces ſommes, lorſqu'elles auront été multipliées par leurs temps homogènes; enfin l'on aura recours à la règle ſimple de trois, & l'on fera : Si la ſomme totale donne le gain ou la perte propoſée, combien la ſomme fournie par chaque aſſocié, multipliée par le temps qui lui convient, doit-elle donner ? l'on trouvera au quatrième terme de chaque opération la valeur que l'on cherche, c'eſt-à-dire la partie du gain ou de la perte qui conviendra à chaque aſſocié.

Premier Exemple.

Trois Marchands ont mis en ſociété différentes ſommes d'argent avec les circonſtances ſuivantes : le premier a fourni 12000^{l} depuis dix-huit mois ; le temps écoulé pour le ſecond qui a fourni 8000^{l} n'a été que de quinze mois ; enfin le dernier a contribué de 4800^{l} il y a vingt-quatre mois, il ſe trouve 6000^{l} de gain, l'on demande quelle eſt la part qui revient à chaque aſſocié.

D'abord ayant multiplié ſucceſſivement les ſommes qu'a fournies chaque aſſocié par les temps correſpondans, l'on trouve que le premier produit eſt 216000, le ſecond produit 120000, & le troiſième 115200.

En ſecond lieu additionnant ces trois produits, leur ſomme devient 451200^{l}.

Je dis donc pour le premier aſſocié : Si 451200^{l} donnent 6000 livres, combien 216000 ? le quatrième terme, qui eſt la part du gain appartenant au premier aſſocié, ſera $2872^{l}\frac{1536}{4512}$.

Pour le ſecond aſſocié : Si 451200^{l} donnent 6000^{l}, combien 120000^{l} ? le quatrième terme donnera la part du ſecond aſſocié, ſavoir, $1595^{l}\frac{3360}{4512}$.

Enfin pour le troisième associé, l'on fera : Si 451200 donnent 6000 livres, combien 115200? le quatrième terme $1531^{l}\frac{4128}{4512}$ sera la part du gain qu'il faut attribuer au troisième associé.

Pour vérifier tout ce calcul, l'on trouve d'abord que la somme des fractions qui dépendent de chaque gain particulier, forme précisément deux entiers; or les deux entiers joints aux trois parts ajoûtées, 2872^{l}, 1595^{l} & 1531^{l} donnent précisément la somme de 6000^{l}, d'où il s'ensuit qu'il n'y a pas d'erreur dans les calculs.

Au reste, il y a une manière plus abrégée de faire ces calculs, sur-tout quand le nombre des associés est très-grand. Les deux premiers termes de chaque proportion étant les mêmes à chaque opération, ces termes, dis-je, forment un rapport constant ; c'est pourquoi divisez l'antécédent 451200 par son conséquent 6000, le quotient sera $75\frac{1}{5}$; d'où l'on voit qu'il suffit de diviser le troisième terme de chaque proportion par $75\frac{1}{5}$ ou 75,2, & le quotient qui provient à chaque fois sera le quatrième terme que l'on cherche. Il vaut mieux pour lors se servir des décimales.

Si le nombre $75\frac{1}{5}$ n'étoit pas composé

d'un entier & d'une fraction, le calcul feroit beaucoup plus fimple. Dans les calculs par décimales ou par logarithmes, cette difficulté n'ayant plus lieu, l'opération eft plus expéditive.

Second Exemple.

Trois Marchands ont fait une fociété fous cette condition, que le premier contribueroit de $\frac{2}{7}$ en huit mois ou $\frac{2}{3}$ d'année, le fecond Marchand de $\frac{4}{7}$ pour $\frac{1}{4}$ d'année, & le troifième enfin de $\frac{1}{7}$ pour un mois, c'eft-à-dire pour $\frac{1}{12}$ d'année: le gain fe trouve de 3000^{l} l'on demande la part qui doit revenir à chaque affocié.

Je multiplie d'abord la fraction qui appartient à chaque affocié par le temps qui lui répond, ce qui donne pour chacun d'entr'eux les produits fuivans, favoir, $\frac{4}{21}$ pour le premier, $\frac{4}{28}$ pour le fecond, & pour le troifième $\frac{1}{84}$; enfuite j'ajoûte ces dernières fractions, les ayant réduites pour cet effet à même dénomination; ce qui, en réduifant la fomme aux moindres termes, donne $\frac{29}{84}$. Préfentement je dis : Si $\frac{29}{84}$ donnent 3000^{l}, combien $\frac{4}{21}$ donneront-ils pour le premier affocié? l'on trouve au quatrième terme,

c'eſt-à-dire pour la part qui lui revient, $1655^{l}\frac{5}{29}$. Je dis enſuite pour le ſecond aſſocié : Si $\frac{29}{84}$ donnent 3000^{l}, combien $\frac{4}{28}$? & l'on trouvera pour la part du ſecond aſſocié, $1241^{l}\frac{11}{29}$. Enfin je dis pour le troiſième aſſocié : Si $\frac{29}{84}$ donnent 3000^{l}, combien $\frac{1}{84}$? la part de ce dernier ſera $103^{l}\frac{13}{29}$. Il eſt viſible qu'en ajoûtant ces trois parts en une ſomme, c'eſt-à-dire les entiers avec leurs fractions, l'on doit trouver, ſi l'on a parfaitement bien opéré, cette dernière ſomme égale au gain de 3000^{l}.

REMARQUES.

I. Les deux premiers termes de ces règles de proportion étant conſtans, l'on ne doit pas négliger, ſi le nombre des aſſociés eſt grand, d'abréger l'opération de la manière dont on a averti aux exemples précédens.

II. Que ſi les temps ne ſont pas d'une même eſpèce, en ſorte que les uns contiennent des années, les autres des mois & des jours, il ne faut pas oublier de réduire d'abord tous ces temps à la plus petite eſpèce, afin de les rendre homogènes.

III. Soit que les fractions, qui expriment les ſommes dépoſées par chacun des aſſociés,

étant raſſemblées en une ſomme excèdent un entier, ou lui ſoient égales, ou enfin ne produiſent pas tout-à-fait un entier, il n'y aura dans tous ces cas aucun inconvénient à ſuivre les opérations que l'on vient d'indiquer.

IV. Les règles de compagnie ſimples ou complexes, n'ont pas beſoin d'être démontrées autrement que les règles ſimples de trois ou de proportion, puiſque toutes ces règles, comme on vient de l'expoſer, rentrent néceſſairement dans la règle générale.

De la Règle d'Alliage.

La règle d'*Alliage* eſt celle qui ſert à faire découvrir quelle eſt la valeur moyenne entre les diverſes valeurs des matières que l'on a mêlées enſemble. L'on diſtingue deux ſortes de règles d'alliages, celle d'*égalité*, lorſqu'il s'agit de matières qui ſont de différentes valeurs, mais que l'on a employées à mêmes nombres ou à meſures égales: l'autre règle qui eſt d'*inégalité*, ou règle d'alliage priſe dans le cas le plus général, a toûjours lieu quand les matières & les meſures ſont inégales & variables.

Règle d'Alliage de la première espèce, ou *Règle d'égalité.*

Si l'on propose plusieurs matières de differentes valeurs, mais répondant à des nombres égaux ou qui conviennent à une même mesure, pour trouver la valeur de chaque quantité numérique ou de chaque mesure, après avoir fait le mélange, il faut d'abord ajoûter en une somme les différentes valeurs de ces matières, & diviser ensuite cette somme par le nombre des matières que l'on a mêlées, le quotient sera la valeur que l'on cherche.

Premier Exemple.

Un Laboureur veut mêler quatre setiers de blé; la valeur du premier setier est 12^{l}, celle du second setier est 14^{l}, celle du troisième 15^{l}, enfin celle du quatrième est de 18^{l}, l'on demande quelle sera la valeur du setier après le mélange.

J'ajoûte d'abord les valeurs de chaque setier de blé en une somme, ce qui fait 59^{l}; ensuite je divise cette somme par le nombre des setiers, savoir, 4, le quotient 14^{l} 15^{s} sera la valeur du setier que l'on cherche.

Second Exemple.

Un Particulier possède mille louis de 24^{l} chacun, & il voudroit les changer à nombre égal en des monnoies de diverses espèces inférieures, telles que de 120^{f}, 60^{f} 24^{f} & 12^{f}, on demande combien il y en aura de chaque espèce.

L'on ajoûtera d'abord les valeurs de chaque espèce inférieure en une somme, savoir, dans l'exemple proposé 216^{f}; ensuite l'on divisera par cette somme de 216, le nombre de louis, que l'on aura eu soin de réduire auparavant en sols, ce qui fait 480000^{f}, & le quotient $2222\frac{2}{9}$ sera le nombre qui convient à chacune des espèces que l'on demande.

Règle d'Alliage d'inégalité.

Si l'on propose de faire un mélange de diverses matières qui ne sont pas de même valeur, & qui dépendent de valeurs numériques ou de mesures différentes, si ce mélange se fait suivant une proportion connue, l'on doit distinguer deux cas: le premier consiste à rechercher une valeur moyenne après le mélange que l'on aura fait de ces

matières ; le ſecond cas, d'un plus difficile accès, conſiſte à trouver combien l'on doit employer de chaque eſpèce pour vendre une certaine quantité de cette matière mêlée à un prix dont on ſera convenu. Soient, pour cet effet, les deux exemples ſuivans.

PREMIER CAS.

Un Commiſſionnaire a acquis trois différentes eſpèces de vins de valeurs différentes, & a fait un mélange de quatre meſures de la première eſpèce, en ſorte que la valeur d'une de ces meſures étoit avant le mélange de 40^{l}; il a fait pareillement le mélange avec ſix meſures de la ſeconde eſpèce, dont la meſure de chacune étoit évaluée à 32^{l}; enfin trois meſures de la troiſième eſpèce ont été mélangées, & chaque meſure valoit auparavant 50^{l} : l'on demande quelle eſt la valeur de chaque meſure après tous ces mélanges. D'abord je multiplie le nombre des meſures de chaque eſpèce par ſa valeur primitive, multipliant, par exemple, quatre meſures de la première eſpèce par la valeur 40^{l}, ce qui produit 160 : pareillement je multiplie ſix meſures de la ſeconde eſpèce par la valeur 32^{l}, & le produit eſt 192 ;

enfin multipliant trois mesures de la troisième espèce par la valeur 50^{l}, l'on trouve au produit 150 : il faut en second lieu réunir en une somme ces produits, & l'on trouve dans l'exemple que l'on propose ici, 502 ; divisez cette somme des trois produits par la somme de toutes les mesures, savoir, par 13 dans notre exemple, & le quotient $38^{l}\ 12^{f}\ 3^{d}\ \frac{9}{13}$ sera la valeur de chaque mesure, après le mélange fait.

Autre Exemple.

L'on a fondu chez un Orfèvre 60 marcs d'argent de différens titres, savoir, 32 marcs à 11 deniers, 20 marcs à 11 deniers 12 grains, & enfin 8 marcs à 10 deniers 12 grains, l'on demande à quel titre doit être ce mélange après la fusion. Comme le marc contient 12 deniers, & que le denier contient 24 grains, l'on réduira les valeurs ci-dessus en grains, n'oubliant pas de multiplier chacune séparément par 32, 20 & 8, & l'on ajoûtera les trois produits, dont la somme sera 15984, laquelle divisée par 60, donnera au quotient 11 deniers 2 grains $\frac{2}{5}$, valeur de $266\frac{2}{5}$ grains. L'argent le plus fin, comme l'on sait, est à 12 deniers.

SECOND CAS.

Un Orfèvre s'eſt chargé de faire un vaſe d'argent qui doit peſer 40 marcs, ſous cette condition, que le prix du marc ſera de 25^{l}, l'on ſuppoſe que l'Orfèvre n'ait point d'argent en lingot à ce titre, mais qu'il ait des lingots de trois titres différens, ſavoir, en premier lieu, dont le titre ſoit 22^{l} le marc, un autre de 28^{l} le marc, & enfin un argent d'un titre plus fin, à 30^{l} le marc, l'on demande combien de marcs l'Orfèvre doit mêler, de chaque lingot de différens titres pour parvenir au but qu'il s'eſt propoſé.

D'abord je diſpoſe les valeurs du marc de chaque eſpèce en une même colonne, comme s'il falloit faire une addition & les réunir en une ſomme; j'arrange donc, pour cet effet, de haut en bas ces trois valeurs, 30, 28 & 22; enſuite j'écris à côté de cette colonne le prix convenu du marc d'argent, lequel eſt ici 25^{l}; en ſecond lieu je cherche la différence entre ce prix convenu 25, & celui du plus haut titre de l'argent qu'on doit employer, ſavoir 30, & j'écris la différence 5 vis-à-vis la plus

$$\begin{array}{c|c} 30 & \\ 28 & 25 \\ 22 & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 5+3 \end{array} \right.$$

petite valeur du marc, ſavoir, 22 ; j'écris au contraire la différence de la plus petite valeur de l'argent, c'eſt-à-dire la différence 3 de celui qui eſt au plus bas titre 22, avec 25, vis-à-vis le nombre 30, qui indique le plus haut titre ; enfin j'écris la différence de 28[l] à 25[l], ſavoir, 3, vis-à-vis 22, titre le plus bas, de même que la différence 3 de celui-ci à 25, vis-à-vis la valeur de 28[l] : en troiſième lieu raſſemblant toutes ces différences en une ſomme, cela produit 14; ceci ſuppoſé, il eſt clair que s'il n'étoit queſtion que de faire un vaſe d'argent du poids de 14 marcs, l'on auroit déjà exécuté ce que l'on cherche, c'eſt-à-dire qu'il ſuffiroit de mêler trois marcs de l'argent du plus haut titre, trois du titre intermédiaire, & huit marcs de l'argent du plus bas titre: mais parce que l'on propoſe de fournir un vaſe du poids de 40 marcs, il faudra donc avoir recours ici à trois règles de proportions ſimples & directes ; c'eſt pourquoi je dis en premier lieu, ſi 14 répondent à 3, valeur qui a rapport au plus haut titre, à proportion que doivent donner 40 ? Semblablement, ſi 14 répondent à 3, valeur qui a rapport au titre intermédiaire 28, à proportion 40 ? Enfin je dis, ſi 14 répondent

répondent à 8, valeur du plus bas titre, à proportion 40? l'on trouvera au quatrième terme de la première règle de trois, 8 marcs $\frac{4}{7}$; de même au quatrième terme de la seconde règle, 8 marcs $\frac{4}{7}$, & au quatrième terme de la dernière règle de trois, 22 marcs $\frac{6}{7}$, ce qui donne en tout 40 marcs : telles sont les trois valeurs de l'argent de chaque titre, qui conviennent à l'emploi que l'Orfèvre doit en faire, afin que le vase qui sortira de la fonte, pèse 40 livres, à raison de 25[l] le marc.

Remarquez que s'il se trouvoit plus de trois lingots de différens titres, il faudroit constamment écrire dans tous les cas la différence du plus haut titre à celui qui est proposé, au bas de la colonne, vis-à-vis le plus bas titre; & s'il y a plus de titres au dessus de celui qui est proposé, qu'il n'y en a au dessous, il faudra, comme il a été déjà prescrit, écrire les différences ou excès des plus hauts titres vis-à-vis les plus bas, & semblablement les différences des plus bas titres vis-à-vis les plus hauts. Pour mieux entendre cette règle, on peut la pratiquer en prenant les valeurs deux à deux, s'ils sont pairs, ou bien joindre celui qui reste, s'ils sont impairs, avec un *moindre*, lorsqu'il est plus grand que le prix

moyen de l'alliage que l'on propose; & au contraire, avec un *plus grand*, s'il est moindre.

La raison du procédé que l'on a suivi dans les deux exemples de la règle d'égalité, est fondée sur ce qu'après le mélange, le total doit valoir autant que chacune des espèces prises avant ce mélange: or puisque l'on a proposé nombre égal ou même mesure de matières, il s'ensuit que la valeur totale des matières mêlées doit être uniquement divisée par leur nombre, afin d'en déduire ce que l'on cherche. Pour parler enfin le langage des Mathématiciens, il suffit de considérer que le problème est déterminé, & qu'il n'a qu'une solution dans le cas de la règle d'égalité, mais qu'il y a plusieurs solutions dans la règle d'inégalité, sur-tout s'il se trouve plus de deux espèces qui entrent dans le mélange.

Comme il s'agit de donner ici la raison de ce qui vient d'être prescrit pour pratiquer la règle d'inégalité du second cas, l'on y remarque d'abord que, plaçant la différence qui se trouve entre la plus grande valeur & la proposée, vis-à-vis la plus petite valeur, comme en revanche la différence de celle-ci à la proposée, vis-à-vis la plus grande valeur, c'est produire par leur mélange un tout dont

les mesures équivallent à la valeur proposée: en effet, l'on ôte de chaque espèce supérieure des quantités, désignées par ces différences, pour faire le mélange; mais l'on a soin d'y ajoûter autant à l'aide des quantités inférieures, en sorte que l'Orfèvre venant à perdre en employant les matières de la plus grande valeur, il gagne au contraire en employant celles des moindres valeurs. Ceci est vrai d'abord quant aux mélanges des matières que l'on employeroit uniquement d'après ce que donne la somme de ces différences: à l'égard des règles de trois ou de proportion qui restent à faire ensuite pour chaque espèce, l'on en sent la nécessité, puisqu'il n'arrivera que dans un cas bien rare, que le nombre total, qui résulte de l'addition des différences, sera précisément le nombre proposé. Il est donc nécessaire dans tous les cas, excepté celui-là, de découvrir des nombres, qui seront au nombre proposé, en même raison que chacune des différences, est à la somme totale de ces différences.

Autres manières de disposer les valeurs dans la règle d'inégalité.

L'on propose de l'argent à 18^{l}, 20^{l},

26[l], 28[l] & 30[l] le marc, & l'on demande 280 marcs de vaiſſelle d'argent à 24[l] le marc : il faut ſéparer ces divers titres de l'argent deux à deux, comme il a déjà été preſcrit.

1.er lingot	18	×	6	différence de	30	à 24
5.e lingot	30		6	. . . . .	18	à 24
2.e lingot	20	×	4	différence de	28	à 24
4.e lingot	28		4	. . . . .	20	à 24
3.e lingot	26	×	4	différence de	20	à 24
2.e lingot	20		2	. . . . .	26	à 24

Somme des différences...26

Ces différences ſont les numérateurs des quantités qui ont un dénominateur commun, de manière que ſi l'on ne demandoit que 26 marcs d'argent à 24[l], il faudroit que l'Orfèvre fît fondre 6 marcs à 18[l], 6 marcs à 30[l], & pareillement 4 marcs à 20[l], 4 marcs à 28[l], enfin 4 marcs à 26[l], 2 marcs à 20[l] ; donc en proportion inverſe l'on fera :

26 : 6 : : 280 ! $64\frac{8}{13}$
26 : 6 : : 280 ! $64\frac{8}{13}$
26 : 4 : : 280 ! $43\frac{1}{13}$
26 : 4 : : 280 ! $43\frac{1}{13}$
26 : 4 : : 280 ! $43\frac{1}{13}$
26 : 2 : : 280 ! $21\frac{7}{13}$

La ſomme totale...280 marcs.

Des Règles de fausse Position.

L'on nomme *règle de fausse position*, celle qui suppose l'emploi d'un ou deux nombres que l'on adopte uniquement à dessein de découvrir celui qui est assujéti à certaines conditions. Ainsi l'on distingue deux sortes de ces règles; celle qui est simple, parce qu'elle ne suppose qu'un seul de ces nombres, & celle qui est complexe, puisqu'il y faut supposer deux différens nombres pour découvrir celui que l'on cherche. Cette dernière est d'un grand usage dans le calcul de l'orbite des comètes.

Règle simple de fausse position.

Si l'on propose de trouver un nombre qui dépende d'un genre de conditions, il faudra choisir en premier lieu un autre quelconque à volonté: en second lieu l'on examinera si ce dernier nombre satisfait à la question proposée; car s'il ne remplit pas exactement toutes les conditions, il sera facile d'y parvenir à l'aide d'une simple règle de proportion.

Premier Exemple.

Un Citoyen achette, pour le prix de 20000^{l}, un carrosse, deux chevaux & une

maiſon ayant un jardin, avec cette condition que la valeur des chevaux ſera double de celle du carroſſe, celle du jardin triple de celle des chevaux, enfin celle de la maiſon égale à ſix fois la valeur du jardin, l'on demande quelle eſt la valeur de chaque choſe. On voit d'abord que s'il eſt poſſible de découvrir le prix du carroſſe, par exemple, le reſte ſera facilement connu.

C'eſt pourquoi je commence par la plus petite valeur, c'eſt-à-dire par le prix du carroſſe, que je fixe, par une fauſſe ſuppoſition, à 100^{l}, d'où il s'enſuivroit, ſelon les conditions précédentes, que la valeur des chevaux ſeroit 200^{l}, celle du jardin 600^{l}, & enfin celle de la maiſon 3600^{l}; mais ces quatre ſommes réunies ne donnent pour ſomme totale que 4500^{l}, au lieu que l'on devroit trouver 20000^{l}, ſi la ſuppoſition eût été exacte.

L'on ſe ſervira, en ſecond lieu, de la proportion ſimple & directe, & l'on dira, ſi 4500^{l} répondent à 100^{l}, valeur ſuppoſée du carroſſe, à combien répondront 20000^{l}? l'on aura au quatrième terme $444^{l}\ \frac{4}{9}$ pour la vraie valeur du carroſſe: or, en doublant, celle des chevaux ſera $888^{l}\ \frac{8}{9}$;

celle du jardin, en triplant la dernière, sera de $2666^{l}\frac{2}{3}$, & multipliant cette valeur-ci par 6, la maison vaudra 16000^{l}. La preuve que ces dernières valeurs sont exactes est fondée sur ce que ces quatre sommes réunies donnent précisément 20000^{l}; ainsi l'opération précédente est bien faite, & la question proposée est résolue entièrement.

Second Exemple.

L'on demande quel est le nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ & les $\frac{2}{7}$ font 60.

Je multiplie d'abord successivement tous les dénominateurs, ce qui produit ici le nombre 84; le $\frac{1}{3}$ est 28, le $\frac{1}{4}$ est 21, & les $\frac{2}{7}$ font 24, ajoûtant ces trois valeurs ensemble, la somme est 73, nombre qui excède celui que l'on cherche, puisqu'on ne devroit trouver que 60.

Je dis donc, en second lieu, si 73 répondent à 84, à combien 60 doivent-ils répondre? je trouve au quatrième terme $69\frac{3}{73}$, ce qui sera le véritable nombre que l'on cherche. En effet, le $\frac{1}{3}$ de ce nombre est $23\frac{1}{73}$, le $\frac{1}{4}$ est $17\frac{19}{73} = 17\frac{73}{292} + \frac{3}{292}$, en un mot les $\frac{2}{7}$ font $19\frac{53}{73}$, ce qui réuni en une somme, donne exactement 60.

Règle de fausse Position complexe.

L'on choisira d'abord un nombre à volonté, comme cela s'est pratiqué dans la règle précédente, afin de lui appliquer toutes les conditions de la question proposée; que si ce nombre ne satisfait pas à la question, l'on doit faire attention si c'est par excès ou par défaut; dans l'un & l'autre cas, il faudra l'écrire à part, mais avec le signe d'excès ou de défaut : ces signes sont, comme il a été dit ci-devant *(page 126)*, ainsi désignés, > ou <, c'est-à-dire pour l'excès & pour le défaut.

Il faut, en second lieu, choisir encore à volonté un autre nombre, afin de lui appliquer pareillement toutes les conditions de la question proposée; que si celui-ci ne satisfait pas non plus à la question, on l'écrira de même à part sous le premier nombre, avec le signe d'excès ou de défaut, & après ces signes il faudra marquer les différences d'avec les nombres que l'on a supposés.

En troisième lieu, l'on examinera si les signes qui sont appliqués à ces différences sont semblables ou s'ils sont différens; dans le premier cas, l'on multipliera le nombre

que l'on a adopté le premier par la ſeconde différence, & encore le nombre que l'on a adopté le ſecond par la première différence: l'on retranchera le plus petit produit du plus grand, & l'on écrira le reſte à part. L'on ſouſtraira auſſi la plus petite des deux différences de la plus grande, & l'on diviſera par ce qui reſte l'autre reſte que l'on vient d'écrire à part. Quand les ſignes ne ſont pas ſemblables, ce qui arrive dans le ſecond cas, l'on doit commencer par multiplier en croix les deux nombres que l'on a ſuppoſés, par les différences, & l'on réunira leurs produits en une ſomme: l'on formera pareillement une ſomme des deux différences, & l'on diviſera enfin la plus grande ſomme par la plus petite, pour en conclurre un quotient qui ſera le nombre que l'on cherche.

Premier Exemple.

Trois bourgeois de Londres ont chacun ſéparément une ſomme de guinées à placer, le premier & le ſecond mettent enſemble 60 guinées, le ſecond & le troiſième en réuniſſent 120, enfin le troiſième & le premier ne mettent enſemble que 100 guinées, l'on demande quel eſt le nombre de

guinées qu'a dû proposer chaque associé.

La guinée est une pièce d'or qui vaut tant soit peu plus que notre louis d'or, mais l'on n'y fait aucune distinction dans l'échange, aussi-tôt qu'elle facilite le commerce dans la plusspart de nos ports de mer. Les Anglois comptent ces guinées au nombre de 20 pour faire 21 livres sterlings.

Soit d'abord supposé que le premier des associés ait fourni 10 guinées, il s'ensuivroit donc de la supposition première, que le second associé en auroit fourni 50, puisque les deux sommes doivent former 60 guinées: or, par la même raison, le troisième associé en auroit fourni 70, afin que la somme du second & du troisième puisse former 120; mais l'on ne trouve plus ici que 80 guinées pour les sommes fournies par le premier & le troisième, au lieu que l'on devroit trouver 100 guinées: il y a donc ici un défaut de 20 guinées, ce qu'il faut écrire à part comme il suit.... 10 < 20.

En second lieu, supposons que le premier des associés ait fourni 15 guinées, il s'ensuivroit que le second associé en auroit donné 45, & le troisième associé 75; mais 75 & 15 ne forment, étant réunies, que 90

guinées, au lieu que l'on en doit trouver 100. Il faudra donc écrire au dessous du nombre 10, que l'on a d'abord supposé, celui-ci 15, lequel a été supposé pour la seconde fois; & semblablement au dessous de la première différence 20, l'on écrira la seconde différence 10, sans oublier son signe, qui est encore cette fois-ci le signe < ou du défaut..... $\left\{\begin{array}{l} 10 < 20 \\ 15 < 10 \end{array}\right.$

En troisième lieu, puisque les différences, qui se trouvent avec les signes, sont ici semblables; puisque ces signes sont les mêmes, il faut en ce cas multiplier le nombre 10 que l'on a d'abord supposé, par la seconde différence 10, ce qui donne 100 au produit: l'on multipliera pareillement le nombre 15, que l'on a supposé la seconde fois, par la première différence 20, ce qui donne 300 au produit; présentement j'ôte le plus petit produit 100 du plus grand 300, & j'écris à part le reste 200; j'ôte aussi la plus petite différence 10, de la plus grande 20, & par ce qui reste, savoir, 10, je divise le plus grand reste 200; or le quotient est 20, c'est-à-dire que le premier associé a dû contribuer de 20 guinées, & partant le

ſecond aſſocié de 40, enfin le troiſième aſſocié aura fourni pour ſa part 80 guinées. La preuve en eſt facile à apercevoir, ces trois nombres 20, 40 & 80 ſatisfaiſant pleinement aux conditions de la queſtion propoſée.

Second Exemple.

La ſomme des âges de deux fils & de leur père eſt de 160 ans, mais ils ne revèlent autre choſe, ſinon que le premier eſt de 9 ans plus âgé que l'autre, & que l'âge du troiſième excède de 4 ans les âges des deux premiers réunis enſemble: l'on demande quel âge doit avoir chacun d'entr'eux.

I. Soit ſuppoſé d'abord l'âge du premier des trois, de 10 ans, l'on auroit donc 19 ans pour l'âge du ſecond, & 33 ans pour l'âge du troiſième, ce qui étant ajoûté ne donne que 62 ans, au lieu de 160 ans que l'on doit trouver, ainſi il y a une différence de 98 ans; c'eſt pourquoi l'on écrira à part le nombre 10, que l'on a d'abord ſuppoſé, avec la différence en défaut de 98.

II. Soit encore ſuppoſé, pour la ſeconde fois, l'âge du premier de 40 ans, l'âge du ſecond ſeroit en ce cas de 49 ans, & partant l'âge du troiſième devroit être, ſur ce

pied, de 93 ans; mais puisque 40, 49 & 93 ajoûtés ensemble, donnent 182 ans, au lieu qu'on ne doit trouver que 160 ans, il y a ici une différence en excès de 22 ans; c'est pourquoi l'on écrira à part, au dessous du nombre 10 qui a été d'abord supposé, le nombre 40 que l'on vient de supposer pour la seconde fois, de même qu'au dessous de la différence en *défaut* 98, celle qu'on vient de trouver de 22 en *excès:* l'on n'oubliera pas de mettre au devant de celle-ci le signe de l'excès, au lieu que c'est le signe de défaut qu'il faut mettre au devant de celle-là.

$$10 < 98$$
$$40 > 22$$

III. Je multiplie présentement le nombre 10 qui a été supposé le premier, par la seconde différence 22, ce qui donne au produit 220 : multipliant de même le second nombre 40 par la première différence 98, le produit est 3920.

IV. Les différences n'ayant pas les mêmes signes, l'on doit en ce cas réunir en une somme les deux produits qu'on vient de trouver, ce qui fait 4140 : semblablement la somme des deux différences, 98 & 22, sera 120; enfin je divise la plus grande somme 4140 par la plus petite 120, &

parce que le quotient eſt $34\frac{1}{2}$, ce ſera l'âge du premier des deux fils ; l'autre aura par conſéquent $43\frac{1}{2}$ ans, & enfin l'âge du père ſera 82 ans. Il eſt évident que ces trois derniers âges ſatisfont pleinement aux termes de la queſtion propoſée, & il ne reſte plus deſormais qu'à rendre raiſon des opérations que l'on vient de faire ſur ces règles de fauſſe poſition.

L'on n'inſiſtera pas ici ſur la règle ſimple de fauſſe poſition, dont il eſt ſi facile d'apercevoir la vraie raiſon, lorſqu'on a une idée exacte de la nature des proportions ; car il n'y a aucune difficulté pour le premier exemple. Mais l'on n'a ſongé qu'à choiſir, dans le ſecond exemple, un nombre tel que l'on en puiſſe aiſément prendre le tiers, le quart & les deux ſeptièmes ; car c'eſt à quoi a dû conduire néceſſairement l'opération que l'on a faite, de multiplier ſucceſſivement l'un par l'autre les dénominateurs des fractions propoſées : ainſi il eſt facile de trouver enſuite, par une ſimple règle de trois, le véritable nombre que l'on cherche,

A l'égard de la règle de deux fauſſes poſitions, dont l'uſage eſt très-étendu, il faudroit entreprendre de démontrer ici les deux cas qui dépendent, ſoit de ſignes ſemblables,

ſoit de différens ſignes, ce qu'il eſt plus facile de concevoir par un long & fréquent uſage que de déduire ici ces démonſtrations d'une manière diffuſe & abſtraite *: au reſte l'on aura occaſion de revenir ſur ces queſtions, lorſqu'on propoſera de les réſoudre par l'algèbre; les opérations analytiques étant la route la plus fréquentée, & pour l'ordinaire la plus prompte pour parvenir à ces ſolutions de problèmes arithmétiques.

* Deſchales, *Cours de Mathématique, tome I.*

QUATRIÈME PARTIE.

Des puiſſances des Nombres & de l'extraction de leurs racines.

L'ON diſtingue pluſieurs puiſſances des nombres, mais elles ſe réduiſent toutes à certains produits de ces mêmes nombres; c'eſt pour cela que la première puiſſance d'un nombre eſt le produit qui naît de la multiplication de ce même nombre par l'unité, ce qui n'eſt autre choſe que ce nombre conſidéré en lui-même, tel qu'il étoit avant que d'être multiplié.

La deuxième puiſſance eſt le produit

qui naît de la multiplication d'un nombre quelconque par lui-même, tel qu'eſt, par exemple, le produit 16: ce produit eſt en effet la deuxième puiſſance de 4, parce que multipliant 4 par lui-même, l'on trouve le produit 16; l'on nomme cette deuxième puiſſance un *quarré.*

La troiſième puiſſance n'eſt autre choſe que la ſeconde puiſſance multipliée par la première puiſſance, telle qu'eſt, par exemple, le produit 64, qu'on doit regarder comme la troiſième puiſſance du nombre 4: en effet, ſi l'on multiplie la ſeconde puiſſance 16 de ce nombre par la première puiſſance 4, le produit ſera 64; l'on nomme cette troiſième puiſſance le *cube.*

La quatrième puiſſance n'eſt pareillement autre choſe que la troiſième puiſſance multipliée par la première, comme auſſi la cinquième puiſſance doit naître du produit de la quatrième puiſſance par la première, & ainſi de ſuite à l'infini.

La racine d'un nombre propoſé eſt au contraire le nombre qui, multiplié par lui-même, donne la ſeconde puiſſance, ou bien qui, multipliant la ſeconde puiſſance, donne naiſſance à la troiſième puiſſance, & ainſi de ſuite.

L'on

L'on voit clairement par-là que la *racine quarrée* n'eſt autre choſe que le nombre qui, multiplié par lui-même, a dû produire la ſeconde puiſſance, & qu'ainſi 4 eſt la racine quarrée du nombre 16 : ſemblablement la *racine cubique* eſt le nombre qui, multipliant la ſeconde puiſſance, dont il eſt déjà la racine, a dû produire la troiſième puiſſance ; ainſi 4 eſt la racine cubique de 64, parce qu'auſſi-tôt qu'il multiplie ſon quarré 16, le produit 64 devient le cube de 4.

Il n'y a plus de difficulté préſentement à entendre ces mots, *extraire la racine quarrée* ou *la racine cube*, puiſque l'on n'y propoſe autre choſe que de découvrir un nombre, lequel multiplié par lui-même produiſe le quarré propoſé, ou bien qui multipliant ſon quarré produiſe le cube propoſé.

Il eſt évident qu'il doit y avoir encore autant de racines & de méthodes d'extraire les racines, qu'il y a de puiſſances différentes des nombres ; mais parce qu'à l'exception des racines quarrées & cubiques, l'on a très-rarement beſoin des autres racines, & qu'elles ſont, pour ainſi dire, étrangères à notre objet, l'on ſe bornera ici à expliquer les méthodes d'extraire les deux premières racines.

Manière d'extraire la racine quarrée.

PRÉPARATION.

Puiſqu'un nombre quarré quelconque eſt un produit d'un nombre multiplié par lui-même, l'on en doit d'abord conclurre qu'il y a fort peu de nombres qui ſoient des quarrés parfaits. La raiſon en eſt ſimple, puiſqu'il ne ſauroit y avoir qu'un très-petit nombre de chiffres qui aient cette condition, & que tant d'autres ne ſont pas en effet le produit de chiffres, tels que ceux-ci, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, &c. qu'on auroit multipliés par eux-mêmes. Quand donc l'on propoſe d'extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque, l'on ne propoſe en effet que de découvrir un nombre qui, multiplié par lui-même, doit réproduire celui qui eſt propoſé, dans la ſuppoſition que celui-ci ſoit un quarré parfait, ou ſeulement de découvrir un nombre qui, multiplié par lui-même, produiſe le quarré parfait qui eſt immédiatement au deſſous, & non pas le plus approchant du nombre propoſé, puiſque cela pourroit convenir au quarré parfait qui eſt immédiatement au deſſus.

Mais afin de faciliter l'extraction des racines quarrées des nombres quelconques, l'on va donner ici une liste de tous les nombres parfaitement quarrés, dont les racines n'ont qu'un seul chiffre. Il y a des tables générales des quarrés & cubes parfaits, imprimées dans l'algèbre du P. Prestet & ailleurs, mais dont l'étendue devroit être moins limitée.

Nombres quarrés.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100.

Racines.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Dans cette liste l'on voit d'abord que 1 est la racine du quarré 1, & que 2 est la racine quarrée de 4, les nombres 4, 9, 16, 25, &c. étant les quarrés dont les racines sont 2, 3, 4, 5, &c. l'on voit aussi très-clairement que tout nombre composé de deux caractères, n'a qu'un seul caractère à sa racine; d'où il doit s'ensuivre que tout nombre exprimé par trois ou quatre caractères, ne sauroit avoir à sa racine deux caractères seulement, mais qu'il en aura trois, s'il est exprimé par cinq ou six caractères, & ainsi de suite.

Règle générale.

I. Soit propoſé un nombre dont on doit découvrir la racine quarrée, il faut d'abord le ſéparer par des traits de deux en deux, en commençant par la droite & continuant vers la gauche, en ſorte qu'il n'y reſte qu'un ou deux chiffres, ſelon que le nombre propoſé ſera impair ou pair : cela s'appelle le diviſer par tranches.

II. Cette ſéparation faite, l'on opérera, en ſecond lieu, ſur le chiffre ou les deux chiffres qui ſont à gauche, ce qu'on nomme ordinairement *la première tranche*, & l'on en cherchera ou la vraie racine; ou bien, s'il ne repréſente pas un quarré parfait, l'on cherchera par la table précédente la racine du quarré qui eſt immédiatement au deſſous, & on l'écrira à part, comme ſi c'étoit le quotient d'une diviſion : on doit remarquer qu'il y aura autant de chiffres à la racine qu'il y aura de tranches, de ſorte que l'on y marquera autant de points.

III. Il faut quarrer la racine que l'on a déjà écrite, c'eſt-à-dire qu'il faut multiplier ce chiffre par lui-même, & ſouſtraire le produit de la quantité qui ſe trouve dans la

première tranche à gauche, & l'on écrira le reſte au deſſus, comme cela s'eſt pratiqué pour la diviſion, dans la première partie de ce Traité.

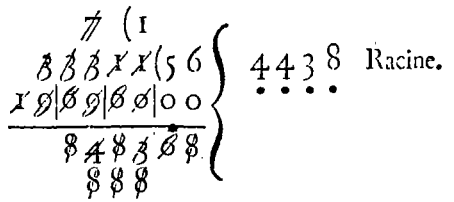
IV. On procédera à la tranche ſuivante pour trouver le chiffre correſpondant à la racine, ce qui ſe pratique comme il ſuit : d'abord on doublera le caractère déjà écrit à la racine, & ſi le produit eſt de deux caractères, l'on écrira le dernier ſous le premier caractère de la ſeconde tranche, & l'autre ſous le dernier caractère de la première tranche, c'eſt-à-dire, en avançant d'un pas vers la gauche ; enſuite l'on cherchera combien de fois celui des caractères qui eſt écrit à gauche, eſt contenu, ſoit dans celui qui eſt au deſſus, ſoit dans les deux qui lui correſpondent, le quotient ſera le ſecond chiffre qu'il faut écrire à la racine au deſſus du ſecond point; mais il eſt à obſerver que ce même quotient doit être écrit en même temps ſous le ſecond caractère de la ſeconde tranche. Après ces préparations, l'on multipliera, par cette ſeconde racine, tous les caractères qui ſont au deſſous des tranches, n'oubliant pas de les retrancher à meſure des chiffres qui ſont au deſſus, & qui leur correſpondent; enfin l'on

écrira plus haut le reste, chaque fois qu'il s'en trouve, comme on l'a pratiqué au sujet de la division.

V. On passera à la troisième tranche, & prenant le double des racines déjà trouvées, l'on en écrira le produit au dessous de cette troisième tranche, en sorte que le dernier caractère à droite soit au dessous du premier caractère de cette tranche, & les autres en avançant vers la gauche; ensuite l'on cherchera combien le premier des caractères que l'on vient d'écrire au dessous, est contenu de fois, soit dans le chiffre supérieur, soit dans les deux chiffres supérieurs qui lui sont correspondans, & l'on en écrira le quotient au dessus du troisième point à la racine, de même qu'à la suite des caractères qui sont sous les tranches: il faudra multiplier ce troisième chiffre qu'on vient d'écrire à la racine, par ceux qui sont au dessous des tranches, & en retrancher les produits, à mesure qu'ils naissent, des chiffres supérieurs qui leur sont correspondans; enfin l'on remettra encore par-dessus, ce qui reste après la soustraction de ces produits, & l'on continuera successivement de la même manière, doublant à chaque fois les chiffres écrits à la racine, pour en faire

autant de diviſeurs, & ne ceſſant qu'après avoir opéré ſur toutes les tranches.

Soit, par exemple, ce nombre-ci, 19696000, dont il faut trouver, ou la vraie racine quarrée, ou du moins celle du quarré parfait, qui doit être immédiatement au deſſous de ce nombre.



I. On commencera par la droite à ſéparer ce nombre en tranches, & parce qu'il y a huit chiffres, c'eſt-à-dire un nombre pair, il y aura donc quatre tranches complètes; ainſi l'on marquera quatre points à la racine, de la même manière que s'il s'agiſſoit d'écrire un quotient.

II. On cherchera enſuite la racine du quarré parfait 16, qui eſt de tous les quarrés parfaits au deſſous, le plus approchant des deux chiffres 19, leſquels ſe trouvent dans la première tranche à gauche; & puiſque cette racine eſt 4, on l'écrira au deſſus du premier point à la racine; le quarré de cette racine 4 étant

donc 16, il faut ſouſtraire ce quarré ou produit de 4 par 4, de 19, & barrant les deux chiffres de la première tranche, l'on écrira le reſte 3 au deſſus du dernier chiffre 9.

III. Avant que de paſſer à la ſeconde tranche, je double la racine 4, & j'écris le produit 8 immédiatement au deſſous du premier chiffre de la ſeconde tranche, c'eſt-à dire au deſſous de 6 : celui-ci, avec trois dixaines qui le précèdent, forme 36, ce qui étant diviſé par le nombre 8 qui leur correſpond au deſſous, le quotient eſt 4; mais il faut prendre garde, avant que d'écrire ce quotient au deſſus du ſecond point à la racine, qu'il ne ſoit trop grand d'une ou de deux unités, ce qui arrivera quand les produits de tous les caractères excéderont les chiffres correſpondans qui ſont au deſſus, & dont il faut les ſouſtraire : ce cas n'ayant pas lieu, & le quotient 4 étant poſſible ici, on écrira 4, non ſeulement au ſecond chiffre à la racine, mais encore au deſſous du ſecond chiffre de la ſeconde tranche, c'eſt-à-dire, au deſſous de 9, dans l'exemple que l'on donne ici : il reſte à multiplier ce ſecond chiffre 4 de la racine par le diviſeur 84, qui eſt au deſſous des tranches, & à en

ſouſtraire les produits des chiffres ſupérieurs & correſpondans 369, préciſément comme cela ſe pratique dans les règles ordinaires de la diviſion, ce qui étant fait, & ayant barré les chiffres, l'on écrira au deſſus le reſte 33.

IV. On procédera de même à la troiſième tranche, commençant par doubler les deux chiffres déjà trouvés à la racine, ce qui donne 88, & écrivant ceux-ci au deſſous des tranches, de manière que le dernier caractère ſoit au deſſous du premier caractère de la troiſième tranche, & l'autre en avançant vers la gauche; alors il faut demander combien le premier de ces deux chiffres 8, eſt contenu de fois dans les chiffres correſpondans 33, qui ſe trouvent au deſſus : or quoique 8 y ſoit contenu quatre fois, l'on trouve cependant, après l'eſſai dont on a parlé ci-deſſus, qu'il ne faut écrire que le quotient 3 à la racine; ainſi l'on écrira 3 non ſeulement au deſſus du troiſième point à la racine, mais encore au deſſous du ſecond caractère de la troiſième tranche; multipliant enſuite par cette nouvelle racine 3, les caractères qui ſont au deſſous des tranches, & ſouſtrayant à meſure chaque produit des chiffres correſpondans, qui ſont au deſſus, l'on barrera les chiffres, & le reſte

711 doit être écrit encore au dessus.

V. L'on doublera les trois racines déjà trouvées, ce qui produit 886 qu'il faut écrire au dessous des tranches, de telle sorte que le dernier caractère 6 soit sous le premier caractère de la quatrième tranche, & le reste en avançant vers la gauche; l'on procédera comme aux opérations précédentes, cherchant combien le premier caractère inférieur 8 est contenu de fois dans les chiffres 71 qui lui sont correspondans; & puisqu'après l'essai ordinaire, il s'y trouve huit fois, sans qu'il y ait à craindre de supposer ici un trop grand quotient, l'on écrira huit au dessus du quatrième point à la racine, de même que sous le second chiffre de la dernière tranche; multipliant donc tous les chiffres qui sont au dessous des tranches par la nouvelle racine 8, & soustrayant à mesure chaque produit des caractères supérieurs qui leur sont correspondans, l'on barrera les chiffres, & l'on écrira au dessus le reste 156. Il faudra le séparer par un arc de cercle, puisqu'il ne reste plus d'opérations à faire, comme cela s'est pratiqué dans les divisions, lorsqu'il ne reste pas davantage de points vers la droite aux quotients. Présentement il s'agit de prouver

que le nombre 4438 eſt la racine quarrée du nombre propoſé, lequel nombre excède cependant un quarré parfait, puiſque l'on a le nombre de 156 en excès: cette preuve eſt aiſée à déduire de la formation des nombres quarrés, produits par un binome, trinome, &c. comme on le verra ci-après. A l'égard de ces 156 qui reſtent, l'on peut, ſi l'on veut, continuer l'opération par les décimales, c'eſt-à-dire, en ajoûtant autant de fois deux zéros au nombre propoſé, que l'on voudra connoître de décimales par-delà la virgule à la racine: en voici un exemple.

Méthode plus uſitée d'extraire la racine quarrée.

19|69|60|00	(4438,0175 Racine.
16	
369	84 Diviſeur.
336	883
3360	8868
2649	88760
71100	887601
70944	8876027
156,00	88760345

La diſpoſition du quarré & de la racine,

eſt la même dans cet exemple que dans le précédent, mais en doublant chaque fois les chiffres à la racine, les diviſeurs s'écrivent immédiatement au deſſous de la racine, de même qu'au deſſous des tranches, le produit de chaque diviſeur, auſſi-tôt qu'on l'aura augmenté vers la droite du dernier chiffre de la racine, par le même chiffre de la racine: l'on voit encore ſous les tranches le diviſeur repréſenté par autant de points ſous chaque dividende; quand l'opération ſur les entiers eſt achevée, & qu'il ne reſte que 156, j'ajoûte deux zéros vers la droite, & doublant la racine, l'on a 8876, en ſorte que 15600 doit être diviſé par 8876, & parce qu'il y a zéro au quotient, il faut l'écrire après la virgule à la racine, & après le diviſeur 8876; car le diviſeur véritable du nombre 15600, doit être 88760, comme on le verra ci-après par la formule algébrique.

Continuant l'opération par décimales, l'on ajoûtera encore deux zéros vers la droite, & doublant la racine, l'on aura le premier diviſeur 88760, lequel ſera repréſenté par cinq points, dont le premier doit être placé ſous le premier des deux chiffres vers la gauche de la ſixième tranche, & les autres

en avançant encore vers la gauche; ainsi il reste à diviser 156000 par 88760, & puisque le quotient est 1, l'on aura donc pour le diviseur véritable 887601, le dividende étant 1560000, ce qui s'ensuit de ce que l'on a écrit 1 au dessus du sixième point à la racine, & en même temps à la suite du diviseur qui a servi d'essai; si l'on multiplie à l'ordinaire, & qu'après la soustraction l'on ajoûte encore deux zéros, & ainsi de suite, l'on aura pour racine quarrée 4438,0175 avec un reste, en sorte que l'on pourra étendre cette racine par décimales aussi loin que l'on voudra.

C'est-là ce que l'on appelle connoître, par *approximation*, la racine des nombres qui ne représentent pas des quarrés parfaits.

REMARQUES.

I. En écrivant les produits au dessous du dividende, s'ils se trouvent plus grands que ce même dividende, c'est une preuve que l'on a supposé un trop grand quotient; & qu'ainsi il faut diminuer d'une unité ce quotient avant que de l'écrire à la racine: l'on a, par exemple, en continuant l'opération ci-dessus, pour dividende ou 5.^c reste, 672399,

qu'il faudra augmenter de deux zéros vers la droite, & doublant les chiffres déjà écrits à la racine, le diviſeur ſera 887602 : or l'on voit bien-tôt que dans 6723990, ce diviſeur 887602 n'eſt contenu que ſept fois, quoique, ſans eſſai, l'on ait le premier chiffre 8 du diviſeur, contenu huit fois dans les deux premiers chiffres 67 du dividende; ainſi le vrai diviſeur ſera donc 8876027, lequel ſera repréſenté par ſept points au deſſous du dividende 67239900, & les décimales pourront être ainſi continuées à l'infini à la racine.

II. Plus il y aura de décimales à la racine, plus elle ſera approchée de la vraie valeur que l'on cherche: il ne faut pas oublier, lorſqu'il vient zéro au quotient, de l'écrire à ſon rang au deſſus du point qui lui correſpond à la racine, & au diviſeur pareillement; l'on paſſera tout de ſuite à la tranche ſuivante, ſans avoir beſoin de faire en ce cas les multiplications & ſouſtractions preſcrites.

III. La preuve que l'on aura bien opéré ſera évidente, ſi en quarrant les chiffres qui ſont à la racine, négligeant ou laiſſant à part les décimales, c'eſt-à-dire, ſi en multipliant

cette racine par elle-même, & ajoûtant au produit la quantité qui reste, & que l'on a séparée par un arc de cercle, le résultat se trouve parfaitement égal au nombre que l'on a séparé par des tranches, & qui a été proposé.

IV. Il y a un moyen bien simple de retenir ces méthodes, & même de démontrer les opérations que l'on vient de faire pour découvrir les racines quarrées; il faut, pour cet effet, simplifier la chose, & l'appliquer, non pas à des chiffres, mais à des caractères d'une signification plus étendue & qui fixent nos idées. L'algèbre fournit ce moyen par le secours de la formule $aa + 2ab + bb$, c'est-à-dire, le quarré du premier terme a, deux fois le produit du premier par le second terme, & le quarré du second terme b: l'on peut voir qu'ayant tiré la racine a du premier terme, & que l'ayant doublée pour former le premier membre du produit $2ab$, l'autre membre b, qui est donné par le reste ou dividende $2ab + bb$, ne sauroit être inconnu, aussi-tôt qu'on le divise par $2a$.

Au reste, pour multiplier un nombre par lui-même, tel que 25, par exemple, pour en former un quarré; la formule indique encore qu'on le formera également, si l'on

prend le quarré de 2, deux fois le produit de 2 par 5, enfin le quarré de 5.

Exemple.
$$\left\{\begin{array}{r} 4\,\cdot\,\cdot \\ 2\,0\,\cdot \\ 2\,5 \\ \hline \text{Total....}6\,2\,5 \end{array}\right.$$

L'on ne doit pas oublier, ſur-tout dans ces opérations, de repréſenter par des points les zéros qui doivent précéder le rang qu'occupe l'unique ou les deux caractères du quarré du premier membre; & ainſi de ſuite.

De l'extraction de la racine cubique.

L'on entend par nombre cubique, celui qui naît de la multiplication du quarré par ſa racine, d'où il s'enſuit qu'on peut conſidérer le nombre cubique comme un tout qui réſulte de trois dimenſions, puiſque le cube en géométrie, (qui a la figure d'un dez à jouer) contient longueur & largeur dans ſa baſe, ce qui forme déjà un quarré parfait, & qu'il contient encore la même dimenſion en épaiſſeur ou hauteur.

Avant que d'entreprendre d'extraire les racines cubiques des nombres finis, il faut connoître d'abord tous les cubes dont les racines

racines n'ont qu'un ſeul chiffre, & pour cet effet, l'on aura recours à la table ſuivante.

Nombres cubes.

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.

Racines cubiques.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Il eſt évident, par cette table, qu'il ne ſauroit y avoir qu'un ſeul chiffre à la racine cubique d'un nombre quelconque exprimé ſeulement par trois chiffres ou caractères; car auſſi-tôt que l'on prend 10 pour racine, le nombre cubique 1000, qui lui répond, contient déjà quatre caractères: cela nous oblige donc à ſéparer par des tranches de trois chiffres tout nombre quel qu'il ſoit, dont il faudra extraire ſucceſſivement les caractères qui doivent former ſa racine cubique; pour cet effet, l'on commencera par la droite à le ſéparer par tranches de trois caractères chacune, excepté la dernière vers la gauche, laquelle peut ne contenir quelquefois que deux ou même un ſeul caractère: l'on ne doit pas oublier de marquer autant de points à la racine qu'il y aura de tranches,

ce qui indiquera le nombre de chiffres que l'on doit trouver à la racine cubique.

Règle pour extraire les racines cubiques.

I. Ayant séparé le nombre proposé par des tranches, comme on vient de le prescrire, l'on s'aidera de la table précédente pour trouver la racine du cube, qui est immédiatement au dessous, & qui représente les nombres de la première tranche à gauche, quand il ne se trouve pas de cube parfait: l'on écrira, comme l'on fait pour les quotiens, la racine cubique du nombre qui représente le cube parfait, le plus approchant au dessous du nombre exprimé dans la première tranche; enfin prenant la différence de ces deux nombres, on écrira cette différence ou excès au dessus des chiffres correspondans de cette première tranche.

II. Passant à la seconde tranche, l'on commencera par y comparer un diviseur, lequel sera formé de la manière suivante. Il faut prendre le quarré du nombre déjà écrit à la racine, & le tripler, c'est-à-dire, le multiplier par 3, & l'on disposera tellement ce produit, que son dernier caractère soit immédiatement au dessous du premier caractère

de la ſeconde tranche, & les autres en avançant vers la gauche; il faut rechercher enſuite combien de fois le premier caractère à gauche de ce produit, eſt contenu, ſoit dans le chiffre qui eſt au deſſus, ſoit dans les chiffres correſpondans du premier reſte écrit au deſſus de la première tranche; mais auparavant il faut faire un eſſai, & prévoir ſi ce quotient n'eſt pas trop grand par les moyens que l'on indiquera tout à l'heure, de même que dans l'exemple qui ſuit: or ce quotient étant réduit, s'il eſt néceſſaire, on l'écrira au deſſus du ſecond point à la racine. Il faut préſentement écrire à part les trois produits ſuivans; en premier lieu, le cube de la racine que l'on a déjà écrite au deſſus du ſecond point; en ſecond lieu, le triple du quarré de cette même racine cubique multiplié par celle qui eſt au deſſus du premier point; enfin l'on écrira, en troiſième lieu, le produit des caractères qui ſont au deſſous des premières tranches, par le ſecond chiffre écrit à la racine, & l'on aura ſur-tout grande attention de diſpoſer à part ces mêmes produits, de manière que les unités du ſecond répondent aux dixaines du premier produit, & que les unités du troiſième produit ré-

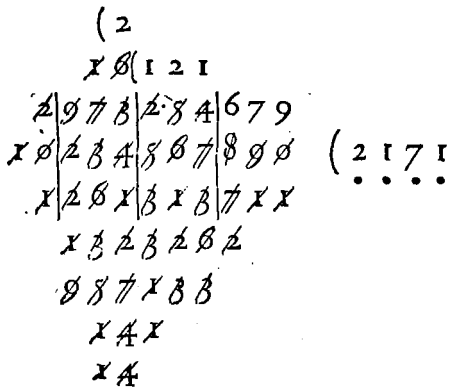
pondent aux centaïnes du premier. Les choſes étant ainſi arrangées, il reſte à faire une ſomme de ces trois produits, que l'on écrira enſuite au deſſous des tranches, de manière que le dernier caractère ſe trouve immédiatement au deſſous du dernier caractère de la ſeconde tranche, & les autres en avançant vers la gauche. Quant à l'eſſai mentionné ci-deſſus, voici en quoi il conſiſte; c'eſt-à-dire que, ſi après les trois produits que l'on vient de faire, leur ſomme excède les quantités correſpondantes qui ſont au deſſus, & dont il les faut ſouſtraire, c'eſt une marque que l'on a ſuppoſé le quotient ou racine d'une ou pluſieurs unités, trop grand: il faudra donc baiſſer d'unités en unités, s'il eſt néceſſaire, ce quotient, juſqu'à ce que l'on trouve une ſomme des trois produits, qui ſoit conforme aux conditions preſcrites.

III. Procédant à la troiſième tranche, l'on commencera par quarrer les deux racines déjà trouvées, en les conſidérant comme réunies en un tout, enſuite on multipliera ce quarré par 3, afin d'écrire ce produit ſous les tranches, de manière que ſon dernier caractère, qui eſt à droite, ſoit immédiatement ſous le premier caractère de la

troisième tranche, & le reste en avançant vers la gauche; il faut demander à présent combien le premier caractère de ce nouveau diviseur est contenu de fois dans le seul ou les deux chiffres qui correspondent au dessus, & l'on écrira ce quotient au troisième rang à la racine, n'oubliant pas de l'essayer auparavant, suivant la méthode indiquée à l'article précédent, &c. l'on écrira aussi à part les trois produits qui restent à former, savoir, 1.° le cube de la racine nouvellement écrite au troisième rang; 2.° le triple du quarré de cette racine, qui doit être multiplié par les valeurs écrites aux premier & second rangs; 3.° le produit qui naît de la multiplication des caractères écrits au dessous des tranches par la racine écrite au troisième rang: ces trois produits seront d'ailleurs disposés suivant l'arrangement prescrit à l'article précédent, & les ayant réunis en une somme, il faudra écrire celle-ci au dessous des tranches, de telle sorte que le dernier caractère à droite réponde au dernier caractère de la troisième tranche; ayant fait la soustraction, le reste, s'il s'en trouve, doit être écrit à l'ordinaire au dessus: l'on observera constamment les mêmes règles pour les tranches suivantes,

jusqu'à ce qu'on ait écrit la racine qui convient au dernier point ; l'exemple suivant servira d'application à ces règles : soit supposé d'abord le nombre 1023456789 0, dont il faut extraire la racine cubique.

Premier Exemple.



I. D'abord je sépare le nombre en tranches de trois chiffres, ayant soin de commencer par la droite, ce qui indique trois tranches complètes & une quatrième tranche à gauche, qui ne contient que deux chiffres seulement : enfin je marque quatre points au quotient ou à la racine.

II. Cherchant entre les cubes parfaits celui qui paroît immédiatement au dessous du

nombre 10 de la première tranche à gauche, je trouve dans la table ci-dessus le cube 8, dont la racine est 2, selon la même table: ainsi j'écris 2 au dessus du premier point à la racine; soustrayant donc ce cube 8 du nombre 10, & barrant les chiffres, j'écris le reste 2 au dessus.

III. Procédant à la seconde tranche, je multiplie par 3 le quarré de la racine déjà trouvée, c'est-à-dire, 4 par 3, & je dispose au dessous des tranches le produit 12, de manière que son dernier chiffre à droite, savoir, 2, soit immédiatement au dessous du premier caractère de la seconde tranche; il faut demander ensuite combien 1 est contenu dans 2, ou plustôt combien le diviseur 12 est contenu dans les chiffres 22 qui correspondent au dessus, & comme l'on a 1 au quotient, je trouve que ce quotient est possible, suivant l'essai indiqué, & dont on va avoir occasion de parler ci après. Ainsi j'écris ce quotient 1 au dessus du second point à la racine. Il reste à former actuellement les trois produits que prescrit la règle qu'on a donnée, & l'on écrira à part, suivant leur ordre, d'abord le cube du second caractère que l'on vient d'écrire à la racine,

lequel cube eſt 1 ; en ſecond lieu, le triple du quarré de cette racine écrite au ſecond rang, ſavoir, 3, multiplié par le chiffre 2 écrit au premier rang, donne pour produit 6, & ces ſix dixaines, ſelon les conditions preſcrites, forment déjà, avec le premier produit, 61 ; en troiſième lieu, il faut multiplier les caractères qui ſont au deſſous des tranches, ſavoir, 12, par le chiffre écrit au ſecond rang à la racine, ſavoir, par 1, & réuniſſant ce troiſième produit 12 (lequel contient des centaines & des millièmes) aux deux précédens, le diviſeur ſera 1261. Cette dernière ſomme doit donc être diſpoſée tellement au deſſous des tranches, que ſon dernier caractère à droite ſoit immédiatement au deſſous du dernier caractère de la ſeconde tranche, & les autres en avançant vers la gauche : or ſouſtrayant ce même produit des chiffres qui correſpondent immédiatement au deſſus, & barrant de part & d'autre ces chiffres, l'on écrira au deſſus le reſte 973.

IV. L'opération ſe continuera de même ſur la troiſième tranche, ſavoir, en multipliant par 3 le quarré des racines déjà trouvées, & écrivant le produit 1323 ſous les tranches, de manière que le dernier caractère 3 ſoit

immédiatement au dessous du premier caractère de la troisième tranche, & le reste en avançant vers la gauche; ensuite l'on cherchera combien de fois le premier caractère 1, qui est écrit au dessous, est contenu dans le chiffre correspondant 9 : l'on trouve, après l'essai, qu'il y est contenu seulement sept fois; ainsi l'on écrira 7 à la racine au dessus du troisième point, & l'on formera séparément les trois produits, en écrivant, en premier lieu, le cube de la racine 7 que l'on vient de trouver, lequel est 343; en second lieu, l'on multipliera par les deux premières racines 21, le triple du quarré de la nouvelle racine 7, & le produit 3087 sera tellement arrangé sous le précédent, que son dernier caractère 7 réponde aux dixaines du premier produit, c'est-à-dire au chiffre 4; en troisième lieu, il faut multiplier les caractères qui sont sous les tranches par la nouvelle racine 7, n'oubliant pas de disposer tellement le dernier chiffre 1 du produit 9261, qu'il réponde aux centaines du premier des deux produits sous lesquels on l'écrira; ou bien, ce qui revient au même, aux dixaines du second de ces mêmes produits : enfin réunissant les trois produits en une somme, on l'écrira au

dessous des tranches, en sorte que son dernier caractère 3 soit immédiatement au dessous du troisième caractère de la troisième tranche. Il reste à faire la soustraction de cette même somme 95731 3, des chiffres correspondans qui sont au dessus, & barrant tous ces chiffres à mesure que l'on opère, l'on écrira au dessus le reste 16254.

V. Il y a encore dans notre exemple un chiffre à remplir à la racine; ainsi l'on procédera à la quatrième & dernière tranche; & quarrant les trois racines déjà trouvées, multipliant le quarré par 3, l'on écrira le produit 141267 au dessous des tranches, de manière que son dernier chiffre 7 soit immédiatement au dessous du premier chiffre 8 de la quatrième tranche; ensuite l'on cherchera combien de fois le premier de ces caractères que l'on vient d'écrire au dessous des tranches, lequel est 1, est contenu dans son correspondant 1, & trouvant qu'il y est contenu une fois, l'on écrira 1 à la racine au dessus du quatrième point; l'on formera à l'ordinaire les trois produits, en écrivant d'abord à part le cube de la racine que l'on vient de trouver, lequel est 1; en second lieu, prenant le triple 3 du quarré de sa racine,

on le multipliera par les trois racines déjà trouvées 217, & le second produit sera 651, qu'il faut écrire sous le cube de 1, représentant le premier produit, savoir, en avançant d'un rang vers la gauche, comme l'on en a averti; en troisième lieu, l'on multipliera par le quatrième chiffre 1 écrit à la racine, les chiffres qui sont au dessous des tranches, & l'on disposera ce troisième produit sous les deux autres, selon les conditions prescrites ci-dessus; réunissant en une somme ces trois produits, l'on doit trouver 14133211, qu'il faut écrire au dessous des tranches, de manière que le dernier chiffre 1 réponde au dernier chiffre 0 de la quatrième tranche; enfin l'on soustraira cette somme, des caractères correspondans qui sont au dessus, & le reste 2121679, étant écrit plus haut, après avoir barré les chiffres, on le séparera par un arc de cercle.

Présentement il reste à vérifier, & même à démontrer que le nombre 2171 élevé au cube & augmenté de la quantité 2121679, qui est séparée par un arc de cercle, donnera précisément le nombre proposé 10234567890; en un mot que 2171, avec la fraction décimale qui lui convient, en est la vraie racine cubique.

L'examen peut se faire d'abord en multipliant la racine 2171 par elle-même, ce qui donne, en premier lieu, un quarré, savoir, 4713241 ; en second lieu, il faut continuer de multiplier ce quarré par sa racine, ce qui doit donner le vrai cube du nombre 2171, savoir, 10232446211, auquel ajoûtant le reste trouvé à la fin de l'opération précédente, savoir, 2121679, l'on doit parvenir enfin au nombre proposé 10234567890.

Première Opération.

```
                2171 }
                2171 } Racines.
              -------
                2171
            15197
            2171
          4342
        -----------
          4713241   Quarré.
```

Seconde Opération.

```
          4713241   Quarré.
             2171   Racine.
        -----------
          4713241
       32992687
       4713241
     9426482
  -----------------
  10232446211   Cube.
```

Si l'on veut continuer l'opération pour découvrir les fractions décimales qu'il faut ajoûter à la racine déjà trouvée, l'on aura attention de former une cinquième & sixième tranche, &c, c'est-à-dire, autant de nouvelles tranches composées de trois zéros, que l'on exigera de chiffres aux fractions décimales, de manière que si l'on se bornoit à six tranches, par exemple, la racine cubique la plus approchée sera 2171,14, avec un reste, 141990,122456, que l'on séparera par un arc de cercle, au cas qu'il soit nécessaire de continuer encore l'opération pour approcher davantage de la vraie racine cubique.

La formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, dont il sera question dans l'algèbre, sert à démontrer les opérations que l'on vient de faire pour parvenir à extraire la racine cubique: elle signifie qu'il faut prendre le cube du premier terme a; trois fois le produit du quarré du premier terme a par le second terme b; plus, trois fois le produit du premier terme a par le quarré du second b; enfin qu'il y faut joindre le cube du second terme b. Il est évident que c'est cette même formule qui a servi de guide pour trouver

ſucceſſivement les diviſeurs du nombre dont on a propoſé d'extraire la racine cubique : l'on peut s'en ſervir auſſi pour élever tel nombre que l'on voudra au cube. Soit, par exemple, le nombre propoſé 2171. On le ſéparera en deux membres, 2 & 171 ; & dans les produits particuliers, l'on ſera attentif à la manière dont il faut diſpoſer les rangées de chiffres les unes à l'égard des autres, ainſi qu'il en a été déjà tant de fois averti ; ou bien, en ſéparant le nombre propoſé, l'on écrira 2000 d'une part, & 171 de l'autre.

REMARQUES.

Au ſujet de l'extraction de la racine quarrée, l'on peut, au lieu de fractions décimales, opérer ſur ce qui reſte comme il ſuit. L'on doublera les chiffres écrits à la racine, & l'on ajoûtera 1 au produit, ce qui donnera le dénominateur d'une fraction, dont le reſte écrit au deſſus des chiffres doit être le numérateur ; ainſi, dans l'exemple propoſé *(page 189)* ſi l'on double 4438, & que l'on y ajoûte 1, l'on aura $\frac{156}{8877}$ pour la fraction que l'on cherche. Cette fraction n'eſt qu'un à peu près, & elle ſe réduira,

ſuivant ce qui a été enſeigné au premier des problèmes antérieurs de la ſeconde Partie. Au reſte, s'il arrive que le numérateur de cette fraction excède ſon dénominateur, ou s'il lui eſt égal, ce ſera une preuve ſuffiſante que l'on s'eſt trompé en n'écrivant pas un nombre aſſez grand à la racine.

II. Quant à l'extraction de la racine cubique, lorſqu'on veut connoître plus vîte qu'à l'aide des fractions décimales, la valeur de ce qui reſte; après avoir fait l'opération, il ſuffit, pour cet effet, de prendre le quarré des chiffres écrits à la racine, de multiplier ce quarré par 3, & d'ajoûter à ce produit non ſeulement le produit des chiffres écrits à la racine, multipliés par 3, mais auſſi l'unité 1; par-là l'on aura le dénominateur de la fraction, dont le reſte que l'on a ſéparé par des arcs de cercle, ſera le numérateur. Il ſera aiſé d'apercevoir auſſi par ce moyen, ſi l'on n'a pas écrit de trop petits nombres à la racine; car cela doit arriver toutes les fois que ce numérateur paroîtra plus grand ou égal à ſon dénominateur.

III. Si l'on propoſe d'extraire les racines quarrées & les racines cubiques d'une fraction, il faudra extraire d'abord la racine

quarrée, ou bien la racine cubique du numérateur de la fraction, & l'on écrira cette racine au numérateur d'une nouvelle fraction : l'on opérera pareillement sur le dénominateur, pour en déduire celui de la nouvelle fraction que l'on cherche. Soit proposé, par exemple, d'extraire la racine quarrée de la fraction $\frac{16}{36}$. La racine quarrée du numérateur est 4, celle du dénominateur est 6; ainsi l'on écrira $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$, en réduisant; ce qui indiquera la racine quarrée que l'on cherche. Semblablement, si l'on demande la racine cubique de $\frac{8}{64}$, l'on aura d'abord 2 pour numérateur de la nouvelle fraction, puisque 2 est la racine cubique de 8: quant au dénominateur, puisque l'on trouve 4 pour racine cubique de 64, la racine cubique de la fraction proposée sera donc $\frac{2}{4}$, ou, en réduisant, $\frac{1}{2}$.

IV. Toutes les fois qu'il se trouve un reste après les opérations que l'on aura faites pour extraire les racines, ce sera une preuve que le nombre proposé n'est ni un quarré, ni un cube parfait; ainsi il n'est pas possible d'exprimer exactement, soit par des entiers, soit par des fractions, la vraie racine de ce nombre; c'est ce que l'on nomme *quantités irrationnelles*,

irrationnelles, toutes ces quantités ayant des racines sourdes: l'on a vû ci-dessus, comment, à l'aide des décimales, l'on peut en approcher à l'infini.

V. L'on déduit par induction la formation des puissances, des formules algébriques rapportées ci-dessus; en voici quelques règles générales. Le premier terme a doit d'abord toûjours être élevé à la puissance requise, & il doit baisser d'une unité successivement à chaque terme; ainsi lorsque l'on propose de trouver la quatrième puissance de $a + b$, c'est-à-dire la valeur de $(a + b)^4$, j'écris pour *exposant* le chiffre 4 au haut du terme a, en tirant vers la droite, & je continue, en baissant d'une unité, comme il suit, $a^4 + a^3 + a^2 + a$ ou a^1; en second lieu, laissant seul le terme a^4 dans le premier rang, je fais paroître, dès le second rang, le deuxième terme b, & je continue en l'élevant successivement d'unité en unité à la plus haute puissance; c'est pourquoi l'on trouve $a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4$, la quantité a^0 étant supprimée au dernier terme, à cause que $a^0 = 1$: il reste à présent à découvrir les chiffres qui précèdent les termes, & que l'on nomme *coëfficiens*. La règle d'induction

vulgairement connue, nous apprend qu'il faut donner conſtamment l'unité pour coëfficient au premier terme; & parce que l'on eſt convenu de ſous-entendre généralement dans tous les cas l'unité, il n'y a pas de coëfficient à écrire au premier terme; en ſecond lieu, l'on donnera au ſecond terme, pour le coëfficient, l'expoſant du premier terme, lequel eſt 4 dans l'exemple que l'on vient de propoſer; en troiſième lieu, pour trouver les autres coëfficiens, l'on multipliera ſucceſſivement chaque coëfficient que l'on vient de trouver, par l'expoſant de la première lettre à laquelle il eſt joint, & l'on diviſera le produit par le nombre qui indique le rang auquel il ſe trouve, ce qui doit donner enfin la troiſième puiſſance complète que l'on cherche; ſavoir, $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; c'eſt-à-dire que le coëfficient 6 du troiſième rang ſe découvrira en multipliant l'expoſant 3, du rang qui précède, par ſon coëfficient 4, ce qui donne d'abord 12, qu'il faut diviſer par 2, puiſque ce produit eſt formé au ſecond rang, & le quotient 6 ſera le coëfficient que l'on cherche pour le troiſième rang. De même le coëfficient du quatrième rang ſe découvrira

en multipliant l'exposant 2 de a^2, au rang qui précède, par son coëfficient 6, ce qui donne d'abord 12, qu'il faut diviser par 3, puisque ce produit est formé au troisième rang, & le quotient 4 sera le coëfficient que l'on cherche pour le quatrième rang.

VI. C'est par le moyen des séries que *M. Newton* a trouvé divers moyens de découvrir les racines par approximation; pour cet effet, il ne considère que sous un même point de vûe la formation des puissances & l'extraction des racines; car de même que pour élever une quantité a au quarré, au cube, &c. on la désigne par les expressions suivantes a^2, a^3, *&c.* il désigne aussi par des exposans fractionnaires les racines, considérant ces mêmes racines comme les puissances $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, *&c.* de la quantité a. Si l'on propose donc la quantité $a + b$, & qu'il faille l'élever à une puissance quelconque désignée par n, l'on aura le théorème suivant, $(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 +$ *&c.* La démonstration rigoureuse de ce fameux théorème, est aisée à déduire des élémens du calcul différentiel, au lieu que

divers auteurs l'ont donnée d'une manière trop diffuse & bien moins naturelle; la plus part s'étant contentés d'établir ce théorème général par induction seulement. Dorénavant l'on indiquera par le signe × la multiplication, c'est-à-dire que 4 × 3 signifie qu'il faut multiplier 4 par 3.

Or la substitution donnera bien-tôt ici, par exemple, la quatrième puissance de $a + b$; car puisqu'en ce cas, $n = 4$, l'on aura, en substituant, $a^4 + 4a^{4-1}b + 4 \times \frac{4-1}{2} a^{4-2} b^2 + 4 \times \frac{4-1}{2} \times \frac{4-2}{3} a^{4-3} b^3 + 4 \times \frac{4-1}{2} \times \frac{4-2}{3} \times \frac{4-3}{4} a^{4-4} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 4 \times \frac{3}{2} a^2 b^2 + 4 \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} a b^3 + 4 \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

SUPPLÉMENT où l'on traite de la multiplication des Nombres hétérogènes.

IL peut arriver quatre cas, lorsqu'il s'agit de la multiplication des nombres hétérogènes;

le premier cas eſt celui où l'on propoſe de multiplier un nombre hétérogène par un autre nombre homogène & au contraire ; le ſecond cas a lieu, lorſqu'il s'agit de multiplier deux nombres hétérogènes l'un par l'autre, pourvû que les objets ſoient d'une même nature: comme ſi l'on propoſe, par exemple, de multiplier des livres, ſols & deniers par des livres, ſols & deniers, ou bien des toiſes, pieds, pouces & lignes par des toiſes, pieds, pouces & lignes; l'on peut rapporter au troiſième cas celui où il s'agit de multiplier l'un par l'autre des nombres hétérogènes de différente nature, tels que ſont, par exemple, des toiſes, pieds, pouces & lignes, à multiplier par des livres, ſols & deniers; enfin le quatrième cas renferme celui où il s'agit de plus de deux nombres hétérogènes, qu'il eſt néceſſaire de multiplier les uns par les autres: voici donc quatre règles pour chacun de ces cas.

Première Règle.

Lorſqu'on propoſe de multiplier un nombre homogène par un autre qui eſt hétérogène & réciproquement; il faut, en premier lieu, réduire celui qui eſt hétérogène à ſa

moindre eſpèce ; en ſecond lieu, l'on multipliera à l'ordinaire ce nombre ainſi réduit, par celui qui eſt homogène, ou bien celui-ci par l'autre; en troiſième lieu, l'on diviſera le produit par l'un des entiers du nombre hétérogène, réduit pareillement à ſa moindre eſpèce, & le quotient indiquera les unités du nombre hétérogène, qui répondent à la plus haute eſpèce; en quatrième lieu, après avoir fait cette diviſion, s'il y a un reſte, il faut le multiplier par la valeur de l'eſpèce qui eſt immédiatement au deſſous de la plus haute valeur, & le produit étant diviſé, en ſe ſervant du premier diviſeur, le quotient indiquera les unités de cette même valeur que l'on cherche ; en cinquième lieu, s'il y a encore un reſte, l'on continuera de le multiplier par la valeur de l'eſpèce qui eſt d'un degré au deſſous des deux précédentes, & diviſant le produit par le premier diviſeur, l'on aura au quotient les unités de cette troiſième eſpèce: l'on procédera ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on parvienne à la moindre eſpèce.

Soit, par exemple, le nombre homogène de 18 toiſes, à multiplier par un autre nombre hétérogène, ſavoir, par $10^{l}\ 15^{f}\ 8^{d}$.

I. D'abord l'on réduira le nombre hétérogène à sa moindre espèce, c'est-à-dire, à 2588 deniers; multipliant ce nombre ainsi réduit, par celui qui est homogène, savoir, par 18, l'on trouve au produit 46584.

II. Présentement, puisqu'une livre réduite en deniers répond à 240 deniers, l'on divisera par conséquent le produit 46584 par 240, & le quotient 204 indiquera des livres.

III. Comme il se trouve un reste 24 après la division, on le multipliera par 20, & divisant le produit 480 par 240, le quotient 2, lequel se trouve sans reste, doit indiquer enfin le quotient total, savoir, 204^{l} 2^{s}.

Il est visible que, dans cette opération, le produit total indiquant des deniers, si on le divise par la valeur d'une livre réduite aussi en deniers, l'on doit avoir des livres au quotient, ce qui est le fondement de la règle première.

Seconde Règle.

Soit un nombre hétérogène que l'on propose de multiplier par un autre nombre hétérogène, mais qui représente des objets de même espèce. Il faut réduire, en premier lieu, l'un & l'autre nombre à sa moindre

eſpèce, ou pluſtôt à la moindre eſpèce de celui qui deſcend au plus bas degré, s'ils n'y deſcendent pas également; en ſecond lieu, il faut multiplier l'un par l'autre ces nombres ainſi réduits, & l'on diviſera le produit, non pas par la valeur d'un des entiers de la plus haute valeur réduit à la moindre eſpèce, mais après l'avoir élevée au quarré, c'eſt-à-dire, après l'avoir multipliée par elle-même; ce qui étant fait, le quotient indiquera des entiers de la plus haute valeur; en troiſième lieu, s'il y a un reſte, il faudra le multiplier par la valeur de l'eſpèce qui deſcend immédiatement d'un degré au deſſous de la plus haute, & l'on continuera d'en diviſer le produit par le premier diviſeur, & ainſi de ſuite, afin de parvenir à des quotiens qui indiqueront les valeurs des eſpèces qui ſuivent immédiatement la première eſpèce.

Soit, pour premier exemple, le nombre ſuivant, $2^{l}\ 3^{s}\ 6^{d}$, lequel eſt hétérogène, que l'on propoſe de multiplier par $3^{l}\ 4^{s}\ 8^{d}$, lequel nombre eſt encore hétérogène.

I. D'abord réduiſant le premier nombre en deniers, l'on trouve 522 deniers, & pareillement pour le ſecond nombre, cette autre ſomme de 676 deniers.

II. Multipliant actuellement ces deux sommes, 522 & 676, l'une par l'autre, le produit sera 352872.

III. Il faut diviser ce produit par le quarré du nombre qui indique combien il y a de deniers dans une livre, c'est-à-dire par 240, multiplié par 240, ou, ce qui revient au même, par 57600, & l'on trouvera 7 livres pour le quotient.

IV. Il reste après la division 1872, qui étant multipliés par 20, le produit sera 37440, lequel étant divisé par le même nombre que ci-dessus, 57600, l'on écrira zéro sols au quotient, à cause que le diviseur excède ici le dividende.

V. Enfin multipliant le reste 37440 par 12, l'on divisera le produit 449280 par le premier diviseur 57600, & l'on trouvera 7 au quotient, avec un reste $\frac{283}{360}$, qui est la fraction d'un denier.

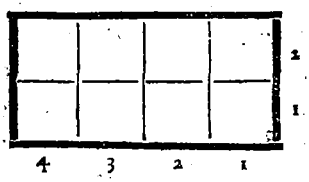
C'est pourquoi le quotient total sera 7^{l} 0^{s} 7^{d} $\frac{3}{4}$, la fraction n'excédant les $\frac{3}{4}$ que d'un 36.e de denier.

Soit donné un second exemple, en supposant que les nombres hétérogènes soient l'un de 2 toises 3 pieds 7 pouces, & l'autre, qui doit le multiplier, de 3 toises 2 pieds 8 pouces.

D'abord il faut réduire le premier nombre à 187 pouces, & le second nombre à 248 pouces; ensuite multipliant les deux nombres l'un par l'autre, l'on trouve au produit 46376, ce qui étant divisé par le quarré 72, valeur d'une toise réduite en pouces, c'est-à dire, par 5184, le quotient indiquera huit toises, avec un reste, savoir, 4904; il faut multiplier ce reste par 6, à cause que la toise contient six pieds, & divisant le produit 29424 par le premier diviseur, le quotient indiquera cinq pieds, avec un reste 3054; celui-ci étant multiplié par 12, puisqu'un pied vaut 12 pouces, l'on divisera le produit par le premier diviseur, & l'on aura au quotient 8 pouces, avec un reste qui se réduira à une fraction de pouce, savoir, $\frac{72}{643}$.

La raison qui détermine à diviser le produit total par le *quarré* d'un des entiers de la plus grande valeur, réduit à sa moindre espèce, est fondée sur ce que tout produit qui naît de la multiplication de deux nombres, doit toûjours être considéré comme une surface ou quarré long, laquelle surface ne peut être comparée qu'à une quantité homogène; c'est-à-dire à un diviseur qui doit être nécessairement, en ce cas, une surface quarrée.

Soit un quarré long, dont un des côtés soit de 2 toises, & l'autre de 4 toises, il est visible que le produit de 2 par 4 doit donner 8 toises quarrées.



Car si l'on divise chaque côté & son opposé en deux parties, d'une part, & de l'autre, en quatre parties : de plus si l'on tire des lignes à chaque point de divisions, il est visible que toute la surface du quarré long sera partagée ainsi en huit quarrés, dont chaque côté doit avoir une toise.

Cela se prouve en général, en considérant que si le quarré oblong n'avoit qu'une toise de hauteur sur 4 toises de largeur, l'on auroit, en ce cas, 4 toises quarrées en surface; mais si l'on a 2 toises de hauteur, l'on aura donc deux rangées de 4 toises quarrées, c'est-à-dire 8 toises quarrées : il n'est pas moins évident que s'il se trouvoit 3 ou bien 4 toises de hauteur sur 4 toises de largeur, l'on auroit, pour chaque cas, trois ou quatre rangées de 4 toises chacune, c'est-à-dire 12 ou bien 16 toises quarrées.

L'on peut construire de la même manière,

en ſous-diviſant les côtés, la figure qui convient au ſecond exemple des quantités hétérogènes rapportées ci-deſſus; d'où il doit s'enſuivre qu'une ſurface ne pouvant être comparée qu'à une autre ſurface, il étoit néceſſaire, par cette raiſon, de diviſer la toiſe quarrée en $72 \times 72 = 5184$ pouces quarrés; en effet, ce dernier diviſeur eſt l'unique meſure qui puiſſe indiquer combien il y a de toiſes quarrées contenues dans cette ſurface.

Troiſième Règle.

Si l'on propoſe de multiplier un nombre hétérogène par un autre nombre hétérogène qui n'eſt pas de la même eſpèce, il faudra commencer par réduire chaque nombre à ſa moindre eſpèce; enſuite on les multipliera ainſi réduits l'un par l'autre.

Mais pour découvrir la valeur du produit, l'on commencera par réduire un des entiers de la plus haute eſpèce de chacune de ces quantités, à ſa moindre eſpèce, & on les multipliera immédiatement après l'un par l'autre; ce qui fournira le diviſeur général du produit déjà trouvé. Préſentement, puiſque la réduction de ces nombres doit déſigner quelque valeur, l'on aura donc au quotient

des entiers de cette plus grande valeur ; il sera facile ensuite de découvrir, en y employant la seconde règle, les autres valeurs d'une espèce inférieure.

Soient, par exemple, 4 toises 2 pieds 10 pouces, à multiplier par $8^{l}\ 7^{f}\ 5^{d}$. L'on réduira d'abord le premier de ces deux nombres en pouces, ce qui indique 322 pouces ; réduisant de même le second nombre en deniers, l'on aura 2009 : il faut multiplier ensuite ces deux nombres réduits l'un par l'autre, & le produit sera 646898 ; l'on multipliera pareillement la toise réduite en pouces, savoir, 72 pouces, par la livre réduite en deniers, c'est-à-dire par 240 deniers, & le produit 17280 sera le diviseur de 646898 : ayant donc fait la division comme il a été prescrit ci-devant, l'on trouvera au quotient $37^{l}\ 8^{f}\ 8^{d}\ \frac{25}{36}$.

Quatrième Régle.

S'il y a plusieurs quantités hétérogènes à multiplier les unes par les autres, dont quelques-unes seulement soient de nature différente, ou qui soient toutes d'une même nature ; il faut, dans ce dernier cas, les réduire toutes à leur moindre espèce, & il sera facile ensuite de les multiplier l'une par l'autre

ſucceſſivement : quant à leur diviſeur, on le découvrira d'abord en réduiſant un des entiers de la plus grande eſpèce à ſa moindre eſpèce, & on l'élevera enſuite à la troiſième puiſſance ou au cube, s'il n'a été propoſé que trois nombres hétérogènes; mais on l'élevera à la quatrième puiſſance, s'il y en a quatre; à la cinquième puiſſance, s'il y en a cinq, & ainſi de ſuite : or le diviſeur étant ainſi découvert, l'on achevera l'opération comme il a été preſcrit aux règles précédentes.

Que s'il ſe trouve des nombres hétérogènes de différente nature, il faudra réduire chacun dans ſon genre à ſa moindre eſpèce, & on les multipliera enſuite ſucceſſivement les uns par les autres, afin d'en diviſer le produit par le diviſeur particulier qu'il s'agit de découvrir; pour cet effet, ayant réduit chaque unité des plus hautes valeurs à leur moindre eſpèce, il faudra avoir attention d'élever au quarré, par exemple, celle qui appartient à deux nombres de même nature, ou au cube, ſi elle appartient à trois nombres, & ainſi de ſuite. Après cette préparation, l'on multipliera ces puiſſances les unes par les autres, & le produit ſera le diviſeur que l'on cherche.

Fin de l'Arithmétique.

DISSERTATION PRÉLIMINAIRE DE L'AUTEUR,

Sur les Élémens des Mathématiques.

LES Mathématiques ſont une ſcience qui s'occupe à conſidérer la quantité finie & ſes différens rapports, de même que les rapports des grandeurs, qui varient à l'infini, à meſure qu'elles croiſſent ou diminuent : pour entendre cette définition,

Il faut remarquer d'abord que, par le mot de *quantité*, l'on entend une multitude d'êtres; mais que ſi cette multitude eſt telle, qu'elle ne puiſſe augmenter ni diminuer, quelque addition ou quelque ſouſtraction que l'on en faſſe, elle ſe nomme pour lors *infinie*. La multitude, par exemple, des hommes purement poſſibles eſt infinie; parce que, ſoit que l'on ajoûte à cette multitude tout ce qui en a été produit juſqu'ici, ſoit que l'on retranche de cette multitude tous ceux que Dieu produira juſqu'à la fin du monde, l'on ne ſauroit faire varier cette quantité infinie, & l'on ne peut l'augmenter ainſi, ni la diminuer.

Or il s'ensuit de ce que nous venons de dire, qu'on pourroit définir une quantité infinie, celle qui ne sauroit être augmentée ni diminuée, par opposition à la quantité finie, qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. La multitude d'hommes, par exemple, qui se trouvent dans un vaste temple, est une quantité finie, parce que ce nombre peut être augmenté ou diminué.

Au reste les quantités qui font l'objet des Mathématiques étant susceptibles d'augmenter ou de diminuer à l'infini, l'on s'est attaché particulièrement à en examiner quelquefois les rapports dans l'instant même que leur accroissement fini passe par l'infini: ou bien lorsqu'elles commencent, soit à naître, soit à s'anéantir & que les quantités positives, passant par zéro, deviennent ensuite négatives; c'est ainsi que les sommes d'un particulier qui dépense, & qui, après avoir consommé tout l'argent, fait des dettes, doivent être considérées successivement comme positives & négatives.

Il faut aussi remarquer que la quantité finie, ou qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, est de trois sortes, savoir, la *durée*, l'*intension* & l'*extension*. La durée est

eſt une multitude de parties hors les unes des autres, qui n'exiſtent que les unes après les autres, ou qui ne peuvent exiſter pluſieurs enſemble; telle eſt la multitude des heures d'une année. L'intenſion eſt une multitude d'êtres que l'on ſuppoſe exiſter enſemble, mais qui ſe pénètrent, pour ainſi dire, ou qui ſont les uns dans les autres; telle eſt la multitude des degrés de mouvement appliqués à un même corps. L'extenſion eſt une multitude d'êtres qui exiſtent enſemble, & qui ſont les uns hors des autres, telle qu'eſt la multitude de lieues qui compoſent, par exemple, la diſtance du Soleil à la Terre.

A l'expoſition ſuccincte de ces choſes, l'on peut ajoûter que les Mathématiques s'occupent à conſidérer toutes les eſpèces de quantités finies, c'eſt-à-dire la durée, l'intenſion & l'extenſion. Quand on conſidère ces mêmes eſpèces dans les Mathématiques, ſans aucun rapport à leurs ſujets ni aux qualités qui leur ſont unies, ces parties des Mathématiques ſe nomment *pures;* mais lorſque l'on a égard à leurs ſujets & aux qualités qui leur ſont unies, elles s'appellent *mixtes:* il ne s'agit, dans les élémens, que des Mathématiques pures.

Les trois espèces de quantités ci-dessus énoncées s'expriment, ou par des caractères indiens, que l'on nomme vulgairement *arabiques*, & pour lors la science qui les considère s'appelle *Arithmétique ;* ou bien par des lettres de l'alphabet, en donnant à chaque chose une signification qui n'est plus limitée, & pour lors elle se nomme *Algèbre ;* enfin ces quantités peuvent s'exprimer par des lignes, surfaces & solidité, & c'est alors *la Géométrie.* On va se borner à traiter ici de l'Algèbre élémentaire, les élémens d'Euclide, & ceux qui furent composés il y a cinquante ans à l'usage de M. le Duc de Bourgogne, étant entre les mains de tout le monde : l'on explique d'ailleurs dans ces derniers l'usage des Logarithmes, immédiatement après avoir traité des Corps solides & de la Trigonométrie.

ALGÉBRE.

LA Science algébrique, communément appelée le *grand art*, ſert à réduire en calcul, en n'y employant que les lettres de l'alphabet, toutes les eſpèces de quantités finies. La raiſon qui a déterminé le célèbre Viète à préférer les lettres de l'alphabet aux caractères arithmétiques, ne contient en ſoi aucun myſtère; ce n'eſt uniquement qu'à cauſe que ces caractères de l'alphabet ſont familiers à tout le monde, qu'ils ne ſignifient d'ailleurs aucune eſpèce de quantités, & que l'on peut, par cette raiſon, les employer pour ſignifier telle quantité que l'on voudra. Mais le grand avantage eſt que l'on peut, en ſe ſervant des lettres alphabétiques, réduire en calcul, tant les quantités inconnues que celles qui ſont connues, en ſorte que l'on pourra, par ce moyen, procéder bien différemment de ce qui s'eſt pratiqué dans l'Arithmétique; car dans celle-ci l'on part de quantités données ou connues, & l'on procède à la recherche de celles qui

ſont inconnues; au lieu que l'excellence de l'Algèbre conſiſte à partir de quantités inconnues, comme ſi elles étoient données, pour retourner à celles qui ſont connues, comme s'il étoit queſtion de les découvrir: enfin il y a encore cet avantage à ſe ſervir de lettres, ſavoir, que les démonſtrations algébriques en ſont plus ſimples & plus générales.

Il reſte à avertir ici que, pour ſignifier les quantités connues, l'on ſe ſert des premières lettres de l'alphabet, *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* au lieu que les dernières *t*, *x*, *y*, *z*, *&c.* déſignent toûjours les quantités inconnues.

L'on doit ſe rappeler auſſi que le ſigne + en Mathématiques eſt celui de l'addition, le ſigne — celui de la ſouſtraction, celui-ci = le ſigne de l'égalité, & ce dernier × celui de la multiplication, lequel eſt toûjours omis & ſupprimé, lorſqu'il y a des valeurs renfermées par des parenthèſes, ou bien lorſqu'on ſe ſert d'un point entre les divers produits de pluſieurs lettres aſſemblées.

Préſentement il s'agit de donner, comme dans l'Arithmétique, les règles pour faire l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion, de même que la formation des puiſſances & l'extraction des racines.

ARTICLE PREMIER.

De l'addition des quantités ſimples.

On appelle *quantités ſimples* celles qui ſont repréſentées par une ſeule lettre, au lieu que lorſqu'il y en a pluſieurs, la quantité qu'elles expriment ſe nomme *complexe.*

Pour ajoûter une quantité ſimple, telle que a, à une ſemblable quantité ſimple exprimée pareillement par la lettre a, l'on écrira pour leur ſomme $2a$: ſemblablement, ſi l'on veut ajoûter $2b$ avec $3b$, l'on écrira $5b$. Quand les lettres ſont différentes, l'addition ſe réduit à mettre entre les deux lettres le ſigne qui appartient à la quantité qu'on doit ajoûter : ſi l'on veut ajoûter, par exemple, a avec b, l'on écrira $a + b$; au lieu que ſi l'on veut ajoûter a avec $- b$, l'on écrira $a - b$. Lorſqu'il ſe trouve pluſieurs quantités à réunir en une ſomme, l'on examinera ſi elles ont toutes des ſignes ſemblables, ou bien s'il y en a pluſieurs qui aient des ſignes différens; celles qui ont des ſignes ſemblables, telles que $3b + 3b$, s'ajoûteront en s'écrivant ainſi $6b$: & lorſqu'il y a des ſignes différens, comme

$a + b$, $c - d$, elles s'ajoûteront en écrivant $a + b + c - d$.

On ne ſauroit trop avertir que le ſigne $+$ eſt toûjours ſous-entendu, lorſqu'il n'y a pas de ſignes au devant de la première des quantités que l'on propoſe. On a déjà averti que l'on y ſous-entendoit l'unité, & que a ou b s'écrivent ordinairement, au lieu de $1\,a$ ou de $1\,b$.

De la Souſtraction des quantités ſimples.

Pour ſouſtraire une quantité ſimple d'une autre, il faut changer le ſigne de celle qui eſt à ſouſtraire; ainſi, pour ſouſtraire $2\,a$ de $5\,a$, l'on écrira $5\,a - 2\,a$, ce qui ſe réduit à $3\,a$: ſemblablement, ſi l'on ôte $2\,b$ de $3\,b$, l'on aura $3\,b - 2\,b = 1\,b = b$. Quand les lettres ſont différentes, il ſuffit de changer le ſigne de celles que l'on veut ſouſtraire des autres, & de les écrire toutes enſuite comme ſi c'étoit une addition, en ſorte que pour ſouſtraire a de b, l'on écrira $b - a$.

De la Multiplication des quantités ſimples.

Pour multiplier une quantité ſimple par une autre, il ſuffit d'écrire tout de ſuite, ſans

aucun ſigne, & ſur-tout ſans y laiſſer d'intervalle, les lettres qu'on veut multiplier; ainſi, pour multiplier a par a, l'on écrira aa, ou bien, pour abréger, l'on peut écrire a^2: ſi l'on multiplie a par b, l'on écrira ab; de même, pour multiplier ces trois lettres a, b, c, l'une par l'autre, l'on écrira abc. L'ordre des lettres n'y eſt pas même néceſſaire; mais il eſt plus commode & il eſt d'uſage de leur conſerver celui que ces mêmes lettres ont dans l'alphabet.

Comme dans l'Arithmétique, lorſque l'on a multiplié un nombre par lui-même, le produit s'appelle un *quarré*, & que, multipliant celui-ci par ſa racine, le produit ſe nomme un *cube*; enfin que ce cube multiplié par ſa racine donne au produit la quatrième puiſſance, & ainſi de ſuite; de même en Algèbre, une lettre multipliée par elle-même donne au produit un quarré, dont cette lettre eſt la racine. Ainſi, lorſque a multiplie a, le produit $a\ a$ ou a^2, eſt un quarré dont a eſt la racine: multipliant a^2 par a, l'on aura a^3, qui eſt un cube, & ainſi de ſuite.

Il faut remarquer ici qu'il y a une grande différence entre une quantité qui eſt accompagnée d'un chiffre en haut vers la droite,

& celle qui ſuit immédiatement un chiffre, lequel eſt à ſa gauche; ainſi entre $2a$ & a^2 il y a une grande différence, de même qu'entre $3a$ & a^3, entre $4a$ & a^4; car l'on entend par $2a$, $3a$, $4a$, la quantité a ajoûtée ſimplement à elle-même deux fois, trois fois, quatre fois; au lieu que par a^2, a^3, a^4, l'on entend des produits, ſavoir, le quarré, le cube, la quatrième puiſſance de a.

Il faut auſſi bien diſtinguer que, dans un produit tel que $a^3 b$, l'expoſant 3 n'a rapport qu'à la quantité a, qui eſt au devant, & qu'il n'influe aucunement ſur la quantité b.

Au reſte, toutes les fois qu'il y aura des *coëfficiens*, c'eſt-à-dire des nombres, ſoit entiers, ſoit rompus, au devant des lettres, il ne faudra pas négliger de les multiplier l'un par l'autre, ſelon les règles de l'Arithmétique, & le produit s'écrira au devant de celui des lettres. Soit, par exemple, la valeur $2a$ à multiplier par $3b$: l'on commencera par multiplier 2 par 3, enſuite a par b, & le produit total ſera $6ab$. Semblablement, ſi l'on propoſe de multiplier $2b$ par c, le produit ſera $2bc$: de même, ſi l'on multiplie $3ab$ par $2cd$, le produit ſera $6abcd$; enfin le produit de $\frac{1}{2}a^2$ par $\frac{1}{3}ab$, ſera $\frac{1}{6}a^3 b$.

De la Division des quantités simples.

Puisque la division sert à résoudre les quantités que l'on a composées en les multipliant, il s'ensuit de-là que, pour diviser une quantité ab par a, il suffit d'ôter la quantité a, c'est-à-dire le diviseur de la quantité ab, qui est le dividende, & de n'écrire au quotient que la quantité qui reste b; divisant de même a^2 par a, le quotient sera a; ou bien divisant a^3 par a, le quotient sera a^2; enfin si l'on propose de diviser abc par a ou par b ou par c, le quotient sera bc ou ac ou ab.

Que s'il y a des nombres ou coëfficiens qui précèdent les lettres, tant du dividende que du diviseur, l'on commencera par la division des lettres précisément de la manière dont on vient de le prescrire; ensuite on divisera les coëfficiens selon les règles de l'Arithmétique, & ce dernier quotient sera mis au devant de l'autre. Soit, par exemple, $6ab$ à diviser par $2a$, l'on aura pour quotient total $3b$.

Que s'il ne se trouve dans la quantité à diviser aucune lettre du diviseur, l'on écrira pour lors le quotient en fraction à l'ordinaire;

ainsi, pour diviser a par b, l'on écrira en fraction le quotient $\frac{a}{b}$: s'il faut diviser ab par c, l'on écrira $\frac{ab}{c}$; & s'il faut diviser ab par d, l'on écrira $\frac{ab}{d}$, & ainsi de suite. Ces quantités ou quotiens d'une division qui n'est qu'indiquée, retiennent le nom de fractions.

Il est à remarquer qu'en divisant a par a, ou $2b$ par $2b$, & ainsi de suite, le quotient doit être 1, parce que toute quantité, telle qu'elle puisse être, se contient elle-même une fois, & qu'ainsi étant divisée par elle-même, l'on a toûjours pour quotient l'unité.

ARTICLE II.

De l'Addition des quantités complexes ou composées.

La principale chose qu'il faut considérer dans l'addition des quantités composées & désignées par les mêmes lettres, se réduit aux signes + & — qui leur appartiennent; car si les signes sont les mêmes précisément, l'addition s'en doit faire de la même manière que celle des quantités simples, n'oubliant

pas de mettre le ſigne qu'elles ont au devant de leur ſomme. Ainſi, pour ajoûter $a + 3b$ à $a + 2b$, l'on ajoûtera a avec a & $3b$ avec $2b$, & la ſomme ſera $2a + 5b$: de la même manière, $2a - b$ ajoûtés à $3a - 3b$, donneront pour ſomme $5a - 4b$.

Lorſque les ſignes ſont différens, il faudra ſouſtraire les unes des autres les quantités repréſentées par les mêmes lettres, de la même manière que cela s'eſt pratiqué dans la ſouſtraction des quantités ſimples avec cette diſtinction eſſentielle, ſavoir, qu'il faut changer les ſignes des quantités à ſouſtraire; enſuite l'on mettra au devant de la différence le ſigne qui appartient à la plus grande des deux quantités. Soit propoſé, par exemple, d'ajoûter $3b + 5a$ à $2b - 2a$: l'on ajoûtera d'abord $3b$ avec $2b$; & ſouſtrayant $2a$ de $5a$, la ſomme ſera $5b + 3a$. Semblablement, ſi l'on ajoûte $a + b$ avec $a - 4b$, la ſomme ſera $2a - 3b$; enfin ſi à $2b + a$, l'on ajoûte $3b - a$, la ſomme ſera $5b$, parce que les quantités $+a$ & $-a$ ſe détruiſent.

Quand il faut ajoûter enſemble des quantités littérales compoſées de différentes lettres,

il suffit de les écrire de suite avec leurs signes; ainsi, pour ajoûter $a + b$ avec $c - d$, il faut écrire $a + b + c - d$.

De la Soustraction des quantités complexes.

Avant que de soustraire les quantités composées d'autres quantités qui sont semblablement composées, il faut commencer par changer tous les signes des quantités à soustraire; il faut ensuite considérer si les quantités (tant celles à soustraire que celles dont on soustrait) ont des lettres semblables ou non : lorsqu'elles en ont semblables, il faut les ajoûter, au lieu qu'il suffit de les écrire simplement avec leurs signes, lorsqu'elles n'en contiennent pas. Soient, par exemple, $a + 3b$ qu'il faut soustraire de $3a + 2b$: si l'on observe les règles précédentes, l'on trouvera pour différence $2a - b$. Enfin, s'il faut soustraire $a + b$ de $c + d$, l'on écrira $c + d - a - b$.

De la Multiplication des quantités complexes.

La multiplication des quantités, tant simples que composées, les unes par les autres,

eſt la même dans le calcul littéral qu'en arithmétique, c'eſt-à-dire qu'après avoir formé ſéparément les produits, on les réunit en une ſomme, laquelle eſt le produit total que l'on cherche. A l'égard des ſignes, il faut ſavoir que les ſignes ſemblables $+$ par $+$, ou bien $-$ par $-$, donnent conſtamment $+$ au produit, au lieu que les ſignes différens, tels que $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, doivent toûjours donner $-$ au produit : c'eſt à quoi il faut avoir attention à meſure que l'on formera les produits particuliers. Ainſi, pour multiplier $a+b$ par c, il faut d'abord multiplier $+a$ par $+c$, enſuite $+b$ par $+c$, & réuniſſant les deux produits $+ac$ & $+bc$, l'on aura $ac+bc$; de même, ſi l'on multiplie $a-b$ par $+c$, le produit ſera $ac-bc$.

Soit encore propoſé de multiplier la quantité $a+b$ par $c+d$; l'on multipliera d'abord $a+b$ par c, comme ci-deſſus, ce qui donnera le premier produit $ac+bc$; enſuite l'on multipliera une ſeconde fois $a+b$ par d, & le ſecond produit ſera $ad+bd$; de manière que le produit total, n'y ayant aucun terme à réduire, ſera $ac+bc+ad+bd$. Si

l'on multiplie pareillement $a - b$ par $c - d$, les règles ci-dessus nous conduisent à trouver, pour le produit total, $ac - ad - bc + bd$; il en est ainsi des autres. on remarquera que, pour multiplier en algèbre, il importe peu que l'on commence par la droite ou par la gauche, n'y ayant pas de nombres ni dixaines, &c. à retenir comme dans l'Arithmétique; mais, d'un autre côté, il faut donner aux signes toute l'attention nécessaire.

Quelquefois l'on se contente d'indiquer uniquement la multiplication d'une quantité composée par une autre: si l'on trouve, par exemple, les valeurs suivantes ainsi écrites, $\overline{a + b} \times \overline{c + d}$, ou $(a + b)\ (c + d)$, c'est une marque que les quantités sont multipliées les unes par les autres.

De la Division des quantités complexes.

La division algébrique des quantités complexes n'est guère différente de celle que l'on pratique dans l'Arithmétique, sinon qu'il importe peu de commencer par la droite ou par la gauche: quant aux signes, l'on y observera les mêmes règles que dans la

multiplication, ſavoir, que $+$ diviſé par $+$, ou bien $-$ diviſé par $-$, doit conſtamment donner $+$ au quotient ; au lieu que $+$ diviſé par $-$, ou bien $-$ diviſé par $+$ donnera toûjours $-$ au quotient. Soient préſentement les quantités $ac + bc$ à diviſer par c. Ayant diviſé ac par c, & enſuite bc par c, le quotient que l'on cherche ſera $a + b$: de même, ſi l'on diviſe $ac - bc$ par c, le quotient ſera $a - b$.

Que ſi l'on propoſe de diviſer une quantité compoſée $ac - ad - bc + bd$, par celle-ci $c - d$, l'on diviſera d'abord ac par c, & l'on écrira a au quotient, de la même manière que cela ſe pratique dans les diviſions de l'Arithmétique ; enſuite multipliant le diviſeur $c - d$ par le quotient a, l'on ſouſtraira du dividende le produit $ac - ad$, & il ne reſte rien : en ſecond lieu, on diviſera $-bc$ par c, & écrivant $-b$ au quotient après le premier quotient a, l'on multipliera le diviſeur $c - d$ par $-b$, & l'on retranchera le produit $-bc + bd$ de ce qui peut reſter au dividende ; on trouve ici qu'il n'y reſte rien, & par conſéquent le quotient total ſera $a - b$.

Exemple d'une Division algébrique.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dividende.} \\ ac - ad - bc + bd \\ -ac + ad \\ \hline \quad 00 \quad 00 - bc + bd \\ \qquad\qquad + bc - bd \\ \hline \qquad\qquad 00 \quad 00 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - b \text{ Quotient.} \\ \hline c - d \text{ Diviseur.} \end{array}$$

Exemple d'une Multiplication.

$$\left.\begin{array}{l} a - b \\ c - d \\ \hline ac - bc - ad + bd \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Quantités à multiplier.} \\ \\ \text{Produit.} \end{array}$$

Lorſqu'il n'eſt pas poſſible d'opérer ſuivant la méthode ordinaire ſur les quantités que l'on propoſe à diviſer, & que par conſéquent cette quantité ne ſauroit être diviſée par l'autre, l'on écrira pour lors le diviſeur au deſſous du dividende, en les ſéparant par une barre, comme une vraie fraction; ainſi, lorſqu'il s'agit de diviſer $ad - ac$ par $d + c$, l'on écrira au quotient $\frac{ad - ac}{d + c}$, ce qui ſignifie uniquement qu'il faudra diviſer le numérateur par le dénominateur, auſſi-tôt que les valeurs qu'on doit aſſigner à ces lettres ſeront connues.

De

De l'extraction des Racines.

En Algèbre, l'extraction des racines se fait comme dans l'Arithmétique; car d'autant que a multiplié par a forme le quarré aa ou a^2, de même extrayant la racine quarrée de aa ou a^2, l'on trouvera a pour sa racine; d'ailleurs, puisque a^2 multiplié par a donne le cube a^3, il doit s'ensuivre qu'en extrayant la racine de a^3, l'on trouvera pour racine cubique a; il en est de même des autres quantités simples.

Présentement, s'il s'agit d'extraire la racine quarrée ou cubique de quantités complexes, l'on suivra le même procédé qu'en Arithmétique pour les racines quarrées & cubiques. Soit, par exemple, la quantité complexe $aa + 2ab + bb$, dont il faut extraire la racine quarrée. D'abord on cherchera la racine quarrée de aa, & l'on trouvera a, laquelle racine multipliée & soustraite de aa, donne o pour reste; l'on multipliera ensuite la racine a par 2, & divisant $2ab$ par $2a$, l'on aura au quotient $+b$ qu'il faut écrire à la racine immédiatement après la première racine a; enfin multipliant $2a$ par b, de même que b par b, les produits seront $2ab$

$+ bb$, qui étant retranchés de la quantité complexe, il reste 0, & l'opération sera achevée; c'est pourquoi la vraie racine quarrée sera $a + b$.

Premier Exemple.

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + bb \Big\} \; a + b \text{ Racine quarrée.} \\ -aa \\ \hline 0 + 2ab + bb \qquad 2a \text{ Diviseurs.} \\ \quad -2ab - bb \qquad 2a + b \\ \hline \quad 00 \quad 00 \end{array}$$

Deuxième Exemple.

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Big\} \; a + b \text{ Racine cubique.} \\ -a^3 \\ \hline 0 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad 3aa \text{ Diviseur.} \\ \quad -3a^2b - 3ab^2 - b^3 \\ \hline \quad 00 \quad 00 \quad 0 \end{array}$$

Soit proposé, en second lieu, d'extraire la racine cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. L'on cherchera d'abord la racine cubique du premier terme a^3, & l'on écrira a à la racine; il faut tripler ensuite le quarré de la racine a, ce qui donne $3aa$; ainsi l'on divisera le second terme $3a^2b$ par le produit $3aa$ que l'on vient de trouver, & puisque b en est le quotient, on écrira

$+ b$ pour le ſecond terme de la racine; l'on achevera l'opération d'abord en multipliant le diviſeur par la nouvelle racine b; en multipliant par 3 le produit du quarré de la ſeconde racine déjà trouvée par la première racine; en prenant pour troiſième terme le cube du ſecond terme de la racine; c'eſt-à-dire qu'il faut, en premier lieu, multiplier le diviſeur $3aa$ par le ſecond terme b de la racine, & l'on ſouſtraira le produit $+ 3aab$ de $3aab$, & le reſte ſera 0; en ſecond lieu, l'on multipliera le triple du quarré de la racine b ou $3bb$ par la première racine a, & l'on retranchera le produit $+ 3abb$ de $3abb$, l'on écrira zéro au deſſous, puiſque l'on ne trouve rien pour reſte; enfin l'on élevera le ſecond terme b de la racine, au cube $+ b^3$ & le retranchant de b^3, comme il ne reſte rien, la quantité $a + b$ eſt la vraie racine que l'on cherche.

Lorſque les quantités, dont il faut extraire les racines, ſont telles qu'on n'en ſauroit trouver la vraie racine par la méthode que l'on vient d'expliquer, l'on écrira au devant le ſigne $\sqrt{}$; ainſi lorſque l'on demande la racine quarrée de ax, l'on écrira $\sqrt{(ax)}$;

ou bien si l'on demande la racine quarrée de la quantité $aa + bb$, l'on écrira $\sqrt{(aa + bb)}$; cette dernière expression est plus simple que s'il falloit réduire en série, en opérant sur les restes de la même manière que l'on extrait, en ajoûtant deux zéros, les racines numériques avec leurs décimales.

En effet, la racine quarrée de $aa + bb$ seroit, selon la règle expliquée ci-dessus, $a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} -$, &c. mais dans les opérations ordinaires, où l'on cherche à démontrer quelque théorème, l'on se contente d'indiquer seulement $\sqrt{(aa + bb)}$.

Au reste, le signe $\sqrt{}$ étant destiné à signifier les radicaux en général, il est nécessaire souvent de connoître de quelle puissance il est le radical. On écrit pour cet effet au dessus les exposans de ces puissances, savoir 2, ou 3, ou 4, &c. l'usage étant de sousentendre le premier, lorsqu'il s'agit seulement de la racine quarrée. Tels sont les signes suivans $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, dont le premier signifie la racine quarrée, le second la racine cubique de la troisième puissance, & les deux autres les racines des quatrième & cinquième puissances, &c.

Pour reprendre encore une fois ici la méthode usitée d'extraire les racines quarrées & cubiques, il suffit de faire attention aux moyens dont on se sert pour élever les quantités à de semblables puissances, c'est-à-dire, au quarré & au cube.

I. D'abord s'il est question d'un binome, quantité qui n'a que deux termes, & s'il faut l'élever au quarré, il est visible qu'en le multipliant par lui-même comme il suit, l'on doit s'apercevoir après l'opération, ou plustôt par le résultat, que l'on a pris le quarré du premier terme, plus deux fois le produit du premier par le second terme, & le quarré du second terme. On indique ici par algèbre tout ce qui seroit fort long à prouver d'ailleurs à l'aide des figures géométriques.

Premier Exemple pour un binome.

$$\begin{array}{rl} & a + b \\ & a + b \\ \hline & aa + ab \\ & \quad\;\; + ab + bb \\ \hline \text{Produit total....} & aa + 2ab + bb \end{array}$$

Autre Exemple pour un trinome.

$$
\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
aa + ab + ac \\
\quad + ab + bb + bc \\
\qquad\qquad + ac + bc + cc \\
\hline
\text{Produit total....} aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc
\end{array}
$$

Quant à la formule qui convient au quarré d'un trinome, l'expreſſion du produit général nous apprend qu'il faut prendre le quarré du premier terme, deux fois le produit du premier par le ſecond terme, & le quarré du ſecond terme, ce qui ne diffère juſqu'ici aucunement de l'expreſſion du binome; mais qu'il faut y ajoûter deux fois le produit du premier par le troiſième terme; plus, deux fois le produit du ſecond par le troiſième terme, & enfin le quarré du troiſième terme.

II. A l'égard du cube, lorſqu'il s'agit d'élever un binome à la troiſième puiſſance, il faut multiplier, comme l'on ſait, ſon quarré par ſa racine; mais, par le réſultat, il s'enſuit qu'il faut d'abord prendre le cube du premier terme; enſuite le triple du quarré du premier terme multiplié par le ſecond; en troiſième lieu, le triple du quarré du ſecond

terme multiplié par le premier terme; enfin le cube du ſecond terme.

Binome élevé à la troiſième puiſſance.

$$
\begin{array}{rl}
 & aa + 2ab + bb \\
 & \qquad\quad a + b \\
\hline
 & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 & \quad\;\; + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
\text{Produit total....} & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Il eſt aiſé de ſe former, par ce moyen, une autre expreſſion pour élever au cube un trinome, quadrinome & autre quantité quelconque, à la troiſième puiſſance; mais il vaut mieux recourir aux formules générales données par *Newton* & par *Moivre*, ou bien aux tables qui ſe trouvent, ſoit dans les ouvrages de *Moivre*, ſoit dans les leçons d'Algèbre, dictées au Collége Royal par l'Abbé *de Molieres*.

La ſubſtitution de ces formules ſert encore à élever une quantité numérique quelconque, compoſée de deux chiffres, par exemple, au quarré & au cube; l'on en a déjà donné, ſur la fin du Traité d'Arithmétique, un exemple pour le quarré. Soit donc préſentement un nombre quelconque 23, qu'il faut élever au cube à l'aide de la formule précédente. On

prendra d'abord le cube du premier terme 2; ſavoir, 8; en ſecond lieu, prenant le triple du quarré du premier terme, ſavoir, 12, on le multipliera par le ſecond terme 3, ce qui donne 36 au produit; en troiſième lieu, prenant le triple du quarré du ſecond terme, ſavoir, 27, on le multipliera par le premier terme, ce qui donne 54 au produit; enfin l'on prendra le cube 27 du ſecond terme, il ne reſte plus qu'à diſpoſer ces produits avec les précautions dont on a averti dans l'Arithmétique. Soient donc réunis tous ces produits en une ſomme.....

```
                    8 . . .
                  3 6 . .
                    5 4 .
                      2 7
                  -------
Ainſi le cube de 23 ſera....1 2 1 6 7
```

REMARQUES.

L'on peut encore élever les trinomes au quarré & au cube, en conſidérant les deux premiers chiffres comme un ſeul & premier terme, & diſpoſant les produits particuliers avec les précautions requiſes; ainſi le cube de 235 ſe trouve, en conſidérant 23 comme un premier terme dont il faut d'abord prendre le cube, ſuivant ce qui eſt indiqué par la

formule du binome; en second lieu, l'on prendra trois fois le quarré du premier terme 529, multiplié par le second terme 5, trois fois le quarré du second terme multiplié par le premier terme, & enfin le cube du second terme 5.

```
12167...
 7935..
  1725.
   125
```

Le cube de 235 = 12977875

Il en est de même du quadrinome que l'on peut considérer pareillement comme un binome, c'est-à-dire que 2351, par exemple, sera composé de 235 & de 1.

Après avoir appliqué déjà, sur la fin du Traité d'Arithmétique, ces principes à démontrer les raisons de chaque procédé à mesure que l'on cherche à extraire les racines quarrées ou cubiques, il reste à les appliquer aux quantités littérales. Ce n'est, comme l'on voit, qu'une opération inverse de la multiplication & de la formation de la puissance, de sorte qu'à l'aide de ces expressions, l'on aperçoit bien plus vîte les raisons de chaque procédé, qu'en se servant de figures géométriques. Il est donc évident que, pour extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque

considéré suivant les dernières remarques, il faut d'abord découvrir la racine quarrée du premier terme, représentée par a, & qu'après l'avoir écrit à la racine, il reste à doubler cette valeur pour obtenir un diviseur $2a$; qu'enfin puisque $2ab$ est un produit, la division de $2ab$ par $2a$ doit donner au quotient la valeur b que l'on cherche; qu'au reste la division achevera l'opération, en formant les produits des valeurs déjà connues, savoir, $2ab + bb$, & les soustrayant, &c.

Semblablement, lorsqu'il est question de la racine cubique, il faut d'abord trouver la racine cubique a du premier terme a^3, qui est vers la gauche, & l'on doit découvrir le diviseur $3aa$, en triplant le quarré de cette racine, parce que le quotient de la division de $3aab$ par $3aa$, étant b, ce sera le second terme que l'on cherche à la racine. Mais parce qu'il est nécessaire d'achever la division, l'on formera les produits $3aab + 3ab^2 + b^3$, des valeurs déjà connues a & b, afin de les soustraire du membre sur lequel on opère; car il n'y a pas de tranches ici, comme dans les nombres, & il suffit d'opérer tout de suite, c'est-à-dire de

telle ſorte que la première racine trouvée ſoit repréſentée par a, & qu'enſuite celles qu'il faut découvrir ſoient repréſentées par b.

Des Fractions algébriques.

Toutes les fois qu'après avoir diviſé les quantités ſimples ou compoſées, il reſte encore une partie de la quantité qu'il n'a pas été poſſible de diviſer, cette quantité comparée avec le diviſeur que l'on doit écrire au deſſous, eſt une fraction, pareille à celles que l'on a vû naître dans l'Arithmétique, après une des diviſions numériques qui n'ont pû s'achèver ſans un reſte. Soit, en général, la quantité ab à diviſer par c, le quotient ſera $\frac{ab}{c}$; ou bien ſi la quantité $ab + bd$ doit être diviſée par $c + e$, l'on doit écrire pour quotient $\frac{ab + bd}{c + e}$.

Que ſi l'on propoſe de réduire un entier quelconque a, à une fraction dont le dénominateur ſoit telle autre quantité que l'on voudra, comme d, ou bien $a + b$; alors multipliant a par d ou par $a + b$, le produit ſera la fraction $\frac{ad}{d} = a$ ou $a = \frac{aa + ab}{a + b}$.

Au reste, lorsqu'il s'agit de diviser aa par bb, & que l'on a écrit $\frac{aa}{bb}$ pour quotient, si l'on venoit à proposer de multiplier ce quotient par le diviseur ou dénominateur bb, il ne faudroit écrire uniquement au produit que le numérateur aa: par la même raison, lorsqu'il faut multiplier une fraction $\frac{bb}{a-b}$ par une valeur qui sera la même que son dénominateur $a - b$, le produit sera bb; or il s'ensuit de-là que, pour multiplier $\frac{a}{2b}$ par $2ab$, puisqu'après avoir multiplié $\frac{a}{2b}$ par le premier membre $2b$, le produit est a, il ne reste plus qu'à multiplier ce produit a par l'autre membre a, pour avoir le produit aa que l'on cherche; il n'y a en cela d'autre artifice que de considérer $2ab$ comme composé de $2b \times a$; autrement l'on aura $\frac{a}{2b} \times 2ab = \frac{a \times a \times 2b}{2b} = aa$.

De la réduction des Fractions à leurs plus simples valeurs.

En général, pour réduire une fraction à

une autre plus ſimple, il faut faire évanouir les lettres qui ſont communes au numérateur & au dénominateur ; ainſi la fraction $\frac{aac}{cd}$ ſe réduira à une autre plus ſimple, ſi l'on fait diſparoître la lettre c; car l'on aura $\frac{aa}{d}$: l'on abrégera de même la fraction $\frac{ab^3}{abc}$; car en faiſant évanouir les lettres a & b, elle ſe réduira à $\frac{bb}{-}$.

Voici une autre fraction que l'on propoſe d'abréger, ayant recours aux opérations ordinaires de la diviſion, ou bien en ſe ſervant du diviſeur commun. Soit $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{cd - dd}$ dont le diviſeur eſt le dénominateur décompoſé $c - d$; mais la règle générale vaut mieux, en diviſant d'abord aac par cd, ce qui donne au quotient $\frac{aa}{d}$ qu'il faut multiplier par $cd - dd$, & le produit ſera $aac - aad$, & on le ſouſtraira: ſi l'on continue de diviſer $- bbc$ par cd, l'on aura $-\frac{bb}{d}$ qu'il faut multiplier par $cd - dd$, ce qui donne au produit $- bbc + bbd$; ainſi

la fraction proposée sera réduite, en l'abrégeant, à $\frac{aa-bb}{d}$.

Cette dernière opération, pour réduire une fraction à une autre plus simple, nous indique un moyen de découvrir la plus petite quantité qui puisse être divisée sans reste par deux ou plusieurs quantités, soit simples, soit composées; c'est pourquoi, pour découvrir la plus petite quantité qui puisse être divisée par deux autres données, telles que aac & cd, l'on disposera celles-ci en forme de fraction $\frac{aac}{cd}$; il faut ensuite réduire cette fraction à une autre plus simple $\frac{aa}{d}$, & disposer ces deux fractions l'une auprès de l'autre, ainsi $\frac{aac}{cd}$, $\frac{aa}{d}$: que l'on en fasse présentement la multiplication en croix, & dans ces deux cas, savoir, de aac par d, & de cd par aa, l'on trouvera le même produit $aacd$; or cette dernière est la plus petite des quantités qui soit divisible sans reste par aac & par cd.

I. Quand deux quantités ne peuvent être réduites à de plus simples expressions, pour trouver la plus petite quantité qui puisse être

divisée sans reste par ces deux valeurs, l'on multipliera l'une par l'autre; ainsi, pour trouver la plus petite quantité qui puisse être divisée par $aa - ab$ & par $a + b$, puisqu'il n'est pas possible de réduire $\frac{aa - ab}{a + b}$ à de plus simples termes, l'on multipliera $aa - ab$ par $a + b$, & la quantité que l'on cherche sera $a^3 - ab^2$.

II. Au lieu de deux quantités, si l'on en propose trois ou davantage, & qu'il faille trouver la plus petite quantité qui puisse être divisée sans reste par celles-là, l'on cherchera d'abord la plus petite quantité qui puisse être divisée par les deux premières, comme dans l'article précédent; l'on cherchera ensuite la plus petite quantité qui puisse être divisée sans reste par celle que l'on vient de trouver, & par la troisième qui a été proposée; enfin l'on continuera de même pour un plus grand nombre de termes.

De la réduction des Fractions à un même dénominateur.

Il faut d'abord chercher la plus petite quantité qui puisse être divisée sans reste

par les dénominateurs, & ce sera le dénominateur commun des fractions que l'on propose de réduire à même dénomination; en second lieu, pour découvrir les numérateurs, il suffit de diviser le dénominateur commun par chacun des dénominateurs successivement, & d'en multiplier, suivant leur ordre, chaque quotient par les numérateurs des fractions proposées; par-là on fixera la valeur de chaque numérateur de ces nouvelles fractions, ayant un même ou commun dénominateur. Soient, par exemple, $\frac{b^3 d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ qu'il faut réduire à même dénomination. Il faut chercher d'abord la plus petite quantité qui puisse être divisée par les dénominateurs aac & cd, & puisque c'est $aacd$, cette dernière valeur sera le dénominateur commun des nouvelles fractions; pour en trouver les numérateurs, il faut, en second lieu, diviser le dénominateur $aacd$ que l'on vient de découvrir, par chacun des dénominateurs primitifs aac, cd, & multiplier les quotiens d & aa par les numérateurs proposés $b^3 d$ & a^3; l'on aura donc au produit deux valeurs qui seront

les

les numérateurs des nouvelles fractions $\frac{b^3 d^2}{a^2 c d}$ & $\frac{a^5}{a^2 c d}$.

De l'addition des fractions.

L'addition des fractions algébriques se fait de la même manière que celle des fractions numériques, puisqu'il suffit d'ajoûter les numérateurs en une somme, lorsqu'elles auront été réduites à même dénomination, & d'écrire au dessous le dénominateur commun. Soient donc proposées ces deux fractions $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{c}$, la somme sera $\frac{aa+bb}{c}$. Soient encore celles-ci $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{d}$, on les réduira d'abord à celles-ci, $\frac{aad}{cd}$ & $\frac{bbc}{cd}$, dont la somme $\frac{aad+bbc}{cd}$ sera la vraie somme des fractions proposées que l'on cherche.

De la soustraction des fractions.

La soustraction se fait aussi de la même manière que celle des fractions numériques, & sur-tout changeant le signe du numérateur de la fraction qui est à soustraire, &

ajoûtant ensuite les numérateurs, pourvû qu'ils appartiennent à des fractions de même dénomination. Ainsi, pour retrancher de la fraction $\frac{bb}{c}$ celle-ci $\frac{aa}{c}$, l'on écrira pour différence $\frac{bb - aa}{c}$; mais si les dénominateurs des fractions proposées, telles que $\frac{bb}{c}$ & $\frac{aa}{d}$, sont différens, on les réduira d'abord à $\frac{bbd}{cd}$ & $\frac{aac}{cd}$, & la différence des deux fractions proposées sera $\frac{bbd - aa}{cd}$.

De la multiplication des fractions.

Il faut multiplier les numérateurs des fractions les uns par les autres, ce qui doit donner le numérateur des produits, & l'on multipliera pareillement les dénominateurs des mêmes fractions les uns par les autres pour en conclurre le dénominateur du produit: l'opération est la même que celle des fractions numériques, pourvû que l'on ait attention à la loi générale, ou règle, touchant les signes. C'est pourquoi, pour multiplier $\frac{ab}{c}$ par $\frac{de}{f}$,

l'on commencera par prendre le produit du numérateur ab par le numérateur de; ensuite l'on prendra le produit du dénominateur c par le dénominateur f, & le produit total sera $\frac{abde}{cf}$.

On trouvera pareillement que $\frac{aa - bb}{c}$ multiplié par $\frac{2ab}{b+c}$ donne au produit $\frac{2a^3b - 2ab^3}{bc + cc}$

A l'égard de l'entier $aa - bb$, qu'on peut proposer de multiplier par une fraction $\frac{aa - ab}{a+b}$; substituant 1 au dénominateur de l'entier, l'on aura $\frac{aa - bb}{1}$: on doit observer aussi que pour abréger, au lieu de $aa - bb$ & du dénominateur de la première fraction $a + b$, l'on peut substituer ces valeurs-ci $a - b$ & 1, qui leur sont égales lorsqu'on veut les réduire : en effet, $aa - bb = (a + b) \times (a - b)$. Présentement, si l'on multiplie ces nouvelles fractions $\frac{aa - ab}{1} \times \frac{a - b}{1}$, l'on aura pour produit $\frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{1}$.

De la division des fractions.

L'on fera d'abord attention si le dénominateur des fractions que l'on propose de diviser l'une par l'autre leur est commun, ou s'il s'y trouve différens dénominateurs.

PREMIER CAS. Lorsque le dénominateur est commun à ces fractions, il faut le laisser comme inutile, & diviser ensuite le numérateur de la fraction qui sert de dividende, par le numérateur de la fraction qui sert de diviseur. Soit, par exemple, la fraction $\frac{ab^3 - c}{c}$ qu'il faut diviser par $\frac{bb}{c}$: négligeant le dénominateur c, il suffit de diviser $ab^3 - c$ par bb, & le quotient sera $ab - \frac{c}{bb}$. Semblablement, s'il faut diviser $\frac{a^3 - abb}{c - d}$ par $\frac{aa + 2ab + bb}{c - d}$, l'on trouvera au quotient $\frac{aa - ab}{a + b}$.

SECOND CAS. Lorsque les fractions ont différens dénominateurs, l'on réduira d'abord, en multipliant en croix, ces fractions à une même dénomination, & négligeant le dénominateur, ce cas doit rentrer dans le pré-

cédent, en ſorte qu'il ſuffira de réduire les termes des numérateurs, ſi cela devient néceſſaire. Soit propoſée la fraction $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$, qu'il faut diviſer par $\frac{aa - ab + bb}{c}$. On multipliera d'abord le numérateur $a^3 - b^3$ de la première, par le dénominateur c de la ſeconde fraction, de même que le numérateur $aa - ab + bb$ de celle-ci, par le dénominateur $a + b$ de la première ; ce qui donne $a^3c - b^3c$, d'une part, & de l'autre, $a^3 + b^3$, & partant le quotient ſera $\frac{a^3c - b^3c}{a^3 + b^3}$. Au reſte, il paroît plus ſimple de réduire avant la diviſion, tant les numérateurs que les dénominateurs, à leurs plus ſimples expreſſions.

De l'extraction des racines des Fractions algébriques.

Pour extraire les racines des fractions algébriques, il faut chercher la racine, tant du numérateur que du dénominateur. Soit propoſé, par exemple, d'extraire la racine quarrée de $\frac{aabb}{cc}$. Puiſque la racine quarrée du numérateur eſt ab, & que celle du dé-

nominateur eſt c, il faut écrire, pour la racine que l'on demande, $\frac{ab}{c}$.

La même méthode a lieu encore, lorſqu'il s'y trouve des coëfficiens numériques. Soit propoſé d'extraire la racine quarrée de $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$. On réduira d'abord la quantité entière à une ſeule fraction, ſavoir, $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$; & parce que la racine quarrée du numérateur eſt $10 - 8x$, & que celle du dénominateur eſt 5, l'on aura donc, pour la racine cherchée, $\frac{10 - 8x}{5}$, c'eſt-à-dire, en réduiſant, $2 \frac{-8x}{5}$.

On trouvera de même la racine cubique de cette fraction-ci,

$$\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 205x^2 - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27},$$

laquelle ſera $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Lorſqu'on ne peut extraire les racines, tant du numérateur que du dénominateur, par les moyens que l'on vient d'indiquer, alors on mettra ſeulement le ſigne radical au devant de la fraction propoſée. Si l'on propoſe, par exemple, d'extraire la racine

quarrée de la fraction $\frac{ab}{cd}$, il suffit de l'écrire ainsi $\sqrt{(\frac{ab}{cd})}$: s'il est question pareillement d'extraire la racine cubique de cette autre fraction $\frac{e}{f}$, l'on écrira $\sqrt[3]{(\frac{e}{f})}$: ces sortes de racines se nomment *sourdes*.

DES ÉQUATIONS.

Une équation n'est autre chose qu'une comparaison mutuelle de deux quantités égales, mais qui se trouvent désignées différemment. Pour en connoître la grande utilité en Algèbre, il est nécessaire de rappeler ici que dans tout problème, soit arithmétique, soit géométrique, lorsqu'il est question de les résoudre, l'on ne se propose autre chose à découvrir que les valeurs de certaines quantités inconnues: tout l'artifice de l'Algèbre, lorsqu'on veut parvenir à découvrir ces inconnues, consiste à faire en sorte qu'une même quantité inconnue soit exprimée de deux manières; qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues, afin que l'on parte de ces premières opérations pour découvrir les valeurs que l'on cherche: l'on va enseigner

bien-tôt les divers moyens d'y procéder.

Il eſt d'uſage encore de diſtribuer les équations en différens degrés, dont celles qu'on nomme du premier degré ſe reconnoiſſent, parce que l'inconnue eſt à la première puiſſance, c'eſt-à-dire, qu'on ne la conſidère, en ce cas, que ce qu'elle peut être en elle-même : les équations du ſecond degré ſont celles où l'inconnue paroît élevée à la ſeconde puiſſance ou au quarré ; celles du troiſième degré, lorſque l'inconnue eſt élevée au cube, & ainſi de ſuite.

Après ce que l'on vient de dire, il eſt viſible qu'en général, dans quelque problème que l'on ait à réſoudre, s'il ne s'y trouve qu'une ſeule inconnue, à quelque degré qu'on la ſuppoſe élevée, il n'eſt beſoin, pour le réſoudre, que de ne commencer par former qu'une ſeule & unique équation ; mais lorſqu'il y a deux inconnues, il faut former deux équations, trois équations pour trois inconnues, & ainſi de ſuite. Il eſt à remarquer encore que, lorſque l'on eſt parvenu à découvrir autant d'équations qu'il y a de quantités inconnues, le problème devient alors *déterminé*, c'eſt-à-dire qu'il n'admet qu'une ſolution déterminée; mais ſi l'on ne

ſauroit parvenir à former autant d'équations qu'il y a d'inconnues, le problème eſt alors de la nature de ceux qu'on nomme *indéterminés*, c'eſt-à-dire, qui admettent un nombre illimité de ſolutions.

Au reſte, lorſque l'on a trouvé les équations qui ſervent à former la valeur des quantités inconnues, il reſte encore à réduire ces équations par les moyens que l'on va indiquer, pour en déduire la valeur que l'on cherche. Or il peut y avoir cinq ſortes de réductions, ſavoir, par addition, ſouſtraction, multiplication, diviſion, & enfin par extraction de racines.

Manière de réduire les Équations par addition.

Soit, par exemple, l'équation ſuivante $z - 3 = 12$: puiſque, ſelon le quatrième axiome, ſi l'on ajoûte à choſes égales des valeurs égales, les ſommes doivent être égales, il s'enſuit qu'ajoûtant de part & d'autre dans l'égalité ou équation ci-deſſus, la quantité $+ 3$, l'on formera cette autre équation $z = 15$; car il eſt inutile d'écrire, dans le premier membre, $+ 3 - 3$, qui valent 0, ou qui ſe détruiſent. L'on opérera

de même ſur toute autre équation, telle que $z - b = 0$, puiſqu'ajoûtant $+ b$ à chaque membre, l'équation ſe réduira à $z = b$.

Il s'enſuit de ce que l'on vient de dire, que toute quantité affectée du ſigne —, dans un des membres d'une équation, peut s'effacer dans ce membre, pourvû qu'on l'écrive dans l'autre membre avec le ſigne + qui eſt contraire; or l'on va faire voir que réciproquement l'on peut faire repaſſer les quantités poſitives dans l'autre membre, pourvû qu'on y applique le ſigne — ou négatif.

De la réduction des Équations par ſouſtraction.

Si l'on propoſe l'équation $z + 3 = 9$, puiſque, ſelon le cinquième axiome, ſi de grandeurs égales l'on en retranche une même ou des grandeurs égales, les reſtes ſeront égaux, il s'enſuit qu'en ſouſtrayant de chaque membre la quantité $+ 3$, il ne reſte que $z = 6$: l'on réduira pareillement l'équation $zz + az = bb$; car en ſouſtrayant de chaque membre la quantité $+ az$, il reſte $zz = bb - az$.

Ainsi cette réduction consiste à faire passer les quantités positives d'un membre dans l'autre, avec le signe — qui les rend négatives.

De la réduction des Équations par multiplication.

Si l'on propose à réduire une équation dont un des membres soit une fraction qu'il faut faire évanouir, telle que $\frac{x}{3} = 5$; puisqu'il a été prouvé dans les proportions, au Traité d'Arithmétique, que les quantités égales, multipliées par une même ou par d'autres quantités égales, sont entr'elles en même raison que ces grandeurs avant la multiplication, c'est-à-dire, que les produits doivent être égaux entr'eux, il doit s'ensuivre qu'en multipliant chaque membre par 3, l'on aura $x = 15$: pareillement, si l'on propose cette équation $z = \frac{aq}{z}$, multipliant chaque membre par z, l'on aura $zz = aq$; enfin, si l'on propose cette autre équation $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$, l'on fera disparoître a au dénominateur du premier membre,

en multipliant le numérateur par a, car il ne reſtera que zz dans ce premier membre; mais pour conſerver l'égalité, il faut en même temps multiplier par a le numérateur du ſecond membre, ce qui donne $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$: l'on procédera de la même manière pour faire évanouir le dénominateur z, puiſqu'il ſuffit de multiplier ſon numérateur par z; mais, pour conſerver l'égalité, l'on multipliera en même temps le premier membre zz par z, & l'on aura $z^3 = azz - abz + abb$.

Ainſi l'on voit, par ces opérations, comment une équation, dont chaque membre eſt une fraction, peut ſe réduire à une autre délivrée de fractions: cela ſe réduit à multiplier en croix le numérateur du premier par le dénominateur du ſecond, & réciproquement le numérateur du ſecond par le dénominateur du premier: au reſte, l'opération deviendra plus ſimple & plus facile, ſi avant toutes choſes l'on réduit les fractions à leurs plus ſimples termes.

Quand l'un des membres de l'équation eſt une fraction, & l'autre un entier quelconque, on réduira celui-ci en fraction,

écrivant l'unité au dessous, & l'on multipliera en croix comme ci-dessus.

Enfin, si l'on propose cette équation, $\sqrt{z} = 5$, il est évident que les quarrés, de même que les cubes, &c. de quantités égales, étant égaux, il suffira d'élever chaque terme à la puissance indiquée par le signe radical; c'est pourquoi, si l'on quarre chaque membre de l'équation ci-dessus, l'on aura $z = 25$. Soit encore cette autre équation $\sqrt{(z)} = \sqrt{(5)}$, il est visible qu'en quarrant chaque membre, le signe radical doit s'évanouir, & qu'ainsi l'on aura $z = 5$.

De la réduction des Équations par division.

Soit donnée l'équation $zz = 4z$: puisqu'il a été prouvé que des quantités égales divisées par une même quantité, ou par des quantités égales, doivent donner des quotiens égaux, il s'ensuit qu'en divisant chaque membre par z, l'équation se réduira à $z = 4$. Soit encore proposée l'équation $3z = 12$: divisant chaque membre par 3, on la réduira à $z = 4$; enfin, si l'on a l'équation $az = ab$, divisant chaque membre par a, l'on aura $z = b$.

De la réduction des Équations par extraction des racines.

Soit l'équation $zz = 25$, que l'on propose de réduire. Il faut se ressouvenir que les quarrés, cubes, &c. qui sont égaux, ont toûjours des racines égales; c'est pourquoi, si l'on extrait la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $z = 5$: de la même manière, si l'on propose l'équation $z^3 = 125$, l'on extraira la racine cubique de chaque membre, & l'on aura $z = 5$. Enfin soit proposée l'équation $zz = aa + 2ab + bb$: ayant extrait la racine quarrée de chaque membre, l'équation sera réduite à $z = a + b$.

Toutes les réductions que l'on fera, en suivant les méthodes que l'on vient d'indiquer, faciliteront les calculs, & conduiront nécessairement à la solution générale des problèmes, comme on va le voir. L'on est d'abord surpris de la simplicité du calcul & de la route abrégée que l'on a suivie en traitant certaines questions, qu'il seroit souvent trop long de résoudre avec le secours de la pluspart des règles d'Arithmétique.

PREMIER PROBLÈME.

Un Particulier a acheté un carrosse, deux chevaux, un jardin & une maison 20000^{l}, sous cette condition, que la valeur des chevaux monte au double de celle du carrosse, celle du jardin au triple du prix des chevaux, & enfin celle de la maison au sextuple du prix du jardin; l'on demande quelle est la valeur de chaque espèce.

SOLUTION.

Supposons qu'on nomme x la première inconnue, savoir, celle du carrosse, il doit s'ensuivre que le prix des chevaux sera $2x$, celui du jardin $6x$, & le prix de la maison $36x$; ainsi l'on aura l'équation suivante, laquelle est du premier degré, $x + 2x + 6x + 36x = 20000^{l}$, & par conséquent $45x = 20000^{l}$; c'est pourquoi, si l'on divise 20000 par 45, l'on aura au quotient la valeur cherchée de x, puisque, selon la réduction de l'équation par la division, l'on a trouvé d'abord $x = \frac{20000}{45}$, & que le quotient étant $444^{l}\frac{4}{9}$, ce sera le prix du carrosse que l'on cherche.

SECOND PROBLÈME.

Trois hommes associés possèdent ensemble un certain nombre d'écus; mais il faut découvrir ce que possède chacun en particulier, les conditions ou données du problème étant que le premier & le second des associés en ont 60; que le second & le troisième associés en ont 120, qu'enfin le troisième & le premier en possèdent 100. Pour résoudre cette question, il faut employer trois inconnues, nommant x le nombre d'écus qu'on doit trouver pour le premier, y pour le second, & z pour le troisième associé.

SOLUTION.

Puisque les trois inconnues entraînent nécessairement trois équations, l'on aura $\left.\begin{array}{l} x+y=60 \\ y+z=120 \\ z+x=100 \end{array}\right\}$, & l'on fera d'abord disparoître l'une des inconnues z, en substituant ses valeurs, comme il suit.

$\left.\begin{array}{l} z=120-y \\ z=100-x \end{array}\right\}$, donc $120-y=100-x$; ou bien $120-100+x=y$, c'est-à-dire, $20+x=y$: de la même manière

manière l'on fera disparoître l'inconnue y, savoir,

$$\left.\begin{array}{l} y = 20 + x \\ y = 60 - x \end{array}\right\}, \text{ donc } 20 + x = 60 - x,$$

c'est-à-dire, $2x = 40$ & $x = 20$. Cette dernière valeur de x, dégagée des autres valeurs, nous apprend à la fin de ce calcul, que puisque le premier & le second associé possèdent 60 écus, il en doit appartenir 40 au second: pareillement, puisque le second & le troisième possèdent 120 écus, il en doit appartenir 80 au troisième, ce qui fait connoître que le premier & le troisième n'en possèdent que 100, conformément aux conditions du problème.

TROISIÈME PROBLÈME.

Trois hommes comptant leurs âges, trouvent la somme des trois âges 160; l'âge du second surpasse de 9 ans celui du premier, & l'âge du troisième surpasse de 4 années seulement la somme des deux âges réunis du premier & du second; l'on demande l'âge de chacun d'entre eux.

SOLUTION.

Puisqu'il ne doit y avoir dans ce problème

qu'une ſeule inconnue, ſavoir, l'âge du premier des trois, il faut donc, pour le réſoudre, ne former qu'une ſeule équation, ſavoir, $x + x + 9 + 2x + 9 + 4 = 160$, c'eſt-à-dire qu'en prenant x pour l'âge du premier, & tranſportant au ſecond membre les caractères $9 + 9 + 4$, ſans oublier d'en changer les ſignes, l'on aura $4x = 160 - 22 = 138$, & par conſéquent $x = \frac{138}{4}$, d'où l'on voit qu'il ſuffit de diviſer 138 par 4 pour découvrir l'âge du premier, lequel ſera de $34\frac{1}{2}$ ans; celui-ci trouvé, ſi on l'augmente de 9, l'âge du ſecond ſera de $43\frac{1}{2}$ ans; enfin l'âge du troiſième ſera $34\frac{1}{2} + 43\frac{1}{2} + 4 = 82$ années; ainſi les trois âges $34\frac{1}{2}$, $43\frac{1}{2}$ & 82, ſatisfont aux termes de la queſtion qu'il a fallu réſoudre.

QUATRIÈME PROBLÈME.

L'âne & le mulet portent un certain nombre de ſacs; l'on propoſe d'ôter un des ſacs du mulet pour en charger l'âne, afin de rendre le nombre de ſacs égaux de part & d'autre; au lieu que ſi l'âne ſe trouve déchargé d'un de ſes ſacs pour en ſurcharger le mulet, celui-ci en auroit pour lors le double de ce qu'en porte l'autre; l'on demande

combien ils ont dû avoir de ſacs avant les changemens. Soit nommé le nombre des ſacs de l'âne x, & le nombre des ſacs du mulet y; comme il ſe trouve ici deux quantités inconnues, il faut par conſéquent former deux équations, pour ſe conformer à l'énoncé du problème : l'on aura donc,

$$x + 1 = y - 1$$
$$y + 1 = (x - 1) \times 2 = 2x - 2.$$

Il s'agit donc de faire évanouir ici l'une des inconnues, ſavoir, y; partant $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$, d'où l'on tire $x + 2 = 2x - 3$, & laiſſant $2x$ tout ſeul dans un membre, & y tranſpoſant, avec un ſigne contraire, x du premier membre, l'on aura $5 = x$; ainſi l'âne a dû porter 5 ſacs, & par conſéquent le mulet en devoit avoir 7.

CINQUIÈME PROBLÈME.

Un Berger a donné à deviner le nombre de ſes brebis, diſant que s'il en avoit le tiers & le quart avec 5 de plus, cela formeroit le nombre de 100 ; l'on demande combien ce Berger doit avoir de brebis dans ſon troupeau.

SOLUTION.

L'on voit d'abord qu'il n'y a dans ce problème, qu'une ſeule inconnue, ce qui ne ſuppoſe qu'une équation à réſoudre; l'on fera donc $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = 100$: maintenant, pour parvenir à laiſſer l'inconnue toute ſeule dans un membre, l'on fera d'abord évanouir les fractions, comme il ſuit; d'abord $3x + x + \frac{3x}{4} + 15 = 300$, & multipliant encore par le dénominateur 4 de la fraction qui reſte, l'on aura $12x + 4x + 3x + 60 = 1200$: faiſant paſſer 60 du premier membre, avec un ſigne contraire, dans le ſecond membre, l'on trouve $12x + 4x + 3x = 1140$, & partant $19x = 1140$, c'eſt-à-dire, $x = \frac{1140}{19} = 60$; ainſi la valeur de x eſt 60, c'eſt à quoi ſe réduit uniquement le troupeau du Berger, en ſorte que ce nombre doit ſatisfaire aux conditions propoſées du problème.

SIXIÈME PROBLÈME.

Trouver le nombre d'écus qui appartiennent à deux Parieurs, dont l'un ſoit

nommé par x, & l'autre par y, les conditions du problème étant que si x donne à y cinq des écus, le nombre de leurs écus sera également partagé, au lieu que si y donne à x cinq de ses écus, alors la somme des écus de x sera triple de celle des écus qui resteront à y.

SOLUTION.

Il faut former ici deux équations, puisque l'on propose deux inconnues : or la première condition sera d'abord remplie par l'équation $x - 5 = y + 5$; la seconde condition nous fournit $3y - 15 = x + 5$: pour faire évanouir l'inconnue x, l'on doit tirer d'abord sa valeur de la première équation, savoir, $x = y + 10$; pareillement l'on tire de la seconde équation $x = 3y - 20$, ce qui donne $y + 10 = 3y - 20$, & par transposition de y du premier au second membre, le laissant seul dans le second membre, l'on a $30 = 2y$, c'est-à-dire, $15 = y$: c'est pourquoi le second des parieurs a dû tenir dans sa main 15 écus, pendant que l'autre en avoit 25, puisque $x = y + 10$; d'où l'on voit que cette

ſolution répond parfaitement aux conditions du problème.

ADDITIONS

Où l'on traite des Équations du ſecond degré.

Si l'on propoſe l'équation du ſecond degré $xx \pm 2ax + aa = 0$, dont le premier membre eſt le quarré de $x + a$ ou de $x - a$, il ſera facile de connoître, en tirant cette racine, la valeur de x, laquelle ſera poſitive ou négative, comme il ſuit, ſavoir, $x \pm a = 0$, c'eſt-à-dire $x = \mp a$. Mais ſi, dans le premier membre de l'équation précédente, l'on étoit réduit uniquement à deux termes, $xx \pm ax = 0$, ajoûtant à chaque membre $\frac{1}{4}aa$, l'équation devient $xx \pm ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$, dont la racine ſera $x \pm \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$.

D'où l'on voit par quel moyen l'on peut découvrir la valeur de l'inconnue, puiſque $x = \mp \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa)}$, ſavoir, en complétant le quarré du premier membre de l'équation propoſée & tirant la racine.

Au reſte, toutes les équations du ſecond

degré, qui ont un ſecond terme, pourront ſe réduire aux quatre formules ſuivantes, ſavoir,

$$1 \quad xx = ax + bb,$$
$$2 \quad xx = -ax + bb,$$
$$3 \quad xx = ax - bb,$$
$$4 \quad xx = -ax - bb,$$

dont les racines poſitives & négatives ſeront au nombre de huit, ſavoir,

$$1 \,\&\, 2 \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + bb)},$$
$$3,\ 4 \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + bb)},$$
$$5,\ 6 \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - bb)},$$
$$7,\ 8 \quad x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - bb)}.$$

On verra dans le problème ſuivant l'application de cette méthode, pour trouver la racine de l'inconnue d'une équation quadratique, à un trinome propoſé préciſément dans le cas où il ſe trouve une inconnue de plus, ce qui le rend plus compliqué.

SEPTIÈME PROBLÈME.

Trouver trois nombres en proportion géométrique continue, dont la ſomme ſoit 20, & la ſomme de leurs quarrés 140.

SOLUTION.

Soit nommé x le premier nombre, & y le ſecond ; il eſt viſible que le troiſième nombre ſera $\frac{yy}{x}$, puiſque $x : y :: y : \frac{yy}{x}$. Or la première des deux équations qu'il faut former, puiſqu'il y a deux inconnues, ſera $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, ou bien $xx = 20x - yx - yy$; & tirant la racine, l'on aura $x = 10 - \frac{1}{2}y + \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$. Telle eſt la valeur du premier nombre x, laquelle eſt encore affectée de celle de y, dont il reſte à la dégager.

Si l'on ôte la valeur de x qu'on vient de découvrir, de même que celle de y, du ſecond membre 20 de la première équation, elle ſera d'abord transformée en celle-ci, $\frac{yy}{x} = 10 - \frac{1}{2}y - \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$, ce qui doit donner la valeur du troiſième terme. Car la ſomme des quarrés des trois quantités x, y, $\frac{yy}{x}$, ſe trouve après avoir ſubſtitué les valeurs de x, toutes réductions faites, de $400 - 40y$; d'où l'on tire l'équation $400 - 40y = 140$,

conformément à l'énoncé du problème. C'eſt préciſément la ſeconde équation qui reſtoit à former, laquelle eſt du premier degré : elle ſe réduit bien-tôt à $y = 6\frac{1}{2}$. Enfin ce terme moyen y étant connu, ſi on ſubſtitue ſa valeur à la place de y dans les valeurs déjà trouvées du premier & du troiſième terme, il en réſultera d'abord $6\frac{3}{4} + \sqrt{(3\frac{5}{10})}$, valeur du premier terme, en ſorte que celle du troiſième terme ſera $6\frac{3}{4} - \sqrt{(3\frac{5}{10})}$.

Éclairciſſemens ſur le calcul précédent.

Ce problème eſt tiré de l'Arithmétique univerſelle de Newton ; pour en faciliter le calcul, on va reprendre ici les équations du ſecond degré, d'où l'on a tiré les racines, de même que celles où il a fallu faire des ſubſtitutions.

I. L'équation du ſecond degré propoſée $xx = \begin{matrix} 20x \\ -yx \end{matrix} - yy$, ou bien $xx \begin{matrix} -20x \\ +yx \end{matrix} = -yy$, ſe réſoudra en achevant le trinome * comme il ſuit, $xx - 20x + 100 + yx - 10y + \frac{1}{4}yy = 100 - 10y - yy + \frac{1}{4}yy$, dont la racine ſera $x - 10$

* Voyez *page* 246.

$+\frac{1}{2}y = \pm\sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$, c'est-à-dire $x = 10 - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$.

II. Pour découvrir la somme des trois quarrés de chaque terme de la proportion géométrique continue que l'on a proposée, il faut substituer la dernière valeur de x, d'abord à la place du quarré du premier terme. Ainsi l'équation $xx = \begin{matrix} 20x \\ -yx \end{matrix} - yy = 200 - 2 \times 10y + \frac{1}{2}yy \begin{matrix} +20 \\ -y \end{matrix} \times \pm\sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)} - yy$.

En second lieu, l'on a $+yy$ pour le quarré du second terme; enfin le quarré du troisième terme de la proportion continue & celui de sa valeur sera $\frac{y^4}{xx} = 200 - 20y - \frac{1}{2}yy \begin{matrix} -20 \\ +y \end{matrix} \times \pm\sqrt{(100 - 10y - \frac{3}{4}yy)}$.

Réunissant les valeurs de ces trois termes, ayant soin d'effacer les termes qui ont des signes contraires, & qui par conséquent se détruisent, il doit rester $400 - 40y$ pour la somme des trois quarrés.

III. Il est visible actuellement que l'équation $400 - 40y = 140$, étant du pre-

mier degré, l'on aura $400 - 140 = 40y$, d'où l'on tire $\frac{26}{4} = y = 6\frac{1}{2}$. Ainsi les trois quantités que l'on cherche, seront $6\frac{3}{4} + \sqrt{(3\frac{5}{10})} : 6\frac{1}{2} :: 6\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} - \sqrt{(3\frac{5}{10})}$.

Moyens usités d'abaisser d'un degré les équations, & d'y faire disparoître l'une des inconnues.

Il faut, comme il a été dit à l'article des équations, *(p. 263)* faire passer d'abord la quantité inconnue que l'on veut faire évanouir, dans un même membre relativement à chacune des deux équations; ayant soin, puisqu'il faut l'y laisser toute seule, de la dégager, s'il est possible, des autres valeurs dont elle est affectée.

En second lieu, s'il arrive que les puissances de cette inconnue ne soient pas les mêmes dans chaque équation, l'on élevera chaque membre de l'équation qui est d'un ou plusieurs degrés inférieure, au même degré que l'autre, en multipliant pour cet effet chaque terme, soit par la racine, soit par le quarré ou le cube de l'inconnue qu'on veut faire évanouir.

On procédera ensuite comme aux problèmes précédens, faisant égales les valeurs d'une même puissance de l'inconnue, & l'on aura, dans cette dernière équation, la puissance de l'inconnue déjà abaissée d'un degré : il n'y a plus de difficulté de continuer, lorsqu'on aura pratiqué une pareille méthode, les opérations pour faire disparoître entièrement l'inconnue, comme on le va voir aux calculs suivans.

Soient les deux équations du dernier problème $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, & $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$. Il s'agit d'y faire évanouir l'inconnue x.

La première de ces deux équations se transforme d'abord en $x + \frac{yy}{x} = 20 - y$; il faut en élever chaque membre au quarré, puisque l'inconnue x s'y trouve d'un degré moins élevé que dans la seconde équation; ainsi l'on aura $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y + yy$, ou bien $xx + yy + \frac{y^4}{xx}$

$= 400 - 40y$, c'eſt à-dire, après avoir fait dans chaque membre la réduction qui doit avoir lieu pour yy. Préſentement la première équation ainſi transformée, doit être comparée à la ſeconde équation; c'eſt pourquoi,

$$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400 - 40y,$$

$$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140;$$

donc $400 - 40y = 140$, & en réduiſant, l'on aura $6\frac{1}{2} = y$, valeur qui ſe trouve ainſi déterminée plus facilement qu'au problème précédent.

REMARQUES GÉNÉRALES

Sur les quantités algébriques qui forment une progreſſion géométrique, & qui ſont exprimées par une ſérie.

Soit la progreſſion géométrique $\div\div a^4 : a^3 : a^2 : a^1 : 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} : \frac{1}{a^4}$, &c. Il eſt viſible que chaque terme, lorſqu'on continue la progreſſion, eſt le quotient du quarré du terme précédent diviſé par celui qui eſt immédiatement auparavant vers la gauche, & qu'ainſi la même progreſſion peut s'écrire

$\div\!\div a^4 : a^3 : a^2 : a^1 : a^0 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3} : a^{-4}$, &c. les exposans étant ici constamment en progression arithmétique.

Il s'ensuit aussi de ce que $\div\!\div aa : a : 1$; puisque a est moyen proportionnel entre 1 & aa, que l'on aura $1 = a^0$, c'est-à-dire que toute quantité qui a zéro pour exposant, doit être prise pour l'unité, comme on l'a déjà exposé *(p. 209)*.

On voit, en second lieu, que toute quantité positive qui est au dénominateur, doit être écrite avec le signe négatif au numérateur; ainsi $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a^4}$, qui répondent à a^{-1} & a^{-4}, doivent être pris sans difficulté l'un pour l'autre, savoir, $\frac{1}{a}$ pour a^{-1}, &c. dans les calculs algébriques.

Au reste, puisqu'il est ici question de la proportion géométrique continue, il paroît nécessaire d'y traiter de certains termes qui sont en usage. Soient $\div\!\div A : B : C : D$, quatre grandeurs qui expriment les termes d'une progression quelconque. Il est visible que la première A aura un rapport à la troisième C, qui est *doublé* de celui de A à B; mais que si l'on compare la première A à la qua-

trième D, ce rapport sera *triplé*, c'est-à-dire, en même raison que les cubes des deux premières grandeurs A & B.

Soient aussi trois autres grandeurs $\alpha : \beta : \gamma$, telles que le rapport de α à la troisième γ, soit exactement le même que celui de la première A à la quatrième D de la progression précédente : il est évident que l'on propose ici une raison doublée égale à une autre qui est triplée. Or, en ce cas, l'on appelle la raison de α à β *sesquialtère (sesquiplicata)* de celle de A à B, puisqu'elle a pour exposant la moitié de la raison triplée.

Ainsi l'exposant d'une raison sesquialtère est formé tant de la raison simple que de la moitié de cette raison. Dans la physique céleste, lorsque l'on prouve que les cubes des distances des planètes au Soleil sont en même raison que les quarrés des temps périodiques (les cubes signifiant la raison triplée, & les quarrés la raison que l'on nomme *doublée*) il doit s'ensuivre que les temps périodiques sont entre eux en raison sesquialtère *(in ratione sesquiplicata)* des distances au Soleil. En effet, si l'on nomme D & d les distances, T & t les temps périodiques, puisque l'on a d'abord cette proportion D^3

$: d^3 :: T^2 : t^2$: tirant les racines quarrées de chaque terme, l'on aura toûjours en proportion géométrique, $D^{\frac{3}{2}} : d^{\frac{3}{2}} :: T : t$, ou bien $\sqrt{D^3} : \sqrt{d^3} :: T : t$, ce qui signifie que la raison simple des temps est en même raison que les puissances $D^{\frac{3}{2}} : d^{\frac{3}{2}}$, ou comme la moitié de l'exposant de la raison triplée de D & d, en un mot comme les racines quarrées des cubes des distances.

FIN.

TABLE

TABLE
DES MATIÉRES.

A

ADDITION, ce que c'est, *page 11*. Simple & complexe, *p. 12 & suiv.* Des Fractions, *p. 91*. Des Fractions de Fractions, *p. 94*. Des signes, degrés, minutes & secondes, *p. 112*. Des quantités simples algébriques, *p. 229*. Des quantités complexes, *p. 234*. Des Fractions algébriques, *p. 257*. Équations réduites par addition, *p. 265*.

Algèbre, sert à démontrer les Théorèmes, en donnant aux caractères toute leur généralité, *p. 122, 125 & 126*. Signes usités (en), *p. 103, 126 & 228*. Formules algébriques pour extraire les racines quarrées & cubiques, *p. 191, 205, 241 & 242*. Série algébrique, *p. 211 & suiv.* Lettres alphabétiques substituées par qui (en) aux caractères arithmétiques, *p. 227*. Est appelée le grand Art, *ibid.* Sa grande utilité, *p. 263*. Emploie dans le calcul les quantités inconnues, conjointement avec celles qui sont connues, *p. 263 & suiv.*

Aliquotes sont les parties égales dans lesquelles un tout est divisé, *p. 72*.

Alliage (la règle d'), *p. 154*. Celle d'alliage

ſimple ou d'égalité, *p.* 155. Règle d'inégalité; *p.* 156 — 159. Raiſons du procédé de la première règle, *p.* 162. Raiſons du procédé dans celle d'inégalité, *p.* 163. Différentes manières de diſpoſer les valeurs dans la règle d'inégalité (d') 159 — 163.

Antécédens (termes), ce que c'eſt, *p.* 118. Proportions où l'on permute (les), *p.* 124. Proportion compoſée en additionnant (les), *ibid.* en ſouſtrayant (les), *ibid.* (Premier & ſecond) dans la proportion directe; (premier & ſecond) dans la proportion inverſe, *p.* 129.

Approximation, d'un quotient, appliquée aux caractères qui reſtent après la diviſion des entiers, *p.* 69; à l'aide de la règle complexe de fauſſe poſition, dans le calcul de l'orbite des comètes, *p.* 165. De la racine quarrée à l'aide des décimales, *p.* 187 — 189. De la racine cubique, *p.* 205. (Autre) de la racine quarrée, *p.* 206; de la racine cubique, *p.* 207.

Argent (l'écu d'), ſes ſous-diviſions, *p.* 21. Différens titres (de l') mêlés enſemble, la valeur moyenne, *p.* 158 & 159. Le titre le plus fin eſt à douze deniers, *ibid.* A varié depuis 25 juſqu'a 30 francs le marc au commencement du ſiècle, *ibid.*

Arithmétique ſe ſous-diviſe en ſpéculative & pratique, *p.* 2. Sa définition, *ibid.* & 226. En quoi diffère de l'Algèbre, *ibid.* & 227. Se démontre communément par les opérations inverſes, *page* 5. Les quatre règles (d'Arith.), *p.* 11 — 72. Les Fractions (d'Arith.) *p.* 72

— *105*. Décimales (d'Arith.) *p. 69 & 105*
— *112*. La proportion (Arith.) *page 114*. Usage des caractères (Arith.) pour démontrer dans toute sa généralité la proportion géométrique, *p. 120*. Prend le nom d'*Algèbre*, lorsque chaque caractère a la signification la plus étendue, *p. 126*. Les opérations de la racine quarrée & cubique ne se démontrent plus, comme autrefois (en Arith.) à l'aide des figures géométriques, *p. 249*.

Arpent, ses sous-divisions, & ce qu'il contient en surface, *p. 21*.

Astronomie (l') emploie dans les calculs les sexagésimales, &c. *p. 108 & 112*.

Axiomes, ce que c'est, *p. 6*. Servent à démontrer comment on réduit les équations algébriques par addition & par soustraction, *p. 165 & 166*.

a°, ce que c'est, *p. 209 & 286*.

B

BILLIONS, ou milliards, ce que c'est, *p. 8 & 9*.

Binome, quantité qui n'a que deux termes, *p. 245*. Élevé au quarré, *ibid.* Élevé au cube, *p. 247*.

Bois, la voie de bois ou demi-corde, sa mesure, *p. 24*.

C

CERCLE, ses sous-divisions, *p. 22*.

Coëfficiens, ce que c'est, *pages 209 & 232*. Manière de trouver (les) dans la formation des puissances, *p. 210*.

Conséquens, sont les seconds & quatrièmes termes d'une proportion, *p. 118.* Proportion géométrique en permutant (les), *p. 124.*

Cube, ce que c'est, *p. 176.* La formation (du) parfait, *p. 204.* Binome élevé (au), *p. 247 & suiv.*

Cubique, toises, pieds, &c. leurs dimensions, *p. 22.* (Nombre) ce que c'est, *page 192.* (Racine) des neuf premiers caractères, *p. 193.* Règle pour extraire la (racine) *p. 194—204.* (Racine) approchée, *p. 205 & 207.* (Racine) algébrique, *p. 242.* Formule algébrique pour extraire la (racine) *p. 205 & 250.*

D

DÉCIMALES, ce que c'est, *p. 68 & 105.* La Multiplication & la Division continuées (en), comment elles se font, *p. 68 & 111.* Réduire les sexagésimales ou tierces (en), *page 108.* L'addition & soustraction (des), *p. 109 & 111.* L'extraction de la racine quarrée (par), *p. 187.* Résultat d'une racine cubique continuée (par le moyen des), *p. 205.*

Degré, ce que c'est, *p. 22.* Ses sous-divisions, & manière abrégée de les désigner, *ibid.* Attention qu'il faut avoir dans l'addition ou soustraction des degrés, *p. 112 & 113.* Comment doivent s'entendre (les) de mouvement, *p. 225.* Équations (du premier & second, &c.) *pag. 264.* Manière de résoudre les équations (du second) *p. 278 & suiv.*

Dénominateur, ce que c'est, *p. 73*. Comment il faut réduire les fractions (à un même) *p. 82 & suiv.* Réduction des fractions quand le numérateur surpasse (le), *p. 85*. Réduire un entier (à tel) que l'on voudra, *p. 86*. L'unité peut être regardée (comme un), *p. 87*. Dans la division des fractions, lorsqu'on les aura réduites à même dénomination (les) deviennent inutiles, *p. 102 & 260*.

Diviseur, ce que c'est, *p. 46*. Commun le plus grand, *p. 78 & 254*.

Division des nombres entiers, *p. 45 — 61*. Autre méthode plus usitée de faire (la), *p. 61*, Des sols en livres tournois & des deniers en sols, *p. 67*. Par décimales, *p. 69*. Des nombres hétérogènes, *p. 70 & suiv.* Ce qui reste (après la) peut être exprimé en une fraction, *p. 73*. Algébrique, *p. 233 & 238*. Des fractions, *p. 101 & 260*. Réduction des équations (par) *p. 269*.

E

ÉGALITÉ, caractère particulier qui désigne en Algèbre l'égalité, *p. 126 & 228*.

Équations algébriques, ce que c'est, *p. 263*. Réduction (des) par addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines, *p. 265 — 271*.

Espace, comment doit être considéré, *page 22*. En superficie ou quarré long, comment doit être mesuré, *p. 218 & suiv.* Ou extension, *page 225*. En lignes, ou surface, ou solide,

devient l'objet de la Géométrie, *p.* 226.

Espèce, réduire un tout (à sa moindre), *p.* 70.

Exposans, comment doivent s'écrire à la droite, *p.* 209. Leurs rangs dans les séries, *p.* 210 *&* *suiv.* Fractionnaires substitués aux racines, 211.

Exterminer, méthodes (pour) ou expulser les quantités inconnues dans les équations du premier degré, *p.* 272, 275 *&* 277. Autre méthode pour les équations du second degré, *p.* 281 — 284.

Extraire la racine, ce que c'est. *p.* 177 *&* 241. La racine quarrée, *p.* 178 — 187. Méthode plus usitée, *p.* 187 *&* *suiv.* Par approximation, *p.* 189 *&* 206. La racine cubique, *p.* 192 — 203. Par approximation, *p.* 205 *&* 207. La racine des fractions algébriques, *p.* 261 — 263. Les racines des équations, *p.* 270 *&* 280.

F

FORMATION des puissances, *p.* 175, 192, 204, 209 *&* 247.

Formules algébriques, *p.* 191, 205, 211 *&* 212. Servant à la formation des puissances, *p.* 192 *&* 206. Pour un binome au quarré, *p.* 245. Un trinome, *p.* 246. Pour un binome au cube, 247 — 249.

Fractions, vulgaires & décimales, *p.* 72 *&* 74. Égalité (de), *p.* 75. Manière de les réduire aux moindres termes, *p.* 78; à même dénomination, *p.* 82. Réduire les nombres entiers

(en), *p. 86.* Addition, soustraction, &c. (des) *p. 91 — 105.* Réduire (les) à des décimales, *p. 106.* Astronomiques ou sexagésimales, *112.* Algébriques, *p. 251 — 263.*

G

GÉOMÉTRIQUE (proportion), ce que c'est, *p. 115.* La nature & espèces (de proportions), *p. 117.* Théorème qu'il faut savoir sur la (proportion), *p. 119.* La (proportion) continue, *p. 122.* Manière de transposer les quatre termes sans altérer la (proportion), *p. 123.*

Grains, le muid de grains, ses sous-divisions, *p. 23.*

Grandeur, qui surpasse celle qui suit, comment est indiquée en se servant du signe >, *p. 126 & 168.*

Gros, ses sous-divisions, *p. 21.* Caractère dont se servent les Chymistes pour désigner (le), *ibid.*

Guinée, monnoie d'or, *p. 170.* (20) valent 21 sterlings, *ibid.*

H

HARMONIQUE, (la proportion qu'on nomme), *p. 114.*

Hautes puissances, théorème général pour la formation des plus hautes, *p. 211.*

Hétérogènes, (quantités), *p. 19, 30, 67, 70.* Manière de multiplier l'une par l'autre (les quantités), *p. 212 — 222.*

Heure, ses sous-divisions & la manière abrégée de les écrire, *p.* 22. Est composée de parties hors les unes des autres, *p.* 225.

I

Inconnues, (grandeurs) servent à déterminer la nature des équations, *p.* 264. Le nombre (des) fixe pareillement celui des équations qui doivent servir à résoudre les problèmes, *ibid.*

Induction ou méthode abrégée que le calcul fournit pour en déduire en général la formation des puissances, *p.* 209.

Infini, signification vulgaire de ce mot, par opposition de l'idée que l'on a du nombre fini, *p.* 223. Passage par (l'), se démontre par les tangentes en Géométrie, *p.* 224. Quantités susceptibles d'augmenter ou de diminuer à (l'), *ibid.* Décimales, suite ou série qu'on peut le plus souvent continuer à (l'), *p.* 69, 187, 205, 211 & 244.

Intension, quantité finie de la seconde espèce, *p.* 224. Doit s'entendre des degrés de mouvement appliqués successivement à un même corps, *p.* 225.

Inverse (la proportion) ou réciproque, *p.* 128. (La règle de Trois), *p.* 133. (Rapports), *p.* 124.

Irrationnelles, quantités dont on nomme les racines, *racines sourdes* & qui sont désignées par le signe radical, n'étant pas les racines de quarrés ou cubes, &c. parfaits, *p.* 209.

L

Livres de poids se sous-divisent en marcs, onces, gros & deniers, *p.* 21. La valeur de l'écu est de (trois) en monnoie, *ibid.* (La) vaut vingt sols, *ibid. p.* 19, 30 *&* 31. Manière abrégée de convertir les sols (en), *p.* 67.

Logarithmes, leur usage & leur construction expliqués dans la seconde édition des élémens de Géométrie, composés à l'usage de M. le Duc de Bourgogne, *p.* 226.

M

Marc vaut une demi-livre, *p.* 21. Ses sous-divisions, *ibid.* (Le) d'argent à différens titres, *p.* 158 *&* 159. Sa valeur numérique, qui n'est point fixe & qui a doublé, étoit de 25 francs il y a quarante ans, *ibid.*

Mathématiques (la science des) a pour objet la quantité finie & ses différens rapports qui peuvent varier à l'infini à mesure qu'elles croissent & diminuent, *p.* 223. *Pures* & *mixtes*, en quoi diffèrent, *p.* 225.

Méthode générale pour élever un binome à une puissance quelconque, *p.* 209 *&* 211. (Autre) générale pour résoudre les équations algébriques du premier degré, *p.* 264 ; celles du second degré, *p.* 278 *& suiv.*

Moyens proportionnels, (les termes qui sont), *p.* 118. Leur produit égal à celui des termes

extrêmes, *p. 119*. Le quarré du terme moyen égal au produit du premier & du troisième dans une progression géométrique, *p. 122*.

Moins, quel est le signe algébrique de la soustraction, *p. 126 & 228*.

Moivre, fameux Analyste dont on indique les méthodes pour élever un polynome à une puissance quelconque, *p. 247*.

Muid, ses différentes espèces & valeurs, *p. 23*.

Multiplication, des quantités hétérogènes, traitée dans un article séparé, *p. 212*. Le produit qui naît (de la) de deux nombres, doit être considéré comme une surface ou quarré long, *p. 218 & 219*. Signe algébrique (de la), *pag. 212 & 228*.

N

NEWTON, son théorème ou série pour élever un binome à une puissance quelconque, *p. 211*. Emploie le même théorème à découvrir les racines par approximation, *ibid.* Problème sur les équations du second degré, tiré de l'Arithmétique universelle (de), *p. 280*.

Nombre entier & rompu, *p. 2 & 73*. Raison ou rapport (des), *p. 3*. Homogène & hétérogène, *p. 4*. Représentés par dix caractères, *p. 7*. Addition, soustraction, multiplication & division des nombres entiers, *p. 11 — 72*. Puissance (des) & extraction de leurs racines quarrées & cubiques, *p. 175 — 207*. Quarrés &

cubes parfaits, *p. 179 & 193*. Addition, soustraction, multiplication & division (des) rompus, *p. 72 — 105*.

Numérateur d'une fraction, ce que c'est, *p. 73*. Réduction (du) quand il surpasse le dénominateur, *p. 85*. Dans l'addition & soustraction (des) il faut prendre garde à réduire auparavant les fractions à un même dénom. *p. 91 — 95*. Dans les divisions Arithmétique & algébrique des fractions, l'on abandonne les dénominateurs après la multiplication en croix, comme inutiles, *p. 101 & 260*.

O

ONCE, ses sous-divisions, *p. 21*. Caractère dont se servent les Chymistes pour désigner (l'), *ibid.*

Or, (la règle d'), *p. 128*.

Orbites des comètes, sont déterminées à l'aide de la règle de fausse position, *p. 165*.

Orfèvre, comment doit calculer le prix moyen d'argent de différens titres après la fusion, *p. 158*. Comment (l') doit déterminer à un prix proposé l'argent d'un vase, lorsqu'il a d'autre argent de différens titres, tant au dessus qu'au dessous, *p. 159 — 164*.

P

PARTIES, aliquotes, ce que c'est, *p. 72*. Manière de réduire un tout composé (de différentes) à sa plus petite espèce, *p. 70*.

Pinte, ses sous-divisions, *p. 23 & suiv.* Contient 48 pouces cubes, *ibid.*

Plus, quel est le signe algébrique de l'Addition, *p. 126 & 228.*

Plus (la) petite quantité, ou grandeur désignée en se servant d'un caractère particulier, *p. 126 & 168.*

Produit, produisant ou facteur, ce que c'est, *p. 34.* S'abrège quelquefois lorsqu'il s'y trouve des zéros, *p. 43.* Algébrique, *p. 231 & 237.* Manières d'indiquer (un) quelconque algébrique, *p. 238.*

Progression, ce que c'est, *p. 118.* Propriété du quarré du terme moyen (de la) géométrique, *p. 122.* Autres propriétés (de la) géométrique, *p. 124 & 125.*

Proportion, ce que c'est, *p. 113 & suiv.* Définition générale (de la) géométrique, *p. 115.* Géométrique continue, *p. 117.* Fameux théorème déduit des propriétés (de la) géométrique, *p. 119.* La règle de Trois (ou de) *p. 128 & 131.* Inverse ou réciproque, *p. 128 & suiv.*

Puissances des nombres, ses variétés, *p. 175.* La formation (des), *p. 209 & 211.* Les exposans (des) peuvent être désignés par des fractions, *p. 211.* Exposans d'une puissance indéterminée, *ibid.* Manière dont on substitue les quantités numériques dans la formule générale d'un binome, lorsque (la) est déterminée, *p. 212.*

Q

Quadratiques, équations du second degré, (& qu'on nomme), *p. 280 & 281*. Artifice pour compléter l'un des quarrés des (équations), *pag. 279 & 281*.

Quantités, signification de ce mot, *p. 1 & 223*; infinies, définition vulgaire de la nature (des) *p. 223*; positives opposées (aux) négatives, *p. 224*; complexes, *p. 229*.

Quarré, ce que c'est, *pag. 176, 219 & 241*. Nombres (parfaitement), *p. 179*. Deux méthodes pour former (un), *p. 176 & 192*.

Quarrée, manière d'extraire (la racine), *p. 178, 180 & 241*. Autre méthode, *p. 187*. Formule algébrique pour diriger l'opération, *p. 191 & 241*. (Racine) continuée à l'infini, *p. 244*. (Racine) des fractions algébriques, *pag. 261 & suiv.*

Queue (la) de Bourgogne & celle de Champagne, en quoi diffèrent, *p. 24*.

Quotient, ce que c'est, *p. 46*. Se découvre plus facilement dans les sous-divisions des livres, sols & deniers, *p. 67*. Continué avec des décimales, *p. 69*. (Deux) ou fractions égales, *p. 75*. (Autres) semblables, *p. 76 & 77*. Fraction (ou) qu'il faut réduire à ses moindres termes, *p. 78*. Comment (le) peut s'abréger quelquefois, *p. 81*. (Le) d'une fraction se découvre en multipliant en croix & négligeant le

dénominateur commun, *p. 101 & 260.* Algébrique, *p. 233 & 239.*

R

RACINE, signification de ce mot, *pag. 176 & 241.* Différentes espèces (de), *p. 177.* Algébrique, *p. 242.* Algébrique indiquée seulement, *p. 243 & 244.* Le signe (de la) algébrique, *ibid.* Infinie, *p. 187, 205 & 244.* Des équations quadratiques, *p. 279 & 281.*

Raison, ou *rapport*, sa définition, *p. 3.* L'égalité (de) se nomme proportion, *ibid. 75 & 113.* (La) doublée, triplée & sesquialtère, *p. 286 & suiv.*

Règle (la) de Trois, *p. 128 & 136.* Inverse de Trois, *p. 133.* De Société ou de Compagnie, *p. 141 — 154.* d'Alliage, *p. 155 — 164.* De fausse position, *p. 165 — 175.* Pour abaisser d'un degré les équations quadratiques, *p. 283 & 284.*

S

SIGNES (les) algébriques, *p. 126 & 228.* La fraction $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. peut être substituée (aux) radicaux, *p. 211.* Radicaux, *p. 243 & suiv.* Astronomiques, *p. 112.* Attention que le Calculateur doit avoir dans le passage des degrés (aux), *ibid.*

Z

ZÉRO ou 0, *p. 7, 17.* S'ajoûte continuellement à la suite des nombres entiers, lorsqu'on veut

découvrir les décimales, *p. 68.* Eſt ſéparé par une virgule aux décimales, *p. 69, 187, &c.* Ne doit pas s'oublier dans le cours des opérations de la Diviſion, extraction des racines, &c. *p. 49 & 188.* La quantité qui (a) pour expoſant, eſt égale à l'unité, *p. 209 & 286.* Les quantités poſitives paſſent par (le) pour devenir négatives, *p. 224.*

Fautes à corriger.

Page 210, ligne 18, au lieu de troiſième, *liſez* quatrième.

Page 224, ligne 20, après ces mots, c'eſt ainſi que, *ajoûtez* la tangente d'un arc de nonante degrés paſſe par l'infini, après avoir pris ſucceſſivement ſes degrés d'accroiſſement, & que d'ailleurs.