Gründlicher und ausführlicher

Unterricht

zur

praktischen Geometrie

von

100/2

Johann Tobias Mayer,

Königl. Grosbritt. Hofrath und Professor zu Göttingen.

Vierte verbesserte und vermehrte Auflage.

Zweyter Theil,

mit sieben Kupfertafeln.

Göttingen,

im Verlage bey Vandenhoek und Ruprecht.

1816.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

Vorerinnerung.

Daß ich den zweyten Theil meiner praktischen Geometrie, mit den Untersuchungen über die Fehler beym Winkelmessen anfange, hierauf zur Prüfung der Werkzeuge fortgehe, und noch einige Vorrichtungen beschreibe, wodurch Werkzeuge zum Winkelmessen einen höhern Grad von Vollkommenheit erlangen können, dies hielt ich für nützlicher, als sogleich vom Winkelmessen zur Entwerfung der Figuren auf dem Felde fortzugehen; denn eben die richtige Ausübung des letztern hängt von diesen Kenntnissen ab, und ein Feldmesser, der anders so viel Theorie verstehet, als zum Verstande der erstern Kapitel dieses zweyten Theils erforderlich ist, wird mir hierin sicher Beyfall geben. Aber sollte sich nicht mancher Feldmesser, durch einige Buchstabenrechnungen, die ihm hiebey in die Augen fallen, abschrecken lassen, sich den Inhalt davon bekannt zu machen? Ich glaube nicht; er müßte denn gar zu unwissend seyn, und nicht einmahl die vornehmsten Lehren der Elementargeometrie und Trigonometrie inne haben. – Wer aber die Lehre von den Kugelschnitten, und den Lagen der Ebenen gegeneinander, sich wohl bekannt gemacht hat, wird gewiß wenig Schwürigkeit finden, den Inhalt des Xten und XIten Kapitels zu verstehen, weil ich in Auseinandersetzung der darin vorkommenden sphärischen Dreyecke, so umständlich verfahren bin, daß wenn man die in den trigonometrischen Lehnsätzen beygebrachten Formeln für die Auflösung der sphärischen Dreyecke, auch ohne Beweis, nur als Vorschriften ansiehet, nach denen man rechnen kann, so bald man verstehet, was ihr Ausdruck in Buchstaben, für eine Bedeutung hat, die Anwendung dieser Formeln auf die Untersuchungen im Xten und XIten Kapitel keine Schwürigkeit verursachen kann. Die Bedeutung der erwähnten Formeln läßt sich aber gar leicht ins Deutsche übersetzen, wenn man nur weiß, daß z. E. Ausdrücke von der Art

$$\sin A + \sin B;\ \sin A - \sin B;\ \sin A \sin B;\ \frac{\sin A}{\sin B}$$

u. s. w. Summen, Unterschiede, Producte oder Quotienten von ein paar Sinussen bedeu-

bedeuten. Daher überlasse ich es jedem Anfänger, die Ausdrückungen durch Buchstaben, die in oberwähnten Kapiteln vorkommen, selbst in Worte zu übertragen; eben diese Erinnerung gilt für das XVIIte Kapitel, dessen Inhalt einem Feldmesser doch gewiß sehr nöthig ist, aber ohne Hülfe der Buchstabenrechenkunst sehr weitläuftig und ermüdend ausgefallen seyn würde.

Solchergestalt wird, nach einer kleinen Uebung, die kurze Sprache der Mathematiker in die gewöhnliche überzutragen, mancher Feldmesser, der sonst gewohnt ist, Anwendungen der Buchstabenrechnung in der praktischen Geometrie für Pedanterie zu halten, eine vortheilhaftere Meinung von dieser Abkürzung des Vortrags erhalten, und von der Ungereimtheit seiner erstern Meynung überzeugt werden.

Wer aber demohnerachtet anders denket, der muß freylich einige Kapitel dieses Buches übergehen, und nur diejenigen lesen, die er zu verstehen glaubt. — Er wird dennoch Nutzen davon haben, weil ich das beste, was mir aus eigenen und andern Erfahrungen bekannt ist, gesammlet, und alle Handgriffe und Vorsichten dabey beschrieben habe.

Die

Die Lehren von Ausmessung der Weiten und Höhen, im XVten und XViten Kapitel, sind einfache geometrische Operationen, und enthalten die Gründe zu der Entwerfung ganzer Figuren, die ich im XIXten Kapitel vorgetragen habe; man wird in diesem Kapitel nicht leicht eine Methode vermissen, der man sich demnächst unter diesen oder jenen Umständen, mit Vortheil beym würklichen Landmessen bedienen kann. Die Anwendung dieser Methoden, werde ich aber im folgenden Theile dieses Buches mit mehrerem auseinander setzen.

Das XVIIte Kapitel, und andere im Buche zerstreute Stellen, werden manchen Feldmesser, der den Gebrauch des Astrolabii verachtet, und sich wundert, daß man auf Akademien, Lehrlingen der praktischen Geometrie dieses Werkzeug empfiehlt, überzeugen, daß dieses Instrument doch so gar unbrauchbar nicht sey, ja schlechterdings erfordert werde, Arbeiten, die ins Große gehen, mit Richtigkeit auszuführen. Freylich werden dazu Winkelmesser erfordert, die etwas anders aussehen, als gemeine Mechanici sie vor 50 und mehreren Jahren verfertigten; aber ein Feldmesser muß in seiner Wissenschaft eben so weit zurücke seyn, der jetzt keine andern Winkelmesser kennt, als solche mit bloßen Dioptern, und auf denen man höchstens viertheł Grade, oder durch Transversallinien allenfalls 10 Minuten erhalten kann.

Aber wird mancher denken, was helfen genauere Werkzeuge, da man doch die Winkel mit dem Transporteur nicht genauer zu Papiere bringen kann? Diese Frage wird niemand thun, der andere Methoden, z. E. die im 184. §. kennt, wodurch man in der Ausübung alle mögliche Schärfe erhalten kann.

Man muß unterschiedene geometrische Werkzeuge immer nach der Absicht beurtheilen, zu der sie vorzüglich brauchbar sind So bedient man sich z. B. zur Messung der Figuren aus ihrem Umkreise immer lieber des Meßtisches, als des Astrolabii, weil bey dieser Operation selten sehr lange Linien vorkommen, und diese Arbeit meistens nur beym Detail einer Messung gebraucht wird, wobey sehr viele Kleinigkeiten und Nebenumstände anzumerken sind, die beym Gebrauch des Astrolabii, ein zu weitläuftiges und verworrenes Diarium geben würden.

den. Wo aber beym Feldmessen sehr lange Linien vorkommen, wie z. B. in dem Falle, da man aus Standlinien das sogenannte Netze einer Landschaft entwerfen will, und wo doch alle nöthige Richtigkeit erhalten werden soll, da wird man sich keines Instruments als eines Astrolabii bedienen, vorzüglich wenn diese Messung auf ein ganzes Land erstreckt wird, wobey man viele einzelne Entwürfe zusammenhängen muß.

Ich hätte für die Auflösung verschiedener Aufgaben, z. B. für die in §§. 141. 197. 199 VI. VIII. X., 236. (120) gegebenen Formeln, berechnete Tafeln liefern können, wenn ich nicht befürchtet hätte, gegenwärtiges Werk dadurch weitläuftiger zu machen, als nöthig ist, da sich überdem oft nach den Formeln eben so geschwind rechnen läßt, als nach Tafeln, die oft ein mühsames Suchen der Proportionaltheile erfordern.

Göttingen, im März 1779.

Joh. Tobias Mayer.

Vorerinnerung
zur zweyten Auflage.

Von den Vermehrungen, welche dieser zweyte Theil erhalten hat, erwähne ich nur einige.

Zu §. 153. ist einiges das Kalibriren und Ausschleifen der Libellen betreffendes hinzugekommen.

Wie man den Durchschnitt der beyden Kreuzlinien im Fernrohre prüfen kann; ob er in der Axe desselben liege, zu §. 156.

Elevationswinkel zu messen, die Libelle mag, wie man will, fehlerhaft seyn, §. 156. III. Ich finde dieses Verfahren äusserst bequem, und habe mich desselben bedient, die Correctionen der Libelle an einem Werkzeuge zu bestimmen, dessen ich mich zur hiesigen Polhöhe bedient habe.

Zu der Lehre von Micrometern ist das Verfahren, sie mit Flußspatsäure auf Glas zu ätzen, hinzugekommen. Ich habe einige auf diese Art verfertigt, welche in Ansehung der Feinheit der Linien, vollkommene Genüge leisten.

Die gehörige Richtung des Meßtisches an jeder Station hat Hr. Conrector Voigt in Quedlinburg, in seinen Versuchen zur Erleichterung der praktischen Geometrie, für ein höchst difficiles Problem gehalten. Deßwegen fand ich im 183. § nöthig, mich darüber etwas umständlicher, als in der vorhergehenden Ausgabe, auszulassen.

Zur Aufgabe des 186. §. ist nebst andern Zusätzen auch eine wichtige Bemerkung Hrn. Hofr. Kästners hinzugekommen.

Hrn. C. Voigts Secundenmesser §. 189.

Die Höhe eines Meteors zu messen, ist nach Hrn. Hofr. Kästner in 195. §. gezeigt worden.

Zum 199. §. ist verschiedenes zur Berechnung des geographischen Gefälles neu hinzugekommen.

Ferner

Ferner verschiedenes zum 227. §.

Zu §. 235. Hrn. C. Voigts Art, den Parallellismus des Meßtisches an jeder Station zu erhalten.

Das XIXte Kapitel hat noch einige Aufgaben erhalten, welche als Hülfsmittel zur Aufnahme der Gegenden unterweilen sehr vortheilhaft sind. Auch ist einiges noch beym Messen der Höhen umständlicher zu betrachten nöthig gewesen. Einzelne kleinere Zusätze, auch Aenderungen des Vortrags, übergehe ich.

Erlangen, im Sept. 1792.

Joh. Tobias Mayer.

Vorerinnerung
zur dritten Auflage.

Dieser zweyte Theil hat, wie der vorhergehende, mehrere litterärische Notizen und Zusätze erhalten, unter denen ich nur die §. 156. V. gegebene Beschreibung einer zur genauen Horizontalstellung einer Ebene tauglichern Libelle als die gewöhnliche cylindrische Wasserwaage ist, und einen am Ende des Buchs zur Lehre von den Micrometern gehörigen sehr nöthigen Zusatz anführe. Kleinere Bemerkungen übergehe ich hier. Auch ist in den Figuren einiges geändert und verbessert worden.

Göttingen, im Sept. 1802.

Joh. Tob. Mayer.

Vorerinnerung

zur vierten Auflage.

Die erheblichsten Zusätze, welche diese neue Auflage des zweyten Theiles erhalten hat, sind die Anmerkung zum 150ten §., und am Ende dieses Theiles die weitere Ausführung der Lehre vom Höhenmessen mit dem Barometer, nach den neuesten Verbesserungen, welche man der de Lucschen Regel so wohl in Ansehung der in ihr vorkommenden beständigen Größen, als auch in Rücksicht der geographischen Breite und der von unten nach oben abnehmenden Schwerkraft zu geben, für nöthig befunden hat. Zur Zeit als die dritte Auflage dieses Theiles erschien, kannte man entschieden keine bessere Regel als die de Lucsche, und bis jetzt ist es

noch

noch nicht vollkommen ausgemacht, ob der beständige Coefficient in ihr nemlich die Zahl B = 9221 (M. s. a. a. O. 18 rc.) dem Ramondischen B = 9408 (das. 24.) nachstehen muß.

Göttingen im April 1816.

Joh. Tob. Mayer.

Inhalt

Inhalt
der trigonometrischen Lehnsätze.

Inhalt

des zweyten Theils.

X. Kapitel.

XI. Kapitel.

XII Kapitel.

XIII. Kapitel.

XIV. Kapitel.

XV. Kapitel.

Regel

XVI. Kapitel.

XVII. Kapitel.

Wie

XVIII. Kapitel.

XIX. Kapitel.

Fortsetzung der im ersten Theile dieses Buches beygebrachten trigonometrischen Lehrsätze.

Untersuchungen, um wie viel sich die trigonometrischen Linien ändern, wenn ihre zugehörigen Bogen oder Winkel, um etwas geringes wachsen, oder abnehmen.

XXV. Es ist schon aus der gemeinen Trigonometrie bekannt, daß, wenn die Bogen oder Winkel zunehmen, auch die Sinusse, Tangenten und Secanten derselben wachsen, die Cosinusse, Cotangenten und Cosecanten aber abnehmen, so lange die Bogen unter 90° bleiben. — Wenn sie über 90° gehen, so nehmen die Sinusse derselben u. s. w. wieder ab, und die Cosinusse u. s. w. wachsen. Es ist klar, daß diese Aenderungen der Bögen und der zugehörigen trigonometrischen Linien von einander abhängen. — Da nun die Lehren hievon in dem Falle, wenn die Winkel oder Bogen sich nur um etwas weniges ändern, künftig bey Berechnung der Folgen der Fehler, wie auch bey andern Gelegenheiten großen Nutzen haben, so werde ich jetzt zeigen, wie man aus der Aenderung eines Bogens, die Zu- oder Abnahme der zugehörigen trigonometrischen Linie auf eine leichte Art finden könne.

XXVI. Es bedeute also a einen gewissen Bogen, und $a + \alpha$ einen andern Bogen, welcher von dem ersten um den kleinen Bogen α unterschieden ist; Es frägt sich, um wie viel der Sinus von $a + \alpha$, von dem Sinus des Bogens a unterschieden seyn wird.

Um dieses zu bestimmen, so überlege man, daß

$$\sin (a + \alpha) = \sin a \cos \alpha + \cos a \sin \alpha$$

ist (Trig. S. XII. 1).

Weil nun α einen sehr kleinen Bogen bedeuten soll, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß der Sinus desselben dem Bogen selbst, der Cosinus aber dem Sinus totus gleich sey. — Da wir also den Sinus totus $= 1$ setzen, so ist ohne großen Irrthum

$$\cos \alpha = 1, \ \sin \alpha = \alpha.$$

Sub-

Substituirt man also diese Werthe in obigen Ausdruck, so bekömmt man

$\sin(a+\alpha) = \sin a + \alpha \cos a$ Mithin

$\sin(a+\alpha) - \sin a = \alpha \cos a.$

Wenn also der Bogen a um α wächst, mithin a sich in $a+\alpha$ verwandelt, so ist der Sinus des Bogens $a+\alpha$ um den Werth $\alpha \cos a$ größer, als der Sinus des Bogens a, oder $\sin a$ wächst um $\alpha \cos a$, wenn a um α zunimmt.

In dieser Formel ist nun zu bemerken, daß man statt α nicht den Werth dieses Bogens in Minuten oder Secunden, sondern vielmehr in Decimaltheilen des Sinus totus setzen müsse. Wäre nun der Bogen α z. E. in Secunden gegeben, so wird dessen Werth in Decimaltheilen des Sinus totus $= \frac{\alpha}{206264}$ (Trig. S. IV. VII.) und diesen Ausdruck muß man eigentlich statt α brauchen. Daher ist

$$\sin(a+\alpha) - \sin \alpha = \frac{\alpha}{206264} \cos. a.$$

Ex. Um zu sehen, wie das bisherige mit der Wahrheit übereinstimmt, so wollen wir $a = 40°$ und $\alpha = 1' = 60''$ setzen, mithin untersuchen, um wie viel der Sinus von $40° \, 1'$ von dem Sinus von $40°$ unterschieden ist.

Nach obiger Rechnung wäre also

$$\sin 40^\circ\, 1' - \sin 40^\circ = \frac{60''}{206264} . \cos 40^\circ$$

welches man durch Logarithmen auf folgende Art berechnet.

$$\begin{array}{rl} \log 60 = & 1,7781513 \\ \log \cos 40^\circ = & 9,8842540 - 10 \\ \hline \text{Summe} = & 1,6624053 \\ \text{abgez. } \log 206264 = & 5,3144252 \\ \hline \text{läßt} & 3,3479801. \end{array}$$

Ich habe nehmlich die Characteristik des Logarithmen 1,6624053 in Gedanken um 7 Einheiten vermehrt, damit der Abzug des Logarithmen 5,3144252 bewerkstelliget werden konnte, und ein Logarithme übrig bliebe, den man unter der Characteristik 3 in den Tafeln aufsuchen kann. Man muß aber alsdann von der Zahl, die dem Logarithmen 3,3479801 zukömmt, wie bekannt, wieder 7 Decimalstellen abschneiden. Nun gehört dem Logarithmen 3,3479801 die Zahl 2228 zu; Schneidet man also 7 Decimalstellen ab, so wird

$$\frac{60}{206264} \cos 40^\circ = 0,0002228.$$

D. h. der Sinus von 40° ist um 0,0002228 kleiner, als der Sinus von $40^\circ\, 1'$, oder wenn der Bogen von 40° um $1'$ wächst, so nimmt

der

der Sinus dieses Bogens um 0,0002228 Theilchen des Halbmessers zu, wie man auch in der That findet, wenn man die Sinusse von 40° 1' und von 40° aus den Tafeln nimmt, und sie von einander abziehet.

XXVII. Das Wachsthum, die Abnahme, oder überhaupt die Veränderung einer Größe, wollen wir künftig mit dem Buchstaben d bezeichnen, welchen man vor diese Größe setzet. Wenn wir also z. B. andeuten wollen, daß der Bogen a um α wächst, so wollen wir statt dessen vor a den Buchstaben d setzen, und also das Wachsthum des Bogens a durch d a anzeigen, wo also d a so viel bedeutet, als das bisherige α.

Hier bedeutet also dieser Buchstabe d keinen Factor, sondern ist nur ein willkührliches Zeichen, so wie man die Logarithmen mit dem Buchstaben l, und die Wurzelgrößen mit dem Zeichen $\sqrt{}$ anzudeuten pflegt.

XXVIII. So würde also dieser Bezeichnung gemäs, das Wachsthum eines Sinus durch d sin a, eines Cosinus durch d cos a u. s. w. angedeutet, und es erhellet, daß diese Bezeichnungen eigentlich den Werth anzeigen, um den sich Sinus oder Cosinus eines Bogens a verändern, wenn der Bogen a um α oder d a zunimmt.

Da=

Daher wären folgende Ausdrückungen gleichgültig

$\sin(a + \alpha) - \sin a = \alpha \cos a$ oder

$d \sin a = da \,.\, \cos a$.

XXIX. Wenn der Winkel a stumpf ist, so wird $\cos a$ negativ, mithin auch $da \,.\, \cos a$ oder $d \sin a$ negativ. D. h. wenn der stumpfe Winkel a um da zunimmt, so nimmt der Sinus desselben um den Werth $da \,.\, \cos a$ ab, weil $d \sin a$ oder das Wachsthum des Sinus verneint wird, und ein verneintes Wachsthum ein Abnehmen bedeutet; Eben dieser Satz ist aus der gemeinen Trigonometrie, und aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur klar, wo man bemerken wird, daß, wenn ein Bogen über 90° wächst, der Sinus desselben wieder abnimmt.

XXX. Wir wollen nun auf eine ähnliche Art untersuchen, um wie viel sich ein Cosinus verändert, wenn der zugehörige Winkel um einen geringen Werth wächst. Zu dieser Absicht überlege man, daß, wenn a sich in $a + \alpha$ verwandelt, sich $\cos a$ in $\cos(a + \alpha)$ oder in $\cos a \cos \alpha - \sin a \sin \alpha$ (Trig. S. XII. 2.) verwandele; weil nun aus eben dem Grunde wie in (XXVI) $\cos \alpha = 1$ und $\sin \alpha = \alpha = da$ (XXVII) gesetzt werden kann, so erhält man

$\cos(a + da) = \cos a - da \sin a$.

Mit-

Mithin

$\cos(a + da) - \cos a = - da \sin a$ oder wie in (XXVII)

$d \cos a = - da . \sin a$.

D. h. der Cosinus des Bogens a nimmt um den Werth $da . \sin a$ ab, wenn der Bogen a um da wächst, weil eben so wie in XXIX eine negative Zunahme wie $- da \sin a$ eine Abnahme bedeutet.

XXXI. Wenn x, y ein paar Größen bedeuten, und man setzt, x wachse um dx, y um dy, so ist klar, daß die Summe $x + y$ um $dx + dy$ und der Unterschied $x - y$ um $dx - dy$ wachsen werde. Eine Größe, die man um nichts wachsen oder abnehmen läßt, deren Wachsthum ist als Null anzusehen. Man nennt solche Größen unveränderliche. — Wenn daher b eine solche Zahl bedeutet, die man als unveränderlich betrachtet, so ist $db = o$.

XXXII. Wenn man annimmt, in dem Producte xy verändere sich x in $x + dx$ und y in $y + dy$, so verwandelt sich das Product xy in $(x + dx)(y + dy)$ und wenn man von $(x + dx)(y + dy)$ abziehet xy, so findet sich, um wie viel das ganze Product xy wächst, wenn jeder Factor desselben um etwas

zu:

zunimmt. Nun ist, wenn man würklich multiplicirt

$$(x+dx)(y+dy) = xy + xdy + ydx + dydx$$

Ziehet man also davon ab xy, so findet man zum Ueberreste den Werth $xdy + ydx + dydx$, oder um so viel ändert sich das Product xy, wenn jeder Factor sich um etwas ändert. Bezeichnet man also das Wachsthum, oder die Veränderung des Products mit dem Buchstaben d, so wird

$$d(xy) = xdy + ydx + dydx.$$

XXXIII. Wenn man auf eben die Art die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$ sucht, unter der Voraussetzung, daß x um dx, und y um dy wachse, so erhält man

$\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$ für die Veränderung des Quotienten. Bringt man nun diese beyden Brüche unter einerley Benennung, und ziehet sie würklich von einander ab, so erhält man diesen Unterschied, mithin das Wachsthum oder die Veränderung des Quotienten $\frac{x}{y}$; Folglich

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{(y+dy) \cdot y}.$$

XXXIV.

XXXIV. Diese beyden Formeln (XXXII u. XXXIII) gelten, die Werthe dx, dy mögen so groß seyn, als sie wollen. Da wir nun zu unserer Absicht in der Folge annehmen, daß diese Größen dx, dy, in Vergleichung der zugehörigen x, y, sehr klein sind, so lassen sich unter dieser Voraussetzung die beyden Formeln (XXXII. XXXIII) noch etwas abkürzen. Wenn nähmlich in (XXXII) die Werthe dy, dx, sehr klein sind, z. E. Brüche von sehr großen Nennern, oder kleinern Zählern bedeuten, so kann man das Product $dy . dx$ in Vergleichung der Producte xdy, ydx als unendlich gering, und folglich als verschwindend ansehen. Gesetzt, es wäre $x = 100$, $y = 60$, $dx = 0,001$, $dy = 0,0002$ so würde

$$ydx + xdy + dy\,dx = 0,06 + 0,02 + 0,0000002$$

wo man offenbar den letzten Bruch, als den Werth von $dy . dx$, in Vergleichung der vorhergehenden Brüche weglassen kann.

Unter dieser Voraussetzung ist daher beynahe $d(xy) = xdy + ydx$.

Und wenn $x = y$ also $dy = dx$ wäre, so hätte man

$$d(x^2) = xdx + xdx = 2 . xdx.$$

Da drückte also $2xdx$ aus, um wie viel sich das Quadrat x^2 einer gewissen Zahl x verändert, wenn die Zahl x um dx zunimmt.

XXXV. Auf gleiche Weise kann man in der Formel XXXIII statt des Factors $y + dy$ im Nenner, ohne merklichen Fehler blos y setzen, das gäbe demnach

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

XXXVI. Wenn x eine Größe wäre, die man um nichts wachsen oder abnehmen liesse, für die also $dx = 0$ wäre, so erhielte man bloß

$$d(x.y) = x\,dy \text{ und } d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x\,dy}{y^2}.$$

Im leztern Falle ist das Wachsthum des Quotienten $\frac{x}{y}$ negativ, weil der Werth $-\frac{x\,dy}{y^2}$ negativ ist, wenn die Größen x, dy, als positiv angesehen werden. Dieß zeigt also an, daß der Quotient $\frac{x}{y}$ nicht wächst, sondern abnimmt, wenn der Zähler x unveränderlich bleibt, der Nenner y aber um dy wächst. Eben dieses ist auch schon aus der gemeinen Lehre von Brüchen klar, wo bekanntermaaßen ein Bruch abnimmt, wenn der Zähler unveränderlich bleibt, und der Nenner größer wird.

Wenn man die Werthe von dx, dy negativ nimmt, d. h. wenn man in dem Producte

ducte xy, oder Quotienten $\frac{x}{y}$, die Größen x, y, um dx, dy abnehmen läßt, so wird

$$d\,(xy) = - x\,dy - y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = - \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}.$$

XXXVII. Die bisherigen Betrachtungen werden nun dazu dienen, auch für die Tangenten, Secanten u. s. w. solche Rechnungen anzustellen, wie in (XXIX. XXX.) für den Sinus und Cosinus gewiesen worden.

Man kann nehmlich ebenfalls fragen, um wie viel die Tangente oder Secante eines Bogens a wachse, oder überhaupt sich verändere, wenn man den Bogen a um da zu- oder abnehmen läßt. Um diese Untersuchung erstlich für die Tangente anzustellen, so überlege man, daß

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \text{ mithin auch}$$

$$d \tan a = d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ sey.}$$

Weil nun $\frac{\sin a}{\cos a}$ einen Quotienten vorstellet, so läßt sich dessen Veränderung nach XXXV. berech-

berechnen, wenn man das dortige x hier sin a und das dortige y hier cos a bedeuten läßt; Also hat man

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{\cos a \,.\, d \sin a - \sin a \,.\, d \cos a}{\cos a^2}$$

Nun ist aber aus (XXVIII, XXX)

$$d \sin a = da \,.\, \cos a; \quad d \cos a = - da \,.\, \sin a$$

Substituirt man also diese Werthe, so wird

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) = \frac{da\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\cos a^2}$$

Aber $\cos a^2 + \sin a^2 = 1$ also

$$d\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) \text{ oder } d \tang a = \frac{da}{\cos a^2}$$

Wo man also, wenn da gegeben ist, den Werth von d tang a finden kann.

XXXVIII. Weil $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ folglich

$$d \cot a = d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

so sey jetzt das x in (XXXV) $= \cos a$, und $y = \sin a$ so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{\sin a \,.\, d \cos a - \cos a \,.\, d \sin a}{\sin a^2}$$

oder

oder $d\left(\frac{\cos a}{\sin a}\right) = \frac{-da\,(\cos a^2 + \sin a^2)}{\sin a^2}$

oder $d \cot a = -\frac{da}{\sin a^2}$.

XXXIX. 1. Weil $\sec a = \frac{1}{\cos a}$ so ist

$d \sec a = d\left(\frac{1}{\cos a}\right)$

Man setze also in XXXV $x = 1$; $y = \cos a$; so ist, weil sich die 1 nicht verändert, $dx = 0$ folglich

$d\left(\frac{1}{\cos a}\right) = -\frac{d\cos a}{\cos a^2} = \frac{da\,.\,\sin a}{\cos a^2} =$
$da\,.\,\frac{\sin a}{\cos a}\,.\,\frac{1}{\cos a} = da \tan a \sec a$. also
$d \sec a = da\,.\,\tan a\,.\,\sec a$.

XXXIX. 2. Auf eine völlig ähnliche Art wird wegen $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$

$d \operatorname{cosec} a = -da\,.\,\cot a\,.\,\operatorname{cosec} a$.

XL. Diese Sätze sind von sehr großen Nutzen, und in der Folge werden wir bey Untersuchung der Folgen der Fehler in den Messungen, die Anwendung davon machen. Anfängern wird es es dienlich seyn, nach Anleitung des Beyspiels XXVI, sich auf eine ähnliche Art den Gebrauch der für d tang a, d sec a u. s. w. gefundenen Formeln zu erläutern, wobey dann zu bemerken ist, daß man unter d a immer das Wachsthum des Bogens a in Decimaltheilen des Halbmessers verstehen, oder daß man statt d a eigentlich $\frac{da}{206264}$ setzen müsse, wenn d a in Secunden gegeben wäre.

XLI. Jetzt wollen wir auch die Untersuchung anstellen, um wie viel sich der Logarithme einer Zahl ändert, wenn die Zahl selbst um etwas geringes zu- oder abnimmt. Um dieses zu bestimmen, müssen wir aber vorher folgendes beybringen.

XLII. Wenn c eine gegebene Zahl bedeutet, die größer ist als 1, und μ einen unendlich kleinen Bruch vorstellt, so wird der Ausdruck

$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ einen unveränderlichen Werth haben,

so lange man c nicht ändert, μ mag übrigens nach Gefallen verändert werden, wenn es nur immer sehr klein bleibt.

Bew. Es bedeutet ρ einen ganz andern kleinen Bruch als μ; Kann man nun beweisen, daß

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\rho} - 1}{\rho}$$

sey, so erhellet leicht, daß dadurch zugleich dargethan seyn wird, daß sich $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ nicht verändere, wenn man gleich statt μ den kleinen Bruch ρ setzet.

Um also zu beweisen, daß $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c - 1}{\rho}$ sey, so überlege man folgendes.

Weil aus der Buchstabenrechenkunst klar ist, daß $c^{0} = 1$, so erhellet, daß wenn μ oder ρ ein paar sehr kleine Brüche sind, die Ausdrückungen c^{μ}; c^{ρ} nur etwas sehr geringes größer als 1 seyn können: Man setze also $c^{\mu} = 1 + m$, $c^{\rho} = 1 + r$, so werden auch m, r ein paar sehr kleine Brüche seyn.

Nun will ich annehmen, der kleine Bruch μ sey größer als ρ, und setzen, daß μ z. E. ein vielfaches von ρ, also $\mu = \alpha . \rho$, und α eine ganze

Zahl

Zahl sey. Wäre z. E. $\mu = 3 . \varrho$ folglich $\alpha = 3$ so zeigte dieß an, daß der erstere kleine Bruch dreymal größer, als der zweyte sey u. s. w.

Folglich wäre

$$c^{\mu} = c^{\alpha . \varrho} = (c)^{\varrho\alpha} = (1 + r)^{\alpha}$$

Man setze nun z. E. $\alpha = 2$, so wäre

$(1 + r)^{\alpha} = (1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2$; weil aber r einen sehr kleinen Bruch bedeutet, so kann man ohne merklichen Irrthum das Quadrat desselben, als unbeträchtlich in Absicht der beyden vorhergehenden Glieder, weglassen und daher bloß setzen $(1 + r)^2 = 1 + 2r$.

Für $\alpha = 3$ wäre $(1 + r)^{\alpha} = (1 + r)^3 = (1 + r)(1 + r)^2 = (1 + r)(1 + 2r) = 1 + 3r$ weil man in dem Produkte $(1 + r)(1 + 2r)$ gleichfalls die höhern Potenzen des kleinen Bruchs r weglassen kann.

Für $\alpha = 4$ hätte man $(1 + r)^{\alpha} = (1 + r)^4 = (1 + r)(1 + r)^3 = (1 + r)(1 + 3r) = 1 + 4r$ aus eben dem Grunde.

Wenn man auf solche Art diese Schlüsse weiter fortsetzt, so siehet man leicht, daß allgemein

$$(1 + r)^{\alpha} = 1 + \alpha . r$$

seyn

seyn müsse, vorausgesetzt, daß αr auch noch immer sehr klein bleibt.

Da nun $c^{\mu} = (1+r)^{\alpha}$ so wird auch $c^{\mu} = 1 + \alpha . r$ seyn. Aber es ist auch $c^{\mu} = 1 + m$ gesetzt worden, folglich hat man $1 + m = 1 + \alpha . r$ oder $m = \alpha . r$.

Es wird also

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{1 + m - 1}{\alpha . \rho} =$$

$$= \frac{1 + \alpha r - 1}{\alpha \rho} = \frac{r}{\rho}$$

Ferner auch

$$\frac{c^{\rho} - 1}{\rho} = \frac{1 + r - 1}{\rho} = \frac{r}{\rho}$$

Also

$$\frac{c^{\mu} - 1}{\mu} = \frac{c^{\rho} - 1}{\rho}$$

Man siehet also, daß die Größe $\frac{c^{\mu} - 1}{\mu}$ mit $\frac{c^{\rho} - 1}{\rho}$ einerley Werth hat, obgleich μ

einen ganz andern kleinen Bruch als ρ bedeutet, daß daher die Größe $\frac{c^\mu - 1}{\mu}$, für ein gegebenes c einen unveränderlichen Werth habe, man mag statt μ für einen kleinen Bruch setzen, was man für einen will. Setzt man also

$\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A$ so ist A eine beständige Größe, welche blos von c, aber keinesweges von μ abhängt.

Aus $\frac{c^\mu - 1}{\mu} = A$; folgt auch $c^\mu = 1 + A . \mu$.

Die bisherigen Schlüsse gründen sich darauf, daß μ einen sehr kleinen Bruch bedeute; je kleiner nun derselbe ist, desto richtiger wird auch die daraus hergeleitete Folge seyn.

Weil $c^\mu = 1 + m$ gesetzt worden, so ist $\mu \log c = \log(1 + m)$ also

$$\mu = \frac{\log(1 + m)}{\log c} \text{ mithin}$$

$$\frac{c^\mu - 1}{\mu} \text{ oder } A = \frac{m}{\mu} = \frac{m \log c}{\log(1 + m)}$$

Dieser

Dieser Ausdruck dienet also, die Größe A zu finden, wenn man m als einen sehr kleinen Bruch, willkührlich annimmt.

XLIII. Gesetzt, es sey $c = 10$; $m = 0{,}0000001$ so wird $A = \frac{0{,}0000001}{\log 1{,}0000001}$ Aber aus Gardiners großen Logarithmen-Tafeln finde ich

$$\log 1{,}0000001 = 0{,}000000043429$$

dieß gäbe demnach

$$A = \frac{0{,}0000001}{0{,}000000043429} = \frac{100000}{43429}$$

oder $A = 2{,}30258$; Daher wäre allgemein für $c = 10$ der Werth

$$\frac{10^{\mu} - 1}{\mu} = 2{,}30258.$$

XLIV. Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun die Frage in (XLI) auf folgende Art auflösen.

Gesetzt, es sey $\log x = y$, und die Basis des logarithmischen Systems $= c$, so ist bekannt, daß $c^y = x$ sey. Man nehme nun an, daß y um dy wachse, wenn x um dx zunimmt, und die Werthe von dy, dx, seyen in Absicht der Größen y, x sehr klein, so verwandelt sich die Gleichung

$\log x = y$ in

$\log(x + dx) = y + dy = \log x + dy$;

Also $l(x + dx) - \log x = dy$ oder welches

einerley ist $\log\left(\frac{x + dx}{x}\right) = dy$ folglich we=

gen $\frac{x + dx}{x} = 1 + \frac{dx}{x}$ wird

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = dy.$$

Wenn aber c die Basis des logarithmischen Systems ist, so verwandelt sich diese Gleichung ferner in $c^{dy} = 1 + \frac{dx}{x}$.

Da nun $\frac{dx}{x}$ eine sehr geringe Größe ist, so wird auch dy einen sehr geringen Werth haben; läßt man daher das μ in (XLIII) hier dy bedeuten, so hat man ohne beträchtlichen Fehler $c^{dy} = 1 + A\,dy$ wo A eine unveränderliche Größe ist, die von der Basis des log. Systems abhängt (XLII); Es wird demnach

$$1 + A\,dy = 1 + \frac{dx}{x} \text{ also}$$

$$dy = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x} \text{ oder}$$

$$d \log x = \frac{1}{A} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Woraus also erhellet, daß das Wachsthum des Logarithmen der Zahl x herauskömmt, wenn man das Wachsthum der Zahl x, mit der Zahl x selbst dividiret, und den Quotienten mit der unveränderlichen Größe $\frac{1}{A}$ multiplicirt.

XLV. Für die Briggischen Logarithmen ist $c = 10$ und $A = 2,30258$ (XLIII) oder $\frac{1}{A} = 0,43429$, mithin wenn $d \log x$ das Wachsthum des Briggischen Logarithmen der Zahl x bedeutet, so ist

$$d \log x = 0,43429 \frac{dx}{x}.$$

Ex. Um die Wahrheit dieses Satzes mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen $x = 8900$; und $dx = 1$, also untersuchen, um wie viel der Logarithme von 8901 von dem Logarithmen der Zahl 8900 unterschieden ist. In diesem Falle wäre also dieser Unterschied oder

oder der Werth von $d \log x = 0{,}43429$. $\frac{1}{8900} = 0{,}0000488$, welches man auch in der That so findet, wenn man in den Tafeln die beyden Logarithmen der Zahlen 8901 und 8900 von einander abziehet.

XLVI. Da die unveränderliche Größe $\frac{1}{A}$ von der Basis des logarithmischen Systems abhängt, so läßt sich leicht ein gewisses logarithmisches System gedenken, wo $\frac{1}{A} = 1$ wird; dieses logarithmische System nennt man das natürliche. Was es mit demselben für eine Bewandniß habe, gehört in die höhere Mathematik, und es würde wider unsere Absicht seyn, hier davon weitläuftiger zu handeln, da man ohnehin in der practischen Geometrie die natürlichen Logarithmen selten gebraucht. Man sehe indessen hievon Hrn. H. Kästners An. des Un. 213 §. u. f. Wir wollen künftig den Werth $\frac{1}{A}$ der Kürze halber mit dem Buchstaben B bezeichnen, und damit hätte man $d \log x = B \cdot \frac{dx}{x}$

XLVII. Wir können nun, vermittelst des gefundenen Ausdrucks, auch das Wachsthum der Logarithmen der trigonometrischen Linien berechnen, wenn man annimmt, daß die zugehörigen Bogen um einen sehr geringen Werth wachsen. Man setze zu dieser Absicht statt x, die Werthe sin a, cos a, tang a, cot a, sec a, cosec a, so ergeben sich daraus folgende Formeln:

1) $d \log \sin a = B . \frac{d \sin a}{\sin a}$; aber $d \sin a =$ $da \cos a$ (XXVIII) also

$$d \log \sin a = \frac{B\, da . \cos a}{\sin a} = B\, da . \cot a.$$

2) $$d \log \cos a = \frac{B . d \cos a}{\cos a} = - \frac{B . da . \sin a}{\cos a}$$

oder

$$d \log \cos a = - B . da . \tang a.$$

3) $d \log \tang a = \frac{B . d \tang a}{\tang a}$ aber

$d \tang a = \frac{da}{\cos a^2}$ (XXXVII) daher

$$d \log \tang a = \frac{B\, da}{\cos a^2 . \tang a} = \frac{B\, da}{\cos a . \sin a}$$

$$= \frac{2 B . da}{\sin 2 a} \text{ (XIII. 21.)}$$

4)

4) und eben so

$$d \log \cot a = -\frac{2B \cdot da}{\sin 2a}.$$

5) $d \log \sec a = \frac{B \cdot d \sec a}{\sec a}$ aber $d \sec a =$ $da \cdot \tan a \cdot \sec a$ daher

$$d \log \sec a = B \cdot da \cdot \tan a$$

6) und eben so

$$d \log \operatorname{cosec} a = -B \cdot da \cdot \cot a.$$

Welche Formeln durchgehends von sehr großer Brauchbarkeit sind, und dazu dienen werden, in der Folge die Berechnung der Fehler in den Messungen sehr abzukürzen.

XLVIII. Man pflegt die bisher vorgetragenen Formeln sonst auch in der Differentialrechnung abzuhandeln, und leitet sie aus der Lehre von den Gränzen der Verhältnisse her. Da ich diese Lehre hier nicht vortragen durfte, ohne zu befürchten, daß manche Leser darinn mehr Geheimnisse suchen möchten, als würklich darinnen enthalten sind, da es ferner auch zu meiner Absicht nicht nothwendig war, das bisherige den eigentlichen Begriffen der Differentialrechnung gemäß, vorzutragen, so habe ich einen Weg erwählet, der Anfängern weniger geheimnißvoll scheinen wird,

wird, wenn sie nur sonst mit einiger Aufmerksamkeit die Sätze ansehen und nachrechnen, auch übrigens in der Trigonometrie und der Lehre von Logarithmen die erforderlichen Kenntnisse haben.

Formeln aus der sphärischen Trigonometrie.

XLIX. Da es in der practischen Geometrie sehr oft vorkömmt, daß man die Lagen gewisser Ebenen gegeneinander betrachten und berechnen muß, die dahin gehörigen Rechnungen aber zur sphärischen Trigonometrie gehören, so habe ich für nöthig erachtet, hier wenigstens das allgemeine davon, und die Formeln, nach denen dergleichen Rechnungen anzustellen sind, kürzlich beyzubringen.

1. Man stelle sich also (Fig. I.) vor, RSEF, STFD seyen ein paar Ebenen, die unter einem gewissen Winkel gegeneinander geneigt sind. SF sey derselben gemeinschaftliche Durchschnittslinie.

Man nehme auf SF einen willkührlichen Punkt F an, und gedenke sich durch denselben eine dritte Ebene IK, gelegt, welche die beyden erstern in FE und FD durchschnitte.

Diese Durchschnittslinien FE, FD der Ebene IK mit den Ebenen RSEF, STFD, werden nun gemeinschaftlich durch den Punkt F gehen,

gehen, weil die schneidende Ebene IK durch diesen Punkt gelegt ist. Man wird demnach aus (1. 2) um den Punkt F herum, drey ebene Winkel SFE, SFD, EED erhalten, welche bey F eine sogenannte körperliche Ecke begränzen werden.

3. Ausser diesen drey ebenen Winkeln, welche hier die Ecke bilden, kommen nun noch drey andere Winkel in Betrachtung, nemlich die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander, oder die sogenannten Flächen-Winkel, oder auch sphärische Winkel.

4. Um solche zu bestimmen, so seyen in der II. Figur die Linien SF, FE, FD, eben dieselben, welche sich durch die Durchschnitte der Ebenen in der ersten Figur ergeben haben, dergestalt, daß also in der II. Figur die drey ebenen Winkel, SFE, SFD, EFD, bey F die Ecke der Isten Figur bilden.

5. Man nehme nun, um den Neigungswinkel der beyden Ebenen, SFE, SFD, zu bestimmen, in ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie SF, einen willkührlichen Punkt k an, und errichte durch ihn auf SF, ein paar Perpendiculärlinien ki, kl, davon kl in der Ebene SFD, und ki in der SFE liege, so ist bekanntermaaßen der Winkel ikl, den diese beyden Linien ki, kl, mit einander machen, der Neigungswinkel der beyden Ebenen

SFE,

SFE, SFD gegeneinander. Auf eben die Art würden die beyden Perpendiculärlinien mn, no, davon mn in der Ebene SFE, und no in der Ebene EFD läge, den Neigungswinkel dieser beyden Ebenen, und der Winkel qrp, den die beyden durch r auf FD senkrecht gezogenen Linien qr, rp, mit einander machen, den Neigungswinkel der beyden Ebenen SFD, EFD bestimmen.

6. Es kommen also solchergestalt bey einer Ecke, die durch drey Ebenen gebildet wird, sechs Stücke in Betrachtung, nemlich: 1) die drey ebenen Winkel SFE, SFD, EFD, die die Ecke bilden, und 2) die drey Neigungswinkel mno, ikl, prq, unter welchen die Ebenen der Winkel SFE, SFD, EFD gegen einander geneigt sind.

7. Man nehme einen willkührlichen Halbmesser an, und beschreibe aus der Ecke F, mit demselben, in den Ebenen SFE, SFD, EFD, die drey Kreisbogen AB, AC, BC, so sind die Bogen AB, AC, BC, der drey Winkel SFE, SFD, EFD, Maaße. Wenn man sich mit dem Halbmesser FA eine Kugel um den Mittelpunkt F beschrieben vorstellet, so würden die nur erwähnten Bogen AB, AC, BC, Bogen von größten Kreisen auf der Kugelfläche seyn, und gleichsam auf der Kugelfläche, ein Dreyeck ABC, das von drey

Bogen

Bogen größter Kreise eingeschlossen wäre, abbilden. Dieses Dreyeck gehörte also am Mittelpunkte F, der körperlichen Ecke F zu, und wird ein sphärisches Dreyeck genannt. Die Bogen AB, AC, BC, als Maaße derjenigen Winkel, welche die dem Dreyecke zugehörige Ecke bilden, heissen Seiten des sphärischen Dreyecks.

8. Man stelle sich bey A, ein paar Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ vor, davon $A\mu$, den Bogen AB im Punkte A, und $A\lambda$ den Bogen AC im Punkte A berühret, so stehen diese beyden Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Halbmesser AF senkrecht; da nun auch ik, kl auf AF senkrecht stehen, so ist ik parallel mit $A\mu$ und kl parallel mit $A\lambda$, daher der Winkel $\mu A\lambda = ikl$ (Käst n. Geom. 46. S. 2. Zus.) Also der Winkel beyder Tangenten, dem Neigungswinkel der beyden Ebenen gleich, in denen diese Tangenten oder die Bogen AB, AC, oder die zugehörigen Winkel AFB, AFC, liegen. Da nun die Tangenten $A\mu$, $A\lambda$, die Richtungen ihrer Bogen bey A vorstellen (Käst n. Geom. 41. S. 6. Z.) so sagt man, die Kreise AB, AC, machen bey A, einen Winkel BAC, oder $\mu A\lambda$, welcher dem Neigungswinkel ikl der beyden Ebenen AFB, AFC, gleich ist.

Eigentlich muß man sich bey A ein paar Elemente, oder unendlich kleine Stückchen der

bey-

beyden Kreise AB, AC, vorstellen. Der Winkel dieser beyden Elemente ist mit dem Winkel der Tangenten, oder mit $\mu A \lambda$ einerley, weil die verlängerten Richtungen dieser Elemente, mit den Tangenten $A\mu$, $A\lambda$ zusammenfallen.

Auf gleiche Weise, und in eben der Bedeutung stellen also auch die Winkel, welche die Kreisbogen AC, BC bey C, und AB, BC, bey B mit einander machen, die beyden Neigungswinkel prq, mno, vor.

9. Das sphärische Dreyeck hängt also mit der körperlichen Ecke bey F, so zusammen, daß die Seiten desselben die Maaße der ebenen Winkel sind, die die körperliche Ecke bey F bilden, und die sphärischen Winkel BAC, ACB, ABC, den Neigungswinkeln der Ebenen gleich sind, welche die körperliche Ecke einschließen.

10. Es ist also klar, daß, wenn man die Seiten oder Winkel des sphärischen Dreyecks weiß, auch die Größe der ebenen Winkel, welche die körperliche Ecke bilden, und die Neigungswinkel der drey Ebenen der körperlichen Ecke bekannt seyn werden.

11. So wie nun in der ebenen Trigonometrie gewiesen wird, daß drey Stücke eines Dreyecks die übrigen drey bestimmen, so läßt sich gleichfalls in der sphärischen Trigonometrie dar-

darthun, daß aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks, und folglich auch einer körperlichen Ecke, die übrigen drey durch Rechnung gefunden werden können.

12. Was in der ebenen Trigonometrie die Seiten eines Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Trig. die Bogen AB, AC, BC, welche das sphärische Dreyeck bilden, oder vielmehr die ebenen Winkel, AFB, AFC, BFC, welche die körperliche Ecke einschließen; und was in der ebenen Trigonometrie die Winkel des Dreyecks sind, das sind in der sphärischen Trigonometrie die Winkel BAC, ACB, ABC des sphärischen Dreyecks, oder die Neigungswinkel der Ebenen gegeneinander, die die körperliche Ecke begränzen.

13. Nur muß man bey dem sphärischen Dreyecke bemerken, daß die Seiten desselben, oder die Bogen AB, AC, BC, nicht wie in der ebenen Trigonometrie, durch Fußmaaße gegeben werden, sondern daß man ihre Größe durch Grade, Minuten u. s. w. angiebt, und daher ist klar, daß, wenn man den Sinus, die Tangente, oder sonst eine trigonometrische Linie für eine Seite des sphärischen Dreyecks durch Rechnung gefunden hat, man aus den Sinustafeln auch sogleich die Größe dieser Seite in Graden, Minuten u. s. w. finden wird.

14.

14. Es würde nun viel zu weitläuftig seyn, hier die Beweise für die Vorschriften zu geben, nach denen sich in einem sphärischen Dreyecke, aus drey Stücken desselben, die übrigen durch Rechnung bestimmen lassen. — Ich verweise daher meine Leser auf Hrn. H. Kästners astronom. Abh. I. Samml. II. Abh. oder auf andere Schriften, z. E. Karstens Mathematik II. Theil u. s. w. und begnüge mich hier blos mit den Formeln ohne Beweis, wornach Anfänger die Auflösung eines sphärischen Dreyecks bewerkstelligen können, wenn sie nur aus demjenigen, was ich bisher allgemein beygebracht habe, wissen, was sie eigentlich zu suchen haben, und nicht vergessen, daß dasjenige, was in einem sphärischen Dreyecke durch Rechnung gefunden wird, auch allemahl auf die zugehörige körperliche Ecke sich beziehe.

L. Ich werde nun ein für allemal in einem sphärischen Dreyecke, die drey Winkel desselben mit den großen Buchstaben A, B, C, bezeichnen, und die gegenüberstehenden Seiten desselben, mit den kleinen a, b, c.

Regeln zur Auflösung sphärischer Dreyecke.

LI. Man kann hier eigentlich 5 Aufgaben in Erwägung ziehen. Die erste: Aus drey Stücken eines Dreyecks die übrigen zu finden, wenn sich unter den gegebenen Stücken ein Winkel und eine gegenüberstehende Seite befinden. Die zweyte: Aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, das übrige zu finden, die dritte, aus einer Seite und zwey anliegenden Winkeln, und ferner die vierte aus allen drey Seiten, und endlich die fünfte aus allen drey Winkeln das übrige zu finden. Die Formeln für die Auflösung dieser 5 Fälle sind nun folgende.

LII. Für den ersten Fall hat man die Regel, daß sich die Sinusse der Seiten, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel verhalten. Heißen also die gegebenen Winkel A, B, und die gegenüberstehenden Seiten a, b, so hat man $\sin A : \sin B = \sin a : \sin b$, also

$$\sin A . \sin b = \sin B . \sin a.$$

Durch welche Formel also aus zwey Seiten und einem Winkel, der andere Winkel, oder aus zwey Winkeln, und einer Seite, die andere Seite gefunden werden kann.

LIII. Für den zweiten Fall heiße A der gegebene Winkel, und c, b, die beyden Seiten, die ihn einschliessen, so kann man entweder einen von den beyden übrigen Winkeln B, C, die den Seiten b, c, gegenüber stehen, oder die dritte Seite a, die dem gegebenen Winkel A gegenüber stehet, durch Rechnung finden.

finden. — Man hat für diese beyden Auflösungen folgende Formeln.

$$1)\ \tan B = \frac{\sin A . \tan b}{\sin c - \tan b . \cos c . \cos A}$$

oder wegen $\frac{1}{\tan B} = \cot B$

$$\cot B = \frac{\sin c}{\sin A . \tan b} - \cos c . \cot A$$

wodurch man den Winkel B findet, welcher der Seite b gegenüber stehet. Verlangt man den Winkel C, so würde man ihn durch eben die Formel finden, wenn man nur C, b, c, statt B, c, b, setzte.

$$2)\ \cos a = \cos A . \sin b . \sin c + \cos b . \cos c$$

ist die Formel, wodurch aus den beyden Seiten c, b, und dem eingeschlossenen Winkel A, die dritte Seite a bestimmt wird.

LIV. Für den dritten Fall seyen A, B, die beyden gegebenen Winkel, und c die Seite an der sie anliegen, so ist für den dritten der Seite c gegenüber stehenden Winkel.

$$1)\ \cos C = \cos c . \sin A . \sin B - \cos A . \cos B.$$

Für eine der beyden Seiten aber

$$2)\ \tan b = \frac{\sin c \tan B}{\cos c \cos A \tan B + \sin A}$$

oder

$$\cot b = \frac{\sin A \cot B}{\sin c} + \cos A \cot c$$

wo b die Seite bedeutet, die dem Winkel B gegenüber stehet.

Es ist klar, daß man auch die Seite b berechnen könnte, wenn man vorher nach (1) den Winkel C gesucht hätte — denn alsdann wäre nach der Regel LIII

$$\sin C : \sin c = \sin B : \sin b \text{ oder}$$

$$\sin b = \frac{\sin c \sin B}{\sin C}$$

LV. Die Auflösung des vierten Falles ergiebt sich sogleich aus der Formel (LIV. 2) denn aus ihr folgt umgekehrt

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \text{ oder}$$

$$\cos A = \frac{\cos a}{\sin b \sin c} - \cot b \cot c$$

wo also A der Winkel ist, den die beyden Seiten c, b, einschliessen.

LVI. Wenn endlich für den fünften Fall die drey Winkel A, B, C, heißen, und man will die Seite a haben, welche dem Winkel A gegen=

gegenüber stehet, so hat man für dieselbe nachstehende Gleichung

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \cot B \cot C.$$

LVII. Alle diese Formeln sind für den Sinus totus = 1 eingerichtet, daher man auch unter dieser Voraussetzung nach (Trig. S. I.) die Rechnung führen muß. Man bedient sich also der trigonometrischen Linien nicht so, wie sie für den Sinus totus = 10000000 gewöhnlich in den Tafeln angegeben sind, sondern dividirt vorher jede in den Tafeln, mit der Zahl 10000000, ehe man sie zur Berechnung unserer Formeln braucht, und wenn umgekehrt nach der Berechnung eine gewisse trigonometrische Linie für den Halbmesser 1 herausgekommen ist, so multiplicirt man sie vorher mit der Zahl 10000000, ehe man sie in den Tafeln aufsuchet, und den ihr zugehörigen Winkel bestimmt.

Die meisten dieser Formeln sind so beschaffen, daß sie aus zwey Theilen bestehen, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß, welches für die Rechnung mit Logarithmen nicht ganz bequem ist. So z. E. bestehet in LVI die Formel, wodurch man $\cos a$ findet, aus zwey Theilen $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ und $\cot B \cot C$, davon jeder besonders ausgerechnet werden muß. Ob nun wohl zwar jeder Theil für sich durch Logarithmen ausgerechnet werden kann, so wäre es doch besser, die Formel wäre so eingerichtet, daß man nicht erst ein paar Theile zusammen addiren müßte, um den Cos a zu finden, sondern geradezu statt des Cosinus selbst, den Logarithmen desselben erhielte. Dieß würde offenbar geschehen, wenn die Formel für Cos a nicht durch eine Summe, sondern durch ein einziges Product, oder einen Quotienten gegeben wäre. Formeln, wodurch man diese Absicht einer leichtern Berechnung erreichen kann, findet man gleichfalls in oberwähnten Astron. Abhandl. Hrn. Hofr. Kästners, allein da ich sie zu meinem Zweck in der Folge eben nicht gebrauchen werde, so habe ich sie weggelassen, und bin der Meynung, daß, wenn man auch nur die von mir angegebenen Formeln braucht, die Rechnung doch eben so gar weitläuftig nicht ausfällt.

LVIII. Um die Berechnungsart wenigstens durch ein Beyspiel hier zu erläutern, und die beym Gebrauche vorkommenden Erinnerungen desto besser ins Licht zu setzen, will ich z. E. die Formel (LVI) nemlich

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B \ \sin C} + \cot B \ \cot C$$

dazu

dazu gebrauchen, wo ich den ersten Theil $\frac{\cos A}{\sin B \sin C}$ $= x$ und den zweyten $\cot B \cot C = y$ nennen will. Es sey also z. E. $A = 135°$; $B = 70°$; $C = 60°$; so ist $\cos A = \cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45°$.

Mithin

$$\cos a = -\frac{\sin 45°}{\sin 70° \sin 60°} + \cot 70° \cot 60°$$

Nun ist

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 45° & = & 9{,}8494850 - 10 \\ \hline \log \sin 70° & = & 9{,}9729858 - 10 \\ \log \sin 60° & = & 9{,}9375306 - 10 \\ \hline \text{Summe dies. beyd. Log.} & = & 9{,}9105164 - 10 \end{array}$$

abgez. von l sin 45° läßt 3,9389686 = log x.

Ich habe nemlich die Characteristik des Logarithmen von 45° in Gedanken um 4 Einheiten vermehrt, damit ich einen Logarithmen 13,8494850 — 10 bekäme, von dem der Abzug des Logarithmen 9,9105164 — 10 geschehen könnte, und zum Reste ein Logarithme übrig bliebe, den man alsdann unter der Charakteristik 3 in den Tafeln aufsuchen könnte. — Man muß aber hierauf von der Zahl, welche dem Logarithmen 3,9389686 zugehöret, wieder so viel Decimalstellen mehr abschneiden, um so viel Einheiten oberwähnte Characteracteristik vermehret worden ist; Nun gehört dem Logarithmen 3,9389686 die Zahl 8689 zu, daher 4 Decimalstellen abgeschnitten,

$$x = 0,8689.$$

Ferner ist $\log \cot 70^\circ = 9,5610659 - 10$
$\log \cot 60^\circ = 9,7614394 - 10$
Summe $= 19,3225053 - 20$

Hier vermehre ich gleichfalls die Characteristik 19 um 4 Einheiten; dann wird

$$23,3225053 - 20 = 3,3225053,$$

von der Zahl aber die nun diesem Logarithmen zukömmt, schneide ich auch 4 Decimalstellen ab, oder dividire sie mit 10000, und finde sodann

$$y = 0,21013.$$

Es ist also $\cos a = -x + y = -0,86890 + 0,21013 = -0,65878$; Dieß wäre also $\cos a$ für den Sinus totus $= 1$, daher für den Sinus totus $= 10000000$, wird

$$\cos a = -6587800.$$

Da aber dieser Cosinus negativ ist, so zeigt dieses an, daß der Winkel a stumpf seyn müsse.

Man suche also in den Tafeln einen spitzigen Winkel, dessen Sinus die gefundene Zahl 6587800 ist, addire dazu 90°, so hat man den Winkel oder Bogen $a = 41^\circ\ 12' + 90^\circ = 131^\circ\ 12'$; Eigent-

Eigentlich fällt a zwischen 131° 12' und 131° 13' und man könnte die Secunden, wenn es nöthig wäre, durch Proportionaltheile suchen.

Wenn man die bey diesem Beyspiele vorkommenden Erinnerungen sich wohl bekannt gemacht hat, so wird es keine Schwürigkeit haben, auf eine ähnliche Art auch mit den übrigen Formeln gehörig zu rechnen.

Anmerkung. Die meisten von den angeführten Formeln sind so beschaffen, daß sie in jedem Falle anzeigen, ob der gesuchte Bogen oder Winkel spitz oder stumpf ist. Das entscheidet sich in solchen Fällen, wo die gesuchte Größe durch einen Cosinus oder eine Tangente gefunden wird; denn wenn diese trigonometrischen Linien bejaht oder verneint werden, so gehören sie zu spitzen oder stumpfen Winkeln.

In den Fällen, wo ein Winkel durch einen Sinus gefunden wird, findet eine Zweydeutigkeit statt, weil einerley Sinus sowohl zu einem spitzen, als stumpfen Winkel, (wo letzterer die Ergänzung des spitzen zu 180° ist) gehören kann. Von der Beschaffenheit ist die Formel (LII) $\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$. In dieser

ser bleibt es unentschieden, ob man den aus ihr gefundenen Bogen oder Winkel, spitz oder stumpf nehmen müsse. Die Umstände einer Aufgabe, worauf diese Formel angewandt wird, werden indessen gewöhnlich diese Zweydeutigkeit entscheiden.

In der Astronomie kommen auch Fälle vor, wo die gegebenen oder auch gefundenen Bogen und Winkel über 180° halten. Wenn man weis wie in solchen Fällen die trigonometrischen Linien positiv oder negativ zu nehmen sind, so können diese Fälle dem Berechner weiter keine Schwürigkeit machen. In der praktischen Geometrie kommen sie eben nicht vor.

Der praktischen Geometrie zweyter Theil.

X. Kapitel.

Ueber die Fehler, die beym Winkelmessen daher rühren, wenn die Ebene des Werkzeugs nicht genau horizontal gestellet worden.

§. 140.

I. Wir haben schon im vorhergehenden bemerkt, daß, wenn das Fernrohr genau in einer auf das Werkzeug senkrechten Ebene auf- und nieder beweglich, auch das Werkzeug genau horizontal gestellet worden ist, man am Mittelpunkte des Winkelmessers allemahl genau den Horizontalwinkel erhalte, welchen zwey Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet worden ist, mit einander machen, oder wenn man sich durch den Mittelpunkt, und

und durch beyde Objecte ein paar Verticalebenen vorstellet, so ist oberwähnter Winkel genau der Neigungswinkel dieser beyden Ebenen gegeneinander. Wenn aber das Werkzeug nicht genau horizontal stehet, wie es dann wegen vieler Ursachen, selten völlig genau geschehen kann, so wird auch der Winkel, um den die Alhidadenregel gedrehet worden ist, nicht genau der Horizontalwinkel der beyden Objecte seyn, sondern von demselben um eine gewisse Größe unterschieden seyn; Ein Feldmesser muß nun wissen, unter welchen Umständen dieser Unterschied beträchtlich ist oder nicht, und daher werden folgende Untersuchungen nützlich seyn.

II. Es sey also (Fig. III.) der Bogen ACG ein Stück von dem Rande eines gegen den Horizont schief stehenden Winkelmessers, und E dessen Mittelpunkt. Der Winkelmesser schneide die Horizontfläche in der geraden Linie E A. Um nun den Winkel, den die Ebene des Werkzeugs mit der Horizontalfläche macht, abzubilden, so beschreibe man mit dem Halbmesser E A, in der Horizontalfläche, den Kreisbogen ABH, so ist der sphärische Winkel GAH, die Neigung des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche (Trig. S. XLIX. 7. 8.).

III. Es sey auf dem Werkzeuge der Punkt C derjenige, von dem die Grade angerechnet werden,

werden, oder der Punkt o auf den Einthei-lungen des Randes.

IV. Das Fernrohr ED des Winkelmessers sey nun, indem die Alhidadenregel, oder der Index des Vernier 0° weiset, nach einem gewissen Objecte hingerichtet, und die Axe des Fernrohrs (welches ich hier als eine Kippregel (§. 99. 18. und §. 100) betrachte) mache in dieser Richtung mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel DEC, dessen Ebene man sich also auf der Fläche des Werkzeugs senkrecht vorstelle.

V. Beschreibt man mit dem Halbmesser EC, in dieser Ebene DEC, den Kreisbogen CD, so wird derselbe das Maaß des Neigungswinkels des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs seyn.

VI. Gesetzt nun, die Alhidadenregel EC, werde aus der Lage EC, in die Lage EG gebracht, bey der das Fernrohr EF nach einem zweyten Objecte hingerichtet ist, so wird es mit der Ebene des Werkzeugs den Neigungswinkel FEG machen, dessen Maaß der mit dem Halbmesser EG = EC beschriebene Kreisbogen FG ist.

VII. Stünde also die Ebene des Werkzeugs genau horizontal, so wären die Ebenen DEC, FEG ein paar Verticalflächen, die erwei-

erweitert, durch die beyden Objecte, nach denen das Fernrohr ED, EF gerichtet ist, gesehen würde, der Winkel CEG am Mittelpunkte des Werkzeugs, wäre dieser beyden Verticalflächen Neigungswinkel, den man auszumessen verlangte (§. 132), und der von der Alhidadenregel durchlaufene Bogen CG, das Maaß dieses Winkels.

VIII. Da aber vorausgesetzt wird, daß des Winkelmessers Ebene gegen die Horizontalfläche schief stehe, so sind auch die Ebenen DEC, FEG nicht vertikal, mithin der Winkel CEG auch nicht der wahre Horizontalwinkel der beyden Objecte, oder die Neigung der beyden Verticalebenen, in denen die Objecte liegen (VII), und letzterer ist es doch, den man in der praktischen Geometrie eigentlich verlangt.

IX. Man gedenke sich also durch beyde Richtungen des Fernrohrs, in denen die Objecte erscheinen, ein paar Verticalebenen DEB, FEH, die die Horizontalfläche in den Horizontallinien EB, EH durchschneiden, so ist der Winkel dieser beyden Horizontallinien, d. i. HEB, eigentlich der wahre Winkel, den man verlangt, und der Bogen BH dessen Maaß.

X. Nun sind offenbar die beyden Bogen CG, BH von einander unterschieden, und wenn man daher den Bogen CG, um den die Alhi-

Alhidadenregel gedrehet worden, für das Maaß des Horizontalwinkels BEH annehmen wollte; so würde man offenbar einen Fehler begehen, der so groß wäre, als der Unterschied der beyden Bogen CG — BH.

XI. Diesen Unterschied nun zu bestimmen, ist die Absicht gegenwärtiger Aufgabe. Sie läßt sich vermittelst der sphärischen Trigonometrie, die man hier offenbar zu Hülfe nehmen muß, weil hier die Neigungen verschiedener Ebenen gegeneinander in Betrachtung kommen, auf folgende Art auflösen.

XII. Es sey der Neigungswinkel des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche, oder der sphärische Winkel CAH = k; und der Bogen AC, um den die Alhidadenregel, bey der Richtung des Fernrohrs nach dem ersten Objecte, von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA des Werkzeugs mit der Horizontalfläche, entfernt ist, heisse λ; diesen muß man als bekannt annehmen, wenn man gegenwärtige Aufgabe auflösen will.

Den Bogen CG, um den die Alhidadenregel gedrehet worden, nenne man = α.

Den Bogen AB = φ; den AH = ψ; die gegebenen Neigungswinkel DEC = β; FEG = b.

Hat

Hat man nun aus den bekannt angenommenen Größen λ, α, β, b, k, die beyden Bogen ψ, φ, berechnet, so ist $\psi - \varphi$, oder der Bogen BH gefunden, welcher demnächst mit CG oder dem Bogen α verglichen, die Größe des Fehlers geben wird, welchen man aus der schiefen Lage des Werkzeugs zu befürchten hat. (X)

XIII. Um also die beyden Bogen AB, und AH, oder die Werthe von φ, ψ, zu bestimmen, so stelle man sich den Bogen DC, als ein Stück eines größten auf ACG senkrecht stehenden Kreises, bis nach L verlängert vor, dergestalt, daß der Bogen CL $= 90^\circ$ werde, so ist bekanntermaaßen L der Pol des Kreises ACG.

XIV. Da gleichfalls DB auf ABH senkrecht stehet, so nehme man auch den Bogen BP $= 90^\circ$, so ist P der Pol des größten Kreises ABH.

XV. Nimmt man auch die Bogen ACI, ABK, $= 90^\circ$, und legt durch die Punkte K, I einen größten Kreis, KIPL, so gehet dieser durch die beyden Pole L, P (aus Hrn. Hofr. Kästners Geometrie 49. u. f. Sätzen) und man erhält ein sphärisches Dreyeck LPD.

XVI. Weil man nun AI $=$ AK $= 90^\circ$ genommen hat, so ist der Punkt A, des Kreises

ses KIPL Pol, und der Bogen KI bekanntermaaßen das Maaß des sphärischen Winkels IAK (Kästn. Geom. 52. S. 3. Zus.). Ferner sind aber, weil L des Kreises AGI Pol, und P des Kreises ABK Pol ist, die Bogen $LI = 90^\circ$; $PK = 90^\circ$ oder $LI = PK$; das heißt $LP + PI = PI + IK$ folglich $LP = IK$; also ist die Entfernung LP der beyden Pole, dem Bogen IK, oder dem Maaße des sphärischen Winkels IAK gleich, welchen die beyden Kreise AGI, AHK, zu denen L, P als Pole gehören, mit einander machen.

XVII. Weil ferner L des Kreises AGI Pol ist, so ist der Bogen CI das Maaß des sphärischen Winkels CLI, und aus eben dem Grunde, weil P des Kreises ABK Pol ist, wird auch der Bogen BK des sphärischen Winkels BPK Maaß seyn.

XVIII. In unserm sphärischen Dreyecke LPD ist also $LD = LC - CD = 90^\circ - \beta$ (V. XII.) der sphärische Winkel $LPD = 180^\circ - DPI = 180^\circ - BK$, weil nemlich BK des sphärischen Winkels DPI Maaß ist (XVII). Aber $BK = 90^\circ - AB = 90^\circ - \varphi$ (XII.) daher $LPD = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) = 90^\circ + \varphi$.

Eben so des sphärischen Winkels DLI Maaß der Bogen CI (XVII) $= 90^\circ - AC = 90^\circ - \lambda$ (XII).

XIX.

XIX. In dem sphärischen Dreyecke LPD suche man nun aus den beiden Seiten LD $= 90° - \beta$; LP $= k$ (XII. XVI.) und dem eingeschlossenen Winkel DLP $= 90° - \lambda$, den Winkel LPD $= 90° + \varphi$; so wird man erstlich einen Ausdruck bekommen, wodurch sich der Bogen φ bestimmen läßt. Nun ist, aus (Trig. S. LIII. 1.) (wenn das dortige A hier den sphärischen Winkel DLP, das dortige B den sphärischen Winkel LPD, und die beyden Seiten LP, LD die dortigen c, b bedeuten)

$$\tang LPD = \frac{\sin DLP \cdot \tang LD}{\sin LP - \tang LD \cos LP \cos DLP}$$

Es ist aber LPD $= 90° + \varphi$, also $\tang LPD = \tang (90° + \varphi) = -\cot \varphi$

DLP $= 90° - \lambda$; also $\sin DLP = \sin (90° - \lambda) = \cos \lambda$ und $\cos DLP = \cos (90° - \lambda) = \sin \lambda$.

LD $= 90° - \beta$; daher $\tang LD = \tang (90° - \beta) = \cot \beta$.

Und endlich weil LP $= k$, so ist $\sin LP = \sin k$, $\cos LP = \cos k$.

Substituiert man also diese Werthe in den gefundenen Ausdruck, so erhält man

$$-\cot \varphi = \frac{\cos \lambda \cot \beta}{\sin k - \cot \beta \cos k \sin \lambda}$$

und

und folglich wegen $\frac{1}{\cot\varphi} = \tang\varphi$

$$\tang\varphi = \cos k \tang\lambda - \frac{\sin k \tang\beta}{\cos\lambda}.$$

XX. Solchergestalt ist erstlich aus dem Bogen $AC = \lambda$, dem Winkel $DEC = \beta$, und dem Neigungswinkel $CAH = k$, der Bogen $AB = \varphi$ auf der Horizontalfläche gefunden.

Will man auf eine ähnliche Art aus dem Bogen $AG = \lambda + CG = \lambda + \alpha$, aus dem Winkel $FEG = b$, und dem Neigungswinkel k den Bogen AH oder ψ auf der Horizontalfläche bestimmen, so wird man ihn durch dieselbe Formel finden, welche wir für den Bogen $AB = \varphi$ herausgebracht haben: denn es erhellet, daß man in obiger Formel nur statt φ setzen dürfe ψ, statt β den Buchstaben b, und statt des Bogens $AC = \lambda$, den Bogen $AG = AC + CG = \lambda + \alpha$; Also ist

$$\tang\psi = \cos k \tang(\lambda + \alpha) - \frac{\sin k \tang b}{\cos(\lambda + \alpha)}.$$

XXI. Aus den solchergestalt gefundenen Bogen $AH = \psi$, $AB = \varphi$ hat man nun auch den Unterschied $\psi - \varphi$ oder den Bogen BH, welcher mit $CG = \alpha$ verglichen, den Fehler geben wird, welcher wegen der schiefen Lage des

Werkzeugs gegen den Horizont zu befürchten stehet.

XXII. Dieser Fehler wird nun freylich in den meisten Fällen unbeträchtlich seyn, das Werkzeug müßte denn gar zu sehr von der horizontalen Lage abweichen. Doch kann es Fälle geben, wo er ansehnlich seyn kann, wenn gleich des Werkzeugs Neigung gegen den Horizont nur geringe ist. Damit sich nun ein Feldmesser hievon überzeugen könne, so habe ich das Verfahren gewiesen, diesen Fehler zu berechnen, wenn die Unrichtigkeit in der Stellung des Werkzeugs, entweder muthmaaßlich angenommen, oder sonst als bekannt vorausgesetzt wird.

XXIII. Ich will die gegebenen Formeln nunmehr durch ein Beyspiel erläutern.

Es sey $k = 1°$; $\beta = 4°$; $b = 10°$; $\lambda = 30°$ und $\alpha = 50°$, so wird für den Winkel φ

$$\begin{array}{rl} \log \cos k = & 9{,}9999338 - 10 \\ \log \operatorname{tang} \lambda = & \underline{9{,}7614394 - 10} \\ \text{Summe} & 0{,}7613732 - 1 \end{array}$$

Hierzu gehört die Zahl

$$\cos k \operatorname{tang} \lambda = 0{,}5772623$$

Ferner ist

log

$$\begin{array}{rl} \log \sin k = & 8{,}2418553 - 10 \\ \log \tan \beta = & \underline{8{,}8446437 - 10} \\ \text{Summe} & 17{,}0864990 - 20 \\ \text{abzuziehen } l \cos \lambda = & \underline{9{,}9375306 - 10} \\ & 0{,}1489684 - 3 \end{array}$$

Zu diesem Logarithmen gehöret die Zahl
0,0014091

$= \frac{\sin k \tan \beta}{\cos \lambda}$ welche abgezogen von $\underline{0{,}5772623}$

läßt $\tan \varphi = 0{,}5758532$

Folglich aus den Sinustafeln $\varphi = 29^\circ . 56^I . 7''$ für den Winkel ψ ist

$$\begin{array}{rl} \log \cos k = & 9{,}9999338 - 10 \\ \log \tan (\lambda + \alpha) = & \underline{0{,}7536812} \\ \text{Summe} = & 0{,}7536150 \end{array}$$

wozu die Zahl 5,6704183 gehöret, welche den Werth von $\cos k \tan (\lambda + \alpha)$ ausdrückt.

Ferner ist

$$\begin{array}{rl} \log \sin k = & 8{,}2418552 - 10 \\ \log \tan b = & \underline{9{,}2463188 - 10} \\ \text{Summe} & 17{,}4881741 - 20 \\ \text{abzuz. } \log \cos (\lambda + \alpha) = & \underline{9{,}2396702 - 10} \\ & 0{,}2485039 - 2 \end{array}$$

wozu die Zahl $= \frac{\sin k \tan b}{\cos (\lambda + \alpha)} = 0{,}0177232$

gehöret, welche abgezogen von $5,6704183$

$$
\begin{aligned}
\text{läßt } \operatorname{tang}\psi &= 5,6526951 \\
\text{Daher } \psi &= 79^\circ \cdot 58' \cdot 4'' \\
\varphi &= 29^\circ \cdot 56' \cdot 7'' \\
\text{Also } \psi - \varphi &= 50^\circ \cdot 1' \cdot 57'' \\
\text{Da nun } \alpha &= 50^\circ \cdot 0' \cdot 0'' \\
\text{so ist } \psi - \varphi - \alpha &= 1' \cdot 57''
\end{aligned}
$$

Es ist also der wahre Horizontalwinkel in diesem Beyspiel um $1'\ 57''$, beynahe um $2'$, größer als der, welchen das geneigte Werkzeug angiebt: Wenn man also den Bogen $CG = \alpha$ auf dem Rande des Winkelmessers für das Maaß des Horizontalwinkels $BEH = \psi - \varphi$, annehmen wollte, so würde man unter den angenommenen Umständen einen Fehler von beynahe 2 Minuten begehen.

XXIV. Dieser Fehler wäre nun in diesem Beyspiele eben so gar beträchtlich nicht, indessen könnten doch Umstände vorkommen, wo er von Folgen seyn könnte, und aus diesen muß der Feldmesser beurtheilen, ob er ihn ausser Acht lassen darf oder nicht.

XXV. Bey andern Datis kann aber der Fehler auch von einer solchen Beträchtlichkeit werden, daß ihn ein Feldmesser gewiß nicht für Null halten darf. Wenn man z. E. in obigen For-

Formeln $\lambda = 0$, $\alpha = 90°$, $\beta = 20°$, $b = 15'$ und $k = 1°$ annähme, so fände sich nach gehöriger Rechnung $\varphi = -21' 50''$; (das negative zeigt hier an, daß dieser Bogen φ nicht rechter Hand des Punktes A, sondern linker Hand desselben z. E. von A bis Z zu nehmen ist). Ferner findet sich $\psi = 90°$; also $\psi - \varphi = 90° - (-21'. 50'') = 90° + 21'. 50''$; Da nun α bloß 90° ist, so ist $\psi - \varphi$, oder der Horizontalwinkel in diesem Falle um 21'. 50'' größer, als derjenige, den das Werkzeug angiebt, wenn gleich das Werkzeug nur um 1° gegen die Horizontalfläche geneigt war, und so erhellet dann, wie nothwendig es sey, in dem Falle, da das Werkzeug mit einer Kippregel oder einem auf- und nieder beweglichen Fernrohre versehen ist, den Winkelmesser so genau als möglich, horizontal zu stellen, wenn man sich anders unter gewissen Umständen nicht sehr groben Fehlern aussetzen will.

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 141. I. Es erhellet, daß, wenn man in obigen Formeln $k = 0$ setzte, oder das Werkzeug keine Neigung gegen den Horizont hätte, alsdann wegen $\sin k = 0$ und $\cos k = 1$, seyn würde

$\tang \varphi = \tang \lambda$ und folglich $\varphi = \lambda$
$\tang \psi = \tang (\lambda + \alpha)$ mithin $\psi = \lambda + \alpha$.
Also $\psi - \varphi = \alpha$; daher $\psi - \varphi - \alpha = 0$
d. h. es würde in solchem Falle bey Ausmessung der Winkel kein Fehler entstehen, die Neigung des Fernrohrs gegen das horizontal gestellte Werkzeug, oder die Winkel b, β mögen von jeder willkührlichen Größe seyn. Allemahl bleibt der von der Alhidadenregel beschriebene Bogen α, das Maaß des wahren Horizontalwinkels $\psi - \varphi$. Dies erhellet auch schon aus dem vorhergehenden, und wird also durch gegenwärtiges noch mehr bestätigt.

II. Setzt man in obigen Formeln $b = \beta = 0$ oder nimmt man an, das Fernrohr drehe sich der Ebene des Werkzeugs parallel, so wird

$$\tang \varphi = \tang \lambda \cos k$$
$$\tang \psi = \tang (\lambda + \alpha) \cos k.$$

Diese Formeln dienen also dazu, die Fehler zu bestimmen, welche aus der geneigten Lage eines solchen Werkzeugs entstehen, dessen Fernrohr nicht wie eine Kippregel auf- und nieder beweglich, sondern in jeder Lage, der Ebene des Werkzeugs parallel ist, wie (§. 100).

III. Wenn man mit einem solchen Instrumente Horizontalwinkel messen will, so müssen die Gegenstände, nach denen man visiret, in einer

einer Horizontal-Ebene durch den Mittelpunkt des Werkzeugs, liegen. — Da aber dieses sehr selten auf dem Felde zutrifft, so neigt man das Werkzeug vorsetzlich, so, daß dessen Ebene gemeinschaftlich durch die beyden Objecte gehe, und mißt den schiefen Winkel α, den man hierauf nach den Formeln (II) in den horizontalen $= \psi - \varphi$ verwandelt, wobey man denn die Neigung des Instruments als bekannt annimmt.

IV. In den Formeln (II) müßte aber auch der Werth des Bogens λ, d. h. in (Fig. III) der Bogen AC, um welchen die Richtungslinie EC nach dem ersten Objecte, von dem gemeinschaftlichen Durchschnitte EA des Werkzeugs mit dem Horizonte, entfernt wäre, gegeben seyn. Diesen Bogen zu finden, müßte man untersuchen, was der Index der Alhidadenregel auf dem Rande des Werkzeugs wiese, wenn man das Fernrohr aus der Lage EC (Fig. III) oder HG (Fig. IV) in die Horizontal Lage HA brächte, welches vermittelst einer mit der Axe desselben parallel angebrachten Libelle (deren Einrichtung aber erst unten erklärt werden wird) sich bewerkstelligen liesse. Gesetzt, bey der Horizontallage HA des Fernrohrs (Fig. IV), wiese der Index der Alhidadenregel 20°, bey der Lage HC des Fernrohrs aber 60°. 17′, so wäre der Bogen AC oder $\lambda = 60° . 17' - 20° = 40° . 17'$ und

und so in andern Fällen. Allein, wenn des Werkzeugs Neigung gegen den Horizont gering ist, so kan man, wenn das Fernrohr in die Horizontallage H A gebracht worden ist, dasselbe wohl um mehrere Grade noch drehen, ohne daß die Luftblase der Libelle sich merklich verrückte. Daher denn der Punkt A auf dem Rande, von dem man die Bogen, wie λ, anzurechnen hat, nie mit der vollkommenen Schärfe angegeben werden kann. Da nun ausserdem auch noch die Neigung k des Werkzeugs in (II) bekannt seyn muß, um den schiefen Winkel α auf den horizontalen zu bringen, diese Neigung sich aber in einem vorgegebenen Falle auch nicht gut messen läßt, so kann man die Formeln (II) (so wie auch die §. 140. XIX.) wenn das Fernrohr wie eine Kippregel auf- und nieder beweglich ist) überhaupt nicht vortheilhaft zur Reduction der Winkel auf den Horizont brauchen. Sie können nur dienen, um zu berechnen, wie groß überhaupt bey willkührlich angenommenen Werthen von λ und k (oder in (§. 130) bey angenommenen λ, β und b) die Unterschiede zwischen den schiefen und horizontalen Winkeln ausfallen können, also, zu beurtheilen, was sich bey solchen winkelmessenden Werkzeugen für Fehler befürchten lassen, wenn man die schiefen Winkel für die horizontalen annähme. Will man aber die Reduction auf den Horizont in einem vorgegebenen Falle

wirklich

würklich selbst bewerkstelligen, so müssen obige Formeln (II) so eingerichtet werden, daß die Grössen wie λ, k aus denselben wegfallen, und andere hineinkommen, welche sich in einem vorgegebenen Falle, unmittelbar und bequem messen lassen, z. E. etwa die Elevationswinkel der Gegenstände über dem Horizont. Da indessen aber in den Formeln (§. 140) auch noch die Winkel β und b vorkommen, welche zu messen, sich zwar eine Vorrichtung an dem Werkzeuge gedenken liesse, so bleibt doch die Anwendung dieser Formeln, gesetzt, daß man auch die Größen λ und k aus ihnen wegschaffen könnte, für die Ausübung immer so unbequem, daß ich es nicht der Mühe werth achte, mich hier weiter damit zu beschäftigen. Ich werde mich daher nur auf den Fall (II) beschränken, und zeigen, wie man durch Messung der Elevationswinkel der Objecte, sowohl der Bestimmung des Bogens λ, als auch des Neigungswinkels k überhoben seyn könne.

V. Es sey also ACG (Fig. IV) das Werkzeug, in einer gegen den Horizont AEF geneigten Lage; H dessen Mittelpunkt: HC, HG die beyden Richtungen des mit der Ebene des Werkzeugs parallelen Fernrohrs, nach den beyden Objecten, deren Horizontalwinkel man finden soll.

1. Man gedenke sich durch die Richtungen HC, HG ein paar Verticalebenen CHE, GHF,

GHF, die den Horizont in den geraden Linien HE, HF durchschneiden; so ist EHF der wahre auszumessende Horizontalwinkel; Statt dessen findet man aber, indem das Fernrohr aus der Richtung HC in die HG gedrehet wird, auf dem Rande des Werkzeugs den Winkel CHG, dessen Maaß der Bogen CG, so wie EF des Horizontalwinkels Maaß ist.

2. So viel nun die beyden Bogen CG, EF von einander unterschieden sind, so groß ist der Fehler, der daher rühret, daß man den Bogen CG auf dem schief stehenden Werkzeuge für den Bogen EF oder für das Maaß des Horizontalwinkels EHF annimmt, mithin so groß auch die Correction, welche man dem schiefen Winkel geben muß, um den horizontalen zu erhalten.

3. Statt daß ich nun den Neigungswinkel GAF des Werkzeugs gegen den Horizont, und den Bogen AC $= \lambda$ in Rechnung bringe, so will ich annehmen, es seyen der Objecte, nach denen die Richtungen HC, HG des Fernrohrs zulaufen, ihre Elevationswinkel EHC, FHG gemessen worden. Daraus wird sich nun auf eine leichte Art der Bogen EF, als das Maaß des Horizontalwinkels, durch Rechnung finden lassen.

4. Es sey also der Winkel CHE $= \varepsilon$; GHF $= e$, der Bogen CG auf dem Werk-

zeuge $= \alpha$. Das Maaß des Horizontalwinkels, oder der Bogen $EF = \varphi$.

5. CE, GF, seyen ein paar Kreisbogen, mit dem Halbmesser $HC = HG$, in den Verticalebenen CHE, GHF beschrieben.

6. Also $CE = \varepsilon$; $GF = e$, weil sie der Winkel CHE, GHF Maaße sind.

7. Man nehme nun $ECP = 90^\circ$ und $FGP = 90^\circ$, so ist P des Kreises AEF Pol, weil die Ebenen CHE, GHF auf dem Horizonte AEF senkrecht stehen; und das sphärische Dreyeck CPG hat bey P einen Winkel, dessen Maaß ist der Bogen $EF = \varphi$.

8. Weil nun $PC = 90^\circ - CE = 90^\circ - \varepsilon$; $PG = 90^\circ - GE = 90^\circ - e$; und $CG = \alpha$, so sind die drey Seiten des sphär. Dreyecks (7) bekannt, daher kann man den Winkel $CPG = \varphi$ nach (Trig. S. LV) durch Rechnung finden, wenn man die dortigen b, c, a, hier die Bogen PC, PG, CG bedeuten läßt; so erhält man in unserer Figur

$$\cos P = \frac{\cos CG}{\sin PC \sin PG} - \cot PC \cot PG.$$

9. Nun ist aber $\cos CG = \cos \alpha$; $\cot PC = \cot (90^\circ - \varepsilon) = \tang \varepsilon$, ferner $\cot PG = \cot (90^\circ - e) = \tang e$; $\sin PC = \sin (90^\circ - \varepsilon) = \cos \varepsilon$ und $\sin PG = \sin (90^\circ - e) = \cos e$,

10.

10. Diese Werthe also substituirt, geben cos P oder

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon\cos e} - \tang\varepsilon\tang e.$$

Wo man also aus den gegebenen Stücken, α, ε, e sogleich den Horizontalwinkel φ selbst berechnen kann; dessen Vergleichung mit dem Bogen α also den Fehler geben würde, welcher aus der geneigten Lage des Werkzeugs zu befürchten ist.

Ex. Es sey $\alpha = 57^\circ\,25^\mathrm{I}$; $\varepsilon = 2^\circ\,25^\mathrm{I}$; $e = 4^\circ\,58^\mathrm{I}$ so wird

$$\begin{aligned} \log\cos\varepsilon &= 9{,}9996136 - 10 \\ \log\cos e &= \underline{9{,}9983663 - 10} \\ \text{Summe} &= 0{,}9979799 - 1 \text{ abgezog.} \\ \text{von } \log\cos\alpha &= \underline{9{,}7312064 - 10} \text{ läßt} \end{aligned}$$

$$\log\frac{\cos\alpha}{\cos e\cos\varepsilon} = 0{,}7332265 - 1$$

wozu die Zahl 0,541036 gehört.

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log\tang e &= 8{,}9390321 - 10 \\ \log\tang\varepsilon &= \underline{8{,}6253518 - 10} \\ \text{Summe} &= 0{,}5643839 - 3 \end{aligned}$$

wozu die Zahl tang ε tang e $= 0{,}003667$ gehört.

Man

Man ziehe also von 0,541036
ab 0,003667

so hat man $\cos\varphi = 0,537369$
wo man durch Proportionaltheile findet $\varphi = 57^\circ\ 29'\ 43''$, da nun $\alpha = 57^\circ . 25'$ war, so ist $\varphi - \alpha = 4' . 43''$, so groß wäre also der Fehler, wenn man den Bogen $CG = \alpha = 57^\circ\ 25'$ für des Horizontalwinkels φ Maaß annehmen wollte. Letzterer ist eigentlich bey den angenommenen Umständen um $4'\ 43''$ größer, als der, welchen das Werkzeug angiebt.

11. Auf diese Art erhellet, wie man in jedem Falle aus den gemessenen Elevationswinkeln CHE, GHF, den schiefen Winkel CHG, den man auf dem Werkzeuge angegeben findet, in den zugehörigen horizontalen EHF, verwandeln könne.

Die Elevationswinkel ϵ, e selbst zu messen, wird erst unten gelehrt werden. In den meisten Fällen ist es hinreichend, sie ohngefähr innerhalb eines Vierthel Grades zu wissen.

Das (10) gegebene Ex. ist aus Hrn. H. Kästners Astron. Abhandl. I. S. pag. 39.;

Da in der Ausübung oft Werkzeuge gebraucht werden, deren Fernrohr sich nicht auf und nieder, sondern mit der Ebene des Werkzeugs parallel dreht, wie das (§. 100) an

meines

meines Vaters Astrolabio, so siehet man leicht, wie nöthig die bisherigen Rechnungen sind, wenn man mit einem solchen Werkzeuge, welches man vorsetzlich neigen muß, dem ohnerachtet den wahren Horizontalwinkel finden will.

VI. Es ist in der III. Figur angenommen worden, daß das Werkzeug AG seine Neigung über der Horizontalfläche habe. — Ist es aber unterhalb des Horizontes geneigt, so muß man den Winkel k in obigen Formeln (§. 140. XIX. XX.) als negativ ansehen. Hiebey muß man nun überlegen, daß der Sinus eines negativen Winkels, negativ ist, der Cosinus desselben aber positiv bleibt, mithin hat man für diesen Fall.

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \mathrm{cos}\,k\ \mathrm{tang}\,\lambda + \frac{\mathrm{sin}\,k\ \mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{cos}\,\lambda}$$

$$\mathrm{tang}\,\psi = \mathrm{cos}\,k\ \mathrm{tang}\,(\lambda + \alpha) + \frac{\mathrm{sin}\,k\ \mathrm{tang}\,b}{\mathrm{cos}\,(\lambda + \alpha)}.$$

VII. Herr Prof. Meister hat in einem Programm de erroribus, qui a situ instrumenti non librato angulorum mensuram ingrediuntur. Goett. 1764. die bisherigen Aufgaben gleichfalls untersucht, und zwey Tafeln nach seinen Formeln berechnet, deren erstere die Fehler bestimmt, die daher rühren, wenn die Ebene des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche geneigt, das Fernrohr aber parallel mit dem Werkzeuge ist; die andere aber sich mit den Fehlern beschäftigt, die aus der schiefen Lage eines Werkzeugs entstehen, dessen Fernrohr, wie eine Kippregel, auf und nieder beweglich ist. Diese Tafeln sind sehr bequem, wenn man nicht nach den Formeln selbst rechnen will.

Dir erste Tafel Hrn. Pr. M. ist nach Formeln berechnet, die mit der (II) übereinkommen, dabey ich aber wegen des Winkels λ die Erinnerung (IV) zu machen habe. Er hat diese Iste Tafel für $k = 1°$; $k = 2°$; $k = 3°$; $k = 4°$ berechnet, und zeigt nun die Art, wie aus dieser Tafel die nöthige Correction des schiefen Winkels für jeden angenommeneu Werth von λ zu bestimmen ist.

Dessen IIte Tafel enthält für jedes λ von $0°$ bis $360°$, die Correctionen 1) für $k = 15'$, und $\beta = 5°$, $\beta = 10°$; $\beta = 15°$; $\beta = 20°$; 2) für $k = 1°$ und $\beta = 5°$; $\beta = 10°$; $\beta = 15°$; $\beta = 20°$.

Nur muß ich noch erinnern, daß der Bogen, den ich λ genannt habe, bey Herrn Prof. Meister $90° - \lambda = \nu$ heißt. Meine Buchstaben β, k, heißen bey ihm a, b.

Die Art des Gebrauchs seiner Tafeln ist nun in dessen Abhandlung §. XI. durch Beyspiele für alle einzelnen Fälle erläutert.

Herr

Herr Pr. M. vergleicht hierauf die Tafeln mit einander, und findet, daß ein Werkzeug mit einem parallelen Fernrohre nicht so gefährlich zu gebrauchen sey, als ein anderes mit einem Kipp-Fernrohr; daß z. E. eine Neigung von 4° bey dem Werkzeuge der erstern Gattung weniger schade, als eine Neigung von 15' bey einem Winkelmesser der zweiten Gattung, und so empfiehlt er, wie natürlich, alle nöthigen Vorsichten in der Horizontalstellung eines Winkelmessers, der mit einer Kippregel versehen ist.

Wenn man indessen die Bequemlichkeit in Betrachrung ziehet, die ein Winkelmesser, mit einem auf und nieder beweglichen Fernrohre, in Absicht eines andern hat, dessen Fernrohr sich der Ebene des Werkzeugs parallel dreht, wenn man überlegt, wie viel Mühe und Zeitverlust es kostet, ein Werkzeug der letztern Art so zu stellen, daß dessen Ebene in die Fläche des auszumessenden schiefen Winkels zu liegen komme, anderer Unbequemlichkeiten zu geschweigen, so wird man wohl immer ein Werkzeug mit einem auf- und nieder beweglichen Fernrohre vorziehen.

VIII. Vermittelst einer guten Wasserwaage läßt sich doch wohl die Ebene eines solchen Winkelmessers so genau horizontal stellen, daß die Neigung desselben gegen den Horizont, nicht leicht

leicht über 10 Minuten betragen wird. Der Fehler, der bey dieser Neigung begangen werden kann, wenn man den schiefen Winkel für den horizontalen nimmt, kann sich nur alsdann auf 4 bis 5 Minuten belaufen, wenn das nach einem Objecte gerichtete Fernrohr einen Winkel von 20 Graden mit der Ebene des Werkzeugs macht, welches doch bey Horizontalvermessungen äusserst selten vorfällt, und sich durch andere Hülfsmittel (z. E. einen Stab, den man zwischen das Werkzeug und das Object in eine gerade Linie setzt) oft vermeiden läßt. In den gewöhnlichen Fällen geht die Neigung des Fernrohrs nicht leicht über 2 bis 3 Grade, und dann ist der Fehler unmerklich, der aus der schiefen Lage des Werkzeugs zu befürchten steht, und kann sich nur in wenigen Fällen auf $\frac{1}{4}$ Minute belaufen.

Wenn man statt der gewöhnlichen Wasserwaage (§. 113) sich ein paar Libellen, deren Beschreibung unten §. 156. V. vorkömmt, zur Horizontalstellung eines Werkzeugs bedienen will, so werden die aus der schiefen Lage zu befürchtenden Fehler im Ausmessen der Winkel dadurch fast gänzlich verschwinden.

Von der Reduction der Winkel auf den Horizont handeln ausser den (V. 11. und VII) angeführten Schriftstellern auch verschiedene, welche von der Messung eines Grades auf der

Erde, geschrieben haben. Auch kann man darüber Georg Ignat. de Metzburg institut. Mathem. (Viennae 1775) Tom. III. Cap. IV. nachlesen. —

Anmerkung.

§. 142. In der Aufgabe §. 140. kömmt nichts vor, was die Ebene ABK (Fig. III) nothwendig auf die Horizontalfläche beschränkte. Sie ist in der That allgemeiner und läßt sich so abfassen:

Es ist eine willkührliche Ebene ABK gegeben, gegen die eine andere ACI geneigt ist; E ist ein Punkt in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EA beyder Ebenen, und ED, EF ein paar Linien, deren Neigungswinkel gegen die Ebene ACI gegeben sind; auch CEG oder der Winkel, unter dem sich ein paar durch ED, EF auf die Ebene ACI senkrecht gesetzte Ebenen durchschneiden, ist bekannt, man sucht daraus den Winkel BEH', unter dem sich ein paar Ebenen durchschneiden, die man durch die Linien ED, EF, auf die zweyte Ebene ABH senkrecht setzet.

Es bliebe eben die Auflösung, wenn z. E. ABK eine Verticalfläche wäre, die Ebene ACG mit ihr einen gewissen Winkel machte, und man aus dem Winkel CEG und den übrigen Datis, den Winkel BEH, oder Bogen BH berechnen wollte.

XI,

XI. Kapitel.

Ueber die Fehler, die beym Winkelmessen zu befürchten sind, wenn das Fernrohr, als Kippregel, nicht genau in einer Ebene beweglich ist, die auf des Werkzeugs Ebene senkrecht stehet.

§. 143.

Daß diese Eigenschaft einer Kippregel nothwendig sey, wird schon aus dem vorhergehenden erhellen. — Nun geschiehet es aber sehr oft, daß derselben diese nöthige Vollkommenheit fehlet, und auch keine Vorrichtungen angebracht sind, vermittelst deren man etwa durch Stellschrauben diese Erforderniß einer Kippregel erhalten kann; Man muß daher Mittel haben, demohnerachtet mit einem solchen Werkzeuge richtig zu messen, und den Fehler in der Bewegung des Fernrohrs ausfindig zu machen; dazu werden nun folgende Betrachtungen dienlich seyn.

Unter welchen Umständen ein Fernrohr sich in einer auf der Ebene des Werkzeugs senkrechten Ebene auf- und nieder bewege.

§. 144. Lehrs. Es sey (Fig. V.) AAA die Ebene des eingetheilten Randes eines Winkelmessers; C der Mittelpunkt desselben. Cc eine auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehende Linie; c sey der Punkt, durch welchen die Axe mn gehet, um die sich die Kippregel, oder das Fernrohr Oo drehet. Die Richtung des Fernrohrs Oo mache mit der Umdrehungsaxe mn einen rechten Winkel, dergestalt, daß nco = mco = 90° sey. Ich behaupte nun, wenn die Axe mn mit der Ebene des Werkzeugs parallel ist, das Fernrohr werde sich um diese Axe in einer Ebene auf- und nieder bewegen, welche auf dem Werkzeuge senkrecht stehet.

Bew. Weil Cc auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehet, und mn mit dieser Ebene parallel ist, so ist der Winkel mcC = 90°; Aber auch mco = 90°; Also stehet mc, auf cC, co gemeinschaftlich senkrecht, und ist folglich auch auf die Ebene senkrecht, welche man sich durch die Richtungen co, cC gelegt, vorstellet.

Gesetzt nun, das Fernrohr Oo, werde um die Axe mn gedrehet, und in die Lage Ww gebracht;

bracht; so ist der Winkel $mcw = 90°$, weil das Fernrohr cw auf der Axe mn, in jeder Lage senkrecht seyn wird, wenn es mit der Axe ein für allemahl rechtwinklicht verbunden ist. Weil nun auch $mcC = 90°$ und $mco = 90°$ war, so wird die Richtung cw, mit den beyden Richtungen cC, co, in einer und derselben Ebene liegen (M. s. Kästn. Geom. 45. S. Zus.).

Es wird also die Axe mn auf jedweder Richtung co, cw, des Fernrohrs, das heißt, auf der Ebene, in der sich das Fernrohr auf- und nieder drehet, senkrecht stehen. Aber auch cC liegt in der Ebene, in der sich die Richtungen des Fernrohrs co, cw befinden, folglich da cC auf der Ebene des Winkelmessers senkrecht stehet, so wird auch die Ebene Cco, in der sich das Fernrohr auf- und nieder beweget, oder die Ebene des Kreises $AwoP$, auf der Ebene des Werkzeugs ACA senkrecht stehen.

I. Zus. Wenn das Fernrohr Oo mit der Axe mn rechtwinklicht verbunden ist, so ist eigentlich die Ebene $AwoP$, in der sich das Fernrohr drehet, immer auf mn senkrecht.

Aber diese Umdrehungsebene $AwoP$ stehet nur in dem Falle zugleich auf dem Werkzeuge

ACA

ACAA senkrecht, wenn die Umdrehungsaxe mn dem Werkzeuge parallel ist, oder wenn mn, mit der Perpendiculärlinie cC einen rechten Winkel macht.

II. Zus. Die Ebene, wie hier AwoP, in der sich das Fernrohr auf- und nieder bewegt, soll künftig die Ebene des Fernrohrs, und eine Ebene durch mn, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, soll der Kürze halber, die Ebene der Umdrehungsaxe heissen.

III. Zus. Wenn mn dem Werkzeuge parallel ist, so stehet cC, oder der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebenen des Fernrohrs, und der Umdrehungsaxe, auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht.

Und wenn ACA die Durchschnittslinie der Ebene des Fernrohres mit der Ebene des Randes, oder der unter dem Fernrohre befindlichen Alhidadenregel, vorstellet, so stehet cC auf ACA senkrecht.

§. 145. I. Wir wollen nun untersuchen, was die bisherigen Sätze für Veränderungen leiden, wenn, wie in der VI. Fig. die Umdrehungsaxe mn dem Werkzeuge nicht parallel ist, mithin nicht auf cC senkrecht stehet.

Man setze, die Axe mn mache mit der Perpendiculärlinie cC nach n zu, einen spitzen Winkel

kel ncC, folglich nach m zu, den stumpfen Winkel Ccm.

II. Weil nun, wenn das Fernrohr mit der Axe mn rechtwinklicht verbunden ist, die Umdrehungsaxe mn, immer auf der Ebene des Fernrohrs senkrecht stehet, und folglich auch auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Ebenen des Fernrohrs und der Umdrehungsaxe, (§. 144. II.) so ziehe man in der Ebene der Umdrehungsaxe cmCL, die Linie ct senkrecht auf cm, und lege durch ct eine Ebene ctαo, senkrecht auf die Ebene cmCL, so wird ctαo jetzt die Ebene vorstellen, in der sich das Fernrohr auf- und nieder bewegt, wenn die Axe mc dem Werkzeuge nicht parallel ist.

III. Es ist also klar, daß jetzt die Ebene ocαt nicht auf dem Werkzeuge senkrecht stehen wird, wie die AwoP im vorhergehenden §.

Sondern, wenn die Umdrehungsaxe mn gegen das Werkzeug geneigt ist, so wird auch die Ebene des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt seyn.

IV. Da sowohl die Ebene des Randes ACL, als auch die Ebene αoct auf der Ebene der Umdrehungsaxe, oder auf CLmc senkrecht stehet, so wird auch beyder Ebenen αoct, ACL, gemeinschaftlicher Durchschnitt αt, auf

der

der Ebene CLmc senkrecht seyn. (Kästn. Geom. 48. Satz). Mithin werden die Winkel α t C, α t c rechte Winkel seyn (Kästn. Geom. 45. S.). Woraus denn weiter folgt, daß der Winkel Ctc, der Neigungswinkel der Ebene des Fernrohrs α t c o gegen die Ebene des Werkzeugs ACL, seyn werde.

V. In dem rechtwinklichten Dreyecke Ctc ist Cct + Ctc = 90° = tcm (II) = nct = Cct + ncC; also ncC = ctC, oder die Ebene, in der sich das Fernrohr auf- und nieder bewegt, ist gegen die Ebene des Winkelmessers unter eben dem Winkel geneigt, welchen die Axe m n mit der auf das Werkzeug senkrecht gezogenen Linie c C macht.

Oder welches auf eins hinausläuft; der Neigungswinkel Ctc ist das Complement desjenigen Winkels zu 90°, um welchen die Umdrehungsaxe m n, gegen die Ebene des Winkelmessers geneigt ist.

VI. Man gedenke sich durch die Linie cC eine Ebene ACco, auf die Ebene CcmL senkrecht, so wird auch AC oder ihr Durchschnitt mit der Ebene des Randes, auf der Ebene CcmL senkrecht stehen.

Aber auch α t stehet auf CcmL senkrecht (IV), also sind AC, α t gleichlaufend (Kästn. Geom. 46. S.).

VII.

VII. Wenn zwey Ebenen αoct, ACco, eine dritte $ACt\alpha$ in parallelen Linien AC, αt durchschneiden, so wird auch der beyden Ebenen αoct, ACco, gemeinschaftlicher Durchschnitt co, mit CA, αt, oder überhaupt mit der Ebene $AC\alpha t$ des Winkelmessers parallel seyn. Auch wird co auf der Ebene cmCL senkrecht stehen.

VIII. Umgekehrt also, wenn man das Fernrohr, welches sich in der schiefen Ebene αtco auf- und nieder bewegt, in eine solche Lage co bringt, bey der es der Ebene des Winkelmessers $Ac\alpha t$ parallel ist, so wird es sich in einer Ebene ACco befinden, welche nicht nur auf der Ebene des Randes, sondern auch auf der Ebene der Umdrehungsaxe senkrecht stehet.

IX. Der beyden Ebenen ACco, αtco Neigungswinkel ist $Cct = 90^\circ - Ctc$.

Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 146. I. Wenn das Fernrohr in einer Ebene beweglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet, und das Werkzeug horizontal gestellt worden ist, so wird das Fernrohr sich immer in einer und derselben Verticalfläche befinden, man mag es hoch oder niedrig richten. Wenn daher das Fernrohr von einem Objecte nach einem andern gerichtet wird, so wird der Winkel, welchen die Alhidadenregel beschrieben

hat,

hat, allemahl der wahre Neigungswinkel seyn, den beyde Verticalflächen, in denen die Objecte liegen, am Mittelpunkte des Werkzeugs mit einander machen, das Fernrohr mag übrigens in beyden Richtungen nach den Objecten, horizontal seyn oder nicht; Wenn aber das Fernrohr in einer schiefen, mithin bey dem horizontalen Stande des Werkzeugs, nicht in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist, so würde man sich sehr irren, wenn man den Bogen, welcher bey Herumdrehung der Alhidadenregel auf dem Rande beschrieben worden ist, für das Maas des Neigungswinkels zweyer Verticalebenen, die man sich durch die Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet worden, und den Mittelpunkt des Winkelmessers vorstellet (§. 132. X.), annehmen wollte. Der Fehler wird desto beträchtlicher seyn, je tiefer das Fernrohr bey dessen Richtungen nach den Objecten, gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt ist. Um dieses desto mehr ins Licht zu setzen, so überlege man folgendes.

II. Es sey (Fig. VI.) Oo die Lage des Fernrohres, wenn es horizontal, und mit der Ebene des Werkzeugs parallel liegt (§. 145. VI. VII.). Eine Verticalebene durch Oo schneide die Ebene des Werkzeugs oder die Alhidadenregel in der geraden Linie ACA, die durch den Mittelpunkt des Winkelmessers gehet.

Nun

Nun sey Ooαa die schiefe Ebene, in der sich das Fernrohr auf- und nieder drehet, sie sey unter dem Neigungswinkel ctC = ncC (§. 145. IV.) gegen die Ebene des Werkzeugs geneigt.

So erhellet, daß, wenn das Fernrohr aus seiner horizontalen Lage Oo, herausgebracht, und z. E. in die geneigte Lage Ww gebracht wird, dasselbe nicht beständig in der Verticalebene AopO bleiben werde. — Das geschiehet nur, wenn es sich würklich in einer Verticalfläche auf- und nieder bewegt. — Eine Verticalfläche, die man sich nun durch diese gegen die Horizontalfläche geneigte Lage des Fernrohres Ww, oder cw einbildet, wird die Ebene des Winkelmessers nicht in der Linie CA, sondern in einer ganz andern Linie Cg durchschneiden, und diese Linie Cg, wird mit der erstern CA, die der horizontalen Lage des Fernrohres zukömmt, einen gewissen Winkel ACg machen, der offenbar desto größer ist, je mehr das Fernrohr cw, aus der horizontalen Richtung co gebracht worden ist, d, h. je größer der Winkel wco ist.

III. Eine Folge hieraus ist nun diese:

Wenn das Fernrohr, bey der Richtung nach einem gewissen Objecte, das ich Q nennen will, anfangs über der Linie vCx horizontal gestanden hätte, folglich mit vCx parallel, mithin in Ansehung der Linie vCx eben das gewesen wäre, was das Fernrohr Oco in Absicht der Linie ACA war (II). und nun die Alhidadenregel oder die Linie vCx herumgedrehet, und in die Lage ACA gebracht worden wäre, bey der das nach einem zweiten Objecte P gerichtete Fernrohr cw eine geneigte Lage hätte, so würde zwar xCA der Winkel seyn, um den die Alhidadenregel herumgedrehet worden, allein weil das Fernrohr eine geneigte Lage hat, so wird eine Verticalebene durch cw, die Alhidadenregel nicht in der Linie ACA, sondern in der Linie Cg durchschneiden, und xCg würde der wahre Winkel seyn, den die beyden Verticalebenen durch die Objecte Q, P, am Mittelpunkte des Werkzeugs mit einander machen. *Allein* dieser Winkel xCg ist nicht dem Winkel xCA gleich, um welchen die Regel gedrehet worden; mithin wenn man den auf dem Rande durchlaufenen Bogen Ax, für das Maaß des wahren Horizontalwinkels gCx annehmen wollte, so würde man offenbar einen Fehler begehen, der dem kleinen Bogen Ag, oder dem zugehörigen Winkel ACg gleich wäre.

IV. Um die Größe dieses kleinen Winkels ACg zu bestimmen, so überlege man, daß ACg der Neigungswinkel der beyden Verticalebenen ACco, gCcw oder der beyden größten Kreise Aop, gwp ist.

V.

V. Man beschreibe nun mit dem Halbmesser cw = co, in der Ebene α oct, in der sich das Fernrohr drehet, den Kreisbogen owα, so erhält man ein sphärisches Dreyeck opw, darinnen ist der Bogen op = 90°, als Maaß des rechten Winkels ocp.

Dies erhellet daraus, weil die beyden Verticalebenen AopC, gwpC sich in der Verticallinie pC schneiden müssen, und die Horizontallinie co mit der verticalen pc einen rechten Winkel machen muß.

Ferner ist p des Horizontalkreises AgLA Pol, folglich der sphärische Winkel opg der Neigungswinkel der beyden Verticalebenen Aop, gwp; Also opg = ACg (IV), welchen Winkel ACg ich = x nennen will.

Der sphärische Winkel pow ist = 180° — woA; Aber woA ist die Neigung der schiefen Ebene αoct, gegen die verticale AoCc. Folglich auch woA = tcC = 90° — Ctc (§. 145. VII.) Macht also die Axe mn nach n. zu, den Neigungswinkel = ω mit dem Werkzeuge, so ist Ctc = 90° — ω (§. 145. V). Also woA = tcC = ω folglich pow = 180° — ω.

Man gedenke sich in der Verticalebene gwCc, durch c eine Horizontallinie ci gezogen, so ist der Winkel icw die Neigung des Fernrohrs unter

unter der Horizontallinie, diesen Winkel will ich $= \psi$ nennen.

Also ist der Winkel wcp $=$ icp $+$ wci $= 90^\circ + \psi =$ dem Bogen piw.

Um nun den Winkel opw oder ACg zu finden, so wollen wir das sphärische Dreyeck opw auflösen.

Man lasse in (Trig. S. LIII. 1.) die dortigen Größen A, B, b, c, hier in der Figur die Größen opw, pow, pw, po bedeuten, so giebt die dortige Gleichung folgende

$$\text{tang pow} = \frac{\sin \text{opw} \ \text{tang pw}}{\sin \text{po} - \text{tang pw} \cos \text{po} \cos \text{opw}}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \text{tang pow} &= \text{tang}\,(180^\circ - \omega) = - \text{tang}\,\omega \\ \text{tang pw} &= \text{tang}\,(90^\circ + \psi) = - \cot \psi \\ \sin \text{opw} &= \sin x \\ \sin \text{po} &= \sin 90^\circ = 1; \ \cos \text{po} = 0. \end{aligned}$$

Diese Werthe also substituirt geben

$$\text{tang}\,\omega = \sin x \cot \psi \text{ also}$$

$$\sin x = \frac{\text{tang}\,\omega}{\cot \psi} = \text{tang}\,\omega\ \text{tang}\,\psi.$$

Weil aber nun gewiß die Axe mn nur immer einen sehr kleinen Winkel ω mit der Ebene

des

des Werkzeugs machen wird, wenn anders das Werkzeug nicht gar zu fehlerhaft seyn soll, und überdem auch der Winkel $opw = ACg = x$ immer nur klein seyn wird, so kann man ohne merklichen Fehler $\sin x = x$; und $\tang \omega = \omega$ mithin

$$x = \omega \tang \psi \text{ setzen.}$$

Solchergestalt findet man also aus den gegebenen Größen ω, ψ, den Fehler, welchen man wegen der geneigten Lage der Axe mn in dem Falle, bey Ausmessung eines Horizontalwinkels zu befürchten hat, wenn nach dem ersten Objecte Q das Fernrohr über der Linie vx horizontal gerichtet gewesen, nach dem zweyten Objecte P aber in der Richtung cw um den Winkel ψ von der Horizontallinie herabgeneigt gewesen wäre. Dann nemlich erfordert der Winkel $ACx = \alpha$, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, die Correction $ACg = x = \omega \tang \psi$, um den wahren Winkel $xCg = \alpha + x = \alpha + \omega . \tang \psi$ zu erhalten, welchen beyde Verticalebenen, durch die Objecte Q, P, am Mittelpunkte des Winkelmessers mit einander machen.

VI. Es ist bisher angenommen worden, daß die Axe cn mit cC (Fig. VI) nach n zu, den spitzen Winkel ncC macht. Einem Beobachter also, der bey O durchs Fernrohr Oo

sähe, würde der Durchschnitt der Axe cn mit der Ebene des Werkzeugs, rechter Hand der Linie ACA, oder auch rechter Hand des Perpendickels Cc fallen.

Es ist klar, daß wenn die Axe nach der entgegengesetzten Richtung cm gegen die Ebene des Winkelmessers geneigt wäre, alsdann die Axe cm die Ebene des Werkzeugs in einem Punkte schneiden würde, welcher in Absicht des Beobachters bey O, linker Hand des Perpendickels cC läge. Man wird also für den letzten Fall den Werth von ω in obiger Formel (V) negativ nehmen müssen. Daher wäre in solchem Falle auch die Correction des Winkels α, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, negativ, und der wahre Winkel, den die Objecte am Mittelpunkte des Werkzeugs machen $= \alpha - \omega \,.\, \tang \psi$.

VII. Ferner setzt die bisherige Rechnung in Fig. VI. zum voraus, daß das Fernrohr Ww, bey der Richtung nach dem zweyten Objecte P, nach w zu geneigt ist, und folglich sich unterhalb der Horizontallinie ci befinde; Wäre aber nach dem zweyten Objecte das Fernrohr über der Horizontallinie ci erhöhet, so müßte man in unseren Formeln auch den Winkel ψ negativ setzen; dann wäre auch $\tang \psi$ negativ, folglich für den Fall (V) der wahre Winkel $= \alpha - \omega \tang \psi$ und für den Fall (VI) derselbe $= \alpha + \omega \,.\tang \psi$.

VIII.

VIII. Ich will nun die bisherige Voraussetzung, daß das Fernrohr, bey der Richtung nach dem ersten Objecte Q, horizontal oder parallel über der Alhidadenregel vx gestanden habe, ändern, und annehmen, daß es bey der Richtung nach dem ersten Objecte Q, ebenfalls unter der Horizontallinie um den Winkel ψ^{I}, geneigt gewesen wäre; Alsdann würde eine Verticalebene, die durch das Object Q, nach dem das Fernrohr gerichtet ist, und durch den Mittelpunkt des Winkelmessers gienge, die Ebene des Randes nicht in der Linie Cx, sondern in einer andern Linie Cγ durchschneiden, dergestalt, daß hier die Linie Cγ, in Absicht der Linie Cx eben das wäre, was die Linie Cg in Absicht der CA war (V). Folglich wäre der kleine Winkel $xC\gamma = \omega$ tang ψ^{I}, und der wahre Winkel den beyde Verticalflächen durch die Objecte, am Mittelpunkte des Werkzeugs machen $= \gamma Cg$; der aber, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat $= xCA = \alpha$.

Nun ist $\gamma CA = \alpha - \omega \text{ tang } \psi^{I}$, und daher

γCg oder $\gamma CA + ACg$ oder

$\gamma Cg = \alpha - \omega \text{ tang} \psi^{I} + \omega \text{ tang} \psi$ Mithin

$\gamma Cg = \alpha + \omega (\text{tang} \psi - \text{tang } \psi^{I})$.

Und folglich wäre der Fehler, den man in Bestimmung des verlangten Winkels γCg begehen würde, wenn man den von der Alhidadenregel, oder dem Index des Vernier, durchlaufenen Bogen $x\gamma A$ für desselben Maaß annehmen wollte, der Größe ω (tang ψ — tang ψ^{I}) gleich.

IX. Wenn $\psi^{I} = \psi$, also in beyden Richtungen des Fernrohrs nach den Objecten, das Fernrohr gleichviel über oder unter der Horizontallinie geneigt gewesen wäre, so würde der Fehler ω (tang ψ — tang ψ^{I}) = o und der wahre Winkel γCg, dem xCA, den das Werkzeug angiebt, gleich.

Soll also mit einem Winkelmesser, dessen Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist, bey Ausmessung eines Winkels kein Fehler entstehen, so muß das Fernrohr bey dessen Richtung nach den Objecten gleichviel über oder unter der Horizontallinie geneigt seyn.

X. Um das bisherige mit einem Zahl-Exempel zu erläutern, so will ich setzen, die Neigung der Axe mn, um die sich das Fernrohr drehet, betrage $20^{I} = \omega$. Bey der Richtung des Fernrohrs nach dem ersten Objecte, sey dessen Neigung unter der Horizontallinie, oder $\psi^{I} = 20^{\circ}$, nach dem zweyten $\psi = 18^{\circ}$; der von dem Index beschriebene Bogen $\alpha = 80^{\circ}$, der wahre Winkel beyder Objecte, oder $\gamma Cg = A$, so ist

$$A = 80^{\circ} + 20^{I}\ (\text{tang}\ 18^{\circ} - \text{tang}\ 12^{\circ})$$
$$= 80^{\circ} + 20^{I}\ (0,3249 - 0,2125)$$
$$= 80^{\circ} + 20^{I}\,.\,0,1124 = 80^{\circ}\,.\,2^{I}\,.\,16''$$

Für

Für $\psi^1 = - 12^\circ$ wäre aber

$$A = 80^\circ + 20^I (\text{tang } 18^\circ + \text{tang } 12^\circ)$$

oder nach gehöriger Rechnung

$$A = 80^\circ . 10^I . 45''.$$

Hieraus erhellet also, daß der Fehler sehr beträchtlich werden kann, wenn gleich die Neigung der Umdrehungsare nur 20^I betrüge, mithin sich durchs bloße Auge schwerlich würde wahrnehmen lassen.

XI. Wenn man überhaupt den Fehler

$$x = \omega (\text{tang } \psi - \text{tang } \psi^1)$$

bestimmen will, so muß man die Größen ω, ψ, ψ^I als bekannt annehmen, oder Mittel haben, bey einem vorgegebenen Werkzeuge dieselben ausfindig zu machen. Wie man die Neigung der Are ω bestimmen und durch Beobachtungen finden könne, zeige ich nachher. Die Werthe von ψ, ψ^1, oder die Neigungen des Fernrohrs gegen die Horizontalfläche zu bestimmen, sehe ich kein anderes Mittel, als daß man entweder wissen muß, wie viel die Objecte, nach denen das Fernrohr gerichtet ist, über oder unter der Horizontalebene des Werkzeugs liegen, oder es muß von dem Mechanico eine Einrichtung getroffen werden, zugleich den Winkel zu messen, um den das Fernrohr bey der jedesmaligen Richtung desselben, über oder unter der Horizontallinie geneigt ist, wozu ein kleiner, auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehender Gradbogen hinreichend seyn würde.

Da aber eine solche Vorrichtung, besonders kleine Werkzeuge, deren man sich doch nur gewöhnlich beym Feldmessen bedient, nur zusammengesetzter machen würde, und übrigens auch keine sehr scharfe Bestimmung der Winkel ψ, ψ^1 nöthig ist, so habe ich mich immer folgenden Mittels bedient, die Neigung des Fernrohrs unter der Horizontallinie zu bestimmen.

Es sey Fig. VII. wieder c der Punkt, um den sich in dem Gewinde das Fernrohr auf- und nieder bewegt, oder der Mittelpunkt des Gewindes; cC die Weite desselben von der horizontalen Ebene des Werkzeugs. Es wird nicht schwer seyn, cC nach einem gewissen Maaßstabe als bekannt anzunehmen. Ich will also $cC = a$ nennen.

wW sey das geneigte Fernrohr, und w das äusserste Ende desselben, wt ein Loth auf die Ebene des Werkzeugs; wi horizontal, und cr senkrecht auf Ww. Ich kann auch die beständigen Größen cw, cr als bekannt annehmen, wo ich $cw = b$ nenne; Des Winkels cwr Sinus ist $= \frac{cr}{cw}$ also der Winkel cwr eine beständige Größe $= \beta$.

Des

Des Fernrohrs Ww Neigung gegen die Horizontallinie wi, ist der Winkel $\psi = Wwi = \beta + cwi$.

Um cwi zu finden, messe man den veränderlichen Abstand wt, welches in jedem Falle nicht schwer seyn wird, und nenne wt = z.

So ist in dem rechtwinklichten Dreyecke cwi, $ci = Cc - wt = a - z$ und $\sin cwi = \frac{ci}{cw}$ $= \frac{a-z}{b}$. Also ist durch Messung des Abstandes wt, auch der Winkel cwi, den ich φ nennen will, bekannt.

Dies giebt demnach die Neigung des Fernrohrs gegen die Horizontallinie, oder den Winkel $\psi = \beta + \varphi$. Wenn $wt > Cc$ oder $z > a$, so ist des Winkels cwi oder φ Sinus negativ, folglich auch der Winkel φ negativ; In diesem Falle ist demnach $\psi = \beta - \varphi$. Auf solche Art kann man nun aus den unveränderlichen Größen β, cw, a, und dem veränderlichen Abstand z, in jedem Falle gar leicht die Winkel ψ, ψ' finden, und obgleich in der Messung der erwähnten Größen z, cr, cw, a, leicht kleine Fehler vorfallen können, so wird man dennoch ψ hier mit zureichender Genauigkeit finden.

Auf diese Art erspart man sich eine Vorrichtung, den Winkel ψ unmittelbar zu messen, und da man die beständigen Größen β, cw, a ein für allemahl als bekannt ansehen kann, so hat man bey jeder Neigung des Fernrohrs blos den veränderlichen Abstand z zu messen, welches ohne die geringste Weitläuftigkeit jedesmahl geschehen kann. Den gemessenen Abstand $wt = z$ kann man dann allemahl zugleich mit in diejenige Columne schreiben, in welche die Abmessungen zu stehen kommen, die der Bestimmung desjenigen Objects, wohin das Fernrohr Ww gerichtet ist, zugehören (§. 133. IV.).

XII. Für $z = 0$, oder wenn das Fernrohr ganz bis auf die Ebene des Winkelmessers geneigt ist, wird $\sin \varphi = \frac{a}{cw}$; diesen Winkel will ich γ nennen, so ist $\gamma + \beta$ der größte Winkel, um den man das Fernrohr neigen kann. Gewöhnlich pflegt man ihn nicht größer, als etwa 20 bis 25 Grad zu nehmen.

Zu untersuchen, ob das Fernrohr genau in einer auf der Alhidadenregel senkrechten Ebene beweglich sey.

§. 147. Aufl. I. Man bringe die Ebene des Winkelmessers Fig. VI. mit aller möglichen

chen Vorsicht, vermittelst einer sehr guten Wasserwaage in eine horizontale Stellung.

II. Nun lasse man in einiger Entfernung von dem Werkzeuge, an einem Faden MR ein Loth herabhängen, welches aber zu gegenwärtiger Absicht sehr ruhig hängen muß; Daher man sich eines mit Wasser angefüllten Gefäßes bedienen kann, in welches das Loth hängt.

III. Noch besser ist es, wenn man auf einer entfernten Wand, genau eine Verticallinie verzeichnet.

IV. Man richte nun die Axe des Fernrohres, oder den Durchschnitt der beyden Kreutzlinien im Brennpuncte desselben, ganz genau nach der entfernten Verticallinie MR, wobey denn das Fernrohr eine mit der Ebene des Werkzeugs parallele, folglich horizontale Lage co habe, die man gar leicht durch Versuche, oder durch andere Mittel erhalten kann.

V. Nun ist klar, wenn das Fernrohr in einer Verticalebene ocAC auf- und nieder beweglich ist, so wird der Durchschnitt der beyden Kreutzlinien im Brennpunkte, beständig die erwähnte Verticallinie MR decken, und selbige nie verlassen, man mag das Fernrohr nach Gefallen unter oder über die Horizontallinie neigen.

VI.

VI. Man bringe also das Fernrohr aus seiner horizontalen Lage Oo, bey der es genau nach MR gerichtet ist, in eine geneigte Lage. Verläßt nun der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien, oder die Axe des Fernrohrs, die erwähnte Verticallinie MR, so ist zuverlässig das Fernrohr nicht in einer Verticalebene coAR, sondern in einer schiefen coαt auf- und nieder beweglich, mithin wird die Umdrehungsaxe mn einen gewissen Winkel = ω mit der Ebene des Werkzeugs machen (§. 146. V.).

ω zu finden.

§. 148. I. Es bleibe alle Zurüstung wie im vorhergehenden §. und die Horizontal-Axe Oo des Fernrohrs sey genau nach der Verticallinie MR gerichtet worden. — Man neige nun das Fernrohr aus der Lage Oo in die Ww, so wird, wenn das Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist, die Visirlinie Ww in dieser geneigten Lage keinen Punkt der Verticallinie MR mehr decken, sondern von ihr um einen gewissen Abstand entfernt seyn.

Man stelle' sich durch cw eine Verticalebene Ccwg vor, die das Werkzeug in Cg schneide, so wird anjetzt die Verticalebene Ccwg, in der sich das geneigte Fernrohr befindet, von der Verticalebene ACco, in der es sich bey dem hori-

horizontalen Stande befand, um den kleinen Winkel $ACg = x = \omega \operatorname{tang} \psi$ (§. 146. V.) abweichen. Diesen kleinen Winkel x zu finden, lasse man das Fernrohr in seiner Neigung cw, und wende, durch Hülfe der Micrometerschraube, die Alhidadenregel sanft herum, bis jetzt die geneigte Axe des Fernrohrs cw, nach dem Verticalfaden MR zielet, mithin die Verticalebene $Ccwg$ in die Lage $ocCA$ gekommen ist; so wird man die Alhidadenregel genau um einen Winkel $ACg = x$ verrücket haben, und diesen Winkel werden die Umdrehungen der Micrometerschraube bestimmen.

II. Nachdem auf diese Art durch Beobachtung der Winkel x gefunden worden, so bestimme man nach (§. 146. XI.) auch die Neigung des Fernrohrs unter der Horizontallinie, oder den Winkel ψ.

III. Weil nun x, ψ solchergestalt bekannte Größen sind, so findet man umgekehrt aus der Gleichung $x = \omega \operatorname{tang} \psi$, den Werth von ω $= \frac{x}{\operatorname{tang} \psi} = x \cot \psi$ also die Neigung der Umdrehungsaxe mn gegen die Ebene des Werkzeugs.

IV. Bey einem Werkzeuge, das ich besitze, wo gleichfalls das Fernrohr nicht in der gehörigen Ebene auf- und nieder beweglich war,

fand

fand ich bey einem angestellten Versuche $x = 8^{I}\ 30''$, und das Fernrohr war so geneigt, daß (§. 146. XI.) in Theilchen eines verjüngten Maaßstabes $z = 85$; $a = 175$; $b = 325$ war. Der Winkel β war aber wegen einer besondern Vorrichtung der Kippregel $= 0$. Dieß gab mir $\sin \varphi = \frac{a - z}{b} = \frac{90}{325} = 0{,}2769.$ also $\psi = 16^{\circ}\ 4^{I}$. Weil nun $x = 8^{I}\ 30'' = 510''$, so ist

$$\begin{array}{r} lx = 2{,}70757 \\ l\cot\psi = 0{,}54059 \\ \hline \log\omega = 3{,}24816 \end{array}$$

also $\omega = 1770'' = 29^{I} . 30''$.

So betrug also bey diesem Werkzeuge die Neigung der Axe $m\,n$, um die sich das Fernrohr drehet, beynahe einen halben Grad; Ich habe nachher die Versuche bey andern Neigungen ψ des Fernrohrs wiederhohlt, und fand für ω folgende Werthe.

$$\begin{array}{rl} \omega = & 29^{I} . 30'' \\ \omega = & 28 . 0 \\ \omega = & 27 . 20 \\ \omega = & 29 . 14 \\ \omega = & 28 . 12 \\ \omega = & 29 . 10 \\ \hline \text{das Mittel}\ \omega = & 28^{I} . 34''. \end{array}$$

Die

Die Unterschiede in den gefundenen Werthen für ω, rühren bloß von den kleinen Fehlern her, die bey den Abmessungen, die zur Bestimmung von ω nöthig waren, begangen worden sind.

Uebrigens habe ich hier noch zu erinnern, daß dieser Werth von ω negativ ist, weil die unter der Horizontallinie Oco geneigte Axe des Fernrohrs Wcw, in Absicht des Beobachters bey O, nach einem Punkte hinzielte, der nicht linker Hand des Verticalfadens MR, sondern rechter Hand desselben lag, wo also die Verticalebene Ccwg, nicht wie hier in der Figur angenommen ist, linker Hand der ACco, sondern rechter Hand derselben, liegen mußte.

Anmerkung.

§. 149. Das bisherige wird also denen, die ein Werkzeug besitzen, wo das Fernrohr nicht in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist, zeigen, wie sie dennoch mit einem solchen Winkelmesser, nach der gehörigen Correction, einen Winkel genau messen können; Es wird gut seyn, wenn sie alsdann für jede Neigung des Fernrohrs, also für iedes ψ. ein für allemahl den daraus entspringenden Fehler berechnen, und darüber eine Tabelle verfertigen, aus der sie sodann nach (§. 146. VIII.) sogleich die nöthige Correction herausnehmen können.

Ist

Ist aber von dem Mechaniko an dem Werkzeuge eine solche Vorrichtung angebracht, daß man etwa durch Stellschrauben die Axe m n, um die sich das Fernrohr drehet, genau der Ebene des Werkzeugs parallel stellen kann, so wird man der bisherigen Rechnungen sämmtlich überhoben seyn können. Wenn man nemlich nach §. 147. auch einen solchen Fehler des Werkzeugs gefunden hätte, so kann man, vermittelst der Stellschrauben, die erwähnte Umdrehungsaxe so lange verbessern, bis man in der Bewegung des Fernrohrs keinen Fehler mehr entdecket.

Eine Vorrichtung durch Stellschrauben, die Umdrehungsaxe des Fernrohres, der Ebene des Werkzeugs parallel zu stellen.

§. 150. Es lassen sich dergleichen Mittel sehr viele angeben; Eine Vorrichtung aber, wodurch ich glaube, diese Absicht bey dem §. 99. angegebenen Winkelmesser auf eine leichte Art zu erhalten, wäre etwa folgende. Fig. VIII. bedeutet TZ das Stück Messing, welches mit denselben Buchstaben auf der LXVI. Figur der V. Kupferplatte des ersten Theils bezeichnet ist, und durch 4 Schrauben auf die Alhidadenregel befestigt wird (§. 99. 18.). Vtz ist die Vorrichtung, an der sich das Zirkelgewinde V befindet, um welches sich das Fern-

rohr

rohr auf- und nieder drehet. Diese Vorrichtung endigt sich in eine runde Platte tz, deren untere Fläche tμz etwas convex ist, oder eine Kugelfläche vorstellet; Auf dem Stück Messing TZ ist nun eine kugelförmige oder koncave Vertiefung m gedrehet, in welche genau die konvexe Fläche tμz passet, welches man durch Einschmirgeln leicht erhalten kann. Die Einrichtung muß aber so getroffen werden, daß, wenn tμz in die Vertiefung m gesetzt worden, die obere Fläche der Platte tz, etwa noch um $\frac{1}{3}$ Linie über der Ebene des Stücks Messing TZ hervorrage, ohngefähr wie es im Durchschnitte (Fig. VIII*) zu sehen ist.

Nun sind nahe an dem Umfange der Vertiefung m, 4 Schraubenmütter a, a, α, α, angebracht, in welche 4 stählerne Schrauben, wie ohngefähr bey n zu sehen ist, gehören, die mit ziemlich breiten Köpfen versehen sind, damit, wenn die Vorrichtung tμz in die Vertiefung m gelassen wird, alsdann diese Schraubenköpfe ohngefähr mit ihrer Hälfte über die Platte tμz herübergehen, und wenn sie angezogen werden, durch ihren Druck die Platte tμz nach Belieben unverrückt erhalten: Zugleich werden aber diese Schrauben auch dazu dienen, die Platte tz, mithin die ganze Vorrichtung tVz. um die sich das Fernrohr drehet, in der Vertiefung m etwas zu verschieben,

ben, mithin zu machen, daß t V z in eine solche Stellung komme, bey der die Axe, um die sich in dem Zirkelgewinde das Fernrohr drehet, der Ebene des Werkzeugs parallel werde. Denn wenn man z. E. die Schrauben α, α, etwas nachlässet, und hingegen die a, a, anziehet, so werden letztere durch ihren Druck auf die in der Vertiefung m befindliche Platte tz, die Vorrichtung t V z, nach der Seite zu neigen, und verschieben, nach welcher der Druck geschieht; und da, durch das Anziehen der Schrauben α α, und Lösung der a a, die Vorrichtung t V z auch nach der entgegengesetzten Seite geneigt werden kann, so erhellet, daß sie, vermittelst dieser Schrauben, in eine solche Stellung gebracht werden kann, daß die Axe des Zirkelgewindes V, genau mit der Ebene des Werkzeugs parallel werde. Hat sie nun einmal ihre gehörige Stellung, so werden die 4 Schrauben a, a, α, α, nachdem sie sorgfältig angezogen worden, die Vorrichtung t V z unverrückt in der angegebenen Vertiefung festhalten.

Will man, daß die Platte tz nicht über der zugehörigen Vertiefung hervorrage, so müßte man dagegen an den Stellen, wo die Schraubenköpfe auf den Umfang der Platte drücken sollen, in das Stück T Z, Vertiefungen für die Schraubenköpfe einlassen, welches über:

überhaupt der Vorrichtung ein besseres Ansehen giebt.

Anmerkung.

I. Die Schlüsse, worauf sich die Formeln (§. 146. V.) gründen, setzen zum voraus, daß die Umdrehungsaxe m n Fig. VI. mit dem Fernrohre rechtwinklicht verbunden ist, und folglich die Kippregel keinen andern Fehler habe, als den, daß die Axe m n, der Ebene des Werkzeugs nicht parallel ist.

II. Wenn man aber ausserdem noch annimmt, daß das Fernrohr nicht mit der Axe m n rechtwinklicht verbunden ist, sondern einen Winkel mit der Axe macht, der von einem Rechten um etwas geringes unterschieden ist, so werden aus dieser zweyten Unvollkommenheit der Kippregel, auch noch Fehler bey Messung der Winkel entstehen, weil alsdann das Fernrohr beym Auf- und Niederbewegen, nicht wie bisher eine Ebene, sondern eine kegelförmige Fläche beschreiben würde.

III. Allein der Fehler, der aus dieser Ursache beym Winkelmessen zu befürchten ist, ist so unbeträchtlich, daß ich es nicht der Mühe werth gehalten habe, ihn mit in Erwägung zu ziehen. — Es läßt sich immer ohne merklichen Irrthum annehmen, daß das Fernrohr, so weit

weit als man es beym Feldmessen auf- und nieder bewegt, eine vollkommene Ebene beschreibe, ob es gleich nicht völlig genau mit der Umdrehungsaxe rechtwinklicht verbunden ist. Wenn auch das Fernrohr, mit der Umdrehungsaxe m n, einen Winkel von 89 Graden machte, also um 1° von der senkrechten Verbindung abwiche, (welches doch ein Mechanicus gar leicht wird vermeiden können) so habe ich gefunden, daß in den seltensten Fällen bey Ausmessung der Winkel ein Fehler von $1\frac{1}{2}$ Minute daraus zu befürchten sey. Weit gefährlicher ist die bisher betrachtete Neigung der Umdrehungsaxe m n.

IV. Man wird nemlich durch Hülfe der sphärischen Trigonometrie für den Fall, daß der Winkel m c o, oder m c w (Fig. VI.) nicht wie (§. 144.) ein rechter Winkel ist, also das Fernrohr nicht rechtwinklicht mit der Axe m n verbunden ist, sondern mit derselben einen Winkel m c o $=$ m c w $= 90° - \nu$ macht, finden, daß wenn das Fernrohr aus der horizontalen Lage O c o in die geneigte Lage W c w gebracht wird, der Werth des kleinen Winkels A C g nicht mehr wie in (§. 146. V) $= \omega \tan \psi$, sondern vielmehr ohne merklichen Fehler $= \nu \tan \frac{1}{2} \psi \tan \psi + \omega \tan \psi$ seyn wird, wo demnach der Theil $\nu \tan \frac{1}{2} \psi \tan \psi$ oder auch $\nu (\sec \psi - 1)$ die von (II) herrührende Correction bezeichnet.

Setzte

Setzte man demnach auch z. B. $v = 1° = 3600''$, und $\psi = 10°$, welcher letztere Fall gewiß sehr selten seyn wird, so wird doch v tang $\frac{1}{2}\psi$ tang ψ nur erst $55''$, also noch keine ganze Minute betragen. Gewöhnlich gehen die Neigungswinkel wie ψ nicht über ein paar Grade, und in diesem Fall wird der angeführte Correctionstheil nur wenige Secunden betragen.

V. Um den Werth von v, also den Abweichungswinkel des Fernrohrs von seiner rechtwinklichten Verbindung mit der Umdrehungsaxe mn zu erhalten, müste man wie in §. 148. verfahren, aber jetzt um aus der Gleichung

$$ACg = x = v \text{ tang } \tfrac{1}{2} \psi \text{ tang } \psi + \omega \text{ tang } \psi$$

beyde unbekannte Grössen v und ω zu erhalten, für zwey bekannte Werthe von ψ, den Winkel x nach (§. 148. I.) bestimmen.

Wäre also z. B. für $\psi = \eta$, der Winkel x = m, und für $\psi = \zeta$ der Winkel x = n durch Beobachtung gefunden worden, so hätte man die Gleichungen

$$m = v \text{ tang } \tfrac{1}{2} \eta \text{ tang } \eta + \omega \text{ tang } \eta$$
$$n = v \text{ tang } \tfrac{1}{2} \zeta \text{ tang } \zeta + \omega \text{ tang } \zeta$$

woraus man v und ω finden könnte, um demnach aus der allgemeinen Gleichung

$$x = v \text{ tang } \tfrac{1}{2} \psi \text{ tang } \psi + \omega \text{ tang } \psi$$

für jede Neigung ψ den Correctionswinkel x berechnen, und so eine Correctionstafel verfertigen zu können.

VI. Um nicht in jedem Falle nöthig zu haben, die Winkel wie ψ erst besonders nach dem Verfahren §. 146. XI. zu bestimmen, so kann man kürzer auch auf folgende Weise ganz empirisch verfahren.

Nachdem man das Fernrohr in der horizontalen Lage O o nach einer entfernten Verticallinie MR §. 147. IV. gerichtet hat, messe man in dieser Lage das Perpendikel wie w t Fig. VII. und §. 146. XI.

Es ist nicht nöthig, daß dieses Perpendikel w t = z gerade von dem Endpunkte w des Fernrohres auf die Ebene des Werkzeugs herabgefället und gemessen werde, sondern es kann von jeder Stelle des Fernrohres, die aber an der Röhre desselben ein für allemahl durch ein Zeichen bemerkt seyn muß, herabgefället werden. Das Perpendikel mißt man am besten an einem in gleiche Theile getheilten Stäbchen. Ich will setzen, das Perpendikel z halte gerade 12 solcher Theile, für den Fall, daß das Fernrohr die horizontale Lage O o hat.

Nun neige man das Fernrohr, daß das Perpendikel der Ordnung nach 11, 10, 9, 8, ꝛc.

solcher Theile fasset, und bestimme nun für jede solche Neigung durch Beobachtung die entsprechenden Winkel x = A C g nach (§. 148. I).

Diese Perpendikel z, mit den zugehörigen Werthen von x, ordne man in ein Täfelchen, so kann nunmehr in jedem Falle, wo für eine gewisse Neigung des Fernrohrs W w, das Perpendikel z gemessen worden ist, aus dem Täfelchen sogleich durch Proportionaltheile, der entsprechende Winkel A C g = x hinlänglich genau gefunden werden.

Begreiflich kann das Täfelchen auch construirt werden für die Fälle, daß das Fernrohr über der Horizontalrichtung O o erhoben wird, in welchem Fall die Winkel x oder A C g den vorigen nur entgegengesetzt genommen werden müssen.

VII. Am besten ist es nun freylich, wenn gar keine Correctionen dieser Art bey Ausmessung der Winkel erforderlich sind, und also das Fernrohr genau in einer Ebene, senkrecht auf derjenigen des Werkzeugs, auf und nieder beweglich ist. Von dem Geometer wird sich diese Bedingung an dem in dieser pract. Geom. beschriebenen Winkelmaße, durch Hülfe der Vorrichtung §. 150. und derjenigen §. 136. VI., wodurch das Fernrohr oder auch das Fadenkreuz etwas rechts oder links verschoben werden kann, sehr bald in der nöthigen Genauigkeit darstellen lassen. Hält man aber diese Vorrichtungen für zu weitläuftig, so sind die bisherigen Untersuchungen gewiß nicht ohne Nutzen. Nicht alle Feldmesser sind, wie ich schon öfters erwähnt habe, mit so kostbaren Werkzeugen versehen, an denen alle einzelnen Theile sich durch Schrauben verificiren lassen. Sie müssen also wissen, auch mit minder kostbaren Werkzeugen, richtige Messungen anstellen zu können.

XII. Kapitel.

Einen Winkel, dessen Ebene vertical ist, vermittelst des Winkelmessers, auf dem Felde auszumessen.

§. 151.

Die im ersten Theile gegebenen Vorschriften (§. 128 u. f.) die Größe eines Winkels zu erfahren, beziehen sich nur auf solche Winkel, deren Schenkel horizontal sind, oder wenigstens auf die Horizontalfläche projicirt werden.

Nun kömmt es aber in der praktischen Geometrie auch oft vor, daß man Höhen oder Tiefen messen muß. In diesem Falle stellt man sich (Fig. IX.) durchs Auge O und das Object P, eine Verticalebene vor, gedenket sich in derselben eine Horizontallinie Or durchs Auge gezogen, und von dem Objecte P auf dieselbe eine perpendiculäre Pa herabfället; dann heißt Pa die Höhe des Objects über der Horizontallinie durchs Auge, und wenn das Object p unter der Linie Or liegt, so wird ap die Tiefe des Objects genannt, Um diese Höhe Pa oder Tiefe zu pa bestimmen, so muß ausser andern gegebenen Stücken, auch der Winkel POa, oder poa bekannt seyn; davon ersterer POa, der Elevationswinkel heißt, wenn das Object über der Horizontallinie Or liegt, der andere pao aber der Depressionswinkel, wenn das Object p sich unter der Horizontallinie Or befindet.

Es sind also hier POa, poa, ein paar Winkel, die sich in einer Verticalebene befinden, und man siehet leicht, daß, wenn diese Winkel ausgemessen werden sollen, folgende Bedingungen in Erfüllung gebracht werden müssen. 1) Den eingetheilten Rand, oder die Ebene des Winkelmessers genau in die Verticalebene POa einzurichten. 2) Die Axe des Fernrohrs, welche hier in der Figur durch die Linie LOt bezeichnet ist, genau in die horizontale Richtung LOar zu bringen.

Wenn diese beyden Bedingungen erfüllt sind, so erhellet, daß man, um die Größe des Elevationswinkels POa zu erfahren, nur nöthig habe, das Fernrohr aus der horizontalen Richtung Ot, in die Richtung On nach dem Objecte P zu erheben, und dann den auf dem vertical-gestellten Rande des Winkelmessers beschriebenen Bogen tn, oder Lm in Graden und Minuten zu bestimmen;

Die wichtigste Erforderniß hiebey ist immer diese: das Fernrohr so genau als möglich in

die

die horizontale Stellung Lt zu bringen; Da nun hierzu die Kenntniß einer Libelle erfordert wird, so muß ich erstlich hievon einige Begriffe beyzubringen suchen.

Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre.

§. 152. Wenn man überlegt, daß wir uns schon im vorhergehenden eines mit Wasser angefüllten Gefäßes bedienet haben, den horizontalen Stand einer Ebene zu erfahren, so wird man auch leicht darauf verfallen, sich einer ähnlichen Einrichtung zu bedienen, um eine vorgegebene Linie, z. E. die Axe eines Fernrohrs in eine horizontale Lage zu bringen.

Die Art nun, wie eine Libelle (d. h. eine solche Vorrichtung, wodurch man, vermittelst der Oberfläche des Wassers den horizontalen Stand einer Linie erfahren kann) mit dem Fernrohre zu dieser Absicht verbunden werden müßte, läßt sich im wesentlichen aus der Xten Figur ersehen.

I. Man gedenke sich in dieser Figur das Fernrohr so, wie es bey dem verticalen Stande eines Winkelmessers erscheinen würde. OO sey also die um den Mittelpunkt des Winkelmessers bewegliche Alhidadenregel, und H, H, ein paar Hülsen durch Schrauben auf sie befestigt,

festigt, dergestalt, daß das durchgesteckte Fernrohr XX, der Ebene des Werkzeugs parallel sey*); m, m, sind Schrauben, die man nach Gefallen anziehen und nachlassen kann;

II. Um die Axe des Fernrohrs genau horizontal stellen zu können, so sey P eine gläserne, etwa 6 Zoll lange cylindrische Röhre, die an beyden Enden genau verschlossen, und mit Weingeist gefüllt sey, doch so, daß eine Luftblase, oder vielmehr ein wasserleerer Raum $\alpha\beta$, darinn bleibe, wodurch die horizontale Lage, oder die Oberfläche des Wassers abgebildet wird. Ich will nun erstlich zeigen, wie diese Libelle P gehörig mit dem Fernrohre verbunden seyn muß, und um die Beschreibung nicht zu unterbrechen, die nöthigen Erfordernisse einer guten Libelle hernach nachfolgen lassen.

III. N, Q sind ein paar messingene Hülsen, die die cylindrische Röhre des Fernrohres genau

*) Ich habe schon im vorhergehenden (§. 100) erinnert, daß bey Höhenmessungen die Kippregel nicht mit Vortheil zu gebrauchen ist, sondern man in solchem Falle die Vorrichtung KTZ (I Theil Tab. V. Fig. LXVI.) lieber von der Alhidadenregel wegnimmt, und statt ihrer ein paar Hülsen auf die Alhidadenregel befestigt, damit das durchgesteckte Fernrohr der Ebene des Randes parallel werde, und nicht, wie bey der Kippregel, auf und nieder beweglich sey.

nau umfassen, und auch durch ein paar Schrauben n, n, nach Gefallen fegesthalten werden können.

IV. An der Hülse Q, ist eine Vorrichtung angelöthet, die bey c ein Zirkelgewinde hat, woran sich eine messingene Hülse R befindet, wodurch das eine Ende der Libelle gesteckt ist.

V. Die Libelle um das Zirkelgewinde auf- und nieder zu bewegen, dienet die Stellschraube Kr, welche völlig von eben der Beschaffenheit und Zusammensetzung ist, wie die (§. 99. 10.) beschriebene Micrometerschraube, daher ich weiter keine Erläuterungen beyzufügen habe, und auch alles aus der Zeichnung deutlich zu ersehen ist. — Die messingene Hülse M, in die das andere Ende der Libelle verküttet oder sonst gut befestigt ist, trägt einen Ansatz v, welcher für die Stellschraube Kr die Mutter abgiebt — an dem Ansatz v, befindet sich aber, wie aus Fig. XI. deutlicher zu ersehen ist, ein etwas dünneres prismatisches Stück s, welches bey Wendung der Stellschraube Kr sich in einem Schlitze auf- und niederschiebt, welcher in der aufrechtstehenden Wand, des auf die Hülse N gelötheten Kniees dpq, eingeschnitten ist, wie aus Fig. XII. deutlicher erhellet. Die Absicht davon ist, daß bey Umwendung der Stellschraube, nicht die geringste Wankung zu befürchten

sey,

sen, und die Libelle sich desto genauer in einer einzigen Ebene auf- und nieder treiben lasse.

VI. Dieß ist die ganze Vorrichtung, wie eine Libelle mit dem Fernrohre ohngefähr verbunden seyn muß, wenn sie sich soll gegen des Fernrohrs Axe verrücken lassen. Wenn man die Libelle von dem Fernrohre abnehmen will, so darf man nur die Röhre V, worinn sich das Ocularglas des Fernrohrs befindet, abnehmen, und dann das Fernrohr nach der Richtung XXN durch die Hülsen H, H, schieben; Hierauf werden sich gar leicht die beyden Hülsen N, Q, woran sich die Vorrichtung für die Libelle befindet, von der Röhre des Fernrohrs nach der Richtung NXQ abschieben lassen.

VII. Uebrigens setzen wir beym Gebrauche, den wir in der Folge von der Libelle machen, immer voraus, daß die Axe $v\mu$ der Libelle, so genau als möglich, sich mit der Axe des Fernrohrs, in einer und derselben Ebene befinde; Eine Forderung, welche von dem Mechanico gar leicht bewerkstelliget werden kann; unter der Axe des Fernrohres verstehe ich hier die Axe, um die sich das Fernrohr drehet, wenn man es in den Hülsen H, H herumwendet.

Nöthige

Nöthige Eigenschaften einer guten Libelle.

§. 153. I. Die innere Höhlung der Glasröhre muß so genau als möglich, cylindrisch seyn, und daher mit besonderer Vorsicht ausgeschliffen und poliret werden; Eine Bedingung, welche zwar so gar leicht nicht zu erfüllen stehet, aber von einem geschickten Künstler doch immer erhalten werden kann. Glasröhren, so wie sie aus der Hütte kommen, werden selten die erwähnte Eigenschaft besitzen, indem dieselben bald eine kegelförmige Höhlung, bald andere Ungleichheiten und Beulen haben; daher ist das Ausschleifen, vermittelst eines metallenen cylindrischen Kolbens und feinen Schmirgels, sehr zu empfehlen, wenn die Libelle gut seyn soll. Der Mechanicus Brander (Siehe Picards Abhandl. vom Wasserwägen, übers. durch Hrn. Lambert pag. 295.) machte Glasröhren durchs Ausschleifen so gerade, daß sie auf die geringste Neigung einen Ausschlag gaben. (Hieher gehört auch das Verfahren des Hrn. Chezy (DE LA LANDE *Astronomie* Tom. II. §. 2209.) welcher sich zum Ausschleifen eines gläsernen Kolbens bedient, der nachher bey der Politur mit Papier überzogen wird, wodurch Hr. Chezy versichert, eine Libelle von 1 Schuh Länge verfertigt zu haben; welche auch bey einer Neigung von einer Secunde einen Ausschlag gab). Man kann zwar konische Röhren, wenn sie nur rein

von

von Beulen sind, auch zu Libellen gebrauchen, allein ihre Prüfung und Berichtigung erfordert besondere Kunstgriffe, die zwar sehr gut in Meisters Abhandlung von Libellen *Comment. Soc. Reg. Goetting. T. VII.* vorgetragen, aber doch für die Ausübung immer sehr beschwerlich sind. Die Libelle, von der ich in diesem Kapitel rede, wird als vollkommen cylindrisch angenommen, oder ihre Abweichung von der cylindrischen Gestalt wenigstens so geringe gesetzt, daß man keinen merklichen Fehler zu befürchten hat.

Anmerkung.

Wenn man Glasröhren, deren man sich allezeit mehrere von einer Glashütte kommen lassen kann, um darunter die Wahl zu einer schicklichen Libelle treffen zu können, prüfen will, ob sie vollkommen cylindrisch sind, oder doch so wenig davon abweichen, daß sich die Abweichung durch das Ausschleifen vollkommen verbessern läßt, so können sie nach einem Verfahren, welches Hr. Lutz (Anweisung das Eudiometer des Hrn. Abt von Fontana zu verfertigen, und zum Gebrauche bequemer zu machen. Nürnb. und Leipz. 1784,) bey Eudiometerröhren anwendet, auf folgende Art kalibrirt, d. h. in Ansehung ihrer durchgehends gleichen Weite untersucht werden. Erstlich prüfet man

man eine Glasröhre mit einem guten Taster-zirkel (einem Zirkel, dessen Spitzen in einen Bogen gekrümmt sind) von aussen, und untersucht, ob man nicht ein Stück (z. E. von 6 bis 8 Zollen) von gleicher Dicke an ihr finde. Denn wenn die Röhren aussen eine gleiche Weite haben, so sind sie auch gewöhnlich innen gleich weit. Nachdem verstopfet man die Glasröhre an dem Orte, wo man ihre innere Weite noch genauer untersuchen will, mit einem Korkstöpsel auf das beste, und gießet eine abgemessene Portion Quecksilber in sie. Das Quecksilber misset man am leichtesten, wenn man eine ohngefähr zwey Linien weite und an einem Ende zugeschmolzene Glasröhre mit Quecksilber so weit anfüllt, daß es überläuft. Man muß aber das Maaß so groß machen, daß das Quecksilber in der zu untersuchenden weiten Röhre etwa eine anderthalb Zoll hohe Säule einnehmen würde. Nun stellet man die weite Röhre, nachdem aus der obgedachten engern das Quecksilber in sie hineingegossen worden, senkrecht auf einen Tisch, setzt einen etwas starken und großen hölzernen Winkelhaaken auch auf den Tisch neben sie an, und bezeichnet an dem Winkelhaaken den Stand des Quecksilbers, (wobey man sich allemahl nach dem scharfen Rande, womit die Oberfläche des Quecksilbers die innere Fläche der Glasröhre schneidet, richten muß). Nach diesem füllt man

man auf diese erstere Quecksilberportion in der weiten Röhre, wieder eben so viel Quecksilber, als das erstere mahl, und bemerkt abermahl an dem Winkelhaaken den Quecksilberstand in der Röhre. Dies Verfahren setzt man so lange fort, als man es für nöthig findet. Stehen nun die Punkte, die man an den Winkelhaaken gemacht hat, gleich weit von einander ab, so hat die Röhre, so weit man sie untersucht hat, gleiche Weite. Sollte die Röhre nur um sehr wenig weiter oder enger werden (wie man sehen kann, je nachdem die Punkte auf dem Winkelhaaken näher zusammen, oder weiter von einander kommen) so schadet dieses nichts, indem dieser Fehler (durch das Ausschleifen) verbessert werden kann." Man schneidet nun die Röhre, so weit man sie für gut befunden (und zur Libelle anwenden will) vermittelst des Einschnitts einer scharfen dreyeckigten Feile, ab, und schleift sie aus.

Dieses Ausschleifen scheint bey dem ersten Anblicke ein schweres Geschäfte zu seyn. Allein nach Hrn. L. Versicherung kann es durch eine Vorrichtung, die er a. a. O. beschreibt, ohne grosse Mühe bewerkstelligt werden. Ich habe den Versuch gleichfalls gemacht, und kann versichern, daß es mir sehr gelungen ist.

Nicht selten findet man durch das eben erwähnte Kalibriren, vermittelst des Quecksilbers,

bers, Stücke an einer ganzen Glasröhre, die keines weitern Ausschleifens bedürfen, und für vollkommen cylindrisch angenommen werden können. Das Ausschleifen ist indessen immer gut, weil die Glasröhre im innern kleine Ungleichheiten haben kann, die das Kalibriren nicht entdeckt, durch das Schleifen aber weggebracht werden. Auch gewinnt die Beweglichkeit des Flüssigen in der Libelle, wenn sie ausgeschliffen worden ist. Indessen sind unausgeschliffene zum gewöhnlichen Gebrauche in der praktischen Geometrie doch auch gut. Das Füllen und Zublasen der Libelle kann man sich von einem Barometermacher weisen lassen.

II. Die Länge der Glasröhre muß wenigstens 5 bis 6 Zoll betragen, wenn sie die gehörige Empfindlichkeit haben soll; indessen kömmt es hauptsächlich auch

III. Auf die Länge $\alpha\beta$ der Luftblase an, die gegen die ganze Länge der Röhre ein bestimmtes Verhältniß haben muß, wenn die Libelle ihre gehörige Empfindlichkeit haben soll. Ist nemlich die Blase allzuklein, so hängt sie sich gar zu leicht an, und verursacht eine Trägheit der Libelle. Ist aber die Blase zu groß, so wird die Libelle zu empfindlich, und es hält schwer, sie in den gehörigen Stand zu bringen.

Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß, wenn die Röhre 5 bis 6 Zoll lang ist, die schicklichste Größe der Luftblase etwa ¾ oder 1 Zoll betragen muß, und wenn bey diesen Umständen die Libelle gut ausgeschliffen ist, so muß sie auf eine Erhöhung oder Vertiefung von einigen Secunden schon einen merklichen Ausschlag geben, welches eine Genauigkeit ist, die man bey gewöhnlichen Höhenmessungen in der praktischen Geometrie selten vonnöthen hat.

IV. Der Weingeist, womit die Röhre gefüllet wird, muß sehr rein und gut, auch nicht gefärbt seyn, und in der Folge der Zeit keinen Satz von Unreinigkeiten in der Röhre zurücklassen. Auch dürfen sich innen an die Röhre nicht Fettigkeit, Staub, oder andere Unreinigkeiten angesetzt haben.

Wie man eine cylindrische Libelle mit dem Fernrohre parallel machen könne.

§. 154. Grunds. I. Wenn die Röhre der Libelle (Fig. X.) cylindrisch, und ihre Axe $\nu\mu$, mithin auch ihre Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, der Axe des Fernrohrs gleichlaufend sind, so erhellet, daß, wenn beyde Axen sich in einer gemeinschaftlichen Verticalebene befinden, und die Luftblase $\alpha\beta$, oder die Wasserfläche der Libelle in der Mitte der Seitenlinie ef erscheinet, also ef horizontal steht, alsdann auch die

mit

mit ef oder $\varepsilon\varphi$ parallele Axe des Fernrohrs die Horizontallage haben werde, und daß umgekehrt, wenn die Axe des Fernrohrs horizontal ist, auch nothwendig die Luftblase $\alpha\beta$ in der Mitte von ef erscheinen müsse, so bald ef mit der Axe des Fernrohrs gleichlaufend ist. Ist sie es nicht, so kann bey der Horizontallage des Fernrohrs, $\alpha\beta$ nicht in der Mitte von ef erscheinen, oder wenn sie in der Mitte von ef erscheint, so wäre alsdann des Fernrohrs Axe nicht horizontal.

Grundſ. II. Sind die (I) erwähnten Linien und Axen gleichlaufend, und die Libelle ef horizontal, so wird sie auch die Horizontallage behalten, wenn man das Fernrohr innerhalb der Hülsen H, H, um seine Axe drehet, so daß die daran befestigte Libelle nunmehr unterhalb des Fernrohrs in die umgekehrte Lage ε' φ' e' f' kommt. Alsdann wird sich nemlich die Luftblase in der Mitte der Linie ε' φ' (welche bey der erstern Lage der Libelle die untere Seitenlinie war) zeigen, und die Libelle wird nun auch in der Lage ε' φ' e, f' horizontal seyn, vorausgesetzt, daß das Fernrohr horizontal blieb, und nicht, während daß man es in den Hülsen H, H, wendete, durch einige Verrückung der Alhidadenregel, aus seiner Lage gekommen ist.

III. Diese beyden Sätze sind so klar, daß sie keines Beweises bedürfen, und geben ein sicheres Mittel ab, zu untersuchen, ob die Wasserfläche $\alpha\beta$, oder die Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, mithin auch die Axe der Libelle, der Axe des Fernrohres parallel sind, oder nicht.

IV. Ist nemlich die Luftblase $\alpha\beta$ bey der Lage der Libelle ef $\varepsilon\varphi$, zwar in der Mitte von ef, aber nicht in der Mitte von $\varepsilon'\varphi'$, nachdem durch Umwendung des Fernrohres die Libelle in die Lage $\varepsilon'\varphi'$ e′ f′ gebracht worden, (II) so zeigt dieses an, daß die Axe des Fernrohres nicht mit der Wasserfläche $\alpha\beta$, mithin auch nicht mit der Axe, und mit den Seitenlinien ef, $\varepsilon\varphi$, der Libelle, parallel sey, sondern daß dieselbe mit der Axe der Libelle einen gewissen Winkel mache.

V. Es sey (Fig. XIII.) ef die Libelle, und nx die Axe des Fernrohres, welche mit der Libelle einen Winkel eyn $= \alpha$ mache; Die Linien ne, fx, die auf nx senkrecht gezogen worden, mögen die Verbindungslinien der Libelle mit dem Fernrohre ausdrücken. — Nun sey die Ebene enfx vertical, und die Luftblase $\alpha\beta$ erscheine in der Mitte von ef, so ist die Richtung ef horizontal, und die verlängerte Axe des Fernrohrs macht mit der Horizontallinie ey einen Winkel $= \alpha$.

VI.

VI. Man stelle sich nun vor, die Axe nx bleibe unverrückt, um dieselbe werde aber die Ebene nefx dergestalt gedrehet, daß sie in die Lage n$\varepsilon\varphi$x komme, und abermahls vertical sey, so wird die Libelle ef in die Lage $\varepsilon\varphi$ kommen, und mit der in der Ebene εnφx durch ε gezogenen Horizontallinie pεt einen Winkel yεt = 2. fyx = 2. α machen. Die Luftblase würde also nicht in der Mitte von $\varepsilon\varphi$ stehen bleiben, sondern hier von ε nach φ heraufsteigen und bey φ hängen bleiben.

VII. Dieser Satz nun, daß, wenn bey der ersten Richtung ef die Libelle horizontal ist, dieselbe nach der geschehenen Umwendung des Fernrohrs, in der Lage ε,φ, mit dem Horizonte einen Winkel macht, der doppelt so groß ist, als der, welchen die Axe des Fernrohres mit der Libelle macht, wird uns ein leichtes Mittel an die Hand geben, die Axe des Fernrohres sehr genau in eine horizontale Sellung zu bringen, und der Libelle parallel zu machen; das Verfahren bestehet in folgendem.

VIII. I. Man stelle den Winkelmesser gehörig auf sein Stativ, und bringe die Ebene desselben in eine verticale Lage, welches dadurch geschiehet, daß man das Werkzeug so lange in der zugehörigen Nuß herumwendet, bis ein Loth wz (Fig. XIV.), welches man längst der Ebene des Randes herabhängen läßt, den Rand bey a, b frey berühret, ohne sich an demselben zu reiben.

Die XIV. Figur stelle also solchergestalt den Winkelmesser in einer verticalen Lage vor; nx dessen Fernrohr, und ef die daran angebrachte Libelle; MK die Micrometerschraube, die die Alhidadenregel, mithin auch das Fernrohr regiert.

2. Ich setze nun, daß man die Libelle ef, vermittelst der Hülsen N, Q (Fig. X,) in eine solche Lage gebracht habe, daß sie sich oberhalb des Fernrohres befinde, und wenigstens so genau, als es nach dem Augenmaaße geschehen kann, mit der Axe des Fernrohrs in einer und derselben Verticalebene liege.

3. Wenn dieß geschehen ist, mache man, vermittelst der Stellschraube kr, Fig. XIV, wenigstens nach dem Augenmaaße die Libelle ef, dem Fernrohre nx parallel, und bringe demnächst, durch Umdrehung der Alhidadenregel, das Fernrohr in eine solche Richtung, daß die daran befestigte Libelle ef genau horizontal stehe, und folglich die Luftblase αβ, in der Mitte erscheine.

5. In dieser Lage bleibe das Fernrohr unverrückt, und man befestige daher die Alhidadenregel an den Rand.

6.

6. Da nun die Libelle bereits nach dem Augenmaaße mit dem Fernrohre parallel ist, so wird die Axe des Fernrohrs mit der horizontalen Richtung der Libelle nur einen sehr kleinen Winkel = α (V) machen.

7. Um den Werth von α zu finden, lasse man die Ebene des Werkzeugs, und die Alhidadenregel in unverrückter Stellung, löse die beyden Schrauben m, die das Fernrohr in den Hülsen H, H Fig. X. festhalten, und wende hierauf nach (VI) das Fernrohr n x (Fig. XIV) mit der daran befestigten Libelle, um seine unbewegliche Axe, bis die Libelle unterhalb des Fernrohres in die Lage $\varepsilon\varphi$, und zwar nach dem Augenmaaße mit der Axe des Fernrohrs in einer und derselben Verticalebene zu liegen komme.

8. In dieser Lage $\varepsilon\varphi$ wird die Luftblase nicht in der Mitte stehen bleiben, (es müßte denn durch einen sehr seltenen Zufall, die Libelle mit dem Fernrohre, nach dem Augenmaaße, genau parallel geworden seyn) sondern hier z. E. von ε nach φ heraufsteigen, und

9. Die jeßige Richtung $\varepsilon\varphi$, wird mit der Horizontallinie εt einen Winkel = $2 . \alpha$ machen (VII).

10. Es ist klar, daß, wenn man jeßt die geneigte Libelle $\varepsilon\varphi$ in eine horizontale Lage bringen wollte, solches durch Umdrehung der Alhidaden-

dadenregel geschehen könnte; Man müßte nemlich, durch Umdrehung der Alhidadenregel, die Lage des Fernrohrs, mithin auch zugleich die Richtung der Libelle $\varepsilon\varphi$ um den Winkel $2.\alpha$ verändern, und weil hier in der Figur die Luftblase bey φ hängen bleibt, also φ höher liegt, als ε, so müßte man die Alhidadenregel so drehen, daß das Ende φ, niedriger zu liegen, das entgegengesetzte ε aber in die Höhe käme, bis ε, φ beyde in einer Horizontallinie lägen.

11. Da nun der Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\alpha$ nur klein seyn wird, so kann man die Wendung der Alhidadenregel bloß vermittelst der Micrometerschraube MK bewerkstelligen. Man wende also MK herum, bis die Alhidadenregel so viel verrücket worden, daß $\varepsilon\varphi$ in eine horizontale Richtung gekommen ist, so werden die gezählten Umdrehungen der Micrometerschraube den kleinen Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\alpha$ geben, den die geneigte Richtung der Libelle $\varepsilon\varphi$ mit der Horizontallinie εt machte.

12. Die Hälfte der gefundenen Umdrehungen giebt den Winkel α, oder die Neigung der Libelle gegen die Axe des Fernrohres (VII).

13. Wenn man sich in Fig. XIII. die Lage der Libelle $\varepsilon\varphi$ vorstellet, wie sie mit der Horizontallinie εt den Winkel $\varphi\varepsilon t = 2\alpha$ macht, so wird hingegen das Fernrohr nx mit der Hori-

Horizontallinie $t \varepsilon p$ nur einen Winkel $n p \varepsilon = \frac{1}{2} \varphi \varepsilon t = \alpha$ machen. Wird daher nach dem Verfahren (II) das Fernrohr $n x$ mit der daran befestigten Libelle, um das Centrum o, vermittelst Unwendung der Micrometerschraube, gedrehet, bis die Libelle $\varepsilon \varphi$ horizontal geworden ist, so hätte man nur halb so viel Umdrehungen nöthig gehabt, das Fernrohr $n x$ in die horizontale Richtung zu bringen, weil die Libelle $\varepsilon \varphi$ gegen die Horizontallinie um einen Winkel $\varphi \varepsilon t$ geneigt ist, der doppelt so groß ist, als der $n p \varepsilon$, welchen des Fernrohrs Richtung mit der Horizontallinie macht. Hätte man also, um der Libelle $\varepsilon \varphi$ die horizontale Lage zu verschaffen, die Micrometerschraube MK (Fig. XIV.) z. E. 8 mahl herumdrehen müssen, so drehe man, nachdem die Libelle horizontal geworden, wieder 4 Umdrehungen rückwärts, so wird demnächst das Fernrohr $n x$ horizontal seyn, die Libelle aber nur einen Winkel $= \alpha$ mit der Horizontallinie machen.

14. Nachdem nun solchergestalt in (13) das Fernrohr einmahl eine horizontale Lage bekommen hat, so wird man demnächst auch gar leicht die Libelle $\varepsilon \varphi$ dem Fernrohre parallel machen können; Man lasse nemlich das Fernrohr unverrückt in seiner horizontalen Lage, und drehe ganz sanft die Stellschraube $k r$, welche sich jetzo bey ε befinden wird, herum, bis die Luftblase in der Mitte von $\varepsilon \varphi$ ruhig

stehen

stehen bleibt, so ist auch in dem Augenblicke die Libelle horizontal, folglich dem horizontalen Fernrohre parallel.

15. Auf diese Art kann man also sehr sicher die Libelle mit dem Fernrohre parallel machen, besonders wenn man die Vorschrift wiederholt, und die Libelle aus ihrer untern Lage, wieder oberhalb des Fernrohrs, in die Lage ef bringt, in der sie auch noch horizontal seyn muß, wenn bey dem bisherigen Verfahren nicht kleine Fehler begangen worden sind. Entdeckt man solchergestalt einige Unrichtigkeit, so muß man die Arbeit (10 — 14) von neuem vornehmen, bis endlich die Luftblase immer in der Mitte der Libelle ruhig stehen bleibt, man mag die Libelle um das Fernrohr drehen, wie man will. — Die wichtigste Vorsicht, die man übrigens noch dabey zu beobachten hat, ist, daß die Ebene des Werkzeugs während der Operation in einer unverrückten Lage bleibe.

16. Wenn nun ein für allemahl die Libelle mit dem Fernrohre parallel gemacht worden ist, so ist es demnächst leicht, an jedem Orte, wo man das Werkzeug hinbringt, sogleich die horizontale Lage des Fernrohrs zu erhalten. Man darf nemlich die Alhidadenregel nur so lange herumwenden, bis die Luftblase in der Mitte der Libelle ruhig stehen bleibt, so ist in dem Augenblicke auch das Fernrohr horizontal.

Beym

Beym Forttragen des Werkzeugs von einer Station auf dem Felde, zur andern, muß man aber davor sorgen, daß sich unterdessen die Libelle an dem Fernrohre nicht verrücke, und folglich aus ihrer parallelen Lage komme.

17. Das bisherige Verfahren, eine cylindrische Libelle dem Fernrohre parallel zu machen, wird man bey würklicher Handanlegung sehr leicht und bequem finden. — Sonst giebt es aber auch noch andere Methoden, die aber im wesentlichen alle auf einer Umkehrung des Fernrohrs, oder der Libelle beruhen. Das Branderische Verfahren sehe man in Picards Abhandl. vom Wasserwägen, mit Lamberts Beyträgen, S. 294.

Ich wende mich nun nach den bisherigen Vorbereitungen zu folgender

Aufgabe.

§. 155. Einen Winkel pOa (Fig. IX) der sich in einer Verticalebene befindet, auszumessen. Der eine Schenkel desselben Oa wird horizontal angenommen (§. 151.).

Auflösung.

I. Man setze den Winkelmesser (§. 99) gehörig auf den Zapfen S seines Stativs, (§.

99. 17.) und bringe die Ebene des eingetheilten Randes, durch Hülfe der Nuß, in eine verticale Lage, wie oben (§. 154. VIII.).

II. Ich setze nun zum voraus, daß durch einen Versuch die Libelle bereits mit dem Fernrohre in eine parallele Lage gebracht worden ist.

III. Man drehe zugleich in (I) das Werkzeug auf dem Zapfen des Stativs so lange, bis der verticalgestellte Rand des Winkelmessers so stehet, daß, wenn man das Fernrohr nach dem Objecte P hinrichtet, solches in dem Durchschnitte der beyden Kreuzlinien, oder in der Axe des Fernrohres (§. 104.) erscheinet. Wenn dieses bewerkstelliget ist, so sagt man, die Ebene des Winkelmessers sey in die Verticalebene des auszumessenden Winkels POa eingerichtet worden.

IV. Nach dieser Operation bringe man den Index des Vernier genau an den Punkt 0° der Eintheilungen des Randes, und befestige die Alhidadenregel an den Rand.

V. Man löse an dem Werkzeuge die §. 99. 16. und I. Thl. Tab. V. Fig. LIX. mit L bezeichnete Schraube, so wird man das verticalgestellte Werkzeug um den Zapfen der Nuß, der jetzt horizontal ist, herum wenden können, so, daß die Ebene des Werkzeugs beständig vertical bleibt. Man kann solchergestalt durch Wendung des

ganzen

ganzen Werkzeuges es dahin bringen, daß das auf 0° gestellte Fernrohr (IV) genau in eine horizontale Lage Lt Fig. IX. zu liegen kömmt. Dies wird nemlich geschehen, wenn die Luftblase der Libelle in der Mitte derselben einspielet. In dem Augenblicke, da dieses geschiehet, ziehe man die Schraube L wieder an, damit das Fernrohr unverrückt in seiner horizontalen Lage bleibe. Sollte, während daß man die Schraube L anziehet, das Fernrohr wieder etwas aus der horizontalen Lage kommen, so bediene man sich der (§. 99. [12].) genannten Stellschraube Wz, so wird man, durch eine sanfte Bewegung des vertical gestellten Winkelmessers, dem Fernrohre wieder völlig genau die horizontale Stellung verschaffen können.

VI. Es ist also durch das bisherige Verfahren der Winkelmesser genau vertical gestellt worden, und das Fernrohr tOL Fig. IX. hat eine horizontale Lage, bey der zugleich der Index des Vernier auf 0° stehet.

VII. Man lasse also an dem Werkzeuge alles in unverrückter Stellung, löse die Alhidadenregel, und drehe dieselbe, bis man in des Fernrohrs Axe mOn, (in welcher sich der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohrs (§. 104) befinden muß) das erhabene Object P erblicket, und in dem Augenblicke befestige man die Alhidadenregel wieder

wieder an den Rand, so wird man demnächst aus dem Bogen L m, welchen der Index des Vernier beschrieben hat, das Maaß des Winkels L O m oder n O t, mithin die Elevation des Objects P über der Horizontallinie O t a erfahren.

VIII. Man kann hierauf, um sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, den Index des Vernier wieder zurück auf 0° führen, und untersuchen, ob in dieser Lage die Libelle noch horizontal stehet, ob folglich, während daß man das Fernrohr aus der horizontalen Richtung L t in die m n brachte, sich die Ebene des Werkzeugs nicht verrücket hat; ein gleiches könnte man, vermittelst eines Probierfernrohres (§. 131. VIII.) erfahren, wenn das Werkzeug mit einem versehen wäre.

IX. Da von den beyden Kreuzlinien, welche sich im Brennpunkte des Fernrohrs durchschneiden, die eine allemahl horizontal, die andere vertical ist, so ist es in (VII) eben nicht nöthig, daß das Object P gerade ganz genau in dem Durchschnitte dieser beyden Kreuzlinien selbst erscheine. Es ist ohne beträchtlichen Fehler hinreichend, wenn das Object nur in der horizontalen der beyden Kreuzlinien wahrgenommen wird, nahe um die Gegend, wo sie von der verticalen durchschnitten wird.

Anmer:

Anmerkungen.

§. 156. I. Der Winkelmesser, dessen Beschreibung wir in dem ersten Theile §. 99. gegeben haben, ist von der Beschaffenheit, daß die Grade von der linken Hand gegen die rechte gezählet werden — also auf dem verticalen Kreise Fig. IX. nach der Richtung LvntmL, Wenn folglich bey L, 0° stehet, und das Fernrohr hier aus der horizontalen Lage Lt in die elevirte mn gebracht wird, so durchläuft der Index des Vernier den Bogen Lm, aber nicht nach der Richtung, nach welcher die Grade gezählet werden, sondern rückwärts. Damit man nun die richtige Größe des Bogens Lm erfahre, so untersuche man, was nach der Richtung, nach der die Grade gezählet werden, der Index des Vernier bey m weiset; Gesetzt, er wiese den Bogen von Lvntm = 355° 10', so ziehe man diesen Bogen von 360° ab, so erhält man die richtige Größe des Bogens Lm = 4° . 50', das Maaß des gesuchten Winkels POa.

Man darf indessen nur die Ebene des Winkelmessers gehörig stellen, so wird man auch sogleich den Erhöhungswinkel, nach der Ordnung, nach welcher die Grade gezählet werden, erhalten können: wie wenn man z. E. die Ebene des Winkelmessers in der Lage betrachtete, in der die LVIII. Figur auf der V.

Kupfer-

Kupferplatte des ersten Theiles dieser practischen Geom. erscheinen würde, wenn man sie vertical, aber umgekehrt, vor sich hätte, so daß der Kopf M der Micrometerschraube zu unterst wäre. Dann erhellet, daß, wenn man die Alhidadenregel OO aus der Horizontallage erhübe, der Index auf dem Rande nach der Ordnung der Grade gehen würde.

II. 1. Eine der wichtigsten Eigenschaften bey Messung der Verticalwinkel, ist, daß der Durchschnitt der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohres (§ 104) ganz genau in der Axe desselben (§. 152. VII) liege und folglich auch die horizontale der beyden Kreuzlinien durch des Fernrohrs Axe gehe. Man kann sich davon gehörig versichern, wenn man das Fernrohr nach einem gewissen Objecte so richtet, daß der erwähnte Durchschnitt einen gewissen kenntlichen Punkt des Objects decket, hierauf das Fernrohr innerhalb der Hülsen H, H, Fig X. herumwendet, und untersuchet, ob der erwähnte Durschnitt den bemerkten Punkt des Objects nicht verlässet. Da nemlich bey Umwendung des Fernrohres dieser Durschnitt um die wahre Umdrehungsaxe des Fernrohrs einen Kreis beschreiben muß, wenn er nicht in des Fernrohrs Axe selbst fällt, so wird er also auch nicht bey der Umdrehung des Fernrohrs um seine Axe, immer einerley Punkt

eines

eines Objects decken können. Um nun die Abweichung desselben von der Umdrehungsaxe des Fernrohrs zu finden, richte man das Fernrohr an dem vertical gestellten Winkelmesser, vermittelst der Libelle, horizontal, und lasse an einem in der Ferne abgesteckten Stabe einen Punkt bezeichnen, welchen der obgedachte Durchschnitt der Kreuzlinien (oder die horizontale der beyden Kreuzlinien) deckt. α, Tab. VII. Fig. LXXXII. sey im Brennpunkte des Fernrohrs dieser Durschnittspunkt, **n o** des Fernrohrs Umdrehungsaxe, horizontal nach der mit **n o** parallelen Libelle **e f** (welche ich jetzt oberhalb des Fernrohrs annehme) gestellt. Bey **o** sey in der Axe **n o** vor des Fernrohrs Ocularglase, das Auge, also **o** α die Visirlinie, welche bey **i**, an dem entfernten Stabe **iy**, den Punkt **i**, decke.

2. Nun drehe man das Fernrohr um seine unbeweglich bleibende Axe **on**, so, daß die mit **on** parallele Libelle in die untere Lage ε' φ' komme, so wird alsdann α in dem Fernrohre nach α' kommen, und die Visirlinie **o**α', wird nunmehr auf den Punkt **g** des Stabes treffen, wo denn der Winkel **iog** dem doppelten Abweichungswinkel **ion** oder $\varkappa$**on** des Durchschnittspunktes α von der Axe **on** des Fernrohrs, gleich seyn wird.

3. Um

3. Um diesen Abweichungswinkel nunmehr zu finden, lasse man die Libelle unterhalb des Fernrohrs, und drehe die Alhidadenregel, vermittelst der an ihr befindlichen Micrometerschraube, bis die Visirlinie wiederum den Punkt i bedeckt, und zähle die Umwendungen der Micrometerschraube, so hat man, wenn solche in Minuten und Secunden verwandelt werden, das Maaß des Winkels α' o α dessen Hälfte, den Abweichungswinkel oder den Collimationsfehler α o n geben wird.

4. Dieser Abweichungswinkel ist nun die Correction, welche man in jedem Falle, bey Messung eines Elevationswinkels, in Betrachtung ziehen muß, um aus dem gemessenen Elevationswinkel den wahren zu finden.

5. Ob diese Correction additiv oder subtractiv ist, entscheidet sich so:

In gegenwärtiger Figur ist angenommen worden, daß, wenn die Libelle ef oberhalb des Fernrohrs ist, auch der Visirpunkt α oberhalb der Axe on liege.

6. Kommt nun die Libelle in die untere Lage ε' φ' (2), so liegt auch der Visirpunkt α' nunmehr unter on, und wenn man daher das Fernrohr, vermittelst der Micrometerschraube, drehet, daß die Visirlinie wieder den Punkt i deckt, also oα' in die Lage oα kömmt, so wird

wird sich zugleich die mit dem Fernrohre verbundene Libelle aus der Horizontallage erheben, und die Luftblase wird nach der Richtung φ' ε', also hier von der rechten Hand gegen die linke in die Höhe steigen.

7. Umgekehrt wird also, wenn dieß geschieht, dieß ein Merkmahl seyn, daß bey der Lage ε' φ' der Libelle, der Visirpunkt unterhalb der Axe des Fernrohrs, bey der Lage ef der Libelle hingegen, oberhalb der Axe sich befinden werde.

8. Nähme man hingegen an, daß der Visirpunkt unterhalb on falle, wenn die Libelle oberhalb on ist, so würde, nachdem das Fernrohr um seine Axe gedreht wird, und ef die Lage ε' φ' bekömmt, der Visirpunkt alsdann über der Axe on liegen, und bey dem Verfahren (2 — 4) müßte alsdann die Luftblase der Libelle von ε' nach φ', also nach der entgegengesetzten Richtung, heraufsteigen.

9. Also bloß an der Bewegung der Luftblase bey dem bisherigen Verfahren (1 — 8) kann man sehen, ob bey der Lage ef der Libelle, der Visirpunkt α im Fernrohre ober- oder unterhalb der Axe on liegen wird.

Bey Ausmessung eines Elevationswinkels hat man nun gewöhnlich die Libelle oberhalb dem Fernrohre, also in der Lage ef.

10. Wenn demnach unter diesen Umständen α über on fällt, so ist klar, daß ein gemessener Elevationswinkel allemahl um den Abweichungswinkel αon zu klein seyn wird, und daß also αon zu dem beobachteten Elevationswinkel addiret werden muß, um den wahren zu erhalten. Und so erhellet demnach, unter welchen Umständen die Correction subtractiv seyn werde.

11. Da es etwas schwer hält, den Visirpunkt in einem Fernrohre genau in der Umdrehungsaxe desselben zu erhalten, so wird man das bisherige Verfahren, den Abweichungswinkel zu finden, wohl nicht für überflüssig halten.

III. Alles bisherige setzt zum voraus, daß die Libelle cylindrisch, und der Axe des Fernrohrs gleichlaufend sey. Da zumahl die erstere Bedingung nicht immer in der gehörigen Schärfe statt finden möchte, auch überhaupt die Untersuchung, ob eine Libelle, deren Röhre man nicht selbst hat kalibriren können, vollkommen cylindrisch sey, etwas beschwerlich seyn möchte, so will ich jetzt zeigen

Wie man den wahren Elevationswinkel eines Gegenstandes über der Horizontalfläche finden könne, die Libelle sey beschaffen, wie man wolle, cylindrisch oder konisch, der Axe des Fernrohrs gleichlaufend oder nicht, und der Visirpunkt im Fernrohre falle in die Axe des Fernrohres oder ausserhalb derselben.

1. Ich setze voraus, das winkelmessende Werkzeug bestehe aus einem ganzen Kreise, oder wenigstens doch aus einem Bogen, der einige Grade mehr 180 messe.

2. Begreiflich wird das Fehlerhafte in Ansehung der Libelle und des Visirpunktes im Fernrohre, doch nicht so beträchtlich seyn, daß die Correction eines mit einem solchen Werkzeuge gemessenen Elevationswinkels mehrere Grade betragen sollte.

3. Eine Libelle sey nun beschaffen, wie man will, so ist klar, daß wenn die Luftblase $\alpha\beta$xx (Fig. X. Tab. I.) sich irgendwo an einer Stelle $\alpha\beta$ der Libelle ruhig befindet, diese Stelle, oder vielmehr der Theil der Wasserfläche xx, wodurch die Luftblase von dem Flüssigen in der Libelle getrennt ist, so weit er gerade fortläuft, allemahl horizontal seyn wird. — Auf die untere Seitenlinie $\varepsilon\varphi$ der Libelle kömmt in dem Folgenden gar nichts an, ob sie mit

ef gleichlaufend ist oder nicht, die Libelle also cylindrisch, oder wie man sonst will, gestaltet sey. Wenn ich bey den folgenden Untersuchungen von der Wasserfläche in der Libelle rede, so verstehe ich darunter allemahl die Oberfläche xx des Flüssigen in der Libelle, so weit als sie ohne merklichen Irrthum gerade fortläuft, oder eben ist, wie hier zwischen den Punkten x und x; auf die Krümmungen xα, xβ nehme ich hier keine Rücksicht. So ist demnach diese Wasserfläche xx, oder eine längs ihr gezogene gerade Linie allemahl horizontal, wie auch übrigens die Gestalt der Libelle seyn mag, vorausgesetzt, daß die Luftblase ruhig steht.

4. Wenn αxxβ ohngefähr in der Mitte von ef steht, so bezeichne man auf ef die Stellen α und β, wo sich die Luftblase endigt, mit ein paar auf dem Glase eingerissenen Linien, damit man allemahl bey der Stellung des Fernrohres *nach der Libelle, sich nach diesem Merkmahle richten könne.*

5. Es *ist nemlich klar*, daß, so oft die Luftblase wieder unter den bemerkten Stellen α, β, einspielet, die Axe, oder auch die Visirlinie des mit der Libelle fest verbundenen Fernrohrs, mit der Wasserfläche xx, d. h. mit der Horizontalfläche, auch wieder denselben Winkel machen wird.

6. Nun

6. Nun sey (Fig. LXXXIV.) O der Mittelpunkt eines Winkelmessers, dessen vertical gestellte Ebene (§. 155. I.) erweitert durch den über der Horizontalfläche erhabenen Gegenstand P gehe.

7. Man stelle den Index der Alhidadenregel auf 0°, wende die ganze Verticalebene des Werkzeuges um den horizontalen Zapfen der Nuß, und vermittelst der Schraube Wz (§. 99. 12), (welche jetzt dem Werkzeuge eine sanfte Bewegung in einer Verticalebene geben wird), bis die Wasserfläche der mit dem Fernrohre verbundenen Libelle zwischen den bemerkten Zeichen (4) einspielet, so wird hiedurch eine Horizontalfläche abgebildet, welche mit des Fernrohres Visirlinie, in dieser Lage einen Winkel mache, den ich $= \alpha$ nennen will.

xx stelle diese Wasser- oder Horizontalfläche vor, und oOn sey durch den Mittelpunkt des Werkzeugs eine gerade Linie, gleichlaufend mit der Visirlinie des Fernrohrs, so wie $\rho O \tau$, gleichlaufend mit xx, eine durch den Mittelpunkt gehende Horizontalfläche abbilde.

8. So ist $\tau O n = \alpha$

$P O \tau$ der wahre Erhöhungswinkel des Gegenstandes über der Horizontalfläche, nOP aber derjenige, den das Werkzeug angiebt, indem durch Drehung der Alhidadenregel, des Fern-

rohrs

rohrs Visirlinie aus der Lage o n, in die nach P kömmt.

9. Es sey $n O P = \varphi$, so ist in gegenwärtiger Figur $\tau O P = \varphi - \alpha$.

10. Nun werde auf eine ähnliche Art des Erhöhungswinkels Ergänzung zu 180° gemessen.

11. Man führe den Index der Alhidadenregel wieder auf 0° zurück, befestige sie an den Rand, und wende nun die ganze Ebene des Werkzeugs, so daß sie immer vertical bleibe, um den Zapfen S des Stativs (§. 155 I.), dergestalt, daß wenn man z. E. bey der bisherigen Operation, die Ebene des eingetheilten Randes zur linken Hand gehabt hätte, man sie jetzt, indem man durchs Fernrohr visirt, zur Rechten habe, so wird, wenn man alsdann auch zugleich, wie in (7) die Libelle wiederum einspielen läßt, das Fernrohr, oder die mit demselben parallele Linie o n, jetzt die Lage $\omega\,\nu$ bekommen, dergestalt, daß wie zuvor bey o das Ocularglas, und o n die Ziellinie war, jetzt bey ω das Ocular und $\omega\nu$ die Ziellinie seyn wird.

12. So wie nun zuvor (8), als das Fernrohr aus der Lage o n in die nach P gedreht wurde, die Alhidadenregel auf dem Rande den Bogen $n\gamma$, oder den Winkel $n O \gamma = \varphi$ beschrieb, so wird, wenn nunmehr das Fernrohr

rohr aus der Lage $\omega\nu$ in die Richtung nach P, bey der man den Gegenstand zum zweytenmahle in des Fernrohrs Visirlinie wahrnimmt, kommen soll, die Alhidadenregel um den stumpfen Winkel $\nu O \gamma$, den man für die Ergänzung des spitzigen Winkels $n O \gamma$ zu $180°$, nehmen wird, gedreht werden müssen, und so wie zuvor n den Bogen $n \gamma$ auf dem Rande beschrieb, so wird der gleichnahmigte Punkt ν jetzt den Bogen $\nu o \gamma$ beschreiben.

13. Der Winkel $\rho O \gamma$ ist die Ergänzung des wahren Elevationswinkels $\tau O \gamma$ zu $180°$, aber $\nu O \gamma = \psi$ derjenige, den das Werkzeug dafür angiebt, wo denn wiederum $\rho O \gamma = \psi - \alpha$ wie (9), weil ich voraus setze, daß die Libelle so mit dem Fernrohre verbunden sey, daß sie ihren Winkel α mit des Fernrohrs Ziellinie nicht ändere.

14. Da nun solchergestalt die Größen φ (9) und ψ (13) sich auf dem Rande des Werkzeugs unmittelbar ergeben, so wird sich hieraus der Abweichungswinkel α bestimmen lassen. Denn wegen

$$\tau O \gamma + \rho O \gamma = 180° \text{ ist}$$

$$\varphi - \alpha + \psi - \alpha \text{ oder } \varphi + \psi - 2\alpha = 180°$$

Mithin $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - 90° = \alpha$

D. h. Man ziehe von der halben Summe des observirten Elevationswinkels φ, und seiner

ner angeblichen (13) Ergänzung ψ zu 180°, 90° ab, so hat man den Winkel, welchen des Fernrohrs Ziellinie mit der Wasserfläche der Libelle, also mit der Horizontalfläche, machen würde, in dem Augenblicke, da solche unter den bemerkten Zeichen (4) einspielt, und die Alhidadenregel auf 0° steht (7).

15. Für $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90°$ wäre $\alpha = 0$, also des Fernrohrs Ziellinie der Wasserfläche gleichlaufend.

16. Wenn $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) > 90°$, so ist α bejaht, und also dieß ein Merkmahl, daß jederzeit der beobachtete Elevationswinkel φ um die Correction α vermindert werden müsse, um den wahren Elevationswinkel $\tau O \gamma$ zu erhalten (9).

17. Für $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) < 90°$ wird α negativ, also $\tau O \gamma = \varphi + \alpha$.

18. So lange die Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre ungeändert bleibt, wird der aus irgend einer Beobachtung gefundene Werth von α immer derselbe bleiben, und also für einen jeden gemessenen Elevationswinkel die beständige Correction seyn, die man anbringen muß, den wahren Elevationswinkel zu erhalten.

19. Es ist begreiflich, daß, wenn einmahl diese Correction gefunden ist, man nicht nöthig

thig haben wird, die Verbindung der Libelle mit dem Fernrohre zu ändern, daß sie z. E. der Ziellinie des Fernrohres gleichlaufend werde. Wenn man den Fehler eines Werkzeugs kennt, so kann man ihn immer dem Werkzeuge lassen, wenn man ihn nur bey einer jeden Beobachtung in Rechnung bringt. Man kann demnach auch alle Vorrichtungen ersparen, die Libelle zu verrücken, wie z. E. in (§. 152. V.) die Stellschraube Kr, das Zirkelgewinde c (das. IV.) u. d. gl. Es ist im Gegentheil besser, wenn sich die Libelle gar nicht verrücken läßt, damit die Correction α immer denselben Werth behalte.

20. Uebrigens setzt das bisherige Verfahren auch nicht voraus, daß die Libelle xx, mit dem beweglichen Fernrohre no am Winkelmesser verbunden sey, oder sich eigentlich mit diesem Fernrohre zugleich, um des Werkzeugs Mittelpunkt drehe. Es könnte die Libelle xx, auch an einem unbeweglichen Fernrohre, z. E. an dem Versicherungs-Fernrohre (§. 131. VIII), oder auch sonst nur irgendwo an der hintern Fläche des Werkzeugs angebracht seyn, und es würde das Verfahren, den Winkel zu finden, den die Wasserfläche dieser Libelle, wenn sie unter den bemerkten Zeichen einspielt, und der Index der Alhidadenregel auf 0° steht, mit der Ziellinie des beweglichen Fernrohrs machen

chen würde, noch immer dasselbe bleiben, so wie auch das Verfahren, jeden gemessenen Elevationswinkel zu verbessern, wenn die Abweichung der Ziellinie einmahl gefunden ist.

21. Die Libelle an dem unbeweglichen Versicherungs-Fernrohre, oder sonst an der Fläche des Werkzeugs anzubringen, hat in der Ausübung des Höhenmessens unter andern den Vortheil, daß, wenn man das bewegliche Fernrohr nach einem Gegenstande erhoben hat, die unbewegliche Libelle durch den unverrückten Stand ihrer Luftblase zugleich wahrnehmen läßt, ob beym Drehen des beweglichen Fernrohrs das ganze Werkzeug in unverrückter Lage geblieben ist; drehte sich die Libelle mit dem Fernrohre zugleich, so würde dieser Vortheil offenbar wegfallen, und man müßte das Fernrohr allemahl wieder auf 0° zurückführen, um zu sehen, ob alles übrige einen ungeänderten Stand behalten habe, während man das Fernrohr nach dem Gegenstande erhoben hatte.

22. Damit der Winkel α ungeändert bleibe, so ist ausser der festen Verbindung der Libelle (19) auch noch erforderlich, daß des Fernrohrs Ziellinie immer dieselbe bleibe. Es ist daher gut, wenn man sowohl an den Hülsen, durch welche das Fernrohr gesteckt wird (§. 154. VII), als auch an der Objectiv- und Ocularröhre, da, wo beyde in einander eingehen, ein Zeichen

mache,

mache, damit man versichert seyn kann, daß, wenn man etwa einmahl die Ocularröhre herausnehmen müßte, solche völlig auf die vorige Art wieder an die Objectivröhre gesteckt werden könne. Ein gleiches gilt von den Hülsen, durch welche die Libelle gesteckt wird, von dem Ringe, in welchem die Kreuzfäden des Fernrohres (§. 104.) ausgespannt sind u. d. gl. Wenn ein Werkzeug einmahl geprüft ist, so ist es immer gut, daß, wenn Theile desselben auseinander genommen werden müssen, alles nachher auf eben die Art wieder unter einander verbunden werden kann.

Ich werde nun das bisherige mit einem Beyspiele an einem Winkelmesser erläutern, welchen ich vom Hrn. Prof. Späth in München besitze.

Dieser ist mit einem doppelten Fernrohre versehen, wo sowohl das bewegliche an der Alhidadenregel, als das unbewegliche an der hintern Fläche des Werkzeugs, mit einer Libelle versehen ist. Ich bediene mich bey Höhenmessungen aber immer der unbeweglichen Libelle, deren Winkel mit der Ziellinie des beweglichen Fernrohres, wenn die Alhidadenregel auf 0° Grad steht, ich aus folgenden Datis bestimmt habe.

Nachdem die Ebene des Werkzeugs vertical nach der Spitze eines entlegenen Kirchthurms einge-

eingerichtet worden, die unbewegliche Libelle einspielte, und der Inder der Alhidadenregel auf 0° gestellt worden, wurde nun das bewegliche Fernrohr nach der Spitze des Kirchthurms erhoben, so daß die horizontale der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohrs, jene Spitze durchschnitt; der von dem Inder der Alhidadenregel durchlaufene Bogen gab für den Erhöhungswinkel jener Spitze über der Wasserfläche der unbeweglichen Libelle

$$\begin{array}{lrl} \text{nach der 90 Theilung} & \varphi = & 2^\circ . 8' . 2'' \\ \text{〃 〃 96 Theilung} & \varphi = & 2 . 9 . 15 \\ \hline \text{Mittel} & \varphi = & 2^\circ . 8' . 38'', 5 \end{array}$$

Nun wurde das Werkzeug umgekehrt, um die Ergänzung dieses Erhöhungswinkels zu 180° zu messen. Nachdem wieder, die Alhidadenregel auf 0° gestellt war, die unbewegliche Libelle einspielte, und hierauf das Fernrohr zum zweytenmahle von 0° nach dem Gegenstande erhoben wurde, fand sich auf dem Rande des Werkzeugs der von der Alhidadenregel beschriebene Bogen

$$\begin{array}{lrl} \text{nach der 90 Theilung} & \psi = & 175^\circ . 34' . 32'' \\ \text{〃 〃 96 Theilung} & \psi = & 175 . 36 . 0 \\ \hline \text{Mittel} & \psi = & 175 . 35 . 16 \\ \text{oben} & \varphi = & 2 . 8 . 38 \\ \hline \text{also } \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) & = & 88^\circ . 51' . 57'' \end{array}$$

Demnach $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) - 90^\circ = -1^\circ . 8' 3'' = \alpha$

Also

Also würde nach dieser Beobachtung, des beweglichen Fernrohrs Ziellinie, wenn die Alhidadenregel auf 0° Grad steht, mit der Wasserfläche der unbeweglichen Libelle (also mit der Horizontalfläche) einen Winkel von $1^\circ\ 8' . 3''$ machen, welcher in jedem Falle wegen $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) < 90^\circ$, zu dem beobachteten Elevationswinkel zu addiren ist, um den wahren zu erhalten.

So wäre z. E. des Kirchthurm's wahrer Elevationswinkel $= 2^\circ . 8' . 38'' + 1^\circ . 8' . 3'' = 3^\circ . 16' . 41''$, und so würde jeder andere gemessene Elevationswinkel diese Verbesserung erfahren müssen, wenn man beym Stande des Fernrohrs auf 0°, die unbewegliche Libelle hätte einspielen lassen.

Liesse man die Libelle des beweglichen Fernrohres, wenn dasselbe auf 0° steht, einspielen, so würde, wie ich nach einem ähnlichen Verfahren gefunden habe, die Correction des gemessenen Elevationswinkels nur $= + 26' . 25''$.

Begreiflich wird man es bey einer Bestimmung des Werthes von α nicht bewenden lassen, sondern aus mehreren derselben ein Mittel nehmen. Ich habe solchergestalt das Mittel $= 1^\circ . 8' . 14''$ gefunden, die einzeln Bestimmungen weichen nur in Secunden von einander ab.

Dieses

Dieses von mir angegebene Verfahren, die Abweichung der Wasserfläche einer Libelle von der Ziellinie des Fernrohrs zu finden, halte ich für das leichteste und zuverlässigste, weil jedes andere, wobey das Fernrohr um seine Axe, oder gar die Libelle um eine Axe gedreht wird, befürchten läßt, daß der Winkel, den die Ziellinie des Fernrohrs mit der Libelle macht, während des Versuchs nicht ungeändert bleibt, wie mich auch Erfahrungen belehrt haben.

Freylich muß man dabey sich auf die Eintheilungen des Randes verlassen. Allein, da man aus mehreren Beobachtungen ein Mittel nehmen kann, so wird sich α immer mit hinlänglicher Schärfe bestimmen lassen. Ausserdem kommt bey diesem Verfahren gar nicht die mühsame Untersuchung der Gestalt der Libelle in Betrachtung (wovon man in Hrn. Prof. Meisters oben angeführten Abhandlung Proben finden kann), welches allerdings ein sehr erheblicher Vortheil ist.

Daß endlich das erwähnte Verfahren sich nur anwenden läßt, wenn der Winkelmesser wenigstens aus einem halben Kreise, oder etwas darüber besteht, (wie gewöhnlich Feldmesserwerkzeuge) bedarf keiner weitern Erinnerung. Hätte man daher nur einen Quadranten, so müßte die Prüfung der Libelle nach (§. 154), oder anderen Methoden vorgenommen werden,

wobey

wobey man denn die obigen Untersuchungen (§. 154. 1 - 12) immer sehr nützlich finden wird, weil fast alle Prüfungsarten der Libelle in der Hauptsache damit überein kommen.

Endlich muß ich noch erinnern, daß die Länge der Luftblase in einer Libelle sich etwas ändert, wenn sie in eine größere oder geringere Temperatur kömmt. In diesem Falle muß man bey dem Einspielen der Luftblase nach den auf der Libelle bemerkten Zeichen (4) immer darauf sehen, daß beyde Enden der Luftblase, je nachdem sie länger oder kürzer wird, entweder gleichviel über beyde Zeichen hinaus stehen, oder beyde Zeichen gleichviel über die Enden der Luftblase, so daß eigentlich die Mitte der Luftblase immer der Mitte zwischen beyden Zeichen entspreche.

Libellen um ebene Flächen horizontal zu stellen.

IV. 1. Um ebene Flächen genauer horizontal zu stellen, als vermittelst der gewöhnlichen Wasserwaage (§. 113.) die man höchstens 3 Zoll im Durchmesser zu machen pflegt, bedient man sich ebenfalls der Libellen, und zwar auf folgende Art.

2. AB (Fig. LXXXIII) ist ein messingenes Linial, dessen untere Flache durch Abschleifen möglichst

lichst eben gemacht worden. C ein viereckigtes Stück Messing, auf AB befestigt, und in der Mitte mit einer kleinen halbkugelförmigen Vertiefung n versehen, in welche genau ein Zapfen paßt, der bey E an dem Ende einer die Libelle großen Theils umgebenden messingenen Fassung EMF befindlich ist, und welcher Zapfen sich gleichfalls in eine Kugelfläche endigt, welche in jener kugelförmigen Höhlung des Stücks C, wie die Nuß in einer Hülse beweglich ist, so daß jener Zapfen, und und die Höhlung in die er paßt, gleichsam eine sehr kleine Nuß darstellen.

3. An dem andern Ende F der Libelle EF befindet sich an der messingenen Fassung derselben ein viereckigter Ansatz e, durch welchen eine stählerne Stellschraube i hindurch geht, wodurch die Libelle nicht allein auf das Linial befestigt, sondern auch etwas auf und nieder getrieben werden kann, um die obere Seite $\alpha\beta$ der Libelle, wo die Luftblase $\alpha xx\beta$ hin und her spielt, der Grundfläche des Linials parallel machen zu können. Die bequemste Einrichtung dieser Stellschraube ist dem Künstler überlassen, und bedarf hier keiner weiteren Beschreibung. Es versteht sich, daß die Libelle schon nach dem Augenmaaße so parallel mit der Grundfläche AB angebracht werden kann, daß man zum völligen Parallelismus die Stellschraube nur noch wenig zu drehen nöthig haben wird.

4. Um nun diese Libelle zu justiren, d. h. völlig genau ihrer Grundfläche AB (2) parallel zu machen, so bediene ich mich folgenden Verfahrens.

5. Ich bringe die Ebene AAA meines Winkelmessers (Fig. LVIII. des ersten Theiles dies. prakt. Geom.) in eine Verticallage, und schraube ein paar viereckigte Stücken Messing ohngefähr da wo die Buchstaben O O stehen, senkrecht auf die Alhidadenregel. Auf diese Stücken Messing befestige ich durch ein paar Schräubchen, ein möglichst ebenes Linial dessen Ebene ohngefähr auf der Ebene der Alhidadenregel senkrecht stehe.

6. Auf dieses Linial setze ich die bisher beschriebene Libelle, so daß die Grundfläche AB derselben auf diesem Linial ruhe, und drehe nun die Alhidadenregel um ihr Centrum, bis die Libelle einspielt, also die Luftblase $\alpha\beta$ in der Mitte derselben erscheine, lasse hierauf alles unverrückt, hebe die Libelle ab und kehre sie um, so daß das Ende derselben was man zuvor zur rechten Hand hatte, nunmehr nach der linken zugekehrt ist. Wenn nun die Libelle wieder einspielt, so ist dies ein Beweis, daß ihre obere Seite $\alpha\beta$ genau der Grundfläche von AB parallel, und also die Libelle richtig ist.

7. Geschieht dieß aber nicht, so drehe man sanft die Micrometerschraube der Alhida-

denregel, und zähle die Umdrehungen derselben bis die Libelle wieder einspielt.

Hierauf drehe man die Micrometerschraube wieder um die Hälfte der gefundenen Umdrehungen rückwärts, so ist dadurch die Richtung des Linials, worauf die Libelle gesetzt worden, horizontal.

Nunmehr drehe man die Stellschraube i der Libelle bis die Luftblase $\alpha\beta$ wieder in der Mitte der Libelle erscheint, so wird die Libelle justirt seyn, und die Luftblase wird in der Mitte von EF erscheinen, man mag die Libelle auf das Linial (4) so aufsetzen, daß man ihr Ende F zur linken oder zur rechten Hand hat, wenn anders bey dem gewiesenen Verfahren nicht kleine Fehler vorgefallen sind.

Sollte man aber durch diese erste Justirung nicht ganz seinen Zweck erreicht haben, so läßt sich leicht durch eine zweyte oder dritte Justirung alle mögliche Genauigkeit erhalten.

8. Um nun eine ebene Fläche vermittelst einer solchen Libelle horizontal zu stellen, so verrücke man diese ebene Fläche durch Schrauben oder andere Vorrichtungen so lange, bis die Libelle nach zwey verschiedenen Richtungen (die am besten ohngefähr einen rechten Winkel mit einander machen) aufgesetzt, allemahl einspielt, so wird die Fläche horizontal seyn.

Am

Am besten ist es aber, mit zwey solchen Libellen versehen zu seyn, und sie zugleich, ohngefähr unter einem rechten Winkel auf die Fläche zu stellen, und einspielen zu lassen. Die Libellen, deren ich mich zu einem solchen Geschäfte bediene, sind ohngefähr 5 Zoll lang und sehr schön von Nairne in England gearbeitet. Die Stellschrauben daran sind aber etwas anders eingerichtet.

V. Man kann nunmehr durch Hülfe solcher Libellen, auch eine Wasserwaage wie (§. 113.) berichtigen. Nachdem nemlich eine ebene Fläche z. B. die Oberfläche eines Meßtisches, auf die angeführte Art durch Libellen horizontal gestellet worden ist, so setze man auf diesen Tisch auch die Wasserwaage (§. 113.) und sehe zu, ob die Luftblase derselben unter der Mitte des Glasdeckels einspielt. Ist dies der Fall, so ist auch diese Wasserwaage justirt, also der Glasdeckel parallel mit der Grundfläche der cylindrischen Büchse. Spielet aber die Luftblase nicht ein, so muß der Künstler die Grundfläche der Büchse, durch vorsichtiges Abschleifen an der fehlerhaften Stelle, so lange verbessern, bis die Luftblase gehörig einspielet.

VI. Es entstehen auch kleine Fehler bey Ausmessung eines Verticalwinkels 1) wenn die

Ebene des Werkzeugs nicht genau in eine verticale Lage gebracht worden ist, 2) wenn die Visirlinie des Fernrohres der Ebene des Winkelmessers nicht genau parallel ist, oder auch, wenn man den Gegenstand nicht genau in dem Durchschnitte der beyden Kreuzlinien sondern nur überhaupt in der horizontalen der beyden Kreuzlinien beobachtet, wo denn die Richtung, nach der man den Gegenstand visirt, mit der Ebene des eingetheilten Randes gleichfalls einen Winkel machen würde. Obgleich die erwähnten Ursachen bey Höhenmessungen selten von großen Folgen sind, so erfordert es doch die Einsicht eines Feldmessers, wenigstens einen ohngefähren Ueberschlag zu machen, wie groß etwa die daher entstehenden Fehler seyn mögen, und dazu wird folgendes dienlich seyn.

Fehler, welche aus den beyden Ursachen (VI) zusammengenommen, bey Ausmessung eines Verticalwinkels zu befürchten sind.

§. 157. I. Es sey BCcN, Fig. XV., ein Stück von dem eingetheilten Bogen des Winkelmessers; A dessen Mittelpunkt, um welchen sich die Alhidadenregel, und folglich das Fernrohr drehet. Man gedenke sich durch A eine Horizontalebene, die die Ebene des Werkzeugs BCcN in der geraden Linie BA durchschneide; Mit dem Halbmesser des Instruments AB beschreibe

man

man in der Horizontalfläche den Bogen BM. Weil ich nun annehme, der Winkelmesser stehe nicht vertical, mithin nicht auf der Horizontalfläche senkrecht, so wird auch der sphärische Winkel NBM, als der Neigungswinkel des Werkzeugs gegen die Horizontalfläche, nicht genau $= 90^\circ$ seyn. Ich will also $NBM = 90^\circ - \gamma$ setzen, wo also γ des Werkzeugs Neigung gegen die Verticalfläche bedeutet; ABL sey eine Ebene durch BA, auf das Werkzeug senkrecht; also der sphärische Winkel $NBL = 90^\circ$, folglich der kleine Winkel $MBL = NBL - NBM = \gamma$.

II. Man nehme nun an, die Linie AE in der Horizontalfläche stelle das nach der Libelle horizontal gerichtete Fernrohr vor, und da ich voraussetze, des Fernrohrs Visirlinie (wofür ich der Kürze halber in der Folge bloß Fernrohr sagen werde) mache mit der Ebene des Werkzeugs einen kleinen Winkel, so lege man durch AE eine Ebene CAE auf das Werkzeug senkrecht, welche die Ebene des Winkelmessers, oder auch die Alhidadenregel in der geraden Linie AC schneide, so wird der Winkel CAE des Fernrohrs Neigung gegen das Werkzeug, und ein Bogen CE, mit dem Halbmesser $CA = BA$ beschrieben, dieses Winkels CAE Maaß seyn. Ich will CAE oder den Bogen $CE = \beta$ nennen.

III. Gesetzt nun, die Alhidadenregel AC, bey deren Lage das Fernrohr AE horizontal ist,

ist, werde in die Richtung Ac gebracht, bey der man durch das Fernrohr, welches aus der horizontalen Lage AE in die Ae gekommen seyn wird, das über die horizontale Ebene erhöhete Object sehe. Hier muß man sich nun gleichsam vorstellen, durch Erhebung der Alhidadenregel komme der Winkel CAE in die Lage cAe; wo die Ebene cAe noch auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehen, und der Bogen ce = CE = β (II) seyn wird.

Durch Ae lege man nun eine auf die Horizontalfläche BDM senkrechte Ebene eAD, die die Horizontalfläche in AD durchschneide, so ist eigentlich der Verticalwinkel eAD, der wahre Elevationswinkel des Objects über der Horizontalfläche, und eD dessen Maaß.

Der Winkel CAc, oder der Bogen Cc ist aber derjenige, welchen die Alhidadenregel, mithin der Index des Vernier auf dem Werkzeuge, beschrieben hat, indem das Fernrohr aus der horizontalen Richtung AE, in die Richtung Ae gebracht worden ist. Wollte man also diesen Bogen Cc, den ich = α nennen will, für des Winkels eAD Maaß annehmen, so würde man offenbar einen Fehler begehen, weil Cc nicht dem Bogen De gleich seyn kann.

Aus den gegebenen Größen α, β, γ, wird man aber gar leicht den Bogen eD = x, mithin

hin den wahren auszumessenden Elevationswinkel eAD bestimmen.

IV. Man nehme die Bogen BcN, DeO, BL, BM Quadranten gleich, so wird L des Kreises BcN, N des Kreises BL, und O des Kreises BM Pol. ML aber des Winkels $LBM = \gamma$, Maaß.

V. Ferner ist der Bogen cN, das Maaß des Winkels cLN am Pole des Kreises BcN. Man nenne den kleinen Bogen $BC = \psi$, so ist $cN = 90° - cB = 90° - (\alpha + \psi)$.

VI. Der Bogen $eO = 90° - De = 90° - x$ (III).

VII. $LO = MO + ML = 90° + \gamma$ (IV).

VIII. Weil ferner auch $cL = 90°$, so hat man $eL = 90° - ce = 90° - \beta$ (III).

IX. Man suche nun in dem sphärischen Dreyecke eOL aus den beyden Seiten eL, OL, und dem eingeschlossenen Winkel $eLO = cLN$, die dritte Seite eO, nach (Trig. S. LII. 2.) so wird $\cos eO = \sin eL \sin LO \cos eLO + \cos eL \cos OL$ oder aus (IV. V. VI. VII. VIII.) die gehörigen Werthe substituirt

$$\sin x = \cos\beta \cos\gamma \sin(\alpha + \psi) - \sin\beta \sin\gamma.$$

X. Vermittelst dieses Ausdrucks findet man also aus den bekannten Größen β, γ, α, ψ, den wahren Elevationswinkel $eAD = x$.

Daß

Daß ψ eine bekannte Größe in dieser Formel sey, erhellet so.

Wenn in der Figur der Bogen $cC = \alpha = o$ wird, d. h. der Punkt c auf C fällt, so fällt das Fernrohr Ae in die Horizontalfläche, und hat in ihr die Lage AE.

Also ist für diesen Fall auch $x = o$; Setzt man demnach in die Formel IX, sowohl α als auch $x = o$, so erhält man

$$o = \cos \beta \cos \gamma \sin \psi - \sin \beta \sin \gamma$$

$$\text{also } \sin \psi = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \tang \beta \tang \gamma.$$

Es ist also ψ eine bekannte Größe, indem sie durch die beyden Größen β, γ, bestimmt ist.

XI. Weil aus (X)

$$\sin \beta \sin \gamma = \sin \psi \cos \beta \cos \gamma$$

so substituire man diesen Werth in die Gleichung (IX), dann wird,

XII. $\sin x = \cos \beta \cos \gamma (\sin (\alpha + \psi) - \sin \psi)$.

XIII. Aber aus (Trig. S. XIII. 12.) (das dortige $\varphi = \alpha + \psi$ gesetzt) folgt $\sin (\alpha + \psi) - \sin \psi = 2 \cos (\frac{1}{2} \alpha + \psi) \sin \frac{1}{2} \alpha$

Also wird

sin

$\sin x = 2 \cos\beta \cos\gamma \sin \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{2}\alpha + \psi)$, welche Formel sehr bequem ist, den wahren Winkel x durch Logarithmen zu berechnen.

XIV. Wenn die Größen β, γ, wie gewöhnlich nur sehr klein sind, so wird auch ψ in (X) sehr klein seyn; dieses verstattet demnach bloß $\psi = \beta . \gamma$ zu setzen, wo ψ, β, γ Decimaltheile des Sinus totus bedeuten; sind aber ψ, β, γ in Secunden ausgedrückt, so hat man

$\frac{\psi}{206264} = \frac{\beta}{206264} . \frac{\gamma}{206264}$ mithin in Secunden $\psi = \frac{\beta . \gamma}{206264}$.

XV. Ex. Man setze die Abweichung des Werkzeugs von der Verticalfläche, $\gamma = 10'$ $= 600''$; des Fernrohrs Neigung gegen das Werkzeug, oder $\beta = 8' = 480''$, den Bogen α, den die Alhidadenregel auf dem Werkzeuge beschrieben hat $= 20° . 30'$; so hat man erstlich für den Bogen ψ

$$
\begin{aligned}
\log \beta &= 2,6812412 \\
\log \gamma &= 2,7781512 \\
\hline
\log \beta\gamma &= 5,4593924 \\
\log 206264 &= 5,3144252 \text{ (Trig. S. V.)} \\
\hline
\log \psi &= 0,1449672 \\
\psi &= 1'',5
\end{aligned}
$$

Es

Es erhellet also, daß man in diesem Exempel den Bogen ψ ganz bey der folgenden Rechnung weglassen kann, da er nur etwas über eine Secunde beträgt. Also wird für x

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log \cos \beta &= 9{,}9999988 - 10 \\
\log \cos \gamma &= 9{,}9999982 - 10 \\
\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha &= 9{,}2502822 - 10 \\
\log \cos \tfrac{1}{2}\alpha &= \underline{9{,}9930131 - 10} \\
\log \sin x &= 9{,}5443223 \\
x &= 20^\circ\, 29'.\, 56''; \text{ also } \alpha - x = 4''.
\end{aligned}
$$

Es wäre also für die angenommenen Größen der wahre Verticalwinkel x nur um 4″ kleiner, als der, welchen die Alhidadenregel beschrieben hat, indem das Fernrohr aus dem horizontalen Stande nach dem erhöheten Objecte gerichtet wurde. Dieses ist in der That ein Fehler, welcher in der praktischen Geometrie immer für Nichts angesehen werden kann.

XVI. Auch wenn man die Größen β, α, γ merklich größer, als in (XV) annähme, wird dennoch der Fehler, welcher aus der Neigung des Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs, und dem schiefen Stande des letztern, zu befürchten steht, unerheblich seyn. Selbst wenn man β und γ zu einem Grade, und α zu 60° Graden annähme, würde der Fehler noch nicht 2 Minuten betragen. Also kann der Feldmesser,

ſer, dem doch äusserſt selten Erhöhungswinkel von 60 Graden vorkommen, immer unbeſorgt ſeyn, daß ihm die (§. 156. VI.) angeführten Umſtände ſchaden; er müßte denn gar zu nachläſſig in der Verticalſtellung des Werkzeugs ſeyn, oder auch zu vermuthen Urſache haben, daß die Abweichung β des Fernrohrs größer ſey, als man von einem guten Werkzeuge erwarten darf.

Nur bey ſehr großen Erhöhungswinkeln, dergleichen in der Aſtronomie vorkommen, und überhaupt in Fällen, wo man die größte Schärfe verlangt, hat man Urſache, die Fehler in Betrachtung zu ziehen, welche aus den erwähnten Umſtänden entſtehen können. Daher denn in der Aſtronomie Vorſchriften vorkommen, z. E. die Neigung eines Fernrohrs gegen die Ebene des Werkzeugs zu beſtimmen, das Fernrohr dem Werkzeuge parallel zu machen, u. d. gl. (Man ſ. DE LA LANDE *Aſtronomie* §. 2569. 2594.). Allein dieſe kann der Feldmeſſer alle entbehren, weil ihm nie Fälle vorkommen, wo er ſie nöthig hätte. Hat man z. E. die Höhe eines Thurmes u. d. gl. aus dem Elevationswinkel zu beſtimmen, ſo könnte derſelbe vielleicht auf 40 bis 50 Grade ſteigen, allein wenn dieſer Winkel wegen (§. 156. VI.) auch um einige Minuten falſch gemeſſen würde, ſo wäre dieß dennoch von keinem beträchtlichen Erfolge, in Anſehung der daraus herzuleitenden Beſtimmung, weil der Triangel wohl nicht

groß

groß seyn kann, aus welchem man eine Thurm-Höhe zu berechnen hat. Hätte man hingegen die Höhe eines entlegenen Bergs zu bestimmen, so geht der Erhöhungswinkel selten über 10 Grade; dann ist aber der Fehler unmerklich, welcher wegen (§. 156. VI.) zu befürchten ist, und wird durch andere weit größere, z. E. in den Eintheilungen des Randes, verstellt. Wichtiger sind dem Feldmesser diejenigen Fehler und Correctionen, welche die Libelle betreffen, und oben (§. 156. I.) untersucht worden sind.

XVII. Da die Größe ψ (XV) immer nur wenige Secunden betragen wird, so lange β und γ nicht größer, als etwa $\frac{1}{2}$ Grad sind, wie man wohl gewöhnlich wird annehmen dürfen, so kann man die Berechnung dieses Bogens ψ ganz ersparen, und in der Formel für x (IX) schlechtweg $\psi = 0$ setzen, wodurch sie sich demnach in folgende weit kürzere

$$\sin x = 2 \cos \beta \cos \gamma \sin \tfrac{1}{2} \alpha \cos \tfrac{1}{2} \alpha$$

oder wegen $2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = \sin \alpha$ (Trig. S. XIII. 21.) in $\sin x = \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha$ zusammen ziehet, und sehr leicht durch Logarithmen berechnen läßt.

XVIII. Wenn das Fernrohr dem Werkzeuge parallel, also $\beta = 0$ ist, das Werkzeug aber

um

um den Winkel γ von der Verticalebene abwiche, so hat man bloß

$$\sin x = \cos \gamma \sin \alpha.$$

XIX. Wäre aber das Werkzeug genau vertical, also $\gamma = 0$, das Fernrohr aber um den Winkel β gegen das Werkzeug geneigt, so hätte man

$$\sin x = \cos \beta \sin \alpha.$$

XX. Wenn endlich sowohl $\beta = 0$, als auch $\gamma = 0$ wäre, so würde

$$\sin x = \sin \alpha \text{ mithin}$$
$$x = \alpha$$

d. h. der wahre Winkel, demjenigen gleich, welchen das Werkzeug angiebt.

Gebrauch der Quadranten, Verticalwinkel zu messen, und Ersparung einer Libelle dabey.

§. 158. Bey Höhenmessungen pflegt man sich sonst auch der Quadranten ohngefähr auf folgende Art zu bedienen.

1. Es sey (Tab. II. Fig. XVI.) ba der eingetheilte Rand eines solchen Werkzeugs, und der Bogen von o bis 90 einem Quadranten gleich. c dessen Mittelpunkt, um den das Fern-

Fernrohr d e, mit der daran befindlichen Vernierplatte r m beweglich ist. i, k, ein paar Punkte auf der Ebene des Werkzeugs, welche so liegen, daß eine Linie durch sie, wie i k, mit der Linie c 90° genau parallel ist, welche durch das Centrum c, und den Theilpunkt 90 gehet. — Wenn nun die Ebene des Quadranten genau vertical gestellet, und so gerichtet worden, daß ein Loth i n, durch die beyden Punkte i, k, gehet, mithin i k dadurch eine verticale Lage erhalten hat, so wird auch der Halbmesser c 90° vertical, mithin der Halbmesser c 0° horizontal seyn. Wenn nun von dem Mechanico die Einrichtung so getroffen worden, daß die Linie c r, die man sich durch das Centrum c, und den Index r des Vernier einbildet, genau der Axe des Fernrohrs d e parallel ist, so erhellet, daß wenn c o° horizontal gestellet worden, und durch Umdrehung des Fernrohrs, der Index r des Vernier an den ersten Theilpunkt o° gebracht wird, mithin die Linie c r, in den horizontalen Halbmesser c o° zu liegen kömmt, alsdann auch die Axe des Fernrohres eine horizontale Lage haben werde. Wird demnächst das Fernrohr aus dieser horizontalen Lage in die Richtung d e gebracht, so ist der Bogen o° r, das Maaß des Winkels, um den das Object, nach welchem das Fernrohr d e zielet, über der Horizontallinie c o° elevirt ist.

So

So erhellet also, daß bloß vermittelst des Lothes in, die horizontale Lage des Fernrohrs erhalten werden kann, und man also zu dieser Absicht eine Libelle ersparen könne.

Allein, wenn man überlegt, daß die gewöhnlichen geometrischen Werkzeuge nicht sehr groß seyn dürfen, so wird die Linie ik nicht die gehörige Länge haben, welche erfordert wird, wenn vermittelst des Lothes in, der Halbmesser c 90° sehr genau eine verticale Lage erhalten soll. Denn es ist klar, je weiter die Punkte i, k, durch welche das Loth gehet, von einander entfernet sind, desto sicherer wird auch die Verticalstellung der Linie ik ausfallen. Wenn man ferner in Erwägung ziehet, wie nothwendig es sey, daß ik genau mit c 90°, und cr genau mit der Axe des Fernrohres parallel gemacht worden sey, nnd wie viele, oft beschwerliche Prüfungen nöthig sind, sich davon gehörig zu versichern, so wird man, wenigstens bey geometrischen Werkzeugen, sich immer lieber einer Libelle bedienen, die horizontale Richtung des Fernrohres zu erhalten, weil 1) ihre Prüfung nicht mit so vielen Umständen verkünft ist, und 2) weil sie, wenn sie eine Länge von 5 bis 6 Zollen hat, und überdem ausgeschliffen ist, weit sicherer den horizontalen Stand des Fernrohrs geben wird, als es vermittelst eines Lothes an einem kleinen Quadranten geschehen kann. Hat aber der Quadrant

drant eine beträchtliche Größe, z. E. von 2 oder $2\frac{1}{2}$ Fußen im Halbmesser, dann mag man sich immer eines Lothes bedienen.

2. Die Art, wie übrigens einem Quadranten die gehörige verticale und horizontale Wendung gegeben werden kann, muß man aus andern Schriftstellern, z. E. aus DE LA LANDE *Astronomie* Tom. II. §. 2311. (a Paris 1771), Bions mathematischer Werkschule VI. B. I. Kap. und aus den Schriften kennen lernen, die von Messung eines Grades auf der Erdfläche handeln. Man sehe auch G. M. Lowitz Beschreibung eines Quadranten, der zur Sternkunde, und zu den Erdmessungen brauchbar ist, in den *actis societatis cosmographicae, seu minorum scriptorum etc.* welche die ehemalige cosmographische Societät in Nürnberg im J. 1754. zusammen in einem Bande herausgegeben hat.

XIII.

XIII. Kapitel.

Die Fehler der geometrischen Werkzeuge durch Versuche ausfindig zu machen.

§. 159.

Ein jeder Geometer, der bey wichtigen Messungen etwas richtiges leisten will, wird vorher die Zuverlässigkeit seiner Werkzeuge prüfen, und deren Fehler zu entdecken suchen. — Insbesondere ist diese Vorschrift bey winkelmessenden Werkzeugen zu empfehlen. Findet man beträchtliche Unrichtigkeiten, so wird man Rücksicht auf sie nehmen, und einem jeden ausgemessenen Winkel die nöthige Verbesserung geben.

Ich werde nun in diesem Kapitel unterschiedene Methoden erklären, die Fehler eines geometrischen Winkelmessers zu untersuchen, und mich vorzüglich auf das Werkzeug einschränken, welches ich im ersten Theile dieses Buches beschrieben habe. Ein kleines Nachdenken wird einen jeden lehren, wie ähnliche Prüfungen bey andern Winkelmessern anzustellen sind.

Man kann nun überhaupt bey diesem Geschäfte folgende Fragen thun.

Erstens. Ob der eingetheilte Rand eines Winkelmessers seine gehörige Richtigkeit habe, und wenn Fehler in dessen Abtheilungen enthalten sind, an welcher Stelle des Randes sie sich befinden.

Zweytens. Ob die Abtheilungen des Vernier genau sind, und der Vernier den gehörigen Bogen fasse. Auch ob die Indices der Verniere, sowohl der 90 als 96 Theilung, genau in einer geraden Linie liegen.

Drittens. Ob das Fernrohr genau in einer Ebene auf- und nieder beweglich ist, die auf dem Werkzeuge senkrecht stehet — dieses zu untersuchen, ist bereits im XI. Kap. gewiesen worden.

Viertens. Ob der Winkelmesser excentrisch sey; dieses sind die wichtigsten Fragen, die man über die Güte eines geometrischen Winkelmessers aufstellen kann. — Folgendes wird nun zeigen, wie dergleichen Prüfungen vorzunehmen sind.

Wie man die Fehler in den Abtheilungen des Randes bestimmen könne.

§. 160. Wenn man bloß zu wissen verlangt, ob Ungleichheiten in den Abtheilungen des Randes vorkommen, so kann dieses oft schon

schon vermittelst eines guten Stangenzirkels entschieden werden.

Man fasset nemlich, mit aller möglichen Schärfe, einen gewissen Bogen des Randes, z. E. 30° zwischen beyde Spitzen des Stangenzirkels, und prüfet, ob diese Weite durchgehends auf der ganzen Peripherie von gleicher Größe sey. Vorzüglich ist dieser Versuch mit dem Bogen von 90° anzustellen, wodurch man erfährt, ob die ganze Peripherie gehörig in 4 gleiche Theile getheilt worden; Es bedarf keiner Erinnerung, daß man jederzeit die Spitzen des Stangenzirkels genau in die Theilpunkte einsetzen, und sich allenfalls eines Vergrößerungsglases dabey bedienen müsse.

Durch dieses Verfahren findet man, ob wenigstens grobe Fehler in den Hauptpunkten des Randes enthalten sind; Aehnliche Prüfungen werden nun auch auf der 96 Theilung vorgenommen.

Solchergestalt zeigt sich überhaupt, wo Unrichtigkeiten in den Abtheilungen vorgefallen sind, — die Größe derselben ausfindig zu machen, wird nun die Folge ausweisen.

Kleine Fehler in den Theilpunkten des Randes werden sich nun freylich wohl nicht vermittelst des Stangenzirkels entdecken lassen. — Indessen giebt es doch viele Schriftsteller, die bey der Prüfung des eingetheilten Randes selbst astronomischer Werkzeuge, den Stangenzirkel vorschlagen; DE LA LANDE (*Astronomie* §. 2563.) sagt, man könne sehr gut vermittelst eines Stangenzirkels die Fehler des eingetheilten Randes entdecken.

Warum sollte man sich auch nicht des Stangenzirkels zur Aufsuchung wenigstens solcher Fehler bedienen können, welche aus Nachlässigkeit des Künstlers entstanden sind, da man ja selbst den Stangenzirkel zur Theilung des Werkzeugs braucht?

Wie man, vermittelst der Methode §. 135. welche mein Vater zur genauern Ausmessung eines Winkels vorgeschlagen hat, die Fehler in den Theilpunkten eines Randes bestimmen könne.

§. 161. 1. Fig. XVII. Tab. II. stelle den horizontalgestellten Winkelmesser vor; O dessen Mittelpunkt, um den sich das Fernrohr drehet, welches ich hier der Ebene des Werkzeugs parallel, also nicht in einem Gewinde auf- und nieder beweglich, annehme; (Dieses erhält man nach (§. 100.), wenn man die Vorrichtung, um die das Fernrohr auf- und nieder beweglich ist (§. 99. 18), von der Alhidadenregel abnimmt, und dagegen auf die Alhidadenregel

ein

ein paar Hülsen, durch die das Fernrohr gesteckt wird (§. 100), befestigt). Die beyden Kreuzlinien im Brennpunkte des Fernrohres seyen so gestellt, daß eine davon auf der Ebene des Werkzeugs senkrecht stehe (§. 134.), mithin bey dem horizontalen Stande des Winkelmessers eine verticale Lage habe.

Der Index des Vernier stehe bey a auf 0°, und das Fernrohr ziele in dieser Richtung ab, genau nach einem Punkte Q, den man auf einer etwa 40 bis 50 Fuß von dem Winkelmesser entfernten Wand verzeichnet hat. Q werde also von der Verticallinie im Brennpunkte des Fernrohres genau bedecket.

II. Will man nun einen gewissen Bogen des Randes, z. E. den von 0° bis 60°, von 60° bis 120° u. s. w. prüfen, so lasse man das Werkzeug in unverrückter Stellung, löse die Alhidadenregel, und bringe durch Umdrehung derselben das Fernrohr aus der Richtung ab in die cd, so daß bey c der Index des Vernier genau auf 60° stehet; lasse demnächst von einem Gehülfen, den man durch Zeichen und Zurufen bedeutet, ein Blatt Papier, worauf ein anderer Punkt P verzeichnet ist, auf der oberwähnten Wand so lange verschieben, bis P von der Verticallinie im Brennpunkte des Fernrohres cd ebenfalls genau bedecket wird, so hat man auf diese Art einen

Win-

Winkel POQ abgestecket, der genau dem Bogen a c, oder 60 Graden des Randes zugehört. Das Blatt Papier wird demnächst gehörig an die Wand feste gemacht.

III. Ob aber nun diese 60 Grad des Randes, wahre 60° sind, und ob auf gleiche Weise die Bogen von 60° bis 120°, von 120° bis 180° u. s. w. auf dem Rande des Werkzeugs die gehörige Größe haben, wird sich auf folgende Art entscheiden.

IV. Man lasse das Fernrohr unverrückt auf 60° stehen, und wende nach (§. 135. II.) das ganze Werkzeug, bis dadurch das Fernrohr *cd* wieder in die Richtung nach Q komme, wie die XVIIIte Figur ausweiset, wo dann die Linie a b der XVIIten Figur in die punktirte Richtung a b der XVIIIten kommen wird.

V. Bey dieser zweyten Richtung des Fernrohrs nach Q, wird demnach der Index des Vernier auf 60° stehen, so wie er bey der ersten Richtung des Fernrohrs nach Q, nemlich in der XVIIten Figur auf 0° stand. Um nun zu untersuchen, ob der Bogen von 60° bis 120° auf dem Rande, dem von 0° bis 60° gleich sey, so lasse man die Ebene des ganzen Werkzeugs unverrückt, und bringe durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel den Index des Vernier genau an den Theil-

Theilstrich n des Randes, der zu 120° gehöret. Befestige dann die Alhidadenregel wieder, und visire durchs Fernrohr n m — decket die Verticallinie im Brennpunkte desselben, genau den Punkt P, so ist der Bogen von 60° bis 120°, dem von 0° bis 60° gleich, oder c n = a c. Geschiehet dieses aber nicht, sondern die Ziellinie des Fernrohres deckt einen andern Punkt p, so bringe man durch sanfte Umwendung der Micrometerschraube das Fernrohr völlig genau in die Richtung nach P, dergestalt, daß also n m in die Richtung c′ d′ zu liegen komme.

VI. Nach dieser geringen Verrückung des Fernrohrs wird aber der Index des Vernier nicht mehr bey n an dem Theilstriche 120 stehen, sondern sich bey c′ befinden, und von n einen gewissen Abstand c′ n haben, den man als bekannt wird ansehen können, wenn man die Umdrehungen der Micrometerschraube gezählet hat, die erfordert wurden, das Fernrohr aus der Lage n m, völlig genau in die Richtung nach P zu bringen, und solche in Minuten und Secunden verwandelt. Ich will also den Abstand c′n, als Maaß des kleinen Winkels n O c′ oder P O p, = α nennen.

VII. In diesem Abstande α von dem Theilpunkte 120, lasse man bey c′ den Index unverrückt, bringe erstlich durch Wendung des ganzen Werkzeugs daß Fernrohr wieder in die Richtung nach Q, und dann durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel den Index auf 180°; Ist dann bey dieser Lage das Fernrohr nicht genau nach P gerichtet, so untersuche man wieder, wie viel Minuten und Secunden der Index von dem Theilstriche 180 absteher, nachdem durch eine sanfte Umdrehung der Micrometerschraube das Fernrohr genau die Richtung nach P erhalten hat. Ich will nun den am Ende dieser Operation von dem Theilstriche 180 gefundenen Abstand des Index = β nennen.

VIII. Durch Fortsetzung solcher Operationen sey also am Ende der vierten Operation der Abstand des Index von dem Theilstriche, der zu 240° gehört = γ.

Am Ende der fünften Operation der Abstand von dem Theilstriche, der zu 300° gehört = δ.

Am Ende der sechsten des Index Abstand von dem Theilstriche 360 = ε.

IX. So wird man aus den durch Hülfe der Micrometerschraube gefundenen Abständen α, β, γ, δ, ε, nicht allein die eigentliche Größe des Winkels POQ, dem bey der ersten Operation der Bogen von 0° bis 60° zugehörte, sondern auch die wahre Größe der Bogen von

60°

60° bis 120°, von 120° bis 180° u. s. w. bestimmen können.

X. Nennet man nemlich den Winkel POQ, oder den Bogen von 0 bis 60° auf dem Rande = a, ferner die Bogen

von 0 bis 120 = b
von 0 — 180 = c
von 0 — 240 = d
von 0 — 300 = e

so erhellet, weil vom Anfange einer jeden Operation bis ans Ende derselben, das Fernrohr immer um den Winkel POQ = a gedrehet worden, daß vom Anfange der ersten Operation bis ans Ende der zweyten, das Fernrohr, oder der Index auf dem Rande, den Bogen 2 a beschrieben haben wird. Da aber am Ende der zweyten Operation der Index den Abstand α vom Theilpuncte 120 hatte, und die Weite von 0° bis 120° = b gesetzt worden, so erhellet, daß vom Anfange der ersten bis ans Ende der zweyten Operation auch der Bogen b + α wird beschrieben worden seyn. Daß also am Ende der zweyten Operation seyn müsse

$$b + \alpha = 2 . a.$$

Auf gleiche Weise erhellet, daß am Ende der dritten Operation seyn werde

$$c + \beta = 3 . a.$$

Am Ende der vierten Operation $d + \gamma = 4 . a$
der fünften — — $e + \delta = 5 . a$
der sechsten — — $360° + \varepsilon = 6 . a$

Nem=

Nemlich am Ende der letzten Operation hat der Index den ganzen Umkreis, und noch überdem den kleinen Bogen ε durchlaufen.

Ich habe hier zwar angenommen, daß am Ende einer jeden Operation der Index rechter Hand der Theilstriche, 120, 180 u. s. w. gestanden habe, daß folglich die Werthe von α, β, γ, δ, ε, positiv seyen. Es erhellet aber, daß auch einige von diesen Werthen negativ seyn würden, wenn am Ende einer gewissen Operation der Index linker Hand der erwähnten Theilstriche gestanden hätte.

XI. Aus der Gleichung $360° \pm \varepsilon = 6 . a$ findet man nun erstlich $a = \frac{360° \pm \varepsilon}{6} = 60° \pm \frac{1}{6} \varepsilon$.

Es würde also, wenn am Ende der letzten Operation nicht $\varepsilon = 0$ gefunden worden wäre, der Bogen auf dem Rande von 0 bis 60 nicht genaue 60° halten, sondern um den Werth $\frac{1}{6}\varepsilon$ größer oder kleiner, als 60° seyn.

Dieser Werh von a nun in die übrigen Gleichungen substituirt, giebt

$$b = 120° + \tfrac{2}{6}\,\varepsilon - \alpha$$
$$c = 180° + \tfrac{3}{6}\,\varepsilon - \beta$$
$$d = 240° + \tfrac{4}{6}\,\varepsilon - \gamma$$
$$e = 300° + \tfrac{5}{6}\,\varepsilon - \delta$$

woraus man also die wahre Größe der Bogen von 0° bis 120°, von 0° bis 180° u. s. w. findet.

Die

Die Werthe von $b - a$, $c - b$, u. s. w. geben dann die Größe der Bogen von 60° bis 120° von 120° bis 180° u. s. w., und zeigen, ob jeder dieser Bogen genaue 60° halte, oder nicht.

XII. Ex. Bey einem Winkelmesser, dessen Radius 6 Zoll war, habe ich solchergestalt den Versuch angestellet, und folgende Werthe gefunden.

$$\begin{aligned}
\alpha &= +\ 2' \,.\, 10'' \\
\beta &= -\ 2' \,.\, 30'' \\
\gamma &= -\ 3' \,.\, \ 0'' \\
\delta &= \quad 0' \,.\, \ 0'' \\
\varepsilon &= +\ 4' \,.\, \ 0''
\end{aligned}$$

Diese geben demnach

$$\begin{aligned}
a &= 60^\circ \,.\ \ 0' \ \ 40'' \\
b &= 119 \,.\, 59 \,.\, 10 \\
c &= 180 \,.\ \ 4 \,.\, 30 \\
d &= 240 \,.\ \ 5 \,.\, 40 \\
e &= 300 \,.\ \ 3 \,.\, 20
\end{aligned}$$

Dieser Winkelmesser hatte also in den Theilpunkten 60, 120, 180 u. s. w. merkliche Fehler. Da er auf einer gwöhnlichen Theilscheibe getheilt worden, so konnte ich schon zum voraus vermuthen, daß es mit dessen eingetheilten Rande nicht so ganz richtig seyn möchte; Ich habe mir nicht die Mühe gegeben, auch die übrigen Abtheilungen zu prüfen. — Es erhellet indessen, daß auf eine ähnliche Art ein jeder

Bogen des Randes, dessen Größe ein aliquoter Theil von 360° ist, sich wird berichtigen lassen.

Noch muß ich erinnern, daß ich bey diesem Verfahren, weil der Winkelmesser keine Micrometerschraube hatte, mich einer andern Methode bedienet habe, die Werthe von α, β, γ, u. s. w. ausfindig zu machen. PQ Fig. XVIII. war nemlich eine auf einer Wand gezogene gerade Linie, die Punkte P, Q, lagen in dieser Linie, und um sie waren kleine Kreise gezogen um sie besser erkennen zu können. POQ war ohngefähr ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Seiten OP, OQ, QP, mit aller möglichen Vorsicht gemessen worden waren, um dadurch den Winkel P zu berechnen. Auf die gezogene Linie PQ, wurde nun auf beyden Seiten des Punktes P eine gewisse Menge von Zollen gesetzt, und durch senkrechte Striche jeder in 4 gleiche Theile getheilet.

Wenn nun der Index des Vernier an einen der oberwähnten Theilstriche 60, 120 u. s. w. des Randes gebracht worden war, und des Fernrohrs Ziellinie alsdann nicht genau den Punkt P bedeckte, sondern z. E. an einen andern Punkt P hintraf, so wurde untersucht wie viel Zolle und Theile desselben zwischen P und p enthalten waren; Theile eines Zolles, die kleiner als ein $\frac{1}{4}$ Zoll waren, konnten sehr gut geschätzt werden, da die Theilstriche auf Pp durch=

durchs Fernrohr sehr kenntlich waren; Auch wurde angemerkt, ob p linker oder rechter Hand P fiel.

Aus den Linien OP, Pp, und dem Winkel P, wurde demnächst der kleine Winkel POp = α, oder β u. s. w. berechnet, folglich eben das geleistet, was im vorhergehenden durch die Micrometerschraube geschah, (VI); nemlich, die Grösse des kleinen Bogens d′m, oder c′n in Minuten und Secunden bestimmt, so genau als es die geringe Größe des Werkzeugs verstattete.

XIII. Diese Methode, die Werthe von α, β u. s. w. zu finden, möchte in der That wohl noch zuverlässiger seyn, als die erstere, wozu man sich der Micrometerschraube bediente. Aber sie ist etwas weitläuftiger, und erfordert eine genaue Messung der Größen OQ, QP, OP, Pp, und eine jedesmahlige Berechnung des Winkels POp. In dem Exempel (XII) waren in Zollen OP = 724,4; OQ = 699,0; PQ = 712,0.

XIV. Was nun überhaupt bey dem ganzen Verfahren für Vorsichten zu beobachten sind, davon ist bereits §. 136. geredet worden. Uebrigens habe ich noch zu erinnern, daß die Kreutzlinien im Brennpunkte des Fernrohrs, sehr zart ins Glas gerissen seyn müssen, damit sie in der Ferne einen so kleinen Punkt, als mög-

möglich, decken, mithin der Schätzung sehr kleiner Theile auf dem Raume Pp, nicht hinderlich fallen (oder man muß, wenn die Kreuzlinien aus Silberfäden bestehen (§. 104), sich der Gränze eines solchen Fadens zum Visiren bedienen, und die Theile auf Pp dadurch abschneiden lassen, §. 104. am Ende). Endlich muß man nie vergessen, sich eines Vergrößerungsglases zu bedienen, wenn der Index des Vernier an die Theilstriche des Randes gebracht wird. Auch ist es der Richtigkeit des Verfahrens sehr zuträglich, wenn die Punkte P, Q, so stark, als möglich, erleuchtet sind; Daher man am sichersten verfährt, wenn P, Q, schwarze Punkte auf einer weißen Fläche sind.

XV. Bey Prüfung beweglicher astronomischer Werkzeuge würde die bisher beschriebene Methode gleichfalls mit Nutzen gebraucht werden können, und noch eine weit größere Genauigkeit verstatten, theils wegen des festern Standes derselben, theils auch, weil die Größe derselben eine genauere Bestimmung der Werthe α, β, γ u. s. w. zuläßet.

William Lax (Philos. Transactions Year 1809.) hat sich einer ähnlichen Methode bedient, die Fehler in den Abtheilungen eines Winkelmessers zu bestimmen.

Noch

Noch ein Verfahren, die Ungleichheiten in den Abtheilungen eines Randes zu entdecken.

§. 162. Es erhellet, daß dieses geschehen könne, wenn man auf dem Rande eines Winkelmessers zwey Gattungen von Abtheilungen hat, eine, wo der Quadrant in 90 Theile, und eine andere, wo er in 96 Theile getheilt ist. Wenn man nemlich den Index des Vernier der 90 Theilung an einen gewissen Theilstrich des Randes gebracht hat, so gebe man acht, was alsdann der Index des Vernier der 96 Theilung weiset; reducire die 96 Theilung auf Grade, Minuten u. s. w. und vergleiche das Resultat mit demjenigen, was der Index der 90 Theilung gab. Findet sich ein beträchtlicher Unterschied, so erhellet, daß in einer von beyden Abtheilungen des Randes ein Fehler stecken müsse, daß also die erwähnten Theilpunkte, an denen die Indices gestanden haben, eine Correction bedürfen, deren Werth man entweder nach dem vorhergehenden §, oder nach andern Methoden bestimmen kann.

Wie die beyden äussersten Theilstriche des Vernier zur Berichtigung der Gradabtheilungen dienen können.

§. 163. Man bringe den Index des Vernier genau an einen gewissen Theilstrich des

Ran=

Randes. — Dann muß zu gleicher Zeit auch der letzte Theilstrich des V. an einen Theilstrich des Randes passen; und wenn dieß nicht durchgehends statt findet, man mag den Index, an welchen Theilstrich man will, bringen, so sind zuverlässig Ungleichheiten in den Abtheilungen des Randes.

Gesetzt, der Vernierbogen sey 31 Graden des Randes gleich, so muß, wenn der Index des V. genau an des Randes Theilstrich 31 gebracht wird, der letzte Strich des Vernier genau an den Theilstrich o des Randes passen, wenn alles seine gehörige Richtigkeit hat.

Gesetzt nun, man brächte den Index des Vernier an den Theilstrich 62 des Randes, so muß der letzte Strich des Vernier genau an den Theilstrich 31 des Randes passen. Geschiehet dieses nicht, so kann man vermittelst der Micrometerschraube, finden, um wie viel Minuten 2c. der letzte Strich des Vernier von dem Theilstriche des Randes, an den er eigentlich passen müßte, absteht, um wie viel folglich der Bogen des Randes zwischen beyden Theilstrichen 31 und 62, größer oder kleiner ist, als der Bogen zwischen den Theilstrichen o und 31;

So kann man also vermittelst der beyden äussersten Theilstriche des Verniers und durch

Hülfe

Hülfe der Micrometerschraube, sehr viele Unrichtigkeiten in den Abtheilungen eines Randes entdecken.

Gebrauch der Micrometerschraube, die Unterabtheilungen in einzelne Grade zu prüfen.

§. 164. Wenn man sich auf die Richtigkeit der Micrometerschraube verlassen kann, und den eigentlichen Werth ihrer Schraubengänge weiß, so kann man auf folgende Art die Gradabtheilungen des Randes berichtigen.

I. Man bringe den Inder des Vernier an einen gewissen Theilstrich des Randes, z. E. an den Theilstrich a (Fig. XIX.). Wende nun die Micrometerschraube herum, bis der Inder an den nächstfolgenden Theilstrich b gerückt ist, und verwandele die gezählten Umdrehungen der Micrometerschraube in Minuten u. s. w. Geben diese nun genau so viel, als der Bogen ab eigentlich betragen müßte, so ist die Entfernung der beyden Theilpunkte a, b richtig,

II. Um nun die Weite bc der folgenden beyden Theilpunkte zu prüfen, so drehe man erstlich die Micrometerschraube wieder rückwärts, bis der Inder wieder von b nach a gerückt ist; d a d u r c h k o m m e n in d i e w e i b l i c h e S c h r a u b e w i e d e r d i e s e l-ben Gänge der männlichen, und dieß ist nothwendig, wenn man die Weite bc prüfen, und mit ab vergleichen will; Bediente man sich dieser Vorsicht nicht, so wäre zu befürchten, daß die etwanige Ungleichheit anderer Schraubengänge der Richtigkeit des Verfahrens nachtheilig seyn möchte.

III. Nachdem dieß geschehen, löse man die Alhidadenregel, und bringe durch bloße Umwendung derselben, den Index des Vernier an den Theilpunkt b, befestige alsdann die Alhidadenregel wieder, und treibe durch Umdrehung der Micrometerschraube den Index von b bis an den nächsten Theilstrich c, so wird sich zeigen, ob man von b bis c so viel Umdrehungen der Micrometerschraube bekommt, als man von a bis b erhalten hatte, ob folglich bc = ab sey. In dem entgegengesetzten Falle wird der Unterschied angemerkt, und künftig bey Messung der Winkel allemahl in Rechnung gebracht.

IV. Auf diese Art erhellet, wie eine ganze Reihe von Theilpunkten berichtigt werden könne, und zwar sehr genau, wenn man 1) immer einerley Schraubengänge braucht, und 2) den Werth derselben in Minuten ꝛc. weiß. Wir haben zwar schon §. 101. ein Mittel angegeben, den Werth der Schraubengänge zu bestimmen, da aber dieses zu gegenwärtiger Absicht

sicht nicht zureichend genau ist, so pflegt man sich auch folgender Methode zu bedienen.

Den Werth der Umdrehungen einer Micrometerschraube zu bestimmen.

§. 165. I. Es sey (Fig. XX.) ik ein auf dem Felde vertical abgesteckter Maaßstab, auf dem man feine Abtheilungen in Zolle u. s. w. verzeichnet habe. c sey der Mittelpunkt des von dem Stabe entfernten und vertical gestellten Winkelmessers, dessen Fernrohr af, genau horizontal, nach dem Stabe ik gerichtet worden.

Man bemerke nun, was die Axe des Fernrohres, oder die horizontale der beyden Kreuzlinien im Brennpunkte desselben, bey h für einen Theilstrich auf dem verticalen Maaßstabe abschneidet, oder wenn die Richtung af, nicht genau auf einen Theilstrich h trifft, so schätze man nach dem Augenmaaße, wie viel Theile eines Zolles zwischen der Axe und dem zunächst bey der Axe liegenden Theilstriche enthalten sind.

II. Man drehe nun die Micrometerschraube herum, bis die Axe des Fernrohres in die Lage eb kömmt, und auf dem verticalen Stabe bey g einen andern Theilstrich abschneidet, und beobachte in dem Fernrohre die Anzahl der zwischen g, h, enthaltenen Zolle ꝛc. Messe demnächst die Weite $ch = nk$, und berechne aus den Größen gh, ch, in dem rechtwinklichten Dreyecke chg, den Winkel $gch = ace$. Diesem gehören nun so viel Umdrehungen der Micrometerschraube zu, als man nöthig hatte, das Fernrohr aus der horizontalen Richtung af, in die Lage eb zu bringen; diesen Winkel dividire man mit der gefundenen Menge von Umdrehungen, so bekömmt man den Werth einer Umdrehung in Minuten und Secunden.

III. Da man das Fernrohr aus der horizontalen Richtung af, nur um so viel erhöhen wird, daß, wenn die Axe des Fernrohrs nach g gerichtet ist, auch h noch in dem Fernrohre erscheine, und übrigens auch die Weite ch immer ziemlich groß, in Vergleichung mit gh, genommen werden muß, so erhellet, daß der Winkel gch immer nur klein seyn werde; daher kann man tang $gch = gch$, (Trig. S. VII.) setzen, dieß giebt demnach wegen tang

$$gch = \frac{gh}{ch};$$

$$gch = \frac{gh}{ch} \text{ oder in Secunden}$$

$$gch = \frac{gh}{ch} \cdot 206264.$$

Gehören

Gehören nun diesem Winkel m Umdrehungen der Micrometerschraube zu, so ist der Werth einer Umdrehung $= \frac{gh}{m.ch} . 206264$

Ex. Bey Prüfung der Micrometerschraube an meines Vaters Astrolabio hatte ich gemessen ch = 567 Zoll, und fand gh = 10,6 Zoll; m = 4, 1 Umdreh. also

$$
\begin{array}{rrl}
& \log gh = & 1,0253059 \\
& \log 206264 = & \underline{5,3144252} \\
& & 6,3397311 \\
\text{abgez.} & \log m.ch = & \underline{3,3663670} \\
& \text{läßt} & 2,9733641
\end{array}
$$

wozu die Zahl 940 gehöret, also ist

$$1 \text{ Umdr.} = 940'' = 15' . 40''$$
$$0,1 \text{ Umdr.} = 94'' = 1' . 34''.$$

IV. Es versteht sich, daß man, wegen der bey Messung der Größen gh, ch, vorfallenden kleinen Unrichtigkeiten, es nicht bey einem Versuche bewenden lassen, sondern aus mehreren ein Mittel nehmen wird; Man könnte auch leicht berechnen, um wie viel sich der Werth einer Umdrehung, oder die Größe $\frac{gh . 206264}{m . ch}$ verändern würde, wenn man gh, ch, etwas falsch gemessen hätte; da aber diese Untersu-

chung

chung an sich leicht ist, so brauche ich mich nicht dabey aufzuhalten.

Wenn man gleich den Werth der Umdrehung einer an dem Werkzeuge befindlichen Micrometerschraube nicht kennt, sondern nur die richtige Größe eines gewissen Bogens auf dem Rande, z. E. den von 5°, weiß, die Unterabtheilungen desselben in einzelne Grade zu prüfen.

§. 166. I. Es sey Fig. XIX. a h ein gewisser Bogen des Randes, von bekannter Größe, der bereits, entweder nach dem Verfahren §. 161., oder auch auf eine andere Art, berichtiget worden. — Man soll die wahre Größe der Unterabtheilungen a b, b c u. s. w., die hier Grade bedeuten mögen, ausfindig machen.

II. Man siehet leicht, daß dieß geschehen könne, wenn die Verhältnisse der Stückgen a b, b c ꝛc. bekannt sind.

Diese können gefunden werden, wenn man die Anzahl der Umdrehungen der Micrometerschraube weiß, die auf a b, b c u. s. w. gehen.

Gesetzt also, die Buchstaben q, r, s, t, u, bezeichnen die Bogen ab, bc u. s. w. und a, b, c, d, e, die Umdrehungen der Micrometerschraube, die auf sie gehen; Der Bogen a h heisse β.

Es

Es ist also der Bogen β in Theile q, r, s, t, u, getheilt, die sich verhalten, wie a, b, c, d, e, Den Werth dieser Theile findet man also nach Art der Gesellschaftsrechnung, wenn man schließet

$$a + b + c + d + e : a = \beta : q$$
$$a + b + c + d + e : b = \beta : r$$

u. s. w.

Dieß giebt demnach

$$q = \frac{a \,.\, \beta}{a + b + c + d + e}$$
$$r = \frac{b\beta}{a + b + c + d + e}$$

u. s. w.

Wodurch man also die Werthe der Bogen q, r, s, t, u in Minuten oder Secunden findet, je nachdem der Bogen β in Minuten oder Secunden ausgedrückt ist.

Gesetzt, es habe sich durch Berichtigung gezeigt, daß $ah = \beta$ genau 5° sey, und vermittelst der Micrometerschraube sey durch wiederholte Versuche gefunden worden.

a = 4,2	Umdr.	auf	das	Stück	ab = q
b = 4,3	—	—	—	—	bc = r
c = 4,1	—	—	—	—	cd = s
d = 4,4	—	—	—	—	de = t
e = 4,5	—	—	—	—	eh = u

S. d. Um. = 21, 5 und $q + r + s + t + u = 5°$

Also

$$\text{Also } q = \frac{4,2}{21,5} \cdot 5^\circ = \frac{4,2}{21,5} \, 18000'' = 58' \, 36''$$

$$r = \frac{4,3}{21,5} \cdot 5^\circ = \frac{4,3}{21,5} \, 18000'' = 60' \cdot 0''$$

So erhellet also, wie man auf diese Art den Werth eines jeden Bogens ab, bc u. s. w. finden könne, wenn man gleich nicht den eigentlichen Werth der Umdrehung der Micrometerschraube weiß, sondern sich nur auf die Gleichheit ihrer Gänge verlassen kann, welches immer ohne merklichen Irrthum angenommen werden kann; Uebrigens muß hiebei nach dem 164 §. die Vorsicht beobachtet werden, daß bey Prüfung eines jeden Theils ab, bc u. s. w. immer ohngefähr dieselben Gänge der männlichen Schraube, sich in der weiblichen befinden.

Prüfung des eingetheilten Randes. vermittelst eines gleichschenklichten Dreneckes, das man auf dem Felde absteckek.

§. 167. I. Es sey Fig. XXI. ABC ein gleichschenklichtes Dreneck, wo $AC = AB = a$, und $CB = b$ genannt werde, so ist nach der bekannten Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{b}{2a} \text{ also}$$

$$b = 2a \sin \tfrac{1}{2} A.$$

II.

II. Wenn man also A, a, als gegeben ansiehet, so läßt sich daraus b berechnen, und dann aus den bekannten Größen a, b, das gleichschenklichte Dreyeck CAB auf dem Felde abstecken, so, daß bey A der gegebene Winkel hinkömmt.

Diesen Winkel messe man demnächst mit dem Werkzeuge, und sehe zu, ob ihn das Werkzeug genau so groß angiebt, als er vermöge des abgesteckten Dreyecks CAB seyn muß. Geschiehet es nicht, so wird man aus dem Unterschiede, die Größe des Fehlers in demjenigen Bogen des Winkelmessers finden, welcher diesen Winkel A maaß, und so erhellet also, wie dadurch ein jeder Bogen des eingetheilten Randes geprüft werden könnte.

III. Dieses Verfahren ist von verschiedenen Schriftstellern empfohlen, und in Ausübung gebracht worden. — Allein meines Erachtens ist es theils ziemlich weitläuftig, theils auch müssen die Seiten des gleichschenklichten Dreyecks mit ausserordentlicher Sorgfalt gemessen und abgesteckt werden, wenn die Prüfung des Werkzeugs ihren erwünschten Erfolg haben soll — denn da kleine Fehler im Abstecken oder Messen der Seiten CA, AB, CB auf den Winkel A Einfluß haben, so könnte es leicht geschehen, daß man dem Werkzeuge eine Unrichtigkeit Schuld gäbe, wenn es nicht genau

den

den Winkel A so groß angäbe, als er vermöge des abgesteckten Dreyecks seyn sollte, da doch der Fehler bloß in dem unrichtig abgesteckten Dreyecke liegen würde.

Folgende Betrachtungen werden nun zeigen, wie genau man die Seiten des Dreyecks muß abstecken können, wenn bey gegenwärtiger Prüfung des Werkzeugs keine groben Fehler entstehen sollen.

IV. 1. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$, so ist klar, daß, wenn sowohl b, als a, um etwas falsch gemessen worden wären, folglich etwas größer, oder kleiner genommen würden, als es die abzusteckende Größe des Winkels A erfordert, auch der Winkel A seine richtige Größe nicht erhalten würde.

2. Man nehme also an, b verändere sich um db (Trig. S. XXVII.), a um da, wo folglich db, da, die Fehler bedeuten können, die in Messung der Größen b, a, vorgefallen sind, so wird sich auch A um eine gewisse Größe dA verändern. Um also dA aus db, da zu finden, verfahre man auf folgende Art.

3. Weil $\sin \frac{1}{2} A = \frac{b}{2a}$ so ist

4. $\log \sin \frac{1}{2} A = \log b - \log a - l\,2$

5. Mit-

5. Mithin $d \log \sin \frac{1}{2} A =$
$d \log b - d \log a - d \log 2$.

6. Nun ist aus (Trig. S. XLVII. 1.) den dortigen Winkel $a = \frac{1}{2} A$ gesetzt, $d \log \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B \cdot d A \cot \frac{1}{2} A$.

7. Ferner aus Trig. S. XLVI. (das dortige x hier $= a$ oder $= b$ gesetzt) $d \log a = \frac{B\,d\,a}{a}$; $d \log b = \frac{B\,d\,b}{b}$.

8. Weil die Zahl 2 als unveränderlich angesehen wird, so ist $d \log 2 = 0$ (Trig. S. XXXI).

9. Die Werthe (6. 7. 8.) in die Gleichung (5) substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{1}{2} d A \cot \frac{1}{2} A = \frac{d\,b}{b} - \frac{d\,a}{a} \text{ oder}$$

$$d A = 2 \frac{d\,b}{b} \tang \frac{1}{2} A - \frac{2\,d\,a}{a} \tang \frac{1}{2} A.$$

10. Aus dieser Gleichung findet man also die Veränderung des Winkels A, wenn man annimmt, daß die Seiten b, a, um die Werthe $d\,b$, $d\,a$ falsch gemessen worden wären.

Nur ist zu bemerken, daß der Werth $d\,A$ hier in Decimaltheilen des Sin. tot. gefunden wird; Verlangt man diesen kleinen Winkel $d\,A$ in Secunden, so muß man den Ausdruck rechter Hand des Gleichheitzeichens in (9) noch mit der bekannten Zahl 206264 multipliciren.

Ich werde das erste Glied rechter Hand des Gleichheitzeichens in (9) $= x''$ und das zweyte $= y''$ der Kürze halber nennen, also $dA = x'' - y''$ setzen.

11. In der Formel (9) können nun da, db, nach Gefallen, bald bejaht, bald verneint, genommen werden. So wie sie da steht, zeigt sie die Aenderung des Winkels, wenn beyde Seiten a und b zu groß gemessen worden, also da und db bejaht wären. Je nachdem nun für dA etwas bejahtes oder verneintes herauskömmt, wird dieses anzeigen, daß der abzusteckende Winkel zu groß oder zu klein ausfällt, und also um den Werth dA falsch abgesteckt wird, wenn die Seiten a, b um die Werthe da, db unrichtig genommen sind.

12. Wären die Schenkel $CA = AB = a$ richtig gemessen worden, mithin $da = 0$, so hätte man bloß $dA = x''$.

13. Wäre aber $CB = b$ richtig gemessen, und bloß $CA = AB$ um da zu groß genommen worden, so hätte man $db = 0$, also $dA = - y''$, oder wenn $CA = AB$ zu klein genommen wäre, $dA = + y''$, weil alsdann da negativ seyn würde.

Ex.

Ex. Gesetzt, der Winkel A sollte genau 60° seyn und $CA = AB = 5$ Ruthen $= 5000$ Linien, so müßte man auch CB genau $= 5000$ Linien nehmen. Ich will nun setzen, man habe im Abstecken von CA, um eine Linie, und eben so im Abstecken von b, um so viel gefehlt, und zwar seyen

I) Fall. Die Seiten alle zu groß gemessen worden; also $da = db = + 1$ Linie, so würde für diesen Fall $x'' = y''$, also

$$dA = x'' - x'' = 0,$$

d. h. der Winkel A würde demohngeachtet richtig abgesteckt werden.

II) Wäre aber a zu groß, und b zu klein gemessen worden, also $da = + 1$; $db = - 1$ so würde $dA = - x'' - x'' = - 2x''$ also der Winkel A um $- 2x''$ zu klein ausfallen.

III) Wäre endlich a zu klein, b aber zu groß gemessen worden, so wäre $da = - 1$; $db = + 1$ also $dA = x'' + x''$ mithin A um $2x''$ zu groß abgesteckt.

Der absolute Werth von x'' oder y'' würde für das gegenwärtige Beyspiel, wegen $da = db = 1$, $a = b = 5000$ und $A = 60^\circ$, folgender $x'' = \frac{1}{2500} \tan 30^\circ \cdot 206264''$,

welches

welches ich durch Logarithmen $= 47''$ finde. Dies gäbe demnach z. E. für den Fall (III) den Fehler im Winkel A oder $dA = +2 . x''$ oder $1' . 34''$.

14. Aus diesen Betrachtungen wird also zureichend erhellen, daß, wenn man die Seiten des gleichschenklichten Dreyecks nicht bis auf einzelne Linien genau abstecken kann, und das möchte auf dem Felde wohl ziemlich schwer seyn, der Winkel A auch höchstens nur innerhalb 1 bis 2 Minuten als richtig anzunehmen seyn wird; vorausgesetzt, daß A nicht größer, als etwa 60°, und die Schenkel CA, AB, 5 Ruthen groß genommen werden; denn es erhellet, daß dA noch beträchtlicher würde, als in dem gegebenen Beyspiele, wenn man den Winkel A größer als 60°, und a kleiner als 5 Ruthen nähme.

15. Je größer man a, b, nimmt, desto kleiner werden die Größen $\frac{db}{b}$; $\frac{da}{a}$, für einerley db, und da; desto kleiner wird also auch dA oder der Fehler im Winkel A; Man könnte aber glauben, wenn man die Seiten des Dreyecks, CA und AB, sehr groß machte, daß alsdann der Winkel A mit größerer Zuverlässigkeit abgesteckt werden würde: Allein man muß überlegen, daß bey Absteckung

ckung sehr langer Linien, auch größere Fehler vorfallen, mithin die Werthe von db, da, auch beträchtlicher werden (§. 46. V.), so daß dem ohnerachtet in dem Winkel A keine größere Schärfe zu erwarten stehet.

V. Läßt sich also, vermittelst des bisherigen Verfahrens, der Winkel A höchstens nur bis auf 2 Minuten genau abstecken, so wird man auch wohl nach dem Verfahren (II) keine Fehler des eingetheilten Randes entdecken, welche kleiner als 2 Minuten sind, wenn man auch sonst in Stellung des Werkzeugs, und Beobachtung des Winkels noch so vorsichtig verführe.

In dem einzigen Falle, wo A nicht sehr groß ist, z. E. nur 5 bis 10 Grad betrüge, lässet das bisherige Verfahren einige Genauigkeit zu. Denn wenn man da auch kleine Fehler im Abstecken der Linien CA, CB, AB, begienge, so würden sie auf den Winkel A doch nicht so großen Einfluß haben, als wenn A z. E. 80 oder mehrere Grade hielte, wie auch aus der für dA gefundenen Formel erhellet, wo offenbar dA abnimmt, wenn A kleiner wird.

Wenn man also nur einen kleinen Bogen des Randes prüfen will, so mag man sich der bisherigen Methode bedienen. — In andern Fällen verstattet sie aber nie die gehörige Schärfe, se, und leistet mit weit größerer Mühe und Zeitverlust kaum mehr als ein Stangenzirkel.

Anmerkung.

§. 168. Die bisher beschriebenen Methoden mögen einigermaaßen zeigen, was man bey Prüfung des eingetheilten Randes eines Winkelmessers zu beobachten hat. — Man wird leicht begreifen, daß diese Arbeit eben keine der angenehmsten ist, und eine sehr große Sorgfalt des Geometers erfordert. Indessen kann ich aus Erfahrung versichern, daß die erwähnten Prüfungsmethoden, mit einander verbunden, sicher zum Endzweck führen. Ich habe mich derselben sowohl zur Prüfung geometrischer, als astronomischer Werkzeuge bedient. Bey Winkelmessern mit einer so genauen Eintheilung als sie jetzt ein Reichenbach liefert, fallen dann freylich Prüfungen, wie die bisherigen, grossentheils weg; Aber einem Geometer welcher dergleichen Werkzeuge nicht besitzt, wird das bisherige immer nützlich seyn.

Es versteht sich, daß die solchergestalt entdeckten Fehler eines Winkelmessers bey der Ausmessung eines Winkels jederzeit in Rechnung gebracht werden müssen, weswegen es gut ist, die entdeckten Fehler in eine Correctionstabelle zu ordnen.

Wie übrigens die gehörige Größe des Vernierbogens, und die Abtheilungen desselben geprüft werden können, davon werde ich weiter nichts beybringen, da einem jeden, der das bisherige wohl verstanden hat, und auszuüben weiß, leicht Mittel einfallen werden, die bereits berichtigten Theilpunkte des Randes ferner zur Berichtigung der Vernierabtheilungen zu gebrauchen.

Ob die Indices der beyden Vernierabtheilungen in einer einzigen geraden Linie liegen, die durch des Werkzeugs Mittelpunkt gehet, davon kann man sich versichern, wenn man die Indices an solche Theilstriche der beyden Abtheilungen des Randes bringt, die vermöge der Natur dieser beyden Eintheilungen, in eine gerade Linie fallen müssen, dergleichen sind z. E. auf der 96 Theilung die Theilstriche.

0, 16, 32, 48, 64, 80, 96 u. s. w.

welche mit folgenden Theilstrichen der 90 Theilung

0, 15, 30, 45, 60, 75, 90 u. s. w.

in der Ordnung, wie sie hier unter einander stehen, in eine einzige gerade Linie fallen, vorausgesetzt, daß die ersten beyden 0, 0, in einer einzigen geraden Linie liegen; bringt man also den Index des V. der 90 Theilung nach der Ordnung an die Theilstriche 0, 15, 30, u. s. w., so wird der Index des V. der 96 Theilung genau an die Theilstriche 0, 16, 32 u. s. w.

der 96 Theilung passen müssen, wenn die Indices in einer geraden Linie liegen, und übrigens, wie dabey zum vorausgesetzt wird, die oberwähnten Theilstriche des Randes an sich nicht fehlerhaft sind, welches, wo nicht bey allen, doch wenigstens bey den meisten, immer angenommen werden darf.

Wie man untersuchen könne, ob ein Winkelmesser excentrisch sey.

§. 169. I. Um diese Untersuchung anzustellen, ist wohl die erste Probe, daß man nachsieht, ob der Bogen, der die Vernierplatte begränzt, von dem Bogen des eingetheilten Randes immer gleich großen Abstand habe, mithin bey Umdrehung der Alhidadenregel, dem Bogen des Randes vollkommen parallel bleibe, oder nicht. Den Abstand zwischen dem Vernierbogen, und dem Umkreis des Randes kann man sehr genau mit einem Haarzirkel fassen, und demnächst gar leicht prüfen, ob dieser Abstand in verschiedenen Lagen des Vernierbogens durch den ganzen Umkreis des Winkelmessers, sich immer gleich verbleibt.

Geschiehet dieses, so wird sich die Alhidadenregel um den wahren Mittelpunkt des Randes drehen. —

II. Im Gegentheile aber muß man durch Versuche ausmachen, an welchen Stellen des Ran-

Randes der erwähnte Abstand am größten oder kleinsten ist; dieß giebt Mittel, die Größen c, α (§. 96.) ausfindig zu machen, mithin die bey einem excentrischen Werkzeuge jedesmal vorzunehmende Correction zu bestimmen. Man sehe hierüber Bohnenbergers Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung, Göttingen 1795. §. 32. Ich will mich aber bey dieser Untersuchung nicht länger aufhalten, weil ich dem Mechanico die Geschicklichkeit zutrauen kann, die Bewegung der Alhidadenregel um den wahren Mittelpunkt zu veranstalten.

III. Wenn ein Winkelmesser aus einem ganzen Kreise bestehet, und die Alhidadenregel desselben mit zwey Vernieren versehen ist, so daß man die Größe eines Winkels an zwey um einen Durchmesser des Werkzeugs von einander entfernten Stellen des Randes, durch jenen doppelten Vernier bestimmen kann, so lehrt Herr Zach im III. Hefte des Hindenburgischen Archivs der reinen und angewandten Mathematik, wie man durch einen solchen Winkelmesser auch wenn er excentrisch wäre, nicht allein die wahre Größe des auszumessenden Winkels, sondern auch durch einige Beobachtungen diejenigen Größen bestimmen könne, aus denen man nachher die von der Excentricität herrührende Correction durch Hülfe eines berechneten Täfelchens finden kann.

IV. Wenn man ein Werkzeug selbst theilen will, so muß man vorher aus der Platte des einzutheilenden Winkelmessers das runde Loch O (Fig. XIX.) bohren lassen, in welches der konische Zapfen (§. 99. 14.) kömmt, um den sich die Alhidadenregel drehet. — Nun lässet man ein eben so großes rundes Stück Messing R, in gleicher Dicke mit der Platte des Winkelmessers drehen, dergestalt, daß R genau die Oeffnung O ausfüllt, bestimmt hierauf durch einen feinen Punkt r genau den Mittelpunkt auf der Scheibe R, welches nicht schwer seyn wird. Wenn man nun den Umkreis auf die Platte des Winkelmessers reissen will, so befestigt man dieselbe durch ein paar Handschrauben, auf einen Tisch, oder sonst eine ebene Fläche, füllt alsdann die Oeffnung O mit der Scheibe R aus, und reisset demnächst aus dem Mittelpunkt r, den Umkreis a b c h m a des einzutheilenden Winkelmessers.

V. Auf diese Art kann man überzeugt seyn, daß der Mittelpunkt des eingetheilten Randes auch zugleich der Umdrehungspunkt der Alhidadenregel seyn werde. Dieses Verfahren ist offenbar nothwendig weil es sonst kaum möglich seyn wird, eine genaue centrische Bewegung der Alhidadenregel zu erhalten; Wollte man das Zapfenloch O erst nachher bohren, wenn der Umkreis des Randes schon gerissen, und getheilt ist, so wird man es nie ohne große

Mühe

Mühe und Sorgfalt dahin bringen, daß der Mittelpunkt dieses Lochs, mit dem Mittelpunkte des eingetheilten Randes einerley sey.

Diese nöthige Bemerkung muß dem Verfahren des 89. §es noch beygefügt werden.

VI. Die Mechaniker pflegen, ehe sie einen Rand abtheilen, bereits alle Vorrichtungen zur Bewegung der Alhidadenregel um des Werkzeugs Mittelpunkt, fertig zu haben. Um nun den Umkreis zur Eintheilung zu reissen, führen sie die Alhidadenregel um den Zapfen, um welchen sie sich dreht, und mit ihr zugleich einen Stift, von gehärteten Stahl, der durch eine leicht zu erdenkende Vorrichtung an derjenigen Stelle der Alhidadenregel befestigt wird, wo der Bogen in den Umfang gerissen werden soll. Solchergestalt ist man ebenfalls sicher, daß der gerissene Bogen genau den Umdrehungspunkt der Alhidadenregel zu seinem Mittelpunkt haben wird. Man fängt hierauf die Eintheilung damit an, daß man durch Versuche erstlich den Umfang in 3, 4 oder 6 gleiche Theile theilet, woraus sich denn die übrigen Theile weiter ergeben.

Uebrigens ist die Untersuchung, ob ein Winkelmesser genau centrisch sey, nothwendig vorher vorzunehmen, ehe man an die Prüfung der Abtheilungen des Randes schreitet, denn

man

man wird leicht begreifen, daß bey einigen Prüfungsmethoden die centrische Bewegung der Alhidadenregel schlechterdings zum voraus gesetzt wird, oder daß man wenigstens die aus der Excentricität herrührenden Fehler kenne, und sie nicht den Abtheilungen des Randes schuld giebt.

XIV. Kapitel.

Noch einige Mittel, besonders kleine Winkel auf dem Felde zu messen.

§. 170.

Wir haben zwar im vorhergehenden bereits einige Mittel kennen gelernt, kleinere Winkel zu bestimmen, als solche, welche die Abtheilungen des Randes unmittelbar angeben, z. B. Transversallinien, Vernier, Micrometerschraube, die Fischerische Micrometerscheibe u. d. gl. Man bedient sich aber sehr oft einer Art von Micrometern, die man in die Fernröhre der winkelmessenden Werkzeuge anbringt, dergleichen z. B. von dem Mechanikus Brander u. a. verfertigt worden sind. Es ist daher nöthig, von denselben zu reden, und gesetzt, daß man ein solches Micrometer auch gerade nicht in das Fernrohr eines geometrischen Werkzeugs anbringen wollte, weil vielleicht dergleichen Fernrohr zu klein ist, so kann doch ein solches Micrometer in einem größern Fernrohre, ohne Verbindung mit einem Winkelmesser, oft sehr vortheilhaft bey Feldmesserarbeiten gebraucht werden, welches mich hinlänglich berechtigt, hier die allgemeinsten Begriffe davon beyzubringen.

Vorher muß ich aber einige dioptrische Lehnsätze, davon man die Beweise in Kästners angew. Mathem. findet, vorausschicken.

Dioptrische Lehnsätze.

§. 171. I. Wenn man auf ein auf beyden Seiten erhaben geschliffenes Glas AB (Fig. XXII.), (dessen kugelförmige Flächen durch ein paar Kreisbogen abgebildet werden; Kästn. Dioptr. 17.) Strahlen, von verschiedenen Punkten P, Q, eines entfernten Gegenstandes fallen läßt, so werden alle Strahlen, die z. E. von P auf das Glas fallen, nach geschehener Brechung sich hinter dem Glase in einem bestimmten Punkte p wieder vereinigen, und daselbst ein Bild von dem Punkte P darstellen; Auf eben die Art kommen alle Strahlen von Q, hinter dem Glase bey q zusammen, und geben daselbst des Punktes Q

Bild;

Bild; Und so hat überhaupt ein jeder Punkt des Gegenstandes PQ, hinter dem Glase AB, sein eigenes Bild; dergestalt, daß aus allen Bildern der einzeln Punkte des Gegenstandes PQ, hinter dem Glase das ganze Bild desselben pq zusammengesetzt wird. Man kann sich hievon durch eine leichte Erfahrung versichern, wenn man in einem Zimmer, hinter das Glas AB, in gehöriger Entfernung ein Blatt Papier hält; so werden sich auf demselben die Gegenstände, die von aussen Strahlen auf das Glas schicken, vollkommen deutlich darstellen. Wie weit man das Blatt Papier von dem Glase weghalten müsse, damit die Gegenstände sich deutlich darauf abbilden, kann man durch Versuche finden. — Auf diesen Erscheinungen gründet sich die sogenannte Kamera obscura.

Diese Sätze gelten auch vom Planconverglase und vom Meniscus. (Kästn. Diopt. 17. 22 u. f.)

Man wird zugleich bemerken, daß sich das Bild eines Gegenstandes, auf dem Papiere in umgekehrter Lage darstellet, dergestalt, daß dasjenige, was an dem Gegenstande zu oberst ist, in dem Bilde unten erscheinet, und eben so, die rechte Seite des Bildes, der linken des Objects zugehöret.

II. Es läßt sich leicht beweisen, daß, wenn P ein gewisser Punkt des Gegenstandes ist, dessen Bild p ohne merklichen Fehler in einer geraden Linie Pcp liege, die man durch P und des Glases Mitte c ziehet. Und eben so, daß q (I) in der geraden Linie Qcq liege, daß ferner auch die Bilder aller Punkte eines Gegenstandes PQ, ohne Irrthum ohngefähr in gleicher Weite hinter dem Glase AB liegen.

III. Die Linie rcR, die auf dem Glase durch c senkrecht stehet, heißt die Axe des Glases, und wenn der Punkt R des Objects in der Axe des Glases liegt, so wird auch dessen Bild r sich in der Axe des Glases befinden.

IV. Man wird ferner die Bemerkung machen, daß seines von dem Glase entferntern Gegenstandes Bild, näher hinter das Glas fällt, als das Bild eines nahen Gegenstandes, daß z. E. das Bild der Sonne nicht so weit hinter dem Glase liege, als das Bild eines von dem Glase nur etwa um 30 Fuß entlegenen Objects.

V. Das Bild eines von dem Glase unendlich weit entfernten Punktes, wird am nächsten hinter dem Glase liegen. Die Stelle dieses Bildes heißt der Brennpunkt des Gla=

Glases, und die Weite desselben vom Glase, die Brennweite.

Die Bilder der Sonne oder Fixsterne, die man ohne Irrthum als unendlich weit entlegene Objecte ansehen kann, würden also hinter dem Glase den Brennpunkt, und folglich auch die Brennweite angeben, die man daher durch Versuche finden und messen kann.

Man kann aber auch die Brennweite berechnen, wenn man die Halbmesser der Kugelflächen weiß, die das Glas auf beyden Seiten begränzen. Daher jedes Glas seine eigene Brennweite hat.

Eine Formel dazu findet sich Kästners Dioptrik (22). Die Dicke des Glases ist dabey nicht in Betrachtung gezogen, welches auch meistens beym Gebrauche der Gläser zu Fernröhren verstattet ist.

VI. Wenn die Brennweite eines Glases durch Versuche, oder sonst als bekannt angenommen wird, so kann man daraus die Weite cr des Bildes pq eines vor dem Glase in endlicher Weite Rc liegenden Objects PQ durch Rechnung finden. Man nenne die Brennweite eines Glases = l, die Entfernung des Objects von dem Glase = b, und dessen Bildes Weite hinter dem Glase = f, so wird seyn

$$f = \frac{bl}{b-l} \text{ (Kästn. Dioptr. 29.).}$$

Er.

Ex. Gesetzt, es sey die Brennweite eines Glases $l = 8$ Zoll; $b = 5$ Fuß $= 50$ Zoll, so ist $f = 9\frac{1}{2}$ Zoll.

Es würde also das Bild eines um 50 Zoll entfernten Gegenstandes, $1\frac{1}{2}$ Zoll weiter vom Glase liegen, als der Brennpunkt, oder der Ort des Bildes eines unendlich weit wegliegenden Objects.

Für $l = 8$ Zoll; $b = 1000$ Zoll, würde $f = 8,06$ Zoll. Das Bild eines um 1000 Zoll vom Glase entfernten Gegenstandes würde also bey einer Brennweite von 8 Zollen nur um 0,06 eines Zolles weiter vom Glase liegen, als der Brennpunkt. — Da nun dieser Unterschied sehr geringe ist, so erhellet, daß man ohne merklichen Fehler, den Brennpunkt selbst, als den Ort der Bilder von solchen Gegenständen, die nicht einmahl unendlich weit, sondern nur in mäßig großer Entfernung vor dem Glase liegen, ansehen könne.

VII. Wenn der Gegenstand PQ auf der Axe rcR senkrecht stehet, so wird auch dessen Bild pq, auf der Axe senkrecht stehen.

VIII. Wenn man sich bey c ein Auge vorstellet, so siehet es einen Gegenstand, wie PR, unter dem Winkel PcR. Das wäre also die scheinbare Größe eines Gegenstandes, den

man

man mit bloßem Auge aus dem Punkte c betrachtete.

Wenn nun PR auf cR senkrecht angenommen wird, so kann man in dem rechtwinklichten Drenecke pcr (VII) aus der gegebenen scheinbaren Größe pcR = pcr = α, und aus der Weite cr des Bildes, hinter dem Glase, die Größe rp des Bildes finden. Denn wenn man rc = f, rp = h nennet, so ist für den Sinus totus = 1

rc : rp = 1 : tang rcp also
h = f . tang α.

Hieraus folgt, daß die Bilder gleich weit entlegener Objecte, sich wie die Tangenten der scheinbaren Größen verhalten. Sind aber die scheinbaren Größen einerley, so verhalten sich die Bilder wie f, oder wie ihre Weite hinter dem Glase. Da nun f abnimmt, wenn des Objects Weite vor dem Glase wächst (VI), so erhellet, daß das Bild eines entferntern Gegenstandes kleiner ist, als eines nähern, von eben der scheinbaren Größe.

IX. Da die Bilder auch nur mäßig entlegener Objecte beynahe in den Brennpunkt fallen (VI), so kann man überhaupt f=1 setzen, und also annehmen, daß, wenn eines Glases Brennweite =1 ist, und die scheinbare Größe eines vom Glase mäßig weit wegliegenden Ob-

jects

jects = α, die Größe des Bildes hinter dem Glase seyn werde = l . tang α.

X. Wenn nun überdem, wie gewöhnlich, der Winkel PcR, oder die scheinbare Größe α nicht sehr groß ist, folglich ohne Fehler tang α = α gesetzt werden kann, so wird seyn die Größe des Bildes = l . α.

In den folgenden Betrachtungen werde ich nun immer zum voraus setzen, daß das Object PR, so weit vom Glase liege, daß man ohne Fehler die Weite rc des Bildes hinter dem Glase, der Brennweite gleich setzen kann.

XI. Es stelle nun LMAB die Röhre eines nach PR gerichteten astronomischen Fernrohres vor. AB dessen Objectiv, und mn das Ocular. Beyde Gläser übrigens so gestellt, daß ihre Axen in eine gerade Linie, und des Oculars Brennpunkt in des Objectivs Brennpunkt fallen. (Kästn. Dioptrik 89.) So wird ein Auge O vor dem Ocularglase mn, das Bild qp eines Objects QP, in dem Fernrohre sehen, und zwar 1) verkehrt, 2) vergrößert, so daß dem Auge O, der Gegenstand QP, in dem Fernrohre weit näher und größer zu seyn scheinet, als er demselben ohne Fernrohr erscheinen würde.

Die Vergrößerung hängt nun von dem Verhältnisse der Brennweite des Objectivs zur Brenn=

Brennweite des Oculars ab, und es läßt sich leicht darthun, daß eines Fernrohres Vergrößerung herauskomme, wenn man die Brennweite des Objectivs mit der Brennweite des Oculars dividirt. Nennet man also erstere $=1$, letztere $=\lambda$, so ist des Fernrohres Vergrößerung $= \frac{1}{\lambda}$.

Siehet daher das bloße Auge bey c den Gegenstand QP, unter der scheinbaren Größe φ, so siehet es diesen Gegenstand durchs Fernrohr unter dem Winkel $\frac{1}{\lambda} \cdot \varphi = W$.

Wäre eben so eines andern Gegenstandes QS, den man mit bloßem Auge betrachtete, scheinbare Größe $= \psi$, so würde dessen scheinbare Größe im Fernrohre $= \frac{1}{\lambda} \psi = w$.

$$\text{Also } W : w = \frac{1}{\lambda} \cdot \varphi : \frac{1}{\lambda} \psi = \varphi : \psi.$$

D. h. die scheinbaren Größen der Gegenstände durchs Fernrohr betrachtet, verhalten sich wie derselben scheinbare Größen ohne Fernrohr; So vielmahl folglich dem bloßen Auge ein Object größer aussiehet, als das andere, um so vielmahl erscheinet auch im Fernrohre das erste Object größer, als das andere, vorausgesetzt, daß beyde Objecte weit genug vom Fernrohre weg-

wegliegen, und folglich die Stellen ihrer Bilder, auch ohne merklichen Irrthum, mit dem Brennpunkte in gleicher Weite hinter dem Glase angenommen werden können.

XII. Es seyen QS, PQ ein paar Objecte vor dem Fernrohre, und ihre scheinbaren Größen $QcS = \psi$; $QcP = \varphi$;

qs, qp ihre Bilder, Rcr des Fernrohrs Axe, senkrecht auf PQ; l des Objectivglases Brennweite; so ist aus (X)

$$pr = l \,.\, PcR;\; qr = l \,.\, QcR;\; rs = l\, ScR$$

Daher

$$pq = pr + rq = l \,.\, (PcR + QcR)$$

oder

$$pq = l \,.\, PcQ = l \,.\, \varphi.$$

Auf eben die Art

$$qs = qr + rs = l \,.\, (QcR + ScR) \text{ oder}$$
$$qs = l \,.\, QcS = l \,.\, \psi$$

daher $pq : qs = l \,.\, \varphi : l \,.\, \psi = \varphi : \psi$.

D. h. die Bilder $pq : qs$, zweier Objecte PQ, QS, verhalten sich wie dieser Objecte scheinbare Größen, oder wie die Winkel QcP, QcS am Objectivglase.

XIII. Bisher war PQ auf cR senkrecht angenommen. Man nehme an, PV sey ein auf der verlängerten Axe des Fernrohres schief stehendes Object, p das Bild von P, und q das Bild von Q, so wird auch q das Bild von

V

V seyn, wenn c, Q, V in gerader Linie liegen; Denn obgleich V etwas weiter vom Fernrohre liegt als Q, mithin das Bild von V etwas näher hinter dem Glase AB liegen muß, als das Bild von Q, so kann man doch den Unterschied völlig aus der Acht lassen, so bald Q, V, in beträchtlicher Weite vor dem Glase AB liegen (IX), mithin ohne den merklichsten Irrthum annehmen, daß auch q das Bild von V, mithin pq auch das Bild von dem schiefstehenden Objecte PV sey, welches mit dem senkrechten PQ, gleiche scheinbare Größe PcQ = PcV hat.

Hieraus wird also allgemein erhellen, daß die Größe eines Bildes qp, bloß von dem Winkel, oder der scheinbaren Größe PcQ abhängt, das Object PQ mag nun auf der Axe des Fernrohres senkrecht stehen oder nicht.

XIV. Aus (X. XI.) folgt auch $W : w = pq : qs = \varphi : \psi$.

D. h. die Bilder pq, qs, durchs Ocularglas betrachtet, erscheinen dem Auge noch in dem Verhältnisse der scheinbaren Größen PcQ, QcS. Das Ocular ändert also in dem sichtbaren Verhältnisse der Bilder nichts, ob es gleich jedes Bild vergrößert darstellet.

Wie

Wie man die bisherigen Sätze zur Ausmessung kleiner Winkel auf dem Felde gebrauchen könne.

§. 172. I. Weil die Bilder pq, qs, zweyer Objecte sich wie die Winkel PcQ, QcS verhalten, so erhellet, daß, wenn man die Größe des Bildes pq weis, das einem gegebenen Winkel PcQ $= \varphi$ zukömmt, man aus der gegebenen Größe eines andern Bildes qs, den zugehörigen Winkel QcS $= \psi$, durch folgende Proportion $qp : qs = \varphi : \psi$, woraus denn

$\psi = \frac{qs}{qp} \cdot \varphi$ folgt, berechnen könne.

Gesetzt, man wüßte, daß, wenn die scheinbare Größe $\varphi = 60$ Min. wäre, das zugehörige Bild qp z. E. 50 Theile eines gewissen Maaßstabes hielte; so würde einem andern Bilde qs, das z. E. 12 Theile dieses Maaßstabes faßte, eine scheinbare Größe oder ein

Winkel ψ von $\frac{12}{50} \cdot 60$ oder von $14\frac{2}{5}$ Minuten zugehören.

II. Es erhellet also, daß es nur darauf ankömmt, an der Stelle im Fernrohre, wo sich die Objecte abbilden, eine Vorrichtung zu treffen, wodurch sich bequem das Verhältniß der Bilder wie qs : qp bestimmen läßt, und dann durch einen Versuch ausfindig zu machen, wie groß das Bild sey, dem eine gegebene scheinbare Größe oder Winkel zugehört.

Diese Absicht zu erreichen, hat man sich schon seit langer Zeit der Schrauben bedient.

Wenn man sich vorstellet, daß in der Gegend, wo des Ocularglases Brennpunkt liegt, ein paar Schrauben mit feinen Gängen, durch die Röhre des Ocularglases gehen. die man beyde ins Feld des Fernrohres weiter herein und heraus schrauben, und einander selbst bis zum Zusammenstoßen nähern kann, so erhellet folgendes. — Wenn die Röhre des Ocularglases in die Röhre des Objectivs so weit hinein geschoben worden, daß des Oculars Brennpunkt, und folglich auch die erwähnten Schrauben, an die Stelle hinkommen, wo sich im Fernrohre die Gegenstände abbilden, so wird man zwischen beyde Schrauben-Enden das Bild eines Gegenstandes fassen, und wenn man demnächst beyde Schrauben einander bis zum Zusammenstoßen nähert, die Menge von Umdrehungen zählen können, die auf des Gegenstandes Bild gehen. Sind nun die Schraubengänge von gleicher Weite, so werden sich die Größen zweyer Bilder verhalten, wie die Mengen von Schrauben-Umdrehungen, die auf sie gehen, und so wird das Verhältniß zweyer Bilder dadurch bekannt seyn.

Die

Die Vorrichtung selbst bestehet in einem messingenen Ringe N (Fig. XXIII.), der in der Gegend des Brennpunkts vom Oculare, um die Röhre des Oculars befestigt wird; Dieser Ring ist an beyden Enden eines Durchmessers durchbohrt, und daselbst mit Schraubenmüttern versehen, die den Schrauben fh, lk, zugehören. — Damit man nun diese Schrauben in das Feld des Fernrohres herein- und herausschrauben könne, so hat die Röhre des Oculars bey a, b, (Fig. XXII.) in der Gegend des Brennpunkts ein paar Oeffnungen, durch welche alsdenn die Schrauben fh, lk gehen, nachdem der Ring um das Fernrohr gelegt worden. — Uebrigens müssen die Schraubengänge sowohl auf fh als lk genau gearbeitet, und so viel als möglich, gleiche Weite haben, damit man die Umdrehungen der einen Schraube, zu der andern ihren rechnen könne, als ob sie alle an einer Schraube wären.

E, e, sind ein paar Scheiben, mit Abtheilungen versehen, damit man durch Hülfe der Weiser f, l, die an den Köpfen der Schrauben fh, lk, befestigt sind, Theile von Umdrehungen zählen könne.

III. Gesetzt nun, nachdem die bisherige Vorrichtung gehörig um das Fernrohr gelegt worden, werde das Object PQ durch dieses Fernrohr betrachtet. pq sey das Bild von

PQ, und die Schrauben in der Gegend dieses Bildes. Man schraube sie so weit ins Feld des Fernrohrs, daß zwischen ihren beyden Enden das Bild qp des Objects QP erscheinet; Damit man nun finde, wie viel Umdrehungen auf die Größe des Bildes qp gehen, so schraube man beyde Schrauben fq, lp weiter herein, bis sie zusammenstoßen. Sind nun zu dieser Absicht bey dem Bilde qp z. E. 24 Umdrehungen, und auf eben die Art bey einem andern Bilde qs, 20 Umdrehungen nöthig, so ist das Verhältniß der beyden Bilder qp : qs = 24 : 20.

In eben dem Verhältnisse stehen nun auch die diesen Bildern zugehörigen scheinbaren Größen PcQ, ScQ.

IV. Wüßte man nun z. E. die scheinbare Größe, die einer Umdrehung der Schrauben zugehörte, so hätte man demnächst gar leicht die scheinbare Größe eines Objects, dessen Bilde eine gewisse Menge von Umdrehungen zukäme.

Um nun den einer Umdrehung zugehörigen Winkel zu finden, giebt es verschiedene Mittel.

Den Werth einer Umdrehung aus der Brennweite des Objectivs und der Weite der Schraubengänge zu finden.

§. 173. I. Gesetzt, die Schraube fh oder lk (Fig. XXIII.) halte in der Länge eines Zolles, oder einer andern Länge, die ich $= a$ nennen will, eine gewisse Anzahl von Schraubengängen, die n heissen mag, so ist die Weite eines Schraubenganges $= \frac{a}{n}$, vorausgesetzt, daß alle Gänge gleich weit sind.

II. Es sey nun Fig. XXIV. vw, die Weite eines Schraubenganges, und bey w des Objectivs Brennpunkt; c das Mittel des Objectivs AB, so gehöret diesem Schraubengange vw, oder einem Bilde, dessen Größe der Weite eines Schraubenganges gleich wäre, eine scheinbare Größe $vcw = kcx$ zu.

Heißt also die Brennweite des Objectivs $= l$, der kleine Winkel $vcw = \alpha$; so ist (§. 171. X.) $vw = l \,.\, \alpha$.

Aber auch $vw = \frac{a}{n}$ (I), daher $\frac{a}{n} = l \,.\, \alpha$; folglich $\alpha = \frac{a}{n \,.\, l}$; woraus man also

die

die scheinbare Größe α findet, die der Weite eines Schraubenganges, oder einer Umdrehung der Schraube zugehöret.

Dabey ist aber zu erinnern, daß man den Werth $\frac{a}{n \cdot l}$ noch mit der Zahl 206264 multipliciren müsse, um α in Secunden zu finden; Also

$$a = \frac{a}{n \cdot l} \cdot 206264 \text{ Secunden.}$$

Ex. Gesetzt, es sey die Brennweite $l = 78,66$ reinl. Zolle, die Schraube halte in einer Länge $= a = 1,69$ reinl. Zollen, $n = 45,5$ Gänge so ist, wenn ich $206264 = e$ nenne

$$\begin{array}{ll} \log a = 0,2278867; & \log n = 1,6580114 \\ \log e = 5,3144251; & \log l = 1,8957554 \\ \hline \log a.e = 5,5423118; & \log n.l = 3,5537668 \\ \log n.l = 3,5537668 & \\ \hline \log \alpha = 1,9885450; & \text{Daher } \alpha = 97'', 39 \end{array}$$

mithin betrüge ein Schraubengang, oder der Werth einer Umdrehung $1' \cdot 37'', 39$.

Dieß Exempel befindet sich in Kästners Astron. Abhandl. II. Samml. S. 313. und gehört zu einem Fernrohre, mit einem dergleichen Schraubenmicrometer, welches der Opt. Baumann verfertigt hat.

Den

Den Werth einer Umdrehung aus der scheinbaren Größe eines Gegenstandes PQ Fig. XXII. zu finden, dessen Entfernung cR = b vom Objective, bekannt ist.

§. 174. I. Es sey PQ ein auf dem Felde vertical aufgerichteter Stab, in ziemlich beträchtlicher Weite von dem Objective; die Axe des Fernrohrs sey nach dem Augenmaaße horizontal nach PQ gerichtet, dergestalt, daß man ohne Irrthum das Dreyeck PcQ als gleichschenklicht ansehen, und Pc = Qc = Rc = b setzen kann. Der Stab PQ sey von P nach Q in Zolle u. s. w. eingetheilet; pq im Fernrohre das Bild von PQ, und die Schrauben so weit hereingeschroben, daß das Bild pq, zwischen beyden Schrauben-Enden enthalten ist.

Man untersuche nun, wie viel Schraubengänge diesem Bilde qp zugehören, welches dadurch geschiehet, daß man die Schrauben-Umdrehungen zählt, die man nöthig hat, beyde Schrauben-Enden einander bis zum Zusammenstoßen zu nähern. Ich will also setzen, dem Bilde pq gehöre auf dem Stabe eine Größe PQ von m Zollen zu, und man habe n Umdrehungen gezählet, beyde Schrauben-Enden einander um die Entfernung pq zu nähern. Weil nun der Winkel PcQ immer nur klein ist, so kann man ohne merklichen Fehler PcQ, oder die scheinbare Größe

$$\phi = \frac{PQ}{Rc} = \frac{m}{b}$$

se-

setzen (die Weite $Rc = b$ nemlich auch in Zollen ausdrückt). Aber dem Bilde pq, folglich der scheinbaren Größe pcq, oder PcQ gehören n Umdrehungen der Schraube zu. — Also ist der Werth einer Umdrehung $= \frac{\varphi}{n}$ oder $= \frac{m}{b \cdot n}$ 206264 Secunden, nemlich an der Stelle, wo des Gegenstandes PQ Bild pq liegt, und wo sich in dem Fernrohre auch die Schrauben befinden müssen.

II. Da aber der Ort des Bildes pq nicht immer genau in eine und dieselbe Stelle des Fernrohres fällt, sondern weiter oder näher beym Objectivglase liegt, je nachdem PQ näher oder entfernter ist (§. 171. IV.), folglich auch für einerley scheinbare Größe, die Länge des Bildes desto größer oder kleiner ist, je weiter oder näher es hinter das Objectiv fällt, so erhellet, daß auch der in (I) gefundene Werth einer Umdrehung, nicht, ohne einigen Fehler zu begehen, für alle möglichen Bilder gelten kann, sondern nur für solche, die zu Objecten gehören, die in der Weite b vor dem Objective liegen. — Um aber doch alle nöthige Genauigkeit zu beobachten, und den nach (I) gefundenen Werth einer Umdrehung auch für Bilder gebrauchen zu können, die in jeder andern Weite hinter das Objectivglas fallen, so muß ich noch folgendes kürzlich beybringen.

III.

III. Gesetzt (Fig. XXV.), das Bild eines gewissen Gegenstandes, den ich M nennen will, liege in der Weite cw = λ, und das Bild eines nähern Gegenstandes N, in der Weite cz = L hinter dem Objectivglase.

Weil man nun, um die Objecte M, N, jedesmahl vollkommen deutlich in dem Fernrohre zu sehen, die Röhre des Ocularglases so weit in die Röhre des Objectivs schieben muß, bis des Oculars Brennpunkt an die Stellen w, z, hinfällt, wo der Objecte Bilder sich befinden, so erhellet, daß auch die Schrauben des Micrometers sich jedesmahl an den Stellen der Bilder w, z, befinden werden, indem sich die Schrauben im Brennpunkte des Oculars befinden, mithin sich mit die Röhre des Oculars zugleich verschieben.

Man gedenke sich also bey w, z, die Weite eines Schraubenganges wv = zy; so gehöret der wv eine scheinbare Größe vcw, der yz aber eine scheinbare Größe ycz zu. Da nun wv = zy aber cz > cw, so wird auch der Winkel vcw größer seyn als zcy, und zwar ohne merklichen Irrthum in dem Verhältnisse cz : cw oder L : λ. Woraus also erhellet, daß der Werth eines Schraubenganges, oder einer Umdrehung, d. i. die dem Schraubeng. zugehörige scheinbare Größe ycz, oder vcw, von dem Orte der Bilder z, w, hinter dem Objective abhängt. Be-

Benennet man also die scheinbare Größe vcw, oder den Werth eines Schraubenganges vw, der in der Weite $cw = \lambda$ vom Objective absteher, mit dem Buchstaben γ, und den Werth ycz eines Schraubenganges yz, der sich an der Stelle eines um $cz = L$ vom Objective entfernten Bildes z befindet, mit dem Buchstaben δ, so ist $\gamma : \delta = L : \lambda$ daher

$$\delta = \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma.$$

III. Gesetzt also, bey dem Versuche (I) habe das Bild qp (Fig. XXII.) des Stabes PQ, in der Weite $cr = \lambda$ hinter dem Objective gelegen, und der Werth eines an der Stelle dieses Bildes befindlichen Schraubenganges sey $\gamma = \frac{m \cdot 206264}{b \cdot n}$ gefunden worden (1), so wird der Werth eines Schraubenganges an dem Orte eines um den Abstand L vom Objective entfernten Bildes, $= \frac{\lambda}{L} \cdot \gamma$ seyn; woraus man also gar leicht, wenn man nur jedesmahl die Weite L des Bildes vom Objective weiß, an der Stelle dieses Bildes den Werth einer, und folglich auch einer jeden Zahl von Umdrehungen finden kann, vorausgesetzt, daß man durch einen Versuch, wie in (1), ein für allemahl den Werth γ eines Schrauben-

gan-

ganges weiß, der in der Weite $= \lambda$ vom Objective liegt.

IV. Von Gegenständen, die sehr weit wegliegen, fallen die Bilder in den Brennpunkt des Objectivs, für die ist also $L = l$, wenn l die Brennweite bedeutet. — Also ist der Werth eines Schraubenganges an dem Orte der Bilder sehr weit entlegener Gegenstände $= \frac{\lambda}{l} \cdot \gamma$, den ich $= r$ nennen will.

Bey dem Versuche (I) habe nun das Object, oder der Stab PQ, b Zolle weit, vor dem Objectivglase gestanden, so ist $\lambda = \frac{bl}{b-l}$ (§. 171. VI.) also $r = \frac{b}{b-l} \cdot \gamma = \frac{m \cdot 206264}{n \cdot (b-l)}$ Secunden (III). Aus dieser Gleichung findet man also, vermittelst eines Gegenstandes, der in einer mäßigen Weite b vor dem Objective ist, den Werth r eines Schraubenganges für Bilder sehr weit entlegener Gegenstände, für Bilder also, die in den Brennpunkt fallen.

Ex. Bey dem Fernrohr §. 173. hatte Hr. H. Kästner (Astron. Abh. II. Samml. p. 328.) gefunden, daß auf einem verticalen um 15921,25 Leipziger Zoll von dem Objectivglase entfernten Stabe, eine Länge PQ von 110,6 Leipziger Zollen, ein Bild machte, dem in dem

Fern=

Fernrohre $14 + \frac{9,5}{12}$ Umdrehungen der Schraube zugehörten. Also ist bey diesem Versuche $m = 110,6$; $n = 14 + \frac{9,5}{12} = \frac{88,75}{6}$; $b = 15921,25$; $l = 78,66$ reinl. Zoll $= 87$ Leipz. Zoll; folglich $b - l = 15834,25$ Leipz. Zoll, mithin

$$r = \frac{6 \cdot 110,6 \cdot 206264}{88,75 \cdot 15834,25}$$

dieß giebt nach gehöriger Rechnung

den Logarithmen des Zählers $=$	$8,1363485$
des Nenners $=$	$6,1477658$
demnach $\log r =$	$1,9885827$

mithin $r = 97'',4 = 1' \cdot 37'',4$, welches sehr genau mit dem Versuche des 173. §. übereinstimmt.

V. Man könnte nun aus dem Werthe einer Umdrehung für Bilder, die in des Fernrohrs Brennpunkt fallen, gar leicht den Werth jeder Menge von Umdrehungen ein für allemahl berechnen, und darüber eine Tafel verfertigen; Wenn man nun, vermittelst des Fernrohrs, scheinbare Größen sehr weit entlegener Gegenstände messen wollte, so dürfte man nur, durch Verschiebung der Röhre des Oculars, die Schrauben in den Brennpunkt des Objectivs bringen, und dann zusehen, wie viel Umdrehungen dem Bilde des sehr weit entlegenen Ob:

Objects zukämen. — Die gefundene Menge von Umdrehungen in der Tafel aufgesucht, gäbe sogleich, ohne weitere Rechnung, die zugehörige scheinbare Größe.

Es versteht sich, daß man nicht nöthig hat, mehrere Vielfache einer Umdrehung zu berechnen, als erfordert werden, den größten Winkel zu erhalten, den man etwa durchs Fernrohr übersehen kann.

VI. Da diese Tafel nur die scheinbaren Größen der Bilder giebt, die in des Fernrohrs Brennpunkt fallen, also in der Weite = 1 hinter dem Objective liegen, so hat man noch eine besondere Rechnung nöthig, wenn nahe liegender Gegenstände, deren Bilder also nicht in den Brennpunkt fallen, scheinbare Größen gemessen werden sollen.

Wenn der Werth eines Schraubenganges für ein Bild im Brennpunkte, r heißt, so ist der Werth w eines Schraubenganges, an dem Orte eines Bildes, das die Entfernung L vom Objective hat $= \frac{1}{L} r$. Wenn also das Bild eines nahe vor dem Fernrohr liegenden Objects, die Weite L hinter dem Objective hat, und μ Umdrehungen auf dasselbe gehen, so ist ihr Werth, oder die zugehörige scheinbare

Grö=

Größe $= \mu \cdot w = \frac{1}{L} \cdot \mu \cdot r.$

D. h. Man hat nur nöthig, den Werth dieser gefundenen Menge von Umdrehungen in der Tafel (V) aufzusuchen, und denselben mit dem Bruche $\frac{1}{L}$ zu multipliciren, um die scheinbare Größe des Objects zu finden, dessen Bild nicht in den Brennpunkt fällt.

VII. Eine Schwürigkeit scheint es zu seyn, in jedem Falle ein leichtes Mittel zu haben, den Ort des Bildes, also die Weite L zu finden. — Dieses Mittel bestehet nun darinnen:

Man untersuche und bestimme ein für allemahl durch ein an die Röhre des Fernrohrs (Fig. XXII.) bey h gemachtes Zeichen, wie weit man die Röhre des Oculars in die Röhre des Objectivs schieben muß, um sehr entfernte Gegenstände (z. E. die Sonne) vollkommen deutlich und begränzt zu sehen. In diesem Falle fällt das Bild in den Brennpunkt des Objectivs, und die Schrauben §. 173. I. kommen durch die geschehene Verschiebung der Ocular-Röhre, gleichfalls an diese Stelle.

Da man nun bey dieser Stellung der Gläser, nahe Gegenstände nicht vollkommen deutlich sehen wird, sondern die Röhre des Oculars wei-

weiter herausschieben muss, so untersuche man, um wie viel die Röhre des Oculars weiter herausgeschoben werden muß, um ein nahes Object, z. E. PQ, dessen scheinbare Größe man messen wollte, vollkommen deutlich zu sehen. — Man darf also nur zusehen, wo sich bey i die Röhre des Oculars endigt, nachdem sie zureichend herausgezogen worden, und den Raum ih messen, so drückt ih aus, um wie viel das Bild eines nahen Gegenstandes weiter vom Objective fällt, als das Bild eines sehr weit entfernten. Nennt man also $ih = x$, die Brennweite des Objectivs $= l$, so ist $L = l + x$ also in (VI) $\mu . w = \frac{l}{l + x} . \mu . r.$

VIII. Ist das Object, dessen scheinbare Größe durch die Menge von Schrauben-Umdrehungen gemessen werden soll, nur einigermaaßen weit vom Fernrohre entfernt, so kann man ohne merklichen Fehler in (VI) $L = l$ also $\frac{l}{L} = 1$ setzen, folglich ohne weitere Multiplication die scheinbare Größe sogleich aus der Tafel (V) nehmen.

Eine

Eine andere Vorrichtung, die Größen der Bilder, oder vielmehr ihre zugehörigen scheinbaren Größen zu messen.

§. 175. I. Es sey Fig. XXVI. x v y z ein messingener Ring, oder eine Röhre, die ein eben geschliffenes Glas umfasset. Diese Röhre kann in die Röhre des Ocularglases geschroben werden, so daß die Ebene des Glases x v y z in den Brennpunkt des Oculars zu liegen kömmt, und übrigens auf der Axe des Fernrohrs senkrecht stehet.

Auf diesem eben geschliffenen Glase ist nun ziemlich nahe nebeneinander, eine ganze Reihe von sehr zarten Parallellinien gezogen, die von einer senkrechten v z durch den Mittelpunkt c geschnitten werden. — Die Entfernungen dieser Parallellinien müssen mit aller möglichen Vorsicht einander gleich seyn.

So erhellet, daß diese gleichweit von einander abstehenden Parallellinien, eben das mit geringerer Mühe leisten werden, was im vorhergehenden die Schraubengänge bewerkstelligten. Man wird nemlich, nachdem dieses Glas mit Parallellinien, durch gehörige Verschiebung der Ocularröhre, an den Ort gebracht worden, wo sich die entlegenen Objecte abbilden, durch die Menge der gleichen Theile, die ein solches Bild wie q p (Fig. XXII.) auf dem Glase x v y z ein=

einnimmt, die diesem Bilde zugehörige scheinbare Größe finden, vorausgesetzt, daß man weiß, wie viel Minuten und Secunden dem Abstande zweyer nächstaufeinander folgenden Parallellinien zugehören. Gesetzt, zwischen p, q fielen 20 gleiche Theile, und einem Theile auf dem Glase gehöre eine scheinbare Größe von 1′ zu, so würde dem Bilde qp, und folglich dem zugehörigen Objecte, eine scheinbare Größe PcQ von 20 Minuten zukommen. Kleinere Theile, als diejenigen sind, welche unmittelbar auf dem Glase verzeichnet worden, muß man nach dem Augenmaaße schätzen, welches einem einigermaaßen geübten nicht schwer seyn wird, da ohnedem die Abtheilungen durch das Ocularglas vergrößert erscheinen.

II. Es kömmt also nur darauf an, den Abstand zweyer nächsten Parallellinien, in Minuten und Secunden, zu finden.

Hierzu kann man sich nun völlig eben der Methoden bedienen, die wir in den vorhergehenden §§en, bey Untersuchung des Werthes eines Schraubenganges, gelehrt haben. Man darf in obigen §§. statt der Wörter Schraubenumdrehung, Menge von Schraubenumdrehungen, nur die Wörter Zwischenraum oder Abstand zweyer nächsten parallelen; Menge von Zwischenräumen u. s. w. setzen, so wird man

man gar leicht einsehen, wie alle vorhergehenden Regeln sich auch auf diese Parallellinien anwenden lassen.

III. Es bedeute die Linie ik Fig. XXVI. den Abstand der beyden äussersten Parallelstriche, l die Brennweite des Objectivs, so gehört dieser Weite ik eine scheinbare Größe von $\frac{ik}{l} \cdot 206264$ Secunden zu, die ich $= \alpha$ nennen will. In wie viel gleiche Theile muß man ik theilen, daß einem solchen Theile eine scheinbare Größe von β Sec. zukomme? Man nenne die unbekannte Zahl der Theile $= x$, so soll seyn

$$\frac{\alpha}{x} = \beta, \text{ oder } \frac{ik}{l \cdot x} \cdot 206264 = \beta;$$

dieß giebt $x = \frac{ik}{l \cdot \beta}\, 206264$.

Ex. Für $\beta = 60'' = 1'$ wäre $x = \frac{ik \cdot 3438}{l}$ dieß dient also, gleich anfangs bey Verzeichnung eines solchen Micrometers, dem Zwischenraume zweyer nächsten Parallelen, ohngefähr eine scheinbare Größe von 1 Minute zu verschaffen, und dieß ist eine schickliche Größe für den Abstand zweyer nächsten Parallelen, so bald das Fernrohr nicht unter 5 Fuß ist. Bey einer geringern Größe des Fernrohrs kommen aber die

die Parallelstriche zu nahe neben einander, wenn ihr Zwischenraum nur eine Minute betragen soll.

Es versteht sich, daß neben die Parallellinien Ziffern, oder sonst Merkmahle etwa von 5 zu 5 Theilen zu stehen kommen, damit man jedesmahl, ohne sich zu irren, die Anzahl der Zwischenräume zählen kann, welche ein Bild einnimmt.

Anmerkungen über die bisherigen zwey Gattungen von Micrometern.

§. 176. I. Die erste Gattung von Micrometern, bey der man sich der Schrauben bedienet, um die dem Bilde eines Objects zugehörige scheinbare Größe zu finden, rühret von Christfried Kirch, einem deutschen Astronomen her, der sie zuerst in den Misc. Berolinensibus bekannt gemacht hat. Die Vorrichtung ist zwar sehr einfach, aber das Umdrehen der Schrauben, das Zählen der Umdrehungen u. s. w. verursacht, wenn man sich nicht dabey irren will, einigen Zeitverlust.

II. Die letztere Art von Micrometern mit Parallellinien, hat mein Vater zuerst in den Kosmograph. Sammlungen (Nürnb. 1750.) bekannt gemacht, und ist ohnstreitig, in Ansehung der leichteren Behandlung, und der

Kosten, dem Kirchischen vorzuziehen. Dergleichen Glasmicrometer verfertigte auch in sehr großer Vollkommenheit Brander in Augsburg, und bediente sich ihrer in Fernröhren an Winkelmessern, weil man dadurch einen Vernier oder eine Micrometerschraube an der Alhidadenregel ersparen kann. Bey Horizontalvermessungen wird nemlich ein solches Micrometer in das Fernrohr des Winkelmessers so angebracht, und gestellt, daß die Linie v z Fig. XXVI. mit der Ebene des Werkzeugs parallel ist, und folglich die Parallelen des Glasmicrometers, in dem Fernrohre, beym horizontalen Stande des Werkzeugs, als Verticallinien erscheinen. Gesetzt also, bey Ausmessung eines Horizontalwinkels C A B Fig. XXI. habe bey der Richtung C A des Fernrohrs, der Index auf dem Rande 0° gewiesen; nachdem aber die Alhidadenregel herumgedrehet, und die Mittellinie x y des Micrometers Fig. XXVI. genau nach dem Objecte B Fig. XXI. gerichtet worden, weise der Index auf dem Rande 60° + einer gewissen Anzahl von Minuten ꝛc. Um diese Zahl von Minuten zu finden, so bringe man durch eine sanfte Verrückung der Alhidadenregel, den Index genau an den Theilstrich 60°, und sehe dann zu, hinter welcher, oder zwischen welchen Parallelen des Glasmicrometers alsdann das Object B in dem Fernrohre erscheinet. Ich will setzen, B erscheine nach der geschehenen

Ver-

Verrückung der Alhidadenregel, alsdann hinter einer Parallele, die um 8 Zwischenräume weiter von der Mittellinie des Micrometers entfernt wäre, so würde, wenn jeder Zwischenraum 2 Minuten betrüge, der Winkel CAB = $60^\circ + 2 \cdot 8$ Minuten = $60^\circ\ 16'$ seyn.

III. Auf diese Art ersparet man an einem Winkelmesser sowohl den Vernier, als Micrometerschraube; es haben aber dergleichen Micrometer vorzüglich auch ihren Nutzen in der Lehre vom Nivelliren, und den dabey gebräuchlichen Instrumenten.

IV. Die nothwendigste Erforderniß ist nur daß 1) die Linien auf dem Gläse vollkommen parallel, 2) überall gleich weit von einander und 3) so zart auf dem Glase verzeichnet sind, daß ihre Dicke nicht nachtheilig ist.

Durch diese drey Vollkommenheiten zeichnen sich die Branderischen Micrometer vorzüglich aus.

V. Die zweyte Bedingung, daß die Zwischenräume der Parallelen vollkommen gleich seyn müssen, ist indessen nicht unumgänglich nothwendig; nur muß man, vermittelst eines Zirkels, oder durch andere Kunstgriffe, die kleinen Ungleichheiten der Zwischenräume zu entdecken suchen, und eine Tafel darüber ver-

ver-

fertigen. Wenn die Parallellinien nicht gar zu enge bey einander sind, so ist folgendes Verfahren hinreichend. Es sey Fig. XXVI. ki die eingetheilte Mittellinie des Micrometers, und ka, ab, bc u. s. w. die Zwischenräume der Parallelen. Man messe nach einem sehr genau eingetheilten Maaßstabe die Weiten ka, kb, kc, kd u. s. w., so ist kb — ka = ba; kc — kb = bc u. s. w. Diese Unterschiede werden demnach zeigen, ob die Zwischenräume ab, bc rc. einander gleich sind. Nun verfertige man eine Tafel, für die den Zwischenräumen ka, kb, kc u. s w. zugehörige Menge von Minuten und Secunden. Dieß geschiehet, wenn man nach der Ordnung die Weiten ka, kb, kc u. s. w. mit des Objectivs Brennweite dividiret, und die herauskommenden Quotienten mit der Zahl 206264 multipliciret. Nachdem nun die Zahlen gehörig geordnet worden, so wird man, vermittelst dieser Tafel, die richtige scheinbare Größe eines Gegenstandes auf folgende Art finden. Gesetzt, auf dem Micrometer nehme ein Bild desselben den Raum bd ein, oder erscheine genau zwischen den beyden Parallelen durch b und d. Man suche aus der Tafel die denen Zwischenräumen kb, kd, entsprechende Menge von Minuten und Secunden. Ich will setzen, die Tafel gäbe kb = 8′ 20″; kd = 21′ 4″, so wäre der Unterschied kd — kb = bd = 12′ . 44″ = der scheinbaren Größe des Gegenstandes.

Ein

Ein etwas besseres Verfahren ist, daß man an einer entfernten Verticalwand genau ein paar Parallellinien ziehet, und sich nun mit dem Fernrohre so weit entfernt, daß der Zwischenraum von ein paar Parallelen des Micrometers genau jene auf der Wand gezogenen Parallelen zwischen sich faßt, und nun untersucht, ob jeder andere Zwischenraum des Micrometers eben diese Parallelen auf der Wand zwischen sich faßt; Geschieht dieß nicht, so notirt man die bemerkten Unterschiede, in welchem Falle es denn, um sich nicht bey der Schäzung des Fehlers zuviel auf das Augenmaaß verlassen zu dürfen, gut ist, wenn der Abstand jener Parallelen auf der Wand, durch Punkte noch in kleinere Theile getheilt ist.

VI. Die erste und dritte Bedingung eines guten Micrometers (IV) ist aber desto wichtiger, und erfordert alle Aufmerksamkeit des Künstlers. Man kann zwar versuchen, vermittelst einer Diamantspitze, oder eines Splitters von einem Feuersteine, die Parallelen auf das Glas zu reissen. Allein da die Linien durch dieses Verfahren fast immer ausspringen, so hat mein Vater den Vorschlag gethan, die Linien bloß mit Tusche auf das Glas zu verzeichnen. Es wird zu dieser Absicht die eine Seite eines Glases mit feiner Tusche überall gleichförmig bestrichen, und nachdem es trocken geworden, mit Wachs auf einem

einem Tische befestigt, so daß die geschwärzte Seite oben zu liegen komme. Hierauf werden mit einem Federkiele, der wie zum Schreiben, aber ohne Spalt geschnitten ist, längs eines angelegten Parallelliniäls, Streifen von der erwähnten Tusche dergestalt weggenommen, daß sehr feine Parallellinien von Tusche, so weit von einander, als die Spitze der Feder es mit sich bringt, stehen bleiben.

Ich habe bey Verfertigung solcher Micrometer, das Glas nie ganz mit Tusche überstrichen, sondern nur mit einer guten Reisfeder, die mit etwas dicke angemachter Tusche gefüllt war, erst Linien, so zart es angieng, auf das Glas gerissen, und dann, wenn einige etwas zu dick ausgefallen seyn sollten, mit dem oberwähnten Federkiel, vorsichtig wieder so viel Tusche von ihnen weggenommen, daß sie die gehörige Feinheit erhielten. Man muß aber beym Ziehen der Linien, mit der Reisfeder etwas geschwind längs des Linials herfahren, und nicht zu stark aufdrücken; dann wird dieses Verfahren oft so zarte Linien geben, daß es kaum nöthig ist, Tusche wieder davon wegzustreichen.

Die Tuschlinien hängen übrigens an dem Glase ziemlich fest, daß man nicht zu besorgen hat, daß sie sich so leicht wieder wegwischen, wenn man nur das Glas vor Feuchtigkeit verwahrt.

VII.

VII. Die Linien, welche Brander, vermittelst eines ihm eigenen Kunstgriffs, auf das Glas zog, sind so fein, daß ihre Breite kaum $\frac{1}{200}$ einer Linie beträgt, und daher dem bloßen Auge kaum sichtbar sind. Dieß läßt vermuthen, daß diese Linien wohl schwerlich mit einem Diamant, oder Feuersteinsplitter ins Glas gerissen worden. Ich vermuthe vielmehr, daß Brander etwa mit einer scharfen Spitze von gehärteten Stahl, oder sonst auf eine ähnliche Art, so breit als die Linien werden sollten, nur dem Glase die Politur benahm.

Ich habe bloß mit einem Federmesser, das aber nicht, wie gewöhnlich, sich in eine Spitze endigt, sondern durchaus gleich breit, von feinem Stahle und sehr scharf geschliffen ist, in Ermangelung anderer Vorrichtungen, die feinsten und reinsten Linien auf folgende Art aufs Glas gezogen. Nachdem ich ein Linial gehörig aufs Glas gelegt hatte, so bestrich ich die Stelle des Glases, wo eine Linie längs des Linials eingerissen werden sollte, mit etwas angefeuchteten Kaput mortuum, oder auch mit derjenigen feinen Masse, welche sich von einem zarten Schleifsteine abschleifet, wenn man ein Federmesser darauf abziehet; legte hierauf an das Linial genau die breite Seite des Federmessers, und fuhr, bey einem gelindem Drucke, mit der scharfen Ecke des Federmessers, längs des Linials, immer langsam über das Glas

hin

hin und her, so aber, daß die breite Seite des Messers immer genau an dem Liniale liegen blieb. Nachdem ich nur etwa 15 bis 20 mahl über das Glas hin und her gefahren hatte, und das Glas abwischte, so hatte sich die feinste Linie auf der polirten Ebene des Glases matt geschliffen. Die Uebung wird hiebey die nöthigen Vorsichten und Vortheile zeigen. Ich habe vermittelst dieses Verfahrens in ein Hrn. H. Kästner gehöriges Fernrohr auf dem Observatorio, ein Micrometer verfertigt, welches an Feinheit der Linien, den Branderischen Micrometern nichts nachgiebt.

Bey Verfertigung solcher Micrometer hatte ich anfangs die Parallelen, die auf das Glas kommen sollten, in Ermangelung anderer Vorrichtungen bloß aufs Papier verzeichnet, das Glas über diese Linien mit Wachs befestigt, und dann die durchs Glas scheinenden Linien des Papiers, nach der gewiesenen Methode, auf die polirte Ebene des Glases gebracht. Da aber, wegen einer Parallaxe, die durchs Glas scheinenden Linien selten in vollkommen gleicher Weite auf das Glas gezogen werden können, so habe ich mich nachher eines Werkzeugs bedient, das sich auf dem göttingischen Observatorio befindet, und von der Einrichtung ist, daß über die Ebene des Glases ein Linial vermittelst einer guten Micrometerschraube, sich beständig parallel, und um jeden kleinen Raum genau fortgeschoben werden kann.

Uebrigens muß man bey dem bisher gewiesenen Verfahren hauptsächlich einen gleichförmigen Gang des Messers beobachten, und dafür sorgen, daß sich das Linial nicht verrücke, (zu welcher Absicht es gut ist, demselben gehörige Unterlagen zu geben). Auch muß man vor dem Einschleifen einer jeden folgenden Linie, dem Messer wieder die nöthige Schärfe geben — alsdann wird man gewiß mit wenig Mühe und Kosten ein sehr gutes Micrometer erhalten.

VIII. Ein anderes sehr gutes Verfahren ist, daß man (nach dem Vorschlage Lichtenbergs im götting. Taschenkalender 1789. S. 138.) Linien vermittelst der Dämpfe der Flußspatsäure in das Glas äzt. Die Handgriffe dazu sind folgende.

Erstlich reinigt man das Glas, worauf die Linien geäzt werden sollen, mit einer Auflösung eines Laugensalzes, oder mit derjenigen Flüssigkeit, welche man in den Apotheken unter dem Nahmen des Weinsteinöhles (oleum Tartari per deliquium) bekömmt, und trocknet es mit einem Stückgen reiner Leinwand ab. Nun überzieht man es ganz dünne und gleichförmig mit dem gewöhnlichen Aetzgrunde der Kupferstecher, welcher aus 2 Theilen (dem Gewicht nach) weißem Wachse, 1 Theile Mastix, $\frac{1}{2}$ Theile Judenpech, nnd etwas wenigen (ohngefähr $\frac{1}{2}$)

vene=

venetianischen Terpentin, in einem reinen irdenen Töpfgen zusammengeschmolzen wird. Man gießt die zusammengeschmolzene Masse noch heiß in kaltes Wasser, damit sie gestehe, nimmt sie alsdann noch etwas warm aus dem Wasser, formt sie in eine Kugel, und fasset sie in ein Stückgen Taffet. Soll nun das Glas mit diesem Grunde überzogen werden, so erhitzt man es über Kohlen (doch nicht so sehr, daß der aufzutragende Aetzgrund Bläßgen bekommen würde), und fährt nun mit der in dem Taffet befindlichen Masse über das Glas her, so wird sich von dieser, so viel als nöthig, durch den seidenen Ueberzug durchziehen, und des Glases Oberfläche bedecken. Man hält alsdann das Glas noch etwas über Kohlen, damit der Aetzgrund recht gleichförmig zusammenfließe; wo er zu dick gerathen, nimmt man mit der Fahne einer Taubenfeder das überflüssige weg, so daß der Aetzgrund das Glas ohngefähr in der Dicke eines Papieres, so viel als möglich, gleichförmig bedecke. Beyde Flächen des Glases werden solchergestalt mit dem Aetzgrunde überzogen, doch hat man nur auf diejenige Seite, worauf die Linien geäzt werden sollen, vorzüglich Fleiß zu verwenden. Die andere Seite wird nur mit überzogen, daß sie von der Flußspatsäure nicht angegriffen werde. — Nachdem nun das Glas kalt, und der Aetzgrund fest geworden, radirt man mit einer sehr dünnen und

schar-

scharfen Spitze eines Federmessers, oder einer sehr spitzen Radier-Nadel, längs eines durch Hülfe einer Micrometerschraube parallel-beweglichen Linials, wozu sich der Mechanismus leicht gedenken läßt, die Parallellinien in den Aetzgrund, so, daß sie gegen das Licht gehalten, schön, rein und glänzend aussehen, welches ein Merkmahl ist, daß der Aetzgrund dem Glase, so dick als die Linien werden sollen, vollkommen genommen ist. Man wird finden, daß die Sache ganz leicht von statten geht, weil der Aetzgrund das Glas gern verläßt, und nirgends hängen bleibt, so daß man genöthigt wäre, mit der Nadel nachzuhelfen, welches immer eine sehr unsaubere Arbeit geben würde.

Nun werden ungefähr 3 Loth von grob pulverisirten Flußspath, in ein etwa 5 Unzen Wasser haltendes Gläschen, oder in ein dergleichen Kölbgen gethan, und mit so viel Vitriolöl übergossen, daß alles herumgerührt, ohngefähr die Flüssigkeit eines Syrups erhält: Um den Hals des Gläschens windet man einen mäßig steifen Drath, dessen Enden horizontal von dem Glase abgehen, ohngefähr wie (Fig. LXXXV.), damit man das Glas bey a anfassen, und dasselbe über glühende Kohlen halten kann, um nach und nach die darin befindliche Masse zu erhitzen; Man braucht zu dem Ende das Glas ohngefähr nur in einem Abstande

von

von 3 Zollen über die Kohlen zu halten (anfänglich in einem etwas grössern, um das Glas nach und nach zu erhitzen), so wird bald darauf die Masse anfangen aufzuwallen, und aus der Oeffnung der Flasche einen weißlichten Dunst von sich zu stoßen, dem man in einer mäßigen Zugluft eine Richtung von dem Munde ab giebt, damit derselbe durch seine erstickende Eigenschaft nicht schade. Sobald nun die weissen Dämpfe stark hervorkommen, entfernt man das Glas von den Kohlen, und hält nun das auf den Aetzgrund radirte Micrometer über diese Dämpfe, ohngefähr in einem Abstande von 1 bis 2 Zollen, bewegt aber dabey das Micrometer immer in horizontaler Richtung durch den Dampf hin und her, damit er alle radirte Linien gleichförmig angreife, sich nirgend auf den Aetzgrund merklich in Gestalt von Tröpfchen ansetze, und denselben irgendwo naß mache. Nach einigen Minuten werden die eingeätzten Linien weißlich auszusehen, oder seitwärts gegen das Licht gehalten, ihren Glanz zu verlieren anfangen; Wenn dieß geschieht, so ist die Aetzung vollendet. Man wischt nun durch gelinde Erhitzung den Aetzgrund behutsam von dem Glase ab, und reinigt es, so wird man finden, daß, wenn alles gehörig befolgt worden ist, von den Linien des Micrometers auch kein Pünktchen ausgeblieben seyn wird. Bringt man das Micrometer hierauf in das Fernrohr,

so

so wird sich zeigen, daß die Linien denen auf einem Branderischen Micrometer, in Ansehung der Schönheit, nichts nachgeben. Ich habe den Versuch mehr als einmahl gemacht, und kann demnach für den guten Erfolg bürgen. Wenn auch die erste Probe mißlingt, so wird sich bald zeigen, wo der Fehler begangen worden ist. Uebrigens ist es zu rathen, wegen der scharfen Dämpfe der Flußspatsäure, den Versuch in freyer Luft anzustellen.

IX. Hr. Prof. Yelin in Anspach hat beym Aetzen der Linien in das Glas vermittelst der Flußspatsäure, vortheilhaft gefunden, das Glas mit feinem Golde oder Silber zu überziehen, denn auch diese Materien bleiben von der Flußspatsäure unaufgelößt. Dieses hat, wie Hr. Y. erinnert, den Vortheil, daß sich die Linien beym Zeichnen dem Auge besser darstellen, feiner gezogen werden können, und auch eine genauere Theilung zulassen.

Das Verfahren ist mit Hrn. Y. eigenen Worten folgendes.

Man säubert das Glas, daß keine Unreinigkeit daran bleibt, haucht es sodann stark an, und überleckt es mit der nassen Zunge. Die nasse Seite des Glases läßt man alsdann auf ein Goldblätchen fallen, und drückt das Gold mit Baumwolle gelinde an das Glas.
So

So bald es trocken ist, überfährt man das Gold mit feiner Baumwolle, anfangs schwach, und endlich sehr stark, bis es ganz Spiegelhelle ist. Weil aber die Goldfläche dadurch Schaden leidet, so überleckt man sie, doch ohne vorher daran zu hauchen, abermals mit nasser Zunge, und belegt das Glas auf die vorige Art zum zweytenmale. Hierauf nimmt man ein Stückgen weiches Leder, und reibt das Gold damit, wie vorhin mit der Baumwolle. Im Fall noch durchsichtige Stellen im Golde eyn sollten, belegt man es zum 3ten oder 4tenmahle bis auch kein Pünkchen mehr unbelegt ist, welches man am besten sieht, wenn man das Glas gegen das Licht hält. — So lasse man das Glas einen oder zwey Tage liegen, und bringe es hierauf über glühende Kohlen. Man lasse es ein paar Stunden darüber, oder lege es statt dessen auf einen heissen Ofen auf Papier, doch immer so, daß die Goldseite den Kohlen oder der Ofenplatte zugekehrt ist, sonst treibt die Hitze Blasen auf. Sollten aber demohngeachtet kleine Bläschen im Golde entstehen, so reisse man sie mit einer Nadel auf, reibe das Gold mit Leder sehr stark, und überlege die fehlenden Stellen wieder. — Wann das Glas kalt geworden ist, so hauche man stark an die Goldseite, und sehe zu, ob man an der andern Seite im Glanze des Goldes durch den Hauch eine Aenderung bemerkt, in welchem Falle man es aufs neue der Hitze aussetzt. —

Nun

Nun nehme man eine feine englische Nadel, oder ein vorne rund geschliffenes scharfes Federmesser, und ziehe den Querstrich des Micrometers. Auf diesem kann man nun die Punkte der Parallelstriche bemerken, und zwar auf folgende sehr bequeme Art.

Man mache einen zarten Strich auf ein feines Papier von der Länge des Durchmessers der Micrometertheilung, und trage mit dem Zirkel so viel Punkte darauf, als man Linien ziehen will. Darauf schneide man mit einem guten Federmesser das Papier dicht an dem Striche entzwey, so daß man auf dem Rande des Papiers und der Linie gerade noch die vorhin gemachten Theilpunkte bemerkt. Dieses lege man nun auf das allergenaueste an den Querstrich im Golde und bemerke genau auf dem Golde mit der Nadel durch einen feinen Punkt die Stellen, wo sich die Eintheilungen auf dem Papiere befinden, und ziehe nachher durch diese Punkte die Linien. (Dieses Mittel, die Abtheilungen aufzutragen, ist nur zu gebrauchen, wenn man mit keiner Vorrichtung, wie die auf der göttingischen Sternwarte (§. 176. VII.) versehen ist).

Am besten thut man, wenn man in Pappe, oder in ein Brettchen, welches etwas dicker, als das Glas ist, ein Loch von der Größe schneidet, daß das Glas gerade hineinpaßt, man hat alsdann nicht zu befürchten, daß das Linial die Oberfläche des Goldes beschädige.

Hat man auf diese Weise das Micrometer gezeichnet, so hält man es etwa eine oder zwey Minuten über die Dämpfe der Flußspatsäure und wischt das Gold mit einem nassen Tuche herunter. Daß man übrigens dieses Verfahren auch bequem brauchen könne, Maaßstäbe, Transporteure ꝛc. auf Glas zu zeichnen, kann man leicht einsehen. — Es gewährt besonders auch in dieser Hinsicht großen Nutzen, daß man Zahlen, Nummern ꝛc. auf das Gold schreiben kann, welches nicht so leicht angeht, wenn man die Striche einschleift, oder mit dem Diamant einritzt.

Wem das feine Gold zu theuer ist, der kann sich auch mit eben dem Vortheile des feinen Silbers zum Ueberzuge bedienen.

Im Fall man Zirkellinien auf das Gold machen wollte, so bemerke man das Centrum mit einem Punkte auf dem Golde, schneide sodann ein Stückchen von einer Karte herunter, und mache in dieses ein kleines Loch, welches man so lange auf dem Golde herumschiebt, bis das Loch in der Karte das Centrum des zu machenden Zirkels deckt. Man halte hierauf mit dem Finger das Kartenstückchen, und setze die Zirkelspitze in das Löchlein, so kann man daraus einen

feinen

feinen Kreisbogen, oder auch einen ganzen Kreis beschreiben.

X. Von Micrometern auf einem feinen Blättchen Perlmutter redet Cavallo (Grens Journal der Phys. IV. B. 2. Heft S. 250.)

Ungemein feine und deutliche Linien lassen sich vermittelst einer feinen Nadel, und nur durch einen ganz gelinden Druck, auf einem klaren und hellen Glimmer-Plättchen verzeichnen. Der Russische Glimmer ist wegen seiner Reinheit hierzu vorzüglich brauchbar. Zu Micrometern können dergleichen Plättchen etwa ¼ Linie dick genommen werden.

XI. Die Kürze in die ich mich einschränken muß, erlaubt mir nicht, mich umständlicher in die Lehre von Micrometern, zum Gebrauche der Feldmeßkunst, einzulassen. — Man kann aber die vollständige Theorie davon, wie auch alle nöthige Vorsichten dabey, weitläuftiger und mit der Hrn. H. Kästner eigenen Gründlichkeit in dessen astronomischen Abh. II. Samml. VII. Abh. auseinander gesetzt finden.

XII. In Rücksicht des Gebrauchs der bisher erklärten Micrometer ist indeß auch noch folgendes beyzufügen:

1. Wenn ein Micrometer sich in dem Brennpunkte des Oculars befindet, und nun die Röhre des Oculars in die Objectivröhre so weit hereingeschoben wird, daß die Brennpunkte des Oculars und Objectivs zusammenfallen, so ist dies die Stellung der Röhre, wobey weitsichtige Augen nicht allein die entfernten Gegenstände, sondern auch die Micrometer-Abtheilungen vollkommen deutlich sehen.

2. Eine kurzsichtige Person muß die Ocularröhre dem Objective etwas mehr nähern, wenn sie dasselbe Object soll deutlich in dem Fernrohre sehen können.

3. Dadurch kömmt nun das Bild des Objects zwischen das Ocular und Micrometer, also dem kurzsichtigen Auge näher zu stehen, als es in (1) von dem weitsichtigen Auge entfernt war. Begreiflich muß also nun dem kurzsichtigen Auge, auch das Object mehr Theile des Micrometers zu fassen scheinen, als in (1) dem weitsichtigen Auge. D. h. kurzsichtige Personen werden die scheinbare Größe des Gegenstandes immer größer angeben, als weitsichtige, vorausgesetzt, daß sie das Micrometer selbst in dem Abstande von dem Oculare lassen, in welchem weitsichtige Personen die Abtheilungen des Micrometers deutlich sahen, d. h. in dem Brennpunkte des Oculars (1).

4. Aber

4. Aber dann würden Kurzsichtige die Theile des Micrometers undeutlich sehen, wenn sie gleich nach (3) das Object deutlich sehen.

5. Sollen demnach die Irrthümer (3) und Unbequemlichkeiten (4) nicht entstehen, so muß der Kurzsichtige nicht allein die Ocularröhre so weit in die Objectivröhre schieben, daß er das Object deutlich sieht, sondern auch das Ocular selbst noch besonders dem Micrometer so weit nähern können, daß er auch die Micrometer-Abtheilungen deutlich sieht.

6. Man kann beweisen, daß wenn gleich in diesem Falle der Kurzsichtige sowohl das Micrometer als auch das Bild des Objects näher beym Auge hat als der Weitsichtige, ihm das Bild dennoch eben so viel Theile des Micrometers zu fassen scheinen wird, als dem Weitsichtigen.

7. Gewöhnlich ist nur die Ocularröhre in der Röhre des Objectivs verschiebbar, und das Micrometer bleibt dabey in einem unveränderlichen Abstande vom Ocular. Bey einer solchen Einrichtung ist es nach (3) unmöglich, daß Kurz- und Weitsichtige für einerley Object einerley scheinbare Größe vermittelst des Micrometers finden, der Undeutlichkeit gar nicht zu erwähnen, unter der sich einer von beyden Personen die Micrometer-Abtheilungen darstellen müssen,

müssen, wodurch neue Irrthümer entstehen. In der Astronomie ist dieser Umstand um so wichtiger, da oft sehr verschiedene Augen einerley Werkzeug gebrauchen, und die Fehler, die nach (3) entstehen können, von weit höherem Belange als in der praktischen Geometrie sind.

8. Es ist daher schlechterdings nöthig, daß auch in der Ocularröhre selbst, sich das Ocular vor- und rückwärts schieben läßt, wie es die verschiedene Schärfe der Augen erfordert, um auch die Micrometer-Abtheilungen deutlich sehen zu können. Eine Vorrichtung dazu ist leicht anzugeben.

XV. Kapitel.

Von Ausmessung zugänglicher und unzugänglicher Linien auf dem Felde.

§. 177.

Die Ausmessung gerader Linien, die ich im ersten Theile gezeigt habe, beziehet sich nur auf solche Entfernungen, an die sich ohne beträchtliche Hindernisse, der Maaßstab anlegen läßt.

Es kann aber sehr oft vorkommen, daß entweder die auszumessenden Linien zu lang sind, folglich die Messung zu weitläuftig würde, oder daß sich Hindernisse vorfinden, die keine unmittelbare Anlegung des Maaßstabes zulassen. — In diesem Falle verschafft uns die Geometrie gute Hülfsmittel, auch ohne würkliche Anlegung des Maaßstabes, dergleichen Linien zu messen.

Hierzu dienet nun besonders die Lehre von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke, die ich bey meinen Lesern voraussetze. — Da es nun gut ist, daß Anfänger sich vorher in Messung der Weiten üben, ehe sie zu zusammengemengesetztern Operationen fortgehen, so werde ich in diesem Kapitel unterschiedene Methoden beybringen, wie dergleichen einfache Operationen vorzunehmen sind.

Es ist klar, daß ich hier nur die wichtigsten, und in der Ausübung besonders oft vorkommenden Fälle erklären kann. — Es würde zu weitläuftig seyn, alle Fälle, die sich auf dem Felde gedenken lassen, abzuhandeln. Indessen wird man sich leicht bey allen Schwierigkeiten zu helfen wissen, wenn man sich die Vorschriften des gegenwärtigen Kapitels wohl bekannt gemacht hat.

Es bedarf wohl keines Beweises, daß eine und dieselbe Aufgabe sehr viele Auflösungen zuläßt. Es wird aber nach Verhältniß der Umstände bald diese bald jene Auflösung vorzüglich bequem seyn. So ist es in manchen Fällen vortheilhaft, sich bloß der Meßkette zu bedienen; in andern Fällen ist die Auflösung vermittelst des Meßtisches, des Astrolabii, der Boussole u. s. w. vorzuziehen; Die mit einer Aufgabe verbundenen Nebenumstände müssen entscheiden, welche Auflösung in jedem Falle zu wählen ist.

Die Hauptsache bey Messung der Weiten auf dem Felde, kömmt darauf an, daß man sich ein Dreyeck, oder eine andere Figur gedenkt,

denkt, von der die zu messende Entfernung ein Stück ist, daß man nun an diesem Dreyecke oder dieser Figur so viel Dinge misset, als man nöthig hat, um daraus die unbekannte Größe, entweder durch Konstruction, oder Rechnung ableiten zu können.

Da man nun oft keine andern Werkzeuge, als Maaßstäbe, oder eine Meßkette bey der Hand hat, so will ich vors erste zeigen, wie allerley unzugängliche Weiten, bloß durch Hülfe dieser beyden Werkzeuge, bestimmt werden können. Obgleich diese Aufgaben in den meisten Anleitungen zur Feldmeßkunst vorkommen, so habe ich doch nicht für undienlich erachtet, auch hier das vornehmste davon beyzubringen, weil sie zugleich die Gründe von andern geometrischen Aufgaben enthalten.

Ich setze bey den folgenden Aufgaben voraus, daß man in der unmittelbaren Messung der Linien, nach Anleitung des IIIten Kapitels, schon hinlänglich geübt sey.

Von Messung unzugänglicher Weiten, bloß durch Ketten und Maaßstäbe.

Aufgabe.

§. 178. A, B, Fig. XXVII. sind zwey Objecte, die sich in einer Horizon-

tal-

talebene befinden, man soll ihren Abstand AB finden, der sich wegen eines dazwischen liegenden Hindernisses F nicht unmittelbar messen läßt: vorausgesetzt, daß von einem dritten willkührlich angenommenen Punkte C ein freyer Zugang nach A, B, verstattet ist.

Aufl. Man setze in C einen Stab lothrecht ein, und messe die Weiten AC, BC, mit den Maasstäben, oder der Meßkette; die gemessenen Weiten AC, BC, trage man in den Verlängerungen von AC, BC, rückwärts von C nach a, und von C nach b, dergestalt, daß Ca = CA und Cb = CB werde; messe dann die Entfernung ba, so wird dieselbe = AB seyn.

Der Beweis ist aus der Gleichheit der Dreyecke ABC, bCa, klar.

Zus. I. Dieses Verfahren setzt zum voraus, daß sich die Weiten AC, BC, ungehindert auf einer horizontalen Ebene rückwärts tragen lassen. Dieses verstattet aber oft der Raum nicht, besonders wenn AC, BC, beträchtlich groß sind. In solchem Falle trage man nur die Hälfte, den dritten, vierten etc. Theil der Weiten AC, BC rückwärts, von C nach α, und von C nach β: alsdenn aber wird die

Wei-

Weite $\alpha\beta$ auch nur die Hälfte, der dritte oder vierte rc. Theil, der unbekannten Weite AB seyn. Denn wenn z. E. $C\alpha = \frac{1}{3}CA$, und $C\beta = \frac{1}{3}CB$ genommen worden wäre, so ist $C\alpha : C\beta = CA : CB$, da nun auch der Winkel $\beta C\alpha = ACB$, so ist das Dreyeck $C\beta\alpha$ dem ACB ähnlich, mithin auch $AC : C\alpha = AB : \alpha\beta$, folglich weil $C\alpha = \frac{1}{3}AC$, auch $\alpha\beta = \frac{1}{3}BA$.

Zus. II. Lassen sich die den Weiten CA, CB, proportionale Stücken $C\alpha$, $C\beta$, nicht rückwärts tragen, so trage man sie in den geraden Richtungen CA, CB, vorwärts von C nach m, von C nach n, so wird auf eben die Art auch mn der AB proportional seyn.

Zus. III. Bey diesem Verfahren (Zus. I. II.) muß man sich aber alle Mühe geben, mn oder $\beta\alpha$ sehr genau zu messen; denn ein kleiner Fehler auf mn oder $\beta\alpha$, vervielfältigt sich, wenn man AB daraus finden will.

Gesetzt, man habe $Cm = \frac{1}{8}CA$; $Cn = \frac{1}{8}CB$ genommen, so ist auch $mn = \frac{1}{8}AB$; wäre daher z. E. mn = 4 Ruthen gefunden worden, so wäre AB = 8 . 4 R. = 32 R. Hätte man aber mn um 1 Zoll fehlerhaft gemessen, so betrüge dieses auf AB schon einen 8 mahl größern Fehler.

Zus. IV. Oft kann man sich bey Auflösung der bisherigen Aufgabe auch folgenden Hülfsmittels bedienen, wo z. E. Fig. XXVIII. AB wegen eines dazwischen liegenden Flusses nicht gemessen werden könnte, bey M sich aber eine Brücke befände; da hier das Rückwärtstragen nicht statt findet, so nehme man in der Verlängerung von AB, ein paar willkührliche Stücken Aa; Bb; An a, b, setze man ein paar Perpendiculärlinien (§. 58.) am, bn, so lang, daß man über die Brücke M, von m nach n messen kann. Um nun aus den gemessenen Stücken am, bn, mn, die Weite AB zu finden, so gedenke man sich durch n mit AB oder ab eine parallele pn, so ist $pn = ab$, und, das Dreyeck nmp rechtwinklicht, wo $pm = am - bn$, folglich $pn = \sqrt{(mn^2 - (am - bn)^2)} = ab$, mithin auch $AB = ab - Aa - Bb$ gefunden werden kann.

Dieses Verfahren kann in ähnlichen Fällen oft mit Nutzen gebraucht werden.

Aufgabe.

§. 179. Die Weite AB, Fig. XXIX. die sich nicht unmittelbar messen läßt, zu finden, wenn man von dem willkührlichen Standpunkt D, nur nach B, aber nicht nach A hinkommen kann.

Aufl.

Aufl. Man verlängere AB, und nehme auf deren Verlängerung eine Länge BC, von willkührlicher Größe, von D messe man die Weiten BD, DC, und trage sie in geraden Linien rückwärts; BD von D bis b, und DC von D bis c, setze bey b, c, Stäbe ein, und gehe mit einem andern Stabe in der geraden Richtung cb, bis d fort, so daß der Stab d zugleich mit D, A, in gerader Linie stehen würde. Hierauf messe man bd, so wird bd = AB seyn. Gleichfalls wegen Gleichheit der Dreyecke ABD, bDd; die sich gar leicht erweisen läßt.

Zus. I. Es erhellet, daß man, wie in vorhergehender Aufgabe, gleichfalls nur nöthig hat, proportionale Stücken rückwärts zu tragen.

Zus. II. Auch hätte man, wenn man Dd mässe, des Standpunktes D Weite von A, weil Dd = DA.

Zus. III. Eine andere Auflösung der vorgelegten Aufgabe zeigt sich Fig. XXX, wo vorausgesetzt wird, daß man vermittelst einer Meßschnur, oder einer Kette, im Stande ist, einen Winkel an einen andern Punkt zu tragen.

Man messe erstlich die Weite BD bis an den angenommenen Standpunkt, und trage sie rückwärts von D nach b, so daß bDB eine

gerade

gerade Linie sey. Bey α stecke man einen Stab in die gerade Linie, BA, und bey δ einen in die gerade Richtung BD, und messe nun in dem kleinen Dreyecke $\alpha B \delta$, die drey Seiten $B\alpha$, $B\delta$, $\alpha\delta$.

Dieses Dreyeck trage man nun an den Punkt b., so, daß der Winkel B an b komme. Man nehme also auf der geraden Richtung bD, die Linie $ba = B\delta$. Fasse nun auf einer Meßschnur oder Kette, eine Länge so groß, als die Summe der beyden Linien $B\alpha$, $\alpha\delta$; befestige die beyden Enden dieser Schnurlänge, bey a, b, und spanne sie nach den Richtungen bd, ad so aus, daß $bd = B\alpha$ und $ad = \alpha\delta$ werde, so erhält man bey b einen Winkel = B. Man stecke nun bey C einen Stab ein, welcher sowohl mit b und d, als auch mit A und D in gerader Linie stehe, so wird die Weite bC, die man hierauf messen kann = AB seyn, wie gleichfalls aus der Gleichheit der beyden Dreyecke bDC, ADB erhellet.

Es wird bey diesem Verfahren gut seyn, die Längen $B\alpha$, $B\delta$ nicht gar zu klein, sondern z. E. einige Ruthen lang zu nehmen.

Noch besser und bequemer ist es, $B\alpha = B\delta$ zu nehmen, damit das Dreyeck $\alpha B\delta$ gleichschenklicht werde.

Zus.

Zus. IV. Aus den gemessenen Seiten des kleinen gleichschenklichten Dreyecks B$\alpha\delta$, läßt sich der Winkel B durch trigonometrische Rechnung finden. Wenn man nun auf eben die Art auch bey D, nach den Richtungen DB, DA, die Längen De = Dε willkührlich annähme, und dann eε mäße, so liesse sich aus den Größen De, Dε, eε, auch der Winkel D berechnen. Aus den beyden solchergestalt gefundenen Winkeln B, D, und aus der gemessenen Seite BD, findet sich alsdann die unbekannte Weite AB durch trigonometrische Rechnung. Dieses Verfahren zeigt also, wie bloß durch Hülfe der Meßkette, und der damit verbundenen Rechnung, die Weite AB gefunden werden könnte, ohne daß man nöthig hat, auf dem Felde selbst die Seite BD rückwärts, und den Winkel B an b zu tragen.

Nimmt man die Längen Bα, Bδ, Dε, De, durchaus von gleicher Größe, und z. E. 5 Ruthen lang, so sind für den Halbmesser 5°, die Linien $\alpha\delta$, εe, Sehnen der gesuchten Winkel B, D. Wenn man nun ein für allemahl für den Halbmesser von 5°, oder 5000 Lin. die Sehnen berechnet, und eine Tafel davon verfertigt hat, so findet man aus derselben, sogleich ohne weitere Rechnung die den Sehnen $\alpha\delta$, εe, zugehörigen Winkel. Man vergleiche hiemit §. 138. III. Diese Messungsart, indem man die Winkel durch Hülfe einer

Kette

Kette oder Schnur, und einer Chordentafel bestimmt, ist von vielen Feldmessern empfohlen worden, und die Anwendung davon auf sehr viele Fälle hat Hr. Jeße (gemeinnützige Praxis auf dem Felde und Papier ꝛc.) umständlich auseinander gesezt.

Aufgabe.

§. 180. Eine Weite AB Fig. XXXI. zu messen, zu deren keinem Endpunkte A oder B man bequem hinkommen kann.

I. Aufl. Man seße bey C einen Stab ein, in gerader Linie mit A und B. An C mache man einen rechten Winkel BCD §. 58., und nehme CD von beliebiger Länge. Aus dem Standpunkte D trage man auf CD von D nach c eine andere willkührliche Länge, z. E. einige Ruthen, und seße an c abermahls einen rechten Winkel, damit die Richtung cE mit CA parallel werde. In cE seße man bey b und a, ein paar Stäbe in die Linien DA, DB ein, so ist, weil abc mit ABC parallel läuft

$$AB : ab = BD : bD = CD : cD; \text{ also}$$

$$AB = \frac{ab \cdot CD}{cD}$$

Misset

Misset man also ausser den willkührlich angenommenen Längen CD, cD, auch noch die ab, so findet sich daraus die unbekannte Entfernung AB.

C, c brauchen nicht rechte Winkel zu seyn, wenn sie nur sonst von gleicher Größe sind. — Die Hauptsache kömmt nur darauf an, daß die Richtung cE, der CA parallel werde.

Hat man in der Richtung CA, ein sehr weit entlegenes Object, so läßt sich die Richtung cE, auf eine sehr leichte Art nach §. 60., der CA parallel machen.

II. Aufl. Ein anderes Verfahren, die unzugängliche Weite AB zu finden, zeigt sich Fig. XXXII.

Man nehme bey D einen willkührlichen Standpunkt an, und setze dann bey F einen Stab mit D und A, und bey E einen Stab mit D und B in gerader Linie.

Setze demnächst bey G einen Stab mit B und F in gerader Linie, und alsdann in die gerade Richtung GD, bey H einen Stab, zugleich mit E und A in gerader Linie, so ergiebt sich durch diese Verzeichnung auf dem Felde ein Viereck HGEF; darinnen kann man messen EH, HD, DG, GF, FE, ED, DF.

Um nun die unbekannte Weite AB zu finden, so verzeichne man auf dem Papiere, nach dem verjüngten Maaßstabe eine kleinere Figur ehdgfe, welche der EHDGFE auf dem Felde ähnlich ist, dergestalt, daß die kleinen Dreyecke ehd, edf, fdg, in eben der Ordnung und Verhältniß auf dem Papiere, wie die auf dem Felde, gegen einander liegen.

Man verlängere hierauf die Seiten eh, fd und ed, fg, bis erstere sich in a, und letztere in b durchschneiden, messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit das kleine Viereck aufgetragen worden, die Weite ab; so viel Ruthen, Fuße 2c. man für dieselbe findet, eben so viel Ruthen, Fuße 2c. wird die Weite AB würklich halten, wenn man sie mit der Meßkette messen könnte.

Bew. Weil die kleinen Dreyecke hde, edf, fdg, denen HED, EDF, FDG ähnlich gemacht worden, so sind die Winkel hed = HED; def = DEF, also hed + def = HED + DEF, oder der Winkel hef = HEF; nun ist auch efd = EFD, folglich in den Dreyecken AEF, aef, die Winkel an den Grundlinien EF, ef einander gleich, nemlich AEF = aef; EFA = efa; daher die beyden Dreyecke AEF, aef einander ähnlich; auf gleiche Weise sind auch die Dreyecke BEF, bef,

bef, ähnlich. Dieß giebt also folgende Proportionen:

$$AE : EF = ae : ef$$
$$EF : EB = ef : eb$$

$$\text{Also } AE : EB = ae : eb$$
$$\text{Aber auch } AEB = aeb$$
$$\text{Daher Dr. } AEB \backsim \text{Dr. } aeb$$
$$\text{Mithin } AE : AB = ae : ab$$
$$\text{Aber auch } EF : AE = ef : ae$$

$$\text{folglich } EF : AB = ef : ab$$
$$\text{oder } EF : ef = AB : ab.$$

D. h. weil nach dem verjüngten Maaße ef so viel Ruthen, Fuße ꝛc. hält, als EF auf dem Felde nach der Meßkette, so wird auch ab nach dem verjüngten Maaße so groß seyn, als AB nach der Meßkette.

Uebrigens ist es bey diesem Verfahren vortheilhaft, die Standlinie EF auf dem Felde nicht zu kurz anzunehmen.

III. Aufl. Ein anderes Verfahren, die unzugängliche Weite AB Fig. XXXIII. zu finden, ist folgendes. Man wähle bey C einen willkührlichen Standpunkt, und setze in mäßiger Entfernung von C, bey E, D, ein paar Stäbe in die geraden Richtungen CB, CA; in den Verlängerungen von CE, CD, DE, nehme man EG = CE, HD = CD, EF und DI = DE. Setze bey G, F, H, I, Stäbe ein.

Hierauf bringe man bey L einen Stab hin, so, daß er sich sowohl mit G, F, als auch mit A, E, in geraden Richtungen befindet, so wird GL = CA seyn, wie sich leicht erweisen läßt. Auf eben die Art setze man bey K einen Stab, gemeinschaftlich in die geraden Richtungen HIK, BDK, so wird auch HK = BC seyn. Man messe also die beyden Längen HK, GL, und trage erstere in die Verlängerung von BC, von C nach b, die andere GL, in die Verlängerung der AC, von C nach a, so wird die Weite ab, die man nun messen kann, der AB gleich seyn.

Dieses Verfahren gehet auf dem Felde, wenn man nur Platz zum Rückwärtstragen hat, gleichfalls sehr bequem von statten, und ist weit leichter, als das ähnliche Pentherische (S. dess. pract. Geometrie §. 383.) und weniger zusammengesetzt, als dasjenige, welches Hr. Jetze (Gemein. Praxis auf dem Felde ꝛc. p. 33.) vorträgt.

IV. Auflös. Gebrauch entfernter Objecte.

Wenn man auf dem Felde eine freye Aussicht nach sehr weit entlegenen Gegenständen haben kann, so kann man sich derselben mit Vortheil auf folgende Art zu Ausmessung unbekannter Entfernungen bedienen.

Es

Es sey Fig. XXXIV. AB die auszumessende Weite.

Man nehme eine willkührliche Standlinie CD an; und visire bey C, auf welchen Gegenstand I des entlegenen Horizontes die Richtung CA hintrifft. Dc sey nun ein beliebiger Theil der Standlinie DC. Man begebe sich nach c, und lasse bey i einen Stab in die Richtung cI nach dem entlegenen Objecte, einsetzen. Auf gleiche Weise treffe die Richtung CB auf das Object K am entlegenen Horizonte, und man lasse auch bey k einen Stab in die Richtung cK einsetzen. Hierauf gehe man mit zwey Stäben in der Richtung ci, vorwärts, (welches geschiehet, wenn man mit den Stäben c, i, immer in gerader Linie bleibt) und setze bey a einen Stab so ein, daß ein Gehülfe bey D, ihn zugleich in der geraden Linie DA siehet. Auf gleiche Weise gehe man auch mit dem andern Stabe in der Richtung ck vorwärts bis nach b, wo der Gehülfe bey D ihn in der geraden Linie DB siehet; solchergestalt stehet also a in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden Linien cI, DA, und b in dem Durchschnitte der beyden Richtungen cK, DB. Man messe hierauf die Weite ab, so wird dieselbe ein solcher Theil von AB seyn, als cD von der Standlinie CD ist.

Denn

Denn weil die Objecte I, K sehr weit entlegen sind, so kann man ohne großen Fehler die Stücken ca, CA und cb, CB, als parallel ansehen §. 60., mithin die Winkel ACD = acD; CDB = cDb, BCD = bcD, folglich die Dreyecke ACD dem acD, und BCD dem bcD ähnlich setzen. Daher hat man

$$\begin{array}{l} DA : Da = DC : Dc \\ BD : bD = DC : Dc \\ \hline \end{array}$$

also $DA : Da = BD : bD$,

folglich wegen des gemeinschaftlichen Winkels ADB das Dr. ABD ∽ abD, mithin

$$AB : ab = BD : bD = DC : Dc,$$

folglich ist ab ein solches Stück von AB, als cD von CD ist.

Es verstehet sich, daß diese Methode desto weniger fehlerhaft ist, je weiter die Gegenstände I, K am Horizonte hinaus liegen.

Diesen Gebrauch entfernter Gegenstände zu Messung der Weiten lehrt unter andern Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geom. §. 177 ff. Es ist kein Zweifel, daß man sich dieses Verfahrens in Fällen, wo die zu bestimmende Weite AB nicht gar zu groß ist, oder von der Standlinie zu weit wegliegt, mit Nutzen wird bedienen können.

Anmer-

Anmerkung.

§. 181. Das bisherige mag zureichen, Anfängern Gelegenheit zu geben, sich in Messung gerader Linien auf diese Art zu üben. Man wird indessen bald wahrnehmen, daß, wenn die auszumessenden Weiten entweder zu groß sind, oder von der Standlinie, oder den Standpunkten zu weit wegliegen, die gegebenen Auflösungen theils unzulänglich, theils auch wegen vorkommender Hindernisse und Mangel des Raumes entweder gar nicht ausgeübt werden können, oder doch zu weitläuftig ausfallen. Wenn aber diese Einschränkungen nicht vorhanden sind, so kann man sich ihrer oft mit Vortheil bedienen. Uebrigens kömmt die Richtigkeit des Verfahrens auch auf eine geschickte Auswahl der Standlinien, oder der Standpunkte an, wo man die Vorsicht gebrauchen muß, daß an denselben nicht gar zu spitze oder stumpfe Winkel zum Vorschein kommen.

Auch wird es zur Erleichterung der Arbeit, und Irrungen zu vermeiden, gut seyn, wenn man sich von der Auflösung einer Aufgabe, vorher einen Entwurf auf dem Papiere macht, ehe man die Operation auf dem Felde selbst vornimmt.

Eine andere Einschränkung der bisherigen Methoden, ist, daß die auszumessenden Weiten mit

mit den willkührlich angenommenen Standpunkten oder Standlinien sich in einer einzigen Ebene befinden müssen; in bergigten Gegenden würden daher die gegebenen Auflösungen selten anwendbar seyn.

Wir müssen also auf andere Hülfsmittel bedacht seyn, und hierzu werden uns der Meßtisch, das Astrolabium, die Boussole ꝛc. vortreffliche Dienste leisten.

Messung der Weiten, an die sich der Maaßstab nicht unmittelbar bringen läßt, durch Hülfe des Meßtisches, des Astrolabii ꝛc.

Aufgabe.

§. 182. A, B, Fig. XXXV. Tab. III. sind zwey dergleichen Objecte, man soll ihren Horizontalabstand AB finden, vorausgesetzt, daß man von einem willkührlichen Standpunkte C, geradezu nach B und A hinmessen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches: Man bringe den Meßtisch über den Standpunkt C, stelle ihn horizontal (§. 113.) und bestimme auf ihm einen Punkt c, der loth-

recht

recht über C liegt (§. 128. IV.). An c lege man das Diopterlinial, visire nach A, B, und ziehe dahin die Richtungslinien cm, cn, so hat man den Winkel ACB auf dem Felde, aufs Meßtischgen gebracht (§. 128.). Man messe nun die Weiten CA, CB, und trage erstere CA nach dem verjüngten Maaßstabe auf den Meßtisch von c nach a, die andere CB aber, auf die entsprechende Richtung cn von c nach b. Messe demnächst auf dem Meßtische die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird solche der AB gemäß oder ähnlich seyn, d. h. nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca, cb, aufgetragen hat, so viel Ruthen, Schuhe, und Zolle halten, als AB nach der Meßkette, halten würde, weil wegen des Winkels ACB = acb, und der Proportion AC : CB = ac : cb, das Dreyeck acb auf dem Meßtische, dem großen Dreyecke ACB ähnlich seyn wird.

II. Aufl. Vermittelst des Astrolabii AB zu finden, messe man den Winkel ACB (§. 132.) und die beyden Seiten AC, BC; berechne hieraus in dem Dreyecke ACB die Seite AB nach der gewöhnlichen Weise, oder nach (Trig. S. XVIII).

Wollte man nicht so genau verfahren, so trüge man, vermittelst eines geradlinigten Transporporteurs, den gemessenen Winkel ACB aufs Papier, und setzte auf beyde Schenkel die verjüngten Weiten CA, CB, so erhielte man, wie auf dem Meßtische ein kleines Dreyeck, das dem großen ACB ähnlich wäre ꝛc.

Aufgabe.

§. 183. Die Weite AB (Fig. XXXVI) zu finden, wenn man von einem willkührlichen Stande C nur nach A hinmessen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches.
1. Man bringe wie vorhin (§. 182.) den Meßtisch über C, und bestimme auf demselben den Winkel mcn = ACB; messe die Weite CA und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie cm, von c nach a.

2. Man nehme nun den Meßtisch über C weg, und stelle ihn horizontal über A, dergestalt, daß der Punkt a (1) über A, und durch gehörige Verrückung und Wendung des ganzen Meßtisches, die Richtung ac in die gerade Linie CA, oder vielmehr in die über AC eingebildete Verticalebene zu liegen komme, so, daß man bey A durch die Diopten des längs ac gelegten Linials, das bey dem ersten Stande C zurückgelassene Signal bedeckt siehet — so wird die bey der ersten Station C auf dem Meßtische nach

nach B gezogene Linie cn, bey der zweyten Station über A, die Lage cn, die mit der cn der erstern Station, parallel seyn wird, bekommen.

3. Man lege nun an a über A, die dioptrische Regel, visire nach B, und ziehe auf dem Meßtische die Richtungslinie ar; wo dieselbe die Richtung cn durchschneidet, da wird sich ein Punkt b ergeben, welcher gegen a, c, eben die Lage haben wird, die B gegen A, C hat; denn vermöge des Verfahrens ist wieder das Dreyeck auf dem Meßtische, nemlich abc, dem großen ABC ähnlich, weil die Winkel acb = ACB, cab = CAB sind. Die Linie ab auf dem Meßtische, wird also nach dem verjüngten Maaßstabe, der AB gemäß seyn.

Es versteht sich, daß, während man auf dem Meßtische die Linien neben der Regel herziehet, derselbe unterdessen in unverrückter Lage erhalten werden müsse.

Anmerkungen.

4. Wenn man bey einer gewissen Station wie A (2) die Linie ac auf dem Meßtische, nach der vorhergehenden Station C zurückrichten will, so daß zugleich a lothrecht über A zu liegen komme, und der Meßtisch horizontal stehe, so ist die Vorsicht nöthig, daß,

wäh-

während man vermittelst der Gabel (§. 128. IV.) und durch das Verrücken des Stativs den Punkt a lothrecht über A bringt, man zugleich auch der Linie ac nur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße die Richtung nach C gebe; Denn müßte man, nachdem a über A gebracht worden, nachher den Meßtisch noch viel wenden, um ac in die völlig genaue Richtung nach C vermittelst Anlegung des Diopterlinials zu bringen, so würde der Punkt a nicht lothrecht über A bleiben, sondern sich während der Horizontalwendung des Tischblatts wieder merklich von A entfernen. Dieß kann hingegen nicht geschehen, wenn in dem Augenblicke, da a über A einspielt, auch die Linie ac schon ohngefähr die Richtung nach C hat. Die geringe Horizontalwendung, die nemlich alsdann zur völlig genauen Einrichtung von ac, noch vorzunehmen ist, wird keine so merkliche Aenderung in der Lage des Punktes a bewürken, daß daraus in der Ausübung beträchtliche Fehler zu besorgen wären.

5. Hr. Conrector Voigt in Quedlinburg hält in seinen neuesten Besuchen zur Erleichterung der practischen Geometrie (Leipz. 1792.) II. Abschn. §. 24 u. f. die Forderung (4) für äusserst schwer in der Ausübung. Er meynt, man möge bey A den Meßtisch drehen, rücken und wenden, wie man wolle,

wolle, so werde man nie allen drey Bedingungen, nemlich daß

erstlich, a lothrecht über A zu liegen komme,

zweitens, ac längs AC eingerichtet sey, und

drittens, der Meßtisch horizontal stehe,

zugleich eine Genüge leisten können, ausser nur in dem Falle, wenn der Punkt a in die Mitte des Meßtisches falle. Denn so bald a ausserhalb dieser Mitte liege, so beschreibe a bey der Wendung des Tischblatts einen Kreis, und habe man daher anfänglich a über A gebracht, so werde sich a wieder verrücken, wenn hierauf ac nach C zurückgerichtet werden soll, oder habe man anfänglich ac längs AC eingerichtet, so werde, wenn man alsdann die Gabel anlegt, durch einen äusserst seltenen Zufall a lothrecht zugleich über A einspielen, oder gesetzt auch, es geschehe, so werde doch nachher bey der Horizontalstellung des Meßtisches der Punkt a sich wieder verrücken u. s. w.

6. Daß mir diese Schwürigkeiten in der Stellung des Meßtisches nicht unbekannt gewesen sind, wie Hr. V. zu meynen scheint, erhellet aus dem §. 227. IV. der ersten Ausgabe dieses II. Theils meiner praktischen Geometrie. Ich fand es aber kaum der Mühe werth, davon

von so viel Aufhebens zu machen, und empfohl also bloß die Vorsicht (4). Denn ich hatte mich durch viele Erfahrung, auch an meinen Zuhörern, überzeugt, daß es gar so schwer nicht sey, allen drey Bedingungen (5) in so weit eine Genüge zu leisten, daß der Fehler für die Ausübung unmerklich werde, wenn man erstlich beym Verrücken der Beine des Stativs, immer zugleich mit nach dem Augenmaaße längs ac hinausvisirt, und davor sorgt daß 2) während man mit der Stellung und Einrichtung des Meßtisches beschäftigt ist, die Gabel (§. 128. IV.) festhänge, damit man beständig den Punkt auf dem Boden, und das von der Gabel herabhängende Loth vor Augen haben kann. Es ist daher nöthig, (und freylich hätte ich dieß erwähnen sollen), daß die an den jedesmahligen Punkt auf dem Meßtische angelegte Gabel, sich an der untern Fläche des Tischblatts durch eine Handschraube ohngefähr wie (Fig. LXXXVI.) befestigen lasse, damit sie während der Verrückung und Wendung des Tisches nicht abgenommen werden darf. So geringe dieser Umstand zu seyn scheint, so wesentlich ist er, wenn Anfänger die gehörige Stellung des Meßtisches ohne Zeitverlust sollen bewerkstelligen können. Denn gesetzt, man habe die Gabel angelegt, und bemerkt, der Punkt a auf dem Meßtische falle nach dem Augenmaaße etwa 2 Zoll seitwärts des Punktes A auf dem

Boden, man wolle nun den Meßtisch etwas rücken, damit a genau lothrecht über A einspiele, so wird es schwer seyn, dieß zu leisten, wenn man während dem Verrücken des Meßtisches die Gabel abnehmen muß; hängt sie aber fest, so ist es sehr leicht, a genau über A zu bringen, visirt man nun dabey immer zugleich nur nach dem Augenmaaße längs ac, damit ac beym Verrücken des Meßtisches nicht merklich aus der Richtung nach C komme, so wird es gewiß nicht die geringste Schwürigkeit haben, allen drey Bedingungen (5) in so fern eine Genüge zu leisten, daß man sich in der Ausübung damit befriedigen kann; Denn wenn man, nachdem a genau über A einspielet, ac nunmehr durch Wendung des Tisches völlig genau nach C zurückrichtet, so wird a nur mit einem unmerklichen Fehler sich verrücken, und auch dieser Fehler läßt sich noch leicht verbessern. — Die Verrückung, welche die Horizontalstellung des Meßtisches in dem Punkte a hervorbringt, hat so viel als nichts zu bedeuten. Der Meßtisch sey, nachdem a über A einspielet, auch um 5 und mehrere Grade geneigt, so wird nach geschehener Horizontalstellung, vermittelst der Nuß, sich noch immer ohne merklichen Fehler a lothrecht über A befinden. Die merklichste Verrückung von a geschieht immer durch die Horizontal-Wendung des Tischblatts, wodurch ac längs AC eingerichtet wird. Da ich aber annehme, daß nach ge-

geschehener Einspielung des Punktes a über A, auch immer schon nach dem Augenmaaße ac längs AC liege, so wird, nachdem der Meßtisch horizontal gestellt, und hierauf das an ac angelegte Diopterlinial, völlig genau nach C eingerichtet worden, die Verrückung des Punktes a so wenig betragen, daß sehr selten noch eine kleine Verbesserung nöthig seyn wird. Ich berufe mich hiebey auf meine vielfältige Erfahrung, und auf das Zeugniß derjenigen, welchen ich in der practischen Geometrie Unterricht ertheilt, und die ich gewiß auf alle Irrthümer aufmerksam gemacht habe, die bey geometrischen Operationen zu befürchten sind. Da ich glaubte, daß einen jeden, bey der ersten besten Operation, die eigene Praxis lehren würde, daß, ohne die Gabel zu befestigen, es etwas schwer hält, den Meßtisch gehörig zu stellen, so hielte ich es kaum der Mühe werth, dieses Umstandes zu erwähnen. Ich sehe aber jetzt, daß man in Erzählung praktischer Handgriffe, für manche nicht umständlich genug seyn kann. Ich hoffe durch gegenwärtige Erläuterung nunmehr vollkommen von dem Vorwurfe einer Unvollständigkeit befreyt zu seyn.

7. Hr. V. hat wegen der ihm so schwer fallenden Ausübung der Forderung (5), ein neues Verfahren, den Meßtisch zu richten, vorgeschlagen, und in oberwähnter Schrift mit sehr vielen Beyspielen zu erläutern gesucht. In

der

der Hauptsache besteht es darin, daß 1) allemahl der Mittelpunkt des Meßtisches über den Stationspunkt gestellt werde, 2) daß man allemahl aus diesem Mittelpunkt visire, und dann 3) um an einem Punkte wie a, ausserhalb der Mitte des Meßtisches, die wahren Winkel zu erhalten, mit dem aus dem Mittelpunkte gezogenen Visirlinien, durch a Parallellinien ziehe. Dieses ist mit noch einigen Vortheilen, die im Buche selbst nachgelesen werden müssen, so umständlich auf alle geometrischen Operationen angewandt, daß über die Hälfte des Buchs damit angefüllt ist. Meine Art, die Gabel zu gebrauchen, und beym Einrichten des Meßtisches zu verfahren, macht dieß alles überflüssig.

8. Weil indessen bey dem Verfahren des Verf. sich zugleich zeigte, daß die bisher so hochgepriesene Nuß an dem Meßtische ein völlig überflüssiges Ding sey, und nicht einmahl verstatte, den zwey Bedingungen, daß der Meßtisch horizontal stehe, und der Mittelpunkt desselben über den Stationspunkt einspiele, zugleich ein Gnüge zu leisten, so fügt er denn noch bey, auf welche Art er den Meßtisch und das Stativ eingerichtet wissen will. Warum man sich so lange der Nuß bedient habe, rühre von einem Vorurtheile des Ansehens her, auch hätten "die mehresten praktischen Feldmesser „nicht Theorie genug, um die Fehler und Un-

„bequemlichkeiten, welche ihnen in der Arbeit „aufstoßen, zu untersuchen, und gelehrte Ma„thematiker pflegten sich mehr mit tiefsinnigen „Speculationen auf der Studierstube, als mit „Instrumenten zum Feldmessen abzugeben.“

9. Daß ein Lowitz, Tob. Mayer, Meister, und andere, die der Verf. doch wohl als gelehrte Mathematiker kennt, sich auch mit Feldmessen und Feldmesser-Werkzeugen abgegeben haben, könnten ihn alte göttingische Lectionscatalogen, und die Schriften dieser Männer lehren. Hätten die bisher üblich gewesene Nuß, das dreybeinigte Stativ, und das gewöhnliche Verfahren, den Meßtisch zu stellen, so ungeheure Schwürigkeiten in der Ausübung, als Hr. V. behauptet, woher käme es, daß die Ehre, die ganze praktische Geometrie zu reformiren, nur allein Hrn. V. vorbehalten seyn konnte, und daß erst zu Ende dieses Jahrhunderts eine Entdeckung gemacht werden konnte, die doch wahrlich einem jeden bey der ersten besten Operation sich hätte darbieten müssen. Sollten sich obige Männer, und andere einsichtsvolle Feldmesser, die ich kenne, auch von dem Vorurtheile des Ansehens haben regieren lassen? Ich weiß also nicht, woran es liegt, daß bey der Erfüllung obiger Bedingungen (5), die Nuß und das gewöhnliche dreybeinigte Stativ sich bey des Hrn. V. Praxis so eigensinnig bewiesen haben.

10. Es ist mir zwar nicht unbekannt, daß schon mehrere Feldmesser sich statt der Nuß, zum Horizontalstellen des Tisches, Schrauben bedienet haben, die an dem untern Theile der Stativschenkel angebracht werden. Die Ursache aber war, weil die Nuß, wenn sie ihres Zwecks, nemlich den Meßtisch auch mit zu unterstützen, nicht verfehlen soll, sehr stark gemacht werden muß, und dieß ansehnliche Kosten verursacht. Ist sie zu schwach, so giebt sie nach, und der Meßtisch kommt leicht aus der Horizontallage, zumahl wenn man am Rande desselben zu arbeiten hat. Dieß kann aber bey den 3 Schrauben y, y, y, an meinem Meßtische (§. 108. 2) sich nicht eräugnen, und bey mir dient die Nuß bloß zur Horizontalstellung des Tischblatts, und braucht also nicht stark zu seyn. Ich kenne wenigstens keine einfachere Einrichtung, als eine Nuß, einen Meßtisch bequem horizontal zu stellen. Es bloß durch Schrauben an dem untern Theile der Stativschenkel zu bewerkstelligen, hat in der Ausübung manche Beschwerlichkeiten, und verursacht viel Zeitverlust. Ein gleiches möchte bey Hrn. V. Meßtische statt finden.

11. Ich will übrigens dem Verfahren des H. Voigts, im Falle würklich die obgedachten Schwürigkeiten im gehörigen Stellen des Meßtisches statt finden sollten, (welches aber ich wenigstens, bey der Vorsicht (4. 6.) und nach

meiner Praxis, nicht zugebe) das Sinnreiche nicht absprechen, gebe aber doch zu überlegen, ob das Ziehen der Parallellinien auf dem Meßtische, mit den aus dem Mittelpunkte gezogenen Visirlinien, und die übrigen von dem V. angegebenen Hülfsmittel, die Operationen nicht zusammengesetzter machen, die Aufmerksamkeit auf das übrige stören, leicht Irrungen veranlassen, und nicht zeitraubender sind, als das gewöhnliche Verfahren bey den Vorsichten (4) und (6). Es kann etwas auf dem Papiere ganz gut seyn, wovon die Praxis ganz anders urtheilt. Ich habe seit zwanzig Jahren manchen Unterricht in der praktischen Geometrie ertheilt, manche erhebliche Messung veranstaltet, auch manche Vorschläge zur Erleichterung praktischer Arbeiten geprüft, daß ich mir schmeichle, ziemlich mit den Schwürigkeiten bekannt zu seyn, die bey Feldmesseroperationen aufstoßen können, aber bis jetzt habe ich noch keine Ursache gefunden, die Nuß abzudanken, noch viel weniger die Forderungen (5) für ein so unauflösliches Problem zu halten. Es versteht sich, daß freylich auch hierzu einige Uebung nöthig ist. Ungeschickte Hände bringen aber auch bey des Hrn. Verf. Verfahren nichts zu Stande, und begehen z. E. nur bey dem Ziehen der Parallellinien (7) Fehler, die größer sind, als diejenigen, welche bey dem gewöhnlichen Verfahren zu besorgen sind.

Aufl. II. Mit dem Astrolabio messe man die beyden Winkel C, A, und finde aus C, A, AC, die Seite AB durch Rechnung, nach der bekannten Proportion

$\sin B : AC = \sin C : AB$; wo $B = 180° - A - C$ mithin

$\log AB = \log AC + \log \sin C - \log \sin (180° - A - C)$.

Anmerkung.

Es pflegt sich unterweilen (in Aufl. I.) zuzutragen, daß wegen der Wahl eines zu großen verjüngten Maaßstabes, oder weil der Punkt c auf dem Meßtische nicht bequem angenommen worden, die Richtungslinie ar die cn auf dem Meßtische nicht durchschneidet, sondern daß der Durchschnitt b ausserhalb des Meßtisches fällt. In diesem Falle, welcher Fig. XXXVII. vorgestellet ist, wo ar die Richtung cn in b ausserhalb des Meßtisches schneidet, nehme man entweder einen kleinern verjüngten Maaßstab an, womit man die Weite CA von c nach a aufträgt; oder wenn man denselben Maaßstab beybehalten will, so halbire man bey γ die Linie ac, oder nehme $a\gamma = \frac{1}{2}$ ac oder $\frac{1}{4}$ ac, je nachdem man es für gut befindet, und ziehe durch γ mit cn eine parallele $\gamma\beta$, welche die Richtungslinie ar nach B, in β durchschneidet, also in einem Punkte, der auf den

Meß=

Meßtisch fällt. Messe nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man ca aufgetragen hat, die Weite aβ. Hätte man nun a$\gamma = \frac{1}{2}$ ac genommen, so wäre auch a$\beta = \frac{1}{2}$ab; für a$\gamma = \frac{1}{3}$ ac, wäre a$\beta = \frac{1}{3}$ ab u. s. w. Man würde also die der AB gemäße Weite ab, dennoch vermittelst der aβ finden, obgleich b ausserhalb des Meßtisches fiele.

Beym Gebrauche des Astrolabii ist man solchen Vorfällen, wie eben gewiesen worden, nicht ausgesetzt, weil man da AB durch Rechnung findet.

Wenn die Weite AB sehr groß ist, so wird der Durchschnitt b sehr oft ausserhalb des Meßtisches fallen, oder man müßte einen sehr kleinen verjüngten Maaßstab annehmen. Dann könnte man sich aber keine große Genauigkeit versprechen. Deßwegen ist bey Messung sehr großer Weiten immer das Astrolabium vorzuziehen.

Einige practische Schriftsteller rathen ein Brett A von guten trockenen Lindenholze, wie Fig. XXXVIII. ausweiset, das etwa 6 bis 8 Zoll breit, und eben so lang und dick als der Meßtisch ist, bey w, r, mit zweyen eingeschnittenen Nuthen zu versehen, die man demnächst an ein paar Leisten i, k, welche etwa durch Schrauben an die untere Fläche des

Meß=

Meßtisches Fig. XXXVII. befestigt werden können, anschiebet, so, daß das Brett A mit der Ebene des Meßtisches genau in einer einzigen Fläche zu liegen komme. Da man solchergestalt durch das angesetzte Brett einen grössern Raum auf dem Meßtische erhält, so kann man sich dadurch aus der Verlegenheit helfen, wenn ein Durchschnittspunkt wie b Fig. XXXVII. ausserhalb des Meßtisches fallen sollte, weil man alsdann den Durchschnitt b auf dem angesetzten Brette erhalten wird, wenn anders b nicht gar zu weit ausserhalb des Meßtisches fällt.

Aufl. III. Da man bey der vorgelegten Aufgabe nöthig hatte, den Meßtisch von dem ersten Standpunkte C nach A zu bringen, und dieses Tragen des Meßtisches von einem Orte zum andern, mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden ist, auch fehlerhaft werden kann, wenn man bey der zweyten Station über A, den Meßtisch nicht sorgfältig genug nach C zurückrichtet, so kann man durch folgendes Hülfsmittel das Forttragen des Meßtisches ersparen. S. Fig. XXXIX. Man stecke nemlich, nachdem der Meßtisch über C gestellet worden, bey D und O, in beliebiger Weite von C ein paar Stäbe ab, die mit B in gerader Linie stehen. Nun ziehe man auf dem Meßtische aus dem lothrecht über C liegenden Punkte c, nach den vier Objecten A, B, O, D, die unbestimmten

Rich-

Richtungslinien ct, cw, cn, cm; die gemessenen Weiten CA, CO, CD, trage man nach dem verjüngten Maaße, auf die entsprechenden Richtungslinien ct, cn, cm, von c nach a, von c nach o, von c nach d. Ziehe durch die Punkte d, o, auf dem Meßtische die gerade Linie dob, welche die nach B zulaufende Richtung cw in b schneidet, messe dann die Weite ab, nach dem verjüngten Maaßstabe, so wird man die AB in Ruthen, Fußen und Zollen finden, weil ab der AB gemäß (§. 182. I.) seyn muß.

Denn wegen des gemeinschaftlichen Winkels OCD = ocd, und weil man co : cd = CO : CD gemacht hat, ist der Triangel cod ∽ COD, also der Winkel cdo = CDO, folglich auch der Triangel bcd ∽ BCD, weil die Winkel in beyden einerley sind.

folglich cb : CB = cd : CD. Es ist aber auch
(per Constr.) ca : CA = cd : CD

also cb : CB = ca : CA
Auch d. Winkel ACB = acb
folgl. d. Dreyeck ACB ∽ acb
Mithin ca : CA = ab : AB,

d. h. weil man nach dem verjüngten Maaße ca der CA gemäß gemacht hat, so wird nach eben dem Maaßstabe auch ab der AB gemäß seyn.

Dieses Verfahren ist in der That zu empfehlen, ob man gleich die Linien CO, CD, ausser der CA, auch noch messen muß; dadurch erspart man sich aber das Forttragen des Meßtisches, wie auch die gehörige Stellung über A, wozu oft mehr Zeit erfordert wird, als zur Messung der Linien CO, CD.

Es ist vortheilhaft, den Punkt D nicht zu nahe bey C anzunehmen. Kann man ihn einige Kettenlängen weit von C annehmen, so wird dieß in den meisten Fällen hinreichend seyn. Dieß geschieht deswegen, damit der Winkel CBD, und folglich auch cbd auf dem Meßtische nicht zu spitzig ausfalle wegen (§. 185. I.).

Aufgabe.

§. 184. Eine Weite AB Fig. XL. zu messen, zu deren keinem Ende A oder B, man aus willkührlichen Standpunkten C, D, hinkommen kann.

Aufl. I. Vermittelst des Meßtisches. Man nehme eine willkührliche, nicht zu kleine Standlinie CD an, bringe den Meßtisch horizontal über C, und bestimme auf demselben den Punkt c, der über C lothrecht liegt.

An c lege man die Regel, visire nach A, B, D, und ziehe dahin die Richtungslinien

cm,

cm, cn, cr. Messe nun die Standlinie CD, und trage sie verjüngt, auf die zugehörige Richtung cr, von c nach d, so stellet der Punkt d auf dem Papiere den Punkt D auf dem Felde, vor.

Hierauf bringe man den Meßtisch mit den darauf gezogenen Linien cm, cn, cr, nach der zweyten Station über D; dergestalt, daß 1) der bey der ersten Station erhaltene Punkt d, lothrecht über D, 2) die Linie dc bey der zweyten Station wieder längs DC zu liegen komme, dergestalt, daß man durch die Dioptern der längs dc angelegten Regel, die bey C zurückgelassene Fahne erblickt, und 3) der Meßtisch horizontal stehe, nach dem Verfahren (§. 183. 4. 2c.).

In dieser Lage bleibe er nun unverrückt.

Man richte die Diopteren nach A und B, und ziehe aus d, längs des Diopterlinials, die Richtungen da, db, oder, ohne diese Linien da, db würklich auszuziehen, bemerke man bloß deren Durchschnitte a, b, auf den Richtungslinien cm, cn, die bey der erstern Station des Meßtisches, nach den Objecten A, B, hingezogen worden, so wird man auf dem Meßtische bey D die Weite ab finden, welche der AB nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man dc aufgetragen hat, gemäß seyn,

mit-

mithin die auf AB gehende Menge von Ruthen u. s. w. anzeigen wird.

Bem. Weil die Winkel acd = ACD und adc = ADC, so ist das Dreyeck acd dem Dreyecke ACD ähnlich. — Dieß giebt folgende Proportionen

$$AC : ac = CD : cd \text{ und eben so}$$
$$BC : bc = CD : cd$$
$$\text{also } AC : ac = BC : bc$$
$$\text{oder } AC : BC = ac : bc$$

da nun auch der Winkel ACB = acb, so ist das Dreyeck acb dem ACB ähnlich, mithin AB : ab = AC : ac = CD : cd, oder AB : CD = ab : cd, d. h. wenn cd die Weite CD nach dem verjüngten Maaßstabe ausdrückt, so wird auch ab die AB nach diesem Maaßstabe ausdrücken.

Zus. I. Diese Aufgabe ist sehr wichtig, denn so wie die Linie AB auf dem Felde, durch ab auf dem Meßtische, entworfen worden, so dienet diese Aufgabe, selbst ganze Figuren auf das Papier zu bringen, wovon in der Folge mit mehrerem Unterricht gegeben werden soll.

Die wichtigste Vorsicht ist 1) den Meßtisch in unverrückter Stellung zu erhalten, während man Linien auf demselben ziehet, und 2) bey der

der zweyten Station des Meßtisches, durch gehörige Wendung des Tisches, die Linie dc genau längs DC einzurichten.

Wenn letzteres geschehen ist, so werden die Linien ca, cb, oder cm, cn, die man über der erstern Station auf dem Meßtische erhalten hatte, bey der zweyten Station desselben über D, genau mit den correspondirenden Linien auf dem Felde, d. h. mit CA, CB parallel seyn, weil der Winkel acd = ACD, bcd = BCD u. s. w.; Auch ab wird mit AB parallel werden, dergestalt, daß also über der zweyten Station alle Linien ac, ab rc. denen zugehörigen AC, AB gleichlaufend seyn werden.

Zus. II. Man kann auch, ohne bey der zweyten Station des Meßtisches dc längs DC durchs Zurückvisiren einzurichten, den gehörigen Stand des Meßtisches, durch Hülfe einer guten Magnetnadel, erhalten.

Da nemlich die Richtungen der Magnetnadel ohne merklichen Fehler als parallel angenommen werden können, wenn die Oerter nicht weit von einander entfernt sind (§. 118. 6.), so ziehe man, nachdem über der ersten Station die Linien cm, cn, cr, gezogen worden, bey unverrückter Stellung des Meßtisches, auf demselben auch die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ (§. 121.).

Da=

Damit nun bey der zweyten Station des Meßtisches über D, die Linien cm, cn, denen CA, CB parallel werden, und übrigens auch dc längs DC zu liegen komme, so bringe man durch gehörige Verrückung des Tisches erstlich den Punkt d lothrecht über D, und dabey die Linie dc nur erst ohngefähr nach dem Augenmaaße in die Richtung DC. Hierauf lege man die dioptrische Regel wieder an die bereits bey der ersten Station gezogene Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, wende demnächst den ganzen Meßtisch horizontal herum, und bediene sich dabey der Schraube (§. 108. 5.), wodurch man dem Tischgen die sanfte Wendung geben kann, bis die Magnetnadel wieder genau über der auf dem Boden des Magnetkästgens gezogenen Nordlinie einspielet, so wird alsdann die Linie $\mu\nu$ über der zweyten Station, der $\mu\nu$ über der erstern, parallel werden. Mithin werden auch die Richtungen cm, cn, bey der Station 2, mit CA, CB die gehörige parallele Lage erhalten, und wenn d über D liegt, so wird auch dc längs DC fallen. Mithin wird man durch Hülfe der Magnetnadel eben das erhalten, was sonst bey der zweyten Station, durchs Zurückvisiren nach der erstern, erreicht wird.

Dabey wird aber zum vorausgesetzt, daß D von C nicht gar zu weit wegliege, weil es sonst ohne einigen Fehler nicht verstattet ist, die Richtung der Nadel bey D, mit der Richtung derselben bey C, als gleichlaufend anzunehmen.

Dieses Verfahren, durch Hülfe der Magnetnadel, an jeder folgenden Station, den Meßtisch so zu stellen, daß die auf demselben bereits bey der ersten Station erhaltenen Linien, wieder mit den correspondirenden auf dem Felde parallel werden, habe ich hier nur gelegentlich beygebracht, weil es sonst in andern Fällen nützlich ist. Auch wird es bey der Vermessungsart gebraucht, deren sich Hr. Hogreve (S. deff. Landesvermessungen) bey der topographischen Aufnahme eines Landes bedient.

Bey der Aufgabe des gegenwärtigen §phes, (und in allen Fällen, wo es geschehen kann) wollte ich aber doch allemahl lieber rathen, sich bey der zweyten Station, des Zurückvisirens nach der erstern, zu bedienen, weil dasselbe nicht den Fehlern unterworfen ist, die sich von den zufälligen Unvollkommenheiten der Magnetnadel (§. 120. 7. 8.) befürchten lassen.

II. Auflösung.

Man kann auch, ohne den Meßtisch in die zweyte Station D zu bringen, sogleich bey der erstern C die Weite AB finden; nur muß man

sich

sich die Mühe geben, noch einige Linien mehr zu messen. S. die XXXIX. Figur.

Nachdem man nemlich den Meßtisch gehörig über C gestellet hat, so lasse man bey D, O, ein paar Stäbe mit B in die gerade Linie DB, und bey I einen Stab in die gerade Linie DA einsetzen. Ziehe nun auf dem Meßtische nach den Objecten A, B, D, O, I, aus c die Linien ct, cw, u. s. w. Messe demnächst die Weiten CD, CO, CI, und trage sie nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungen cm, cn, cw, von c nach d, von c nach o, von c nach i, lege an d, o, und an d, i, ein Linial, so werden die gehörigen Verlängerungen der Linien do, di, auf denen nach A, B gezogenen Richtungen cw, ct, die Punkte b, a, abschneiden, und solchergestalt auf dem Meßtische die Weite ab bestimmen, welche der AB gemäß seyn wird.

Der Beweis hievon ist dem der III. Aufl. des 180. §. völlig ähnlich. Hier liegt I auch in der geraden Linie CB, es ist aber dieses nicht nöthig, wenn I nur in der geraden Linie DA liegt.

III. Auflösung.

Mit dem Astrolabio und durch Hülfe trigonometrischer Rechnung.

Man messe mit dem Winkelmesser bey C (Fig. XL.) die Winkel ACD, BCD; hierauf bey D die Winkel CDA, CDB, und dann die Standlinie CD, so wird sich durch Auflösung einiger Dreyecke, die Weite AB folgendergestalt berechnen lassen.

1. Man nenne die bekannten Winkel BCD $= \alpha$, ACD $= \beta$; CDA $= \gamma$, CDB $= \delta$, die Standlinie CD $=$ m; so sind erstlich in den Dreyecken ACD, BCD, die Winkel

$$CAD = 180° - ACD - CDA = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$CBD = 180° - BCD - CDB = 180° - (\alpha + \delta)$$

bekannt.

2. Man setze also der Kürze halber CAD $=$ A; CBD $=$ B, so ist in den Dreyecken CDA, CDB.

$$\sin A : m = \sin \gamma : AC$$
$$\sin B : m = \sin \delta : BC$$

Daher $AC = \frac{m \sin \gamma}{\sin A} = m \sin \gamma \operatorname{cosec} A$

$$BC = \frac{m \sin \delta}{\sin B} = m \sin \delta \operatorname{cosec} B.$$

3. Also sind die Seiten AC, BC des Dreyeckes ACB bekannt.

4. Auch weiß man den eingeschlossenen Winkel ACB = ACD — BCD = $\beta - \alpha$ (1) daraus läßt sich also die Weite AB trigonometrisch berechnen.

5. Die gewöhnliche Regel ist folgende.

Man nenne die halbe Summe der beyden Winkel CAB, CBA, = S, ihre halbe Differenz = φ; so ist

$$\frac{180^\circ - ACB}{2} = S\text{, oder}$$

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}\, ACB = S.$$

Um die halbe Differenz φ zu finden, so schliesse man

$$BC + AC : BC - AC = \text{tang } S. : \text{tang } \varphi$$

$$\text{also tang } \varphi = \frac{BC - AC}{BC + AC} \text{ tang } S$$

$$= \frac{BC - AC}{BC + AC} \cot \tfrac{1}{2}\, ACB$$

in welcher Formel die Seiten BC, AC, und der Winkel ACB (2. 3. 4.) bekannt sind.

6. Wenn nun BC die größere Seite bedeutet, so ist der gegenüberstehende Winkel CAB bekann-

termaaßen $= S + \varphi = 90^\circ - \frac{1}{2} ACB + \varphi = 90^\circ - (\frac{1}{2} ACB - \varphi)$
also auch CAB bekannt.

7. Hiernächst wird also die Weite AB durch folgende Proportion gefunden

$$\sin CAB : BC = \sin ACB : AB$$

oder (6)

$$\cos(\tfrac{1}{2} ACB - \varphi) : BC = \sin ACB : AB$$

Daher $AB = \frac{BC \sin ACB}{\cos(\frac{1}{2}ACB - \varphi)}$ oder wenn man Tafeln für die Secanten hat

$$AB = BC \sin ACB \sec(\tfrac{1}{2} ACB - \varphi).$$

8. Diese Auflösung kann durch Logarithmen bewerkstelligt werden. Aus (2) erhält man die Logarithmen der Seiten BC, AC; und folglich aus den Tafeln die Seiten BC, AC selbst. Um den Winkel φ (5) zu finden, muß man vorher die Logarithmen von $CB + AC$ und $CB - AC$, berechnen.

Damit man nun nicht nöthig habe, erstlich aus den Tafeln die Seiten BC, AC, und dann die Logarithmen von $BC + AC$; $BC - AC$ zu suchen, so kann man obige Rechnung noch etwas abkürzen, wie folget.

9. Weil aus (5) auch

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \frac{AC}{BC}}{1 + \frac{AC}{BC}} \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB$$ ist, so

suche man einen Winkel $= \psi$, dessen Tangente $= \frac{AC}{BC}$ ist, so hat man

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi} \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB.$$

10. Wenn man aber in Trig. S. XII. 6 das dortige $\beta = 45^\circ$ und $\gamma = \varphi$, mithin $\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} 45^\circ = \sin \operatorname{tot} = 1$ setzet, so wird

$$\operatorname{tang} (45^\circ - \psi) = \frac{1 - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} \psi}.$$

11. Folglich (9)

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} (45^\circ - \psi) \cdot \cot \tfrac{1}{2} ACB$$
$$= \frac{\operatorname{tang} (45^\circ - \psi)}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} ACB}.$$

12. Bringt man also das bisher beygebrachte in eine einzige Vorschrift, und bedienet sich überall der Logarithmen, so erhält man folgende

Regel.

Man suche erstlich nach (2) die Logarithmen der beyden Seiten BC, AC.

Hierauf nach (9) einen Winkel ψ durch $\log \tang \psi = \log AC - \log BC$.

Alsdann nach (11) einen Winkel φ durch $\log \tang \varphi = l \tang (45° - \psi) - l \tang \frac{1}{2} ACB$ so wird (7) $\log AB =$

$$\log BC + \log \sin ACB + \log \sec (\tfrac{1}{2} ACB - \varphi).$$

13. Wenn man sich der gemeinen Formel (5) bedienen will, so muß man in dem Falle, da AC, BC, die Gränzen der Tafeln überschreiten, durch Proportionaltheile die Rechnung führen. Und da braucht man, um den Winkel φ zu berechnen, 4 Proportionaltheile, nemlich zwey um die Werthe von BC, AC, und zwey um die Logarithmen von $BC + AC$, $BC - AC$, zu erhalten.

Bedienet man sich aber der Vorschrift (12), so braucht man dazu nur zwey Proportionaltheile, einen, um den Winkel ψ bis auf Secunden und dann einen, um $\log \tang (45° - \psi)$ zu berechnen.

Daher ist also die Formel (12) zur Berechnung ungleich bequemer, als die gewöhnliche (5).

14.

14. In den meisten Fällen ist es erlaubt, die Secunden in den Winkeln ψ; $45^\circ - \psi$; φ; wegzulassen; den Fall ausgenommen, da diese Winkel sehr klein sind. Hierdurch wird also, wegen Ersparung der Proportionaltheile, die Rechnung noch leichter.

15. Die Formel (12) setzt zum voraus, daß BC die größere, und AC die kleinere Seite des Dreyecks ACB ist. Es ist klar, wenn AC die größere, BC aber die kleinere Seite wäre, alsdann

$$\log \operatorname{tang} \psi = \log BC - \log AC$$

$\log \operatorname{tang} \varphi$ wie vorhin bliebe, und $\log AB = \log AC + \log \sin ACB + \log \sec (\frac{1}{2} ACB - \varphi)$ würde.

16. Es ist ferner klar, daß die Formel (12) für $\log \operatorname{tang} \psi$ eigentlich diesen Logarithmen für den Sinus totus = 1 giebt. Verlangt man aber den Logarithmen dieser Tangente für den Halbmesser der Sinustafeln, so muß man eigentlich zu $\log AC - \log BC$ die Zahl 10 addiren.

Ein gleiches ist in Absicht des Logarithmen der Tangente des Winkels φ zu bemerken.

17. Wenn der Winkel $\varphi > \frac{1}{2} ACB$ gefunden wird, so ist eigentlich $\frac{1}{2} ACB - \varphi$ negativ;

als:

alsdann muß man aber statt $\cos(\frac{1}{2}ACB - \varphi)$ (7) oder statt $\sec(\frac{1}{2}ACB - \varphi)$ setzen
$\cos(\varphi - \frac{1}{2}ACB)$ oder $\sec(\varphi - \frac{1}{2}ACB)$.

Dieß erhellet daraus, weil $\cos(\frac{1}{2}ACB - \varphi) = \cos(\varphi - \frac{1}{2}ACB)$ ist, und eben dasselbe auch von den Secanten gilt.

Exempel.

18. Um den Gebrauch der in (12) beygebrachten Formel mit einem Beyspiele zu erläutern, so soll folgendes dazu dienen.

An einer Standlinie CD von 1517,7 Kalenb. Fußen = m, maaß ich die Winkel

$ACD = \beta = 63^\circ . 38'$; $BCD = \alpha = 49^\circ . 44'$
$CDA = \gamma = 89^\circ . 54'$; $CDB = \delta = 95^\circ . 13'$

Dieß giebt den Winkel

$A = 26^\circ . 28'$; $B = 35^\circ . 3'$; $ACB = 13^\circ . 54'$
$\frac{1}{2}ACB = 6 \; . 57'$

Folg:

Folglich

$$\begin{aligned} \log m &= 3{,}1811859 \\ l \sin \gamma &= 9{,}9999993 - 10 \\ l \operatorname{cosec} A &= 0{,}3509797 \\ \hline \log AC &= 3{,}5321649 \\ l\,m &= 3{,}1811859 \\ l \sin \delta &= 9{,}9981924 - 10 \\ l \operatorname{cosec} B &= 0{,}2408679 \\ \hline l\,BC &= 3{,}4202512 \\ l\,AC &= 3{,}5321649 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tang} \psi = 9{,}8880863 \text{ also } \psi = 37^\circ . 41' . 53''$$

$$45^\circ - \psi = 7 . 18 . 7.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} (45^\circ - \psi) &= 9{,}1076759 \\ l \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} ACB &= 9{,}0859996 \\ \hline l \operatorname{tang} \varphi &= 10{,}0216763 \end{aligned}$$

$$\varphi = 46^\circ . 25' . 45''$$

$$\varphi - \tfrac{1}{2} ACB = 39^\circ . 28' . 45'' = 39^\circ . 29' \text{ beyn.}$$

Also endlich

$$\begin{aligned} l\,AC &= 3{,}5321649 \\ l \sin ACB &= 9{,}3806237 - 10 \\ l \sec (\varphi - \tfrac{1}{2} ACB) &= 0{,}1124898 \\ \hline \log AB &= 3{,}0252784 \end{aligned}$$

AB = 1060 Kalenb. Fuß. beynahe.

Dieß

Dieß ist die Weite des südlichen Johannis-kirchthurms in Göttingen, vom Observatorio. Die erwähnte Standlinie von 1517,7 Fußen war auf einer Wiese ausserhalb der Stadt angenommen worden.

IV. Auflösung.

Wollte man, vermittelst einer Zeichnung, aus CD und den mit dem Astrolabio gemessenen Winkeln α, β, γ, δ, die Weite AB auf dem Papiere bestimmen, so kann man sich zu dieser Absicht unterschiedener Methoden bedienen.

I. Man trage die gemessene Grundlinie CD, nach dem verjüngten Maaßstabe aufs Papier, und mache also cd Fig. XLI. der CD gemäß. Setze hierauf durch Hülfe des geradlinigten Transporteurs, oder vermittelst anderer Methoden (§. 1. 3. 9 u. f.), an c ein paar Winkel acd = ACD, bcd = BCD, und an d die Winkel cdb = CDB, cda = CDA, so werden sich auf dem Papiere die Linien ca, da, bey a, und cb, db, bey b schneiden, und solchergestalt die Weite ab bestimmen, welche nach dem verjüngten Maaßstabe der auf dem Felde AB gemäß seyn wird.

II. Oder man berechne in dem Dreyecke ACD, aus den bekannten Größen CAD, ADC, CD die beyden Seiten CA, AD, und dann aus den Win-

Winkeln BCD, CDB und der Standlinie CD, in dem Dreyecke CDB die beyden Seiten CB, DB, welche Rechnung durch Logarithmen sehr geschwinde von statten gehet. Beschreibe demnächst auf dem Papiere über cd (Fig. XLI.) die man der CD gemäß nimmt, das kleine Dreyeck cda, oder bestimme bloß den Punkt a, durch den Durchschnitt zweyer Kreisbogen, die man aus c, d, mit den Halbmessern ca, da, welche man den berechneten Seiten CA, DA, gemäß nimmt, beschreibt. Auf gleiche Weise wird auch mit den Weiten cb, db, die denen CB, DB gemäß gemacht worden, das Dreyeck cdb beschrieben, mithin der Punkt b, folglich auch die Weite ab bestimmt.

III. Es wird sehr oft geschehen, daß die Längen ca, da, cb, db, so groß ausfallen, daß man sie mit einem Handzirkel von gewöhnlicher Größe nicht bequem von dem verjüngten Maaßstabe abnehmen, folglich auch nicht die Dreyecke acd, cbd, beschreiben kann. In diesem Falle muß man sich entweder eines größern Stangenzirkels bedienen, oder auf folgende Art zu Werke gehen.

Es sey Fig. XLII. ABCD, noch immer das bisher betrachtete Viereck auf dem Felde. Man stelle sich von A, B, auf die Standlinie, die Perpendiculärlinien AE, BF; herabgefället vor; und berechne in den rechtwinklichten Dreyecken

ACE,

ACE, BDF, die senkrechten Entfernungen AE, BF, und die Weiten CE, DF. Dieß kann geschehen, weil man die Seiten CA, BD, und die Winkel ACE $= 180° - ACD = 180° - \beta$, BDF $= 180° - CDB = 180° - \delta$ weiß.

Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \sin CAD : CD &= \sin CDA : CA \\ \sin CBD : CD &= \sin BCD : BD \end{aligned}$$

also $CA = \dfrac{m \sin \gamma}{\sin A}$; $BD = \dfrac{m \sin \alpha}{\sin B}$

Mithin in den rechtwinklichten Dreyecken CAE, BDF, für den Sinus totus $= 1$

$$\begin{aligned} 1 : \sin (180° - \beta) &= AC : AE \\ 1 : \cos (180° - \beta) &= AC : CE \\ 1 : \sin (180° - \delta) &= BD : BF \\ 1 : \cos (180° - \delta) &= BD : DF \end{aligned}$$

Man berechne also erstlich durch Logarithmen

$$\begin{aligned} \log CA &= \log m + \log \sin \gamma - \log \sin A \\ \log BD &= \log m + \log \sin \alpha - \log \sin B \end{aligned}$$

so wird demnächst

$$\begin{aligned} \log AE &= \log AC + \log \sin (180° - \beta) \\ \log CE &= \log AC + \log \cos (180° - \beta) \\ \log BF &= \log BD + \log \sin (180° - \delta) \\ \log DF &= \log BD + \log \cos (180° - \delta) \end{aligned}$$

Die

Die ganze Rechnung wird also sehr leicht durch Logarithmen geführt.

Hier in der XLIIsten Figur fallen beyde Perpendiculärlinien AE, BF, ausserhalb der Dreyecke ACD, CBD, und E liegt linker Hand C; F rechter Hand D. Man wird nun gar leicht aus einer roh entworfenen Zeichnung, oder auch selbst aus Beschaffenheit der Winkel an der Standlinie CD, beurtheilen können, welche Lage in jedem Falle die Punkte E, F, mithin auch die zugehörigen Perpendiculären AE, BF haben.

Nachdem man nun die Größen CE, AE, BF, DF, berechnet hat, so wird man auf dem Papiere gar leicht die Punkte a, b, Fig. XLI. bestimmen können. Man nehme nemlich auf der verjüngten Standlinie cd, die Weiten ce, df, denen berechneten CE, DF gemäß, errichte durch e, f, ein paar senkrechte Linien, und nehme auf ihnen die Weiten ea, fb, denen EA, FB, gemäß, so wird man die Weite ab auf dem Papiere erhalten, welche der AB auf dem Felde gemäß seyn wird.

Um die Form der Berechnung zu übersehen, so will ich die Zahlen des obigen Beyspiels in der III. Aufl. (18) gebrauchen.

Diese

Diese geben demnach

$$
\begin{array}{rcl}
\log m & = & 3{,}18118 \\
l \sin \alpha & = & 9{,}88255 \\
\hline
 & & 13{,}06373 \\
l \sin B & = & 9{,}75913 \\
\hline
\log BD & = & 3{,}30460 \\
l\, s\, (180^\circ - \delta) & = & 9{,}99819 \\
l \cos (180^\circ - \delta) & = & 8{,}95867 \\
\hline
\log BF & = & 3{,}30279 \\
\log DF & = & 2{,}26327 \\
\log m & = & 3{,}18118 \\
l \sin \gamma & = & 9{,}99999 \\
\hline
 & & 13{,}18117 \\
l \sin A & = & 9{,}64902 \\
\hline
\log AC & = & 3{,}53215 \\
l\, s\, (180^\circ - \beta) & = & 9{,}95229 \\
l \cos (180^\circ - \beta) & = & 9{,}64749 \\
\hline
\log AE & = & 3{,}48444 \\
\log CE & = & 3{,}17964
\end{array}
$$

Dieß giebt also

$AE = 3051$; $CE = 1512$
$BF = 2008$; $DF = 183$

Wobey

Wobey dann zu bemerken ist, daß in diesem Beyspiele, der Punkt E rechter Hand C, und F gleichfalls rechter Hand D liegen muß, wonach man sich also bey der Zeichnung zu richten hat.

Diese Methode, die Punkte A, B auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, hat in Absicht der gewöhnlichen, wobey man sich wohl gar des gemeinen Transporteurs zum Auftragen der Winkel bedienet, sehr viele Vorzüge, ob sie gleich, wegen einiger Rechnung, die aber in der That sehr leicht ist. etwas zusammengesetzter zu seyn scheint. Wenn man zum Auftragen der Winkel sich auch gleich des geradlinigten Transporteurs bedienen wollte, so wird man doch nie die Schärfe erhalten, welche man in Entwerfung der Punkte A, B. vermittelst der Perpendiculärlinien EA, BF, sich zu versprechen hat.

Wenn man ferner überlegt, wie sehr die vielen Kreisbogen, die man beym Gebrauche des geradlinigten Transporteurs ziehen muß, einen Riß verunzieren, wie vielen Unbequemlichkeiten, besonders bey sehr stumpfen oder spitzen Winkeln, der geradlinigte Transporteur unterworfen ist, wie wenig Genauigkeit man sich zu versprechen hat, wenn, wie es sehr oft zu geschehen pflegt, sich die verlängerten Schenkel der aufgetragenen Winkel, bey a, b, unter

sehr

sehr spitzen Winkeln durchschneiden, und sich folglich sehr an einander fortschleifen, wie viel Fehler man überhaupt beym Auftragen der Winkel, noch aus sehr vielen andern Ursachen zu befürchten hat, so wird man gewiß eine kleine Berechnung der Perpendiculärlinien EA, CE ꝛc. nicht scheuen, und da bey Entwerfung mehrerer Oerter aus einer Standlinie, einige derselben oft sehr weit von der Standlinie wegliegen, so wird man auch durch die Größe der berechneten Perpendiculärlinien AE, CE u. s. w. schon ohngefähr einen Ueberschlag machen können, theils, wie man die Standlinie auf dem Papiere am bequemsten legen, theils auch, wie groß man den verjüngten Maaßstab nehmen müsse, damit man alle Oerter auf der vorgegebenen Größe des Papiers erhalte, und nicht einige ausserhalb desselben fallen, wie z. E. (§. 183. II.). Uebrigens geschiehet es bey Vermessung ganzer Landschaften, sehr oft, daß man die Entfernung solcher Oerter, die man schon zu Papiere gebracht hat, wieder zu neuen Standlinien und zur Bestimmung anderer Oerter gebraucht, und da ist es schlechterdings nothwendig, auf ihre Verzeichnung alle mögliche Sorgfalt zu wenden, weil sich sonst Fehler auf Fehler häufen, und alle Arbeit vergeblich seyn würde. Nie wird man aber durch würkliche Auftragung der Winkel, die zu dieser Arbeit nöthige Genauigkeit erhalten

Anmer-

Anmerkungen, die Standlinie betreffend.

§. 185. I. Wenn die Punkte A, B auf dem Felde, sowohl unter sich, als auch von der Standlinie, sehr weit wegliegen, und es die Umstände nicht zulassen, die Standlinie CD sehr groß und bequem anzunehmen, so werden die Winkel CAD, CBD in solchem Falle oft sehr klein werden, und dieses verursacht, 1) daß sich die Linien CA, DA; CB, DB, (und also auch die correspondirenden auf dem Meßtische) sehr aneinander fortschleifen, wodurch also auf dem Meßtische, wo die gezogenen Linien eine körperliche Dicke haben, selten recht genau die wahren Durchschnittspunkte angegeben werden können. 2) Daß die Weite AB dennoch sehr unsicher gefunden wird, wenn man auch gleich die Winkel mit dem Astrolabio messen, und AB durch Rechnung finden wollte. Denn die Folge wird lehren, daß, wenn die Winkel CAD, CBD, sehr klein werden, folglich ACD + ADC, oder BCD + BDC sehr nahe an 180° kommen, alsdann kleine Fehler, die man bey Messung der Winkel an beyden Standpunkten begehet, auf die gesuchte Weite AB, sehr großen Einfluß haben, und sie mit einer desto größern Unrichtigkeit geben, je kleiner CAD, CBD sind.

Zur Richtigkeit des Verfahrens muß man also 1) eine sehr kleine Standlinie vermeiden,

2)

2) dafür sorgen, daß man an ihr nicht zu stumpfe oder spitze Winkel erhält. Oft läßt sich aber wegen der unbequemen Lage der Gegend, keine Standlinie unmittelbar messen, die den erwähnten Bedingungen ein Genüge leistet. Wie wird man also bey solchen Umständen verfahren?

Es sey Fig. XLIII. AB die auszumessende Entfernung; die Gegend verstatte es nicht, eine größere und bequemere Standlinie, als die CD, unmittelbar zu messen. Da nun CD so liegt, daß z. E. bey D ein paar sehr stumpfe Winkel CDA, CDB, vorkommen, und dieses der Richtigkeit, in Bestimmung der Weite AB, nachtheilig ist, so wähle man eine andere Standlinie CE, wenn man sie gleich nicht unmittelbar messen kann, und nehme sie von einer solchen Größe und Lage, wie nach den vorhergehenden Bedingungen erfordert wird. Da man sie aber nicht unmittelbar messen kann, so bediene man sich der erstern Standlinie CD, und bestimme aus ihr die zweyte CE; hier würde man also z. E. bey C, D, die beyden Winkel DCE, CDE, messen, und in dem Dreyecke CDE, aus den erwähnten Winkeln, und der unmittelbar gemessenen CD, die neue Standlinie CE berechnen. Dieser Standlinie CE bediene man sich nun zur Bestimmung der Weite AB, indem man an ihr die Winkel ACB, ACE, CEA, CEB misset rc., so wird man

man AB gewiß viel richtiger finden, als es vermittelst der bloßen Standlinie CD geschehen konnte, weil nunmehr die Triangel an CE nicht so spitzige oder stumpfe Winkel, wie die an CD, bekommen.

Fände man, daß die neue Standlinie CE noch nicht groß genug wäre, oder gegen AB eine schickliche Lage hätte, so könnte man aus der CE, abermahls eine neue Standlinie bestimmen, und auf diese Art so lange fortfahren, bis man für AB eine schickliche und gehörige Standlinie erhielte.

Dieses Mittel, von einer kleinen und unschicklichen Standlinie wie C D, immer zu größern und bequemern fortzugehen, lehret und empfiehlt *Taquet* (s. dessen Opera mathem. Antwerp. 1707. Geom, pract. lib. I. Cap. V. Probl. III.).

II. Wenn in den bisherigen Auflösungen der vorgelegten Aufgabe, die angenommene Standlinie horizontal ist, und die Winkel an ihr auch horizontal gemessen werden, so erhält man durch Rechnung oder Zeichnung, eigentlich den Horizontalabstand der Objecte A, B (§. 7.) und diesen verlangt man doch gewöhnlich, sowohl bey Entwerfung ganzer Landschaften, als auch, wenn man bloß von der Entfernung der Gegenstände A, B redet.

 Die

Die Winkel kann man nun in den meisten Fällen immer horizontal erhalten, wenn das Werkzeug mit einer Kippregel (§. 100) versehen ist, die man beym horizontalen Stande des Instruments, nach den etwa erhabenen Gegenständen A, B, hinrichtet. Hat aber das Werkzeug keine Kippregel, so muß man an den Standpunkten die schiefen Winkel messen, und aus den Neigungen ihrer Schenkel gegen den Horizont, welche man entweder nach dem Augenmaaße annehmen, oder auch selbst messen kann, die Horizontalwinkel nach den Vorschriften des Xten Kapitels §. 141. V. durch Rechnung bestimmen.

Die Standlinie läßt sich aber nicht immer genau horizontal annehmen und messen. In diesem Falle muß man aus den Umständen beurtheilen, ob man ihre Schie'e, wenn sie nicht sehr beträchtlich ist, außer Acht lassen darf, oder ob man genöthigt ist, ihre horizontale Größe durch Nivelliren, oder nach andern Methoden, wie z. E. nach den §§. 38. (6.) 41. 44. u. s. w. zu bestimmen.

III. Bey Entwerfung ganzer Landschaften, nimmt man oft die Entfernung zweyer Bergspitzen, zweyer Thürme u. s. w. zu Standlinien an. Diese Standlinien kann man selten unmittelbar messen, und selten liegen die Standpunkte in einer Horizontalebene. In diesem Falle werden nun dergleichen Standlinien nach

der

der Methode (I) aus einer andern vorher durch Rechnung bestimmt.

Aufgabe.

§. 186. A, B, C, Fig. XLIV. sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen einander bekannt ist; D ist ein vierter Ort; man soll finden, wie weit er von denen A, B, C, entfernt ist.

Aufl. I. Um die Lage der drey Objecte A, B, C zu bestimmen, so seyen in dem Dreyecke ABC, gegeben oder bekannt die Seiten $AB = b$, $BC = c$ und der eingeschlossene Winkel $ABC = \beta$. Es erhellet, daß man auch andere Stücke des Dreyecks als gegeben ansehen könne, wenn sie nur das Dreyeck bestimmen.

II. Man messe nun an dem Orte D, die beyden Winkel $ADB = \delta$, $BDC = \varepsilon$, so werden sich daraus die Entfernungen AD, BD, DC durch trigonometrische Rechnung finden lassen.

III. Man nenne den unbekannten Winkel $BAD = x$, so ist in dem Vierecke ABCD, der Winkel.

$$\begin{aligned} BCD &= 360^\circ - ABC - BAD - ADC \\ &= 360^\circ - \beta - x - \delta - \varepsilon \\ &= \mu - x \end{aligned}$$

 wenn

wenn man der Kürze halber

$$360^\circ - \beta - \delta - \varepsilon = \mu \text{ nennt.}$$

IV. Nun hat man in den beyden Dreyecken BAD, BDC

$$\sin ADB : AB = \sin BAD : BD$$
$$\sin BDC : BC = \sin BCD : BD$$

oder $\sin \delta : b = \sin x : BD$

$$\sin \varepsilon : c = \sin (\mu - x) : BD$$

also $BD = \frac{b \sin x}{\sin \delta}$; $BD = \frac{c \sin (\mu - x)}{\sin \varepsilon}$

folglich $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \frac{\sin (\mu - x)}{\sin x}$

Aber aus (Trig. S. XII. 2.) folgt

$$\frac{\sin (\mu - x)}{\sin x} = \frac{\sin \mu \cos x - \sin x \cos \mu}{\sin x}$$
$$= \sin \mu \cot x - \cos \mu$$

also ist $\cos \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta} = \sin \mu \cot x$

Mithin wegen $\frac{\cos \mu}{\sin \mu} = \cot \mu$. Der Werth von

$$\cot x = \cot \mu + \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu}$$

V. Ist nun auf solche Art der Winkel x gefunden, so hat man aus (IV) auch die Weite BD, und in den Dreyecken ABD, BCD ist genug

genug bekannt, um auch die Seiten AD, CD durch Rechnung zu finden.

VI. Bey Berechnung der Cotangente des Winkels x (IV) ist zu bemerken, daß alle trigonometrische Linien für den Sinus totus = 1 genommen werden müssen, und wenn für cot x ein negativer Werth herauskömmt, so zeigt dieses an, daß der Winkel x stumpf sey. Man suche also in solchem Falle einen spitzigen Winkel, dessen Tangente eben den bejahten Werth hat, addire zu diesem Winkel 90°, so hat man den eigentlichen stumpfen Winkel x.

Ex. Es sey $\beta = 115°$; $\delta = 25°$; $\varepsilon = 45°$; $b = 1112$ Fuß, $c = 2000$ Fuß, so wird $\mu = 175°$ mithin

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}0461048 \\ \log \sin \varepsilon &= \underline{9{,}8994850 - 10} \\ \log b \sin \varepsilon &= 2{,}8955898 \end{aligned}$$

Ferner
$$\begin{aligned} \log c &= 3{,}3010300 \\ \log \sin \delta &= 9{,}6259483 - 10 \\ \log \sin \mu &= \underline{8{,}9402960 - 10} \\ l\, c \sin \delta \sin \mu &= 1{,}8672743 \end{aligned}$$
daher

$$l\, \frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 1{,}0283155$$

welches die Größe $\frac{b \sin \varepsilon}{c \sin \delta \sin \mu} = 10{,}67371$ giebt.

Nun

Nun ist $\cot \mu = \cot 175° = \cot (90° + 85°)$ $= - \tang 85°$ (Trig. S. XXII.) $= - 11{,}43005$ dieß giebt demnach
$\cot x = - 11{,}43005 + 10{,}67371 = - 0{,}75634$

Da also hier cot x verneint wird, so ist x stumpf.

Man suche also einen spitzen Winkel, dessen Tangente 0,75634 ist. — Man findet ihn in den Tafeln = 37° 6′, addire 90° dazu, so wird x = 127° 6′.

Die Berechnung der Seiten AD, BD, CD, werde ich hier nicht vornehmen, denn sie ist, nachdem man den Winkel BAD = 127° 6′, mithin auch die übrigen Winkel ABD, DBC, BCD, gefunden hat, nach den Proportionen.

$\sin \delta : b = \sin x : BD$
$\sin \delta : b = \sin ABD : AD$ wo $ABD = 180° - x - \delta$
u. s. w.

gar leicht durch Logarithmen anzustellen.

Eine andere Formel für die Auflösung dieser Aufgabe giebt Hr. Doct. Burkhardt in Hrn. v. Zachs monatlichen Correspondenz, Oct. 1801. S. 360. Ich finde die Rechnung in der Hauptsache nicht viel kürzer, als die nach meiner Formel, der man leicht noch viel andere Gestalten geben kann.

VII. So kann man, indem man bloß an dem Standpunkte D, die zwey Winkel δ, ε misset, leicht die Weiten AD, BD, DC, durch Rechnung, so genau man will, finden. Man kann aber, wenn es um keine sehr große Schärfe zu thun ist, die Weiten AD, BD, DC, auch durch eine geometrische Construction finden.

Nachdem man in Fig. XLV. ein Dreyeck abc, auf dem Papiere beschrieben hat, welches dem ABC auf dem Felde ähnlich ist, so beschreibe man ferner über der Seite ac einen Kreis, dergestalt, daß ac die Chorde eines Bogens amc werde, der doppelt so groß ist, als das Maaß des auf dem Felde observirten Winkels ADC. Nehme hierauf von a bis m die Chorde eines Bogens am, der doppelt so viel Grade hält, als der auf dem Felde beobachtete Winkel ADB, ziehe durch m, b, eine gerade Linie mbd, so wird diese bey d im Umfange des Kreises einen Punkt bestimmen, der gegen die Punkte a, b, c, eben so liegt, wie D auf dem Felde, gegen die Oerter A, B, C; und die Weiten ad, bd, dc, werden denen AB, BD, DC auf dem Felde gemäß seyn.

Bew. Denn weil der Winkel adc am Umkreise, zu seinem Maaße den halben Bogen amc hat, und der Bogen amc doppelt so viel Grade ꝛc. hält, als der Winkel ADC auf

dem

dem Felde, so ist klar, daß der Winkel adc = ADC seyn müsse.

Auf eben die Art ist auch der Winkel adb vermöge der Construction = ADB.

Es muß also der Punkt d gegen die drey a, b, c nothwendig eben die Lage haben, welche D gegen A, B, C, hat, weil durch das Dreyeck abc, und die beyden Winkel adb, adc, der Punkt d, völlig so bestimmt ist, so wie es D, vermöge des Dreyecks ABC, und der beyden Winkel ADB, ADC ist.

Mithin müssen die Weiten ad, bd, cd, nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man das Dreyeck abc aufgetragen hat, denen AD, BD, CD gemäß seyn.

VIII. Wegen der Ziehung des Kreises amcd muß ich noch folgendes erinnern.

Um dessen Halbmesser zu finden, bediene man sich des geradlinigten Transporteurs, oder noch besser, eines tausendtheiligten Maaßstabes (§. 65. XI.) auf folgende Art.

Man verzeichne Fig. XLVI. einen willkührlichen Winkel KIM, trage von I bis K, den Halbmesser des geradlinigten Transporteurs, oder tausend Theile des tausendtheiligten Maaßstabes,

stabes, von I bis L die Chorde oder Seite ac des Dreyecks abc, Fig. XLV., von I. bis M die Chorde des doppelten Winkels ADC, oder adc nach dem tausendtheiligten Maaßstabe; (z. E. die Chorde von $2(\delta+\varepsilon) = 140°$ in dem Beyspiele (VI), ziehe durch K, M, eine gerade Linie, und durch L mit KM eine parallele, so wird, wie sich leicht übersehen läßt, IN der Halbmesser eines Kreises seyn, für welchen ac die Chorde von $2 . adc = 2(\delta+\varepsilon)$ ist. Man fasse also IN mit dem Zirkel, und beschreibe aus a, c, ein paar sich bey n durchschneidende Kreisbogen, so wird n der Mittelpunkt des zu ziehenden Kreises amcd seyn.

Um die Chorde am einzutragen, so trage man Fig. XLVI. von I bis r die Chorde des doppelten Winkels $ADB = \delta$, nach dem tausendtheiligten Maaßstabe, und ziehe hierauf mit Kr, durch N eine parallele Np, so wird Ip die Chorde eben dieses Winkels, für den Halbmesser des Kreises amcd seyn, die man daher von a bis m in den Kreis einzutragen hat.

IX. Will man des Kreises (Fig. XLV.) Halbmesser $= \rho$ durch Rechnung finden, so ist wegen $ac = 2\rho \sin adc = 2\rho \sin(\delta+\varepsilon)$;

$$\rho = \frac{ac}{2\sin(\delta+\varepsilon)} = \tfrac{1}{2}\, ac \operatorname{cosec}(\delta+\varepsilon)$$

wo

wo demnach ρ in dem Maaße gefunden werden kann, als womit man etwa ac gemessen haben könnte.

X. Die einzutragende Chorde am wäre $= 2 \rho \sin \delta = \sin \delta \operatorname{cosec} (\delta + \varepsilon) . ac$.

Mechanicus Branders mechanische Auflösung dieser Aufgabe.

§. 187. Er ertheilt solche am Ende seiner Beschreibung eines Universal-Meßtisches (Augsb. 1772.), und verfährt auf dem Felde folgendergestalt. Fig. XLVII.

Man bringe über den Standpunkt D das Meßtischgen, und bestimme auf demselben den Punkt d, lothrecht über D. Aus d ziehe man auf dem Papiere nach den Objecten A, B, C, die Richtungslinien dα, dβ, dγ. Nun seyen EO, OF, ein paar Liniale, dergestalt mit einander verbunden, daß sie, wie die Figur ausweiset, um einen Zapfen bey O, ohngefähr wie die Schenkel eines Zirkels um ihren Kopf, beweglich sind, und durch eine Schraube nach Gefallen in jeder Oeffnung festgehalten werden können.

Beyde Liniale OE, OF, seyen bey i, k, mit ein paar beweglichen Hülsen versehen, an denen sich sehr scharfe stählerne Spitzen, oder

Stifte

Stifte a, c, befinden. Unter dem Umdrehungspunkte O, befinde sich eine dritte dergleichen Spitze b. So stellet also dieses Werkzeug gleichsam einen dreyspitzigen Stangenzirkel vor, und durch Verschiebung der Hülsen sowohl, als auch durch gehörige Oeffnung der beyden Liniale, wird man machen können, daß zwischen den drey Spitzen a, b, c ein beliebiges Dreyeck enthalten ist. Um nun dieses Werkzeug zu gegenwärtiger Absicht zu brauchen, so fasse man auf einem verjüngten Maaßstabe, zwischen die drey Spitzen a, b, c die drey Seiten des Dreyecks ABC, so, daß die Weiten ab, bc, ac, denen AB, BC, AC gemäß werden. Setze nun den Stangenzirkel auf die gezogenen Richtungslinien $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dergestalt, daß jede Spitze a, b, c auf die entsprechende Richtungslinie $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ zu stehen komme, mithin das kleine Dreyeck abc auf dem Meßtische, gegen den Punkt d, eben die Lage erhalte, die das Dreyeck ABC gegen D hat, so werden sich auf dem Meßtische die Weiten da, db, dc ergeben, welche nach dem verjüngten Maaßstabe, denen DA, DB, DC gemäß seyn werden.

Dieses ist ein Verfahren, welches nach der Versicherung Hrn. Branders, auf dem Felde sehr geschwind von statten gehet.

Statt

Statt eines solchen Stangenzirkels mit drey Spitzen, könnte man sich auch Handzirkel bedienen, die mit drey Schenkeln versehen sind, dergleichen man unterweilen in Reiszeugen antrifft, und in Leupolds Theatro Machinarum Geom. beschrieben findet.

Zus. Weil die Entfernungen da, db, dc, ab, bc, denen DA, DB, DC, AB, BC, gemäß sind, weil folglich, in den Dreyecken dab, DAB; da : ab = DA : AB, und in den Dreyecken dbc, DBC; dc : cb = DC : CB ist, so sind die Seiten ab mit AB und bc mit BC, und auf eben die Art auch ac mit AC parallel.

Anmerkungen.

§. 188. I. Diese Aufgabe ist nicht nur, wie bisher gelehret worden, bey Messung der Weiten von großen Nutzen, sondern kann auch selbst bey Entwerfung ganzer Landschaften mit Vortheil angewandt werden. Hr. *Dupain de Montesson*, Kunst alles in Grundriß zu bringen, was auf den Krieg, oder auf die bürgerliche und öconomische Baukunst Beziehung hat (aus dem Franz. übers.), Dresden und Leipzig 1781. erwähnt im I. Th. S. 19., des Hrn. *Pothenot* als Erfinder dieser Aufgabe. Ein Aufsatz von ihm befindet sich in den Mem. de l'Ac. royale de sc. à Paris 1692. p. 188.

Clai:

Clairaut (Anfangsgr. der Geometrie aus dem Fr. von F. J. Bierling III. Theil §. XXII.) und Lambert in seinen Beyträgen zur practischen Geometrie §. 109. behandeln die bisherige Aufgabe gleichfalls, und empfehlen sie den Feldmessern. Auch hat Kästner in seinen geom. Abh. (1. Samml. 51.) trigonometrische Formeln dazu gegeben.

II. Bey Auflösung der bisherigen Aufgabe siehet man den lothrecht über D liegenden Punkt d auf dem Meßtische, als gegeben an, und bestimmt die Weiten da, db, dc, dadurch, daß man dem ganzen Dreyecke abc, seine gehörige Lage gegen d giebt. Die Auflösung würde aber ganz anders ausfallen, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische bereits vorgezeichnet wäre, und der Punkt d gesucht werden sollte. In diesem Falle würde offenbar Hrn. Branders Auflösung einiger Abänderung bedürfen. Indessen ist aber gerade der letztere Fall wichtig, bey Entwerfung der Landschaften. Wenn es bloß darum zu thun ist, die Weiten DA, DB, DC auf dem Felde zu bestimmen, so kann man nach Hrn. Branders Art verfahren; Wenn aber A, B, C, drey Oerter auf dem Felde sind, die man bereits durch a, b, c, auf dem Meßtische entworfen hat, und soll nun den Standort des Meßtisches D, durch den Punkt d auf dem

Meß-

Meßtische angeben, so daß d gegen die bereits verzeichneten Punkte a, b, c, eben die Lage bekomme, die D gegen A, B, C, hat, so muß man offenbar auf eine andere Auflösung bedacht seyn.

Man siehet leicht, daß in dem leztern Falle die Hauptsache darauf ankomme, den Meßtisch so zu stellen, daß die Seiten ab, bc, ac, mit den zugehörigen AB, BC, CA, eine parallele Lage erhalten (§. 187. Zus.), denn unter solchen Umständen darf man nur an die Punkte a, b, c die dioptrische Regel legen, nach den Objecten A, B, C, visiren, und die Richtungslinien αa, βb, γc, rückwärts verlängern, so werden sie sich insgesammt auf dem Meßtische bey d durchschneiden, und solchergestalt den verlangten Punkt d angeben, der gegen a, b, c, dieselbe Lage haben wird, die D gegen A, B, C, hat.

In der Folge werde ich nun zeigen, wie man bey D dem Meßtische eine solche Lage geben könne, daß ab, bc, ac, den zugehörigen Linien auf dem Felde AB, BC, AC parallel werden.

III. In der bisherigen Aufgabe lagen die drey Punkte A, B, C nicht in einer geraden Linie; sie können aber auch, wie in der Fig. XLVIII, in einer geraden Linie liegen, und so so ist dieses alsdann ein besonderer Fall der allgemeinen Auflösung in §. 186. III. IV. Es ist alsdann der dortige Winkel β hier $= 180^\circ$, und der gesuchte Winkel x, hier der DAC.

Anmerkung.

IV. 1. Ich halte es nicht für überflüssig, hier noch einige andere einzelne Fälle durchzugehen, welche unter der allgemeinen Formel (§. 186.) enthalten sind.

2. In (Fig. XLIV.) und in (§. 186.) ist nemlich angenommen worden, daß die Punkte B und D auf verschiedenen Seiten der Linie AC liegen. Dann ist also der Winkel ABC, oder β, wenn man ihn zugleich als einen Winkel des Vierecks ABCD betrachtet $< 180^\circ$.

3. Fällt B in AC selbst, so hat man für diesen Fall $\beta = 180^\circ$ in der Formel (§. 186).

4. Fällt B diesseits AC, wie Tab. VII. Fig. LXXXVII, so daß nunmehr B und D auf einerley Seite von AC liegen, so muß man nunmehr unter β in (§. 186.) nicht den Winkel ABC innerhalb des eben so genannten Dreyecks verstehen, sondern den erhabenen in dem Vierecke ABCD, so weit er hier mit dem Bogen bezeichnet ist, nemlich die

Er-

Ergänzung des Winkels ABC des gegebenen Dreyecks, zu 360°. Dieß läßt sich aus der Art, wie sich das Viereck AECD der XLIVten Fig. in das ABCD der LXXXVIIten Fig. verwandelt, leicht übersehen.

5. Nennt man demnach den Winkel ABC innerhalb des Dreyecks (Fig. LXXXVII.) jetzt = B, so muß man bey Anwendung der Formel (§. 186.) auf den Fall (4) in (§. 186. III. IV.) $\beta = 360° - B$, also $\mu = B - \delta - \varepsilon$ setzen. Alles übrige in der Berechnung des Winkels BAD = x bleibt unverändert wie §. 186. IV.

6. Man lasse B (4) sich dem Punkte D nähern, doch so, daß B immer innerhalb des Triangels ACD bleibe, so wird der Winkel B dem Winkel $D = \delta + \varepsilon$ immer näher und näher kommen, und der Unterschied $\beta - \delta - \varepsilon$ (5) immer kleiner und kleiner werden. Fällt B in D, so ist $B - \delta - \varepsilon = 0$, also $\mu = 0$, und der Winkel BAD, oder x wird selbst = 0, wie aus (§. 186. IV.) auch erhellet, weil für $\mu = 0$, cot x unendlich wird.

7. Läßt man den Punkt B sich noch weiter fort bewegen, so fällt nunmehr der Standort D innerhalb des gegebenen Dreyecks ABC (Fig. LXXXVIII.), so lange übrigens, wie in allen bisherigen Fällen, die beyden

den Winkel ADB $= \delta$ und BDC $= \varepsilon$ auf unterschiedenen Seiten von der durch B und D eingebildeten geraden Linie BD fallen, und es ist nunmehr der Winkel ABC wie bisher (5) $=$ B, auch ADB $= \delta$, BDC $= \varepsilon$, DAB $=$ x, wie bisher, und der Winkel BCD in dem Vierecke ABCD $= 360° - B - x - \delta - \varepsilon$; alle übrige Rechnung bleibt wie (§. 186. III. — V.). Also ist jetzt in der Formel (§. 186. IV.) $\beta =$ B und $\mu = 360° - B - \delta - \varepsilon$.

8. Wenn in (7) der Standort D zwischen A und B, in gerader Linie mit A und B, fiele, wie (Fig. LXXXIX), so würde man in (7) den stumpfen Winkel ADB also $\delta = 180°$ setzen müssen. Dieß gäbe demnach für diesen Fall $\mu = 180° - B - \varepsilon$, und x wieder $= 0$, weil der Winkel DAB $=$ x der LXXXVIIIsten Figur $= 0$ wird, so bald D in AB fällt. Dieß giebt auch die Formel (§. 186. IV.) auf den gegenwärtigen Fall angewandt, weil cot x für $\delta = 180°$ unendlich wird, wegen sin $\delta = 0$

9. Fiele D in die gerade Linie CB; so wäre $\varepsilon = 180°$, also in (§. 186. IV.) cot x $=$ cot μ, folglich $x = \mu = 180° - B - \delta$, wie auch leicht aus einer für diesen Fall entworfenen Figur sich einsehen läßt.

10. Fiele D ausserhalb des Dreyecks, wie Fig. LXXXX., so wäre dieß wieder der Fall der XLIVten Figur. Nur daß jetzt AB in Ansehung der Punkte D und C das wäre, was AC (Fig. XLIV.) in Ansehung der Punkte B und D war.

Man nenne demnach jetzt (Fig. LXXXX.) den Winkel ACB in dem gegebenen Dreyecke $= \beta$; $AC = b$; $BC = c$; $CAD = x$; $ADC = \delta$; $BDC = \varepsilon$; so bleibt alle Rechnung wie (§. 186. IV.), um die Entfernungen AD, CD, BD, der Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks ABC, von dem Standorte D zu finden.

11. Auf diese Art zeigt sich sehr leicht; wie in einem jeden vorgegebenen Falle die Aufgabe (§. 186.) zu behandeln ist.

12. Wer die Aufgabe (§. 186.) auf dem Felde anwenden will, um die Lage des Standorts D, aus den bey D visirten Winkeln δ und ε, oder aus den scheinbaren Weiten der Seiten AB, BC, des gegebenen Dreyecks ABC zu finden, der muß an dem Standorte D schon vorläufig wissen, ob B jenseits AC, oder diesseits AC liege, ob also die Auflösung (§. 186. IV.) oder hier (4) vorzunehmen ist. Denn wer bey D nach B visirt, kann in manchen Fällen aus dem bloßen Sehen

hen nicht wissen, ob ihm B jenseits oder diesseits AC liege, er müßte denn im Schätzen der Weiten AD, BD, CD, nach dem Augenmaaße geübt seyn, oder aus einer etwa schon vorhandenen Charte, dies beurtheilen können. Dieß möchte aber, zumahl wenn AD, BD, CD, nicht sehr von einander unterschieden sind, nicht allemahl sicher genug geschehen.

Diese wichtige Bemerkung hat Kästner, Geometr. Abh. I. Sammlung (Göttingen 1790.) 51. Abh. (39), der gegenwärtigen Aufgabe beygefügt, und man sieht leicht, daß auch bey der Branderischen Auflösung derselben (§. 187.) Rücksicht auf diesen Umstand zu nehmen ist. Man kann nemlich Fig. XLVII. die drey Spitzen a, b, c des Stangenzirkels, auf die visirten Linien Dα, Dβ, Dγ auch so stellen, daß der Kopf O des Stangenzirkels, oder die unter ihm befindliche Spitze b, mit dem Punkte d auf einerley Seite von ac zu liegen kömmt.

So könnte auch in (§. 186. VII.) das gegebene Dreyeck abc die Lage $\alpha\beta$c Fig. XLV. Nr. 2. in dem Kreise haben, da denn hier nach dem Verfahren (§. 186.) der Punkt δ im Umfange, statt d in Fig. XLV. N. 1., erhalten werden würde, wo δ und β im gegenwärtigen Falle auf einerley Seite von ac zu liegen kämen.

Nicht gar zu große Weiten aus einem einzigen Stande zu messen.

§. 189. 1. Man hat verschiedene Werkzeuge ausgedacht, aus einer sehr kleinen Standlinie, z. E. nur von einigen Fußen, dennoch mit erträglicher Genauigkeit, Entfernungen zu messen, und man nennet diese Messungsart, die Messung aus einem einzigen Stande, weil man eine so kleine Standlinie, ohne sich weit von der Stelle zu bewegen, erhalten und messen kann. Um nun aus so kleinen Standlinien Entfernungen zu messen, so sind die zu dieser Absicht erfundenen Werkzeuge vorzüglich dahin gerichtet, die sogenannten parallactischen Winkel mit großer Schärfe zu messen.

2. Es sey Fig. XLIX. AB eine sehr kleine Standlinie, und C ein Gegenstand, dessen Weite CA, oder CB man finden soll, so heißt der Winkel ACB, welcher der Standlinie AB gegenüber stehet, der parallactische Winkel, oder die scheinbare Größe der Standlinie am Punkte C.

3. Nun erhellet, daß, wenn AB sehr klein, AC, BC, aber beträchtlich groß sind, auch der parallactische Winkel C sehr klein seyn werde.

4.

4. Da die Lage einer so kleinen Standlinie immer von unserer Willkühr abhängt, so kann man AB so annehmen, daß der Winkel CAB ein rechter ist, oder wenigstens einem rechten sehr nahe kömmt. Geschiehet dieses, so wird auch B beynahe ein rechter Winkel, mithin ohne merklichen Irrthum ACB ein gleichschenklichtes Dreyeck, worinn man aus der Größe des parallactischen Winkels C, und der Standlinie AB, die Weiten AC, BC durch Rechnung finden kann. Es wird nemlich $\sin C : AB = \sin tot : BC$ oder $BC = AC = \frac{AB}{\sin C}$ weil ich $\sin tot = 1$ setze. Ist nun C sehr klein, mithin ohne merklichen Irrthum $\sin C = C$ (oder $= \frac{C}{206264}$, wenn C in Secunden gegeben wäre), so findet sich

$$BC = AC = \frac{AB}{C} \cdot 206264.$$

5. Es kömmt also nur darauf an, den parallactischen Winkel C ausfindig zu machen. Am besten wäre es, wenn man würklich nach C hinkommen, und diesen Winkel messen könnte. Da dieser Winkel sehr klein ist, so würde man ihn, ohne Winkelmesser, bloß vermittelst eines Fernrohrs, das mit einem Micrometer versehen wäre (§. 172 u. f.), messen können, wenn man nehmlich untersuchte,

wie viel Schraubenumdrehungen, oder Abtheilungen eines Glasmicrometers, dem Bilde der Standlinie AB im Fernrohre bey C, zugehörten. Vorausgesetzt, daß des Fernrohrs Feld, die scheinbare Größe ACB noch fasset.

6. Ein Beyspiel zu dieser Berechnung hat Hr. Hofr. Kästner in seinen geometrischen Abhandl. I. Samml. 48. Abh. an den Ruinen der Hessischen Gleichen die man auf der Göttingischen Sternwarte sehen kann, gegeben. Ein Zwischenraum innerhalb dieser Ruinen von 86 Calenbergischen Fußen = AB hatte auf der Sternwarte bey C eine scheinbare Größe, oder parallactischen Winkel von 8′. 44″ = 524 Sec. Um daraus den Abstand des Gegenstandes von der Sternwarte zu finden, wäre in (4.) AB = 86; C = 524 also

$$
\begin{aligned}
\log 206264 &= 5{,}3144252 \\
\mathrm{l}\ AB &= \underline{1{,}9344984} \\
&\ 7{,}2489236 \\
\log C &= \underline{2{,}7193313} \\
\log AC &= 4{,}5295924 \\
\text{also}\ AC &= 33852\ \text{Fuß.}
\end{aligned}
$$

Hr. Hofr. Kästner zeigt, daß wenn der parallactische Winkel statt 8′. 44″ z. E. nur 8′. 40″, 5 wäre, dieß in dem Schenkel AC schon einen Fehler von 228 Fußen geben würde, welches zeigt, wie genau man die parallactischen Winkel muß messen können, wenn das Ver-

Verfahren, daraus Entfernungen zu berechnen, eine erträgliche Genauigkeit haben soll.

In einer Abhandlung de micrometris objectis terrestribus adhibendis, welche Hr. Hofr. Kästner den 9. May 1786 der königl. Soc. der Wiss. in Göttingen vorgelesen hat, finden sich noch sehr viele nützliche Bemerkungen über den Gebrauch des bisherigen.

7. Wenn man wie in (5) den parallactischen Winkel bey C nicht unmittelbar messen kann, sondern ihn an der Standlinie AB, selbst (wie bey den sogenannten Messungen aus einem Stande verlangt wird) bestimmen will, so hat man eigene hierzu dienliche Werkzeuge erfunden, welche man Parallaxenmesser nennen könnte.

8. Man könnte aber denken, wozu sind neue und eigene Werkzeuge nöthig? Man messe mit dem Astrolabio bey A, B, die beyden Winkel A, B, so hat man auch $C = 180^\circ - A - B$.

9. Allein man überlege, daß es wegen der geringen Größe der Standlinie AB, theils schwer hält, das Werkzeug mit der gehörigen Genauigkeit zu stellen, theils auch die geometrischen Winkelmesser von gewöhnlicher Größe, bey weitem nicht die gehörige Schärfe, bey Ausmessung dieser Winkel verstatten. Denn

man

man müßte A, B, wenigstens bis auf einige Secunden genau messen können, wenn man den parallactischen Winkel so genau finden wollte, als beym Gebrauche einer so kleinen Standlinie nothwendig ist. Wie würde man aber dieses von Astrolabiis, die einen, oder wohl selbst $1\frac{1}{2}$ Fuß, im Durchmesser hätten, erwarten können? Andere Hindernisse zu geschweigen.

10. Man stelle sich Fig. L. durch A, B, ein paar parallele Linien Am, Bn vor, die mit CA, DB die kleinen Winkel mAC, CBn machen; auch durch C mit mA, nB, eine parallele Cr, so wäre der parallactische Winkel ACB bekannt, wenn man die kleinen Winkel mAC, CBn wüßte. Denn hier wäre z. E. $ACB = ACr + rCB = mAC + CBn$, weil die Linien parallel sind.

11. Oder man gedenke sich in Fig. LI. durch A mit BC eine parallele Aw, so hätte man gleichfalls den parallactischen Winkel, wenn man CAw messen könnte.

12 Auf diese beyden letztern Sätze (10. 11) gründen sich nun die Werkzeuge, parallactische Winkel zu messen, ohne selbst nach C hinzugehen, und da die Winkel, wie mAC, nBC, (10) CAw (11) nur klein sind, so erhellet, daß

daß zur Messung derselben kein eingetheilter Rand von vielen Graden nöthig sey.

13. Ob aber gleich dieses ein Vortheil, und eine Ersparung der Kosten zu seyn scheinet, so darf man doch nicht erwarten, dergleichen Werkzeuge, so kleine Winkel zu messen, für einen wohlfeilen Preis zu bekommen. Um hievon überzeugt zu werden, so will ich nur einen ganz kurzen Begriff von dem zu dieser Absicht erfundenen Paceccianischen Pantometro beybringen.

14. Dieses Werkzeug bestehet Fig. LII. aus zwey rechtwinklichten hölzernen Tafeln A, B, die bey m, n durch Gewinde an einander hängen, und zusammengelegt werden können. OO, oo sind zwey Fernröhre, wenigstens 1½ Fuß lang, davon das o o unbeweglich ist, das andere O O aber vermittelst einer Alhidadenregel, um das Centrum c, eben wie bey einem Winkelmesser gedrehet werden kann; de ist ein in die hölzerne Tafel A eingelassenes Stück Messing, worauf aus dem Mittelpunkte c einige Bogen gerissen sind, worauf sich Gradabtheilungen befinden, über die sich ein Inder bey Umdrehung der Alhidadenregel verschiebt; die sanften Umdrehungen des Fernrohres, erhält man vermittelst einer Micrometerschraube bey r. Das ganze Werkzeug wird auf ein Stativ gestellt, und mit den zur Horizontal-

bewe-

bewegung und andern Stellungen nöthigen Vorrichtungen versehen.

Die Axen der beyden Fernröhre können nun vermittelst eines sehr weit entlegenen Gegenstandes, oder auf andere Arten, genau in eine parallele Lage gebracht werden, und wenn sie vollkommen parallel sind, so beträgt ihr Abstand O o etwa 4 bis 5 Fuß, den man aber übrigens sehr genau abmessen muß, weil er bey Bestimmung der parallactischen Winkel, die Standlinie abgiebt.

15. Der Gebrauch dieses Instruments ist nun folgender.

Bey Ausmessung eines parallactischen Winkels C; Fig. LI. bedeute AB, den Abstand der beyden parallel gestellten Fernröhre (14). Man bringe nun durch gehörige Stellung des ganzen Werkzeugs, das unbewegliche Fernrohr o o genau in die Richtnng nach C, so wird das bewegliche O O, weil es dem unbeweglichen parallel ist, die Richtung A w, haben, die der BC gleichlaufend ist. Das Object C, wenn es also in der Axe des unbeweglichen Fernrohrs erscheinet, wird nicht zugleich in der Axe des beweglichen erscheinen, sondern um den parallactischen Winkel w A C = A C B davon abstehen. Drehet man also das bewegliche Fernrohr, bis das Object C in dessen Axe

Axe erscheinet, so wird man sowohl durch Umdrehung der Micrometerschraube, als auch durch Fortrücken des Index auf den Gradabtheilungen, die Größe des parallactischen Winkels CAw erfahren.

16. Dieser ganz kurze Unterricht wird hinlänglich seyn, einzusehen, worauf es bey dergleichen Werkzeugen ankomme. Daß aber ein solches Werkzeug, wenn alle Theile die nöthige Vollkommenheit haben sollen, um keinen geringen Preiß verfertigt werden könne, wird man leicht begreifen.

17. Man hat zwar noch andere Erfindungen, z. E. durch Hülfe einiger Spiegel, in Verbindung mit einem Fernrohre, parallactische Winkel zu messen; aber immer bleiben dergleichen Werkzeuge sehr kostbar.

Das in (14) beschriebene rührt vom Grafen *Pacecco ob Ucedos* her, und man hat davon eine Beschreibung unter dem Titel: *Pantometrum Paceccianum, seu instrumentum novum pro elicienda ex una statione distantia loci inaccessa*, welche vom Hrn. P. Mayer zu Mannheim 1767. herausgekommen ist. In dieser Schrift wird erwähnt, daß der Churfürst von der Pfalz für dieses Instrument 1000 Gulden bezahlt habe.

Liesse

Liesse sich auch gleich dieses Werkzeug für einen wohlfeilern Preiß verfertigen, so sehe ich doch nicht ein, warum man, bloß um Weiten aus einem einzigen Stande zu messen, die Kosten an ein solches, zu anderen Vermessungen sonst unbrauchbares Werkzeug, verwenden will. Denn wenn die parallactischen Winkel klein sind, so geben sie die gesuchten Entfernungen doch nicht mit großer Schärfe (6). Und wenn kömmt eben der Fall vor, daß es nothwendig wäre, aus so sehr kleinen Standlinien Weiten zu messen?. — Meistens wird man doch auf dem Felde immer Standlinien von erträglicher Länge finden, mithin das bloße Astrolabium zur Messung der Winkel gebrauchen können.

Indessen hatte doch die Societät der Wissenschaften in Koppenhagen, eine Preißfrage fürs Jahr 1778. aufgegeben, worinn die beste Einrichtung solcher Instrumente, Weiten aus einem Stande zu messen, und die damit zu erhaltende Genauigkeit, verlangt wird. (S. die Leipz. gelehrten Anzeigen 1777. das Stück vom 12. Jun.). Ich zweifle, ob ein einfacheres, als das Paceccianische Pantometrum, die Frage beantworten wird.

Das von dem Instrumentenmacher Joh. Ahl in Koppenhagen angegebene hieher gehörige Werkzeug, wovon Bugge in seiner theo-

theoretisch=praktischen Anleitung zum Feldmessen (aus dem Dänischen rc. Altona 1798.) umständlicher aber Ravert in seinen Forelåsninger over Landmaalingen (Kiobenhavn 1793. p. 128.) eine Nachricht ertheilen, scheint nicht viel einfacher als das Paceccianische Werkzeug zu seyn, wenn es in der gehörigen Vollkommenheit verfertigt werden soll.

Hrn. Voigts Secundenmesser.

18. Hr. Conrector Voigt in Quedlinburg hat im IVten Abschnitte seines oben (§. 183. 5.) angeführten Buchs, einen Winkelmesser angegeben, von welchem er glaubt, daß er ebenfalls zu der Aufgabe, Weiten aus einem Stande, vermittelst der erforderlichen parallactischen Winkel, zu messen, und überhaupt zu geometrischen Aufgaben, wobey es auf sehr große Genauigkeit ankömmt, gebraucht werden könnte, weil er nach der Einrichtung, die er demselben gegeben hat, sich verspricht, Winkel bis auf einzelne Secunden bestimmen zu können. Er hat nemlich auf dem Astrolabio eine Art von Uhrwerk angebracht, dessen Räder und Getriebe mit der Bewegung der Alhidadenregel in Verbindung stehen, dergestalt, daß, wenn die Alhidadenregel auf dem Rande sich z. E. um einen Grad dreht, ein damit in Verbindung stehender Weiser des Uhrwerks z. E. einen

nen ganzen Umlauf, über eine besondere unter ihm befindliche Scheibe macht. Ist daher z. E. der Umfang dieser Scheibe in 60 Theile getheilt, so entspricht jedem Theile, um welchen der Weiser fortrückt, $\frac{1}{60}$ Grad, oder 1 Minute in dem Winkel, um welchen sich die Alhidadenregel dreht. Durch angebrachte Verniere auf jener Scheibe verschafft Hr. Voigt einzelne Secunden, vorausgesetzt, daß die Kammen der Räder und ihre Getriebe aufs genaueste in einander passen, und also nicht leer gehen. Er ist auf diese Idee durch die Betrachtung des gemeinen Haspels gekommen. Das Muschenbröckische Pyrometer, und jede Uhr hätte ihn darauf führen können. Er fand aber nachher, daß die Räder in einem solchen Secundenmesser leicht Spielraum bekommen, und daher die nöthige Genauigkeit nicht verschaffen, und ist daher jetzt mit einer Verbesserung beschäftigt, die darinn besteht, daß er Räder und Getriebe wegläßt, statt der Getriebe Spindeln, und statt der Stirnräder bloße Rollen nimmt, über deren und der Spindeln Umfang kreuzweise eine Schnur geschlungen wird, so daß die Spindeln sehr schnell umlaufen, wenn die Rollen nur langsam gehen u. s. w. Ob bey dieser Einrichtung sich nicht noch mehr Unbequemlichkeiten finden werden, wird die Erfahrung Hrn. V. belehren. Sind die Schnüre zu schwach gespannt, so geht die Maschiene leer, sind sie zu stark gespannt, so rei-

reiben sie sich, nutzen sich bald ab, und man ist doch immer nicht sicher, ob alle Theile gehörig angreifen, zu geschweigen, daß ein Werkzeug dieser Art sehr zusammengesetzt, beschwerlich in der Behandlung, und kostbar wird. Und gesetzt auch, das Räderwerk des Hrn. Verf. verschaffe einzelne Secunden, so wird dieß doch zu nichts nützen, so lange man nicht die Gradabtheilungen auf dem Rande selbst eben so scharf haben kann. Es wird aber schon ein Werkzeug von 18 bis 20 Zollen im Durchmesser, und der Fleiß eines Ramsden erfordert, wenn die Theilstriche auf dem Rande nur bis auf $\frac{1}{10}$ Minute sicher seyn sollen. Aber bey einem Werkzeuge von dieser Größe reicht man mit der gewöhnlichen Micrometerschraube vollkommen aus, die kleinern Theile zu erhalten, mit einem Fehler, der immer sehr viel geringer ist, als welcher in den Gradabtheilungen des Randes selbst, zu befürchten steht, und das ist doch wohl alles, was man von einem Micrometer verlangen kann. Gäbe es noch kleinere Theile, selbst einzelne Secunden genau an, so wäre dieß eine ganz überflüssige Genauigkeit, die mir vorkömmt, als wenn jemand in Pfennigen sparen wollte, und auf Thaler nicht achtete.

Wenn man freylich die Unterabtheilungen des Randes bloß durch Verniere bestimmt, so kann man immer um eben so viel fehlen, als die

die Theilstriche auf dem Rande selbst unsicher sind, ja um doppelt so viel, wenn die Fehler des Randes, und die des Vernier auf einerley Seite fallen. Ich bediene mich daher würklich nicht gerne eines Vernier, und ziehe, wenn es um mehr Genauigkeit zu thun ist, die Micrometerschraube vor, weil ich mich durch vielfältige Proben versichert habe, daß, wenn sie fleissig gearbeitet ist, und ohngefähr 6 Umdrehungen derselben einen Grad (auf einem Winkelmesser von etwa 15 Zollen im Durchmesser) betragen, man in Ansehung ihrer Revolutionen, auf 10 Secunden sicher rechnen kann. Denn diese 10 Sec. betragen ohngefähr 0,02 einer Revol, welche Größe man auf dem Umfange der Micrometerscheibe, noch gut bemerken kann, wenn sie auch nur einen Zoll im Durchmesser hätte. Freylich könnte man sagen, die Micrometerschraube gehe vielleicht um 10 Secunden leer, d. h. sie greife vielleicht die Alhidadenregel in dem ersten Augenblicke nicht an, weil etwa die Schraubengänge etwas Spielraum haben.

Aber läßt sich dieser Einwurf nicht noch vielmehr bey des Hrn. B. Rädern und Getrieben, machen? Ueberdem habe ich mich durch Erfahrungen versichert, daß eine Micrometerschraube Jahre lang gebraucht werden kann, ehe sie anfängt, etwas leer zu gehen. Auch kann dieses Leergehen vermieden werden,

wenn

wenn man zwischen dem Alhidadenhalter P und der Alhidadenregel O (I. Th. Tab. V.) noch eine stählerne an O befestigte, sehr elastische Feder anbringt, wodurch beyde Theile immer in einer gewissen Spannung gegen einander erhalten werden. Hätte dieses zu befürchtende Leergehen so viel zu bedeuten, so würde man die Micrometerschrauben in der Astronomie schon lange abgeschafft haben, wo sich doch gewiß dieser Fehler bald entdecken müßte.

Ich kann demnach die Erinnerungen Hrn. Voigts, in Ansehung des Winkelmessers, welchen ich im ersten Theile dieser prakt. Geometrie beschrieben habe, und die Vortheile, welche er sich von seinem neuen Secundenmesser verspricht, nicht für erheblich genug ansehen, eine bisher so einfache Vorrichtung, nemlich die Micrometerschraube, oder in Fällen, wo nicht die größte Schärfe nöthig ist, die Verniere zu verlassen, und statt ihrer eine so zusammengesetzte und ungleich kostbarere Einrichtung zu wählen. Es verlohnt sich auch würklich nicht, an einem Astrolabio zum Feldmessen dergleichen anzubringen. Aber auch an größern Werkzeugen zu geographischen und astronomischen Arbeiten möchte Hrn. V. Secundenmesser überflüssig seyn. Denn so bald einmahl der Halbmesser eines Werkzeugs auf 2 und mehrere Schuhe groß ist, verschafft die Micrometerschraube vollkommene Genugthuung, indem sie alsdann gar wohl eine Genauigkeit von 4 bis 5 Secunden verstattet. So denn auch bey dem Paceccianischen Pantometro, dem Hr. V. auch sehr gerne seinen Secundenmesser unterschieben möchte. Die Folge wird lehren, ob dieser neue Secundenmesser sein Glück machen wird. Ich zweifle um so mehr daran, da Hr. V. bey den Rädern und Getrieben selbst schon beträchtliche Unbequemlichkeiten bemerkt hat, und, statt deren, Spindeln und Rollen vorschlägt.

XVI. Kapitel.

Von Ausmessung der Höhen.

Aufgabe.

§. 190.

Die Höhe KI Fig. LIII. eines Objects K, über der Horizontallinie IC zu messen; vorausgesetzt, daß man von einem angenommenen Stande C horizontal nach I hinmessen kann.

Aufl. Man bringe den Winkelmesser über C dergestalt, daß ein Loth aus des verticalgestellten Werkzeugs Mittelpunkt c gerade auf C treffen würde, und messe nach (§. 155.) den Verticalwinkel Kcw, wo cw eine Horizontallinie bedeutet. Da ich nun KI auf der Horizontalfläche senkrecht annehme, welches z. E. bey Thürmen u. s. w. statt findet, so ist Kwc ein rechtwinklichtes Dreyeck, und wc = CI. Man messe also CI, so kann man in dem Dreyecke Kcw die Höhe Kw finden, wenn man schliesset cw oder CI : Kw = sin tot : tang Kcw.

dieß giebt für sin tot = 1, Kw = CI . tang Kcw, mithin KI = Kw + wI = Kw + cC = CI tang Kcw + cC, wo cC die Höhe des Werkzeugs über dem Boden bedeutet, die man leicht messen kann.

Aufgabe.

§. 191. Wenn man auf einer Horizontalebene ICD, von dem angenommenen Standpunkte C, nicht nach I hinmessen kann, demohngeachtet die Höhe KI zu finden.

Aufl. In diesem Falle nehme man eine Standlinie CD an, dergestalt aber, daß CD, mit KI in einer und derselben Ebene KID liege.

Man messe hierauf, wie in der ersten Aufgabe, über C den Vertitalwinkel Kcw, und bemerke zugleich den Punkt w, welchen an dem Objecte KI, das horizontalgestellte Fernrohr co bedecket.

Hierauf bringe man den Winkelmesser über D, erhöhe das Stativ so lange, bis man durch den horizontalgestellten Tubum γo, wieder das bey w bemerkte Zeichen wahrnimmt; und messe demnächst den Verticalwinkel Kγw, so wird man aus den beyden Verticalwinkeln Kcw = α, Kγw = β, und der gemessenen Standlinie CD

CD = $c\gamma$ = b, die Höhe Kw auf folgende Art berechnen.

In dem Dreyecke K$c\gamma$ ist der Winkel $cK\gamma = \alpha - \beta$.

Mithin

$\sin(\alpha - \beta) : b = \sin\beta : Kc$, also $Kc = \frac{b \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; Ferner $Kc : Kw = \sin \mathrm{tot} : \sin\alpha$

mithin $Kw = Kc \sin\alpha = \frac{b \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$

Also durch Logarithmen

$\log Kw = \log b + l \sin\alpha + l \sin\beta - l \sin(\alpha - \beta)$

Hat man Kw gefunden, so addiret man des Werkzeugs Höhe cC = γD hinzu, um die ganze Höhe KI zu erhalten.

Zus. I. Das bey w bemerkte Zeichen dienet eigentlich dazu, bey der zweyten Station D, dem Werkzeuge wieder genau dieselbe Höhe über dem Horizonte zu geben, die es beym ersten Stande hatte, oder vielmehr das Werkzeug bey D so zu stellen, daß γ, w, und c in einerley Horizontallinie liegen.

Läßt sich bey w kein Merkmahl an dem Objecte KI finden, so stecke man in einiger Ent-

Entfernung von C, bey L einen Stab in die Verticalebene des auszumessenden Winkels ab, und lasse auf ihm von einem Gehülfen den Punkt e bemerken, auf den die Axe des horizontal gerichteten Fernrohres co hintrifft. Alsdann braucht man beym zweyten Stande D sich nur nach dem Punkte e zu richten.

Ist der Boden, genau horizontal, so darf man bey D, auch nur vermittelst eines senkrechten Stabes, die Höhe γD derjenigen cC gleich nehmen, welche das Werkzeug bey C über dem Boden hatte.

Zus. II. In den meisten Fällen kann man sich begnügen, wenn an der zweyten Station D, die Höhe des Werkzeugs γD, nur ohngefähr der erstern cC gleich ist, zumahl wenn die Standpunkte C, D, einigermaaßen weit von dem Objecte KI entfernt sind. Denn es verursacht in bestimmung der Höhe Kw keinen merklichen Irrthum, wenn gleich über dem Standpunkte D das Werkzeug z. E. einen halben Fuß höher oder niedriger stände, als bey C.

Aufgabe.

§. 192. Eine Höhe KI (Fig. LIV. Tab. IV.) zu finden, wenn man von einem angenommenen Standpunkte c, nicht horizontal nach I hinmessen kann,

kann, sondern genöthigt ist, die Standlinie cI schief anzunehmen.

I. Fall. Wenn c höher liegt, als I.

Man bringe bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, das Fernrohr in eine horizontale Richtung co, welche verlängert bey m in das verticale Object KI einschneide. Man richte nun das Fernrohr nach K, und dann nach I, und messe die beyden Verticalwinkel Kcm, mcI, so wird sich aus diesen beyden Winkeln $Kcm = \alpha$, $mcI = \beta$, und der gemessenen schiefen Linie $cI = a$, die Höhe KI auf folgende Art bestimmen.

In dem rechtwinklichten Dreyecke Kcm ist der Winkel $K = 90° - Kcm = 90° - \alpha$.

Man schließe also in dem Dreyecke KcI

$$\sin K : cI = \sin KcI : KI \text{ oder}$$
$$\cos \alpha : a = \sin (\alpha + \beta) : KI$$

dieß giebt also $KI = \dfrac{a \sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha}$.

II. Fall. Wenn, wie in Fig. LV, c niedriger liegt als I. Dann messe man die beyden Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, $mCI = \beta$, so ist jetzt in dem Dreyecke KcI der Winkel

K

$K = 90° - \alpha$ und $KcI = \alpha - \beta$, und daher wegen $\sin K : cI = \sin KcI : KI$, wird jeßt

$$KI = \frac{a \sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$$

wo man sowohl im ersten, als zweyten Falle die gesuchte Höhe durch Logarithmen findet.

Aufgabe.

§. 193. Eine Höhe KI Fig. LVI. zu finden, wenn man genöthigt ist, die Standlinie auf einer schiefen Ebene anzunehmen, und man von dem ersten Standpunkte c nicht wie in vorhergehender Aufgabe, gerade zu, nach I hinmessen kann.

Aufl. Man nehme eine Standlinie $c\gamma$ an, und messe erstlich bey der Station c, wo cm die verlängerte Axe des horizontal gerichteten Fernrohres bedeutet, den Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, und Depressionswinkel $mcI = \beta$.

Hierauf messe man an der zweyten Station γ, wo γn eine Horizontallinie bedeutet, auf gleiche Weise den Elev. Winkel $n\gamma K = \gamma$, und Depress. Winkel $n\gamma I = \delta$.

Wenn nun die gemessene Standlinie $c\gamma = a$ heißt, so wird die Höhe KI auf folgende Art berechnet.

Der

Der Kürze halber benenne man den Winkel $K\gamma I = \gamma + \delta$, mit dem Buchstaben ε.

So ist in dem Dreyecke $Kc\gamma$ der Winkel

$$cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \beta - \varepsilon.$$

und $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$, dieß giebt

$$Kc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}.$$

Nun ist der Winkel $I = 90° - mcI = 90° - \beta$ und $\sin I : Kc = \sin KcI : KI$ oder

$$\cos \beta : \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)} = \sin (\alpha + \beta) : KI$$

also

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

mithin durch Logarithmen

$$\log KI = \log a + \log \sin \varepsilon + \log \sin (\alpha + \beta) - (\log \cos \beta + \log \sin (\alpha + \beta - \varepsilon))$$

Zus. I. Die gegebene Auflösung gründet sich darauf, daß die Punkte c, γ höher als I liegen. Es ist keine Schwürigkeit, auch eine Formel zu finden, wenn die Punkte niedriger liegen als I, wie in der LVIIsten Figur.

Man nenne die Winkel in dieser Figur eben so, wie in der LVI. Figur, nemlich $mcK = \alpha$, $mcI = \beta$

$= \beta$: $K\gamma n = \gamma$, $n\gamma I = \delta$, jetzt aber den Unterschied $\gamma - \delta$, oder den Winkel $K\gamma I = \varepsilon$, so wird nach einer ähnlichen Rechnung

$$KI = \frac{a \sin \varepsilon \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha - \beta - \varepsilon)}.$$

Zus. II. In dem Dreyecke $K\gamma c$ ist (Fig. LVI.)

$$\sin (\alpha + \beta - \varepsilon) : a = \sin (\alpha + \beta) : K\gamma$$

also $K\gamma = \dfrac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$; dieß giebt dann ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke $K\gamma n$ die Erhöhung

$$Kn = K\gamma \cdot \sin \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \sin \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}$$

$$\gamma n = K\gamma \cos \gamma = \frac{a \sin (\alpha + \beta) \cos \gamma}{\sin (\alpha + \beta - \varepsilon)}.$$

Auf eine ähnliche Art findet man auch an dem Stande c, die Werthe von Km, cm.

Man findet also, durch Messung der oberwähnten Verticalwinkel, nicht allein, wie hoch der Punkt K des Objects KI, über denen durch γ, c, eingebildeten Horizontallinien γn, cm, liegt, sondern, man weiß auch, wie groß die Horizontalweiten der beyden Standpunkte c, γ, von dem Objecte KI sind.

Auf diese Art dienen also auch Verticalwinkel, selbst zu Messung der Horizontalweiten.

Zus. III. 1. In der Aufgabe (§. 193) ist angenommen worden (wiewohl es nicht ausdrücklich erinnert ist), daß γ, c, I in einer geraden Linie liegen, daß also I c γ eine ebene gegen den Horizont geneigte Fläche sey, an deren Fuße I das Object IK sich erhebt, dessen Höhe man finden will.

2. Wenn c und γ die Mittelpunkte der Winkelmesser sind, so liegen schon aus dieser Ursache I, c, γ nicht in einer geraden Linie, weil diese Mittelpunkte eine gewisse Höhe über dem Boden haben, worauf man misset. Diese Höhe ist nun freylich gewöhnlich nur ein paar Schuhe groß, und wenn es demnach erlaubt ist, diese bey Seite zu setzen, so kann man ohne merklichen Fehler, die Auflösung nach (§. 193) vornehmen.

3. Es könnte sich aber ereignen, daß man diese Höhe des Winkelmessers nicht ausser Acht lassen dürfte, oder der Fuß J der auszumessenden Höhe K J könnte (Fig. XCVI. Tab. VII) auch so tief unter oder überhalb der Verlängerung von γ c fallen, daß die Auflösung §. 193. anzuwenden, nicht mehr verstattet wäre. In diesem Falle würde man auf folgende Art verfahren, um K J zu finden.

4.

4. Bey c, wo ich des Winkelmessers Mittelpunkt annehme, messe man über der Horizontale cm, den Elevationswinkel $Kcm = \alpha$, und Depressionswinkel $mc\mathfrak{J} = \beta$; bey γ aber den Elevationswinkel $K\gamma n = \gamma$; und Depressionswinkel $n\gamma c = \delta$, nemlich wie tief der Mittelpunkt des Werkzeugs bey c unter der Horizontallinie durch γ liege. Begreflich muß man bey c, die Höhe des Werkzeugs über dem Boden, an einem daselbst abgesteckten Stabe cC bezeichnet haben.

5. So ist, wenn man γc sich bis I verlängert vorstellt, der Winkel $KcI = Kcm + mcI = \alpha + \delta$, und nun in dem Dreyecke $Kc\gamma$, der Winkel $cK\gamma = KcI - K\gamma c = \alpha + \delta - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma$.

6. Demnach $\sin cK\gamma : c\gamma = \sin K\gamma c : Kc$.

Ist nun $c\gamma$, also die Standlinie gemessen worden, so heisse sie $= a$, dann ist.

$$Kc = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\alpha - \gamma)}.$$

7. Hierauf endlich in dem Dreyecke $cK\mathfrak{J}$

$$\sin c\mathfrak{J}K : Kc = \sin Kc\mathfrak{J} : K\mathfrak{J}$$

oder $\cos\beta : Kc = \sin(\alpha + \beta) : K\mathfrak{J}$ demnach

$$K\mathfrak{J} = \frac{a \sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta \sin(\alpha - \gamma)}$$

welches sich durch Logarithmen berechnen läßt.

8.

8. Zus. Wenn in dieser Formel der Depressionswinkel $mc\mathfrak{J} = \beta$ sich in $mcI = n\gamma c. = \delta$ verwandelt, so wird $\mathfrak{J}$ in I fallen, und die Formel (7) wird die Höhe KI wie in (§. 193.) geben. Man darf nur in §. 193. überlegen, daß das dortige $\varepsilon = \gamma + \delta = \gamma + \beta$, und also

$$KI = \frac{a \sin(\gamma + \beta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta \sin(\alpha - \gamma)}$$

ist, völlig wie (7), wenn $\delta = \beta$ gesetzt wird.

9. Da $\gamma c = a$ in (6) den Abstand der Mittelpunkte des Werkzeugs in seinen beyden Stationen bey c und γ bedeutet, so kann dieser auf dem Boden selbst gemessen werden, wenn er anders von C nach G herauf, eben ist, oder doch keine merklichen Ungleichheiten hat. Man darf zu der Absicht von dem Mittelpunkte des Werkzeugs an beyden Stationen nur ein Loth auf den Boden in C und G herabgelassen, und daselbst Zeichenstäbgen eingesteckt haben. Ich nehme an, daß das Werkzeug übrigens an beyden Stationen einerley Höhe über dem Boden gehabt habe. Dann ist die schiefe Linie CG auf dem Boden, der von c nach γ gleich.

10. Ist die Höhe des Werkzeugs über dem Boden bey γ, auch etwas größer oder kleiner als bey c, so ist zwar nicht völlig genau die

auf

auf dem Boden gemessene Linie, der Entfernung $c\gamma$ gleich, aber der Unterschied ist so unbeträchtlich, daß er völlig ausser Acht gelassen werden darf.

11. Ließe sich von c nach γ, auf dem Boden nicht bequem die schiefe Linie messen, so messe man den Horizontalabstand Cr, von C nach G, nach (§. 41 ꝛc.), so ist dieser = dem Horizontalstande $c\rho$ von c nach γ. Heißt man diesen = b, so ist, weil der Elevationswinkel von γ über c = δ gesetzt worden,

$$a = b \sec \delta = \frac{b}{\cos \delta}, \text{ demnach}$$

$$K\mathfrak{J} = \frac{b \sin(\gamma + \delta) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta \cos \delta \sin(\alpha - \gamma)}.$$

12. Begreiflich könnte man den Horizontalabstand von c nach γ, auch sonst woher als bekannt annehmen, oder man könnte ihn trigonometrisch aus einer andern Standlinie bestimmt haben, die nicht mit $K\mathfrak{J}$ in einer und derselben Verticalebene läge, wie bisher von c und γ angenommen wurde.

13. Wenn γ tiefer als c läge, so würde nur δ negativ gesetzt werden dürfen.

14. Kann man bey γ auch nach $\mathfrak{J}$ sehen, (Hier würde es der Boden nicht verstatten, weil

weil ihn die Visirlinie von γ nach $\mathfrak{J}$ durchschneidet) so könnte man bey γ statt des Depressionswinkels $n\gamma c$, auch den $n\gamma\mathfrak{J} = \vartheta$ messen. Aus den vier Winkeln α, β, γ, ϑ, läßt sich nunmehr erstlich δ, und dann nach (11) $K\mathfrak{J}$ berechnen; die Rechnung fällt aber etwas weitläuftig aus. Hier ist der Gang derselben.

15. So wie in (6)

$$Kc = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\alpha - \gamma)}$$

gefunden worden, so findet sich auf eine ähnliche Art auch

$$\mathfrak{J}c = \frac{a \sin(\vartheta - \delta)}{\sin(\beta - \vartheta)}.$$

16. Nun ist aber in dem Dreyecke $Kc\mathfrak{J}$ auch

$$Kc : \mathfrak{J}c = \sin K\mathfrak{J}c : \sin \mathfrak{J}Kc = \\ = \cos\beta : \cos\alpha$$

Demnach (15. 16.)

$$\cos\beta : \cos\alpha = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha-\gamma)} : \frac{\sin(\vartheta-\delta)}{\sin(\beta-\vartheta)}$$

oder

$$\frac{\cos\beta \sin(\vartheta-\delta)}{\sin(\beta-\vartheta)} = \frac{\cos\alpha \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha-\gamma)}$$

17.

17. Aus dieser Gleichung kann man nach bekannten trigonometrischen Verwandlungen den Werth von δ sehr leicht bestimmen. Die Formel dazu findet sich

$$\tan\delta = \frac{\tan\alpha \tan\vartheta - \tan\gamma \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\gamma + \tan\beta - \tan\vartheta}$$

Ist hieraus δ gefunden, so hat man auch K J nach (7).

18. Findet sich in (17) der Werth von tang δ negativ, so wird δ selbst negativ, welches sich nach (13) erklärt.

19. Begreiflich wird es, um eine Höhe wie K J zu bestimmen, allemahl vortheilhafter seyn, an dem Standorte γ, den Winkel δ zu messen, als den ϑ, weil man alsdann der Rechnung (15 — 19) überhoben seyn kann.

Ueberdem kann man auch sehr oft von γ nach J nicht sehen, z. E. wenn γ selbst in einer Tiefe läge. Wenn man also nur von c nach J K; von γ aber nur nach K und c visiren kann, so läßt sich hieraus die Höhe K J finden. Man braucht also nur von dem einen Standpunkt nach dem Fuße J der Höhe KJ hinvisiren zu können, so läßt sich die Höhe dennoch finden.

20. Wäre $c\gamma$ horizontal ($\mathfrak{J}c$ mag liegen wie man will), so ist $\delta = o$ also (7)

$$K\mathfrak{J} = \frac{a \sin \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha - \gamma)}.$$

21. Man sieht leicht, daß in der allgemeinen Auflösung eine Menge von einzeln Fällen enthalten ist, die in der Ausübung vorkommen können. Wären z. E. c und γ ein paar Fenster in einem, der auszumessenden Höhe $K\mathfrak{J}$, gegenüberliegenden Hause, aus denen man die Winkel observirte, c in der untern Etage, und γ lothrecht darüber in der obern also γc die lothrechte Tiefe des einen Fensters unter dem andern, so wäre $\delta = 90°$ also (7)

$$K\mathfrak{J} = \frac{a \cos \gamma \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta \sin (\alpha - \gamma)}.$$

22. Hier könnte sich eräugnen, daß z. E. K unter der horizontalen γn zu liegen käme; dann müßte man begreiflich den Winkel γ negativ setzen, und so können denn auch Fälle vorkommen, wo α negativ zu nehmen wäre, welche man aber sämmtlich leicht aufzulösen im Stande seyn wird, wenn man sich entweder eine Figur dazu entwirft, oder aus der Trigonometrie weiß, wie Sinusse und Cosinusse für negative Winkel zu nehmen sind, nemlich daß eines negativen Winkels Sinus negativ, der Cosinus aber positiv zu setzen ist u. s. w.

Anmerkung.

§. 194. In vielen Fällen ist es unbequem, Höhen aus einer schiefen Standlinie zu messen. Auch wird hiebey zum vorausgesetzt, daß die Standlinie cγ Fig. LIII. eine gerade Linie sey, oder wenigstens von ihr so wenig abweiche, daß man den Fehler ausser Acht lassen kann. Da nun wenn z. E. Icγ die abhängige Richtung eines Berges vorstellte, die letztere Bedingung, meistens nicht statt findet, also sehr selten, längs der Anhöhe eine beträchtlich große, und gerade Standlinie angenommen werden kann, so wird folgende Aufgabe zu Ausmessung der Höhen bessere Dienste leisten.

Aufgabe.

§. 195. **Aus einer Standlinie, die nicht, wie in vorhergehenden Aufgaben, mit der auszumessenden Höhe, in einer und derselben Verticalebene liegt, die Höhe zu finden.**

Aufl. Man nehme Fig. LVIII. für die auszumessende Höhe KI (z. E. eines Berges) eine willkührliche Standlinie CD an. Hier kann CD jede Lage gegen KI haben, wenn nur CD horizontal ist, oder nicht viel davon abweicht. Man messe CD und nenne sie = a.

Man

Man stelle sich nun bey C oder D, eine Horizontalebene vor, welche die Verticallinie von der Spitze des Berges, in I durchschneide.

Um nun diese Höhe KI, über der durch C oder D gehenden Horizontalfläche zu finden, so stelle man sich die beyden Horizontallinien CI, DI gezogen vor, und messe beym Stande C erstlich den Verticalwinkel KCI $= \alpha$, und dann auch den Horizontalwinkel ICD $= \beta$, (oder eigentlich den Winkel zweyer Verticalebenen durch C und K, und durch C und D) nach der gewöhnlichen Weise (§. 132).

Eben so auch bey D den Horizontalwinkel IDC $= \gamma$ (§. 132). So wird man daraus die Höhe KI auf folgende Art berechnen können.

In dem Dreyecke CID ist der Winkel I $= 180^\circ - ICD - IDC = 180^\circ - \beta - \gamma$ und folglich

$$\sin(180 - \beta - \gamma) : a = \sin\gamma : CI$$

also $CI = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)}$

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke KCI

$$1 : \tan\alpha = CI : KI$$

daher $KI = CI \cdot \tan\alpha = \dfrac{a \sin\gamma \tan\alpha}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)}$

 oder

oder durch Logarithmen, $\log KI =$

$$la + l \sin\gamma + l \operatorname{tang}\alpha - l \sin(180^\circ - \beta - \gamma)$$

woraus man also die gesuchte Höhe KI findet.

Diese Methode ist bey Höhenmessungen der Berge vorzüglich zu empfehlen: theils wegen ihrer Bequemlichkeit, weil man die Standlinie CD nach Gefallen annehmen kann, theils auch in Absicht der Genauigkeit, weil man nicht so viel spitzige Winkel zu befürchten hat, besonders wenn man die Standlinie ziemlich groß annimmt. In den vorhergehenden Aufgaben lagen die Standlinien mit den auszumessenden Höhen immer in einer und derselben Verticalebene. Dabey wurden also lauter Verticalwinkel gemessen, um die Höhe daraus zu finden. Da diese Winkel meistens sehr spitzig ausfallen, zumahl wenn die Standpunkte etwas weit wegliegen, so muß man diese Winkel mit einer sehr großen Schärfe ausmessen, wenn die daraus herzuleitenden Bestimmungen eine erträgliche Genauigkeit erhalten sollen.

Ich habe zwar gesagt, daß man die Standlinie CD so viel als möglich horizontal annehmen müsse. Dieß geschah nur wegen der Bequemlichkeit. Es erhellet aber leicht, daß diese Bedingung nicht nothwendig ist. Gesetzt D läge um die Höhe Dd höher als C, so braucht man in obiger Auflösung eigentlich nicht die

wahre

wahre Entfernung CD, sondern die auf den Horizont reducirte Cd, welche man durch Hülfsmittel, die wir bereis im vorhergehenden beygebracht haben, gar leicht finden kann.

Und wenn D gleich höher liegt als C, so wird man, wenn nur bey D der Winkelmesser horizontal gestellt wird, doch den Horizontalwinkel IdC finden (§. 132).

In den meisten Fällen wird man aber gar leicht die Standpunkte C, D, so wählen können, daß man ohne merklichen Irrthum, beyde in einer Horizontalfläche annehmen, und die wahre Weite CD, der horizontalen Cd gleich setzen kann.

Zum Ueberfluß könnte man auch bey D, den Elevationswinkel KDI messen, und solchergestalt, aus den beyden Winkeln ICD, IDC, der Standlinie CD, und dem Winkel KDI, die Höhe KI noch einmahl finden, sie mit der, welche man aus den Winkeln ICD, IDC, KCI fände, vergleichen, aus beyden ein arithmetisches Mittel nehmen, und so die Höhe KI weit genauer finden, als es durch eine Messung allein geschehen würde.

Man kann auch, ohne bey der Aufgabe dieses §es einen Horizontalwinkel bey D zu messen, bey C und D, die beyden Verticalwinkel KCI,

KCI, KDI, und die Standlinie CD gebrauchen, um daraus die Höhe KI zu finden. Dann wird aber die Berechnung etwas verwickelt, wie man aus Hrn. Hofr. Kästners Geom. Abhandl. I. Sammlung 52 ersehen kann. Daher es immer besser ist, statt des Elevationswinkels bey D, den Horizontalwinkel IDC in Rechnung zu bringen.

Wegen Messung der Horizontalwinkel ICD, IDC ist es nothwendig, daß das Werkzeug mit einem Kipp-Fernrohre versehen werden kann, das in einer Verticalebene auf- und nieder beweglich ist. Ist aber das Werkzeug nicht mit einer dergleichen Vorrichtung versehen, so ist man genöthigt, statt der erwähnten Horizontalwinkel, die schiefen Winkel KCD, KDC, zu messen, indem man das ganze Werkzeug neiget. Man wird aber demohnerachtet die Höhe KI finden können, denn in dem Dreyecke KCD, ist alsdann der Winkel $K = 180° - KCD - KDC$, mithin auch durch die Proportion $\sin K : CD = \sin KDC : KC$ die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks KCI bekannt, woraus man alsdann die Höhe KI durch die Formel $KI = KC \sin KCI$ findet.

Wären Fig. LVIII. bey K auf der Höhe selbst, die Winkel CKI, DKI (die Ergänzungen der Depressionswinkel der Gegenstände C und D bey K, zu 90°) bekannt, ferner der schiefe

Win-

Winkel CKD, oder der horizontale CID, und die Entfernung CD gegeben, so könnte man daraus auch die Höhe KI finden. Die Auflösung dieser Aufgabe steht in Hrn. Hofr. Kästners geom. Abhandl. I. Samml. 53. Abh. nebst einem Beyspiele.

Anmerkung I.

Ich füge hier noch eine Aufgabe aus Kästners Abhandlung, *de objecti e duobus locis dissitis visi invenienda distantia a superficie Terrae* (Erfordiae 1784. apud Georg. Adam Keyser) bey, welche nützlich ist, wenn man z. E. den Abstand einer Lufterscheinung von der Erde, oder ihrem Mittelpunkte, bestimmen sollte. Da diese Aufgabe zur praktischen Geometrie gehöret, so darf sie hier nicht fehlen.

I. Es sey (Fig. XCI. Tab. VII.) PDQV die Oberfläche der Erde: P der Nord- und Q der Südpol. D und F zwey Oerter auf der Erdfläche, und die größten Kreise PFQ, PDQ, die Mittagskreise dieser Oerter (§. 117. IV.). E ein Gegenstand, z. E. eine Erscheinung in unserer Atmosphäre, welche man in einem und demselben Augenblicke an den Oertern F und D beobachtet hätte.

II. C sey der Mittelpunkt der Erde, und CF = CD Halbmesser derselben; Verlängert man CF, CD, so sind CN, CM, die Verticallinien der Beobachter bey F und D.

III. Nun habe der Beobachter bey F, den Erhöhungswinkel, oder die in der Astronomie so genannte Höhe des Gegenstandes E, über seiner Horizontalfläche beobachtet. Die Ergänzung davon zu 90° giebt des Gegenstandes E Abstand vom Scheitelpunkte des Beobachters F, oder den Winkel EFN. Eben so sey bey D des Gegenstandes E Abstand vom Scheitelpunkte des Beobachters D in demselben Augenblicke = EDM.

IV. Man ziehe von E nach C eine gerade Linie EC, welche die Erd-Oberfläche in R durchschneide, so ist ER des Objects E Abstand von der Oberfläche der Erde, und EC dessen Weite vom Mittelpunkte derselben.

V. Die Verticalebene ECN schneide die Erd-Oberfläche in dem Bogen RF, und eben so die Verticalebene ECM die Erd-Oberfläche in dem Bogen RD; so ist der sphärische Winkel RFP des Gegenstandes E Abweichung von der Mittagsfläche des Ortes F (I) oder der Winkel, welchen eine Verticalfläche durch E und F, mit der Mittagsfläche des Ortes F macht. Dieser Winkel heißt des Gegenstandes

E

E Azimuth, welches demnach östlich oder westlich ist, je nachdem der Gegenstand ost- oder westwärts der Mittagsfläche beobachtet wurde.

VI. Auf eben die Art ist der sphärische Winkel RDP, das Azimuth des Gegenstandes E, für den Beobachter bey D.

VII. Die Beobachter bey F und D sollen nun in einem und demselben Augenblicke, sowohl die Erhöhungen des Gegenstandes E über dem Horizonte, mithin auch die Ergänzungen zu 90°, d. h. die Winkel EFN $= \eta$, EDM $= \lambda$, als auch des Gegenstandes E Azimuthe RFP $= \alpha$, RDP $= \beta$ beobachtet haben, so kann man daraus des Gegenstandes E Weite vom Mittelpunkte der Erde, oder EC auf folgende Art finden.

VIII. Man gedenke sich durch F und D einen Bogen eines größten Kreises FD $= a$. Dieser ist eine bekannte Größe, wenn der Oerter F, D, geographische Breiten (§. 117. VI.), mithin auch die Ergänzungen derselben zu 90°, also die Abstände der Oerter F und D von dem Pole P, oder die Bögen PF $= c$, PD $= b$, und der Winkel DPF $= A$, oder der Unterschied der Mittagskreise der Oerter F und D, gegeben sind. Denn in dem sphäri-

schen

schen Dreyecke FPD, hat man nach (Trig. S. LIII. 2).

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

IX. Auch lassen sich die Winkel PFD, PDF in dem sphärischen Dreyecke PFD aus (Trig. S. LIII. 1.) finden. Ich will PFD $= \varphi$ und PDF $= \psi$ nennen.

X. So ist in dem sphärischen Dreyecke RFD, bekannt

1) der Winkel RFD $= \varphi - \alpha$ (VI.)
2) " " " RDF $= \psi - \beta$
3) der Bogen FD $= a$

XI. Daraus kann man nach (Trig. S. LIV. 2.) in dem sphärischen Dreyecke RFD berechnen, die Seiten RF $= \zeta$, und RD $= \vartheta$.

XII. Hat man nun z. E. RF berechnet, so ist dieser Bogen das Maaß des Winkels FCR am Mittelpunkte, und es ist nunmehr in dem Dreyecke EFC bekannt, erstlich der Winkel EFN $= \eta$ (VII), also CFE $= 180° - \eta$; ferner ECF $= \zeta$ (XI). Mithin FEC $= \eta - \zeta$, woraus

$$CE = \frac{\sin \eta}{\sin (\eta - \zeta)} \cdot CF$$

folgt,

folgt, d. h. man findet durch diese Formel des Gegenstandes E Abstand vom Mittelpunkt der Erde, in solchem Maaße, als wodurch man CF, oder den Halbmesser der Erde ausgedrückt hat.

XIII. Die größte Schwürigkeit bey diesem Verfahren ist, die gehörige Bestimmung der Azimuthe und der übrigen Größen, welche zur Auflösung erforderlich sind. Da eine Lufterscheinung gewöhnlich nur von kurzer Dauer ist, auch wohl nicht an einer und derselben Stelle bleibt, sondern sich z. E. wie Feuerkugeln u. d. gl. oft mit großer Schnelligkeit bewegen, so möchte es sehr schwer halten, Azimuth und Höhe nur mit einer erträglichen Schärfe zu bestimmen, und noch schwerer, sich zu versichern, daß beyde Beobachter in einem und demselben Augenblicke des Meteors Azimuth und Höhe angegeben haben. Fällt eine Erscheinung zur Nachtzeit vor, so bemerkt man, wenn der Himmel klar ist, bey welchen Sternen sie erscheint, oder vorbey geht, und schreibt die Zeiten der Beobachtung auf. Daraus läßt sich Azimuth und Höhe jedes Sterns, und folglich auch des bey dem Sterne beobachteten Meteors, berechnen. Allein es wird dennoch sehr schwer halten, zu bestimmen, in welchem Augenblicke beyde Beobachter bey F und D, das Meteor E, in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte CE, der

bey:

beyden Verticalebenen EFC, EDC beobachtet haben, und dieß ist doch erforderlich, wenn sich die Aufgabe nach (X — XII.) soll auflösen lassen. Folgendes kann einigermaaßen dazu dienen.

XIV. In dem Dreyecke CED ist auch wie in (XII)

$$CE = \frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} \cdot CD = \frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} \cdot CF$$

Also (XII)

$$\frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda - \vartheta)} = \frac{\sin\eta}{\sin(\eta - \zeta)}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Winkel λ durch η, ζ und ϑ bestimmen, denn, wenn man $\sin(\lambda - \vartheta)$ durch $\sin\lambda\cos\vartheta - \sin\vartheta\cos\lambda$ ausdrückt, und die Gleichung $\sin\lambda\,\sin(\eta - \zeta) = \sin\eta\,\sin(\lambda - \vartheta)$ alsdann auf beyden Seiten mit $\sin\lambda$ dividirt, so findet sich

$$\cot\lambda = \cot\vartheta - \frac{\sin(\eta - \zeta)}{\sin\eta\sin\vartheta}.$$

XV. In diesem Ausdrucke sind ζ und ϑ, aus den Azimuthen α, β des Meteors bey F und D, und andern Datis bekannt (XI). Ist nun auch die Höhe desselben, oder η an dem Standorte F gegeben, so kann man daraus des Meteors

teors Höhe = $90° - \lambda$ an dem Standorte D berechnen. Stimmt sie mit der beobachteten bey D in dem Augenblicke, da β das Azimuth desselben bey D war, überein, so ist dieß eine wahrscheinliche Muthmaaßung, daß das Meteor in einem und demselben Augenblicke in E wahrgenommen wurde, und daß demnach die Voraussetzung (VII) statt finde, aus welcher die Formel (XII) für des Objects E Abstand vom Mittelpunkte der Erde hergeleitet wurde.

XVI. Es läßt sich auch die beobachtete Höhe des Meteors an dem Standorte D, so wie die Höhe und das Azimuth desselben bey F, als gegeben ansehen, und daraus das Azimuth desselben bey D berechnen. Stimmt diese Berechnung wieder mit dem beobachteten Azimuth bey D überein, so ist dieß ebenfalls ein Beweiß, daß man bey D dasselbe Meteor, und in demselben Augenblicke als bey F, beobachtet hatte.

XVII. Rechnungen, wie die bisherigen, lassen sich bey einer Lufterscheinung, welche in einem Augenblicke entsteht und vergeht, oder auch nur stillstehend ist, sicherer anwenden, als bey einer solchen, welche sich mit großer Schnelligkeit fortbewegt. — Wenn man indessen auch eine ganze Reihe von Sternen bemerkt hätte, unter welchen sich eine solche

Luft=

Lufterscheinung fortbewegt hat, so erfordert es doch viele Rechnung, bis man herausgebracht hat, welche Azimuthe und Höhen, an beyden Beobachtungsörtern, für gleichzeitige oder zusammengehörige anzunehmen sind, um darauf die Rechnung für des Meteors Abstand vom Mittelpunkte der Erde zu gründen. Es ist hier hinreichend den Weg zu dieser Berechnung gewiesen zu haben. Die weitere Ausführung davon erforderte aber allein eine ganze Abhandlung.

XVIII. Ist ein Meteor nicht gar zu weit von der Erde entfernt, wie z. E. eine Wolke, so kann man ihren Abstand von der Erde, aus einer Standlinie nach (§. 195.) finden, wenn die dazu erforderlichen Winkel gemessen worden sind. Allein auch diese Methode möchte in der Ausübung, so wie überhaupt die Bestimmung der Entfernungen aller Lufterscheinungen, unsicher seyn, weil sich der Ort und die Gestalt einer Wolke unaufhörlich ändern, und die Beobachter nie versichert seyn können, bey gleichzeitigen Winkelmessungen genau einerley Punkt der Wolke zu treffen.

XIX. Jacob Bernoulli (nova ratio metiendi altitudines nubium Act. Erud. Lipſ. 1688. pag. 98.) schlägt vor, die Höhe der Wolken aus der Zeit zu suchen, welche vom Untergange der Sonne, bis zu dem Augenblicke

blicke verstreicht, in welchem die rothe, von der Erleuchtung durch die letzten Sonnenstrahlen, herrührende Farbe der Wolken, verschwindet, und giebt zur Auflösung dieses Problems Formeln für verschiedene Stellungen der Wolken. In der Ausübung möchte aber, wie auch Hr. Gehler (in seinem vortreflichen physik.-Wörterbuche, unter dem Artikel Wolken) erinnert, sich wohl von diesem Verfahren nicht viel Genauigkeit erwarten lassen, da der Weg der letzten Sonnenstrahlen durch den Luftkreis, wegen der verschiedenen Dichte und Beschaffenheit der Dünste am Horizonte, gar sehr veränderlich ist.

XX. Andere Methoden, Entfernungen der Lufterscheinungen zu messen, und Beyspiele zur bisherigen Aufgabe, findet man in Silberschlags Theorie der am 23. Jul. 1762. erschienenen Feuerkugel (Magdeburg u. Leipz. 1764. 4. mit Kupfern), Hrn. LE ROY *Mémoire sur le meteore du globe de feu observé au mois de Juillet, dans une grande partie de la France,* (*Mém. de l'ac. Roy. de sc.* 1771. p. 688.), T. Bergmanns Abh. von der Höhe des Nordlichts, (Schwed. Abh. 1764. S. 200.) und in Hrn. DE MAIRAN *Traité phys. et historique de l'aurore boreale,* 2. edit a Paris 1754. Auch *Mém. de l'acad. roy. de sc. à Paris* 1748. p. 363. Ueber

die

die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen von *J. F. Benzenberg*, Hamburg. 1802.

Anmerkung II.

§. 196. Die bisherigen Methoden, Höhen zu messen, sind diejenigen, von denen man in der Ausübung den meisten und sichersten Gebrauch machen kann. Es giebt aber noch eine sehr große Anzahl von Vorschriften, Höhen zu messen, die aber theils sich nur auf besondere Fälle erstrecken, theils auch oft nicht die gehörige Genauigkeit verstatten. Dergleichen Aufgaben wären z. E. die Höhe eines Berges zu finden, aus der Höhe eines auf ihm befindlichen Thurms, ferner aus den bekannten Seiten eines in einem Thale befindlichen Dreyecks, die Höhe eines Berges zu finden, wenn man sich auf der Höhe selbst befindet u. s. w. Dergleichen Aufgaben lassen sich in großer Menge erdenken. Bey einigen derselben wird sogar erfordert, die Winkel mit sehr großer Schärfe zu messen, in welchem Falle man sich der Fernröhre mit Micrometern bedienen muß.

Winkel, die man auf einem Thurme u. s. w. nähme, könnte man sehr bequem durch Hülfe solcher Werkzeuge messen, die mit Spiegeln versehen sind (§. 122.).

Es

Es wird übrigens einem Geometer keine sonderliche Schwierigkeit verursachen, dergleichen Aufgaben aufzulösen, wenn er nur eine genaue Kenntniß derjenigen Stücke einer Figur hat, die man unmittelbar messen muß, um das unbekannte daraus herzuleiten.

Dieß wird mich also entschuldigen, wenn ich nur wenige Aufgaben von Höhenmessungen beygebracht habe. Wer aber mehrere Methoden kennen lernen will, dem können folgende Schriftsteller Unterricht geben.

1) *Riccioli Geographia reformata, Lib.* 6.

2) *Benj. Hedraei nova et accurata Astrolabii geometrici structura.* (Lugd. Bat. 1643) Membr. II.

Ferner eine Abhandlung von einem Ungenannten, *de methodis montium altitudines dimetiendi* etc. (Vermuthlich ist der Verfasser Hr. Zeplichal, der sich durch einige algebraische Schriften bekannt gemacht hat.)

Ausser diesen trigonometrischen Methoden, hat man aber auch noch eine andere, physicalische, nemlich durch Hülfe eines Barometers, Höhen zu messen.

Es ist nemlich aus der Physik bekannt, daß die Luft an Dichtigkeit und Elasticität beständig abnimmt, auf je größere Höhen man kömmt. Da nun das Quecksilber in einem Barometer höher oder niedriger steht, je nachdem die Luft mehr oder weniger auf dasselbe drückt, so erhellet, daß auf Bergen das Quecksilber im Barometer niedriger stehen müsse, als im Thale.

Die Naturlehrer haben sich nun von jeher damit beschäftigt, das Gesetz zu finden, nach welchem sich der Druck der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche richtet, und da die Quecksilbersäule im Barometer mit dem Drucke der Luft bekanntermaaßen das Gleichgewicht hält, so hat man Vorschriften gesucht, aus den gegebenen Barometerhöhen, z. E. oben auf einem Berge, und unten im Thale, sogleich die Höhe der einen Station über der andern zu finden.

Da es sich wohl der Mühe verlohnt, von einer so nützlichen und leichten Art, Höhen zu messen, etwas beyzubringen, so soll folgendes dazu dienen.

Wie man aus den Höhen des Barometers an zweyen Orten finden kann, um wie viel der eine höher liegt, als der andere.

§. 197. Zu diesem Behufe nehmen die Naturlehrer ein Gesetz an, welches darinn besteht, daß nemlich bey gleicher Wärme die Dichte der Luft an jeder Stelle über der Erdfläche sich verhalte, wie die Kraft, mit der sie von der darüber stehenden Luft zusammengepresset wird.

Diese Voraussetzung hat sich durch würkliche Versuche, bey denen gleich warme Luft mit einer doppelten, dreyfachen Kraft, in die Hälfte, oder, den dritten Theil ihres vorigen Raumes zusammengepresset ward, bestätiget, und man kann demnach dieses Gesetz auch in unserer Atmosphäre annehmen, so weit als die höchsten Berge sich in ihr erheben. Denn auf den höchsten Bergen, die wir kennen, ist die Luft gewiß noch nicht um den dritten Theil so dünne, als im Thale.

I. Man nehme also an, zwischen den parallelen am, bd, Fig LIX, sey eine Luftsäule, von der Oberfläche der Erde, bis an das äusserste Ende der Atmosphäre enthalten. Jede tiefer liegende Luft wird von dem Gewichte der darüberstehenden gedrückt.

 II.

II. Man stelle sich vor, die ganze Höhe am, sey in eine sehr große Anzahl kleiner Theile getheilet, die wie a c, c f, f h u. s. w. einander gleich sind; c e, f g, h i u. s. w. seyen Horizontalebenen, so werden solche die ganze Luftsäule a b m d, in lauter Schichten a c e b, c f e g, u. s. w. theilen, die insgesammt von gleicher Größe und Höhe sind.

III. Zugleich wird man ohne merklichen Fehler, wegen der geringen Höhe der Schichten, die Luft in jeder einzeln Schicht, als gleichförmig dicht annehmen können.

IV. Man setze also, es sey der Luft.

in den Schichten	a c b e,	c f e g,	f h g i	u. s. w.
Dichtigkeit	d	d'	d''	u. s. w.
Gewicht	p	p'	p''	u. s. w.

Der Druck der gesammten Luftsäule auf die untere Fläche a b heiße P, der Druck auf die Flächen c e, f g, h i u. s. w. Q, R, S u. s. w. so erhält man folgendes.

V. Es ist $Q = P - p$, weil der Druck auf die Fläche c e um das Gewicht der Luft in der untern Schicht, kleiner ist, als der Druck auf die Ebene a b. Ferner, aus eben den Gründen

$$R = P - p - p'$$
$$S = P - p - p' - p'' \text{ u. s. w.}$$

VI.

VI. Weil nun nach dem oben erwähnten Gesetze, die Dichtigkeiten der Luft in den Schichten a c b e, f c g e u. s. w, sich verhalten, wie die darauf drückenden Kräfte, so hat man

$$d : d' = Q : R = P - p : P - p - p'$$
$$d' : d'' = R : S = P - p - p' : P - p - p' - p''$$

u. s. w.

VII. Weil aber die Schichte gleichen Raum haben, so verhalten sich ihre Gewichte, wie ihre Dichtigkeiten, demnach ist auch

$$d : d' = p : p'$$
$$d' : d'' = p' : p'' \text{ u. s. w.}$$

VIII. Demnach aus VI. VII. auch

$$p : p' = P - p : P - p - p'$$
$$p' : p'' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$
$$p'' : p''' = P - p - p' - p'' : P - p - p' - p'' - p'''$$

u. s. w.

Mithin, durch die bekannte Verwandlung der Proportionen (antecedentes et consequentes summando)

$$P : P - p = P - p : P - p - p'$$
$$P - p : P - p - p' = P - p - p' : P - p - p' - p''$$

u. s. w.

Oder

Oder aus (V) statt $P-p$, $P-p-p'$ u. s. w. die Buchstaben Q, R u. s. w. substituirt

$$P:Q=Q:R \text{ also } R=\frac{Q^2}{P}=P\cdot\frac{Q^2}{P^2}$$

$$Q:R=R:S \text{ also } S=\frac{R^2}{Q}=P\cdot\frac{Q^3}{P^3}$$

u. s. w.

Hieraus erhellet also, daß die Pressungen der Luft auf die Flächen, oder Schichten a b, c e, f g u. s. w. in einer geometrischen Progression fortgehen, wie folget.

$$P;\quad Q;\quad R;\quad S \text{ u. s. w. oder}$$

$$P;\ P\cdot\frac{Q}{P};\ P\cdot\frac{Q^2}{P^2};\ P\cdot\frac{Q^3}{P^3} \text{ u. s. w.}$$

Der Exponent dieser geometrischen Progression ist $=\frac{Q}{P}$.

IX. Man setze also v w sey die mte Schicht über a b und x y die nte, man nenne den Druck der Luft auf $vw = X$, auf $xy = Y$ so ist vermöge der erwähnten geometrischen Progression,

$$X=P\cdot\left(\frac{Q}{P}\right)^m;\ Y=P\cdot\left(\frac{Q}{P}\right)^n$$

Mit-

Mithin $\frac{X}{P} = \left(\frac{Q}{P}\right)^m$; $\frac{Y}{P} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$ oder wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt.

$$\log \frac{X}{P} = m \cdot \log \frac{Q}{P};$$

$$\log \frac{Y}{P} = n \log \frac{Q}{P}, \text{ folglich}$$

$$\log \frac{X}{P} : \log \frac{Y}{P} = m : n.$$

X. Nun verhalten sich aber m, n, wie die Mengen der gleichen Theile, die auf av ax, gehen; d. h. n, m verhalten sich wie die Höhen ax, av, der beyden Schichte xy, vw, über der untern ab. Ferner, die Pressungen P, X, Y der Luft auf die Schichten ab, vw, xy, verhalten sich wie die Quecksilbersäulen, die die Luft bey a, v, x im Barometer tragen kann. Nennet man also die Höhe $av = h$; $ax = H$, die Barometerhöhe bey $a = B$

bey $v = b$

bey $x = \beta$

so verwandelt sich die obige Proportion IX. in nachstehende

$$h : H = \log \frac{b}{B} : \log \frac{\beta}{B}$$

oder

oder welches auf eines hinausläuft

$$h : H = \log \frac{B}{b} : \log \frac{B}{\beta}$$

Es verhalten sich also die Höhen der Stationen v, x, über der Horizontalfläche a b, wie die Logarithmen der Quotienten, wenn man die jedesmahlige Barometerhöhe in der untersten Station a, mit den Barometerhöhen bey den Stationen v, x, dividiret.

Anwendung dieses Satzes auf Messung der Höhen.

XI. Es ist also klar, daß, wenn bey einem gewissen Barometerstande B in der untersten Station a, ein für allemahl durch eine Erfahrung bekannt ist, wie hoch man sich erheben muß, damit das Barometer um eine gewisse bestimmte Größe sinke, man alsdann für jede gegebene Barometerhöhe an einer andern Station finden könne, wie hoch diese Station über der untersten liege.

Ex. Die Erfahrung hat gelehret, daß, wenn in der untersten Station a, die Barometerhöhe B = 28 pariser Zoll = 28 . 12 = 336 Linien ist, und man sich um die Höhe av = h = 12,945 Toisen, über der untersten Station erhebt, alsdann bey v die Barometerhöhe um

1 Linie

1 Linie geringer ist als bey a, daß folglich bey v die Barometerhöhe b nur 335 Linien seyn werde.

Man setze also in obige Proportion statt B, h, b, die gefundenen Werthe, so verwandelt sich diese Proportion in folgende

$$12,945 : H = \log \frac{336}{335} : \log \frac{336}{\beta}$$

Nun ist aber aus den Logarithmen-Tafeln

$$\log \frac{336}{335} = \log 336 - \log 335 = 0,0012945$$

Mithin

$$12945 : H = 0,0012945 : \log \frac{336}{\beta}$$

welches als folgende Gleichung giebt

$$H = \frac{12,945}{0,0012945} \cdot \log \frac{336}{\beta} \text{ oder}$$

$$H = 10000 \log \frac{336}{\beta} = 10000(\log 336 - \log \beta)$$

Auf diese Art erhellet also, daß man die Höhe H einer Station x, bey der die Barometerhöhe = β Linien ist, über einer andern, wo die Barometerhöhe 336 Linien beträgt, finden wer-

werde, wenn man vom Logarithmen der Zahl 336, abziehet den Logarithmen der Zahl β, und den Rest mit 10000 multipliciret. Die Höhe der obern Station über der untern findet man aber durch dieses Verfahren in Toisen; und die Barometerhöhen müssen in pariser Linien ausgedrückt werden, weil diese Maaße bey obigem Versuche zum Grunde liegen.

XII. Es heisse nun an einer andern Station r, die Barometerhöhe $= b$, und die Erhöhung dieser Station über der, wo die Barometerhöhe 336 Linien ist, jetzt $= h$, so ist auf eben die Art

$$h = 10000 \log \frac{336}{b}.$$

XIII. Aus XI. XII. ist also

$$H - h = 10000 \left(\log \frac{336}{\beta} - \log \frac{336}{b}\right) \text{ oder}$$

$$H - h = 10000 \log \frac{b}{\beta}.$$

Hiedurch bestimmt sich also der Unterschied $H - h$, oder die Höhe rx einer Station x, wo die Barometerhöhe β Linien beträgt, über einer andern r, wo die Barometerhöhe b Linien

nien groß ist, und daher hat man allgemein folgende

Regel.

Man suche die Differenz der Logarithmen der Barometerhöhen an zweyen Stationen, multiplicire sie mit der Zahl 10000, so hat man die Höhe der einen Station über der andern in Toisen.

XIV. Ex. Gesetzt, am Fuße eines Berges fände man die Barometerhöhe b = 27 Zoll 8 Linien = 332 Linien, auf der Spitze des Berges aber die Barometerhöhe = 26 Zoll 4 Linien = 316 Linien = β, so ist

$$\begin{array}{l} \log 332 = 2{,}5211381 \\ \log 316 = 2{,}4996871 \\ \hline \end{array}$$

Unterschied = 0,0214510

mult. mit 10000 giebt 214,51 Toisen. So hoch wäre die Spitze des Berges über dem Fuße desselben erhaben. Auf die Decimalbrüche der Toisen würde man sich aber wohl schwerlich verlassen können, weil bey der Beobachtung der Barometerhöhen doch immer kleine Fehler vorfallen. Man kann also in der Höhe des Berges etwa nur die ganzen Toisen beybehalten.

Anmerkungen über dieses Verfahren, und nöthige Vorsichten in der Ausübung.

§. 198. I. Die bisherige sehr bequeme Methode, Höhen vermittelst des Barometers zu messen, würde in jedem Falle ganz genau die Höhe der einen Station über der andern geben, wenn nicht das Gesetz des 197. §es, woraus das Verfahren §. 197. XIII. hergeleitet worden, wegen des verschiedenen Grades der Wärme in der untern und obern Luft einige Einschränkung erlitte, und nicht vielleicht noch andere Umstände auf dasselbe Einfluß hätten. In der That hat auch die Erfahrung gelehrt, daß die durchs Barometer gefundenen Höhen, ohne noch gewisse Correctionen anzubringen, nicht vollkommen mit der trigonometrischen Messung derselben übereinstimmen. So glaubte z. E. Bouguer durch Erfahrungen gefunden zu haben, man müsse, um die wahre Höhe zu erhalten, diejenige, welche obige Regel aus den Barometerständen giebt, noch mit dem Bruche $\frac{3}{3}\frac{0}{0}$ multipliciren; Allein er hat nirgends die Gründe, warum man dieß thun müsse, gehörig auseinandergesetzt. Hr. Hofr. Kästner hat sich daher in seiner Abh. vom Höhenmessen vermittelst des Barometers, welche seiner Markscheidekunst beygefügt ist, die Mühe gegeben, die Erfahrungen aufzusuchen, auf denen sich B. Vorschrift gründet. Aber auch diese Untersuchungen

gen haben ergeben, daß B. Regel nicht für allgemein richtig angenommen werden könne. So haben denn auch Lambert, Dan. Bernoulli, und andere, aus gewissen Voraussetzungen und Erfahrungen, Vorschriften zu Höhenmessungen vermittelst des Barometers, herausgebracht, welche gleichfalls nur in besondern Fällen die wahre Höhe geben. Hr. Hofr. Kästner hat in angeführter Schrift mit vielem Scharfsinne die Gründe und Erfahrungen zu allen diesen Vorschriften aufgesucht, und mit einander verglichen, daher ich denn meine Leser nur auf dieses Buch verweisen darf. Auch findet man in Gehlers physikal. Wörterbuche, unter dem Art. Höhenmessen, eine kurze Uebersicht der vorzüglichsten Regeln, welche von Zeit zu Zeit für das Höhenmessen, vermittelst des Barometers, erschienen sind. Gegenwärtig ist die de Lucische mit den Erfahrungen noch immer die übereinstimmendste. Ehe ich aber diese vortrage, muß ich noch einige Bemerkungen vorausschicken.

1) Ist klar, daß die Schlüsse des 197sten §es, woraus die Formel (§. 197. XIII.) hergeleitet wurde, voraussetzen, daß das Quecksilber im Barometer, wenn man sich damit auf einen Berg begiebt, nur deswegen sinke, weil der Druck der Luft in größerer Höhe abnimmt. Hätte aber, während man höher steigt, sich der Druck der Luft durchaus verän-

ändert, so daß z. E. das untere Barometer indessen selbst gesunken wäre, so dürfte man offenbar das Sinken dessen, welches man auf die Höhe brachte, nicht ganz auf die Rechnung der Höhe schreiben, sondern wenn die Regel (§. 197. XIII.) richtig angewandt werden soll, so muß man versichert seyn, daß während man sich in die obere Station begiebt, sonst keine Aenderung in dem Drucke der Luft vorgefallen ist, oder vielmehr, man muß die obere und untere Barometerhöhe für einerley Augenblick angeben. Um also recht sicher zu verfahren, so würde man einen Beobachter mit einem andern Barometer in der untern Station zurücklassen, wo er zu verschiedenen Zeiten den Stand des Barometers observiren müßte, während man in der obern Station mit dem Beobachten beschäftigt ist. Es versteht sich, daß die beyden Barometer, deren man sich hiezu bedienet, mit einander übereinstimmen, d. h. in der untern Station, einerley Höhe des Quecksilbers anzeigen müssen. Man muß also beyde vorher sorgfältig mit einander vergleichen, und wenn sie nicht vollkommen übereinstimmen, den Unterschied anmerken, und in Rechnung bringen.

Aus diesen, zu unterschiedenen Zeiten, in der untern Station beobachteten Barometerhöhen, wird sich nun gar leicht zeigen, ob sich, während man in der obern Station die Baro-

meter-

meterhöhe beobachtete, der Zustand der Luft durchaus verändert hat, oder nicht. Sind nun die Zeiten angegeben, in welchen man die Barometerhöhen an beyden Stationen beobachtete, so wird sich daraus ohne grossen Irrthum berechnen lassen, wie hoch in dem Augenblicke, da man in der obern Station den Barometerstand beobachtete, das Barometer in der untern Station gestanden haben müßte.

Gesetzt, Morgens um 8 Uhr habe man in der untern Station beyde Barometer mit einander verglichen, sie vollkommen übereinstimmend; und ihre Höhe = 27 Zoll 4 Linien gefunden. Um drey Uhr Nachmittags habe der Beobachter in der untern Station, die Barometerhöhe = 27 Zoll 8 Linien beobachtet. Ich will nun annehmen, der Beobachter auf der höhern Station, habe Nachmittags um 1 Uhr den Barometerstand beobachtet, und ihn = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linie gefunden. So wird man, weil sich von 8 bis 3 Uhr in der untern Station die Barometerhöhe um 4 Linien, folglich, während daß man in die höhere Station stieg, sich der ganze Zustand der Luft verändert hat, gar leicht berechnen können, wie hoch um 1 Uhr Nachmittags, da oben die Barometerhöhe beobachtet wurde, das untere Barometer gestanden haben müßte. Man schliesse nemlich nach der Regel de Tri, wie sich verhält die

Zeit

Zeit von 8 Uhr Morgens bis 3 Uhr Nachmittags, zur Zeit von 8 Uhr Morgens bis 1 Uhr Nachmittags, so verhält sich der Unterschied der Barometerhöhen, die in der untern Station um 8 Uhr und 3 Uhr beobachtet worden, zum Unterschiede dieser Barometerhöhen, von 8 Uhr bis 1 Uhr, also

7 Stund. : 5 Stund. = 4 Linien : $2\frac{6}{7}$ Linien.

Da also um 3 Uhr das untere Barometer um 4 Linien höher stand, als um 8 Uhr, so würde es um 1 Uhr nur $2\frac{6}{7}$ Linien höher gestanden haben, als um 8 Uhr. Es würde also um 1 Uhr Nachmittags die Barometerhöhe = 27 Zoll 4 Linien + $\frac{6}{7}$ L. = 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ Linien gewesen seyn, in dem Augenblicke, da man in der obern Station die Barometerhöhe = 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien fand.

Diese beyden Barometerhöhen 27 Zoll $6\frac{6}{7}$ L. und 26 Zoll $2\frac{1}{3}$ Linien, muß man nun gebrauchen, die Höhe der obern Station über der untern nach (§. 197. XIII.) zu finden.

Kann man nach einer getroffenen Verabredung die obere und untere Barometerhöhe in einerley Augenblicke unmittelbar beobachten, so kann man auch diese Regel de Tri ersparen.

2) Muß man überlegen, daß die Barometerhöhen an beyden Stationen, auch eine Correc-

rection wegen des verschiedenen Grades der Wärme erfahren müssen, ehe man sie zu der Berechnung nach (§. 197. XIII) anwenden darf. In den höhern Gegenden ist es bekanntlich kälter, als in den tiefern, und das Quecksilber im obern Barometer wird also niedriger stehen, als es stehen würde, wenn die Luft daselbst eben so warm, als unten im Thale wäre. Es müssen also beyde Barometerhöhen auf einerley Temperatur reducirt werden, und hiezu hat Hr. de Luc Vorschriften gegeben, welche ich nachher im Zusammenhange vortragen werde. Daß nun aber auch

3) Die Barometer in Rücksicht ihrer Eintheilungen, aufs genaueste übereinstimmen, und die übrigen Vollkommenheiten haben müssen, die man von guten Werkzeugen dieser Art verlangt, bedarf kaum einer Erinnerung. Daß das Quecksilber, womit man die Barometer füllt, so gut, wie bey Thermometern, durch das Auskochen, von Luft und Feuchtigkeiten gereinigt werden müsse, daß zumahl in der obern Leere nicht die geringste Luft zurückbleibe u. d. gl., und wie dieß zu bewerkstelligen sey, kann man bey Schriftstellern, welche die genaue Verfertigung der Barometer lehren, umständlich ersehen. Hieher gehöret vorzüglich Hrn. de Lucs unten (6) angeführtes Buch; und Hrn. Oberkaplan Luz in Gunzenhausen vollständige und auf Erfahrung gegründete,

Beschreibung von allen Barometern, wie sie zu verfertigen, zu berichtigen, übereinstimmend zu machen, und — — zu Höhenmessungen anzuwenden (Nürnb. u. Leipz. bey A. G. Schneider. 1784. 8.) und andere Schriften.

4) Oft finden sich Barometer, die bloß aus einer mit Quecksilber gefüllten Röhre bestehen, deren offenes Ende unten in einem weitern Gefäße mit Quecksilber steht, damit beym Fallen des Barometers, das Quecksilber in dieses Gefäß treten kann. Ist dieses Gefäß eine hölzerne Büchse, die unten die Barometerröhre umschliesset, so taugen solche Barometer nicht zu Höhenmessungen, weil man die untere Fläche des Quecksilbers nicht in solchen hölzernen Büchsen wahrnehmen kann, und dieß doch nöthig ist, weil man die wahre Höhe der Quecksilber-Säule im Barometer, allemahl von der Quecksilber-Fläche in der Büchse, bis zu der in der Röhre, rechnen muß. Aber wenn das Quecksilber in der Röhre sinkt, so steigt es in der untern Büchse, und daher ist der Punkt, von welchem man die Quecksilbersäule anrechnet, veränderlich. Ist die Büchse weit, in Ansehung der Röhre, so kann das Quecksilber in der Röhre um mehrere Zolle fallen, ehe es in der Büchse um ein erhebliches steigt. Zu gewöhnlichen Wetterbeobachtungen mag daher meistens hinlänglich seyn, nur den Stand

des Quecksilbers in der Röhre anzugeben, aber zu Höhenmessungen mit dem Barometer ist nöthig, daß man auch das Steigen oder Fallen des Quecksilbers in der Büchse, nicht ausser Acht lasse. Es muß daher statt ihrer ein gläsernes Gefäß genommen werden, welches oben oder seitwärts mit einer kleinen Oeffnung versehen ist, daß die Luft auf das Quecksilber drücken kann, und die Scale muß bis zu diesem Gefäße hinabreichen, damit man an ihr sowohl den Stand des Quecksilbers in der Röhre, als in diesem Gefäße wahrnehmen, und daraus die wahre Barometerhöhe, d. h. wie viel Zolle, Linien und Decimaltheile von Linien (letztere kann man nach dem Augenmaaße, oder wer sich darauf nicht verlassen will, vermittelst eines Vernier bestimmen) die obere Quecksilberfläche über der untern erhaben ist, herleiten kann.

5) Gewöhnlich ist das Gefäß bic, wie LX. ausweiset, gleich an die Röhre fl selbst angeblasen. Es ist vortheilhaft, wenn dieß Gefäß bic eine cylindrische Gestalt hat. Es kann mit der Röhre einerley oder auch verschiedene Weite haben. Zu dem Höhenmessen mit dem Barometer sind die sogenannten Heberbarometer d. h. solche deren Röhre und Gefäß gleiche Weite haben, also nur aus einer einzigen Röhre bestehen, die besten und bequemsten. Beym Hin- und Hertragen läßt man

das Quecksilber durch vorsichtige Neigung der Röhre, bis an das Ende derselben laufen. Dann kann man das Barometer in horizontaler Lage forttragen, ohne ein Schwanken des Quecksilbers zu befürchten. Bey den gewöhnlichen Gefäß-Barometern ist diese Bedingung schwerer zu erhalten. Von allerley künstlichen Einrichtungen zu sogenannten Reisebarometern giebt die (3) angeführte Schrift Nachricht. Bey den Heberbarometern kann man zur Verhütung des etwanigen Schwankens des Quecksilbers in der kurzen Röhre während des Hin- und Hertragens, sich bequem der Einrichtung bedienen, daß man in die kurze Röhre einen mit einem Fischbeinstiele versehenen gut zugefeilten Kork bis beynahe an die Quecksilberfläche hereinschiebt. Die Quecksilberfläche selbst darf er aber nicht ganz berühren, damit dem Quecksilber etwas Raum bleibt, sich auszudehnen, wenn es in eine andere Temperatur kömmt, und das Barometer der Gefahr des Springens nicht ausgesetzt ist. Es ist gut, wenn der Kork etwas konisch zugefeilt ist, so kann das Quecksilber wenn es sich ausdehnt, in den Raum hereintreten, welcher zwischen dem Korke und dem Glase bleibt.

Bey i ist eine Scale an der man den Stand der untern Quecksilberfläche bc wahrnehmen kann. Das Null dieser Scale muß mit dem Null der Scale le an der Röhre, genau

genau in einerley Horizontallinie liegen. Stände also z. E. die Quecksilberfläche in dem Gefäße bey b c, 2, 5 Linien über dem Null, die Quecksilberfläche in der Röhre aber bey e, 27 Zoll 3, 8 Linien über Null, so wäre 27 Z. 3, 8 L. — 2, 5 Lin. oder 27″. 1‴, 3, die senkrechte Entfernung der obern Quecksilberfläche über der untern, also die wahre Barometerhöhe. Bey der Beobachtung muß man allemahl das Auge seitwärts, genau in die verlängerte Fläche e oder b c halten, damit man keine Parallaxe zu befürchten habe, und man den richtigen Stand des Quecksilbers beobachten könne. Daß das Barometer vertical hängen müsse, versteht sich von selbst.

6) Diese und mehrere Vorsichten sind einem Geometer nöthig, wenn das Höhenmessen mit dem Barometer eine hinlängliche Genauigkeit versprechen soll. Ich will nunmehr Hrn. de Lucs verbesserte Regel für das erwähnte Höhenmessen hier in die Kürze zusammenziehen.

Hr. de Luc fand, daß die Vorschrift (§. 197. XIII.) die Höhe einer Station über der andern, nur bey einer gewissen Temperatur der Luft, nemlich bey $16\frac{3}{4}^{\circ}$ des reaumurschen Thermometers, richtig angebe, bey einer jeden andern Temperatur aber eine Correction erfordere, von der er das Gesetz mit sehr vielem Scharfsinne in seinem Werke sur les modifications

de

de l'Atmosphère, davon zu Leipzig eine Uebersetzung durch Hrn. Dr. Gehler geliefert worden ist, untersucht hat. Unter der Temperatur der Luft wird hier das arithmetische Mittel zwischen der Temperatur in der obern und untern Station verstanden. Denn obgleich das Gesetz, nach welchem die Wärme in der Atmosphäre von unten nach oben zu abnimmt, und folglich den Druck der Luft auf das Quecksilber in dem Barometer ändert, nicht mit zuverlässiger Genauigkeit bekannt ist, so hat doch Hr. de Luc durch eine zahlreiche Menge von Beobachtungen gefunden, daß die gedachte mittlere Temperatur der Luftsäule, in der man beobachtet, vollkommen hinreiche, die Correction zu bestimmen, welche der Formel (§. 197. XIII.) noch beygefügt werden muß, um in einem jeden Falle die wahre Erhöhung der obern Station über der untern zu finden. Kästner hat in seiner oben angeführten Abhandlung vom Höhenmessen, de Lucs Gründe und Formeln, mit sehr vielen nützlichen Bemerkungen, erläutert, und ich habe in meiner Abhandlung über das Ausmessen der Wärme, in Rücksicht und Anwendung auf das Höhenmessen vermittelst des Barometers, (Nürnberg bey Monath, 1786.) a priori gezeigt, daß Hrn. de Lucs Regel, immer der Wahrheit sehr nahe seyn müsse. Da aber die Gründe dazu, so wie überhaupt der Beweiß von Hrn.

de Lucs Formel, hier zu weitläuftig fallen würde, so begnüge ich mich, meine Leser zur weitern Belehrung auf eben angeführte zwey Schriften zu verweisen, und hier bloß die Formel selbst herzusetzen.

Hrn. de Lücs Regel.

II. 1. Es sey die in der obern Station beobachtete Barometerhöhe = β pariser Lin. und zu eben der Zeit die reaumürsche Thermometerhöhe über dem Eispunkt = t Grade.

2. Die in der untern Station beobachtete, und nach (I. 1) auf eben die Zeit (II. 1) reducirte Barometerhöhe = b paris. Lin.; Thermometerhöhe = T Grad über dem Eispunkt.

3. Man corrigire, wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme (I. 2), die Barometerhöhe der obern Station um so viel Linien, als die Größe $\frac{\beta\,(t - 10)}{4320}$, und die Barometerhöhe der untern Station, um so viel Linien, als die Größe $\frac{b\,(T - 10)}{4320}$ angiebt, und nenne solchergestalt die corrigirten Barometerhöhen in beyden Stationen, nemlich

β

$$\beta - \frac{\beta . (t - 10)}{4320} = \beta'$$

$$b - \frac{b (T - 10)}{4320} = b'.$$

4. Für diese corrigirten Barometerhöhen, suche man nun nach der Formel (§. 197. XIII.) die Höhe der obern Station, über der untern, so wird dieselbe $= 10000 \log \frac{b'}{\beta'}$.

5. Man ziehe nun von $16\frac{3}{4}$ reaumürschen Graden über dem Gefrierpunkt, die halbe Summe der in beyden Stationen beobachteten Thermometerhöhen ab, und nenne den Rest C, so ist $C = 16\frac{3}{4} - \left(\frac{T + t}{2}\right)$.

6. Man multiplicire endlich die nach (4) herausgekommene Höhe der einen Station über der andern, mit der Größe $1 - \frac{C}{215}$, so erhält man die wahre corrigirte Höhe der obern Station über der untern.

Es wird also in Toisen, die

$$\text{corrig. Höhe} = \left(1 - \frac{C}{215}\right) 10000 \log \frac{b'}{\beta}.$$

III. Um diese Berechnung in einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in der untern Station stehe das Barometer auf 27 Zoll $4\frac{1}{2}$ Lin. = b = 328,5 Lin., das Thermometer auf 18 Grad = T. In der obern Station das Barometer auf 26 Zoll $2\frac{3}{4}$ Lin. = β = 314,7 Lin., das Thermometer auf 7 Grad = t, so wird

$$\frac{\beta\,(t-10)}{4320} = -\frac{3 \cdot 314{,}7}{4320} = -0{,}2 \text{ Lin.}$$

$$\frac{b\,.(T-10)}{4320} = +\frac{8 \cdot 328{,}5}{4320} = +0{,}6 \text{ Lin.}$$

Mithin die corrigirten Barometerhöhen

$$\beta' = 314{,}7 + 0{,}2 = 314{,}9 \text{ Linien}$$
$$b' = 328{,}5 - 0{,}6 = 327{,}9 \text{ Linien.}$$

Ferner wird

$$C = 16\tfrac{3}{4} - \left(\frac{18+7}{2}\right) = 16{,}75 - 12{,}5 = 4{,}25$$

$$\text{und } \frac{C}{215} = \frac{4{,}25}{215} = 4{,}25 \;.\; 0{,}0046$$

=

$= 0{,}019$, daher $1 - \frac{C}{215} = 1 - 0{,}019 =$

$0{,}981$ also die

corrig. Höhe $= 0{,}981 \cdot 10000 \log \frac{327{,}9}{314{,}9}$

$= 0{,}981 \cdot 10000 \cdot 0{,}0175687$

$= 172{,}34$ . . Toisen

$= 1034{,}04$ pariser Fuß.

Man darf wohl nicht denken, daß die Zehentheile eines Fußes in dieser Rechnung zuverlässig seyn werden, da kleine Fehler in den Beobachtungen die Höhe wohl selbst auf einige Fuße unsicher geben.

IV. In diesem Exempel waren an beyden Stationen die Thermometerhöhen über dem Gefrierpunkt, folglich die Werthe von T, t, positiv. Für Thermometerhöhen unter dem Gefrierpunkt, muß man die Werthe von T, t, als negativ betrachten, und solchergestalt, sowohl bey Berechnung der corrigirten Barometerhöhen (3), als auch des Werthes von C, sich hiernach richten.

V. Hr. de Luc hat auf diese Art sehr viele Höhen durchs Barometer gemessen, sie mit der geometrischen Messung verglichen, und meistens nur einen sehr geringen Unterschied gefunden, wie

wie man aus dem IIten Theile seines Werkes §. 624 u. f. ersehen kann.

Er bedient sich aber, um desto sicherer zu verfahren, an jeder Station zweyer Thermometer, von deren Einrichtung man die Gründe sowohl in seinem oberwähnten Werke, als auch in Kästners Abh. vom Höhenmessen, findet.

Das erste Thermometer befindet sich unmittelbar an dem Brette, an welchem das Barometer hängt; dem Barometer kann also nichts wiederfahren, was dem Thermometer nicht auch wiederführe, und so dienet dieses Thermometer, die Veränderungen und Correctionen zu bestimmen, denen wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme, die Barometerhöhen selbst unterworfen sind, die Grade dieses Thermometers werden also bey Berechnung der Werthe b′, β′ gebraucht.

Das andere Thermometer dienet, die Temperatur der Luftsäule zu bestimmen, in der die Barometerhöhe beobachtet wird, und die Grade desselben werden bey der Berechnung des Werthes von C zum Grunde gelegt.

Da es aber nicht wohl eines jeden Sache ist, die Scalen für diese Thermometer gehörig nach Hrn. de Luc's Vorschrift einzutheilen, und

und es übrigens auch keinen großen Fehler verursacht, wenn man sich bey jeder Station nur eines einzigen Thermometers (welches aber neben dem Barometer in freyer Luft und an einem schattigten Orte hangen muß) bedienet, so habe ich Hrn. de Luc's Vorschriften auf den Gebrauch des reaumurschen Quecksilberthermometers, das zwischen dem Eis- und Siedepunkte 80 Grade hält, eingerichtet, weil dieses Thermometer sehr bekannt ist, und zu gegenwärtiger Absicht einige Bequemlichkeiten hat.

Gebrauchte man ein Fahrenheitisches Thermometer, so müßte man die beobachteten Grade desselben, über oder unter dem Gefrierpunkte, auf reaumürsche Grade reduciren welches sehr leicht geschehen kann, weil $2\frac{1}{4}$ Fahrenh. Grade einen reaumürschen betragen.

VI. Was übrigens ausser den oben (I. 1 — 6) angeführten Vorsichten auch noch bey den Thermometern und deren Verfertigung zu beobachten ist, davon muß man in besondern Schriften Nachricht suchen, von denen oberwähntes Werk des Hrn. de Luc, ferner Michaeli du Crest's kleine Schriften vom Thermometer und Barometer, aus dem Franz. von J. C. Thenn (Augsb. 1770), Hrn Comm. Strohmeyers Anleitung, übereinstimmende Thermometer zu verfertigen

tigen (Gött. 1775), und vorzüglich Hrn. Luz (s. oben I. 3) Anweisung Thermometer zu verfertigen (Nürnb. 1781.); auch Gottfr. Ernst Rosenthals Anleitung zur Kenntniß meteorologischer Werkzeuge (II Bände), zu empfehlen sind.

VII. Wie die Barometer besonders zu langen Bergreisen eingerichtet werden müssen, davon ertheilet ebenfalls Hr. de Luc den gehörigen Unterricht; m. s. auch Branders Beschreibung zweyer besonderer und neuer Barometer, die zu Höhenmessungen vorzüglich zu gebrauchen sind, als ein Zusatz zu Hrn. du Crests Samml. kleiner Schriften von Thermometern und Barometern (Augsb. 1777.).

Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst einer Anleitung zur leichten Berechnung der Berghöhen von Hrn. Prof. Benzenberg (Düsseldorf bey Schreiner 1811.).

Noch gehört zu dem Höhenmessen vermittelst des Barometers, *I. F. Hennert*, Commentatio de altitudinum mensuratione ope barometri. Eine Schrift, welche von der Soc. der Wissenschaften in Göttingen den Preiß

Preiß erhalten hat, und 1786. zu Utrecht herausgekommen ist.

Noch einige Bemerkungen über de Luc's Höhenformel s. m. in einem Zusatze am Ende dieses 2ten B. der pract. Geometrie.

Einige Anmerkungen über die trigonometrische Messung der Höhen sehr weit entlegener Gebirge.

§. 199. I. Wenn man die Höhe eines von den Standpunkten sehr weit entlegenen Berges, nach den vorhergehenden Methoden bestimmen will, so kann man fragen, was die Krümmung der Erde auf diese Messungen für Einfluß habe.

Es sey also Fig. LXI G der Mittelpunkt der Erdkugel, und CEB ein Stück eines größten Kreises auf der Oberfläche der Erde.

A ein Object, z. E. die Spitze eines entfernten Berges, um die Höhe AB über der Erdfläche erhaben.

Weil AB eine Verticallinie seyn muß, so wird sie, verlängert, durch den Mittelpunkt der Erde gehen (§. 4).

Gesetzt nun, c sey ein Standpunkt, um die Höhe cC über der eigentlichen Erdfläche erhaben,

ben, so wird auch Cc die Verlängerung des Halbmessers GC seyn. Man gedenke sich durch c eine Horizontalebene co, so wird dieselbe auf Gc senkrecht stehen (§. 11).

Der Winkel Aco, sey bey c der Elevationswinkel des Objects A, über der durch c gehenden Horizontalfläche oder Horizontallinie co; und ein Perpendickel Ao auf die durch c gehende Horizontalfläche wird die Höhe des Objects A, über dem Horizont des Beobachters c ausdrücken.

co wird die Horizontalweite des Objects A von c seyn.

Nun erhellet, daß die vorhergehenden trigonometrischen Methoden, eigentlich nur allemahl, die Höhe Ao, über dem Horizont des Standpunktes c bestimmen, keineswegs aber die wahre Höhe des Objects über der Erdfläche bey B, oder die Höhe AB.

Wollte man also die trigonometrisch gefundene Ao, für die wahre Höhe AB annehmen, so würde man einen Fehler begehen, der desto größer ist, je weiter A von c weg liegt, je mehr also die Krümmung der Erdfläche zwischen B und C beträgt.

Ich

Ich will nun zeigen, wie man aus der trigonometrisch gemessenen Höhe Ao, die wahre Höhe des Berges AB, finden könne.

II. Es heisse also die Höhe $Ao = c$, der Elevationswinkel $Aco = \alpha$, die Krümmung der Erde zwischen C und B, oder der Bogen CB, als Maaß des Winkels $G = \beta$.

Der Halbmesser der Erde $GC = CB = r$, des Standpunkts c Erhöhung über der wahren Erdfläche, oder $Cc = b$. Wäre der Standpunkt c z. E. selbst auf einer Bergspitze, so bedeutet Cc die Höhe dieses Berges.

Nun ist in den ähnlichen Dreyecken Gce, Aeo, der Winkel $eAo = G = \beta$, mithin für $\sin tot = 1$

$$Ao : Ae = 1 : \sec \beta \text{ oder}$$
$$Ae = c \,.\, \sec \beta$$

Ferner in dem rechtwinklichten Dreyecke Gce

$$Gc : Ge = 1 : \sec \beta \text{ also}$$
$$Ge = (r + b) \sec \beta$$

daher $Be = Ge - GB = (r + b) \sec \beta - r$

folglich $Be + Ae$ oder $AB = (r + b + c) \sec \beta - r$.

III. Man siehet also, daß ausser dem Halbmesser der Erde, welcher 3272020 Toisen beträgt (§. 117. I. Lehns.), auch die Größe des Bogens $CEB = \beta$ bekannt seyn müsse.

Die:

Diesen Bogen, welcher des Punkts B Weite von C ausdrückt (denn alle Weiten auf der Erdfläche, sind eigentlich Bogen größter Kreise) muß man entweder aus geographischen Nachrichten als bekannt annehmen, oder denselben selbst aus gemessenen Standlinien bestimmen.

Wenn des Punkts A Weite von c, oder Ac bekannt ist, welche man etwa aus angenommenen Standlinien bestimmen könnte, so wird dieselbe ebenfalls dienen, den Winkel G, oder den Bogen β zu bestimmen.

Ein gleiches würde man vermittelst der Horizontalweite co der beyden Objecte A, e, bewerkstelligen können.

Denn wenn der Elevationswinkel Aco sehr klein ist, welches bey Höhenmessungen aus sehr weit entlegenen Standpunkten, immer statt findet, so kann man ohne merklichen Irrthum, die aus Standlinien trigonometrisch gefundene Horizontalweite co, der wahren Weite cA gleichsetzen.

Ich kann also $co = cA$ als eine bekannte Größe annehmen, und will $co = cA = a$ setzen.

IV. In dem Dreyecke GcA sind also die Größen $Gc = r + b$, $cA = a$, und der ein=

geschlossene Winkel $GcA = 90° + \alpha$ bekannt. Daraus findet sich der Winkel G nach den bekannten Regeln. Aber ohne diesen Winkel G läßt sich die Größe AB noch auf eine andere Art finden.

V. Man berechne aus den in (IV) angenommenen bekannten Größen in dem Dreyecke AcG, die Seite AG, ziehe davon ab $GB = r$, so hat man AB.

Wenn man nach (Trig. S. XVIII.) verfährt, und die dortigen a, b, hier cG, cA, oder $r + b$, a, bedeuten läßt, und den dortigen Winkel $\varphi = 90° + \alpha$ setzt, so erhält man erstlich

$$\sin\psi = \frac{2 \cos(45° + \frac{1}{2}\alpha) \sqrt{a(r+b)}}{a + r + b}$$

und dann $AG = (a + r + b) \cos\psi$.

Ex. Aus Cassini Abhandl. von der Figur und Größe der Erdkugel, (aus dem Franz. von Albr. Klimm).

Im X. Kapitel dieses Buchs giebt Cassini die trigonometrische Messung verschiedener Höhen auf dem Pyrenäischen Gebürge, und fand z. E. für den Kanigou, einen der höchsten des erwähnten Gebürges, den Elevationswinkel $Aco = \alpha = 2° 37'$, und die aus einer gewis-

sen

sen Standlinie gefundene Weite $Ac = a =$ 28767 Toisen. Der Standpunkt c war nahe an der Oberfläche des Meeres, so, daß cC oder b nur 9′ betrug, eine Größe, die man ohne merklichen Fehler hier $= 0$ setzen kann. Dieß giebt

also hier $\sin\psi = \dfrac{2 \cos(45° + \frac{1}{2}\alpha)\sqrt{a \cdot r}}{a + r}$,

und $AG = (a + r) \cos\psi$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Mithin } \log 2 & = 0{,}3010300 \\
l \cos(45° + \frac{1}{2}\alpha) & = 9{,}8393380 \\
\frac{1}{2}(l\,a + l\,r) & = 5{,}4868551 \\
\hline
 & \ 15{,}6272231 \\
l\,(a + r) & = 6{,}5186175 \\
\hline
\log \sin\psi & = 9{,}1086056 \\
\psi & = 7°.\,22'.\,40'' \\
\log \cos\psi & = 9{,}9963892 \\
l\,(a + r) & = 6{,}5186175 \\
\hline
\log AG & = 6{,}5150067 \\
\text{daher } AG & = 3273457 \\
\text{abgezog. } GB & = 3272020 \\
\hline
\text{Höhe des Kanigou} & = 1437 \text{ Tois.} = AB.
\end{array}
$$

Cassini findet 1441 Toisen, dieß rühret aber daher, daß er den Halbmesser der Erde etwas anders angenommen hat.

Um nun zu zeigen, was man für einen beträchtlichen Fehler begehet, wenn man A o für A B annehmen wollte, so will ich in dem rechtwinklichten Dreyecke c A o auch noch A o berechnen.

$$
\begin{aligned}
\log AC = la &= 4\ 4588949 \\
\log \sin Aco &= 8{,}6594748 \\
\hline
\log Ao &= 3{,}1183697 \\
Ao &= 1313 \text{ Toisen.}
\end{aligned}
$$

Mithin $AB - Ao = 1437 - 1313 = 124$ Tois.

Man würde also einen Fehler von 124 Toisen begehen.

Hieraus erhellet also, wie nöthig es sey, bey Bestimmung der Höhe eines Berges aus entlegenen Standpunkten, die Krümmung der Erde in Betrachtung zu ziehen.

VI. Wenn man sich durch C eine Tangente, oder Horizontallinie Cε vorstellet, die in die Verticallinie GBA bey ε einschneidet, so ist Bε der verticale Abstand dieser Horizontallinie, von der Erdfläche bey B, oder Bε drückt aus, um wie viel der, um den Bogen BC von C entfernte Punkt B, unter der Horizontallinie durch C liegt, und daher nennet man Bε auch das Gefälle von C bis B.

Die

Dieses Gefälle kömmt nun sowohl bey Messung sehr weit entlegener Gebürge, als auch beym Nivelliren vor, wo denn besonders im letzten Falle die Betrachtung dieses Gefälles von großer Wichtigkeit ist.

Man siehet übrigens gar leicht, daß dieses Gefälle mit in obiger Formel (II) für die Höhe des entfernten Gebürges enthalten ist.

Denn in dem rechtwinklichten Drenecke $GC\varepsilon$ ist $G\varepsilon = r \sec \beta$, folglich $B\varepsilon = r \sec \beta - r$.

Nun war (II)

$$AB = (r + b + c) \sec \beta - r \text{ oder}$$
$$AB = r \sec \beta - r + (b + c) \sec \beta$$
also $$AB = B\varepsilon + (b + c) \sec \beta$$

woraus also erhellet, daß in der Bestimmung der Höhe AB, in der That das Gefälle $B\varepsilon$ mit enthalten ist.

VII. Um dieses Gefälle in jedem Falle sehr leicht berechnen zu können, so überlege man, das auch $B\varepsilon = r(\sec \beta - 1) = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1\right)$ $= r \left(\frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta}\right)$ ist. Weil nun selten der Bogen CB auf der Erdfläche, viel über $\frac{1}{2}$ Grad betragen

tragen wird, mithin der Winkel β immer von geringer Größe ist, so kann man ohne merklichen Fehler $\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ (Trig. S. X.) setzen; dieß giebt also das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} r \cdot \beta^2}{1 - \frac{1}{2}\beta^2}$$

oder ohne merklichen Irrthum

$$B\varepsilon = \frac{1}{2} r \beta^2$$

weil man das Glied $\frac{1}{2}\beta^2$ im Nenner des vorhergehenden Werthes, wegen seiner Unbeträchtlichkeit, in Vergleichung der 1, weglassen kann.

Bey dieser Formel $B\varepsilon = \frac{1}{2} r \cdot \beta^2$ muß man nun überlegen, daß die Größe β eigentlich das Maaß des Winkels G in Decimaltheilen des Sinus-totus, der = 1 gesetzt worden, ausdrücke. Ist also der Winkel β in Secunden gegeben, so muß man in unserer Formel statt β den Werth $\frac{\beta}{206264}$ setzen; dieß giebt daher das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2}.$$

Weil nun $r = 3272020$ Tois. $= 19632120$ pariser Fuß ist, so wird $\frac{1}{2} r \cdot \frac{\beta^2}{206264^2} =$

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2} \cdot \beta^2$; berechnet man nun die Größe $\frac{1}{2} \cdot \frac{19632120}{206264^2}$ durch Logarithmen, so findet man dieselbe $= 0,0002307$, daher ist $B\varepsilon = 0,0002307 \cdot \beta^2$, welche Formel also das Gefälle in pariser Fußen giebt, wenn der Winkel β in Secunden ausgedrückt wird.

Will man $B\varepsilon$ durch Logarithmen berechnen, so ist

$$\log B\varepsilon = 2 \log \beta + 3,3630768 - 7.$$

Ex. Es sey $\beta = 1' = 60''$, so ist $B\varepsilon = 0,0002307 \ldots 60^2 = 0,83 \ldots$ par. Fuß.

VIII. Es kann aber auch geschehen, daß die Entfernung BC nicht in Secunden, sondern in Längenmaaße gegeben würde. In diesem Falle muß man erst berechnen, wie viel Secunden der Bogen CB hält; und diese Anzahl von Secunden alsdann statt β in obige Formel setzen.

Man kann aber noch kürzer auf folgende Art dazu gelangen. Gesetzt, der Bogen CB, dessen Gefälle man berechnen soll, halte a pariser Fuß.

Weil

Weil nun 1 Grad auf der Erde 57107,5 Toisen, oder 342645 par. Fuß hält, so kommen auf eine Minute $\frac{342645}{60}$ oder 5710,7 par. F. Auf eine Secunde 95,2 par. Fuß. Um also die Anzahl von Secunden = x zu finden, die auf a Fuß gehen, so schliesse man nach der Regel de Tri

$$95'2 : a = 1'' : x''; \text{ also } x'' = \frac{a}{95,2}$$

Secunden; diesen Werth setze man statt β in die obige Formel, so wird

$$B\varepsilon = \frac{0,0002307}{(95,2)^2} \cdot a^2$$

oder $B\varepsilon = 0,0000002546 \cdot a^2$.

Es wird auch

$$\log B\varepsilon = 2 \log a + 0,4060030 - 8.$$

IX. Diese beyden Formeln, die man also in jedem Falle gar leicht durch Hülfe der beständigen Logarithmen berechnen kann, werden nun zeigen, unter welchen Umständen, bey Ausmessung der Höhen, das Gefälle beträchtlich ist oder nicht. Vorzüglich sind diese Formeln in der Lehre vom Nivelliren brauchbar, welche im im folgenden Bande dieses Werkes vorkommen wird.

Man hat übrigens auch Tafeln berechnet, aus denen man das einem gewissen β oder a, zugehörige Gefälle sogleich herausnehmen kann. Eine solche Tafel für rheinl. Maaß, findet sich in Picards Abhandl. vom Wasserwägen, mit Lamberts Beyträgen ꝛc. Eine andere in franz. Maaß in Cassini's oberwähnten Buche. Da aber diese Tafeln nicht für jeden Werth von β oder a, das Gefälle enthalten, und man für solche β, oder a, die nicht in diesen Tafeln genau zu finden sind, auf eine etwas mühsame Art durch Proportionaltheile, das Gefälle suchen muß, so kann man sich statt dieser Tafeln weit bequemer der gegebenen Formeln bedienen, zumahl da die Rechnung durch Logarithmen so leicht geführet werden kann.

Anmerkung.

X. In (VIII) ist vorausgesetzt worden, daß an dem Orte, wo das Gefälle berechnet werden soll, der Grad auf der Erdfläche 57107,5 Toisen halte. Da nun aber nicht überall die Grade von gleicher Größe sind, so kann man eine allgemeinere Formel verlangen, welche

welche für jeden gegebenen Grad auf der Erde, gebraucht werden kann.

Man setze also, 1 Grad auf der Erde sey an dem Orte, wo man das Gefälle eines Bogens von a pariser Schuhen berechnen soll, = m pariser Schuhen, so ist der Umfang eines Kreises, zu welchem dieser Grad gehöret, = m . 360 pariser Schuhe, und der Halbmesser,

oder der Werh von r in (VII) $= \frac{m \cdot 360}{2 \cdot \pi}$,

wo π die bekannte ludolphische Zahl bey der Kreisberechnung bedeutet.

Um nun den Bogen β, welcher den a pariser Schuhen zukömmt, in Secunden zu finden, so schließt man, weil 1° = m pariser Schuhen, so ist $1'' = \frac{m}{3600}$ pariser Schuhen. Also

$$\frac{m}{3600} : a = 1'' : \beta''; \text{ demnach}$$

$$\beta = \frac{3600 \cdot a}{m}$$

Also in (VII) das Gefälle

$$B\varepsilon = \frac{m \cdot 360}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{3600 \cdot a}{m \cdot 206264}\right)^2$$

=

$$= \frac{90 \cdot 3600^2}{\pi \cdot 206264^2} \cdot \frac{a^2}{m}$$

wo der beständige Logarithme = 0,9408473 — 3 also

$$\log B\varepsilon = 2 \log a + 0{,}9408473 - (\log m + 3)$$

gefunden wird, und demnach für jedes gegebene m das Gefälle für a pariser Fuße, leicht berechnet werden kann.

XI. In den meisten Fällen wird es hinreichend seyn, das Gefälle bloß nach der Formel (VIII) zu berechnen: Denn die Grade auf der Erde sind doch so sehr verschieden nicht, daß daraus ein beträchtlicher Fehler in der Berechnung des Gefälles zu befürchten wäre, wobey man nur immer einerley Grad braucht.

XII. Ex. Gesetzt, für m = 57107,5 Toisen = 342645 pariser Schuhen, und a = 24000 pariser Schuhen, sollte das Gefälle berechnet werden, so ist

$$\begin{array}{rl}
2 \log a = & 8{,}7604224 \\
\text{best. Logar.} = & 0{,}9408473 \\
\hline
 & 9{,}7012697 \\
\log m + 3 = & 8{,}5348444 \\
\hline
\log B\varepsilon = & 1{,}1664253
\end{array}$$

also das Gefälle $B\varepsilon$ = 14,669 paris. Schuh.

Nähme

Nähme man m aber z. E. 107,5 Toisen kleiner, so fände sich für dasselbe a das Gefälle $B\varepsilon = 14,697$, welches von obigem nur um 0,028 eines pariser Schuhes, also um eine für die Ausübung unbeträchtliche Größe verschieden ist.

Daß in den bisherigen Schlüssen die Erde für eine vollkommene Kugel genommen worden ist, und zwar jedesmal für eine Kugel von einem Halbmesser, den der angenommene Grad erforderte, verursacht keinen Fehler von Erheblichkeit.

XIII. Aus (X) findet sich umgekehrt, wenn man die beständige Größe, welche in $\frac{a^2}{m}$ multiplicirt ist, M nennet

$$a^2 = \frac{m}{M} \cdot B\varepsilon \text{ also}$$

$$\log a = \tfrac{1}{2} (\log B\varepsilon + \log m - \log M)$$

d. h. man kann den Bogen a oder BC Fig. LXI. in pariser Schuhen berechnen, welchen man bey ε in einer gegebenen Höhe Bε über der Erdfläche, übersehen kann. Denn wenn man sich bey ε befindet, und von ε eine Tangente εC an die Erdfläche zieht, so stellet diese Tangente den äussersten Lichtstrahl vor, welchen

man

man von ε an der Erde vorbey ziehen kann, und der Berührungspunkt C ist also der entlegenste Ort, den man von der Höhe ε aus, sehen kann. Ist demnach diese Höhe Bε gegeben, so giebt die gefundene Formel, den Abstand dieses Orts C von der Höhe Bε, auf der man sich befindet, wobey denn Bε ebenfalls in pariser Schuhen ausgedrückt seyn muß.

Begreiflich wird hiebey vorausgesetzt, daß kein Gegenstand zwischen B und C die Aussicht verhindert.

Da sich der Lichtstrahl von C aus, nicht in einem leeren Raume, sondern in der Luft bewegt, in der er gebrochen wird, so ändert dieß den Abstand, den man, von ε aus, übersehen kann, um ein merkliches.

Correction der trigonometrisch gemessenen Höhen, wegen der Brechung der Lichtstrahlen.

§. 200. I. Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß, wenn ein Lichtstrahl aus der Luft, in Wasser, Glaß, oder sonst in eine durchsichtige dichtere Materie, fährt, derselbe von seiner gewöhnlichen geraden Richtung, nach der er fortgehen würde, abgelenket wird, so bald er die Oberfläche des Wassers oder Glases

ses berührt. Die Erfahrungen, wodurch dieser Satz bestätigt wird, finden sich in allen dioptrischen Anfangsgründen (z. E. gleich im ersten Artikel der Kästn. Dioptrik, in dessen angewandter Math.)

Dieser Satz will so viel sagen, wenn AB Fig. LXII. z. E. die Oberfläche eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, oder eines gläsernen Würfels ABEF vorstellet, so wird ein Lichtstrahl cd, der auf dieselbe bey d auffällt, nicht den geraden Weg cde, fortsetzen, sondern bey d, durch das Wasser oder Glaß, nach einer ganz andern Richtung df fortgehen, dergestalt, daß die neue Richtung df, mit der cde, einen gewissen Winkel edf macht.

Diese Aenderung in dem geraden Wege eines Lichtstrahles geschiehet allemahl, so oft derselbe aus einer dünnern durchsichtigen Materie in eine dichtere fährt; eben dieses würde auch einem Lichtstrahle begegnen, der z. E. aus einer dünnern Luft in eine dichtere führe.

II. Man setze durch d auf die brechende Fläche AB ein Perpendickel mn, so lehret ferner die Erfahrung, daß 1) der gebrochene Strahl df, das Perpendickel mn, und der einfallende Strahl cd, in einer einzigen Ebene liegen, 2) daß meistens, wenn der Lichtstrahl cd aus einer dünnern durchsichtigen

gen Materie in eine dichtere fährt, der gebrochene Strahl df mit dem Perpendickel mn einen kleinern Winkel fdn macht, als der einfallende Strahl cde, daß also der einfallende Strahl, gegen das Perpendickel zu, gebrochen oder gelenket werde, daß er aber 3) von dem Perpendickel weggebrochen werde, wenn er umgekehrt aus einem dichtern Mittel in ein dünneres fährt. 4) Daß der Sinus des Winkels mdc oder edn, welchen der einfallende Strahl, mit dem Perpendickel mn macht, gegen den Sin. des Winkels fdn, den der gebrochene Strahl df mit dem Perpendickel mn macht, ein bestimmtes Verhältniß habe, welches aber für die verschiedenen durchsichtigen Materien, durch welche sich ein Lichtstrahl cdf fortbewegt, bisher nur durch Erfahrungen hat gefunden werden können, und nicht bloß von den Dichtigkeiten der durchsichtigen Materien abhängt. Wenn z. E. der Lichtstrahl cd, aus Luft in Wasser fährt, so verhält sich ohne merklichen Fehler, der Sinus des Winkels mdc, zum Sinus des Winkels fdn = 4 : 3, aber wie 3 : 2, wenn der Strahl aus Luft in Glaß fährt.

Sind die Winkel mdc, fdn klein, so ist das Verhältniß der Sinusse ohne grossen Fehler dem Verhältnisse der Winkel gleich, dann verhalten sich also die Winkel mdc, fdn, selbst, wie die Zahlen 4 : 3 oder 3 : 2.

III.

III. Der Winkel fdn heißt der gebrochene Winkel, und edn, oder mdc, der Neigungswinkel; der Unterschied dieser beyden Winkel, oder der edf, heißt der Refractionswinkel.

IV. Eine Folge aus dem bisherigen ist nun diese:

Wenn der Lichtstrahl cd von einem gewissen Objecte c herkäme, und sich bey f ein Auge innerhalb der dichtern Materie (II) befände, so würde dieses Auge das Object c nicht an seiner rechten Stelle c sehen, sondern weil es vom Objecte c, den Lichtstrahl nach der Richtung df bekömmt, so würde es das Object c, in der Verlängerung von fd zu sehen glauben, und es z. E. bey γ hinsetzen, so wie es hingegen, wenn die dichtere Masse ABEF nicht da wäre, das Object c nach der geraden Richtung fc sehen würde.

Eben dieser Umstand findet nun auch in unserer Atmosphäre statt. — Man stelle sich statt c die Spitze eines entlegenen Berges vor, das Auge f aber irgendwo im Thale. Weil nun auf den Bergen die Luft immer dünner ist, als im Thale, so erhellet, daß auch das Auge f, einen Lichtstrahl, der von der Spitze des Berges herabfährt, nicht unmittelbar nach einer geraden Richtung fc, sondern nach einer

ganz

ganz andern fdγ bekommen muß, welche mit der wahren fc einen gewissen Winkel γfc machen wird; diese Ablenkung von dem wahren natürlichen Wege fc, rühret nun bloß daher, daß der Lichtstrahl aus einer dünnern Luft, in die untere dichtere Atmosphäre fällt, und daher eine gewisse Brechung leidet, welche von dem Verhältnisse der verschiedenen Dichtigkeiten der Luft bey c und f abhängt.

V. Man gedenke sich nun durchs Auge f eine Horizontallinie fo, so ist der Winkel, welchen cf mit fo macht, der wahre Elevationswinkel der Bergspitze am Auge des Beobachters f, über der durch f gehenden Horizontallinie.

VI. Weil aber der Beobachter f, das Object c nicht in der wahren Richtung cf, sondern nach einer ganz andern γf stehet, so wird derselbe bey Messung des Elevationswinkels, eigentlich nicht den wahren cfo, sondern den scheinbaren Elevationswinkel γfo erhalten, mithin wenn er in der trigonometrischen Berechnung der Höhe co den scheinbaren Elevationswinkel γfo statt des wahren cfo braucht, so wird nicht die wahre Höhe des Berges co, sondern die scheinbare γo herauskommen; man wird also einen Fehler = γc begehen, der desto beträchtlicher seyn wird, je mehr der scheinbare Winkel γfo, von dem wahren cfo unterschieden ist.

Dieß zeigt, daß, wenn man in Messung der Höhen entlegener Objecte, keinen Fehler begehen will, man vorher den scheinbaren gemessenen Elevationswinkel, in den wahren verwandeln müsse, welches geschehen würde, wenn man von dem Winkel γfo, den γfc, welchen man die Refraction nennet, abzöge.

Allein wie findet man in jedem Falle die Größe dieser Refraction γfc, mithin die nöthige Correction des beobachteten Elevationswinkels? Ich werde sogleich zeigen, wie man sie jedesmahl bestimmet. — Ich muß aber vorher noch folgende Erläuterungen voraus schicken.

VII. Eigentlich ist der Weg eines Lichtstrahls durch unsere Luft, eine krumme Linie; denn weil die Dichtigkeit der Luft von oben herab beständig größer wird, so ist klar, daß ein Lichtstrahl, der von der Spitze eines entlegenen Berges herabfährt, immer in dichtere und dichtere Luftschichten kömmt, mithin immer mehr und mehr von seinem Wege abgelenkt wird, und also eine gewisse zusammenhängende krumme Linie bildet. Den ausgeführtern Beweiß hievon lese man in Kästners Astron. §. 136. in dessen angew. Math.

Die

Die wahre Gestalt dieser krummen Linie ausfindig zu machen, haben sich von jeher die Naturforscher beschäftigt; sie hängt offenbar mit von dem Gesetze ab, nach welchem sich die Dichtigkeit der Luft von der Erdfläche bis auf eine gewisse Höhe verändert. — Da aber dieses Gesetz noch nicht vollkommen bekannt ist, so weiß man auch noch nicht völlig genau die wahre Gestalt dieser krummen Linie.

VIII. Indessen läßt sich darthun, daß 1) diese krumme Linie in einer Verticalebene liegt, die durchs Auge des Beobachters, und durchs Object gehet, 2) daß sie gegen die Erdfläche zu, hohl ist, und 3) daß sie wenigstens nicht sehr merklich, von einem Kreisbogen abweicht, dessen Halbmesser ohngefähr 7 bis 8 mahl größer ist, als der Halbmesser der Erde. Den Beweiß hievon findet man in Lamberts Eigenschaften der Bahn des Lichts (Berl. 1772.) im III. Abschnitt.

Es sey also Fig. LXIII. fn ein Stück eines größten Kreises auf der Erdfläche, C der Mittelpunkt desselben; also fC der Halbmesser der Erde.

Bey f ein Beobachter auf der Oberfläche der Erde; c ein Object, um die Höhe cn über der Erdfläche erhaben.

Man beschreibe nun in der Ebene fCc mit einem Halbmesser fL, der ohngefähr 7 bis 8 mahl größer ist als f'C, einen Kreisbogen fec, durch die beyden Punkte f, c, so daß dieser Kreisbogen gegen die Erdfläche fn hohl ist, so wird fec die Bahn oder krumme Linie seyn, in der sich das Licht von c bis f bewegt.

Man stelle sich bey f ein paar Tangenten fm, fγ vor; fm für den Kreisbogen fn, und fγ für den Kreisbogen fec; so ist fm die Horizontallinie des Orts f.

Die Tangente fγ wird aber die Richtung vorstellen, welche ein unendlich kleines Stückgen fi des Bogens fec, bey f hat; da also der Lichtstrahl ceif bey f, unter der Richtung if das Auge rühret, so erhellet, daß, weil fγ die Verlängerung von fi ist, ein Auge bey f, das Object c, nicht an seinem wahren Orte, sondern in der Richtung der Tangente fiγ, sehen wird;

Da also fγ die scheinbare Richtung, nach der das Object gesehen wird, und fc die wahre Richtung ist, so ist, eben so wie vorhin, cfm der wahre Elevationswinkel, γfm aber der scheinbare, der also um die Refraction γfc größer ist, als der wahre.

Man

Man siehet also, daß wegen der krummen Linie, in der sich das Licht durch die Luft bewegt, das Object c immer höher zu liegen scheinen muß, als es in der That liegt, daß man also in (§. 199.) statt der wahren Höhe nc, die scheinbare nγ bekommen würde, wenn man nicht den gemessenen Elevationswinkel mfγ durch die Refraction cfγ verbesserte.

IX. Um nun die Refraction in jedem Falle zu erhalten, dienet folgendes.

Weil der Winkel fCn immer nur sehr klein ist, und z. E. wenn n von f auch 7 bis 10 Meilen entfernt wäre, der Bogen fn oder der Winkel C kaum 40 bis 50 Minuten beträgt, so kann man, wie eine kleine Ueberlegung zeigen wird, ohne merklichen Irrthum die Weite fc der beyden Objecte f, c, der Länge des Bogens fn gleich setzen.

Aber fc ist die Chorde des Bogens fec, und da ebenfalls der Bogen fec nur eine geringe Anzahl von Minuten halten wird, so wird auch ohne merklichen Fehler, die Länge des Bogens fec der Chorde fc gleich seyn. Folglich wird auch ohne beträchtlichen Irrthum der Bogen fec mit dem Bogen fn gleiche Länge haben.

Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, daß, wenn zwey Kreisbogen, die mit verschie-

denen

denen Halbmessern beschrieben worden, gleiche Länge haben, sich z. B. die Mengen von Minuten, die auf jeden Bogen gehen, umgekehrt, wie der beyden Bogen Halbmesser verhalten.

Man nenne also die Menge von Minuten oder Secunden, die der Bogen fn, oder der Winkel C hält $= \beta$, die auf den Bogen feo gehen $= \alpha$, den Halbmesser fC = r und den Halbmesser fL des Bogens fec = R, so ist

$$\alpha : \beta = r : R$$

aber $r : R = 1 : 8$ folglich auch

$$\alpha : \beta = 1 : 8$$

oder $\alpha = \frac{1}{8}\beta$,

d. h. der Bogen, der den Weg des Lichtes zwischen zweyen Objecten f, c, vorstellet, oder auch der diesem Bogen, an seinem Mittelpunkte zugehörige Winkel L, enthält nur den 8ten Theil der Anzahl von Minuten rc., welche auf den Winkel C, oder den Bogen fn gehen, der zwischen der Höhe cn, und dem Orte des Beobachters f, auf der Erdfläche enthalten ist.

Dieser merkwürdige Satz dienet nun, die Refraction γfc auf folgende Art zu finden.

Weil fγ eine Tangente des Bogens feo, fc aber eine Chorde desselben ist, so hat der Winkel γfc zu seinem Maaße den halben Bogen fec, wie gleichfalls aus der Geometrie bekannt

kannt ist. Da nun $fec = \alpha = \frac{1}{8}\beta$ ist, so wird seyn der Winkel $\gamma fc = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\beta = \frac{1}{16}\beta$.

Die Refraction beträgt also den 16ten Theil des Winkels fCn, dessen Maaß der Bogen β oder fn ist.

X. Auf diese Art kann man also in jedem Falle sehr leicht die Größe der Refraction finden, wenn man weiß, wie viel Minuten oder Secunden auf den Bogen fn gehen, der zwischen dem Beobachter f, und der auszumessenden Höhe cn enthalten ist.

Gesetzt, der Bogen fn sey 30 Minuten, so ist die Refraction $\gamma fc = \frac{30}{16}$ Minuten $= 1' \cdot 52''$, wäre also der scheinbare gemessene Elevationswinkel $mf\gamma = 1^\circ \cdot 15'$, so wäre der wahre Elevationswinkel $cfm = 1^\circ 15' - 1' 52'' = 1^\circ \cdot 13', 8''$.

XI. Die Anzahl von Minuten und Secunden, die aber in einem gegebenen Falle auf den Bogen fn gehen, kann man finden, wenn der Bogen fn in Längenmaaße bekannt ist; da nun die Länge dieses Bogens ohne merklichen Fehler der Weite fc gleich ist, so ergiebt sich auch die Refraction, wenn man weiß, wie weit das Object c von dem Orte f wegliegt. Man sehe fc als einen Bogen auf der Erdfläche an, verwandle ihn in Minuten und Secunden, und nehme

den

den 16ten Theil davon, so hat man die Refraction.

Man setze also die Weite fc, die aus der trigonometrischen Messung bekannt ist = a, so ist auch fn = a, und daher in Secunden der

Winkel $C = \frac{a}{r} \cdot 206264$, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet. Setzet man also r = 3272020 Toisen, so ist die Refraction

$$= \tfrac{1}{16} C = \frac{a \cdot 206264}{16 \cdot 3272020} = 0{,}003938 \cdot a$$

Secunden, in welcher Formel a in Toisen gegeben seyn muß.

XII. Man siehet leicht, daß, wenn die auszumessende Höhe cn, von dem Standpunkte f nicht gar weit wegliegt, ohne merklichen Irrthum die Refraction für Null angesehen werden kann. Gesetzt der Bogen fn betrüge z. B. nur 1 Minute oder im Längenmaaße 5710 pariser Fuß, so wäre die Refraction nur $\frac{1}{16}$ einer Minute oder etwa 3 Secunden. Man könnte sie daher ohne beträchtlichen Irrthum weglassen; allein bey Messung der Höhen, aus sehr weit entfernten Standpunkten, darf man die Refraction nie aus der Acht lassen.

XIII.

XIII. Die beygebrachte Regel, daß die Refraction den 16ten Theil des Winkels fCn betrage, ist eigentlich auf die Voraussetzung gegründet, daß des Kreisbogens fec Halbmesser 8 mahl größer ist, als des Kreisbogens fn Halbmesser. Weil aber die krumme Linie des Lichtstrahls von dem Zustande der Luft abhängt, mithin der Kreisbogen fec bald flächer bald erhabener seyn muß, je nachdem der Zustand der Luft durch Wärme oder Dünste u. d. gl. verändert wird, so erhellet, daß auch des Kreisbogens fec Halbmesser nicht immer vollkommen einerley Größe haben wird. Dieß zeigt also, daß auch die Refraction nicht beständig $\frac{1}{16}$ des Winkels C, sondern bald etwas größer, bald etwas kleiner seyn werde. Indessen wird aber doch die Refraction nie viel von $\frac{1}{16} \cdot C$ abweichen: wenn sich auch der Zustand der Luft sehr merklich verändert.

Da der Zustand der Luft, von der Veränderung ihrer Dichtigkeit abhängt, und diese durch den Stand des Barometers und Thermometers bestimmt wird, so erhellet, daß die Refraction von dem Stande des Barometers und Thermometers bey f abhängen muß. Wenn ich überhaupt setze, daß die Refraction $\frac{1}{m}$ des Winkels C betrage, so habe ich nach einer von der Wahrheit nicht sehr entfernten Hypothese gefun=

gefunden, daß, wenn in der untersten Station f das Barometer auf 28 Zoll stehet, die Werthe des Buchs $\frac{1}{m}$ für verschiedene Grade des Reaumürschen Thermometers folgende sind

Stand d. Therm.	der Werth von $\frac{1}{m}$
$-10°$	$\frac{1}{15,6} = 0,06410$
0	$\frac{1}{16,4} = 0,06097$
$+10$	$\frac{1}{17,2} = 0,05814$
$+20$	$\frac{1}{18,0} = 0,05555$

Jeder Werth dieser Tafel muß aber nun noch in dem Verhältnisse größer oder kleiner genommen werden, in welchem die Barometerhöhe bey f, größer oder kleiner ist als 28 Zoll.

Ex. Was für ein Theil des Winkels C wird die Refraction seyn, wenn beym Standpunkte f, das Thermometer 10 Grade über dem Gefrierpunkt, das Barometer aber auf 27,5 Zoll stände?

Weil

Weil für + 10° des Therm. der Werth von

$\frac{1}{m} = \frac{1}{17,2} = 0,05814$ ist, so schließe man

$28 : 27,5 = 0,05814 : x$

so wird $x = 0,05710$, also wird bey einem solchen Zustande der Luft, die Refraction = 0,05710 des Winkels C seyn.

XIV. Eigentlich hängt die Refraction auch etwas von dem Elevationswinkel $\gamma f m$ ab, allein der Einfluß dieses Winkels auf die Refraction, ist fast in allen Fällen so unbeträchtlich daß man ihn völlig ausser Acht lassen kann.

XV. Ausser der in VIII erwähnten Schrift, können zum weitern Nachlesen noch folgende Schriften dienen.

Memoires de l' Ac. de Paris. 1749. p. 101.

Meines Vaters Tob. Mayeri *Programma de refractionibus objectorum terrestrium.* Goett. 1751.

XVI. Kann man auf der Spitze c eines entfernten Berges, zu eben der Zeit als ein Beobachter an dem Standpunkte f den scheinbaren Elevationswinkel $\gamma f m$ der Bergspitze c beobachtet, den scheinbaren Depressionswinkel des Stationspunktes f d. h.

den

den Winkel um welchem f unterhalb der Horizontallinie von c erscheinet, messen lassen, so kann man die Höhe cn finden, wenn ausser jenen zwey Winkeln nur bloß auch noch die Dichtigkeiten der Luft in c und f bekannt sind, welche denn aus den Barometerständen, und Temperaturen an diesen Standpunkten c und f berechnet werden können. Von dieser nützlichen Aufgabe, sehe man das weitere in meiner bey der hiesigen Soc. der Wiss. gehaltenen Vorlesung de apparentiis objectorum terrestrium (in den Comment. Soc. R. sc. recent. ad ann. 1808 — 11.) §. 21 : 13.

XVII.

XVII. Kapitel.

Von den Folgen der Fehler in den Messungen.

§. 201.

Da wir auf dem Felde diejenigen Stücke, welche zur Bestimmung der unbekannten Größen dienen, nie vollkommen genau messen können, sondern bey allen Messungen immer gewisse Fehler begehen, die nach Verhältniß der Güte eines Werkzeugs, und der Sorgfalt des Beobachters, bald mehr bald minder erheblich sind, so ist es die Pflicht eines Geometers, die Umstände zu bestimmen, unter welchen die Fehler in den gemessenen Stücken, auf die Bestimmung der unbekannten, einen großen oder geringen Einfluß haben; diese Lehre von der Berechnung der Folgen der Fehler wird ihm in vielen Fällen Anleitung geben, eine glückliche Auswahl der zu messenden Stücke auf dem Felde zu treffen, und ist überhaupt höchst wichtig zu einer richtigen und sichern Praxis.

§. 202.

§. 202. Die Fehler, die bey der **unmittelbaren** Messung der Linien vorfallen, habe ich meistens schon im IIIten Kap. beygebracht.

Bey Messung der Winkel sind aber die unvermeidlichen Fehler weit mannichfaltiger, sie hängen sowohl von dem eingetheilten Rande des Werkzeugs, als auch von dessen Stellung (X. Kap.), der richtigen Bewegung des Fernrohres (XI. Kap.) und noch mehreren Umständen ab; dergestalt, daß es bey einem ausgemessenen Winkel, weit schwerer ist, den muthmaßlich begangenen Fehler anzugeben, als es bey Messung gerader Linien geschehen kann.

Bey Bestimmung der Winkel auf dem Meßtische, setzt **Marinoni** (de re ichnographica Lib. I. Cap. V. num. 5.) die Möglichkeit des zu begehenden Fehlers auf 5 Minuten, vorausgesetzt, daß man nur ein gewöhnliches Diopterlinial zum Visiren braucht, und sonst mit aller möglichen Vorsicht zu Werke geht. Er bestätigt dieses auch durch würkliche Versuche, die man a. a. O. selbst nachlesen kann.

Bey Messung der Winkel, mit einem Astrolabio von gewöhnlicher Größe, nemlich von ohngefähr einem Fuße im Durchmesser, das übrigens mit gehöriger Sorgfalt verfertiget, und mit einem Fernrohre versehen ist, will ich den **größten** Fehler, der auch bey aller Auf-

merk-

merksamkeit und Vorsicht, unvermeidlich ist, auf 1 bis 2 Minuten ansetzen, wovon ich mich durch die Erfahrung überzeugt habe, indem ich einerley Winkel zu verschiedenen Zeiten maaß, und die Resultate miteinander verglich. Denn, wenn gleich in den Abtheilungen des Randes vielleicht keine Fehler von dieser Größe sind, oder wenn man dieselben auch gleich durch Prüfungen ausfindig gemacht hätte, und dem ausgemessenen Winkel die daher rührende Correction gäbe, so können doch andere Umstände, z. E. eine etwas unrichtige Stellung des Werkzeugs, eine etwanige Excentricität, die Unvollkommenheit des Gesichts u. s. w. zusammen genommen, bey einen so kleinen Instrumente, gar leicht einen Irrthum von 1 bis 2 Minuten hervorbringen. Wenn auch gleich in vielen Fällen die Beträchtlichkeit des Fehlers nicht von der angegebenen Größe seyn möchte, so muß man doch in der Theorie von den Folgen der Fehler ein für allemal etwas bestimmtes festsetzen, und hierzu muß man allemal den größten unvermeidlichen Fehler annehmen, der sich von der Beschaffenheit und Größe eines Werkzeugs erwarten läßt.

Bey der gewöhnlichen Einrichtung und Größe der Boussolen, wird man bey Messung eines Winkels mit diesem Werzeuge, einen Feh-

Fehler von 15 bis 20 Minuten, wohl schwerlich vermeiden können; daher werde ich bey der Boussole den größten unvermeidlichen Fehler auf 15 bis 20 Min. ansetzen.

§. 203. Die Fehler, welche in einem ausgemessenen Winkel vorgefallen sind, können nun entweder den Winkel zu groß oder zu klein angeben, d. h. wenn man den ausgemessenen Winkel $= A$, und die Größe des unvermeidlichen Fehlers $= \alpha$ setzt, so ist der wahre Winkel entweder $A - \alpha$ oder $A + \alpha$. Welches von beyden nun in einem besondern Falle statt findet, läßt sich nicht entscheiden, sondern man muß beydes annehmen, und die Folgen davon berechnen.

Da solchergestalt die begangenen Fehler bald positiv bald negativ sind, so wird es zur Richtigkeit einer Messung sehr vortheilhaft seyn, wenn man die Größen zu wiederholtenmahlen misset, und aus allen das Mittel nimmt. Wenn daher z. E. ein Winkel mit einem Astrolabio viermahl gemessen würde, und man aus allen vier Resultaten ein Mittel nähme, so würde man wahrscheinlich den Winkel viermahl genauer finden, als wenn man ihn z. E. nur einmahl mäße.

Da es aber auf dem Felde eine sehr große Verzögerung der Arbeit seyn würde, alle

Grö-

Größen zu wiederholtenmahlen zu messen, so läßt man es meistens, wenn nicht eine ausserordentliche Schärfe erfordert wird, bey der einmahligen Messung bewenden, und nimmt an, daß man einem so großen Fehler ausgesetzt sey, als man von der Natur des gebrauchten Werkzeugs (§. 202.) zu befürchten hat, und sucht nun die Folgen desselben, d. h. dessen Einfluß auf die unbekannten Größen, zu berechnen.

§. 204. Setzt man nun muthmaßlich ein für allemahl einen gewissen Fehler fest, so wird es gar sehr auf die Lage der bekannten Größen gegen die unbekannten ankommen, ob die in den gemessenen Linien und Winkeln begangenen Fehler, auf die Bestimmung der unbekannten Stücke einen beträchtlichen Einfluß haben, oder nicht. Um hievon nur in einer Zeichnung ohngefähr einen Begriff zu geben, und den Grund zu den folgenden Untersuchungen zu legen, so will ich annehmen, B Fig. LXIV. sey ein Object auf dem Felde, dessen Weite von A man aus der gemessenen Standlinie AC und den beyden Winkeln BAC, BCA bestimmen wollte.

Gesetzt nun, der Winkel BCA und die Standlinie AC seyen richtig gemessen worden, den Winkel BAC habe man aber um den kleinen Winkel BAb falsch gemessen, dergestalt, daß also BAC den wahren Winkel, bAC den falsch gemessenen vorstellet, so erhellet, daß man aus dem Winkel C, der Standlinie AC, und dem unrichtigen Winkel bAC, nicht die wahre Weite AB, sondern eine ganz andere Ab finden würde, weil man statt des wahren Dreyecks ABC, das unrichtige AbC erhielte. Um so viel also Ab kleiner oder größer ist als AB, so viel beträgt, in Absicht der Weite AB, die Folge des Fehlers, den man in Messung des Winkels BAC begangen hat.

Hier in der Figur ist nun die Standlinie AC so angenommen, daß das Dreyeck BAC ohngefähr gleichschenklicht ist.

Man setze aber, die Weite AB zu bestimmen, hätte man nicht die Standlinie AC, sondern eine andere Ac angenommen, welche mit AB einen sehr stumpfen Winkel cAB mache. Ich will völlig, wie vorhin, annehmen, Ac und der Winkel c seyen richtig, der Winkel an A aber, nemlich cAB, wieder um den kleinen Winkel BAβ falsch gemessen worden, und will setzen, daß BAβ = BAb sey, so erhellet, daß man jetzt ebenfalls nicht das wahre Dreyeck cAB, sondern wieder das unrichtige cAβ, mithin auch nicht die wahre Weite AB, sondern Aβ finden würde. Nun wird man aber schon aus der bloßen Zeichnung sehen, daß wegen Ac = AC, und βAB = BAb der Unterschied AB — Aβ weit

be-

beträchtlicher seyn wird, als der Unterschied AB — Ab.

Diese Unterschiede drücken aber die Fehler aus, welche man in der Seite AB zu befürchten hat, wenn man selbige entweder aus der Standlinie Ac, oder AC bestimmen will. Es ist also klar, daß wenn man gleich in Messung des Winkels A an beyden Standlinien einerley Fehler begienge, derselbe dennoch bey Auswahl der Standlinie Ac, die Weite AB mit einer größern Unrichtigkeit geben würde, als bey der Wahl der Standlinie AC, und daß dieß daher rühren müsse, daß bey Annehmung der Standlinie Ac, der Winkel cAB sehr stumpf ist, hingegen CAB an der Standlinie AC eine schicklichere Größe hat. Dieß zeigt, wie sehr die richtige Bestimmung der unbekannten Stücke (wie z. E. AB) von einer s c h i c k l i c h e n   A u s w a h l   d e r   w i l l k ü h r l i c h e n   o d e r   b e k a n n t e n   G r ö ß e n abhänge, und wie einerley Fehler in den gemessenen Stücken, gar verschiedenen Einfluß auf die Bestimmung der unbekannten haben können. Woraus dann ferner folgt, daß ein schlechteres Instrument, bey einer schicklichen Auswahl der willkührlichen Standpunkte und Linien, oft eben so gute Dienste leistet, als ein gutes Werkzeug, bey schlimmern Umständen; daß z. E. ein Fehler von 10 Minuten, bey Messung der Winkel an der Standlinie AC, vielleicht nicht so gefährlich

 ist,

ist, als ein Fehler von 1 Minute, in den Winkeln an der Standlinie Ac.

Dieses Beyspiel wird nun einigermaaßen den Nutzen zeigen, den man von der Theorie und Berechnung der Folgen der Fehler, zu erwarten hat.

Die allgemeine Theorie hievon, aber bloß synthetisch vorgetragen, findet sich in Marinoni's oberwähnten Werke, im zweyten Theile. Sein Vortrag ist aber so weitläuftig, und mit so beschwerlichen Demonstrationen und Figuren begleitet, daß man gar leicht dabey ermüdet. — Und am Ende siehet man doch nicht ein, worauf eigentlich die Sache ankomme.

Ich werde daher diese Theorie nicht synthetisch, sondern analytisch behandeln, und mich hierzu der trigonometrischen Sätze bedienen, die ich im vorhergehenden bereits beygebracht habe, weil hiedurch die Lehre theils allgemeiner, theils sehr viel kürzer und weniger ermüdend, vorgetragen werden kann. Diejenigen, welche sich vor etwas Buchstabenrechenkunst fürchten, dürfen freylich dieses Kapitel nicht lesen, allein diese würden auch Marinoni's verwickelte synthetische Beweise nicht einsehen.

Da auf dem Felde die unbekannten Stücke, durch ein oder mehrere Dreyecke, an denen man

man eine zureichende Anzahl von Seiten und Winkeln misset, bestimmt werden, so wird die Theorie von den Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen sich auf die Theorie derselben in einzeln Dreyecken gründen. Ich werde also erstlich zeigen, worauf die Sache bey bloßen Dreyecken ankomme, und dann von zusammengesetztern Fällen einige Beyspiele geben, woraus man denn gar leicht sehen wird, wie man in jedem Falle verfahren müsse.

Theorie von den Folgen der Fehler in einzeln Dreyecken.

§. 205. Bekanntermaaßen ist ein Dreyeck durch drey gegebene Stücke bestimmt, vorausgesetzt, daß es nicht lauter Winkel sind. Die Lehre von den Folgen der Fehler kömmt nun darauf an.

Wenn die drey gegebenen Stücke eines Dreyecks etwas falsch gemessen, also etwas größer oder kleiner genommen würden, als sie in der That sind, zu berechnen, in wieferne eines von den gesuchten Stücken des Dreyecks, dadurch verändert oder unrichtig werde. Diese Veränderung heißt dann die Folge der in den gemessenen Stücken vorgefallenen Fehler, in Absicht des unbekannten Stückes.

Man

Man könnte die Frage schon durch die gemeine Trigonometrie auflösen, und so mögen auch diejenigen verfahren, die mit der Buchstabenrechnung nicht zurecht kommen können.

Gesetzt, die Grundlinie eines Dreyecks wäre 100 Ruthen, und die beyden Winkel an ihr 50°; 128°; man wollte berechnen, was in einer von den beyden übrigen Seiten, z. E. derjenigen, welche dem Winkel von 50° gegenübersteht, und die ich a nennen will, für ein Fehler entstände, wenn man statt der wahren Grundlinie von 100 R. z. E. eine von 100 R. 8 Fuß, statt der wahren Winkel 50°, 128°, die falsch gemessenen 50° 4′; 128° 5′, annähme, und also zum voraussetzte, daß in Messung der Grundlinie ein Fehler von 8 Fußen, in dem einen Winkel ein Fehler von 4′, und in dem andern ein Fehler von 5′ begangen worden wäre, und zwar daß man die erwähnten Größen um so viel zu groß gemessen hätte, so könnte man auf folgende Art verfahren.

Man berechne erstlich die Seite a, aus den Größen 100 R. 8 Fuß; 50° 4′; 128° 5′. Und hierauf diese Seite a aus den Größen 100 R.; 50°; 128°. Beyde Resultate ziehe man von einander ab, so wird alsdann der Rest, die Folge der in der Grundlinie und den Winkeln, begangenen Fehler, in Absicht auf die Seite a anzeigen.

Wenn

Wenn ich erstlich aus 100 Ruthen 8 Fuß, 50° 4′; 128° 5′ die Seite a berechne, so finde ich

	dieselbe = 23800 Fuß
aber aus 100 R.; 50° ; 128° wird sie	= 21950 Fuß
Unterschied	= 1850 Fuß

Hieraus erhellet, daß die Seite a um 1850 Fuß ungewiß wäre, wenn man in den Winkeln an der Grundlinie, nur einen Fehler von 4 bis 5 Minuten begangen hätte, und der Fehler der Grundlinie selbst nur 8 Fuß betrüge.

Auf diese Art würde man nun auch in andern Fällen bloß durch gemeine Trigonometrie, die Folge der begangenen Fehler berechnen. Allein da man theils immer zwey Drenecke, nemlich das fehlerhafte und das wahre auflösen muß; und übrigens auch in vielen Fällen die Rechnung solchergestalt zu weitläuftig ausfällt, so will ich diese Methode bloß denjenigen überlassen, die nicht mit der Buchstabenrechnung zurechte kommen können, und nun zeigen, wie man weit bequemer und allgemeiner durch algebraische Formeln zum Endzweck gelange.

§. 206. Wenn eines Dreyecks PQR Fig. LXV. Seiten PR = q; QR = p; PQ = r, und die gegenüberstehenden Winkel Q, P, R, genannt werden, so hat man für die Auflösungen

gen der Dreyecke, folgende zwey allgemeine trigonometrischen Formeln

I) $p \sin R = r \sin P$

II) $q^2 + r^2 - 2qr \cos P = p^2$ (Trig. S. XVII)

Diese beyden Auflösungen enthalten fast alle vorkommenden Fälle, und wenn man in jeder dieser Formeln, allemahl drey Größen als bekannt ansiehet, so läßt sich daraus die 4te durch Rechnung finden.

Es scheinet zwar der Fall, wo aus den zwey Winkeln P, Q, und der dazwischen liegenden Seite r, das übrige gesucht würde, nicht mit unter diesen beyden Formeln enthalten zu seyn. Allein wenn man einiges Augenmerk auf die erste Formel richtet, so wird man finden, daß dieser Fall auch in ihr begriffen ist. Denn wenn man die beyden Winkel P, Q, von 180° abziehet, so hat man den Winkel R, man setze also nur in die Formel (I) statt R den Werth 180° — P — Q, so hat man die Auflösung für den Fall, wo aus zwey Winkeln, und der dazwischen liegenden Seite das übrige bestimmt wird.

Ferner ist auch der Fall, wo aus den beyden Seiten und dem eingeschossenen Winkel, einer von den beyden übrigen Winkeln gesucht würde, nicht mit unter den beyden Formeln

begrif-

begriffen. Ich habe aber denselben mit Fleiß ausgelassen, weil es auf dem Felde sehr selten vorkömmt, daß man einen Winkel sucht.

Da nun solchergestalt diese Formeln allgemein die Verhältnisse zwischen den bekannten und gesuchten Größen eines Dreyecks ausdrücken, so erhellet, daß man vermittelst derselben auch allgemein wird bestimmen können, um wie viel sich die gesuchten Größen verändern, wenn man die bekannten Größen etwas falsch gemessen hätte, und sie also etwas anders annähme, als sie würklich sind.

Da man ferner die in den gemessenen Größen begangenen Fehler, als Veränderungen dieser Größen ansehen kann, weil sie etwas größer oder kleiner angenommen werden, als sie würklich sind, so siehet man leicht, daß die Untersuchung darauf ankomme, zu finden, um wie viel sich obige beyde Formeln verändern, wenn man jede Größe ihr, sich etwas verändern läßt.

Aus dem vorhergehenden (Trig. S. XXVII) ist bekannt, daß wir die Veränderung einer Größe mit dem davor gesetzten Buchstaben d bezeichnen.

Die Ausdrückungen dp, dq, dr, dQ, dP u. s. w. werden also die Werthe bezeichnen, um um die des Dreyecks Seiten p, q, r, oder Winkel Q, P u. s. w. größer oder kleiner genommen werden, als sie würklich sind; sie bezeichnen folglich die vorgefallenen Fehler in den Seiten oder Winkeln, dergestalt, daß, wenn p, q, Q u. s. w. die wahren Größen sind, $p + dp$; $q + dq$; $Q + dQ$ u. s. w. die fehlerhaften darstellen.

Wenn die falsch gemessenen Stücke größer sind, als die wahren, so müssen die Werthe von dp, dq u. s. w. positiv seyn; hingegen negativ, wenn die Größen zu klein gemessen worden.

Wir wollen nun untersuchen, wie man auf eine bequeme Weise, in jedem Falle das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder zwischen den Werthen von dp, dq, dQ u. s. w. in einem Dreyecke bestimmen könne; und da dp, dq, dQ u. s. w. in Absicht der Größen p, q, Q selbst, als sehr geringe angenommen werden, so können wir dazu, die zu Anfange dieses Buches beygebrachten Formeln (Trig. S. XXV. ꝛc.) für die Aenderungen der Producte, Quotienten u. s. w. mit Nutzen gebrauchen.

Aufgabe.

§. 207. In einem Dreyecke PQR sind gemessen worden; die beyden Win-

Winkel P, Q, und die Grundlinie r, man verlangt zu wissen, um wie viel sich eine von den beyden übrigen Seiten, z. E. p, verändere, wenn die Größen P, Q, r etwas falsch gemessen worden.

Aufl. I. Man verlangt also in dem Dreyecke PQR, das Verhältniß zwischen den Werthen dp, dQ, dP, dr.

II. Um dasselbe zu finden, suche man erstlich die Gleichung zwischen den Größen P, Q, r, p.

III. Sie ist nach der I. Formel des 206. §. folgende

$$p \sin (180^\circ - P - Q) = r . \sin P \text{ oder}$$
$$p \sin (P + Q) = r \sin P.$$

IV. Man überlege nun, daß, wenn in dieser Formel sich die Größen p, r, P, Q um etwas verändern, sich auch die Producte $p \sin (P + Q)$, $r \sin P$, verändern, und weil diese Producte gleich sind, so werden auch ihre Aenderungen gleich seyn.

V. Ich suche nun erstlich die Aenderung des Products $p \sin (P + Q)$ wenn ich annehme, daß sich p um dp, P um dP, Q um dQ verändern.

VI.

VI. Dieß finde ich nach der Formel Trig. S. XXXIV. indem ich das dortige $x = p$, das dortige $y = \sin(P + Q)$ setze; so wird wegen $d(xy) = xdy + ydx$ hier

$$d(p \sin(P+Q)) = pd \sin(P+Q) + \sin(P+Q) dp.$$

Nun ist aber $d \sin(P + Q)$ die Veränderung eines Sinus, und kann daher nach (Trig. S. XXXVIII.) berechnet werden, wenn man das dortige $a = P + Q$ setzet, dieß giebt demnach wegen $da = dP + dQ$ (Trig. S. XXXI.) den Werth von

$$d \sin(P + Q) = (dP + dQ) . \cos(P + Q)$$

Mithin wird die Veränderung des erwähnten Products

$$= p(dP + dQ) . \cos(P+Q) + \sin(P + Q) . dp.$$

VII. Auf gleiche Weise suche ich die Veränderung des Products $r . \sin P$, wenn sich nemlich r um dr, P um dP ändert.

Man setze also in die Formel (Trig. S. XXXIV.) jetzt $x = r$, $y = \sin P$, so wird

$$d(r . \sin P) = r . d \sin P + \sin P . dr$$

Aber $d \sin P = dP . \cos P$, daher die Veränderung des Products $r . \sin P$

$$= r . dP . \cos P + \sin P . dr.$$

VIII.

VIII. Die beyden Werthe für die Beänderungen der erwähnten Producte einander gleich gesetzt, geben nun eine Gleichung zwischen den Größen dP, dQ, dr, dp, d. h. eine Gleichung zwischen den Fehlern in den Winkeln und Seiten eines Dreyecks, und es erhellet leicht, daß, wenn drey von diesen Größen, z. E. dP, dQ, dr, gegeben wären, man die 4te dp durch Rechnung finden könne, wodurch also angezeigt würde, was die in den beyden Winkeln P, Q, und der Standlinie r begangenen Fehler für einen Irrthum in der Seite p hervorbringen.

Allein da die Gleichung, welche sich aus (VI. VIII.) ergiebt, etwas weitläuftig ausfällt, und wir noch einige Reductionen vornehmen müßten, sie auf den kürzesten Ausdruck zu bringen, so will ich zeigen, wie man in der jetzigen Aufgabe, die Gleichung zwischen den Fehlern dP, dQ, dr, dp noch auf eine weit leichtere Art finden könne.

IX. Weil nemlich die Gleichung III. aus ein paar Producten bestehet, die einander gleich sind, so erhellet, daß die Logarithmen derselben gleich seyn müssen. Es ist also

$$\mathrm{l}\,p + \mathrm{l}\sin(P + Q) = \mathrm{l}\,r + \mathrm{l}\sin P.$$

X. Folglich hat man auch

$$d\log p + d\log\sin(P+Q) = d\log r + d\log\sin P.$$

XI.

XI. Aber aus Trig. S. XLVI. (das dortige $x = p$ gesetzt) ist

$$d \log p = B . \frac{dp}{p} \text{; und eben so } d \log r = B . \frac{dr}{r}$$

Ferner ist aus Trig. S. XLVII. das dortige $a = P$ gesetzt,

$d \log \sin P = B . dP . \cot P$ und eben so

$d \log \sin (P + Q) = B . (dP + dQ) . \cot (P + Q)$

diese Werthe nun in die Gleichung X. substituirt, und durchgängig mit B dividirt, geben

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + (\cot P - \cot(P+Q))dP$$

XII. Nun ist aber $\cot P = \frac{\cos P}{\sin P}$ und

$\cot (P + Q) = \frac{\cos (P + Q)}{\sin (P + Q)}$ daher

$$\cot P - \cot (P + Q) =$$

$$\frac{\sin (P + Q) \cos P - \sin P \cos (P + Q)}{\sin P \sin (P + Q)}$$

$$= \frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)} \text{ (Trig. S. XII).}$$

XIII.

XIII. Dieser Werth also in die Gleichung XI. substituirt, giebt

$$\frac{dp}{p} + dQ \cot(P+Q) = \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)} . dP$$

wo ich künftig der Kürze halber $\cot(P+Q) = N$ und

$$\frac{\sin Q}{\sin P \sin(P+Q)} = M \text{ mithin}$$

$$\frac{dp}{p} + N\,dQ = \frac{dr}{r} + M\,dP$$

setzen will.

XIV. Diese Gleichung zwischen den Fehlern in den Seiten und Winkeln ist nun ohnstreitig so kurz als möglich, und hat den Vortheil, daß die Glieder $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$ bloß von den Seiten des Dreyecks, hingegen $N dQ$, $M dP$ bloß von den Winkeln desselben abhängen, welches zu verschiedenen Folgerungen nützlich seyn kann.

Zugleich ist diese Gleichung auch besonders bequem, die Verhältnisse der Fehler dp, dr zu ihren zugehörigen Seiten zu finden; denn die Quot. $\frac{dp}{p}$, $\frac{dr}{r}$ drücken eigentlich aus, wie groß die Fehler dp, dr, in Absicht ihrer zugehörigen Seiten p, r, sind, und oft verlangt man nicht den absoluten Werth des Fehlers, sondern vielmehr dessen Verhältniß zur zugehörigen Größe.

Wenn man also z. E. für den Quotienten $\frac{dp}{p}$ den Werth $\frac{1}{1000}$ fände, so zeigte dieses an, daß man um ein Tausendtheilgen des ganzen gefehlet hätte, dergestalt, daß, wenn z. E. die Seite p = 1000 Ruthen wäre, der Fehler derselben 1 Ruthe betrüge.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Werthe von dP, dQ, die Fehler in den Winkeln, nicht in Minuten und Secunden bedeuten, sondern vielmehr in Decimaltheilgen des Sinus totus, der durchgängig = 1 gesetzt worden: werden aber dP, dQ würklich in Secunden angenommen, so muß man statt dP, dQ, eigentlich die Werthe $\frac{dP}{206264}$, $\frac{dQ}{206264}$ setzen, damit man ihren Werth in Decimaltheilen des Sinus tot. erhalte.

Die

Die gefundene Formel wird nun dienen, in jedem Falle die Folge der Fehler, und deren Verhältniß zu den zugehörigen Größen zu finden. So z. E. wenn man in dem Dreyecke PQR, die beyden Winkel P, Q, und die Grundlinie r, um dP, dQ, dr, falsch gemessen hätte, und wollte deren Erfolg auf die Seite P, finden; so dürfte man nur in obiger Gleichung den Werth von $\frac{dp}{p}$ suchen.

Also würde

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + MdP - NdQ.$$

Wollte man z. E. aus den falsch gemessenen Größen P, Q, p, den Fehler in der Grundlinie r bestimmen, so hätte man

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} - MdP + NdQ \text{ u. s. w.}$$

Woraus also erhellet, daß, wenn von den 4 Fehlern dP, dQ, dr, dp, drey als gegeben angesehen werden, man den 4ten durch Rechnung finden könne.

XV. Die bisherige Rechnung setzt zum voraus, daß, wenn die wahren Größen P, Q, p, r sind, die fehlerhaften P + dP, Q + dQ, p +

$p + dp$, $r + dr$ heissen, mithin die Fehler dP, dQ, dp, dr, positiv sind, d. h. die Größen P, p, Q, r zu groß gemessen worden.

Es erhellet, daß wenn die Seiten und Winkel zu klein gemessen wären, man in obiger Formel XIII, die Werthe dQ u. s. w. als negativ betrachten müsse.

Wenn in einer von den Größen P, Q, r, p, keine Fehler vorgefallen sind, so siehet man ihre Veränderung als o an; in solchen Fällen werden also dP, dQ u. s. w. $= 0$ gesetzt. Z. E. wenn man die Grundlinie r als richtig gemessen annähme, so ist $dr = 0$ mithin bloß

$$\frac{dp}{p} = MdP - NdQ.$$

Und wenn auch Q richtig gemessen worden,

so hätte man nur $\frac{dp}{p} = MdP$

Woraus man also den Fehler fände, welcher in der Seite p, bloß von dem falsch gemessenen Winkel P herrührte.

Ueberhaupt wird also die allgemeine Gleichung (XIII) unter den verschiedenen Voraus-

setz-

setzungen, die man den Werthen von dP, dQ u. s. w. giebt, eine Menge einzelner Fälle in sich enthalten, die man bey Hrn. Marinoni durch weitläuftige Demonstrationen und Figuren aus einander gesetzt findet.

XVI. Um das bisherige mit einem Beyspiele zu erläutern, so will ich setzen, in dem Dreyecke PQR, seyen die Grundlinie PQ = r = 100 Ruthen, $P = 30° 6'$; $Q = 140° 8'$ würklich gemessen worden, man wollte daraus die Seite RQ = p finden, und zugleich angeben, wie zuverlässig die Seite p gefunden würde, wenn die Grundlinie r um 2 Fuß, der Winkel P aber um 5 Minuten, und der Winkel Q um 4 Minuten falsch und zwar zu groß gemessen worden wäre. Die wahren Größen würden also folgende seyn: r = 100 Ruthen — 2 Fuß = 998 Fuß; $P = 30° 6' - 5' = 30° 1'$; $Q = 140° 8' - 4' = 140° 4'$, und die Werthe von $dr = +2$ Fuß; $dQ = +4' = +240''$; $dP = +5' = +300''$.

Weil nun für diesen Fall

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r} + M dP - N dQ$$

so erhält man folgendes

$$\frac{dr}{r} = \frac{2}{998} = \frac{1}{499} = 0{,}002$$

 Fer-

Ferner

$$\begin{array}{rll} \log N = l\cot 170^\circ\, 5' & = & 0{,}7573897 \\ l\, dQ = l\, 240 & = & 2{,}3802112 \\ \hline & & 3{,}1376009 \\ l\, 206264 & = & 5{,}3144252 \\ \hline \text{Rest} & = & 3{,}8231757 - 6 \end{array}$$

dieß giebt also

$$\frac{N\,dQ}{206264} = -0{,}006655$$

der eigentliche Werth von $\frac{NdQ}{206264}$ ist hier aus der Ursache negativ, weil die Cotangente von 170° 5′ oder der Weth von N, negativ ist.

Ferner ist für das Glied

$$\frac{MdP}{206264} \text{ oder } \frac{\sin Q \,.\, dP}{\sin P \sin (P+Q)\, 206264}$$

$$\begin{array}{rll} \log \sin Q = l\sin 140^\circ\, 4' & = & 9{,}8074646 - 10 \\ l\, dP = l\, 300 & = & 2{,}4771213 \\ \hline \text{log des Zählers} & = & 2{,}2845859 \\ l\sin P = l\sin 30^\circ\, 1' & = & 9{,}6991887 - 10 \\ l\, \text{f.}\,(P+Q) = l\, \text{f}\; 170^\circ\, 5' & = & 9{,}2360726 - 10 \\ l\, 206264 & = & 5{,}3144252 \\ \hline \text{log des Nenners} & = & 4{,}2496865 \\ \text{also } \log \frac{M\,dP}{206264} & = & 3{,}0348994 - 5 \end{array}$$

nem-

nemlich nachdem die Charakteristik des Log. des Zählers um 5 Einheiten vermehret worden, also

$$\frac{M\,dP}{206264} = 0{,}01083.$$

Unter denen im Exempel angenommenen Umständen wird also

$$\frac{dp}{p} = 0{,}002 + 0{,}01083 - (-0{,}006655)$$

$$= 0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}006655$$

oder $\frac{dp}{p} = + 0{,}01948$ beynahe $= 0{,}02$.

Die angenommenen Fehler in den Messungen von P, Q′, r, würden also einen solchen Einfluß auf die Seite p haben, daß man nur bis auf $\frac{2}{100}$ oder $\frac{1}{50}$ ihrer Größe sicher wäre; welches bey 50 Ruthen schon eine ganze Ruthe, also etwas sehr erhebliches betragen würde. So zeigt denn dieser Bruch $\frac{1}{50}$ überhaupt bloß die Größe des Fehlers dp in Verhältniß zur Seite p an. Wolite man den wahren oder absoluten Fehler dp in Ruthen und Fußen ausfinden, so dürfte man nur aus den oben angenommenen Datis die Seite p würklich berechnen, und ihren 50ten Theil nehmen.

Ich

Ich will aber hier diese leichte Rechnung selbst nicht anstellen.

XVII. Dieses Exempel setzte voraus, daß alle Größen auf dem Felde zu groß gemessen wurden; es ist klar, wenn einige davon zu klein gemessen worden wären, man nur die zugehörigen Werhe d Q u. s. w. verneint nehmen müsse. Dieß verändert also in der ganzen Rechnung nichts, als daß man bloß die

Zeichen der Glieder $\frac{dr}{r}$, NdQ, MdP jedesmahl gehörig nimmt.

Zum Exempel wenn die Seite r um 2 Fuß zu klein gemessen worden, das übrige aber mit vorhergehendem Exempel einerley bliebe, so wäre

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 + 0{,}01083 + 0{,}00665$$

$$= + 0{,}01548.$$

Wäre aber auch der Winkel Q um 4 Minuten zu klein gemessen worden, so hätte man

$$\frac{dp}{p} = -0{,}002 - 0{,}01083 + 0{,}00665$$

$$= - 00618.$$

Im

Im letztern Beyspiele, wäre also der Fehler in der Seite p auch negativ, betrüge aber nur ohngefähr 0,006, oder $\frac{1}{166}$ der Seite p, wäre also bey weiten nicht so beträchtlich, als wenn alle Größen auf dem Felde zu groß gemessen worden wären, wie in (XVI).

XVIII. Nachdem solchergestalt, für gewisse Werthe von dQ, dr, dp, die Größen MdP u. s. w. einmal berechnet sind, so kann man gar leicht finden, unter welchen Umständen der Werth von $\frac{dp}{p}$ am größten wird. Man siehet nemlich, daß in dem obigen Beyspiele $\frac{dp}{p}$ am größten wird, wenn alle Größen P, Q, r zu groß gemessen worden, oder wenn dQ, dP, dr insgesammt positiv sind, denn in diesem Falle wurden alle Werthe $\frac{dr}{r}$, MdP u. s. w. zusammenaddirt (XVI). Hingegen in XVII. wurden einige Glieder bejaht, andere verneint, welches denn nothwendig für $\frac{dp}{p}$ einen geringern Werth hervorbringen mußte.

XIX. Hieraus zeigt sich zugleich der Vortheil, den die bisher gewiesene algebraische Methode, die Folgen der Fehler zu berechnen, in Absicht der in §. 205. erwähnten gemeinen trigonometrischen Methode hat. Nach letzterer müßte man für jede Voraussetzung, die man den Werthen von dQ, dr, dP, in Absicht des $+$ oder $-$ geben kann, zwey Dreyecke berechnen, um den Werth von dp zu finden; und da es sich nicht so leicht übersehen läßt, wie man in einem gewissen Falle, die Werthe von dQ, dr, dP bejaht oder verneint nehmen muß, um das größte dp zu finden, so wird man offenbar eine Menge von Dreyecken berechnen müssen, bis man die größte Folge der begangenen Fehler findet. Dieß ist aber hingegen bey der algebraischen Berechnung nicht nothwendig; denn wenn man für gegebene dQ, dP; dr, einmahl die Werthe von MdP, $\frac{dr}{r}$ u. s. w. berechnet hat, so braucht man weiter nichts, als diese Glieder bald positiv bald negativ zu nehmen, und so ihre Summe zu untersuchen; woraus denn gar bald erhellen

wird,

wird, wie man die für dQ, dP, dr angenommenen Größen positiv oder negativ nehmen müsse, damit man das größte dp, oder den größten Einfluß der Fehler, in Absicht der Seite p, finde. Um sich von der Weitläuftigkeit der gemeinen trigonometrischen Methode noch mehr zu überzeugen, so lese man hierüber nur z. E. den 187. §. von Wilkens Landesvermessungen, wo in dem dortigen Exempel sieben Dreyecke aufgelöset werden, um den größten Fehler der Seite p zu finden.

Es ist klar, daß es für einen vorgegebenen Fall, nothwendig ist, unter allen den Werthen, die $\frac{dp}{p}$, erhalten kann, vorzüglich auf den größten Rücksicht zu nehmen, weil dieser die größte mögliche Zuverlässigkeit der gesuchten Seite p bestimmt. Denn ob man gleich nicht weiß, welche von den gegebenen Größen P, Q, r, zu groß oder zu klein gemessen worden, und man folglich ungewiß ist, welche von den für dP, dQ, dr angenommenen Werthen man positiv oder negativ nehmen müsse, so muß man doch unter allen den Voraussetzungen, die man in Absicht des $+$ oder $-$ diesen Größen dP, dQ, dr geben kann, gerade diejenige wählen, welche für $\frac{dp}{p}$ den größten Werth giebt, weil dieser Fall

würk-

würklich vorhanden seyn kann, und daher die möglichste Zuverlässigkeit entscheidet, welche in der Seite p zu erwarten stehet.

Einige Folgerungen aus dem bisherigen.

§. 108. I. Wenn die Grundlinie r sowohl, als auch der Winkel Q als richtig gemessen angenommen wird, mithin $dr = o$, $dQ = o$ sind, so hat man bloß

$$\frac{dp}{p} = M dP.$$

Für diesen Fall wird demnach der Fehler in der Seite p, oder der Werth von dp zu p selbst sich verhalten wie M : r, d. h.

$$\text{wie } \frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)} : r$$

vorausgesetzt, daß der Fehler in der Messung des Winkels P, also der Werth von dP immer derselbe bleibe. Da nun M bloß von den Winkeln P und Q abhängt, so wird der Fehler in der gesuchten Seite p bald größer bald kleiner seyn müssen, je nachdem die Standlinie r gegen p diese oder jene Lage hat.

II. Es frägt sich nun, wie müssen die Winkel P, Q an der Standlinie beschaffen seyn, da-

damit einerley Fehler im Winkel P einen so geringen Einfluß, als möglich, auf die gegenüberstehende Seite p habe, oder der Werth von $\frac{dp}{p}$ so klein als möglich ausfalle?

Da der Winkel Q als gegeben oder richtig gemessen angenommen wird, so wird die Frage darauf ankommen, wie groß muß man P nehmen, damit die Größe M oder der Bruch $\frac{\sin Q}{\sin P \sin (P + Q)}$ den kleinsten Werth erhalte, denn $\frac{dp}{p}$ verhält sich wie diese Größe M.

Um dieses zu entscheiden, so erinnere man sich aus der Lehre von Brüchen, daß, wenn eines Bruchs Zähler unverändert bleibt, der Bruch desto kleiner werde, je größer sein Nenner wird. Da nun bey oberwähntem Bruche der Zähler sin Q unverändert bleibt, weil Q als gegeben angesehen wird, so wird dieser Bruch einen desto kleinern Werth haben, je größer sein Nenner, also das Product $\sin P \sin (P + Q)$ ist. Um aber zu finden, was man für P annehmen müsse, daß dieses Product am größten werde, so überlege man folgendes:

Weil

Weil $\sin(P+Q) = \sin(180^\circ - P - Q)$ so ist auch das erwähnte Product

$$= \sin P \cdot \sin(180^\circ - P - Q)$$

Man setze in Trig. S. XIII. 10. das dortige $\beta = 180^\circ - P - Q$ das dortige $\gamma = P$, so wird

$$\sin P \sin(180^\circ - P - Q) = +\tfrac{1}{2}\cos(180^\circ - 2P - Q) \\ -\tfrac{1}{2}\cos(180^\circ - Q)$$

Weil nun $\frac{1}{2}\cos(180^\circ - Q)$ wegen des gegebenen Winkels Q, als unveränderlich angesehen wird, so erhellet, daß das oberwähnte Product am größten seyn werde, wenn $\cos(180^\circ - 2P - Q)$ den größten möglichen Werth hat.

Nun ist aber kein Cosinus größer als der Sinus totus, oder als der Cosinus von 0°, es erhellet also, daß, wenn $180^\circ - 2P - Q = 0$ ist, alsdann $\cos(180^\circ - 2P - Q)$ den größten möglichen Werth haben werde.

Also ist das Product $\sin P \sin(180^\circ - P - Q)$ oder auch $\sin P \sin(P+Q)$ am größten, mithin der oberwähnte Bruch am kleinsten, wenn

$$180^\circ - 2P - Q = 0 \text{ also}$$

der Winkel $P = 90^\circ - \frac{1}{2}Q$ ist.

Nun

Nun ist aber ferner der Winkel R in dem bisher betrachteten Dreyecke = $180° - P - Q$, folglich statt P den gefundenen Werth $90° - \frac{1}{2}Q$ substituirt

$$R = 180° - 90° + \tfrac{1}{2}Q - Q = 90° - \tfrac{1}{2}Q$$

Es ist also $R = P$

d. h. die Standlinie r Fig. LXV, die mit der auszumessenden Weite p, einen gegebenen Winkel Q macht, muß so lang genommen werden, daß der Winkel $R = P$ werde, mithin das Dreyeck gleichschenklicht, und die Standlinie $r = p$ sey. Unter solchen Umständen wird der Fehler, den man in Messung des Winkels P begehet, den kleinsten Einfluß auf die Seite p haben, weil alsdann das Product MdP am kleinsten seyn wird.

III. Es wird also für einen gegebenen Winkel Q, die Entfernung p am vortheilhaftesten gefunden, wenn man die Standlinie r, so viel als möglich, der auszumessenden Entfernung p gleich zu nehmen sucht. Ob sich gleich dieses auf dem Felde nicht immer thun läßt, so muß man es doch, wenn es angehen kann, nicht unterlassen. Nach dem Augenmaaße wird man übrigens immer schon ohngefähr die Weite p, so genau schätzen können,

nen, als nöthig ist, um die Länge der Standlinie r darnach einzurichten.

IV. Wenn ich den in (II) gefundenen Werth von P in die Formel für M substituire, so finde ich

$$\frac{dp}{p} = MdP = \frac{\sin Q\, dP}{\cos \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q}$$

welches sich wegen $\sin Q = 2 \sin \frac{1}{2} Q \cos \frac{1}{2} Q$ (Trig. S. XIII. 2.)

in $\frac{dp}{p} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} Q}{\cos \frac{1}{2} Q} dP = 2 \tan g \frac{1}{2} Q . dP$

verwandelt.

Woraus also erhellet, daß, wenn die Standlinie r, die vortheilhafteste Lage hat, um die Seite p zu bestimmen, sich der Grad der Zuverlässigkeit in der Seite p, oder $\frac{dp}{p}$ verhalte, wie die Tangente des halben Winkels Q den die Standlinie r mit der auszumessenden Seite p machet. Es wird also wegen des in dem Winkel P zu befürchtenden Fehlers dP, der Werth von $\frac{dp}{p}$ desto kleiner seyn, je kleiner man Q nimmt.

Je

Je mehr also die Länge der Standlinie r, der auszumessenden Entfernung p gleich kömmt, und einen desto kleinern Winkel Q, sie mit der Seite p macht, desto zuverlässiger wird die Seite p gefunden, oder desto geringern Einfluß hat der im Winkel P begangene Fehler auf die Seite p.

V. Da wir in (III) gesehen haben, daß die Standlinie r ohngefähr so lang seyn muß, als die auszumessende Entfernung p, so erhellet, daß, wenn man auf eben die Art aus den beyden Winkeln P, Q, an der Standlinie, auch die andere Seite des Dreyecks, nemlich q, am richtigsten bestimmen wollte, man auch q = r nehmen müsse.

Aber wenn p = q = r, so ist das Dreyeck PQR gleichseitig, und folglich jeder Winkel = 60°.

Woraus denn folgt, daß, wenn zwey Seiten eines Dreyecks auf dem Felde, mit der Standlinie Winkel von 60 Graden machen, oder Winkel, die wenigstens nicht viel von 60 Graden abweichen, alsdann die Standlinie die vortheilhafteste Lage habe, beyde Seiten dieses Dreyecks zu bestimmen.

Je mehr aber die Winkel an einer Standlinie auf dem Felde, von 60 Graden abweichen,

chen, mit desto grösserer Unrichtigkeit findet man die Seiten dieses Dreyecks.

Hieraus erhellet, wie schädlich es sey, Dreyecke auf dem Felde, aus solchen Standlinien zu bestimmen, an denen die Seiten dieser Dreyecke, sehr spitze oder stumpfe Winkel machen.

VI. Wenn demnach Fig. LXVI. S, R, W, T, U mehrere Objecte auf dem Felde sind, deren Lagen sowohl unter sich, als gegen die angenommene Standlinie PQ, vermittelst der Dreyecke PSQ, PRQ u. s. w. dadurch bestimmt werden sollen, daß man die Seiten PS, QS; PR, RQ, dieser Dreyecke, aus der Standlinie PQ, und den Winkeln an ihr berechnet, so ist klar, daß, wenn in diesen Winkeln kleine Fehler begangen werden, die Lage eines jeden Objects mit einiger Unrichtigkeit bestimmt werden wird. Unter allen Objecten würde aber dasjenige am richtigsten bestimmt werden, dessen Winkel an der Standlinie so nahe als möglich an 60 Graden kommen. Hier würde es das Object R seyn. Hingegen bey Objecten wie T, U, welche bey P, Q, sehr ungleiche Winkel TPQ, TQP; UPQ, UQP, machen, wird der Grad der Zuverlässigkeit, in Ansehung der Bestimmung ihre Lage gegen die Standlinie PQ, desto geringer ausfallen, je mehr die erwähnten Winkel von 60 Graden abwei-

abweichen, d. h. je ungleichseitiger die Drenecke UPQ, QTP sind; denn desto grösser ist alsdann der Einfluß, den die in den gemessenen Winkeln begangenen Fehler, auf die Berechnung der Seiten PT, QT; PU, QU u. s. w. haben.

Man wird demnach die Lage solcher Objecte wie T, U, nicht vortheilhaft aus einer Standlinie wie PQ, an welcher sô stumpfe Winkel wie PQT, PQU, vorkommen, bestimmen; sondern sicherer verfahren, wenn man für sie eine neue Standlinie PM, unter einem bekannten Winkel gegen die erstere PQ, annimmt und misset, so daß nunmehr die Drenecke, wie TPM, UPM nicht mehr so stumpfwinklicht ausfallen, und also eine grössere Zuverlässigkeit in der Berechnung der Entfernungen PT. MT; PU, MU, aus der neuen Standlinie, und den Winkeln an ihr, zulassen. Sehr oft wird auch ben Entwerfung ganzer Landschaften, ein Ort wie R, der bereits aus der ersten Standlinie bestimmt worden ist, wieder zu einem neuen Standpunkte, also z. E. PR zu einer neuen Standlinie gewählt, um daraus die Objecte wie T und U, welche gegen PQ, eine zu unbequeme Lage hatten, zu bestimmen. Begreiflich darf aber R kein Punkt senn, der nicht selbst schon mit einem hinlänglichen Grade der Zuverlässigkeit, aus der

Standlinie PQ bestimmt wäre. Läßt sich ein solcher nicht finden, so daß er zugleich eine vortheilhafte Standlinie, z. E. PR für die Objecte T und U, verschaffte, so muß man freylich sonst eine Standlinie von vortheilhafter Lage entweder unmittelbar messen, oder abstecken, und aus PQ trigonometrisch bestimmen.

Ueberhaupt ist denn eine der wichtigsten Regeln für den Feldmesser, daß, wenn er gewisse bereits bestimmte Punkte braucht, um daraus wieder andere Bestimmungen herzuleiten, er nur solche auswähle, welche am richtigsten bestimmt worden, und die geringste Anhäufung oder Fortpflanzung der Fehler besorgen lassen, und so wird ein Feldmesser, wenn er sich auch nur mittelmäßiger Werkzeuge bedient, oft was genaueres leisten, als ein anderer, der beym Gebrauche der besten Werkzeuge, aus Mangel nöthiger Kenntnisse, nicht die vortheilhaftesten Umstände auszuwählen weis.

VII. Da Fig. LXV. eines Dreyeckes PRQ Seiten QR, PR, mithin auch der Punkt R am sichersten gefunden wird, wenn jeder von den beyden Winkeln P, Q, nahe an 60° kömmt, so setze man nur in obige Formel,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q\, dP}{\sin P \sin (P + Q)} - \cot (P + Q)\, dQ$$

Q =

$Q = 60°$; $P = 60°$; so findet man den Fehler in der Seite p, welcher auch bey der vortheilhaftesten Lage der Standlinie, noch statt finden kann, wenn die Winkel P, Q etwas fehlerhaft gemessen worden.

Dieß giebt demnach

$$\frac{dp}{p} = \frac{dP}{\sin 60°} + \tan 30° \cdot dQ.$$

Es ist klar, daß eben dieser Ausdruck auch den Fehler $\frac{dq}{q}$ in der andern Seite q des Dreyecks geben wird, weil q, p gleiche Lagen gegen die Standlinie r haben. Nehme ich nun an, daß in beyden Winkeln P, Q einerley Fehler begangen werden, und zwar die größten, die beym Gebrauche eines gewissen Winkelmessers unvermeidlich sind, setze ich also $dP = dQ$, so wird der Fehler, welcher in jeder von den beyden Seiten des Dreyecks daraus entspringet

$$= \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \left(\frac{1}{\sin 60°} + \tan 30°\right) dP.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\sin 60°} = \frac{1}{\cos 30°} = \sec 30° = 1{,}15470$$

 und

und tang $30° = 0,57735$

also $\frac{dp}{p} = 1,73205 \cdot dP$

wo man eigentlich statt dP setzen muß $\frac{dP}{206264}$

wenn dP in Secunden gegeben würde.

Diese Formel wird also zeigen, wie genau wegen der Fehler in den Winkeln P, Q, an der Grundlinie, die Seiten p, q, des Dreyecks, auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, gefunden werden können.

Wenn ein Winkelmesser die Winkel nur bis auf 1 Minute genau misset, wie genau können auch bey der vortheilhaftesten Lage der Grundlinie, die beyden Seiten des Dreyecks gefunden werden.

Man setze in unsere Formel $dP = 1' = 60''$ so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{1,73205 \cdot 60}{206264} = \frac{104}{206264} \text{ beynahe}$$

oder beynahe $\frac{dp}{p} = \frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$.

Man

Man kann also bey jeder Seite p, q des Dreyecks nur bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher seyn. Das heißt, man würde für jede 2000 Ruthen, die in der Seite des Dreyecks enthalten wären, um 1 Ruthe fehlen.

Für einen Winkelmesser, der nur bis auf 2 Minuten sicher mäße, wäre die Zuverlässigkeit in jeder Seite des Dreyecks nur $\frac{1}{1000}$

Kann man demnach bey Ausmessung der Winkel, vermittelst eines Astrolabii von gewöhnlicher Größe, auch bey aller nöthigen Sorgfalt, für einen Winkel von 1 Minute nicht gut stehen (§. 202); so erhellet, daß vermittelst eines solchen Werkzeugs, auch bey den vortheilhaftesten Umständen, die Seiten eines Dreyecks auf dem Felde nicht genauer, als etwas bis auf $\frac{1}{2000}$ ihrer Länge sicher gefunden werden können. Um wie viel geringer würde also die Zuverlässigkeit ausfallen, wenn die Standlinie gegen die beyden Seiten des Dreyecks eine minder vortheilhafte Lage hätte?

Bis-

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Standlinie ihre gehörige Richtigkeit habe, also d r = o sey. Wäre aber selbst auch die Standlinie etwas fehlerhaft gemessen worden, so würde daher die Unrichtigkeit in Bestimmung der beyden Seiten des Dreyecks noch größer ausfallen.

VIII. Daraus folgt denn, wie **genaue Werkzeuge** erfordert werden, wenn man auf dem Felde nicht um den 1000ten Theil des ganzen fehlen will, wie viele Sorgfalt also ein Geometer anwenden müsse, wenn er sich von der Wahrheit nicht sehr eneefernen will.

Da sich nun überdem Feldmesser oft noch aus **Nachlässigkeit** oder **Bequemlichkeit** Fehler erlauben, in der Meinung, daß sie nicht viel auf sich haben, so ist wohl leicht zu erklären, wie so viel unrichtige Risse und Charten entstanden sind.

IX. Die Untersuchungen von (VI) an, betreffen eigentlich die Lage der Standlinie, wenn **beyde Seiten des Dreyecks zugleich** mit möglichster Zuverlässigkeit bestimmt werden sollen. Aber freylich könnte der Grad der Zuverlässigkeit größer seyn, wenn man nur eine Seite p suchte. Denn man dürfte nach (IV) die Standlinie nur unter einen so kleinen Winkel Q gegen die gesuchte Seite p legen,

legen, daß der Werth von $\frac{dp}{p} = \tang \frac{1}{2} QdP$ (II) so unbeträchtlich würde, als man verlangt. Allein wenn beyde Seiten eines Dreyecks zugleich, mit der möglichsten Genauigkeit gefunden werden sollen, so sind die vortheilhaftesten Umstände, wenn die Winkel an der Standlinie, so nahe als möglich, an 60° kommen. Dieser Fall ist nun eigentlich bey Grundlegung der Landschaften und Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine gewisse Standlinie wichtig, weil die Lage eines Ortes, wie R gegen die Standlinie PQ, nicht bloß durch eine, sondern durch beyde Seiten des Dreyecks zugleich bestimmt wird, und folglich jede mit möglichster Zuverlässigkeit gefunden werden muß, wenn R die richtigste Lage gegen P, Q haben soll.

X. Da es nicht allemahl in des Feldmessers Gewalt stehet, die vortheilhaftesten Umstände einer Standlinie auf dem Felde auszuwählen, so werde ich, wenn anders die Umstände nicht gar zu mißlich sind, die möglichste Zuverlässigkeit, in Bestimmung zweyer Seiten eines Dreyecks, aus einer Standlinie, etwa auf $\frac{1}{400}$ ihrer Länge setzen, dergestalt, daß man auf jede 400 Ruthen, um eine Ruthe

Ruthe ungewiß ist. Einen Fehler von dieser Größe kann man einem Feldmesser wohl verzeihen, da, im Durchschnitt genommen, diese Genauigkeit, in Bestimmung der Lage der Oerter gegen eine Standlinie immer noch erträglich, und wohl schwerlich, bey einem Winkelmesser, der nur, wie ich voraussetze, bis auf zwey Minuten genau misset, zu vermeiden ist, ja ich zweifle sehr, ob in den meisten gewöhnlichen Messungen noch diese Genauigkeit statt findet. Beym Gebrauche des Meßtisches wird begreiflich die Zuverlässigkeit noch geringer seyn, da bey diesem Werkzeuge die unvermeidlichen Fehler noch größer sind, als beym Astrolabio. In den meisten Fällen kann man immer setzen, daß beym Gebrauche des Meßtisches, in Bestimmung zweyer Seiten eines Dreyecks aus einer Standlinie, die Genauigkeit derselben sich wohl schwerlich auf $\frac{1}{200}$ ihrer Länge erstrecken wird. Versuche können auch leicht selbst davon überzeugen.

Aufgabe.

§. 209. In einem Dreyecke PQR, sind die beyden Seiten q, r, und der eingeschlossene Winkel P, etwas falsch gemessen worden, man verlangt zu wissen, in wie ferne dadurch die Seite p unrichtig werde; oder wenn die Fehler der Größen q, r, p, P, wie bisher mit dq, dr, dp, dP bezeichnet werden, die Gleichung zwischen dq, dr, dp, dP zu finden. Ich nehme übrigens die Werthe von dq, dr, dp, dP positiv an, dergestalt, daß, wenn q, r, p, P die wahren Größen sind, q + dq, r + dr u. s. w. die fehlerhaften vorstellen.

Aufl. I. Aus (§. 206. II.) ist die Gleichung zwischen p, q, r, P folgende

$$p^2 = q^2 + r^2 - 2\,qr\,.\,\cos P.$$

II. Man suche nun, um wie viel sich jedes Glied dieser Gleichung verändert, wenn p um dp, q um dq u. s. w. wachsen, und setze die Veränderung von p^2 gleich der Summe der Veränderungen der Glieder

$$p^2,\; r^2\,;\; -\,2\,qr\,\cos P.$$

III. Wenn p um dp zunimmt, so wächst das Quadrat von p um 2 pdp (Trig. S. XXXIV.) oder es ist $d\,(p^2) = 2\,pdp$. Auf gleiche Weise ist $d\,(q^2) = 2\,qdq$; $d\,(r^2) = 2\,rdr$.

IV. Um zu finden, um wie viel sich das Product 2 qr cos P verändert, wenn q um dq, r um dr, P um dP zunehmen, so will ich

ich der Kürze halber das Product $2\,qr\cos P = X$ setzen, und es kömmt also darauf an, den Werth von dX zu finden.

Nun ist, wenn man auf beyden Seiten Logarithmen nimmt

$$l\,2 + l\,q + l\,r + l\cos P = l\,X$$

folglich aus (Trig. S. XLVI. XLVII. 2.), und weil $d\log 2 = 0$ ist, indem sich die 2 nicht verändert, erhält man

$$\frac{dq}{q} + \frac{dr}{r} - dP\tan P = \frac{dX}{X}$$

oder auf beyden Seiten mit $X = 2\,qr\cos P$ multiplicirt

$$2\,r\,dq\cos P + 2\,q\,dr\cos P - 2\,qr\,dP\sin P = dX.$$

V. Weil nun aus (I. II.)

$d(p^2) = d(q^2) + d(r^2) - dX$ seyn muß,

so erhält man nach gehöriger Substitution der Wethe aus (III. IV.) folgende Gleichung

$$pdp = qdq + rdr - q\cos P\,dr - r\cos P\,dq + qr\,dP\sin P$$

welche sich in folgenden Ausdruck zusammen ziehet

$$pdp = (q - r\cos P)\,dq + (r - q\cos P)\,pr + qr\sin P\,.\,dP.$$

VI.

VI. Diese Gleichung stellt also die Relation zwischen den Fehlern dp, dq, dr, dP, vor, dergestalt, daß wenn drey von diesen Fehlern gegeben sind, man den 4ten, welcher also die Folge der erstern drey darstellet, finden kann. Diese Gleichung ist aber nicht kurz genug, auch nicht geschickt die Werthe

von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$ u. s. w., nemlich die Verhältnisse der Fehler zu ihren zugehörigen Größen, zu bestimmen. Aus dieser Ursache wollen wir mit dieser Gleichung noch einige Veränderung vornehmen.

VII. Man stelle sich in dem Dreyecke PQR, von Q, R Perpendiculärlinien auf die gegenüberstehenden Seiten vor, so wird man in den sich ergebenden rechtwinklichten Dreyecken gar leicht finden, daß

$q - r \cos P = p \cos R$, $r - q \cos P = p \cos Q$ sey

diese Werthe also in (V) substituirt, geben

$$p dp = p \cos R \, dq + p \cos Q \, dr + qr \sin P \, dP.$$

oder durchgängig mit p^2 dividirt

$$\frac{dp}{p} = \frac{\cos R}{p} dq + \frac{\cos Q}{p} dr + \frac{q \cdot r}{p \cdot p} \sin P \, dP$$

oder

oder

$$\frac{dp}{p} = \cos R \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{dq}{q} + \cos Q \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{p} \sin P \, dP$$

Aber in dem Dreyecke PQR ist

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin Q}{\sin P}; \quad \frac{r}{p} = \frac{\sin R}{\sin P}$$

(Weil sich die Seiten wie der gegenüberstehenden Winkel Sinusse verhalten).

Also wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sin Q \cos R}{\sin P} \cdot \frac{dq}{q} + \frac{\sin R \cos Q}{\sin P} \cdot \frac{dr}{r} + \frac{\sin Q \sin R}{\sin P} \cdot dP$$

Nennt man also die Factoren, womit $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$, dP, multipliciret sind, A, B, C, so wird

$$\frac{dp}{p} = A \cdot \frac{dq}{q} + B \cdot \frac{dr}{r} + C \, dP,$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Werthen von $\frac{dp}{p}$, $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$, dP ist. Statt

dP

dP muß man aber aus obigen Gründen ei=

gentlich $\frac{dP}{206264}$ setzen, wenn dP in Secun=

den gegeben ist.

Die Werthe von A, B, C sind nun be=
kannte Größen, weil man alle Winkel des
Dreyecks PQR als gegeben ansehen kann, wenn
q, r, P gegeben sind.

Für Seiten oder Winkel, die zu klein ge=
messen worden, sind dp, dq, dr, dP nega=
tig, oder = o für Größen, die richtig gemes=
sen worden.

Einige Folgerungen.

§. 210. I. Wenn man mit Marinoni
(de re ichnograph. Lib. I. Cap. V. §. V.
num I.) annimmt, daß die Fehler in den ge=
messenen Linien, diesen Linien selbst proportional
sind, wenn man also $q : r = dq : dr$,

oder $\frac{dq}{q} = \frac{dr}{r}$ setzt, so wird

$$\frac{dp}{p} = (A + B)\frac{dq}{q} + C . dP \text{ aber}$$

$$A+B = \frac{\sin Q \cos R + \sin R \cos Q}{\sin P} = \frac{\sin (Q+R)}{\sin P}$$

$$= \frac{\sin P}{\sin P} = 1 \text{ folglich}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} + C\, dP$$

Unter dieser Voraussetzung des Herrn Marinoni, die sich durch die Erfahrung zu bestätigen scheint, wird also die Formel (§. 209. VII.) ungleich einfacher.

II. Ist übrigens auch der Winkel P richtig gemessen, folglich $dP = o$, so ist bloß

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

oder $p : q = dp : dq$ folglich

$$p + dp ; q + dq = p : q$$

oder die fehlerhaften Seiten verhalten sich wie die wahren. Eben dieses gilt auch in (I), wo man aus der Proportion $q : r = dq : dr$ schliesset

$$q + dq : r + dr = q : r.$$

III.

III. Man siehet hieraus, daß, wenn die Fehler der Seiten q, r, eines Dreyecks, in dem Verhältnisse der Seiten selbst stehen, der eingeschlossene Winkel P aber keine Veränderung leidet, das fehlerhafte Dreyeck dem wahren ähnlich seyn müsse.

IV. Andere Folgerungen, in Absicht der Zeichen + oder —, die man den Werthen von dq, dr, dP geben kann, sind eben so, wie in vorhergehender Aufgabe, anzustellen, und man wird mit geringer Mühe aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dp}{p} = A\,\frac{dq}{q} + B\,\frac{dr}{r} + C\,dP$$

alle einzelnen Fälle herleiten können, wenn man sie nöthig hat, daher ich mich bey dieser Aufgabe nicht länger aufhalten will.

Aufgabe.

§. 211. In einem Dreyecke PQR, wo man zwischen den Größen r, R, p, P, oder zweyen Winkeln und den gegenüberstehenden Seiten, folgende Gleichung

$$p \sin R = r \sin P$$

hat,

hat, die Gleichung zwischen den Fehlern dp, dr, dR, dP, zu finden.

Aufl. Man könnte hier eben wie in der erstern Aufgabe verfahren, und untersuchen, um wie viel die beyden Producte p sin R, r sin P sich verändern, wenn p um dp, R um dR u. s. w. sich verändern; alsdann die Aenderungen der beyden Producte einander gleich setzen.

Hier kann man aber durch Logarithmen kürzer so verfahren.

Weil $l\,p + l \sin R = l\,r + l \sin P$

so wird $\frac{dp}{p} + dR \cot R = \frac{dr}{r} + dP \cot P$.

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist, wo man denn ein für allemahl merken muß, daß, wenn dR, dP, oder die Fehler in den Winkeln, in Secunden angenommen werden, man statt dP, dR allemahl $\frac{dP}{206264}$ ꝛc. setzen muß.

Anmerkung.

§. 212 Das bisherige mag zureichen in Dreyecken die Verhältnisse zwischen den Fehlern

lern der Seiten und Winkel zu finden, und die beygebrachten drey Aufgaben werden die gewöhlichsten Fälle in sich enthalten, die beym Feldmessen vorkommen.

Nunmehr wird man einsehen, wie die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen in zusammengesetztern Fällen, sich auf die einfachern bisher beygebrachten Fälle gründe. Um hievon nur ohngefähr ein Beyspiel beyzubringen, so will ich annehmen, man suche z. B. nach der Aufgabe §. 184 die Weite AB, aus CD und den an der Standlinie CD gemessenen Winkeln. Um nun den Einfluß zu finden, den die Fehler in Messung der erwähnten Winkel, auf die gesuchte Weite AB haben, so würde man etwa auf folgende Art verfahren.

Ich würde 1) den Fehler berechnen, welcher aus den unrichtig gemessenen Winkeln ACD, ADC, auf die Seite AC des Dreyecks ACD erfolgte. Man siehet leicht, daß dieses nach der Auflösung des 207 §es geschehen kann. Auf diese Art fände ich also den Werth von $\frac{dAC}{AC}$, wo dAC den Fehler der Seite AC und der Quotient $\frac{dAC}{AC}$ wie bekannt, das Verhältniß des Fehlers zur zugehörigen Größe ausdrückt.

2) Auf eben die Art würde ich in dem Dreyecke BCD, aus den falsch gemessenen Winkeln BCD, BDC, den Fehler der Seite BC, oder den Werth von $\frac{dBC}{BC}$ berechnen.

3) Würde ich endlich in dem Dreyecke ACB, aus den Fehlern $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{CB}$, der beyden Seiten AC, BC, und dem Fehler des eingeschlossenen gemessenen Winkels ACB, den Werth von $\frac{dAB}{AB}$ nach der Aufgabe des 209. §es finden.

Man dürfte nemlich in der Auflösung des 209. §. statt der Werthe $\frac{dq}{q}$, $\frac{dr}{r}$ nur die gefundenen $\frac{dAC}{AC}$, $\frac{dCB}{BC}$ und statt dP den Fehler des Winkels ACB substituiren, so erhielte man

man den Werth von $\frac{dp}{p}$ oder hier von $\frac{dAB}{AB}$, also die Unrichtigkeit der gesuchten Weite AB.

Man wird leicht begreifen, daß bey würklicher Anwendung, diese Rechnung etwas weitläuftig ausfallen wird.

Man kann sich aber unterschiedene Vortheile dabey machen. Um nur einen zu erwähnen: Weil man in dem Dreyecke ACB, zur Berechnung des Fehlers der Seite AB, die beyden Winkel CAB, CBA, wissen muß, so kann man dieselben bloß, nachdem man die ganze Figur ABCD, nach einem verjüngten Maaßstabe, vermöge der an der gemessenen Grundlinie CD bekannten Winkel, entworfen hat, durch einen Transporteur messen. Wenn man dadurch freylich diese Winkel nicht so genau, als durch Rechnung findet, so schadet es doch nichts, bey Berrechnung des Fehlers in der Weite AB; man mache den Versuch, und nehme in der Formel des §. 209. VII, die Winkel Q, R, etwas größer oder kleiner, als sie wirklich sind, so wird dieses auf die Bestimmung des Werthes von $\frac{dp}{p}$ keinen sonderlichen Einfluß haben.

Man könnte den Fehler in der Weite AB noch auf eine andere Art finden, nehmlich, daß man die Formel suchte, wodurch AB, aus der Standlinie CD, und den Winkeln an ihr, bestimmt würde, und hierauf, wie bey den Dreyecken gewiesen worden, auf eine ähnliche Art die Veränderungen dieser Formel berechnete, welche aus den fehlerhaft gemessenen Größen entständen; allein die Rechnung wird doch noch immer weitläuftig bleiben, weil die Formel, wodurch AB bestimmt wird, sich nicht auf einen einfachen und kurzen Ausdruck bringen läßt.

In Fällen, wo die unbekannte Größe durch eine bequeme Formel ausgedrückt werden kann, läßt sich die Berechnung der Folgen der Fehler gleichfalls ohne Schwürigkeit bewerkstelligen, wie folgende beyden Beyspiele, die ich, zu vollständigerer Erläuterung, noch beybringen will, ausweisen.

Beyspiele, die Folgen der Fehler in zusammengesetzten Fällen zu berechnen.

§. 213. I. Wir haben bey der Aufgabe des 191. §s folgende Gleichung für die Höhe Kw, die wir x nennen wollen, gefunden

$$x = \frac{b \sin \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

Es

Es frägt sich, wenn b, β, α, um db, dβ, dα, falsch gemessen worden, wie unrichtig man dadurch den Werth von x findet.

Weil die Formel für x sich hier bequem durch Logarithmen in einzelne Theile zerlegen läßt, indem

$$l\,x = l\,b + l\sin\beta + l\sin\alpha - l\sin(\alpha-\beta)$$ ist,

so darf man nur die Veränderung eines jeden einzeln Theiles dieser Formel suchen, und die Veränderungen, die auf beyden Seiten dieser Gleichung herauskommen, wieder in eine Gleichung bringen, so wird man das Verhältniß zwischen den Fehlern, oder den Größen dx, db, dβ, dα, finden.

Weil also

$$d\log x = d\log b + d\,l\sin\beta + d\,l\,s\,\alpha - d\,l\,s(\alpha-\beta)$$

ist, so erhält man aus den oben beygebrachten Trig. Säz. XLVI. XLVII.

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + d\beta\cot\beta + d\alpha\cot\alpha -$$

$$-(d\alpha - d\beta)\cot(\alpha-\beta)$$

oder wenn man der Kürze halber

$$\cot(\alpha-\beta)+\cot\beta = M;\ \cot\alpha - \cot(\alpha-\beta) = N$$

setzet, so wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{db}{b} + M\,d\beta + N\,d\alpha$$

welches

welches die gesuchte Gleichung ist, wodurch die Unrichtigkeit in der Höhe x bestimmt wird.

II. Für die Aufgabe des 194. §. erhielten wir folgende Gleichung; $KI = \frac{a \sin\gamma \tan g\,\alpha}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)}$ Um wie viel wird sich die Höhe KI ändern, wenn die Größen a, γ, α, β, um da, $d\gamma$, $d\alpha$ $d\beta$ falsch gemessen worden?

Hier läßt sich durch Logarithmen die Formel wieder bequem in einzelne Theile zerlegen

$$lKI = la + l\sin\gamma + l\tan g\,\alpha - l\sin(180^\circ - \beta - \gamma)$$

oder

$$lKI = la + l\sin\gamma + l\tan g\,\alpha - l\sin(\beta + \gamma)$$

daher wird nach Trig. S. XLVI. XLVII.

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + d\gamma\cot\gamma + \frac{2\,d\alpha}{\sin 2\alpha} -$$

$$- (d\beta + d\gamma)\cot(\beta + \gamma)$$

oder wenn ich der Kürze halber

$$\cot(\beta + \gamma) = M;\ \frac{2}{\sin 2a} \text{ oder}$$

$$2\operatorname{cosec} 2\alpha = N,\ \cot\gamma - \cot(\beta + \gamma) = L$$

setze, so ist

$$\frac{dKI}{KI} = \frac{da}{a} + L\,d\gamma + N\,d\alpha - M\,d\beta$$

welches

welches die gesuchte Gleichung zwischen den Fehlern ist.

Aus dieser Formel wird sich leicht herleiten lassen, daß, je kleiner der Winkel α, und die Standlinie a ist, desto größer die Unrichtigkeit in der Höhe KI sey, weil der Quotiente $\frac{dKI}{KI}$ unter solchen Umständen wächst.

Es ist daher nicht vortheilhaft, aus sehr entfernten Standpunkten, Höhen zu messen, weil alsdann gewöhnlich der Winkel α sowohl, als auch die Standlinie a nicht von gehöriger Größe genommen werden können.

Mehrere Exempel beyzubringen würde unnöthig seyn.

Man wird aus dem bisherigen zureichend einsehen, worauf sich die Berechnung der Fehler gründe, und wie man vermittelst der zu Anfange dieses Buches gegebenen Formeln, für die Veränderungen der Producte, Quotienten u. s. w. gar leicht in allen Fällen die Berechnung der Fehler und ihrer Folgen wird anstellen können. Diejenigen Fälle, die in der Ausübung am meisten vorkommen, sind in den Aufgaben dieses Kapitels enthalten.

Will man das bisherige auf die verschiedenen Messungsarten mit diesen oder jenen Werkzeugen anwenden, so darf man nur aus der Natur der gebrauchten Werkzeuge, die unvermeidlichen Fehler schätzen, die bey Messung der bekannten Stücke begangen werden können, solche statt dR, dQ, dr u. s. w. in obige Formeln substituiren, um daraus die Zuverlässigkeit eines gesuchten Stücks zu berechnen. Mäße man z. E. in (§. 211.) die Winkel mit einem Astrolabio, bey dem man für einen Fehler von 2 Minuten nicht gut stehen könnte, so setzte man $dR = dP = 120$ Secunden, und würde die Linie r mit einer Kette gemessen, so müßte statt $\frac{dr}{r}$ der Grad der Zuverlässigkeit gesetzt werden, den eine solche Kette verstattete. Dieß hängt nun von der Beschaffenheit des Terrains, worauf man mißt, und von der Summe aller der Fehler ab, welche nach (§. 33. 40. 46.) im Visiren, im Einsetzen der Kettenstangen u. d. gl. begangen werden können. Mißt man z. E. auf einem sehr lockern Boden, wo auch bey der äussersten Sorgfalt die Kettenstäbe leicht aus dem Loche, wo sie eingesetzt werden, sich etwas verrücken, so wird die Wahrscheinlichkeit, in Messung einer Linie zu fehlen, weit größer seyn, als auf einem festen Boden, also für den

den erstern Fall die Größe $\frac{dr}{r}$ weit beträchlicher als im letztern angenommen werden müssen. Man könnte da wohl leicht auf 500 Schuh um einen fehlen, also $\frac{dr}{r} = \frac{1}{500}$ setzen, wenn die Kette etwa 5 Ruthen enthielte. Es wird überhaupt aber wohl schwer halten, hierinn etwas bestimmtes festzusetzen.

Will man den Grad der Zuverlässigkeit beym Auftragen der Dreyecke auf das Papier berechnen, so bedarf es wohl keiner Erinnerung, daß alsdann z. E. statt dP, der Fehler gesetzt werden muß, dem man z. E. bey dem Gebrauche des Transporteurs oder anderer Werkzeuge zum Auftragen der Winkel, unvermeidlich ausgesetzt ist; was für Fehler im Auftragen der Linien nur allein wegen der Unvollkommenheit der Augen begangen werden können, ist bereits (§. 85.) gezeigt worden. Ob aber nun z. E. ein berechneter Fehler in einer gesuchten Größe, auf dem Papiere merklich ausfällt, wird die Größe des verjüngten Maaßstabes ausweisen.

Auf den Formeln §. 207 u. f. gründen sich nun auch die von verschiedenen Schriftstellern ange-

angegebenen Regeln von Auswahl der Standlinien; was davon in der Ausübung vorzüglich brauchbar ist, habe ich theils schon beygebracht, theils werde ich auch in der Folge noch gelegentlich davon reden. Die meisten Vorschriften, die aber für die Auswahl der Standlinien in zusammengesetzten Fällen, von Schriftstellern gegeben werden, sind so verwickelt und eingeschränkt, daß meines Erachtens die Ausübung keine beträchtlichen Vortheile davon zu erwarten hat. Auch ist die Theorie davon großen Schwürigkeiten unterworfen, und führt auf Rechnungen und Constructionen, die den arbeitsamsten Feldmesser ermüden würden. Man sehe nur, was Lambert (Beyträge zur practischen Geometrie §. 418. 420.) hievon erwähnt; Aber gesetzt, man habe nun auch, nach der Theorie, für die Entwerfung einer gewissen Menge von Objecten die schicklichste Standlinie ausgefunden, wird man sie auch immer auf dem Felde so annehmen können, wie sie der Theorie nach beschaffen seyn sollte? Wird man aus ihr auch alle Punkte sehen können, die man entwerfen will? Anderer Hindernisse zu geschweigen. Da überhaupt die Auswahl der besten Standlinie auf dem Felde selten in des Feldmessers Gestalt stehet, so wird er oft Standpunkte wählen müssen, die zwar der Theorie nach nicht die vortheilhaftesten sind, die aber doch noch

immer

immer eine erträgliche Lage haben, und sich durch andere Umstände, z. E. durch ihre Bequemlichkeit, durch die Aussicht, die man an ihnen haben kann u. s. w. vorzüglich empfehlen. Und solche Standlinien auszufinden, braucht man keine weitläuftigen Rechnungen, sondern nur einige Kenntniß der Gegend, und einen vorläufigen, auch nur mäßig richtigen, etwa nach dem Augenmaaße, oder sonst auf eine andere Art entworfenen Grundriß, dergleichen man doch immer, wo man genauere Vermessungen anstellen will, bey Privatpersonen, in Archiven u. d. gl. erhalten kann. Da ferner eine einzige Standlinie selten zureicht, eine gewisse Anzahl von Oertern richtig aufzunehmen, so kann man aus neuen Standlinien theils diejenigen Oerter, die man aus der erstern schon bestimmt hatte, berichtigen, theils auch diejenigen Oerter aufnehmen, gegen die die erste Standlinie eine zu unschickliche Lage hatte; Und so wird man immer durch den Gebrauch mehrerer Standlinien, alle nöthige Genauigkeit erhalten.

Wer übrigens von Auswahl der Standlinien, und überhaupt von der bisherigen Theorie, ausser den schon angeführten Schriften der Hrn. Marinoni und Lambert, noch mehreres nachlesen will, dem können auch folgende Schriftsteller dienen.

Wolfii

Wolfii Elem. Trigonom. latinae. §. 58 seq.

Bouguer Figure de la Terre Sect. II. art. 3.

Hrn. Hofr. Kästners Abhandl. von den Fehlern beym Feldmessen, welche man in den Abh. der Königl. Schwed. Acad. der Wiss. fürs Jahr 1753. findet, und Hrn. Bar. Fried. Palmquists dahin gehöriger Aufsatz in den Abh. d. Königl. Schwed. Acad. fürs Jahr 1769. (nach der Kästn. Uebers.)

Karl Schefers Trigon. Versuch von der Wahl des Standes beym Feldmessen (Wien 1766).

XVIII.

XVIII. Kapitel.

Von den brauchbarsten Methoden, Figuren jeder Gattung auf dem Felde zu Papiere zu bringen, oder in Grund zu legen.

§. 214.

Die gegenwärtigen Aufgaben, mit ihren Zusätzen, betreffen diejenigen Methoden, Figuren einander ähnlich zu machen, welche auf dem Felde vorzüglich gebraucht werden können, und in denen sich Anfänger vorher zulänglich üben müssen, ehe sie es wagen dürfen, ganze Fluren zu entwerfen. Die Anwendung davon auf die Vermessung ganzer Landschaften, werde ich aber in der Folge mit mehrerem zeigen, weil ich dabey noch vieles anzumerken habe, was den Vortrag des gegenwärtigen Kapitels, wo ich bloß die Gründe zur Vermessung ganzer Landschaften vortrage, zu sehr unterbrechen würde.

Aufgabe.

§. 215 Eine Figur auf dem Felde, die in einer Horizontalebene liegt, und

und deren Seitenlinien gerade sind, vermittelst der Meßkette zu entwerfen.

Aufl. I. Es sey ABCDE (Fig. LXVII.) die vorgegebene Figur. Man soll auf dem Papiere eine kleinere abcde verzeichnen, welche der ABCDE auf dem Felde ähnlich ist, und also ihren Grundriß vorstellet. Man sey aber mit keinem andern Werkzeuge, als bloß mit einer Meßkette versehen.

II. Um dieses zu leisten, so müssen an der Figur auf dem Felde so viel Dinge gemessen werden, als nöthig sind, die Figur zu bestimmen.

III. Daß eine vielseitige Figur wie ABCDE sich nicht bloß aus ihren Umfangslinien AB, BC, CD, ED u. s. w. zeichnen läßt, sondern auch noch andere Stücke hinzukommen müssen, aus denen sich die Lage der Umfangslinien bestimmt, ist aus den Lehrsätzen von der Aehnlichkeit der Figuren bekannt. Um die Aufgabe aufzulösen, müssen also mit der Kette noch einige andere Stücke gemessen werden.

IV. Hierzu nimmt man am besten die Diagonallinien der Figur z. E. BE, BD u. s. w. wodurch die Figur in lauter zusammenhängende Dreyecke zerfällt. Man wählt solche

solche Diagonalen, welche sich am bequemsten und kürzesten messen lassen. Es ist nicht nöthig, daß sie alle aus einem und demselben Punkte, wie B, ausgehen. Ja dieß wäre sogar unbequem. Denn wenn man z. E. von B bis E gemessen hätte, so müßte man mit der Kette wieder zurück nach B, um alsdann von B bis D zu messen. Vortheilhafter ist es, wenn man von dem Punkte, wo die erste Diagonale zu Ende ist, sogleich wieder die folgende zu messen anfangen kann, um keine Zeit mit unnöthigem Kettenziehen zu verliehren. Ich würde also z. E., wenn ich von B nach E gemessen hätte, sogleich bey E anfangen, die Diagonale von E nach C zu messen, wenn sonst dieser Messung nichts im Wege stände, z. E. daß etwa die Diagonale EC gar zu lang ausfiele, oder man vielleicht von E nach C nicht hinsehen könnte u. d. gl. dadurch würde denn die Figur ebenfalls in drey zusammenhängende Dreyecke BAE, BEC, CED zerlegt, wie vorhin durch die Diagonalen aus dem Punkte B.

V. Nun ist klar, daß, wenn man auf dem Papiere kleinere Dreyecke wie abe, bed, bdc verzeichnet, die den zugehörigen auf dem Felde ähnlich sind, und solche in eben der Ordnung, wie diese, unter einander verbindet, man alsdann eine Figur abcde erhalten wird, die der auf dem Felde ähnlich ist.

VI.

VI. Man messe also mit der Meßkette, der Ordnung nach, erstlich alle Seiten der Figur ABCDE, und wenn bey diesen Messungen Hindernisse vorkommen sollten, daß eine oder die andere Seite nicht unmittelbar gemessen werden könnte, so bediene man sich der im XVten Kapitel §. 178 — 181. angegebenen Hülfsmittel.

VII. Nun messe man auch alle Diagonallinien, welche aus den angenommenen Punkten, wie z. E. B, nach den Eckpunkten der Figur hingehen. Bey einem Fünfecke, wie hier angenommen worden, wären nur zwey Diagonalen, BE, BD, bey einem Sechsecke drey, bey einem Siebenecke vier u. s. w. zu messen.

VIII. So werden diese Bestimmungen (VI. VII.) hinreichen, die Figur ABCDE zu entwerfen.

Damit aber zu Hause beym Auftragen keine Verwirrung entstehe, so muß man sich auf dem Felde entweder ein Brouillon, d. h. einen Entwurf aus freyer Hand von der Figur ABCDE, auf einem Blatt Papier gemacht, und an die entsprechenden Seiten und Diagonalen, die gefundenen Maaße in der gehörigen Ordnung geschrieben haben, oder man muß, welches noch besser ist, auf folgende Art zu Werke gehen.

Es

Es müssen in die Winkelpunkte A, B, C, D, E, Zeichenstäbchen mit Nummern gesteckt werden, dergestalt, daß z. E. bey A, wo man die Messung anfangen will, die 1ste Nummer, alsdann an den nächstfolgenden Punkt B, die 2te, an C die 3te u. s. w. zu stehen komme. Alsdann werden nach der Ordnung der Nummern, die Seiten AB, BC u. s. w. und die Diagonalen gemessen, und die gefundenen Maaße auf folgende Art ins Diarium getragen.

Für die Seiten der Figur.	Ruth. Fuße Zolle
Die Weite von Nro. 1 bis N. 2	28 . 7 . 3
von N. 2 — N. 3	25 . 8 . 2
: N. 3 — N. 4	35 . 5 . 6
: N. 4 — N. 5	32 . 0 . 8
: N. 5 — N. 1	36 . 8 . 4
Für die Diagonallinien.	
Die Diagon. von N. 2 — N. 4	48 . 0 . 0
: N. 2 — N. 5	52 . 9 . 3

IX. Wenn man solchergestalt die Messungen gehörig aufzeichnet, so kann zu Hause beym Auftragen nicht die geringste Schwürigkeit entstehen. Man kann auch, wenn es nöthig ist, andere Umstände) z. E. die Nahmen der Objecte A, B, C u. s. w. in dem Diario anmerken, ob sie Gränzsteine, Bäume, Ecken von Gebäuden u. d. gl. bedeuten. Denn man sieht leicht, daß diese Aufgabe überhaupt dient, die Lagen von Objecten auf dem Felde zu bestimmen, und sie sich nicht bloß auf die Entwerfung von Aeckern und Wiesen beschränket.

X. Will man nun zu Hause die Figur zu Papiere bringen, so ist folgendes dabey zu bemerken.

Erstlich verzeichnet man, wenn man im Auftragen der Figuren aus dem Diario, noch keine Fertigkeit hat, einen groben Entwurf, oder eine Figur auf ein Blatt Papier, von so viel Seiten, als die Figur auf dem Felde hat, und bemerket die Ecken derselben auf eben die Art, wie auf dem Felde, mit den dabey geschriebenen Ziffern 1, 2, 3 u. s. w. Diese grobe und aus freyer Hand entworfene Figur dienet nur, um der Einbildungskraft zu Hülfe zu kommen, und desto bequemer übersehen zu können, in welcher Ordnung die Dreyecke auf einander folgen, und die Seiten derselben aufgetragen werden müssen.

Nun wird auf ein Reißbrett, Papier gespannet, und auf demselben demnächst die gerade

rade Linie ab gezogen, auf welche man von a bis b, nach einem verjüngten Maaßstabe (§. 65) aus dem Diario die Weite von N. 1 bis N. 2. trägt, und bey den Punkten a, b, ebenfalls die Zahlen 1, 2 hinschreibt.

Nun nimmt man aus dem Diario die Weiten von N. 1 bis N. 5., und die Diagonale von N. 2 bis N. 5., und beschreibt mit denselben, über der Seite ab, das Dreyeck abe, so daß ae der Weite von N. 1 bis N. 5., und be der erwähnten Diagonale gemäß wird; so ist das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich. An den Punkt e wird demnächst die Zahl 5 hingeschrieben.

Ueber der Diagonale be, wird nun das zweyte Dreyeck auf eben die vorhin gewiesene Art verzeichnet, indem man aus b mit der Weite bd, die der Diagonale von N. 2 bis N. 4., und aus e mit der Weite ed, die der von N. 5 bis N. 4., gemäß (§. 181) ist, ein paar sich in d durchschneidende Kreisbogen beschreibt.

So wird also über jeder neuen Diagonale das nächstfolgende Dreyeck beschrieben, bis die ganze Figur abcde geschlossen ist, welche alsdann der auf dem Felde ähnlich seyn wird, weil die Dreyecke abe u. s. w. in eben der Ordnung, auf einander folgen, wie die Dreyecke ABE u. s. w. auf dem Felde, und jedes auf dem Papiere dem zugehörigen auf dem Felde ähnlich ist.

Daher ist also abcde ein Grundriß von ABCDE, und die Punkte a, b, c, d, e, liegen eben so gegen einander, wie die Punkte A, B, C, D, E, auf dem Felde.

XI. Dieses Verfahren nennt man die Messung einer Figur bloß mit der Meßkette. Ein kleines Nachdenken wird zeigen, daß diese Messungsart zwar eine große Genauigkeit verstattet, aber nur brauchbar ist, wenn die zu entwerfende Figur in einer Ebene liegt, und nicht von gar zu großen Umfange ist. — Denn sonst erfordert die Messung der vielen Linien, einen sehr großen Zeitverlust, besonders wenn sich viele Hindernisse, in Messung derselben, vorfinden sollten. — Man pflegt daher diese Messungsart, meistens nur bey Grundlegung nicht sehr großer Wiesenstücke, bey Vermessungen der Aecker u. s. w. zu gebrauchen. Uebrigens setzt aber diese Methode zum voraus, daß man die Diagonalen ohne sonderliche Hindernisse messen, und übersehen könne. Wenn daher ABCDE, z. E. den Umkreiß eines Waldes vorstellte, so würde diese Messungsart wohl nicht anwendbar seyn.

XII

XII. Wenn eine Figur aus sehr vielen Seiten besteht, so ist es gut, sie in Vielecke von einer geringern Anzahl Seiten zu zerlegen, jedes nach dem gewiesenen Verfahren zu vermessen, und sie alsdann auf dem Papiere in eben der Ordnung, wie auf dem Felde, an einander zu hängen. Man muß aber von den Seiten und Diagonalen eines jeden einzeln Vielecks ein besonderes Diarium halten. Auch versteht es sich von selbst, daß, ehe die Messung angefangen wird, man vorher die ganze Figur umgehe, sich einen deutlichen Begriff von ihr mache, und wenn man es nöthig befindet, die kleinern Stücke, in die man die große Figur zerlegt, durch eingeschlagene Pfähle oder Fahnen u. s. w. bezeichne. — Ueberhaupt muß man aufs möglichste sich aller Ordnung befleißigen, und alle Umstände in Erwägung ziehen, die entweder die Arbeit verzögern, oder wohl gar unnütz machen könnten. Auch ist es vortheilhaft, die gemessene Figur, so bald als möglich, zu Hause aufs Papier zu tragen. Denn wenn die Umstände der Vermessung dem Feldmesser noch deutlich vor Augen sind, so werden viele Irrungen vermieden, die sonst gar zu leicht, aus weitläuftigen Diariis entstehen können.

Die Größe des verjüngten Maaßstabes, den man zum Auftragen braucht, beurtheilt man

man nach der jedesmaligen Absicht, und der Größe des zu verfertigenden Risses.

Anmerkung.

§. 216. Findet sich, daß man eine Figur auf dem Felde, anstatt sie durch Diagonalen in Dreyecke zu zerlegen, bequemer auf eine andere Art, in zusammenhängende Dreyecke zerfällen kann, so wird man solches dem Gebrauche der Diagonalen vorziehen. So könnte man z. E. auch innerhalb der Figur einen willkührlichen Punkt annehmen, und sich von demselben nach allen Eckpunkten der Figur, gerade Linien gezogen vorstellen; dann würde die ganze Figur gleichfalls in zusammenhängende Dreyecke zerlegt, und wenn man alle Seiten am Umfange der Figur, wie auch alle Linien, die von dem innerhalb der Figur angenommenen Punkte, nach allen Ecken hinlaufen, mäße, so würde man daraus alle Dreyecke verzeichnen, und sie in eben der Ordnung gegen einander legen können, wie sie auf dem Felde auf einander folgen, man würde also dadurch gleichfalls den Grundriß der Figur auf dem Felde erhalten.

Diese Methode ist oft noch nützlicher, als der Gebrauch der Diagonalen, ob man gleich einige Linien mehr messen muß. Denn die

Diago=

Diagonalen werden oft zu lang und unbequem zu messen.

Aufgabe.

§. 217. Wenn man gleich keine Diagonalen, oder Linien wie in §. 216. messen kann, die Figur demohnerachtet, bloß durch Hülfe der Maaßstäbe und der Meßkette, zu Papiere zu bringen, vorausgesetzt, daß die Figur in einer Ebene liege. (Fig. LXVIII.)

Aufl. I. In diesem Falle muß man die Winkel am Umkreise der Figur bestimmen; dieses nun bloß mit der Meßkette zu bewerkstelligen, so bedienen sich einige Schriftsteller der (§. 138. III.) beschriebenen Methode, Winkel zu messen; da ich das wesentliche davon a. a. O. bereits erklärt habe, so brauche ich nur ganz kurz noch folgende Erinnerungen beyzufügen.

II. Erstlich muß man ein Diarium halten, worinn man die für jeden Winkel A, B, C, D, E, der zu entwerfenden Figur, nöthigen Bestimmungen gehörig aufzeichnet.

Diese Bestimmungen bestehen, wie aus a. O. erhellet, in kleinen gleichschenklichten Drey-

Dreyecken, wie z. E. Abe, wo man in den Richtungen AB, AE, von A nach b, und von A nach e gleiche Längen nimmt, und demnächst die Chorde be misset; ein gleiches geschiehet an jedem Winkel des Umkreises, wie die Figur ausweiset.

Es müssen aber diese Linien Ab = Ae, Eβ = Eε u. s. w. wenigstens einige Ruthen lang gemacht werden.

In dem Diario muß man nun nicht allein die Länge der beyden gleichen Schenkel Ab, Ae, u. s. w. an jedem Winkel anmerken, sondern auch die gefundene Länge der Chorden be, $\beta\varepsilon$ u. s. w. Gehet es aber an, an jedem Winkel durchgehends gleiche Schenkel Ab = Ae = Eβ = Eε u. s. w. zu nehmen, so braucht man nur bey jedem Winkel die Chorden be, $\beta\varepsilon$, anzumerken; nur muß man nicht vergessen, die ein für allemal gebrauchte Länge der Schenkel Ab, Eβ u. s. w. irgendwo auch in dem Diario aufzuzeichnen.

III. Wenn man die Chorden nicht innerhalb der Figur, wie bey A, E, messen kann, so muß man sie ausserhalb der Figur bestimmen, wie solches z. B. bey dem Winkel D gewiesen worden, wo man in den Verlängerungen CD, ED, gleiche Längen Dn, Dm nimmt, und die Chorde mn misset.

IV.

IV. Zugleich muß man in dem Diario anmerken, ob die Winkel A, B, C, D, E, auswäts oder einwärts gehende Winkel sind, wozu man willkührliche Zeichen, z. B. die Buchstaben A, E, wählen kann. So müßte man z. E. bey dem Winkel C anmerken, daß es ein einwärts gehender ist.

V. Nun müssen auch alle Seiten AB, BC u. s. w. am Umkreise der Figur gemessen, und wie gehörig, ins Diarium getragen werden.

VI. Wenn man alle Seiten der Figur misset, so lehret die Geometrie, daß man nicht nöthig habe, auch alle Winkel am Umkreise zu bestimmen, sondern allemahl 3 Winkel weniger, als die Figur Seiten hat; nur müssen die Winkel in einer Ordnung auf einander folgen. So würde man z. E. in dem Fünfecke ABCDE, nur nöthig haben, alle Seiten, und die zwey Winkel E, A zu messen, und die Figur würde dadurch doch vollkommen bestimmt seyn (IV). Auf gleiche Weise, wenn man alle Winkel misset, so hat man nicht nöthig, auch alle Seiten zu messen, sondern zwey weniger, als überhaupt am Umkreise vorkommen. So. z. E. würde unser Fünfeck bestimmt seyn, wenn man nur die Winkel A, E, D, C, B, und die Seiten AE, ED, DC mäße; der Punkt B, folglich die Seiten AB, CB, bestimmen sich, vermittelst des Durchschnitschnittes der verlängerten Schenkel AB, Ci von selbst.

VII. Das Diarium würde nun z. E. auf folgende Art aussehen.

Für das Fünfeck ABCDE.

a) Die Winkel desselben.

	Schenkel	Chorden
	R. F. Z.	R. F. Z.
der Winkel bey N. 1 :	2 . 0 . 0	2 . 1 . 3 . A
N. 2 :	3 . 0 . 0	5 . 3 . 0 . A
N. 3 :	2 . 0 . 0	1 . 8 . 2 . A
N. 4 :	2 . 0 . 0	3 . 5 . 0 . E

b) Für die Seiten desselben

	R. F. Z.
Weite von N. 1 — N. 2 :	12 . 0 . 0
N. 2 — N. 3 :	7 . 2 . 4
N. 3 — N. 4 :	7 . 7 . 4

VIII. Wenn nun nach diesen Datis die Figur zu Papiere gebracht werden soll, so verfährt man so.

Die Figur AEDCB bedeute nicht mehr die Figur auf dem Felde, sondern deren Grund-

Grundriß auf dem Papiere. Um diese Figur nach den Angaben des Diarii gehörig zu verzeichnen, so ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie AE, und trage auf dieselbe die Weite von Nro. 1 bis N. 2., mache also nach dem Diario AE = 12 Ruth.

Von A nach e trage man den zum Winkel bey Nro. 1. gehörigen Schenkel, nehme also Ae = 2 Ruthen, und beschreibe damit einen Kreisbogen ebq, trage in denselben von e nach b die dem Winkel bey Nro. 1. zugehörige Chorde; also eb = 2 R. 1 F. 3 Z., ziehe durch A, b, eine gerade Linie, so hat man auf dem Papiere den Winkel, welchen man bey N. 1. auf dem Felde hatte.

Auf gleiche Weise setzet man an E, den bey N, 2. gefundenen Winkel, verlängere Eε, und nehme ED der Weite von N. 2. bis N. 3. gleich, so hat man den Punkt D.

Auf diese Art verfähret man immer fort, so werden endlich die beyden Linien AB, CB, sich bey 5 durchschneiden, und die ganze Figur schliessen.

IX. Dieses Verfahren, eine Figur auf dem Felde gleichfalls bloß durch Ketten und Stäbe zu vermessen, ist freylich allgemeiner, als das vorhergehende §. 215., aber bey weitem

tem nicht so richtig, weil die Bestimmung der Winkel durch ihre Chorden, oft zu ziemlich beträchtlichen Fehlern Gelegenheit geben kann, besonders wenn gar zu spitze oder stumpfe Winkel vorkommen. Uebrigens hat man bey Verzeichnung auf dem Papiere Ursache, die Linien und Punkte so zart als möglich zu machen.

Indessen kann man sich doch in manchen Fällen dieser Methode mit Vortheil bedienen, und sie empfiehlt sich, weil man keine kostbaren Werkzeuge dazu braucht.

Noch eine nöthige Erinnerung wegen Verzeichnung der Winkel.

Um die Winkel A, E u. s. w. recht genau zu erhalten, so darf man sich dazu nicht des verjüngten Maaßstabes bedienen, womit man die Seiten AE, ED u. s. w. abträgt. — Denn dieser Maaßstab wird gewöhnlich zu klein seyn; man muß daher für die Schenkel und Chorden der Winkel einen eigenen etwas großen Maaßstab verfertigen, damit die Chorden, so genau als sie das Diarium angiebt, abgetragen werden können. Ist aber der Maaßstab für die Seiten der Figur groß genug, daß man auch Zolle darauf hat, so mag man sich auch desselben zur Verzeichnung der Winkel bedienen.

Auf-

Aufgabe.

§. 218. Eine krummlinigte Figur $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ Fig. LXIX. bloß durch Hülfe der Meßkette und Maaßstäbe zu vermessen, und zu Papiere zu bringen.

Aufl. Man umschließe die krummlinigte Figur mit einer geradlinigten ABCD, indem man bey A, B, C, D Stäbe oder Nummern absteckt, und bestimme nach den beyden vorhergehenden Aufgaben an der geradlinigten Figur so viel Stücke, als nöthig sind, sie aufs Papier tragen zu können. Es müssen aber alle Seiten AB, BC, CD, DA, mit unter dieser Bestimmung seyn.

Während daß man nun die Seiten AB, BC, CD, DA misset, so messe man auch mit dem Maaßstabe, für die merklichsten Buchten und Wendungen, die Abscissen Aa, Ab u. s. w. nebst den zugehörigen Ordinaten aα, bβ u. s. w., wie durch die Perpendickel ringsherum angedeutet worden. Alle hieher gehörigen Vorschriften sind bereits im IV. Kap. §. 54 u. f. beygebracht. Ich habe also weiter nichts mehr zu erinnern, als daß man, nachdem erstlich nach Angabe des Diarii, die Figur AB CDE, auf dem Papiere verzeichnet worden, auf die Seiten AB, BC u. s. w. die Abscissen trägt, durch ihre Endpunkte die Maaße

der

der Ordinaten setzet, und hierauf durch die Endpunkte der Ordinaten rings herum eine krumme Linie $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ziehet. Diese wird alsdann eine begränzte krummlinigte Figur bilden, welche der auf dem Felde desto ähnlicher seyn wird, je mehr Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt worden.

Bey diesem Verfahren ist übrigens noch zu bemerken, daß man gerne die geradlinigte Figur ABCD; so nahe neben der krummlinigten hernimmt, als es angehet, damit die Ordinaten nicht zu groß werden. Sollte aber dadurch die geradlinigte Figur zu viel Seiten bekommen, so muß man, um die daher entstehende Unbequemlichkeit zu vermeiden, freylich der Figur weniger Seiten geben, aber alsdann auch die daher rührenden größern Ordinaten mit desto mehr Sorgfalt bestimmen und messen.

Wie man sich eben dieser Methoden mit Vortheil bedienen könne, geradlinigte Figuren von sehr vielen Seiten, zu entwerfen.

§. 219. Wenn wir uns der im 217. und 218. §. gewiesenen Methode, bey sehr vielseitigen Polygonen bedienen wollen, so werden wir auch eine sehr große Anzahl von Dreyecken erhal-

erhalten, in die wir die Figur zerlegen: man kann aber oft weit kürzer zum Endzweck gelangen, wenn man eine Figur von sehr vielen, besonders kleinen Seiten, in eine andere von weniger Seiten einschließet, wie z. E. Fig. LXX. ausweiset, wo wir die Figur abcdefgh, mit der viereckigten ABCD umschlossen haben. Bringt man nun bloß diese viereckigte Figur zu Papiere, und setzt dann die auf dem Felde gemessenen und den Winkelpunkten a, b, c u. s. w. zugehörigen Abscissen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $B\varepsilon$ u. s. w. und Ordinaten αa, βb, γc, εd u. s. w. zugleich gehörig ab, so wird man auf dem Papiere gleichfalls die Lage der Winkelpunkte a, b, c, d, e gegen die Seitenlinien des Vierecks bestimmen, und folglich die vielseitige Figur auf dem Papiere entwerfen; und so wird eine grosse Anzahl von Dreyecken ersparet, in die man sonst die vielseitige Figur zerlegen müßte.

Es ist nicht nöthig, daß die viereckigte Figur ausserhalb der abcdefgh falle; wenn man es bequemer findet, so kann dieselbe auch innerhalb des vielseitigen Polygons angenommen werden, wie es z. B. die LXXI. Figur ausweiset.

Aufgabe.

§. 220. **Vermittelst des Meßtisches eine Figur zu Papiere zu bringen,**

gen, wenn man von einem Punkte innerhalb ihr nach allen Ecken derselben hinvisiren und messen kann.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII. ABCDE die zu entwerfende Figur, und o der innerhalb ABCDE willkührlich angenommene Standpunkt.

II. Man messe von o nach allen Ecken der Figur, in die man Stäbe mit Nummern gesetzet hat, die Entfernungen oA, oB, oC, oD, oE.

III. Man bringe hierauf den Meßtisch über den Standpunkt o, stelle ihn horizontal, und nehme auf ihm einen Punkt an, der lothrecht über o liegt; lege nun an diesen Punkt die dioptrische Regel, visire nach allen Ecken A, B, C, D, E, und ziehe die dahin laufenden Richtungslinien $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$, $o\delta$, $o\varepsilon$ auf dem Meßtische; vergesse übrigens auch nicht, durch Zahlen, die man an die Linien $o\alpha$, $o\beta$ u. s. w. schreibt, zu bemerken, nach welcher Ecke oder Nummer jede der Linien $o\alpha$, $o\beta$ u. s. w. hinweiset.

IV. Auf die Linie $o\alpha$, trage man aus o nach a, die für oA gefundene Länge; und aus o nach b, c, d, e, eben so, die für oB, oC, oD, oE, gefundenen Maaße nach einem verjüngten Maaßstabe, ziehe demnächst

a,

a, b, c, d, e, durch gerade Linien zusammen, so wird die kleine Figur auf dem Meßtische, nemlich die abcde, der großen ABCDE auf dem Felde, ähnlich seyn, mithin ihren Grundriß vorstellen, vorausgesetzt, daß man oA, oB u. s. w. horizontal gemessen hat.

V. Die Ursache ist, weil die Dreyecke aob, boc u. s. w. denen auf dem Felde AoB, BoC u. s. w. nach der Ordnung ähnlich sind, indem z. E. in dem Dreyecke aob der Winkel aob = AoB, und die Seiten ao, ob, denen oA, oB gemäß sind, folglich ao : ob = Ao : oB ist u. s. w., demnach muß die ganze Figur abcde der ABCDE ähnlich seyn.

Anmerkung.

§. 221. Diese Aufgabe kann ebenfalls nur bey Messungen, die nicht sehr ins Große gehen, angewandt werden, und ist daher bey Vermessung einzelner Wiesen und Aecker mit Nutzen zu gebrauchen. Indessen bleibt sie doch noch immer etwas beschwerlich, weil man viele Linien dabey unmittelbar messen muß. Auch ist sie nur in den Fällen brauchbar, wo der Umfang der Figur aus lauter geraden Linien bestehet. Wollte man nemlich mit einer krummlinigten auch so verfahren, so hätte man eine gar zu große Menge von Linien zu messen nöthig,

thig, um nur die hauptsächlichsten Wendungspunkte ihres Umfangs zu erhalten.

Aufgabe.

§. 222. Vermittelst des Meßtisches eine Figur ABCDE Fig. LXXIII. Tab. V. die man ganz umgehen kann, zu Papiere zu bringen.

Aufl. I. Nachdem die Punkte A, B, C, D, E,. gehörig durch Stäbe und Nummern bezeichnet worden, so bringe man über A den Meßtisch, stelle ihn horizontal, und bestimme auf ihm einen Punkt a, der lothrecht über A liegt.

II. Man lege an a die dioptrische Regel, visire nach B und E, und ziehe auf dem Meßtische nach B, E, die unbestimmten Richtungslinien aβ, aε, so erhält man auf dem Papiere einen Winkel εaβ, dessen Schenkel horizontal sind, und der dem Winkel EAB in der Figur gleich ist.

Oder εaβ ist der Neigungswinkel zweyer Verticalebenen, die man sich über AB, AE, aufgerichtet vorstellet (§. 128. 9.).

III. Man messe nun mit der Meßkette die Weite AB, und trage sie nach dem verjüngten Maaß=

Maaßstabe, von a nach b, auf die Richtungslinie aβ, welche auf dem Meßtische nach B hingezogen worden. Es versteht sich, daß man eigentlich den Horizontalabstand von A nach B messen muß, welches bey einer jeden folgenden Messung zu beobachten ist.

Vorschriften dazu sind bereits im vorhergehenden, z. E. §. 38. 6. §. 41. §. 44. §. 193. Zus. und an mehreren Stellen beygebracht worden, wo denn die Umstände ergeben müssen, welche von diesen Methoden in jedem Falle die bequemste ist.

Sehr oft ist es vortheilhaft, daß wenn eine Linie wie AB, stark gegen die Horizontalfläche geneigt ist, man den Horizontalabstand von A nach B aus einer besondern, auf der schiefen Fläche, worauf AB liegt, angenommenen Horizontallinie bestimmet.

Es sey z. E. Fig. **LVIII.** K in der Höhe, und C in der Tiefe, KC also auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene CKD; Man soll die Horizontalweite CI finden. Kann man auf dieser schiefen Fläche CKD, horizontal, z. E. von C nach D messen, oder eine horizontale CD als Standlinie abstecken, so bringe man in C den Meßtisch, stelle ihn horizontal, und visire nach K und D, so erhält man auf dem Meßtische den Horizontalwinkel ICD, und eben so bey D den

den Horizontalwinkel IDC, wenn gleich K in der Höhe liegt; hieraus, und aus der gemessenen, auf den Meßtisch verjüngt aufgetragenen CD, ergiebt sich auf demselben der Horizontaltriangel CJD, worinn CI, der verlangte Horizontalabstand von C bis an die Vertical-Linie KI, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen werden kann.

Durch diese und ähnliche Hülfsmittel, hat es also keine Schwürigkeit, in jedem Falle den Horizontalabstand wie AB, Fig. LXXIII. zu messen.

IV. Nachdem also solcher aus a in b aufgetragen worden, nehme man den Meßtisch von A weg, und setze ihn über B dergestalt, daß er über B 1) horizontal stehe, 2) daß der Punkt b, den man bey der erstern Station A erhalten hatte (III), lothrecht über B zu liegen komme, 3) daß die Linie ba längs BA eingerichtet sey. Wie dieses zu erhalten sey, ist (§. 183. Anm.) umständlich gelehrt worden.

V. In der Stellung (IV) bleibe nun der Meßtisch unverrückt, man lege die Regel an b, visire nach dem bey der dritten Station C aufgerichtetem Signale, und ziehe auf dem Meßtische nach C die Richtungslinie bγ, auf die man demnächst nach vollbrachter Messung der Weite BC, eine Länge bc nach dem verjüngjüngten Maaßstabe trage, welche der BC gemäß ist.

VI. Hierauf bringt man den Meßtisch über die dritte Station C, stellet ihn wieder horizontal, bringt den Punkt c (V) lothrecht über C, und richtet die Linie cb wieder längs CB ein, wie in (IV), legt demnächst an c die Regel, visiret nach D, und trägt die gemessene Weite CD, auf die entsprechende Richtungslinie von c nach d.

VII. Endlich wird der Meßtisch über D gebracht, und wieder nach der vorhergehenden Vorschrift so gestellet, daß d (VI) über D, und dc längs DC zu liegen komme. Man legt hierauf die Regel an d, und visiret nach dem letzten Stationspunkte E, so wird die Richtungslinie dε, die aε, welche bereits bey der erstern Station A auf dem Meßtische nach E hingezogen worden (II), in e durchschneiden, und so die ganze Figur abcde auf dem Meßtische schließen, welche dann den Grundriß der Figur ABCDE vorstellen wird.

Bew. Wenn man sich über AB, BC, CD u. s. w. Verticalebenen aufgerichtet vorstellet, so sind die Winkel, die man auf dem Meßtische an jeder Station erhält, nemlich abc, bcd, cde u. s. w. die Neigungswinkel dieser Verticalebenen gegen einander, oder die

die Winkel, welche man an dem Umkreise der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE erhielte (§§. 4. 5. 6.). Es sind also die Winkel a, b, c, d, nach der Ordnung, den auf den Horizont projicirten Winkeln A, B, C, D gleich.

Da ich ferner zum voraussetze, daß man die Entfernungen AB, BC nach der Horizontal-Linie gemessen habe, so drücken die auf den Meßtisch nach dem verjüngten Maaßstabe aufgetragenen Weiten ab, bc u. s. w. die verjüngten Seitenlinien der auf den Horizont projicirten Figur ABCDE aus.

In der Figur abcde folgen also die Winkel und Seiten in eben der Ordnung, Gleichheit und Verhältniß auf einander, wie in der projicirten Figur ABCDE, d. h. abcde muß der Projection von ABCDE auf die Horizontalfläche, ähnlich seyn, mithin den Grundriß von ABCDE vorstellen.

Ob zwar gleich die beyden letzten Linien de, ae, nicht durch unmittelbare Messung gefunden und aufgetragen worden, sondern sich bloß durch den Durchschnitt e ergeben haben, so müssen sie doch den Horizontalweiten DE, AE, gemäß oder ähnlich seyn, weil A, B, C, D, und die Seiten AB, BC, CD, zur Bestim-

mung

mung der Figur ABCDE, als eines Fünfecks, hinreichen.

Eben das Verfahren, daß ich bisher bey einem Fünfecke gewiesen habe, läßt sich nun, wie leicht erhellet, auf jedes Polygon anwenden, und man kann also von jeder Figur, die man umgehen kann, den Grundriß auf dem Meßtische bestimmen.

Proben, ob man richtig gemessen hat.

§. 223. Man darf wohl selten erwarten, daß die auf dem Meßtische erhaltene Figur abcde, dem Grundrisse von ABCDE, vollkommen ähnlich seyn werde. Denn die kleinen Fehler, die sowohl in Bestimmung der Winkel, als auch im Messen und Auftragen der Seiten begangen werden, und bey aller angewandten Vorsicht des Feldmessers unvermeidlich sind, werden verursachen, daß die Figur abcde, der Projection von ABCDE, nie vollkommen in allen Stücken ähnlich seyn wird. Man kann nun wohl fragen, ob sich nicht einige Mittel angeben lassen, die Figur auf dem Meßtische zu prüfen, ob sie viel oder wenig von der Figur ABCDE, abweiche. Die Gründe zu diesen Prüfungen sind nun kürzlich in folgenden enthalten.

I. Es bedeute künftig ABCDE die auf den Horizont projicirte Figur selbst, davon also abcde den Entwurf auf dem Papiere vorstelle, so erhellet folgendes.

Wenn das im 222. §. gewiesene Verfahren vollkommen ohne Fehler behandelt wird, so müssen die in den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische gezogenen Linien, an jeder folgenden Station, mit den zugehörigen Linien der Figur auf dem Felde, parallel werden, so bald in jeder folgenden Station der Meßtisch gehörig eingerichtet worden. Z. B. wenn bey der Station des Meßtisches über C, die Linie cb längs CB eingerichtet worden, folglich cb mit CB in einer geraden Linie liegt so werden die Linien ba, ae, die man bereits bey den vorhergehenden Stationen auf dem Meßtische erhalten hatte, den entsprechenden Linien BA, AE parallel seyn, weil die Winkel cba = CBA, und bae = BAE sind. Auf eben die Art sind z. E. bey der 4ten Station des Meßtisches über D, die Linien cb, ba, ae auf dem Meßtische, den entsprechenden Linien CB, BA, AE parallel. Dieser Satz ist aus der Lehre von Parallel-Linien und dem bisher beschriebenen Verfahren so klar, daß es nicht nöthig ist, ihn weiter zu beweisen; eine wichtige Folge ist aber diese.

Weil z. E. bey der Station über D, die Linie cb, der Linie CB, parallel ist, (voraus-

gesetzt,

gesetzt, daß dc längs DC fällt) und ferner dc : cb = DC : CB, so müssen die Punkte d, b, B, in gerader Linie liegen. Weil also dieses ist, und ferner ba mit BA parallel, wie auch db : dB = ba : BA seyn muß, so werden auch die Punkte d, a, A in gerader Linie liegen.

Wenn also während der Vermessung keine Fehler vorgefallen sind, so müssen bey einer gewissen Station des Meßtisches, wie z. E. über D, alle Diagonal-Linien db, da, welche aus dem lothrecht über D liegenden Punkte d ausgehen, mit den entsprechenden Diagonal-Linien DB, DA in gerader Linie, oder in einer Verticalebene liegen; und wenn man an die Diagonal Linien db, da, der Figur auf dem Meßtische, das Diopterlinial legt, so müssen die Dioptern, nach den bey B, A aufgerichteten Signalen hinzielen.

Hieraus läßt sich also auf eine sehr leichte Art prüfen, ob die Figur abcde auf dem Meßtische ihre gehörige Richtigkeit habe. Man lege, nachdem an einer gewissen Station der Meßtisch gehörig eingerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonal-Linien db, da, und untersuche, ob alsdann der Faden der Objectivdiopter genau die bey B, A, aufgerichteten Stäbe decket. Geschiehet dieses, so ist die Figur abcde, der ABCDE vollkom-

men

men ähnlich; je mehr aber die an d b, da gelegten Dioptern an den Signalen B, A, vorbeystreichen, desto größer ist die Unrichtigkeit des Grundrisses, desto mehrere und größere Fehler sind also während der Arbeit begangen worden.

Man kann nun diese Probe des Zurückvisirens nach den bereits erhaltenen (festgelegten) Punkten, über jedem Standpunkte des Meßtisches anstellen, und während der Arbeit selbst, sich von der Richtigkeit der bereits auf dem Meßtische erhaltenen Punkte versichern. Z. E. bey dem Standpunkte des Meßtisches über C, lege man, nachdem der Meßtisch gehörig eingerichtet worden, das Diopterlinial an die Diagonale c a; siehet man alsdann in dem Faden der Objectivdiopter, das bey A aufgerichtete Signal, so ist während der Messung von A bis C kein merklicher Fehler vorgefallen.

II. Diese Art, an jedem Standpunkte den Grundriß zu prüfen, ist in der That eine der besten Methoden, sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern. — Verstatten es aber die Umstände nicht, an jedem Standpunkte nach bereits festgelegten Punkten der Figur zurückzuvisiren, wie wenn z. E. ABCDE den Umriß eines Waldes vorstellte, da würde man vergebens diese Prüfungsart vornehmen,

weil

weil sich wegen der Gebüsche das Zurückvisiren nicht anstellen läßt.

In solchem Falle läßt sich also selten, während der Arbeit selbst, die Prüfung der auf dem Meßtische bereits erhaltenen Punkte bewerkstelligen, sondern man muß warten, bis man mit dem Meßtische an den letzten Stationspunkt E hinkömmt, wo sich alsdann zeigen wird, ob sich die Figur auf dem Meßtische in dem gehörigen Punkt schließet oder nicht.

Man begnüge sich nemlich an dem vorletzten Stationspunkte D nicht damit, daß sich durch den Durchschnitt e die Figur auf dem Meßtische schließet; sondern nachdem man bey D den Meßtisch gehörig eingerichtet, und nach E visiret hat, so messe man auch die Weite DE, und trage sie auf die entsprechende Richtungslinie von d nach i; hier wird sich nun schon zeigen, ob die durch den Durchschnitt e gefundene Weite de, mit der wahren DE übereinstimmt oder nicht.

Wenn nemlich während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, so müssen die durch den Durchschnitt e sich ergebenden Entfernungen de, ae, denen auf dem Felde DE, AE, gemäß seyn. Hat man demnach z. E. zur Probe die Linie DE gemessen, und sie von

d

d nach i getragen, so muß di = de seyn, folglich e auf i fallen; geschiehet dieses nicht, so ist zuverlässig während der Arbeit ein Fehler vorgefallen, und dieser Fehler wird desto beträchtlicher seyn, je mehr die Punkte e und i von einander abstehen.

III. Nachdem man die Weite DE gemessen, und von d nach i getragen hat, so bringe man den Meßtisch über die letzte Station E, so daß i lothrecht über E liege, und id längs ED eingerichtet werde, lege hierauf an i die dioptrische Regel, und visire nach A; wenn nun während der Vermessung keine Fehler vorgefallen sind, so muß das nach A gerichtete Diopterlinial, auf dem Grundrisse durch den Punkt a gehen, d. h. die Figur auf dem Meßtische muß sich in dem wahren Punkte a schließen. Geschiehet dieses aber nicht, sondern die dioptrische Regel streichet bey der Richtung der Diopter nach A, an a vorbey, wie z. E. iα, so ist die Abweichung des Grundrisses abcde, von der wahren Figur ABCDE, desto größer, je beträchtlicher der Abweichungswinkel αia, ist.

Wenn das nach A gerichtete Diopterlinial würklich durch a gehet, also die Figur sich in dem wahren Punkt a schließet, so sind entweder während der Vermessung keine Fehler vorgefallen, oder die an jedem Stationspunkte began-

begangenen Fehler haben sich während der Arbeit wieder aufgehoben. Da aber letzteres sehr selten geschiehet, so kann man immer behaupten, daß, wenn sich die Figur in dem wahren Punkte a schließet, die Figur abcdi der ABCDE vollkommen ähnlich seyn, oder doch so wenig von ihr abweichen werde, daß man den Fehler außer Acht lassen kann.

IV. Diese beyden Methoden (II. III.) werden also in jedem Falle wenigstens ein Merkmahl abgeben, ob die Figur auf dem Meßtische von der auf dem Felde, viel oder wenig abweiche, und also zu einer Prüfung der geschehenen Arbeit dienen. Allein, wenn man solchergestalt, am Schlusse der Figur, einen Fehler findet, wie kann man wissen, an welcher Station derselbe begangen worden? wie kann man die nöthige Correction der Figur bewerkstelligen? Diese Untersuchung ist in der That oft ziemlich schwer, wo nicht völlig unmöglich, besonders wenn man an mehreren Standpunkten gefehlet hat. Ich weiß wohl, daß von verschiedenen Feldmessern, Regeln angegeben worden sind, eine fehlerhafte Figur zu corrigiren, allein diese Vorschriften beruhen auf keinen sichern Gründen, und bestehen meistens nur in einem Zusammenzerren der Figur. Am richtigsten würden noch diejenigen Methoden seyn, nach denen man den am Schlusse der Figur erhaltenen

Winkel α i a, in die übrigen Winkel b, c, d u. s. w. gehörig vertheilte. In sehr vielen Fällen wird aber der Winkel α i a, so unbeträchtlich seyn, daß man ihn ohne Fehler ausser acht lassen, und die Figur a b c d i der A B C D E ähnlich setzen kann.

Ist aber der Winkel α i a sehr beträchtlich, so ist zu vermuthen, daß irgendwo in einer Station aus Unvorsichtigkeit ein grober Fehler begangen seyn muß. Denn die unvermeidlichen kleinen Fehler, die gewiß an jeder Station begangen werden, werden sich selten so häufen, daß α i a von ansehnlicher Größe ausfällt, weil sie sich immer zum Theil wieder gegen einander aufheben.

Da es aber eine unverzeihliche Nachlässigkeit des Feldmessers seyn würde, an mehr als einer Station einen groben Fehler zu begehen, besonders wenn die Figur nicht sehr viele Winkel an ihrem Umkreise hat, da es ferner nicht wahrscheinlich ist, daß die in Messung der Linien vorgefallenen kleinen Unrichtigkeiten, am Schlusse der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel α i a hervorbringen sollten, da überdem in Messung der Linien nie so leicht gefehlet werden kann, als in Zeichnung der Winkel auf dem Meßtische, so können wir immer annehmen, daß, wenn man am Schlusse der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel

kel findet, solcher meistens daher rühre, daß in irgend einer Station, wegen einer etwa vorgefallenen Verrückung des Meßtisches ein Fehler in Bestimmung des Winkels auf dem Meßtische begangen worden ist. Wir werden nun zeigen

Wie man, unter der Voraussetzung, daß nur an einer Station ein grober Fehler begangen worden ist, die Station im Risse aufsuchen könne, wo dieß geschehen ist.

§. 224. I. Es stelle Fig. LXXIV. ABCDEF den Umkreis der in Grund zu legenden Figur vor; man habe die Messung bey A angefangen, und sie nach der Richtung ABCDEF vorgenommen.

So würde man bey der letzten Station F, nach gehöriger Stellung des Meßtisches, auf demselben die Figur abcdef erhalten, und wenn während der Messung keine Fehler vorgefallen sind, so muß die Figur abcdef der ABCDEF vollkommen ähnlich seyn, und wenn so wohl f lothrecht über F liegt, als auch fe gehörig längs FE eingerichtet ist, so werden die Linien ab, bc, cd u. s. w. denen AB, BC, CD u. s. w. parallel seyn (§. 223. I. III.), und die Dioptern des an fa gelegten Diopterlinials müssen wieder genau auf den ersten

Stand-

Standpunkt A eintreffen, mit einem Worte, die Figur abcdefa muß sich auf dem Meßtische vollkommen schließen.

II. Hätte man aber z. E. bey der Station D, aus Unvorsichtigkeit, einen groben Fehler begangen, daß man statt des wahren Winkels CDE = cde, den fehlerhaften γde, welcher um γdc größer, als der wahre ist, bekommen hätte, so würde man (weil ich voraussetze, daß bloß in dem Winkel d gefehlet worden ist), auf dem Meßtische, nach gehöriger Einrichtung desselben an der letzten Station F, nicht die wahre Figur abcdef, sondern die fehlerhafte αβγdef erhalten, und weil bloß in dem Winkel d gefehlet worden, alles übrige aber richtig ist, so wären nach dieser Voraussetzung, αβ = ab, βγ = bc, γd = cd, αβγ = abc, βγd = bcd u. s. w. nemlich in der falschen Figur αβγdef alle Seiten und Winkel so groß, wie in der wahren abcdef, den einzigen Winkel γde ausgenommen.

III. Es würde also über der letzten Station F, wegen des bey d begangenen Fehlers, sich die Figur auf dem Meßtische nicht schließen; denn da der wahre Punkt a nunmehr in α fallen würde, so würden die Dioptern des an f und α gelegten Linials, nicht auf den Punkt A wieder eintreffen, sondern die gerade Linie fα, würde in der Linie AB auf einen Punkt

Punkt A′ zielen, der um den Abstand A′A von A wegläge, und der Winkel αfa, würde den Abweichungswinkel am Schlusse der Figur vorstellen.

IV. Man siehet ferner, daß die Linie fα in der fehlerhaften Figur, nicht der wahren Entfernung FA gemäß seyn würde; Wenn man folglich FA würklich mäße, und sie nach dem verjüngten Maaßstabe von f nach a, auf die nach A hingezogene Richtungslinie trüge, so würde auf dem Meßtische, a der wahre Schlußpunkt, α aber der fehlerhafte seyn; die Figur $\alpha\beta\gamma$defa schlösse sich also nicht, sondern stände innerhalb des Raumes aα offen.

Es frägt sich nun, den Standort d zu finden, wo der Fehler begangen worden ist.

Um dieses zu leisten, so wollen wir die fehlerhafte Figur mit der wahren vergleichen.

V. Man stelle sich vor, von dem Punkte d, wo der Fehler vorgefallen, würden ein paar gerade Linien dα, da, nach dem falschen und wahren Schlußpunkte (IV.) gezogen, so erhellet folgendes.

Weil in beyden Figuren $\alpha\beta\gamma$da, abcda, $\alpha\beta = ab$, $\beta\gamma = bc$, $\gamma d = cd$, und die Winkel $\alpha\beta\gamma = abc$, $\beta\gamma d = bcd$, so muß

 die

die Figur $\alpha\beta\gamma d\alpha$ der $abcda$ gleich und ähnlich seyn, und wenn man sich vorstellet, die Figur $d\gamma\beta\alpha$, werde auf die $dcba$ so gelegt, daß d auf d, γ auf c, β auf b und α auf a fiele, so würde auch $d\alpha$ auf da, und $\gamma d\alpha$ auf cda fallen, also $d\alpha = da$, $\gamma d\alpha = cda$ seyn, woraus dann ferner folgt, daß der bey dem Standpunkte d begangene Fehler, nemlich der Winkel $\gamma dc = \alpha da$ ist.

VI. Der Standpunkt d, wo der Fehler begangen worden, wird also die Eigenschaft haben, daß er von dem wahren und falschen Schlußpunkte a, α, gleichen Abstand $d\alpha = da$ hat, und es läßt sich leicht darthun, daß kein anderer Punkt, wie z. E. β, γ, die erwähnte Eigenschaft habe, daß nemlich $\beta\alpha = \beta a$, $\gamma\alpha = \gamma a$ u. s. w. sey.

Dieß giebt also folgendes Mittel, in der Figur $\alpha\beta\gamma defa$, die sich auf dem Papiere nicht schließen will, den fehlerhaften Standpunkt d, mithin auch den zugehörigen Punkt D auf dem Felde zu finden.

Man ziehe von den nach (IV) gefundenen wahren und falschen Schlußpunkten a, α, nach allen Ecken β, γ, d, e, gerade Linien oder Diagonalen; der Punkt d, wo die beyden Diagonalen αd, ad, einander gleich werden, wird die Station d, und folglich auch D geben,

wo

wo man auf dem Felde gefehlet hat, und der Winkel α d a dieser beyden Diagonalen, ist die Größe des an der Station d begangenen Fehlers (V), weil $\alpha d a = \gamma d c$.

Ein anderes Verfahren, den fehlerhaften Standpunkt zu finden.

VII. Nachdem über dem letzten Stationspunkte F der Meßtisch nach E eingerichtet worden, so lege man an f und α das Diopterlinial. Hier siehet man nun, daß die Richtung fα nicht auf A zuzielet, sondern um den Abweichungswinkel a f α, von A absteht.

Legt man eben so an f und β, oder an f und γ das Diopterlinial, so treffen auch diese Richtungen nicht auf die zugehörigen Stationspunkte B und C.

Aber an dem Stationspunkte d, wo gefehlet worden, wird das an f und d gelegte Diopterlinial, genau auf den entsprechenden Punkt D treffen.

VIII. Man suche demnach, welche von den Linien, wie fβ, fγ, fd auf dem Meßtische, genau nach ihrem Stationspunkte hintrifft, da ist derjenige Stationspunkt gefunden, an welchem auf dem Felde gefehlet worden ist, vorausgesetzt, daß in der ganzen Figur nur ein einziger Winkel fehlerhaft ist, und die Linien richtig gemessen und aufgetragen worden sind.

IX. Man siehet leicht, daß wenn man überhaupt mit einer Messung, die z. E. bey A angefangen, und nach der Richtung ABCDEF bis F fortgesetzt worden ist (es braucht F nicht gerade der letzte Winkelpunkt der Figur zu seyn), eine Prüfung anstellen will, ob irgendwo an einem Stationspunkte gefehlet worden, man nur nöthig habe, nach den bereits erhaltenen Stationspunkten, durch Anlegung des Diopterlinials an fα, fβ u. s. w. zurückzuvisiren. Treffen alle Linien fα, fβ u. s. w. genau auf ihre Stationspunkte, so ist nirgends merklich gefehlet worden. Weichen sie aber merklich ab, so sucht man denjenigen wie d, der entweder gar nicht, oder am wenigsten von dem entsprechenden Punkte D abweicht. Dieser ist alsdann wahrscheinlich derjenige, an welchem gefehlt worden, wo man alsdann hingehen, und von neuem visiren muß.

X. Kann man nicht nach allen Punkten zurückvisiren, so muß man dann freylich nach (VI) verfahren, um den fehlerhaften Stationspunkt zu finden. (VII—IX) geht also nur an, wo man ein freyes und übersehbares Feld vor sich hat.

Die

Die fehlerhafte Figur zu corrigiren.

§. 225. Wenn nach dem vorhergehenden §. die Station d, wo man auf dem Meßtische den fehlerhaften Winkel γde erhalten hat, gefunden worden ist, so beschreibe man über der nach dem wahren Schlußpunkte a hinlaufenden Diagonale da, die Figur αβγd, dergestalt, daß αβγd in die wahre Lage abcd, zu liegen komme.

Dieses wird sich gar leicht vermittelst der Seiten und Diagonalen der Figur αβγd bewerkstelligen lassen. Ist nun dieses geschehen, so ist abcdef der wahre Grundriß von ABCDEF.

Solchergestalt ist es also unter der Voraussetzung, daß in den Winkeln am Umfange der in Grund zu legenden Figur, nur ein einzigesmahl gefehlet worden, gar leicht, die fehlerhafte Figur zu corrigiren.

Uebrigens kann man, mehrerer Sicherheit wegen, sich mit dem Meßtische nach der zweifelhaften Station D himbegeben, die Linie de längs DE einrichten, und dann untersuchen, ob dγ von der Richtung DC gerade so viel abweicht, als dγ von dc, oder dα von da; findet sich dieses würklich so, so ist gar kein Zweifel mehr übrig, daß D würklich die Station sey, an der gefehlet worden ist.

Wenn

Wenn an mehreren Stellen der Figur grobe Fehler vorgefallen sind.

§. 226. In diesem Falle reicht die Gleichheit der beyden Diagonalen $d\alpha$, da, oder auch das Zurückvisiren (§. 224. IX.) nicht zu, die fehlerhaften Stationen auszufinden; denn daß $da = d\alpha$ in jedem Falle den fehlerhaften Punkt d angiebt, gründet sich darauf, daß nur an einer Station gefehlet worden.

Indessen kann man sicher behaupten, daß, wenn man am Schlusse der Figur einen beträchtlichen Abweichungswinkel $\alpha f a$ findet, hierauf von α, a, nach allen Eckpunkten β, γ, d, e, u. s. w. Diagonalen ziehet, und dennoch nirgends, ein paar Diagonalen wie αd, ad einander gleich findet, zuverlässig an mehr als einer Station gefehlet worden seyn müsse.

Eben dieses würde statt finden, wenn man gleiche Diagonalen von f aus, an mehr als zwey Stellen der Figur fände.

Wie man aber in solchem Falle die fehlerhaften Stationspunkte würklich ausfindig machen könne, dazu habe ich noch keine allgemeine und leichte Methode finden können. Das beste Verfahren, sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, bleibt immer das öftere Zurückvisiren nach den vorhergehenden Sta-

Stationen, welches man, wo es nur die Umstände verstatten, nie vorzunehmen unterlassen muß.

Auch ist es zur Prüfung der folgenden Messung immer gut, auf dem Meßtische zu bemerken, bis auf welchen Standpunkt man durch Prüfungen die Arbeit richtig befunden hat, damit man nicht nöthig habe, wenn sich in der Folge irgendwo ein Fehler entdeckt, die Prüfungen wieder ganz durchaus vorzunehmen.

Einige Vorsichten und Erinnerungen, die beym Verfahren des 222 §. beobachtet werden müssen.

§. 227. I. Es ist vortheilhaft, wenn man gleich anfangs, ehe man die Messung vornimmt, die Figur ABCDE umgehet, und ohngefähr nach dem Augenmaaße, oder, wenn es angehen kann, durch Schritte, die längste Diagonallinie bestimmt. Dieß geschiehet deßwegen, damit man auf dem Meßtische den verjüngten Maaßstab darnach proportioniren könne, damit derselbe unnöthiger Weise nicht zu klein, und wegen anderer Unbequemlichkeiten, nicht zu groß angenommen werde. Auch wird man durch diese Vorbereitung, desto sicherer den ersten Punkt a, Fig. LXXIII, wo die Messung auf dem Meßtische angefangen wer-

werden soll, wie auch die schicklichste Lage der ersten Linie ab wählen können. Denn es ist klar, daß man a und ab so auf dem Meßtische annehmen müsse, daß die ganze Figur abcde auf demselben erhalten werden kann.

II. Es geschiehet sehr oft, daß beym Fortgange der Arbeit, Theile der Figur auf dem Meßtische, sehr nahe an den Rand desselben kommen, und nur wenig Platz da ist, die dioptrische Regel gehörig anzulegen. In diesem Falle rathe ich beym Visiren, und genauem Anlegen des Diopterlinials, alle mögliche Vorsicht zu beobachten, weil an solchen Stellen der Figur gar leicht Fehler begangen werden. Auch ist es gut, auf dem Meßtische die Linien längs des Linials, so lang als möglich, auszuziehen, oder wenigstens auf dem Rande des Meßtisches, die Verlängerung der gezogenen Linien, durch einen kleinen Strich zu bemerken, damit man beym Zurückvisiren alsdann desto sicherer die dioptrische Regel wieder an die einzurichtende Linie anlegen könne. So würde ich z. E. bey der Station B, wo ich die Richtung bc zöge, nicht allein bey γ, sondern auch bey y an dem Rande des Meßtisches die Verlängerung von bc andeuten; und wenn ich nachher an die folgende Station C käme, so würde ich bey Einrichtung der Linie cb längs CB, das Diopterlinial nicht bloß an die Punkte b, c, (denn da kann

kann man gar zu leicht fehlen, besonders wenn b, c sehr nahe neben einander liegen), sondern vielmehr an die Verlängerungen y, γ, anlegen, weil eine lange Anlage des Diopterlinials immer viel sicherer die wahre Richtung einer Linie bestimmt, als eine kurze, wie bc. Diese Vorsicht ist überhaupt bey einer jeden Station zu bemerken.

III. Es geschiehet sehr oft, daß, wenn die Punkte A, B, C, D, E, nicht in einer horizontalen Ebene liegen, man bey einer gewissen Station nicht nach der folgenden hinvisiren, oder nicht nach der vorhergehenden zurückvisiren kann, weil nemlich die Stationen, entweder zu hoch oder zu niedrig liegen.

In diesem Falle muß man mit aller möglichen Sorgfalt vorher einen Stab in die Verticalebene der beyden Stationen einsetzen, der nahe genug beym Meßtische stehet, daß man nach ihm die dioptrische Regel richten kann.

So z. E. wenn C sehr viel niedriger oder höher als B läge, daß ich C durch die Dioptern bey B nicht sehen könnte, würde ich vorher bey M nahe genug bey B, einen Stab genau in die Verticalebene BC einsetzen; dann wäre es einerley, ob ich die Diopterrn nach C, oder nach dem Stabe M richtete, um die

die Visirlinie b γ, auf dem Meßtische zu ziehen. Aber zugleich erhellet auch die Nothwendigkeit der im 33. §. erwähnten Regeln und Vorsichten bey der Einsetzung eines solchen Stabes.

IV. Daß bey dem bisherigen Verfahren, die Vorsichten, in Ansehung der gehörigen Stellung und Einrichtung des Meßtisches an jeder Station, so wie ich sie umständlich in der Anmerkung zum 183. §. vorgetragen habe, zu befolgen sind, darf ich kaum erinnern.

Da indessen Hr. Voigt (man sehe oben die Anmerk. §. 183.) Schwürigkeiten darinn findet, bey dieser Aufgabe den drey Bedingungen des Meßtisches an jeder Station (§. 183. 5.), allemahl zugleich ein Genüge zu leisten, so will ich hier in der Kürze das Verfahren erläutern, welches er bey der gegenwärtigen Aufgabe anwendet.

Es sey demnach ABCD u. s. w. (Fig. XCII.) die aus ihrem Umfange zu entwerfende Figur.

1. Man bringe den Mittelpunkt α des Meßtisches (also denjenigen, welcher bey der Horizontalwendung des Tischblattes unverrückt bleibt) vermittelst einer Gabel lothrecht über den ersten Winkel oder Stationspunkt

punkt A der zu entwerfenden Figur, richte den Meßtisch horizontal, visire nun aus A nach B, und ziehe die Richtungslinie 1, 1.

2. Mit 1, 1 ziehe man durch einen beliebigen Punkt a auf dem Meßtische eine Parallele ab, und nehme ab der gemessenen AB gemäß.

3. Nun werde des Meßtisches Mittelpunkt α über den zweyten Stationspunkt B gebracht, der Meßtisch horizontal gestellt, und die Linie 1, 1 zurück nach A gerichtet. Dann ziehe man nach C die Richtung 2, 2, und durch b mit 2, 2, eine Parallele bc, auf welche man das verjüngte Maaß von BC trage, so ist der Winkel abc = ABC, und ab : bc = AB : BC.

4. Eben so verfahre man bey der dritten Station über C, und bey jeder folgenden, so sieht man leicht, daß die Figur abcd u. s. w., die man beym Fortgange dieser Arbeit auf dem Meßtische erhält, der ganzen ABCD u. s. w. ähnlich werden müsse. — Da nun allemahl der Mittelpunkt des Meßtisches über jeden Stationspunkt gebracht wurde, so hat man nicht, wie bey dem vorhergehenden Verfahren zu befürchten, daß sich der wahre Punkt auf dem Meßtische, über dem auf dem Boden, verrücke, während man den Meßtisch einrichtet und horizontal stellet. Hierin, meynt

nun

nun Hr. Voigt, liege eine sehr große Verbesserung des bisherigen Verfahrens, eine Figur aus ihrem Umfange zu entwerfen.

5. Allein wenn man es genauer betrachtet, so sind die Vortheile nur scheinbar. Denn erstlich ist man an jeder Station einer doppelten Gefahr zu irren ausgesetzt, einmahl, daß man im Visiren fehlen kann, und dann, daß die Parallelen vielleicht nicht mit der gehörigen Genauigkeit gezogen werden. Ohnstreitig giebt dieß Ziehen der Parallellinien eine neue Veranlassung zu unvermeidlichen Fehlern, da hingegen bey dem gewöhnlichen Verfahren, wenn mit den Vorsichten §. 183. zu Werke gegangen wird, nur allein die Fehler des Visirens in Betrachtung kommen. Ja, wenn auch so gar genau nach den Vorsichten des erwähnten §es nicht einmahl verfahren würde, so könnte ich doch zeigen, daß dieß Ziehen der Parallellinien größern unvermeidlichen Irrthümern ausgesetzt ist, als die kleinen Abweichungen des Punktes auf dem Meßtische, von dem über dem Boden, nach sich ziehen können. Ausserdem hält dies Ziehen der Parallellinien sehr auf, und durch einen Zufall verwechselt man leicht eine mit der andern, zumahl wenn beym Fortgange der Arbeit immer mehr und mehr Linien auf dem Meßtische, wie 1, 1; 2, 2; 3, 3 u. s. w. zum Vorschein kommen; Die Gefahr also, daß Fehler auf Fehler sich häu=

häufen, wächst, je mehr bereits Winkel auf dem Meßtische gezeichnet sind, weil jeder Winkel im Grunde zweymahl bestimmt wird, nemlich einmahl visirt, und einmahl kopirt wird. Je einfacher die Operationen sind, eine desto größere Genauigkeit hat man sich zu versprechen. Was aber nun ein Hauptfehler dieser Vermessungsart (und aller ähnlichen, die Hr. V. in seinem Buche vorschlägt, und die in der Hauptsache mit dem Verfahren (1—4) auf eines hinauslaufen) ist, besteht darinnen, daß

Zweytens, der Vortheil des (zur Prüfung der Arbeit) so nützlichen und unentbehrlichen Zurückvisirens an jeder Station, nach vorhergehenden bereits festgelegten Punkten (§. 223. II.) dadurch sehr erschwert wird. Wie nöthig dieß Zurückvisiren sey, wird jedem bekannt seyn, der nur etwas sich mit praktischen Arbeiten beschäftigt hat, und man muß es daher nie unterlassen, wo es nur die Umstände verstatten. Ich kann daher die Vorsicht, an einigen Stationen zu dem Behufe, Stäbe, oder andere kenntliche Merkmale zurückzulassen, nicht genug empfehlen. Bey Hrn. V. Messungsart wird der Meßtisch nur allemahl nach der unmittelbar vorhergehenden Station eingerichtet, dieß ist aber kein Mittel, sich von der Richtigkeit der ganzen Arbeit zu versichern, oder zu entdecken, ob irgendwo durch einen Zufall gefehlet worden

sey.

sey. Dieses Zurückvisiren nach andern bereits festgelegten Punkten geht bey Hrn. V. Verfahren deßwegen nicht bequem an, weil die Punkte wie a, b, c u. s. w. nie über die zugehörigen auf dem Boden zu liegen kommen, und man also wieder neue Parallelen durch α ziehen müßte, um zu erfahren, ob irgendwo ein Fehler vorgefallen ist, oder die Figur sich schließen werde, man vermißt solchergestalt einen wesentlichen Vortheil, wenn die Mensel allemahl aus ihrem Mittelpunkte gerichtet wird. Freylich wird Hr. V. sagen, bey Messungen aus dem Umfange gehe das Zurückvisiren nur an, wenn man eine freye Aussicht habe; dieß sey aber gewöhnlich der Fall nicht, wenn man einen Platz aus seinem Umfange entwerfe. Allein wenn man auch nicht nach allen Stationen zurückvisiren kann (dieß ist ja gar nicht nöthig), so finden sich doch von Zeit zu Zeit immer Standpunkte, aus denen man diesen oder jenen der bereits festgelegten wiederum wahrnehmen, und der also zur Prüfung der Arbeit dienen kann.

Uebrigens habe ich in (IV. 1.) sogar des Hrn. Verf. Methode noch etwas abgekürzt. Es ist nicht abzusehen, warum er bey seinem Verfahren den Mittelpunkt des Meßtisches nicht gleich über den ersten Standpunkt A selbst stellt, sondern z. E. wie im 53sten §. des zweyten Abschnitts seines Buches, erst

erst die weitläuftige Vorbereitung von (1—8), oder im 50sten §. von (1—13) vornimmt. Daß dadurch zu erheblichen Irrthümern Gelegenheit gegeben wird, bedarf keines Beweises.

Das bisherige wird mich rechtfertigen, warum ich seiner Methode den Vorzug vor der gewöhnlichen nicht einräumen kann.

V. Wenn die Messung von Wichtigkeit ist, so dienet es zur Vorsicht an jeder Station einen Pfahl zurückzulassen, damit, wenn man irgendwo in der Folge einen groben Fehler in der Figur entdecken sollte, man desto sicherer die vorhergehenden Stationen wieder finden, die begangenen Fehler aufsuchen, und corrigiren könne, ohne daß man jedoch nöthig hätte, die ganze Messung wieder von Vorne an zufangen. Dergleichen Pfähle werden etwas tief in die Erde geschlagen, und allenfalls auch die Stationsnummern darauf bemerket.

VI. Eine Figur, die an ihrem Umkreise sehr große Seiten und viele Winkel hat, wie solches unterweilen, bey Dorf- und Waldvermessungen zu geschehen pflegt, wird meistens durch eine einzige Messung nicht auf den Meßtisch gebracht werden können, ohne den Maaßstab so klein anzunehmen, daß der Grundriß zu seiner Absicht unbrauchbar wird. In solchen Fällen ist man genöthigt, eine so große Figur

Figur in mehrere einzelne Stücke zu zerlegen, jedes Stück besonders auszumessen, und dann diese einzelnen Entwürfe in eben der Ordnung, wie man sie auf dem Felde vorgefunden hat, zu Hause auf einem großen Blatt Papiere, mit einander zu verbinden. Auf Wiesen, die man bequem übersehen kann, hängt es von unserer Willkühr ab, den einzeln Stücken eine bequeme Gestalt zu geben. Bey Waldvermessungen bestimmen sich die einzeln Stücke oft durch Wege, die durch die Holzungen laufen. Doch alle hieher gehörigen Umstände und Vorsichten bey der Auswahl und Verbindung der einzeln Entwürfe, werden in der Folge, wenn wir von Ausmessung ganzer Fluren reden, mit mehrerem auseinandergesetzt. Jetzt beschäftigen wir uns nur, den Gebrauch des Meßtisches und anderer Werkzeuge zur Entwerfung einzelner Polygone zu zeigen, und die verschiedenen Methoden zu erläutern, deren sich ein Feldmesser demnächst bey großen Vermessungen, nach Verhältniß der Umstände, bedienen kann.

Anmerkung, krumme Linien betreffend.

VII. Man pflegt sich vorzüglich auch der Messung aus der Peripherie zu bedienen, wenn Figuren, die mit krummen Linien umschlossen sind, zu Papiere gebracht werden sollen. Man umschließt die krummlinigte Figur mit einer gerad=

geradlinigten, entwirft die geradlinigte nach dem gewiesenen Verfahren aus der Peripherie, und bestimmt während dieser Arbeit die Punkte der krummen Linie, längs den Seiten der geradlinigten Figur durch Abscissen und Ordinaten, und trägt sie auf den Meßtisch. Wenn zum Beyspiel Fig. LXXIII, $\mu\nu$ ein Stück der krummlinigten Figur wäre, die von der geradlinigten eingeschlossen ist, so würde man den Theil $\mu\nu$, der längs BC läge, durch Abscissen und Ordinaten Mμ, Nν, die man, während BC gemessen würde, zugleich mit bestimmte, entwerfen können, indem man auf die entsprechende Linie bc, die gemessenen Abscissen BM, BN u. s. w. verjüngt von b nach m, und von b nach i u. s. w. trüge, hierauf die Ordinaten mk, in denen Mμ, Nν, u. s. w. gemäß nähme, und durch die solchergestalt gefundenen Punkte n, k u. s. w. auf dem Meßtische die krumme Linie nk auszöge.

Auf diese Art würde man jeden Theil der krummlinigten Figur, zugleich während der Vermessung der geradlinigten, mit auf den Meßtisch bringen können. Es wird aber gut seyn, von allen gemessenen Abscissen und Ordinaten, wie auch von den Seiten der geradlinigten Figur, ein genaues Diarium zu halten, denn oft erlaubt es die Zeit nicht, auf dem Felde sogleich mit aller nöthigen Schärfe die Abscissen und Ordinaten aufzutragen; und da man doch gewöhnlich die Figur auf dem Meßtische, zu Hause wieder ins Reine auf ein anderes Blatt Papier bringt, so ist es besser, die Maaße der Abscissen und Ordinaten, aus dem Diario zu nehmen, als sie wieder von dem Meßtische abzufassen. Bey dem Entwurfe der krummlinigten Figur auf dem Meßtische, kömmt es nicht so sehr auf die genaue Auftragung der Abscissen und Ordinaten, als vielmehr auf die Bemerkung der Umstände an, worauf sich die Punkte der krummen Linie beziehen, d. h. ob sie z. E. zur Krümmung eines Flußes, eines Weges, einer Gränze u. d. gl. gehören.

Hiedurch wird denn nicht allein das Diarium auf dem Felde abgekürzt, sondern auch der Einbildungskraft beym genauern Auftragen zu Hause, nachgeholfen.

Die Hauptsache ist, daß nur die geradlinigte Figur ABCDE, auf die man die übrigen Abmessungen gründet, mit aller möglichen Genauigkeit auf dem Meßtische erhalten werde.

Ein sehr nützliches Werkzeug, welches bloß aus einem Liniale mit Spiegeln und Diopteru besteht, und unter andern auch bey Entwerfung krummlinigter Figuren vermittelst Abscissen

sen und Ordinaten, gebraucht werden kann, hat Hr. Fallon in Hrn. Obrist. v. Zach monatlicher Correspondenz vom April 1802. beschrieben.

Aufgabe.

§. 228. Eine Figur ABCDEF Fig. LXXV, die man aus einer Station A ganz übersehen kann, zu Papiere zu bringen.

Aufl. I. Man setze den Meßtisch in A, stelle ihn horizontal, und visire aus dem Punkte a, der lothrecht über A angenommen worden, nach allen Eckpunkten B, C, D, E, F, und ziehe auf dem Meßtische die dahin gehenden Richtungslinien aβ, aγ, aδ, aε, aφ.

II. Hierauf messe man alle Seiten AB, BC, CD, DE, EF.

III. Die Seite AB trage man nach dem verjüngten Maaßstabe auf die entsprechende Richtungslinie aβ, von a nach b.

Mit der Seite bc, die man der BC gemäß nimmt, durchschneide man aus b, die Diagonale aγ, in c, aus c schneide man mit cd, die der CD gemäß ist, die Diagonale aδ in d, u. s. w. so wird man auf dem Meßtische eine Figur abcdef erhalten, die der ABCDEF ähnlich ist.

Anmerkung. Wenn man sich mit dem Halbmesser bc aus b einen Kreiß beschrieben vorstellet, so wird solcher die Richtung aγ, in zwey Punkten c, n, durchschneiden, und es ist bn = bc.

Es wird aber hier das Dreyeck abn nicht dem ABC ähnlich seyn, weil in der Figur, ABC ein stumpfer, abn ein spitzer Winkel ist; wenn man also nach der Vorschrift (III) mit der Seite bc die Diagonale aγ durchschneidet, so finden eigentlich zwey Durchschnittspunkte c, n, statt, davon aber hier nur der c zu gebrauchen ist, welcher das Dreyeck abc dem ABC ähnlich macht.

Wie kann man nun aber in jedem Falle, diese Zweydeutigkeit der beyden Punkte c, n, entscheiden? wie kann man wissen, welchen von beyden Punkten c, n, in jedem Falle man wählen müsse, um das richtige Dreyeck abc zu erhalten.

Diese Zweydeutigkeit zu entscheiden, darf man nur wissen, ob der Winkel ABC auf dem Felde stumpf oder spitzig ist. Man braucht diesen Winkel nicht würklich zu messen, man kann ihn blos nach dem Augenmaaße schätzen.

So

So bald man aber die Beschaffenheit des Winkels ABC weiß, so wählt man unter beyden Durchschnittspunkten c, n, denjenigen c, der eben den spitzen oder stumpfen Winkel abc giebt, den CB mit AB auf dem Felde macht.

Nach dieser Bemerkung und Vorsicht, wird es selten sonderliche Schwürigkeit haben, die wahren Punkte, b, c, d, e, f, auf den Diagonallinien zu bestimmen.

Und so kann diese Aufgabe, auf dem Felde von sehr großen Nutzen seyn, indem sie eine der bequemsten Methoden ist, eine Figur, die man ganz übersehen kann, aus der Peripherie zu vermessen, und weil man nur an einer einzigen Station A Winkel aufzunehmen braucht, so ist dieses Verfahren zugleich eines der richtigsten.

Wenn neben den geraden Linien AB, BC, u. s. w. krumme herlaufen, so bestimme man sie durch Ordinaten und Abscissen, die man demnächst, an die entsprechenden Linien ab, bc u. s. w. setzt, und dann die krumme Linie auf dem Meßtische verzeichnet.

Aufgabe.

§. 229. Eine Figur aus ihrem Umfange zu Papiere zu bringen, ohne

daß

daß man nöthig hat, alle Seiten ringsherum zu messen.

Aufl. Es sey Fig. LXXVI. die zu entwerfende Figur.

I. Um nun dieselbe zu Papiere zu bringen, so nehme ich an, daß sich innerhalb derselben Gegenstände R, M befinden, die man an allen Ecken der Figur sehen kann.

II. Man wähle nun eine Seite der Figur, z. E. AB, von der Beschaffenheit, daß die Punkte R, M, eine bequeme Lage gegen dieselbe haben, oder die Linien BM, MA, RB, RA nicht zu spitze oder stumpfe Winkel mit AB machen.

III Diese Linie AB sehe man als eine Standlinie an, und bringe vermittelst derselben, erstlich die Punkte R, M; auf den Meßtisch (§. 184).

Man setzt nemlich den Meßtisch über A, und zieht aus dem Punkte a, der lothrecht über A liegt, nach B, M, R, die Richtungslinien aβ, aμ, aρ; misset demnächst AB, und trägt sie auf die zugehörige Richtung aβ, von a nach b. Nun stellt man den Meßtisch horizontal über B, bringt b lothrecht über B, richtet ba längst BA ein (§. 183. 4.), und zieht

zieht aus b abermahls nach R, M, Richtungslinien, so werden dieselben, die bereits bey der ersten Station gezogenen Richtungen a ρ, a μ, in r, m, durchschneiden, und r, m werden gegen a b, eben die Lage haben, die R, M, gegen AB haben, weil die Dreyecke a b r, ABR und a b m, ABM, einander ähnlich sind (§. 184.).

IV. Bey unverrückter Stellung des Meßtisches ziehe man nun auch aus b nach C die Richtung b γ.

V. Ohne nun die Linie BC würklich zu messen, begebe man sich mit dem Meßtische sogleich nach der dritten Station C, stelle und verrücke ihn so lange, bis die bereits in (IV.) auf demselben gezogene Linie b γ, bey der Station (Nro. 3.) genau in die Verticalebene CB zu liegen komme; welches man sowohl vermittelst einer Gabel, deren von b γ herabgelassenes Loth durch C gehen muß, als auch durchs Zurückvisiren nach B, ohne große Mühe erhalten kann.

VI. Nach dieser gehörig eingerichteten Stellung des Meßtisches, lege man die Alhidadenregel an einen der beyden Punkte r, oder m, und visire nach den zugehörigen Objecten R oder M, so wird die Richtungslinie wie r R, oder m M, rückwärts verlängert, auf der

Linie

Linie bγ den Punkt c abschneiden, und dieser Punkt c wird auf dem Papiere, den wahren Standpunkt des Meßtisches angeben, dergestalt, daß, wenn man von c ein Loth auf den Boden herabfällt, die Weite von B nach diesem Punkte, durch bc auf dem Meßtische ausgedrückt wird.

VII. Diesen Satz zu beweisen, so betrachte man die beyden Dreyecke MBc, mbc, welche einander ähnlich sind; denn es ist der Winkel MBc = mbc; da nun ferner wegen (V.) B, b, c in gerader Linie liegen, so werden wegen der gleichen Winkel mbc, MBc, die Linien MB, mb, parallel seyn, folglich von der dritten Mc unter gleichen Winkeln BMc = bmc geschnitten. — Mithin hat wegen des gemeinschaftlichen Winkels McB = mcb, das Dreyeck mcb eben die drey Winkel, die das Dreyeck McB hat; beyde Dreyecke sind also einander ähnlich; folglich ist

$$BM : bm = Bc : bc$$

Aber wegen (III.) ist auch

$$BM : bm = AB : ab$$

also $AB : ab = Bc : bc$

d. h. weil ab der AB gemäß gemacht worden; so wird auch bc der Bc gemäß seyn.

VIII.

VIII. Eben dieser Beweis gilt von den Punkten R, r, weil auf eben die Art die beyden Dreyecke BRc, brc, einander ähnlich sind.

Die rückwärts verlängerte Richtung Mm, ist zwar allein schon zureichend, auf der Linie Bγ, den Standpunkt des Meßtisches, oder den Punkt c abzuschneiden. — Allein, um sich von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern, so ist es vortheilhaft, auch vermittelst der Richtungslinie Rr den Punkt c zu bestimmen; denn wenn der Meßtisch bey c seine gehörige Stellung nach (V) erhalten hat, und übrigens die Objecte R, M, richtig auf dem Meßtische bestimmt worden sind, so muß das an r gelegte und nach R gerichtete Diopterlinial gleichfalls durch c gehen, oder die Richtungslinien Mm, Rr, müssen rückwärts verlängert, sich auf bc, in einem und demselben Punkte c schneiden.

IX. Es erhellet, daß man auf eben die Art, und nach eben den Gründen, auch jeden folgenden Stationspunkt des Meßtisches, z. E. D, auf dem Papiere bestimmen könne. — Nachdem man in (VI) den dritten Stationspunkt c richtig gefunden hat, so lasse man den Meßtisch unverrückt, und ziehe erstlich aus c nach D die unbestimmte Richtungslinie cδ, projicire alsdann vermittelst einer Gabel den Punkt

Punkt c auf den Boden, und stecke daselbst einen Stab ein. — Begebe sich hierauf mit dem Meßtische nach der vierten Station D, und stelle ihn daselbst so, daß die Linie δc in der Verticalebene liege, die durch D und den bey der dritten Station projicirten Punkt c gehet. — Lege alsdann an r, m, bey Nro. 4. abermahls das Diopterlinial, und visire nach den zugehörigen Objecten R, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, auf dem Meßtische die vierte Station d bestimmen — und so erhellet, wie man nach und nach, jeden Stationspunkt des Meßtisches über jeder Ecke der Figur ABCD, auf dem Meßtische bekömmt, die Figur ABCD mag so viel Ecken haben, als man will; hier würden z. E. bey der 4ten Station D, die Punkte a, b, c, d, die 4 zurückgelegten Stationen des Meßtisches über A, B, C, D, ausdrücken.

Anmerkungen über dieses Verfahren.

§. 230. I. Es ist klar, daß wenn man anfangs noch mehrere, als zwey, innerhalb der Figur ABCD liegende Objecte auf dem Meßtische entworfen hätte, alsdenn ein jedes von diesen Objecten, zur Bestimmung der Stationen c, d u. s. w. hätte dienen können. — Und da alle Richtungslinien wie rR, mM, u. s. w. in einem und demselben Punkte c, oder

d u.

c u. s. w. zusammentreffen müssen, wenn während der Arbeit, keine Fehler vorgefallen sind, so dienen mehrere Objecte nicht allein zur Prüfung der Arbeit, sondern auch dazu, daß man in der Arbeit nicht aufgehalten wird, wenn man beym Fortgange derselben, ein oder das andere Object aus dem Gesichte verliehren sollte.

II. Wenn es sich in (VIII) ereugnet, daß sich nicht völlig genau alle Richtungslinien, wie Mm, Rr u. s. w. in einem und demselben Punkte wie c, u. s. w. schneiden, so zeigt dieses einen Fehler an, der entweder daher rühret, daß man aus der anfänglichen Standlinie AB, die Objecte R, M, nicht richtig zu Papiere gebracht hat, oder daß man nicht an jeder folgenden Station den Meßtisch sorgfältig nach der vorhergehenden eingerichtet hat. In diesem Falle wählt man den Punkt, in dem sich die meisten Richtungslinien Mm, Rr u. s. w. schneiden, oder man bestimmt unter den verschiedenen Durchschnittspunkten bey c einen **mittlern**, den man für den wahren annimmt, und dadurch den Fehler einigermaaßen corrigirt. — Wenn aber die Durchschnitte gar zu weit von einander fallen, so muß ein beträchtlicher Fehler irgend an einer Station vorgefallen seyn, und ich rathe daher, lieber nach den vorhergehenden Stationen wieder zurückzugehen, und die Arbeit noch einmal vorzuzunehmen. — Gewöhnlich wird man den Fehler in der nächstvorhergehenden Station entdecken.

III. Das gewiesene Verfahren, aus dem Umkreise eine Figur zu Papiere zu bringen, ist ausserordentlich bequem, und giebt, wenn die Figur aus sehr vielen Ecken bestehet, am Schlusse derselben, selten einen so großen Fehler, als die gewöhnliche Methode, wo alle Seiten ringsherum gemessen werden. Zu der Bequemlichkeit, daß man nur eine einzige Standlinie, aus der man die Objecte R, M, innerhalb der Figur bestimmt, messen darf, kömmt in solchen Fällen, wo der Umkreis nicht aus lauter Horizontallinien bestehet, noch der Vortheil, daß man, wenn nur an jeder Station der Meßtisch horizontal steht, auch sogleich die auf den Horizont projicirte Figur auf dem Meßtische erhält, da im Gegentheile, die gewöhnliche Methode, wegen der vorzunehmenden Reduction der gemessenen Umfangslinien auf den Horizont, sehr mühsam wird, und selbst zu großen Fehlern Gelegenheit geben kann.

Freylich schränkt sich diese Methode, nur auf solche Figuren ein, innerhalb deren man kenntliche Objecte vorfindet; allein in eben solchen Fällen ist sie vortheilhaft, z. E. wenn man Städte aus ihrer Peripherie zu Papiere brin-

bringen soll; da würden Thürme, oder andere hohe Gebäude sehr gut zu solchen Objecten wie R, M, dienen.

Dieser Methode habe ich mich in meinen Vorlesungen über die pract. Geometrie, oft bedient, die Figur des Walles um Göttingen zu entwerfen. Der Umkreis von Göttingen bestehet aus mehr als 50 Winkeln, und eben so viel Linien, darunter einige ziemlich lang sind — allein in einer Zeit von 6 Stunden bin ich allemahl damit fertig geworden, da ich nach der gewöhnlichen Messung aus der Peripherie, fast 4 mahl so viel Zeit dazu brauchte.

IV. Endlich ist es nicht nothwendig, daß die Objecte R, M, gerade innerhalb der Figur liegen; kann man ausserhalb derselben auch Gegenstände, die hierzu geschickt sind, antreffen, so werden sie zur Bestimmung der Figur gleiche Dienste leisten.

Oft kann man aber auch solche Objecte durch Kunst sich verschaffen, nemlich Stäbe daselbst abstecken, wenn sie nur an vielen Ecken der Figur gesehen werden können.

Aufgabe.

§. 231. Aus einer willkührlich angenommenen Standlinie FG, Fig. LXXVII.

LXXVII. Tab. VI. so viel Punkte A, B, C, D, E, einer Figur auf dem Felde, zu Papiere zu bringen, als man will, oder eine Figur aus einer Standlinie aufzunehmen.

Aufl. Diese Aufgabe ist völlig mit der einerley, die wir im 184. §. zur Messung der Weiten gebraucht haben, und ist im Zusammenhange kurz auf folgende Art zu bewerkstelligen.

I. Man bringe über F, den Meßtisch, stelle ihn, wie gewöhnlich, horizontal, und ziehe aus dem lothrecht über F liegenden Punkte f, nach allen Objecten A, B, C, D, E, wie auch nach G, die Richtungen $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$, $f\delta$, $f\varepsilon$, $f\chi$.

II. Es verstehet sich, daß die Objecte A, B, C, u. s. w. gewisse Nahmen haben, oder mit Nummern bezeichnet worden sind. — Man schreibe also ihre Nahmen, oder Nummern ebenfalls, an die nach ihnen hingezogenen Richtungen, $f\alpha$, $f\beta$, u. s. w. An die Richtung $f\chi$ der Standlinie schreibe man gleichfalls ein beliebiges Zeichen.

III. Nachdem man nun die Standlinie FG gemessen, sie auf die entsprechende Richtung $f\chi$ von f nach g getragen, hierauf den Meß-

Meßtisch, mit den bey Nro. 1. darauf gezogenen Linien, über G bey Nro. 2. so gestellt hat, daß g über G, und gf längst GF eingerichtet worden, so ziehe man aus g bey Nro. 2. abermahls nach allen Gegenständen A, B, C u. s. w. Richtungslinien ga, gb, u. s. w.

Wo nun die nach A gezogene Richtung ga, die bey der ersten Station dahin gezogene und nach (II) bemerkte Richtung fα durchschneidet, da wird sich die Lage des Objects A, auf dem Meßtische durch a bestimmen, dergestalt, daß a gegen gf, eben die Lage haben wird, wie A gegen GF. Auf gleiche Weise, geben die Durchschnitte b, c, d, e, der nach den Objecten B, C, D. E hingezogenen Richtungen fβ, gb; fγ, gc; u. s. w. die Lagen dieser Objecte B, C, D, E gegen die Standlinie FG an, so daß die auf dem Meßtische erhaltenen Punkte a, b, c, d, e, gegen fg, eben so liegen werden, wie A, B, C, D, E, gegen FG, und durch gerade Linien ab, bc, dc u. s. w. verbunden auf dem Meßtische eine Figur abcde bilden, die der ABCDE vollkommen ähnlich ist.

Der Beweis hievon läßt sich kurz so abfassen.

Weil

Weil vermöge (§. 184.) die Weiten bc, cd, bd, denen BC, CD, BD gemäß sind, oder weil vielmehr überhaupt

$$BC : CD = bc : cd$$

$$BC : BD = bc : bd$$

ist, so ist das Dreyeck bcd, dem Dreyecke BCD ähnlich; also der Winkel bcd = BCD; auf gleiche Weise thut man dar, daß die Winkel CDE = cde; DEA = dea u. s. w. sind. Die Figur abcde, hat also an ihrem Umfange eben die Winkel, als die Figur ABCDE, und sie folgen auch in eben der Ordnung auf einander; da nun auch nach der Ordnung die Weiten bc, cd, de, ea, ab, denen BC, CD, DE, EA, AB, gemäß sind, so muß die Figur abcde, der ABCDE ähnlich seyn.

Zus. Durch dieses Verfahren sind auch die Weiten fb, fc, fd, u. s. w. den Entfernungen FB, FC, FD u. s. w. gemäß. Wodurch man also zugleich jedes Objects Weite von den Standpunkten F, G, findet.

Anmerkungen.

§. 232. I. Diese Aufgabe ist von sehr grossen Nutzen, und fast die vorzüglichste, deren man sich bey Entwerfung ganzer Landschaften

ten zu bedienen pflegt, besonders wenn man, statt des Meßtisches, das Astrolabium anwendet, und damit auf eine ähnliche Art zu Werke gehet, wie die Folge ausweisen wird. Sie wird vorzüglich gebraucht, die Hauptpunkte einer Landschaft, z. E. die Lage der Dörfer, Bergspitzen, Städte u. s. w. zu entwerfen, und empfiehlt sich durch die Bequemlichkeit, daß man nicht nöthig hat, von einem Orte nach dem andern hinzugehen, sondern nur eine einzige Standlinie zu messen braucht. Zugleich erhält man die Projection der Figur ABCDE auf die Horizontalfläche, wenn an jedem Standpunkte F, G, nur der Meßtisch horizontal gestellet worden.

II. Wenn die Objecte A, B, C u. s. w. sehr weit von einander entlegene Punkte einer Landschaft vorstellen, so muß man freylich den Maaßstab, womit man die Standlinie aufträgt, sehr klein annehmen, damit nicht die Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, ausserhalb des Meßtisches fallen. In solchen Fällen mögten wohl die Unterabtheilungen in Fuße rc. wegfallen, und sich in einen unsichtbaren Punkt verlieren. Allein eben bey so großen Vermessungen kömmt es auf solche Kleinigkeiten, dergleichen Fuße und Zolle sind, nicht an, da man oft genöthigt ist, eine und mehrere Ruthen für einen Punkt gelten zu lassen.

III. Die Standlinie braucht eigentlich nur in dem Falle würklich gemessen zu werden, wenn man auf dem Meßtische, ausser der Lage der Punkte a, b, c, d, e gegen einander, auch ihre Entfernungen verlangt.

Verlangt man bloß die Lage der Objecte A, B, C, D, E gegen einander, so braucht man die Standlinie nicht wirklich zu messen, weil das Verfahren des 184. §. mithin auch des 231. §., welches aus jenem herfliesset, eine willkührliche Standlinie zum voraussetzt, folglich sich auf keine bestimmte Größe derselben einschränkt; und da der verjüngte Maaßstab, gleichfalls willkührlich ist, so kann man auch fg, von beliebiger Länge nehmen: denn es läßt sich allemahl ein verjüngter Maaßstab gedenken, auf dem fg so viele Theile fassen würde, als die willkührliche Standlinie FG nach der Meßkette hält.

Wäre die Standlinie FG nicht unmittelbar gemessen worden, sondern eine andere Linie, z. E. BC, so kann man daraus den Maaßstab zu der Figur abcde auf dem Meßtische auf folgende Art finden. Gesetzt, BC sey 35 Ruthen 5 Schuh, oder 35,5 Ruthen, gefunden worden. Man messe die ihr entsprechende bc auf dem Meßtische, nach Theilen eines willkührlich angenommenen 1000theiligten Maaßstabes; sie fasse z. E. 786 solcher Theile.

Um

Um nun den wahren Maaßstab für die Figur auf dem Meßtische zu finden, so setze man, 10 Ruthen dieses wahren Maaßstabes betrügen x Theile des willkührlich angenommenen 1000theiligten, so findet man x durch folgende Proportion

$$35,5 : 786 = 10 : x$$ also

$x = 221$. Man fasse also 221 Theile von dem Tausendth. Maaßstabe ab, und theile diese Länge in 10 Theile, so hat man die verjüngten Ruthen für den Riß a b c d e, mithin den Maaßstab, nach welchem bc so viel Ruthen fassen würde, als BC auf dem Felde nach der Meßkette hält.

IV. Die Richtigkeit der ganzen Operation hängt davon ab, daß über der zweyten Station Nro. 2. die Linie gf, so genau als möglich, längst der Standlinie GF eingerichtet werde, und sich, während daß man aus g nach den Objecten A, B, C, u. s. w. visiret, nicht aus ihrer Lage verrücke. Um also während der Arbeit sich von dem unverrückten Stande des Meßtisches zu versichern, so muß man entweder unterweilen, die dioptrische Regel an gf legen, und zurück nach der Station F visiren, oder man muß an dem Meßtische mit einem Versicherungsfernrohre (§. 131. VIII.) versehen seyn.

V. Wenn solchergestalt alles seine gehörige Richtigkeit hat, und gf genau längst GF gestellet ist, so sind nach (§. 184. Zus. I.) alle Linien fb, fa, bc, cd u. s. w. den correspondirenden Linien FB, FA, BC, DC, u. s. w. parallel.

VI. Es ist nicht nöthig, daß man aus g, würklich die Linien gb, gc, u. s. w. ausziehe — sondern man braucht nur da, wo die Visirlinien aus g, die erstern aus f, nemlich fβ, fγ u. s. w. schneiden, die Durchschnitte b, c, mit einer Zirkelspitze zu bemerken. — Dies dient, Verwirrungen zu vermeiden, die sonst die vielen Linien gar leicht verursachen könnten.

VII. Die richtige Wahl der Standlinie FG, trägt auch sehr vieles dazu bey, die Folge der im Visiren, oder in der Stellung des Meßtisches begangenen Fehler, zu vermindern, und daher dienen die im XVII. Kapitel hieher gehörigen Erinnerungen. Man muß daher, wenn eine Standlinie, wie FG, nicht zureicht, alle Punkte A, B, C, D u. s. w. mit mäßiger Richtigkeit auf dem Meßtische zu entwerfen, mit ihr eine andere verbinden, aus der man diejenigen Punkte entwirft, die gegen die erste FG eine zu unbequeme Lage hatten. Ueberhaupt muß man bey Entwerfung großer Districte immer mehrere Standlinien zu Hülfe nehmen, theils, weil eine einzige Standlinie nicht

nicht zureichend seyn würde, eine grosse Menge sehr weit wegliegender Objecte auf einmahl zu Papiere zu bringen, ohne den Maaßstab gar zu klein anzunehmen, theils auch, weil eine Standlinie nicht gegen alle Objecte eine gleich vortheilhafte Lage hat. Es müssen aber die einzeln Standlinien entweder unter einander selbst, oder mit bereits festgelegten Punkten zusammenhängen, damit sich nachher die einzeln entworfenen Theile einer Landschaft mit einander verknüpfen lassen. — Was aber hiebey noch zu merken, und wie man verfahren müsse, die einzeln Entwürfe, ohne sich zu irren, richtig in Verbindung zu bringen, davon werde ich im folgenden Theile dieses Buches umständlicher handeln.

VIII. Wenn man bey der Station Nro. 1. nachdem die Visirlinien fα, fβ u. s. w. gezogen worden, den Meßtisch in unverrückter Lage läßt, und auf ihm auch die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ verzeichnet (§. 121.), hierauf bey Nro. 2. den Meßtisch so stellt, und wendet, daß die Magnetnadel, der an $\mu\nu$ gelegten dioptrischen Regel, über der Nordlinie auf dem Boden des Magnetkästgens, wieder einspielet, so werden nicht allein die beyden Richtungen $\mu\nu$ bey Nro. 1. und Nro. 2., sondern auch bey Nro. 2. alle Linien auf dem Meßtische, wie ab, bc, cd, fb u. s. w. den entsprechenden AB, BC, CD, FB u. s. w.

auf

auf dem Felde parallel seyn. — Dies drückt man so aus, daß man sagt, bey Nro. 2. habe der nach der Magnetnadel eingerichtete Meßtisch eine parallele Lage, mit der, bey Nro. 1.

Dieser Satz, den Meßtisch an jeder Station, vermittelst der Magnetnadel, in eine Lage zu bringen, die mit einer der vorhergehenden Stationen parallel ist, wird uns den Weg zu folgender Aufgabe zeigen, welche bey geodätischen Messungen von vorzüglicher Brauchbarkeit ist.

Aufgabe.

§. 233. Wenn man nach der Aufgabe des 231. §. bereits einige Objecte auf dem Felde zu Papiere gebracht hat, alsdann die Lage jeder Station, wo man den Meßtisch hinbringt, gegen diese Objecte zu bestimmen.

Aufl. I. Fig. LXXVI. Es seyen S, R, M Gegenstände auf dem Felde, und AB, die angenommene Standlinie; also Nro. 1, Nro. 2. die beyden Stände, aus denen man die Objecte S, R, M, nach der vorhergehenden Aufgabe zu Papiere gebracht hat, so daß die

bey

bey Nro. 2. erhaltenen Punkte s, r, m, auf dem Meßtische die Objecte S, R, M vorstellen.

II. $\mu\nu$ sey die Richtung der Magnetnadel, die man auf dem Meßtische bey Nro. 1. gezogen hatte; es verstehet sich, daß man bey Nro. 1, sowohl alle Visirlinien wie $a\rho$, $a\mu$ u. s. w., als auch die Lage der Magnetnadel $\mu\nu$, bey unverrückter Stellung des Meßtisches gezogen haben muß.

III. Es stelle nun Nro. 3. eine dritte Station des Meßtisches vor; um nun die Lage dieser Station, gegen die Objecte S, R, M zu bestimmen, so lege man an die Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$, das Diopterlinial, drehe den Meßtisch so lange horizontal herum, bis die Magnetnadel über der Nordlinie einspielt. — In dem Augenblicke, da dieses geschiehet, erhält der Meßtisch bey Nro. 3. eine Lage, die mit der bey Nro. 1. und Nro. 2. gehabten, parallel ist. — In dieser Lage bleibe nun der Meßtisch unverrückt; man lege an r, s, m, das Diopterlinial, und visire nach den zugehörigen Objecten R, S, M, so werden die rückwärts verlängerten Richtungslinien Rr, Ss, Mm, sich insgesammt, auf dem Meßtische in einem und denselben Punkte c schneiden, wie im 130. §., und dieser Punkt c wird auf dem Papiere die Station des Meßtisches bey Nro. 3. vorstellen, dergestalt, daß wenn C,

loth-

lothrecht unter c angenommen wird (welches, nachdem sich c auf dem Meßtische ergeben hat, vermittelst einer Gabel bewerkstelligt werden kann), die Lage der Punkte C, R, M, S auf dem Felde, durch die c, r, m, s auf dem Meßtische angegeben wird. Dies erhellet daraus.

IV. Weil bey Nro 3. der Meßtisch eine parallele Lage mit Nro. 2. erhalten hat, so sind bey Nro. 3., sowohl die Linien br, bm, bs, als auch sm, rm, sr, den entsprechenden Linien BR, BM, BS, SM, RM, SR, parallel.

V. Weil also sr parallel mit SR, und rm parallel mit RM, und die Punkte S, s, c so wie M, m, c, in geraden Linien liegen, so ist das Dreyeck src, dem Dreyecke ScR, oder eigentlich SCR ähnlich, und auf eben die Art das Dreyeck rcm dem Dreyeck RCM ähnlich. Uebrigens ist auch das Dreyeck srm dem SRM ähnlich; dies giebt also die Proportionen.

$$SC : sc = SR : sr = RM : rm$$

$$RC : rc = RM : rm$$

$$MC : mc = RM : rm$$

also $SC : sc = RC : rc = MC : mc$

d. h.

d. h. die Weiten SC, RC, MC, sind denen sc, rc, mc, proportional; da nun auch die Winkel SCR = scr, RCM = rcm, so siehet man leicht, daß die Punkte s, r, m, gegen c eben die Lage haben müssen, die S, R, M, gegen C haben.

VI. Auf gleiche Weise erhellet, daß wenn in der Station bey Nro. 4. der Meßtisch wieder nach der Magnetnadel gestellet, hierauf an r, m, s, das Diopterlinial gelegt wird, sich die verlängerten Richtungslinien Rr, Mm, Ss, in d durchschneiden, und solchergestalt durch d, den Stand des Meßtisches bey Nro. 4. auf demselben bestimmen werden.

Und so kann man auf dem Felde jeden Ort, wo man den Meßtisch hinstellet auf dem Meßtische bestimmen, und solchergestalt auch auf eine gar leichte Art, Figuren aus ihrem Umfange zu Papiere bringen, ohne daß man nöthig hat, wie bey den Aufgaben des 222. und 230. §es, den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach den vorhergehenden Stationen einzurichten, d. h. einen zusammenhängenden Faden der Vermessung zu befolgen.

Anmerkungen.

§. 234. I. Es erhellet, daß beym Fortgange einer Messung, selbst die Punkte wie B, B, C, wieder zu neuen Richtpunkten dienen können. Hätte man z. B. bey der Station Nro. 4. die Gegenstände S, R, M aus dem Gesichte verlohren, könnte aber nur einige der vorhergehenden Stationen, z. B. B, C, in welchen man Stäbe zurückgelassen hätte, sehen, so würde man den Punkt d demohnerachtet bestimmen können; denn man dürfte, nachdem der Meßtisch nach der Magnetnadel gestellet worden, die dioptrische Regel nur an b, c, legen, und nach B, C, visiren, so würden die verlängerten Richtungen Bb, Cc, gleichfalls den Punkt d bestimmen.

II. Auf diese Art erhellet, daß man eine Messung sehr weit ausdehnen kann, ohne daß es nöthig ist, sehr viele Stand- und andere Linien unmittelbar zu messen — und so hat man den Vortheil, daß sich an jedem Orte, wo man den Meßtisch hinbringt, und wo man zwey oder mehrere von den bereits auf dem Meßtische bestimmten Objecten sehen kann, die Messung weiter fortsetzen läßt.

III. Ein anderer Vortheil bey dieser Vermessungsart, ist, daß, wenn nur die aus der Standlinie AB nach (§. 231.) festgelegten Objecte R, S, M, ihre gehörig richtige Lage auf dem Meßtische erhalten haben, man nicht so leicht besorgen darf, daß sich beym Fortgange der Messung die Fehler häufen, oder

sich

sich von einer Station, auf die nächstfolgende fortpflanzen. — Man vergleiche hiemit nur die gewöhnliche Art, eine Figur aus ihrem Umfange zu entwerfen. Ein Fehler, den man z. E. in der Station B im Visiren begangen hat, pflanzt sich, wenn man bey C den Meßtisch durchs Zurückvisiren nach B einrichtet, auf den Gegenstand C, und von da weiter auf D fort, weil man einen beständigen Faden der Vermessung verfolgt. — Allein wenn man die Punkte C, D, nach der Methode des 233. §. entwirft, so pflanzt sich der etwa bey C begangene Fehler nicht auf D fort, ausser nur in dem Falle, wenn man C zu einem neuen Richtpunkte, wie in (I) gebrauchen wollte; so lange man sich aber blos der richtig entworfenen Objecte S, R, M, zu Richtpunkten bedienet, hat man keine Anhäufung der Fehler zu besorgen.

Wenn R, M, S, Gegenstände sind, die man auf eine beträchtliche Weite sehen kann, so wird man vermittelst derselben, eine große, Strecke Landes aufnehmen können, und so erhellet, daß die gewiesene Methode bey Landesvermessungen von vorzüglichem Nutzen ist.

Uebrigens ist es vortheilhaft, anfangs aus der Standlinie AB, so viel Objecte zu Papiere zu bringen, als möglich, weil doch beym Fortgange einer Messung immer einige sich

wie-

wieder aus dem Gesichte verliehren. — Und wenn man aus Besorgniß, daß sich die Fehler anhäufen mögten, sich nicht der bereits entworfenen Stationen, wie C, B, wieder zu neuen Richtpunkten bedienen will, so kann man ja immer eine neue Standlinie messen, und aus ihr Objecte zu fernern Richtpunkten, auf dem Meßtische entwerfen.

Nöthige Erfordernisse bey dieser Messungsart, und Mittel die Magnetnadel zu entbehren.

§. 235. I. Die wichtigste Voraussetzung ist bey dieser Messungsart, wie leicht erhellet, diese: daß die Magnetnadel ihre gehörige Vollkommenheit und Empfindlichkeit habe (§. 120). Denn wenn dieselbe z. E. träge wäre, so würden auf dem Meßtische, welchen man nach einer solchen Nadel richten wollte, die Linien, wie rs, rm (Nor. 3.) nicht den zugehörigen Linien auf dem Felde, RS, RM, parallel werden, und darauf gründet sich doch das wesentliche dieser Methode. — Da nun sowohl wegen dieser Unvollkommenheit der Magnetnadel, als auch durch allerley zufällige Ursachen, gar leicht die wahre Richtung der Magnetnadel geändert wird, auch selbst beym Forttragen der dioptrischen Regel von einer Station zur andern, wenn man nicht sehr vor-

sich-

sichtig zu Werke gehet, gar leicht der Stift, auf dem sich die Nadel drehet, etwas schadhaft werden kann, so sind in so ferne, bey dieser Methode, freylich auch Unbequemlichkeiten und Irrthümer zu besorgen, die insgesammt wegfallen würden, wenn man Mittel hätte, die Magnetnadel völlig zu entbehren.

II. Dieses Mittel wäre nun selbst dasjenige, welches wir oben bey Gelegenheit der Branderischen Auflösung der Aufgabe des 187. Ses beygebracht haben. Nur kann man vermittelst dieser Aufgabe, eine ganze Figur, nicht sogleich auf dem Meßtische selbst in ihrem Zusammenhange erhalten, sondern man muß ein anderes mit Papier überspanntes Reisbrett mit sich führen, wo man die jedesmahl einzeln auf dem Meßtische bestimmten Punkte, von dem Meßtische abträgt, und sie in gehörige Verbindung mit den übrigen bringt.

Die Art, dieses zu bewerkstelligen, ist kurz diese.

III. Es stelle Q, Ffg. LXXVI. ein Reisbrett vor. — So bald nun aus der Standlinie AB, die Objecte S, R, M, durch s, r, m auf dem Meßtische entworfen worden, so trage man die auf dem Meßtische bey Nro. 2. befindliche Standlinie ab, auf das Reisbrett Q, fasse hierauf von dem Meßtische die Weiten am, bm, und bestimme, mit denselben auf dem Reisbrette Q, den Punkt m, indem man mit am, bm, aus den Punkten a, b, ein paar sich bey m durchschneidende Kreisbogen beschreibt; auf gleiche Weise werden die Punkte s, r, von dem Meßtische auf das Reisbrett Q getragen.

Nun begebe man sich mit dem Meßtische und Reisbrette nach der Station Nro. 3; und ohne sich um etwas weiter zu bekümmern, ziehe man aus einem willkührlich auf dem Meßtische angenommenen Punkt c, nach S, R, M, Richtungslinien cv, cp, cq; fasse nun mit einem dreyfüßigten Zirkel von dem Reisbrette das Dreyeck srm, und trage es nach der Branderischen Methode §. 187. auf den Meßtisch Nro. 3. dergestalt, daß jeder Punkt s, r, m, auf die den Objecten S, R, M entsprechende Richtungslinie cv, cp, cq zu liegen komme, so wird die Lage des Punktes c, gegen s, r, m, vollkommen bestimmt seyn, wenn man die Bemerkung (§. 188. IV. 12.) dabey nicht vergißt. Man fasse nun von dem Meßtische Nro. 3, zwey solchergestalt bestimmte Entfernungen sc, mc, und beschreibe damit, aus den zugehörigen Punkten s, m, auf dem Reisbrette Q, ein paar sich bey c durchschneidende Kreisbogen, so hat man den Punkt c von dem Meßtische, auf das Reisbrett getragen, und c auf dem Reisbrette,

wird

wird dadurch auch zugleich seine richtige Lage gegen die Standlinie ab, bekommen. Nachdem auf eben die Art bey Nro. 4. aus einem willkührlichen Puncte d, nach den Objecten S, R, M, Richtungslinien gezogen, und auf dieselben, vermittelst des dreyfüßigten Zirkels, die Punkte s, r, m, getragen, und folglich die Weiten sd, rd, md, dadurch bestimmt worden, so beschreibe man wieder z. E. mit md, rd, auf dem Reisbrette, aus den Punkten m, r, ein paar sich bey d durchschneidende Kreisbogen, so wird auf eben die Art d auf dem Reisbrette, nicht allein seine richtige Lage gegen r, s, m, sondern auch gegen die bereits festgelegten Stationen a, b, c erhalten.

Und so erhellet, wie man nach und nach, die Lage aller Punkte S, R, M, A, B, C, D, auf das Reisbrett Q, bringen könne; wenn man gleich bey jeder einzeln Station, auf dem Meßtische nur diese Station für sich, und ohne Verbindung mit den übrigen erhält.

Es ist klar, daß man bey dieser Methode weiter gar keine Richtung und Wendung des Meßtisches vonnöthen hat, als bloß die Horizontalstellung desselben, und daß man dabey allen zufälligen Unrichtigkeiten der Magnetnadel ausweichet. Es scheint zwar das wechselsweise Abtragen, der Richtungspunkte r, s, m von dem Reisbrette auf den Meßtisch, und

dann

dann des bestimmten Punktes, z. E. c, von dem Meßtische auf das Reisbrett, einigermaaßen weitläuftig zu seyn, allein ich kann versichern, daß dieses Verfahren einem einigermaaßen geübten, nicht viel weitläuftiger vorkommen wird, als die Richtung des Meßtisches nach der Magnetnadel, wo doch auch immer einige Zeit verfließet, ehe die Magnetnadel gehörig einspielet, und in Ruhe kömmt. — Auch werden einem geübten leicht verschiedene Vortheile und Vorsichten einfallen, die ich der Kürze halber übergehen muß.

Sollen also Objecte oder Stationen auf dem Felde mit ungleich größerer Richtigkeit zu Papiere gebracht werden, als es vermittelst des Gebrauchs der Magnetnadel geschehen kann, so wird man sich immer lieber der Branderischen Methode bedienen. Indessen, wo die auf dem Meßtische entworfenen Stationen nicht wieder zu neuen Richtpunkten dienen sollen, da ist der Gebrauch der Magnetnadel bequem und zureichend.

Anmerkung.

IV. Man sieht leicht, daß die Aufgabe (§. 233.) von der (§. 229.) im Wesentlichen nicht unterschieden ist, nur daß in (§. 233.) der Parallelismus des Meßtisches, z. E. bey C, mit seinem Stande bey B, vermittelst der

Mag-

Magnetnadel, in §. 229. aber durchs Zurückvisiren nach B erhalten wird.

V. Die Auflösung (§. 233.) ist also auf die Fälle anwendbar, wo kein Zurückvisiren nach B geschehen kann, z. E. wenn zwischen B und C eine Anhöhe, oder sonst ein Hinderniß sich befände; Wenn man alsdann nur S, R, M, sehen kann, so kann jeder Standort wie C festgelegt werden.

VI. Läßt sich indessen von B nach C visiren, so wird man lieber, um sich den zufälligen Fehlern der Magnetnadel nicht auszusetzen, die Auflösung nach §. 229. vornehmen.

VII. Am allgemeinsten bleibt aber immer die Auflösung nach (III), weil hier weder Zurückvisiren noch Magnetnadel nöthig sind, und sie selbst für den Fall angewandt werden kann, wenn die drey Objecte S, R, M gar nicht aus einer Standlinie wie AB aufgenommen wären, sondern ihre Lage gegeneinander, oder die Figur des Triangels SRM sonst irgendwoher als bekannt angenommen würde, z. E. wenn er von einem etwa schon vorhandenen Plane abgenommen würde, oder die drey Seiten desselben unmittelbar gemessen worden wären u. d. gl. Auch könnte diese Auflösung angewandt werden, wenn die Standpunkte A, B, aus welchen S, R, M, festgelegt worden, verloren gegangen wären u. d. gl.

VIII. Auch Hr. Conrector Voigt beschäftigt sich in seinem oben angeführten Buche II. Abschn. II. Kap. §. 77 u. f. mit diesen Aufgaben, und lehrt, wie seine Art, den Meßtisch zu richten, dabey angewandt werden müsse. Was ich oben gegen das Ziehen der Parallellinien bey diesem Verfahren erinnert habe, gielt auch hier. Will man indessen ja den Meßtisch so gebrauchen, daß man allemahl durch Visirlinien aus dem Mittelpunkte, den Parallelismus desselben an jeder Station erhalte, so würde ich, um das Ziehen der vielen Parallellinien nach Hrn. Voigts Methode zu vermeiden, auf folgende Art z. E. die Aufgabe des 229. §es bewerkstelligen (Fig. LXXVI).

1. Bey Nro. 1. würde ich durch den Mittelpunkt n des horizontalgestellten Meßtisches, eine gerade Linie $\lambda\varsigma$, nach der Gegend hinziehen, wo ohngefähr bey Nro. 2. der zweyte Standpunkt des Meßtisches angenommen werden soll, und würde bey Nro. 2. in die Richtung $\lambda\varsigma$ (die hier auf dem Meßtische aber nicht ausgezogen worden ist, damit die gegenwärtige Figur durch zu viel Linien nicht undeutlich werde) bey t einen Stab abstecken lassen.

2. Nun würde ich bey (Nro. 1.) a willkührlich auf dem Meßtische annehmen, aβ mit $\lambda\varsigma$ parallel ziehen, aus a nach den festzu-

legen-

legenden Objecten S, R, M, hinvisiren, und die zugehörigen Visirlinien ziehen.

3. Dann würde ich, vermittelst der Gabel, A auf dem Boden lothrecht unter a bestimmen, hierauf den Meßtisch nach Nro. 2. tragen, so daß sein Mittelpunkt über t (1), und ς λ wieder zurück nach einem bey n eingesteckten Stabe gerichtet sey, so ist nunmehr der Meßtisch bey Nro. 2. parallel mit Nro. 1.

4. Hierauf würde ich bey Nro. 2. in a β, einen zweyten Punkt b, willkührlich annehmen, und aus ihm wieder nach R, M und S visiren, und solchergestalt in s, r, m die Objecte S, R, M, wie gewöhnlich, auf den Meßtisch bringen.

5. Die Standlinie, aus der S, R, M, auf dem Meßtische entworfen worden, wäre also ab; damit diese der wahren AB gemäß werde, (wo B lothrecht unter b (4) bestimmt worden seyn muß) so messe man AB mit der Kette, und verzeichne nach (§. 232. III.) einen verjüngten Maaßstab, nach welchem ab gerade so viel Ruthen, Schuhe ꝛc. fasse, als man für AB mit der Kette gefunden hat, so ist dieß der Maaßstab zu dem Risse.

6. Nun ziehe man über (Nro. 2.), wo ich den Meßtisch noch immer in unverrückter

Lage annehme, nach der Gegend, wo bey Nr. 3. der dritte Standort des Meßtisches angenommen werden soll, eine Linie $\varkappa\rho$ durch den Mittelpunkt des Meßtisches, und lasse in die Verlängerung von $\varkappa\rho$, in τ bey Nro. 3. einen Stab abstecken, bringe hierauf des Meßtisches Mittelpunkt über τ, und richte $\rho\varkappa$ wieder zurück, nach einem in t bey Nro. 2. zurückgelassenen Stabe, so ist nunmehr bey Nro. 3. der Meßtisch wieder parallel mit Nro. 2. Nun legt man an die bereits bestimmten Punkte s, r, m, das Diopterlinial, und visiret nach den zugehörigen Gegenständen, so werden die Visirlinien sich bey c auf dem Meßtische schneiden, und C lothrecht unter c, wird alsdann für den wahren Standpunkt des Meßtisches bey Nro. 3. angenommen.

7. So kann man nun bey allen folgenden Stationen verfahren, wenn nemlich bey jedem Standpunkte nach dem folgenden und vorhergehenden visirt werden kann.

8. Soll bey Nro. 3. der Punkt τ unter dem Mittelpunkte des Meßtisches selbst, und nicht also der in (6) gefundene C, für den wahren Standpunkt angenommen werden, so ist es leicht, auf dem Meßtische einen Punkt zu finden, der gegen s, r, m, eben so liege, als τ gegen S, R, M; Man ziehe aus c (6)

nach

nach dem Mittelpunkte des Meßtisches eine gerade Linie cτ, und trage auf sie nach dem verjüngten Maaßstabe (5) von c nach τ', so viel Zolle, als auf dem Boden die würkliche Entfernung Cτ fasset, so ist τ' auf dem Meßtische der verlangte Standort.

9. Es werden aber τ' und c, immer so nahe zusammenfallen, daß c ohne merklichen Irrthum für τ' angenommen werden kann, und so kann man überhaupt c für jeden andern Punkt unter dem Meßtische annehmen. Es müßte denn der verjüngte Maaßstab so groß seyn, daß Zolle von ihm noch abgetragen werden könnten. Wie übrigens mit τ in (8) verfahren worden ist, kann man mit jedem andern Punkt, den man für den wahren Standort des Meßtisches annehmen wollte, verfahren.

10. Vergleicht man hier gelegentlich das Verfahren (1 — 4), die Objecte R, S, M aus einer Standlinie festzulegen, mit dem obigen (§. 232), so sieht man leicht, daß bey dem letztern die Stationslinie FG, Fig. LXXVII, gleich anfangs abgesteckt, gemessen, und nach einem angenommenen verjüngten Maaßstabe aufgetragen wurde, in (1—4) ist hingegen die wahre Stationslinie AB erst durch Herabfällung eines Lothes von den Punkten a Nro. 1. und b Nro. 2. bestimmt, und

der

der verjüngte Maaßstab berechnet, also nicht willkührlich angenommen worden.

Fehler, welche daher entstehen, wenn man die Richtungen der Magnetnadel, an unterschiedenen Orten, als parallel annimmt.

§. 236. 1. Die Voraussetzung, worauf sich das Verfahren (§. 233.) gründet, nemlich, daß die Richtungen der Magnetnadel völlig genau parallel sind, ist eigentlich nur beynahe wahr, kann aber ohne großen Fehler angenommen werden, sobald die Oerter auf der Erdfläche nicht gar zu weit von einander liegen. Hingegen, je mehr die Oerter auf der Erdfläche von einander entfernt sind, oder vielmehr, je größer der Unterschied ihrer Mittagskreise ist (§. 117. IV.) desto mehr müssen auch die Richtungen der Magnetnadel von der parallelen Lage abweichen. — Wenn daher, an einer gewissen Station, auf dem Meßtische die Richtung der Magnetnadel gezogen worden ist, und man an einer andern, von der erstern ziemlich weit entfernten Station, den Meßtisch nach der darauf gezogenen Richtung wieder stellen wollte, so würde solcher an der letztern Station, nicht mehr, ohne einigen Fehler zu begehen, eine parallele Lage, mit der am ersten Orte gehabten erhalten; —

mit-

mithin würden auch die aus letzterer Station entworfenen Punkte, nicht mehr ihre richtige Lage, gegen die aus der ersten Station des Meßtisches entworfenen Punkte erhalten.

2. Um das bisherige mehr ins Licht zu setzen, und zu zeigen, auf welche Art man, erforderlichen Falles, verfahren müßte, den Fehler zu verbessern, der aus der Voraussetzung, daß die Richtungen der Magnetnadel gleichlaufend sind, herrührte, so wollen wir noch kürzlich folgende Betrachtungen beyfügen.

3. Es seyen Fig. LXXVIII. A, D, zwey Oerter auf der Erdfläche, und Aa, Dd, deren Mittagslinien, die man ohne merklichen Fehler, in einer einzigen Ebene annehmen kann, so lange das Stück Erdfläche zwischen A und D, keine merkliche Krümmung hat.

4. Weil nun die Erfahrung lehret, daß die Declination der Magnetnadel, auch an Oertern, die z. E. 10 und mehrere Meilen von einander liegen, ohne großen Irrthum einerley ist, so werden, wenn $A\mu$, $D\nu$, die Richtungen der Magnetnadel an solchen Oertern vorstellen, die Winkel oder Abweichungen $aA\mu$, $dD\nu$, ohne Irrthum einander gleich seyn.

5. Unter welchen Umständen man also die Mittagslinien Aa, Dd, als parallel ansehen kann, unter eben den Umständen kann man auch, wegen der gleich großen Winkel μAa, νDd, die Richtungen der Magnetnadel Aμ, Dν, als gleichlaufend betrachten. —

6. Diese Umstände sind, wenn A, D, ziemlich nahe neben einander liegen.

7. Nun ist aber aus der Geographie bekannt, und es läßt sich durch eine leichte Rechnung zeigen, daß, wenn der Abstand der beyden Mittagslinien Aa, Dd, nur wenige Meilen beträgt, die Abweichung derselben von der parallelen Lage, schon merklich wird, und dieß rühret daher, weil sich dieselben gegen den Pol zu neigen.

8. Man stelle sich durch D, mit Aμ, Aa, die parallelen Dλ, Dα, vor, so ist klar, daß der kleine Winkel dDα, die Abweichung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, von der parallelen Lage, ausdrücken wird.

9. Auch erhellet, daß, wegen der gleichgroßen Winkel νDd, λDα, der kleine Winkel νDλ = dDα seyn wird, mithin die beyden Richtungen der Magnetnadel Aμ, Dν, von der parallelen Lage so viel abweichen werden,

den, als die beyden Richtungen der Mittagslinien Aa, Dd, davon abweichen.

10. Gesetzt nun, an dem Orte A, sey die Messung einer Gegend angefangen, und auf dem Meßtische daselbst, die Richtung der Magnetnadel $A\mu$ gezogen worden, so wird diese $A\mu$ in die Lage $D\nu$ kommen, wenn man an dem Orte D, die Magnetnadel über der bey A auf dem Meßtische erhaltenen Nordlinie einspielen läßt. — Aber der solchergestalt nach $D\nu$ eingerichtete Meßtisch, wird keinen Parallelismus, mit der bey der Station A gehabten Lage erhalten, weil $D\nu$, nicht mit $A\mu$ gleichlaufend ist. Man müßte eigentlich an $D\nu$, oder an die bey der ersten Station des Meßtisches gezogene Nordlinie, erst den kleinen Winkel $\nu D\lambda$ setzen, der so groß wäre, als der $dD\alpha$, oder als die Neigung der beyden Mittagslinien Aa, Dd, gegeneinander, und müßte alsdann die Magnetnadel über der Linie $D\lambda$ einspielen lassen, um den Meßtisch bey D, mit dessen gehabten Stande bey A, parallel zu stellen.

11. So ließe sich demnach an jedem Orte D gar leicht der correcte Stand des Meßtisches erhalten, wenn man nur den kleinen Winkel $\nu D\lambda$, oder $dD\alpha$ wüßte.

Die-

Diesen in jedem Falle zu berechnen, dient folgendes.

12. Man fälle von D auf die Mittagslinie durch A, eine Perpendiculäre Dδ, und ziehe durch A, AL mit Dδ parallel, so sind Dδ, AL als Stücke von Parallelkreisen anzusehen, in denen die Oerter A, D liegen, und Aδ ist der Abstand dieser Parallelkreise, mithin der Unterschied der Breiten (§. 117. VI.) der Oerter A, D.

Man nenne Aδ = b, Dδ = a; man kann, wie ich hernach zeigen werde, b, a, als gegebene Größen ansehen.

AK, Dδ, sind Stücke von Parallelkreisen, zwischen zweyen Mittagskreisen; weil nun A näher beym Pole, als D angenommen wird, oder weil die geographische Breite von A um Aδ, größer ist, als die geographische Breite von D, so ist aus der Natur der Parallelkreise leicht einzusehen, daß AK kleiner seyn müsse als Dδ, und zwar in dem Verhältnisse, in welchem der Halbmesser des Parallels AK, kleiner ist als der Halbmesser des Parallels Dδ.

Aber aus einer zu dieser Absicht entworfenen Figur läßt sich gar leicht darthun, daß die Halbmesser der Parallelkreise, sich wie die Cosi-

Cosinusse der Breiten verhalten. — Nennt man also die Breite des Orts A = β, mithin die Breite des Orts D = β — b (wo man die Entfernung b (12) in einen Bogen verwandeln muß), so ist.

$$AK : D\delta = \cos\beta : \cos(\beta - b) \text{ also}$$

$$AK = \frac{\cos\beta \,.\, D\delta}{\cos(\beta - b)}.$$

13. Hat man nun, vermittelst dieser Proportion, AK gefunden, so hat man auch den Unterschied $D\delta - AK = AL - AK = KL$, und in dem kleinen rechtwinklichten Drenecke KDL findet man aus der berechneten KL, und der gegebenen LD, oder $A\delta$ (12), gar leicht den kleinen Winkel KDL, also die Abweichung der beyden Mittagslinien Dd, Aa, von der parallelen Lage, mithin auch die Abweichung der Nordlinien $A\mu$, $D\nu$ von der parallelen Lage.

14. Man braucht aber, um bey D den correcten Stand des Meßtisches zu erhalten, den kleinen Winkel KDL nicht würklich zu berechnen, sondern verfährt kurz auf folgende Art. Man nehme auf der Nordlinie $D\nu$ des Orts D, eine Länge $Dr = DL = A\delta$, und setze durch r, auf $D\nu$, eine kleine Perpendiculärlinie ri, so groß, als die berechnete KL,

KL, (13), ziehe durch D und i eine gerade Linie Dλ, so ist auf dem Meßtische diese Dλ diejenige Richtung, über der man die Magnetnadel einspielen lassen muß, um bey D den Meßtisch, mit der bey A gehabten Lage, parallel zu stellen.

15. Wir müssen nun noch zeigen, wie man die in obiger Rechnung gebrauchten Größen, Aδ, Dδ, wenigstens so genau, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist, bestimmen könne.

16. Man stelle sich vor, A, D seyen mit den Oertern A, D der LXXVI. Figur einerley, a, d Fig. LXXVI. Nro. 4., seyen die nach dem 233. §. entworfenen Oerter A, D.

Ob nun zwar gleich die Station d (§. 233. VI.) nicht ihre vollkommen richtige Lage auf dem Meßtische haben wird, weil man bey Nro. 4. den Meßtisch nach der bey Nro. 1. gezogenen Richtung der Magnetnadel $\mu\nu$ eingerichtet hat, mithin der Meßtisch bey Nro. 4. keine vollkommen parallele Lage mit Nro. 1. hatte, so wird doch der Punkt d, so genau auf dem Meßtische Nro. 4. bestimmt seyn, als zu gegenwärtiger Absicht nöthig ist.

Man stelle sich also durch a mit der an dem Orte A gezogenen Nordlinie $\mu\nu$, eine parallele ai vor, (welches bloß deswegen ge-

schie-

schiehet, damit die Nordlinie des Orts A, selbst durch den, den Ort A vorstellenden Punkt a gehe). Man setze an a i die Abweichung der Magnetnadel des Ort A, dergestalt, daß a p die Mittagslinie des Orts a vorstellet. Man fälle nun von d auf a p eine Perpendiculärlinie d o, so werden die Entfernungen a o, d o, auf dem Meßtische, nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen, die Weiten A δ, D δ der LXXVIIIsten Figur so genau, als nöthig ist, ausdrücken.

17. Nur ist nöthig, daß man die gemessene a o, oder A δ, (12) als den Unterschied der geographischen Breiten beyder Oerter A, D, in einen Bogen verwandele.

Dieß geschiehet auf folgende Art:

Weil ein Grad auf dem Mittagskreise Aa, Fig. LXXVIII, nach (§. 117.) 57107,5 pariser Toisen hält, so schliesse man, wie 57107,5 Toisen zu der gemessenen Weite A δ in Toisen, so verhält sich 1 Grad, oder 60 Minuten, zu der Anzahl von Minuten, welche auf die gemessene Weite A δ gehen, und diese gefundene Zahl von Minuten wird alsdenn bey der Berechnung (12) statt des Werthes b gesetzt.

18. Die geographische Breite, oder Polhöhe des Orts A, von dem die Messung angefan-

gefangen wird, muß übrigens auch ohngefähr aus einer guten Landkarte, oder sonst irgend woher bekannt seyn.

19. Es verstehet sich übrigens, daß man auch wissen muß, ob in (14) das Perpendickel ri nach Osten zu, wie hier in der Figur, oder nach Westen zu, an die Nordlinie Dν gesetzt werden müsse; dieß entscheidet sich aber gar leicht daraus, ob der Ort D östlicher oder westlicher als A liegt.

20. Auf diese Art würde es in jedem Falle nicht schwer seyn, die korrecte Stellung Meßtisches zu erhalten.

Im Grunde glaube ich aber immer, daß es unnöthig ist, beym Gebrauche der Magnetnadel, auf die Abweichung derselben von der parallelen Lage zu sehen. — Denn im Ernste wird man doch wohl nicht mit dem Meßtische, sich so weit von dem ersten Standorte A, wo man auf demselben die Richtung der Magnetnadel gezogen hatte, entfernen, daß es nöthig seyn sollte, die im gegenwärtigen §. betrachteten Correctionen in Erwägung zu ziehen, da ohnedem aus andern Ursachen der bloße Gebrauch der Magnetnadel zu größern Fehlern Gelegenheit geben kann, als diejenigen sind, die etwa aus den parallel angenommenen Richtungen der Magnetnadel zu befürchten

ten stehen. Es ist also am besten, daß man die an einer gewissen Station auf dem Meßtische gezogene Richtung der Magnetnadel nicht länger gebraucht, als es ohne einen merklichen Fehler zu begehen, verstattet ist, d. h. daß man sich von der ersten Station etwa nicht weiter, als höchstens um eine Meile entfernet, und alsdann, statt daß man an jedem über diese Gränze hinausliegenden Orte eine Correction nach (14) vornehmen müßte, lieber eine neue Standlinie annimmt, an ihr eine neue Richtung der Magnetnadel ziehet, und vermittelst derselben die Messung weiter fortsetzt. Auf solche Art kann man theils die Rechnungen ersparen, die man sonst nach (15) vornehmen müßte, theils hat man sich auch mehrere Richtigkeit zu versprechen, als wenn man sich nur an eine einzige Standlinie binden, und der an ihr gezogenen Richtung der Magnetnadel auf eine große Strecke bedienen wollte.

Uebrigens werde ich in der Folge mit mehrem erwähnen, unter welchen Umständen man sich des bisher gelehrten Gebrauchs der Magnetnadel vorzüglich zu bedienen habe.

21. Den Gebrauch der Magnetnadel zur topographischen Aufnahme eines Landes, hat vorzüglich Hr. Obr. Hogreve in seiner **Anweisung zur topographischen Vermes-**

messung eines Landes, bekannt gemacht, und durch gut gewählte Beyspiele erläutert. — Er hat in dieser nützlichen Schrift eine gute Probe seiner nicht gemeinen Einsichten in die ausübende Geometrie abgelegt, und auch auf die bisher erwähnte Correction Rücksicht genommen.

Aufgabe.

§. 237. Eine Figur zu Papiere zu bringen, wenn man sich der beym Gebrauche der Zollmannischen Scheibe gewöhnlichen Methode dazu bedienen will.

Aufl. Um von dieser Methode kurz einen Begriff beyzubringen, so sey Fig. LXXIX. das Viereck ABCD aus dessen Umfange zu entwerfen.

I. Man bringe den Meßtisch über A, und bestimme auf demselben den Punkt m, der lothrecht über A liegt. Am besten, man stellt den Meßtisch so, daß sein Mittelpunkt über A, und so überhaupt über jeder folgenden Station zu liegen komme. Man lege an m genau das Diopterlinial, visire nach den Objecten B, D, ziehe durch m die dahin gehenden Linien qx, py, und bezeichne dieselben, mit den dabey geschriebenen Zahlen 1, 1; 2, 2.

Man

Man mache auch auf die gezogenen Richtungen 1,1; 2,2; bey x, y, ein paar Merkmahle, um anzudeuten, daß von den gezogenen Richtungen qx, py, es eigentlich die Stücken mx, my, sind, die aus m nach den Objecten D, B, hinlaufen, oder daß die Objecte D, B eigentlich nicht auf den Schenkeln mq, mp, sondern auf denen mx, my liegen; diese Vorschriften beobachte man an jeder folgenden Station.

Nun messe man die Weite AB, die der Richtungslinie 2,2, zugehört, und schreibe sie in ein bey sich zu führendes Protocoll.

II. Man bringe ferner den Meßtisch über B, so, daß der Punkt m (I) über B, und die Linie 2,2, wieder längs BA zu liegen komme, lege hierauf an m wieder das Diopterlinial, visire nach C, die dahin gehende, mit den Zahlen 3,3 zu bemerkende Richtung, und mache auf dieselbe bey v ein Zeichen, nach der Vorschrift (I).

III. Nachdem nun die Weite BC gemessen worden, so bringe man den Meßtisch über C, und verfahre wie in (II) an der Station B, dergestalt, daß vermittelst der mit 4,4, bezeichneten Richtung, der Winkel DCB auf dem Meßtische erhalten werde.

IV. Es erhellet leicht, daß man durch Fortsetzung dieser Arbeit eigentlich jeden Winkel am Umkreise der Figur, auf den Meßtisch an den Punkt m bringt.

Es kömmt nun darauf an, aus den Winkeln auf dem Meßtische, und den gemessenen Seiten der Figur ABCD, diese Figur vollkommen auszuzeichnen.

Dieses geschiehet am bequemsten auf folgende Art.

V. Man schneide das Papier behutsam von dem Meßtische herunter, und klebe es etwa an vier Stellen sorgfältig mit Mundleim, auf das Blatt Papier Q, worauf die Figur ABCD entworfen werden soll, dergestalt, daß das von dem Meßtische abgenommene Papier so straff als möglich, auf das untere Blatt Papier Q zu liegen komme.

a sey nun auf diesem Papiere der Punkt, der den A auf dem Felde vorstellen soll.

VI. Man ziehe durch a mit denen auf dem angeklebten Blatt Papiere befindlichen Richtungen 1,1; 2,2; ein paar Parallellinien ad, ab, nach der (§. 64.) gewiesenen Methode, vermittelst eines Linials und rechtwinklichten Dreyecks; dergestalt aber, daß ad, ab, aus

dem

dem Punkte a nach eben den Richtungen lassen, wie die aus dem Punkte m ausgehenden Stücke mx, my, (I); wozu die auf den Richtungen 1,1; 2,2; bezeichneten Punkte x, y, dienen, so ist der Winkel DAB auf dem Felde, durch dab auf dem Risse entworfen, oder DAB = dab;

Anm. Hr. Voigt (neueste Vers. zur pract. Geometrie S. 297.) hält diese Merkmahle oder Strichelchen x, y, auf den gezogenen Richtungen 1,1; 2,2; u. s. w. für überflüssig, und meint S. 199, wer so grob fehlen könnte, beym Einrichten der Mensel z. E. über B, diejenige Hälfte der Linie 1,1, wo x steht, mit derjenigen, wo q steht, zu verwechseln (und also auch beym Abschieben dieser Linien auf das Blatt Papier bey Q, diesen Fehler zu begehen), der verdiene nicht ein mathematisches Instrument in die Hände zu nehmen.

Daß aus dem Unterlassen dieser Vorsicht, Irrthümer, zumahl beym Auftragen zu Hause, entstanden sind, davon könnte ich Beyspiele anführen. — Es ist aber ohnehin klar, daß, wenn ich z. E. beym Abschieben der Linie 2,2 auf das Blatt Papier bey Q, vermittelst des Parallelinials, nicht weiß, ob ich die Parallele mit 2,2 von a nach b, oder von a nach β ziehen soll, ich immer in Gefahr stehe, statt des wahren Winkels dab, seinen Nebenwinkel daβ zu erhalten. Die Gefahr dieser Verwechslung ist desto größer, je mehr Winkel rechts und links nach allen Gegenden aufgenommen worden sind, wie z. E. bey Gränzvermessungen der Fall ist. Hier muß ich nothwendig wissen, nach welcher Richtung ich die Parallelen mit den auf dem Tischblatte erhaltenen Visirlinien ziehen soll, und die Vorsicht, dies durch die Zeichen wie x, y, u. s. w. angegeben zu haben, wird daher bey genauerer Betrachtung wohl nicht für überflüssig gehalten werden.

VII. Die gemessene Weite AB (I) trage man auf den mit 2,2, parallel gezogenen Schenkel des Winkels dab, von a nach b;

Hierauf ziehe man mit 3,3, durch b eine Parallele bc, nach der Richtung, nach welcher der auf 3,3; bezeichnete Punkt (II) es ausweißt, so hat man den Winkel ABC auf dem Felde, durch abc auf dem Papiere.

Nachdem man endlich die gemessene Weite BC von b nach c getragen, und durch c, mit 4,4, nach der bisherigen Vorschrift eine Parallele gezogen, so erhält man auf dem Papiere die Figur abcd, welche der ABCD auf dem Felde ähnlich seyn wird.

VIII.

VIII. So unterscheidet sich dieses Verfahren von dem (§. 222.) durch weiter gar nichts, als daß man zu Hause erst die Figur zu Papiere bringt, anstatt daß man sie dorten unmittelbar auf dem Meßtische erhielt.

IX. Es ist die Bequemlichkeit dabey, daß man zu Hause die Figur nach einem ziemlich großen, und der Absicht gemäßen Maaßstabe verzeichnen kann, anstatt daß man, wenn die Figur sogleich auf den Meßtisch kommen soll, oft genöthigt ist, einen sehr kleinen Maaßstab anzunehmen, wenn nicht Punkte ausserhalb des Meßtisches fallen sollen.

X. Wenn der Punkt m ohngefähr in der Mitte des Meßtisches angenommen wird (I), so erhalten die an m gezeichneten Winkel, ziemlich lange Schenkel, welches allemahl der Richtigkeit im Abschieben der Parallellinien 1,1; 2,2; u. s. w. vortheilhaft ist.

XI. Wenn es der Raum auf dem Papiere Q, welches eigentlich auf einem großen Reisbrette aufgezogen seyn muß, nicht verstattet, das ganze Papier von dem Meßtische auf dies Reißbrett zu kleben, so kann man nur ein Stück von dem Papiere des Meßtisches, das man aus der Mitte m, von etwa 5 Zollen im Durchmesser, ausschneidet, auf das Reißbrett Q kleben, und an einer schicklichen Stelle

bese=

befestigen. Man muß aber dabey sorgfältig seyn, daß die an die Schenkel geschriebenen Zahlen und Zeichen nicht verlohren gehen.

XII. Das geschickte und fertige Abschieben der Linien von dem aufgeklebtem Blatt Papiere, an die Winkelpunkte der zu entwerfenden Figur abcd, erfordert einige Uebung und Aufmerksamkeit, wenn man dabey nicht irren will.

Uebrigens müssen das Dreyeck und Linial, womit die Parallellinien abgeschoben werden, ziemlich groß seyn, wenn die Arbeit geschwind von statten gehen soll.

XIII. Das Verfahren in dieser Aufgabe ist völlig dasjenige, dessen man sich beym Gebrauche der sogenannten Zollmannischen Meßscheibe bedient; und da die runde Gestalt der Scheibe dabey nichts ändert, so habe ich gezeigt, wie der bloße Meßtisch zu eben der Absicht diene. — Ich glaube aber, daß der Meßtisch weit geschickter dazu ist, weil sich das Papier ungleich fester und besser auf demselben aufziehen läßt, als auf einer runden Scheibe.

XIV. Uebrigens ist es mir sehr gleichgültig, daß, wie Hr. Voigt a. a. O. S. 235. erwähnt, schon in Schwenters practischer

scher Geometrie die Aufgabe, statt der runden Scheibe den Meßtisch zu gebrauchen, als eine vortrefliche Erfindung des Mathematikers Prätorius angeführt wird. Die Sache ist von einer viel zu geringen Erheblichkeit, als daß ich diese Erfindung nicht gerne einem jeden andern überlassen will. Aber wie? wenn ich nun auch sagte, daß Alles, was Hr. Voigt im II. Kapitel des II. Abschnitts seines Buchs lehrt, im wesentlichen weiter nichts, als das gewöhnliche Verfahren mit der Zollmannischen Scheibe ist, nur mit dem Unterschiede, daß Hr. V. die Parallelen mit den gezogenen Richtungslinien, gleich auf dem Meßtische zieht, Zollmann hingegen sie erst zu Hause auf ein besonderes Blatt Papier abschiebt — dann mögte das Neue, was sich Hr. V. vorgetragen zu haben anmaßt — doch wohl auch so neu nicht seyn.

XV. Was sonst noch die Scheibe betrifft, habe ich schon im ersten Theile (§. 116.) beygebracht.

Wie man die Aufgaben des 220., 222. und 231. §. vermittelst des Astrolabii auflösen könne.

§. 238. Wenn man die in diesen Aufgaben vorkommenden Winkel mit dem Astrolabio gemes-

gemessen hat, so können dadurch ebenfalls die Figuren zu Hause aufgetragen werden. Die Umstände müssen aber entscheiden, in welchen Fällen der Gebrauch des Meßtisches, oder des Astrolabii zu empfehlen ist. Bequemer lassen sich freylich die Aufgaben, z. E. des 220ten und 222ten §es, vermittelst des Meßtisches auflösen, zumahl wenn eine Messung so beschaffen ist, daß das Astrolabium ein sehr weitläuftiges Diarium, von allerley Dingen, die man bequem auf dem Meßtische aufzeichnen kann, erfordern würde. Allein nicht allemahl verschafft der Meßtisch die nöthige Genauigkeit, zumahl wenn man den verjüngten Maaßstab etwas klein annimmt, um ein grosses Stück Land auf eine einzige Platte bringen zu können. Auch ist das unangenehm, daß das Papier auf dem Meßtische bey etwas feuchter oder neblichter Witterung schlaff wird, welches allemahl der Richtigkeit der darauf vorzunehmenden Operation nachtheilig ist. Fällt daher eine Messung im Frühjahre oder Herbste vor, so sind oft nur wenige Stunden des Tages zum Aufnehmen tauglich, welches die Kosten vermehrt, und das Geschäfte aufhält. Einige z. E. Penther, empfehlen daher, eine etwa $\frac{1}{2}$ Linie-dicke bleyerne Platte in den Meßtisch einzulegen, oder sonst auf ihm zu befestigen, und auf dieser Platte mit der Spitze eines Stiftes zu arbeiten. Nachdem man den Riß zu Hause copirt hat, kann man

das

das Bley mit einem Polierstahle, überfahren, und wieder von neuem darauf zeichnen. Andere wollen das Papier ganz auf den Meßtisch kleistern, andere in den Rand des Meßtisches etwa 1 Zoll breite Marmorplatten einlassen, und auf diesen wenigstens die Verlängerungen von den Hauptvisirlinien bemerken u. d. gl. Aber alle diese Vorschläge haben auch wieder sehr große Unbequemlichkeiten, und man wird es demnach wohl bey dem gewöhnlichen Aufziehen des Papiers bewenden lassen. Ist das Papier, während man es aufzog, nur stark genug angezogen worden, so liegt es, wenn es trocken geworden, so straff an, daß nachher die Witterung sehr feucht seyn müßte, wenn es sich merklich in die Höhe ziehen sollte. Auch wird einiges Papier leichter schlaff, als anderes. Holländisches Regal-Papier am wenigsten. Ueberdem kann sich ja der Feldmesser bey nicht vollkommen günstiger Witterung immer andere Beschäftigungen auf dem Felde machen, und wenn ja die Arbeit dringend ist, unterdessen z. E. Punkte abstecken, Pfähle einschlagen, Linien messen lassen u. d. gl., wodurch denn nachher die mit dem Meßtische vorzunehmende Arbeit desto mehr gefördert wird. Uebrigens dient es zur Vorsicht, ein hinlänglich großes Stück Wachstuch mit sich zu führen, womit man den Meßtisch, wenigstens bey einem schnell einfallenden Regenschauer, bedecken kann. Zu den Unbequemlichkeilichkeiten des Meßtisches rechnet man auch, daß die schickliche Größe des verjüngten Maaßstabes unterweilen schwer zu errathen ist, z. E. bey einem großen, der Figur nach unbekannten Walde, wo man keine Diagonalen wie (§. 227. I) messen kann. Aus allem folgt denn wohl hinlänglich, daß, sobald eine Messung ins Große geht, man mit dem Meßtische auch noch das Astrolabium wird verbinden müssen, damit wenigstens diejenigen Punkte und Linien mit vorzüglicher Genauigkeit bestimmt werden können, an welche sich nachher das kleinere, mit dem Meßtische aufgenommene Detail anschließt. So ist denn auch bey der Aufgabe des 231. §es das Astrolabium in dem Falle unumgänglich nothwendig, wenn man sich derselben zur Entwerfung der Hauptpunkte, oder auch des sogenannten Netzes einer Landschaft bedienen, wenn man z. E. die Lagen, von Dörfern, Städten, u. d. gl. entwerfen will. Bey diesem Geschäfte ist man oft genöthigt, sehr große Standlinien, also weit von einander liegende Standpunkte anzunehmen, damit die Dreyecke, wie FBG, FCG, (Fig. LXXVII.) in deren Winkelpunkten F, C u. s. w. die zu entwerfenden Objecte sich befinden, nicht zu spitz = oder stumpfwinklicht ausfallen. Der Raum des Meßtisches würde dann nicht ausreichen, diese Dreyecke zu fassen, oder man müßte den verjüngten Maaßstab sehr klein annehnehmen, welches wieder andere unangenehme Folgen hätte. Also mißt man die Winkel lieber mit dem Astrolabio, und trägt die Dreyecke zu Hause auf, wo man denn eher die schickliche Größe des verjüngten Maaßstabes auswählen kann. Auch hat die unmittelbare Ausmessung der Winkel, den Vortheil, daß man trigonometrische Rechnung anwenden, und die aufzutragenden Dreyecke aus ihren berechneten Seiten konstruiren kann. Ich werde daher in der nächsten Aufgabe noch einige Bemerkungen, die insbesondere bey der Aufgabe des 231. §es dem Gebrauche des Astrolabii eigen sind, beyfügen.

Aufgabe.

§. 239. Die Aufgabe des 231. §es vermittelst des Astrolabii aufzulösen.

Aufl. Man verfährt mit mehreren Objecten A, B, C, D, E Fig. LXXX. auf eine ähnliche Art, wie in §. 184. mit zwey Objecten verfahren worden ist.

Wenn nemlich F, G, die Standpunkte sind, mithin FG, die Standlinie bezeichnet, aus der die Objecte A, B, u. s. w. entworfen werden sollen, so bringe man den Mittelpunkt des Astrolabiums erstlich über G, stelle es horizontal, und den Index des Vernier auf 0°.

Wende

Wende demnächst das ganze Werkzeug, bis das auf 0° gestellte Fernrohr, genau nach dem Standpunkte F hingerichtet ist.

In dieser Lage befestige man das Werkzeug, lasse es unverrückt, und fange nun an, durch bloße Umdrehung der Alhidadenregel, der Ordnung nach, das Fernrohr nach den Objecten A, E, D, C, B zu richten.

Man bemerke, bey jeder Richtung des Fernrohres, die Anzahl von Graden und Minuten, die der Inder auf dem Rande weiset, und schreibe sowohl den Nahmen der Objecte, als auch die Anzahl von Graden u. s. w. auf, welche man bey jeder Richtung des Fernrohres gefunden hat, völlig so, wie (§. 132.) gezeigt worden ist.

Man zeichne übrigens auch die Nahmen der beyden Stationen G, F auf, und bemerke in dem Diario, daß der Inder des Vernier, bey der Richtung des Fernrohrs nach F, auf 0° gestellet war.

Es verstehet sich: daß während der ganzen Arbeit, die Ebene des Randes, in unverrückter Lage erhalten werden muß, daher man also die Prüfungs- und Versicherungsmethoden des 131. §es VIII. zu beobachten hat.

An

An der Station F verfähret man nun auf dieselbe Art, wie bey der Station G geschehen ist. Man stellet das Werkzeug wieder so, daß das nach G gerichtete Fernrohr abermahls 0° weiset. — Visiret nun nach D, C, B, A, E, und schreibt in dem Diario neben die Nahmen dieser Objecte, die jedem Objecte entsprechende Anzahl von Graden und Minuten;

Die Standlinie FG, kann nun entweder unmittelbar, oder aus einer anderen Standlinie (§. 184.) bestimmt worden seyn.

Um das bisher beygebrachte, und das folgende desto besser zu übersehen, so will ich setzen, in das Verzeichnis seyen die Winkel auf folgende Art eingetragen worden..

Station G		Station F	
Gegenstände	der Index weiset	Gegenstände	der Index weiset
F	0° . 0′	G	0° . 0′
A	24 . 18	D	38 . 21
E	138 . 18	C	63 . 2
D	251 . 40	B	104 . 4
C	288 . 56	A	238 . 10
B	325 . 28	E	342 . 25

In diesem Verzeichnisse, folgen die Gegenstände, nebst dem zugehörigen Stand des Index, der, in der Ordnung auf einander, wie sie nach und nach, bey Umdrehung der Alhidadenregel, in das Fernrohr kommen. Es ist dabey zum vorausgesetzt, daß nach der Einrichtung des §. 99. beschriebenen Winkelmessers, die Gradabtheilungen, von der linken Hand gegen die rechte gezählet werden, und daß an jeder Station die Alhidadenregel so gedrehet wird, daß der Index sich auf dem Rande, nach der Ordnung der Grade fortbewege.

Wenn also z. E. bey G, das nach F gerichtete Fernrohr φf, bey φ auf 0° stehet, so werden die Grade auf dem Rande, nach der Richtung $\varphi d c b f a e \varphi$ gezählet, und wenn folglich das Fernrohr φf nach dieser Richtung gedrehet wird, so werden die Gegenstände, nach folgender Ordnung F, A, E, D, C, B, in dasselbe kommen, und der Index wird bey jeder Richtung des Fernrohrs, die in dem Verzeichnisse angegebenen Grade und Min. weisen.

Auf eben die Art verhält sich die Sache bey der Station F, wo das nach G gerichtete Fernrohr γg, nach der Richtung $\gamma a e d c b \gamma$ gedrehet wird.

Zus. I. Hieraus wird also erhellen, wie man aus den in dem Verzeichnisse angegebenen Datis, die spitzen oder stumpfen Winkel

finden

finden könne, die in den Dreyecken FGD, FCG u. s. w. sich an der Standlinie FG befinden.

Ex. Für das Object D zeigt der Index

an der Station G; $251° . 40'$

an der Station F; $38° . 21'$.

Dies heißt soviel: Anfänglich bey des Fernrohrs φf Richtung nach F, stand der Index bey φ auf $0°$; nachdem nun das Fernrohr nach der Richtung $\varphi c b a \delta$ herumgedrehet worden, und die Richtung δd nach dem Objecte D erhalten hat, so hat der Index des Vernier auf dem Rande, den Bogen $\varphi c b a \delta = 251° . 40'$ durchlaufen. Also ist $360° - 251° . 40' =$ dem Bogen $\delta e \varphi =$ dem Maaße des Winkels $\delta G \varphi$ oder FGD. Also $FGD = 108° . 20'$.

Auf eben die Art stand an der Station F der Index bey γ auf $0°$, das Fernrohr wurde nach der Richtung $\gamma a g d c b$ gedrehet, und nachdem es aus der Richtung γg, in die Richtung $\delta d D$ gebracht worden, so zeigte der Index bey δ, den durchlaufenen Bogen $\gamma \delta = 38° . 21'$, = dem Maaße des Winkels $\gamma F \delta = DFG$.

Sol-

Solchergestalt hätte man also in dem Dreyecke FGD, die Winkel DFG, FGD, an der Standlinie. Auf gleiche Weise ist bey den Dreyecken FCG, FAG u. s. w. zu verfahren.

Zus. II. Es erhellet also, daß in dem obigen Verzeichnisse der Stand des Index nur in dem Falle, sogleich den Winkel geben wird, den an jeder Station, ein Object mit der Standlinie macht, wenn der Index weniger als 180° weiset; zeigt er darüber, so muß man, um den Winkel zu erhalten, die Ergänzung zu 360° nehmen. Also wären für das Object E, die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18′, und 360° — 342° 25′ oder 17° . 35′; wo FGE = 138° 18′; GFE = 17° . 35′;

Zus. III. Wenn man sich bey der Station G einen Beobachter vorstellet, der durchs Fernrohr φf nach der Station F visiret, so liegen diesem Beobachter, die Gegenstände A, E, linker Hand der Standlinie GF. Wenn nun, wie bisher zum vorausgesetzt worden, das Fernrohr nach der Richtung φcbf gedrehet wird, so kommen diejenigen Gegenstände A, E, die sich linker Hand der Standlinie befinden, zuerst in das Fernrohr, und für alle diese Gegenstände, zeigt der Index weniger, als 180°. Für Gegenstände, die rechter Hand der

der Standlinie liegen, wie D, C, B; zeigt der Index über 180°.

Eben so verhält sich die Sache für einen Beobachter, der am Stande F, durchs Fernrohr γg, nach G zurückvisiret. Dem liegen aber alsdann die Gegenstände D, C, B, linker Hand der Standlinie FG, und A, E, rechter Hand deselben.

Zus. IV. Diese Betrachtungen (Zus. III.) dienen, in jedem Falle, aus dem Verzeichnungsregister zu sehen, welche Objecte, in Absicht eines Beobachters, der nach der Richtung GF, oder FG sähe, linker oder rechter Hand der Standlinie FG liegen.

Ex. Für den Punkt E, sind in dem Dreyecke FGE (II. Zus.) die beyden Winkel an der Standlinie 138° 18 und 17°. 35′ gefunden worden. Aber dieses Dreyeck liegt für einen Beobachter, der bey G nach der Richtung GF visirte, linker Hand der Standlinie, weil an der Station G, in dem Verzeichnungsregister, für das Object E, der Stand des Index = 138° 18′ ist, also weniger als 180° beträgt (III. Zus.).

Zus. V. Diese Betrachtungen sind nothwendig, wenn man sich, bey Verzeichnung der Objecte, vermittelst der Dreyecke FGE, FGD

u. s. w. nicht irren will, und alle Objecte A, E, D u. s. w. ihre richtige Lage, sowohl gegen die Standlinie, als auch unter sich, erhalten sollen.

Zus. VI. Nach diesen Vorbereitungen wird es nun nicht schwer seyn, vermittelst der nach (Zus. II.) an der Standlinie FG gefundenen Winkel eines jeden Dreyecks, und der gemessenen Standlinie FG, diese Dreyecke FBG, FCG u. s. w. auf dem Papiere selbst, zu verzeichnen, mithin die Objecte B, C, u. s. w. gehörig zu entwerfen.

Man kann sich, je nachdem man mehr oder weniger genau verfahren will, entweder des Transporteurs bedienen, vermittelst dessen man z. E. für den Gegenstand E die Winkel GFE, FGE, an die Standlinie trägt, oder man sucht aus diesen Winkeln und der Standlinie die Seiten FE, GE, durch Rechnung, und beschreibt vermittelst ihrer das Dreyeck FGE, oder man berechnet aus diesen Größen die Perpendiculärlinien GL, EL, (§. 184. IV. Aufl.) und trägt sie gehörig aufs Papier. Da ich alles hieher gehörige bereits im vorhergehenden, bey Gelegenheit der Aufgabe (§. 184.) aus einander gesetzt habe, so würde ich meinen Lesern beschwerlich fallen, alles dieses noch einmahl zu wiederhohlen. Uebrigens erinnere ich hier nur noch dieses, daß es, um

der

der Einbildungskraft desto mehr zu Hülfe zu kommen, immer vortheilhaft ist, vermittelst der gefundenen Winkel an der Standlinie, nur erst einen rohen Entwurf, von der Lage der Objecte B, C, u. s. w. auf dem Papiere zu verfertigen, und sich allenfalls nur des gemeinen Transporteurs dazu zu bedienen. — Man wird durch dieses Hülfsmittel einen desto deutlichern Begriff von allem erhalten, bey der Berechnung der Seiten, oder Perpendiculärlinien, wie GL, EL, in Absicht ihrer Lage ꝛc. vieles Nachdenken ersparen, und den richtigern Entwurf mit desto leichterer Mühe verfertigen können.

XIX. Kapitel.

Noch einige Anwendungen des bisher beygebrachten, in Ansehung der Methoden, deren man sich bedienen kann, perpendiculäre und parallele Linien auf dem Felde zu ziehen, gerade Linien abzustecken, eine Figur von dem Meßtische auf das Feld abzutragen u. s. w.

Aufgabe I.

§. 240.

Durch einen gegebenen Punkt C, Fig. XXXV; mit einer vorgegebenen Linie AB eine parallele zu ziehen.

Aufl. I. Fall. Wenn man von C nach zwey Punkten A, B dieser Linie hinmessen kann.

Man messe CA, CB bringe den Meßtisch über C, ziehe die Richtungen cm, cn, nach A und B, und nehme auf denselben ca, cb, denen CA, CB gemäß, so wird ab, auf dem Meßtische mit AB parallel seyn; man ziehe mit ab, durch c eine Parallele (§. 64.), lege an dieselbe die dioptrische Regel, so wird man in der Richtung

Richtung der Dioptern, Stäbe, mithin eine gerade Linie oder Verticalebene abstecken lassen können, welche mit der AB parallel seyn wird.

II. Fall. Durch D, Fig. XL, eine parallele mit AB zu ziehen, wenn man von D, nirgends nach AB hinkommen kann.

Man nehme eine willkührliche Standlinie DC an, und verfahre nach §. 184, als wenn man die unzugängliche Weite AB finden wollte.

Weil nun am Ende dieser Operation, die Weite ab bey D auf dem Meßtische, der AB nicht allein gemäß, sondern auch parallel wird (§. 184. Zus. I.), so ziehe man demnächst bey unverrücktem Stande des Meßtisches, durch den lothrecht über D liegenden Punkt d, eine parallele mit ab, lege an dieselbe das Diopterlinial, und lasse in der Richtung der Dioptern, Stäbe abstecken, so wird eine gerade Linie durch sie, mit AB gleichlaufend seyn.

Zus. I. Es erhellet, daß, vermöge der Aufgaben des XV. Kapitels, die Ziehung der Parallellinien auf dem Felde, noch auf unterschiedene andere Arten bewerkstelliget werden kann. — Ich will aber diese Untersuchungen meinen Lesern selbst überlassen. Man kann sich auch oft der Magnetnadel mit Vortheil zu dieser Absicht bedienen.

Zus. II. Wenn man auf ab, Fig. XL, eine Perpendiculärlinie zieht, und hierauf an diese Perpendiculäre das Diopterlinial legt, so kann man in der Richtung dieser Dioptern Stäbe aussetzen lassen, die in einer geraden Linie liegen werden, welche auch auf AB senkrecht stehet: So kann man also auf eine Linie AB auf dem Felde, eine Perpendiculärlinie ziehen, wenn man gleich nicht an diese Linie kommen kann.

Es erhellet, daß man von D aus, auf AB eine Linie wird setzen können, die jeden willkührlichen Winkel mit AB macht, wenn man nur diesen Winkel an ab auf den Meßtisch trägt, und wie beym rechten Winkel verfährt.

Es verstehet sich, daß während der ganzen Arbeit der Meßtisch in unverrückter Lage erhalten werden müsse, damit ab nicht aus der mit AB parallelen Lage komme.

Zus. III. An eine Linie CD, an die man kommen kann, einen beliebigen Winkel CDB zu setzen, so verzeichne man diesen Winkel auf dem Meßtische, so daß cdb = CDB. Bringe d lothrecht über D, und die Richtung dc längst DC, so kann man längst des an db gelegten Diopterlinials hinaus visiren, und in die Richtung db Stäbe abstecken lassen; mithin die gerade Linie DB bestimmen, die mit

CD

CD den gegebenen Winkel CDB macht. Dies Verfahren heißt, einen Winkel auf dem Felde abzustecken, und wird bey der Theilung der Felder gebraucht.

Wie eben dies vermittelst des Astrolabii geschehen könne, bedarf keiner weitläuftigen Erörterung.

Aufgabe. II.

§. 241. Zwischen A und E, Fig. LXXXI, Stäbe in eine gerade Linie abzustecken, wenn man gleich von A nicht nach E hinsehen kann, und sich auch zwischen A und E keine Punkte annehmen lassen, von denen man A oder E sehen kann, wie wenn z. E. zwischen A und E sich ein Wald befände.

Aufl. Wenn man von A gleich nicht in gerader Richtung nach E kommen kann, so wird man doch durch Umwege, wie durch ABCDE vorgestellet ist, nach E kommen können. ABCDE könnte z. B. einen Weg bedeuten, der von A nach E durch den Wald gienge.

Da man sich auf diese Art eine Figur ABCDE gedenken kann, von der die gerade Linie AE eine Seite ist, und da man diese

Figur

Figur, von A nach E, nach der Richtung ABCDE umgehen kann, so bediene man sich der Aufgabe des 222. §., und bringe diese Figur ABCDE zu Papiere, dergestalt, daß die Punkte a, b, c, d, e auf dem Meßtische, die Stationen A, B, C, D, E, vorstellen; da man nun, ohne längst AE würklich visiret zu haben, demohnerachtet die Länge und Lage dieser Linie auf dem Meßtische erhält, wenn man die Punkte A, B, C, D, E, durch a, b, c, d, e, auf dem Papiere entworfen hat, und auf dem Meßtische durch die beyden Punkte a, e, eine gerade Linie ziehet, so erhellet, weil der solchergestalt erhaltene Winkel bae dem BAE gleich ist, daß man nur nöthig habe, den Meßtisch mit der darauf entworfenen Figur abcde wieder über A zu bringen, den Punkt a über A, und die Linie ab längst AB einzurichten; dann wird das auf dem Meßtische längst ae angelegte Diopterlinial die Richtung AE bestimmen, nach der man durch den Wald Stäbe n, m u. s. w. abstecken lassen muß, um von A nach E in gerader Linie hinzukommen.

Es ist klar, daß man, um die gerade Linie durch den Wald verlängern zu können, diejenigen Bäume, oder Büsche auf die die Richtung der Diopteru trifft, niederhauen, oder umbiegen müsse. Wenn nur erst ein paar Stäbe m, n, in die Richtung der Diopteru

abgestecket

abgestecket worden sind, so wird man demnächst die Diopteren nicht mehr nöthig haben, sondern die gerade Richtung A n m, bloß wie gewöhnlich, verlängern können (§. 32.).

So wird z. E. diese Aufgabe gebraucht, wenn von einem Orte A nach einem andern E, eine Allee, oder eine Strasse durch den Wald gehauen werden sollte.

Begreiflich kann aber diese Aufgabe in allen Fällen gebraucht werden, wo von einem Orte nach einem andern, eine gerade Linie abgestecket werden soll, die man auf keinerley Weise nach den gewöhnlichen Arten §. 32. abstecken kann.

Je weniger Umwege man übrigens nöthig hat, von A nach E zu kommen, desto richtiger wird die Arbeit ausfallen; Man sucht daher so wenig Standpunkte, wie B, C u. s. w. anzunehmen, als möglich, damit die Fehler in der Bestimmung des Winkels BAE sich so wenig, als möglich, anhäufen.

Verschiedene Schriftsteller bedienen sich bey dieser Aufgabe auch der Boussole. — Man erhält aber dadurch nicht die nöthige Genauigkeit; (m. s. hievon Böhms Meßkunst auf dem Felde §. 47.).

Auf-

Aufgabe. III.

§. 242. Eine auf dem Meßtische gezeichnete Figur auf dem Felde abzustecken.

Aufl. I. Es sey Fig. LXXII abcde die Figur auf dem Meßtische, die aufs Feld abgetragen werden soll. Man bringe den Meßtisch über die ebene Fläche, auf die man die Figur abstecken will, und nehme innerhalb abcde, einen Punkt o an; an diesen Punkt o lege man die dioptrische Regel, und lasse in den Richtungen oe, od, oc, ob, oa, Stäbe abstecken, die man, um sich demnächst nicht zu irren, mit eben den Nummern bezeichnet, womit man die Eckpunkte e, d, c, b, a bezeichnet haben muß.

Hierauf messe man nach dem verjüngten Maaßstabe, womit man die Figur abcde, aufgetragen hat, die Weiten oe, od, oc, ob, oa, und trage sie nach der Meßkette, nemlich oe, von o nach E, od, von o nach D, u. s. w. in die abgesteckten Richtungen; so wird die Figur EDCBA auf dem Felde, der auf dem Meßtische ähnlich werden.

Aufl. II. Es sey Fig. LXXV. abcdef die Figur auf dem Meßtische, die man auf dem

Felde so abstecken soll, daß die Seite af, an die vorgegebene Linie AF zu liegen komme.

Man richte die Linie af längst AF ein; und lasse, indem man an ab, ac, ad, ae, das Diopterlinial legt, in diesen Richtungen wieder Stäbe abstecken, und mache AB, AC, AD, AE, AF, nach der Meßkette so groß, als ab, ac, ad, ae, af, nach dem verjüngten Maaße sind, so wird die Figur ABCDEF der abcdef ähnlich werden.

Aufl. III. Man siehet leicht, daß man, durch Umkehrung der Aufgabe des 222 §eß, auch eine Figur auf dem Meßtische aus ihrem Umkreise abstecken kann; da aber sowohl diese Aufgabe, als überhaupt das Abstecken der Figuren nach andern Methoden, die sich gar leicht erdenken ließen, eben keine sonderliche Schwürigkeit hat, wenn man nur die im XVIII. Kapitel beygebrachten Vermessungsarten wohl inne hat, so werde ich mich dabey nicht länger aufhalten, und nur noch die Erinnerung beyfügen, daß dieses Abstecken der Figuren vorzüglich bey Feldertheilungen gebraucht wird, bey welchem Geschäfte ein Feldmesser aber alle nöthige Sorgfalt und Vorsicht anwenden muß, die Theilungslinien und Winkel auf dem Meßtische, mit der möglichsten Schärfe abzutragen.

Aufgabe IV.

§. 243. Es sey, Fig. XL, AB eine Weite von bekannter Größe, und CD eine Weite, die man finden soll; zwischen C und D ist ein Hinderniß, daß man von D nach C zwar nicht messen, aber doch hinsehen kann; an die bekannte Länge AB kann man gar nicht kommen; man soll CD finden, vorausgesetzt, daß man nur über C, D den Meßtisch bringen kann.

Aufl. Man verfahre wie in (§. 184.), als wenn man aus der Standlinie CD, die Weite AB finden wollte. Da aber CD nicht gemessen werden kann, so mache man cd Nro. 1. auf dem Meßtische von willkührlicher Länge, z. E. nehme cd tausend Theilen eines gewissen Maaßstabes gleich; nachdem nun der Meßtisch bey Nro. 2. wie gehörig über D gebracht worden, und man auf demselben nach (§. 184.) wieder alle Richtungslinien gezogen hat, so wird die Figur abcd, der ABCD ähnlich, und es sind ab, cd, denen Linien AB, CD proportional; man messe also auf dem Meßtische die Linie ab, nach dem Maaßstabe, nach welchem man hier z. E. cd = 1000 Theilen genommen hat; ich will setzen, man fände nach diesem Maaßstabe ab = 3560 Theilen; wenn nun die bekannte Weite AB = 670 Ruthen

then wäre, so fände man CD nach der Proportion ab : cd = AB : CD oder

$$3560 : 1000 = 670 : CD$$

also CD = 188,2 Ruth.

Diese und ähnliche Aufgaben können beym Feldmessen unterweilen mit Nutzen gebraucht werden.

Wenn man auf dem Meßtische die Weiten ac, cb, u. s. w. nach dem erwähnten tausendtheiligten Maaßstabe misset, so findet man aus den Proportionen

ab : AB = ac : AC; ab : AB = cb : CB u. s. w. auch die Entfernungen wie AC, CB; oder AD, BD.

Aufgabe V.

ABCD u. s. w. (Fig. XCIII. Tab. VII.) stelle z. E. das Ufer eines Flusses vor, längst dessen man mit einem Kahne aus A in B, C, D u. s. w. kommen kann. a, b, c, d u. s. w. sind Gegenstände jenseits des Stromes, und bey A weis man z. E. des Gegenstandes a Weite von A irgendwoher, man soll die Gegenstände a, b, c, d, u. s. w. aufnehmen, und ihrer Lage nach in einen Riß bringen.

Auf-

Auflösung. 1. Man messe in A, B, C, D, u. s. w., wo man mit dem Kahne hinkommen kann, die Winkel, welche hier mit Punkten bezeichnet sind, so kann man erstlich aus Aa, und den Winkeln aAB, aBA (woraus denn auch der Winkel BaA bekannt ist) das Dreyeck AaB zeichnen, und folglich AB bestimmen, an welche man nun weiter die Winkel BAb, ABb absetzt, und das Dreyeck ABb construirt, wodurch denn b seiner Lage nach bestimmt, und die Weite Bb gefunden wird.

2. So wie nun in dem Vierecke ABab, aus Aa, und den gemessenen Winkeln bey A und B, der Punkt b bestimmt worden, so wird auf eine ähnliche Art auch in dem Vierecke BCbc aus Bb (1) und den Winkeln bey B und C, der Punkt c, und hieraus weiter in dem Vierecke CDcd der Punkt d, und so alle folgende bestimmt.

3. Begreiflich können die Weiten Bb, Bc, Cc u. s. w. auch trigonometrisch berechnet, und dadurch die Dreyecke zu Papiere gebracht werden.

4. Ist das Ufer ABCD so beschaffen, daß man bey A, B, C, D u. s. w. würklich aussteigen, und die Winkel mit dem Astrolabio messen kann, so wäre dies wohl am besten. Außerdem aber würde man sich wegen der

Schwan-

Schwankung des Kahnes, wohl eines katoptrisch-dioptrischen Werkzeugs (§. 122 ꝛc.) bedienen müssen, um die Winkel zu messen, weil man solches aus freyer Hand regieren kann, und keines Stativs dazu bedarf.

Anmerkung.

5. Daß diese Aufgabe in der Ausübung sehr häufig vorkommen kann, bedarf wohl keines Beweises. So könnte ABCD u. s. w. auch eine Strasse seyn, längst der man fortreißte, da man denn, so wie man rechts oder links derselben, Gegenstände a, b ꝛc. zu Gesichte bekömmt, dieselben aufnehmen und zu Papiere bringen kann, ohne daß man irgend eine neue Linie zu messen braucht.

6. Diese Aufgabe setzte voraus, daß man bey A nach B, bey C nach B, bey D nach C, kurz bey jedem folgenden Stande, nach dem nächstvorhergehenden, oder von diesem nach jenem visiren konnte.

7. Geht dieses nicht an, so ist die Aufgabe ungleich schwerer aufzulösen. Indessen hat Lambert (Beyträge zur practischen Geom. §. 112.) gezeigt, wie man sie durch Hülfe der Mittagslinien bey A. B, C, D u. s. w. auflösen könne. Ich werde statt deren, die Richtungen der Magnetnadel (in so ferne sie eben-

falls

falls eine Reihe von Parallellinien darstellen) gebrauchen, und außerdem noch eine Voraussetzung machen, nemlich, daß man wenigstens von dem zweyten Standpunkte B nach A (und folglich auch von A nach B) visiren kann. Daß man von C nach B, von D nach C u. s. w. visiren könne, will ich also jetzt nicht annehmen. Unter diesen Umständen wird dennoch die Aufgabe noch immer von sehr ausgebreiteten Nutzen seyn. Denn man wird doch leicht wenigstens ein paar Standpuncte, wie B und A (es könnten auch ein paar andere seyn) finden, wo das Visiren von dem einen zum andern geschehen kann.

Eine analytische Auflösung dieser Aufgabe giebt auch Hr. Prof. Pfleiderer in Tübingen in dem Hindenburgischen Archive der reinen und angewandten Math. X. Heft 1799. S. 190.

Aufgabe VI.

ABCD (Fig. XCIV.) habe also die Bedeutung vorhergehender Aufgabe. In A, B, ꝛc. stellen mn, die parallelen Richtungen der Magnetnadel vor. Man messe, vermittelst der Boussole, in A und B die Winkel, welche die Visirlinien Aa, Bb, Ab, Ba mit mn machen. Auch bey A, (wo ich annehme, daß man nach B visiren könne)

den

den Winkel BAn. In C messe man aber bloß die Winkel, welche die Richtungen Ca, Cc, Cb, und in D die Winkel, welche die Richtungen Db, Dc, Dd, mit der Magnetnadel machen. Man soll hieraus die Punkte A, B, C, D u. s. w. a, b, c, d u. s. w. in einen Riß bringen.

Aufl. 1. Ich will vors erste das Viereck AbaB betrachten.

2. Aus den Abweichungen der Linien Aa, Ba, von der Richtung der Magnetnadel bey A, und B, findet sich erstlich der parallactische Winkel BaA $= \alpha$. In gegenwärtiger Figur ist derselbe, wie sich leicht finden läßt, $=$ aAn $-$ aBn. Eben so ist derselbe bey b aus den bey B, A observirten Abweichungen der Richtungen AB, Bb von der Richtung der Magnetnadel, bekannt, nemlich $\beta =$ bAn $-$ Bbn.

3. Nun ist in dem erwähnten Vierecke auch der Winkel BAa, aus den observirten Winkeln BAn, aAn bekannt, und so sind denn auch in Ansehung der Gegenstände a, b, die parallactischen Winkel bBa, bAa gegeben. Ist nun auch Aa gegeben, so kann aus diesen Datis (2. 3.), wie leicht erhellet, erstlich das ganze Viereck ABab, gezeichnet werden.

4. Nun ergeben sich aus den bey B und C observirten Winkeln aBn, aCn, bBn; bCn; die parallactischen Winkel γ und δ. Hier z. E. wird $\gamma = aBn + aCn$; $\delta = bBn - bCn$.

5. Nachdem also das Viereck AbaB gezeichnet worden, so setze man an aB den gefundenen Winkel γ, und an bB den Winkel δ, so durchschneiden sich aC, bC in dem dritten Standpunkte C, und legen diesen Ort dadurch fest.

6. Setzt man nun an Bb den ebenfalls bekannten Winkel bBc, und nachdem man bC (5) gezogen, an bC den bekannten Winkel bCc, so sieht man leicht, daß sich beyde Linien Bc, Cc nunmehr in dem Punkte c durchschneiden, und diesen dadurch festlegen müssen.

7. Ferner setze man an Cb, den parallactischen Winkel ϵ, und an Cc den parallactischen Winkel η, so ergiebt sich D, und hierauf d, wenn man die parallactischen Winkel cCd, cDd absetzt.

8. So sieht man leicht, wie jeder folgende Punkt E; e u. s. w. sich aus den parallactischen Winkeln construiren läßt.

9. Wie man alles auf trigonometrische Rechnung bringen kann, würde hier zu weitläuftig seyn zu erörtern. Indessen wird sich, die Auf-
lösung

lösung demjenigen, der in der Trigonometrie geübt ist, ohne großes Nachdenken von selbst darbieten.

10. Und so wäre denn eine der schönsten Aufgaben der practischen Geometrie, wie sie Lambert nennt, durch eine sehr leichte Construction aufgelöset, so bald nur einmahl das erste Viereck ABab gezeichnet worden ist.

11. Es ist begreiflich, daß dies Viereck, oder die Lage der vier Punkte A, B, a, b auf sehr viel andere Arten gegeben seyn könnte, als ich oben (2. 3) angenommen habe.

Wenn also z. E. statt des Winkels aAB, in dem Vierecke ABab die Seite AB gegeben wäre, so brauchte man nicht von A nach B visiren zu dürfen, sondern man könnte bloß aus Aa; AB, und den parallactischen Winkeln α, β; μ, ν, das Viereck zeichnen.

12. Lambert nimmt bloß Aa, und die parallactischen Winkel bey A, B, C, D u. s. w. an. Auch hiedurch läßt sich die Auflösung bewerkstelligen, aber sie wird alsdann etwas zusammengesetzt, weswegen ich ausser den parallactischen Winkeln nur in dem ersten Vierecke ABab noch ein Datum angenommen habe, wodurch denn die Auflösung bloß auf eine leichte Construction gebracht wird, und dennoch von einer sehr ausgebreiteten Anwendung bleibt.

13. Der einzige Umstand, wodurch die Genauigkeit bey der Auflösung dieser Aufgabe leiden möchte, ist der Gebrauch der Magnetnadel. Da man vermittelst der Boussole von gewöhnlicher Größe und Einrichtung, einen Winkel wohl nicht genauer, als bis auf 10 Minuten messen, wenigstens für einen solchen Fehler nicht gut stehen kann, auch die Festlegung der folgenden Punkte immer auf die vorhergehenden sich gründet, so sieht man leicht, daß beym Fortgange der Arbeit sich ansehnliche Fehler einschleichen, und anhäufen können, zumahl wenn a, b, c u. s. w. etwas weit weg liegen. Indessen kömmt es oft auf eine so sehr genaue Bestimmung der Oerter nicht an, und da ist denn die Aufgabe immer von sehr großem Nutzen. Begreiflich muß man beym Fortgange der Arbeit, auch auf den Umstand mit Rücksicht nehmen, daß die Richtungen der Magnetnadel nicht in der vollkommensten Strenge Parallellinien sind. Die daher rührenden Correctionen lassen sich aus (§. 236) beurtheilen. Wenn man von einem gewissen Standpunkte, die Messung nicht zu weit ausdehnt, so kann man diese Correctionen beyseite setzen.

14. Sehr oft kann man einen bereits festgelegten Ort, wie z. E. d (7) noch einmahl aus andern Bestimmungen erhalten. Hätte man z. E. auch bey B schon nach d visiren,

und

und den Abweichungswinkel cBD messen können, so würde man diesen an die bereits festgelegte Bc tragen, und solchergestalt durch den Durchschnitt von Cd, Bd, den Ort d noch einmahl bestimmen, folglich den durch Dd, Cd erhaltenen Punkt d berichtigen können.

Hat man auf diese Art an den Standpunkten A, B, C u. s. w. für ein und dasselbe Object mehrere Beobachtungen, woraus es sich festlegen läßt, so findet sich beym Auftragen immer Gelegenheit, die Lage desselben mit hinlänglicher Schärfe anzugeben.

15. Man könnte die Magnetnadel bey dieser Aufgabe völlig entbehren, und sie also mit größerer Schärfe auflösen, wenn man nach a, b, c u. s. w. selbst hinkommen, und die parallactischen Winkel α, γ, β, d, ε, η u. s. w., so wie die ν, μ, ς u. s. w. bey A, B, C u. s. w. vermittelst eines Astrolabii, oder des Werkzeugs (§. 122.) unmittelbar messen könnte. Das hiesse dann: Eine Figur, wie dcba ABC u. s. w. zu Papiere zu bringen, die man zwar umgehen kann, bey der es aber nicht verstattet ist, von jeder vorhergehenden Station zur folgenden, zu visiren, oder zu messen.

Weil also bey dieser Aufgabe der Feldmesser an keine Standpunkte gefesselt ist, bey denen er das Zurückvisiren nach den vorhergehenden nöthig

nöthig hätte, so bedarf es wohl keines Beweises, daß sie als ein sehr vortheilhaftes Hülfsmittel bey Entwerfung der Landschaften gebraucht werden kann.

16. Kann man unterweilen an diesen oder jenen Stationen nach nächst vorhergehenden zurückvisiren, so wird man die Vortheile, die man davon hat, begreiflich nicht vernachlässigen.

17. Man sieht aus dem bisherigen, daß der wesentliche Vortheil, den die Magnetnadel verschafft, darin besteht, daß man durch die Beobachtungen bey A, B, C, D u. s. w. die parallactischen Winkel bey a, b, c, d u. s. w. erhalten kann, die man sonst ohne Hülfe der Magnetnadel unmittelbar messen müßte, und der Grund davon ist der, daß die Richtungen der Magnetnadel, Parallellinien darstellen. — Wo man also dergleichen Parallellinien auf andere Arten erhalten kann, leisten sie eben den Vortheil. So könnten z. E. die Parallellinien wie mn, bey A, B 2c. auch durch Hülfe eines weit entlegenen Gegenstandes erhalten werden. Wenn demnach die Objecte A, B, a, b, C, c u. s. w. nicht gar zu weit von einander liegen, so kann ein sehr weit entlegener Gegenstand, z. E. in der Richtung mn, ebenfalls dienen, nach dem bisherigen Verfahren, die Lage der Objecte A, B, a, b, C, c zu bestimmen.

18. Läge der Gegenstand nicht so weit weg, daß es ohne merklichen Fehler verstattet wäre, die Richtungen m n, an A, B, C u. s. w. für parallel zu halten, so könnte man dennoch sich desselben zur Entwerfung der Objecte bedienen.

19. Gesetzt P, (Fig. XCV.) sey ein solcher Gegenstand, und seine Lage gegen AB bekannt. Man zeichne also BP, AP, unter den gehörigen Winkeln gegen AB, und hierauf an AP den observirten Winkel aAP, an BP den observirten Winkel aBP, so ist a festgelegt. Eben so sey auch b entworfen worden. Begreiflich braucht man also hier nicht von A nach B visiren zu können. Ich nehme nemlich die Figur des Dreyecks BAP sonst irgendwoher als bekannt an.

20. Nun sey C ein dritter Standpunkt, wo man die Abweichungswinkel m, n, so wie bey B die μ, ν gemessen habe, so ist, wenn man Cb sich bis f verlängert gedenkt, und den parallactischen Winkel bey P = y nennet, der Winkel bey f = n + y

aber auch $\delta = \mu + f$ oder $f = \delta - \mu$

demnach $n + y = \delta - \mu$ oder

$$\delta = \mu + n + y.$$

Eben so findet sich wegen $m + \delta = \mu + \nu + \gamma$

$\gamma = m + \delta - \mu - \nu = \mu + n + y + m - \mu - \nu$

oder

oder

$$\gamma = m + n - \nu + y.$$

Wollte man demnach, wie im vorhergehenden, den Standort C dadurch bestimmen, daß man an Ba den Winkel γ, und an Bb den Winkel δ absetzte, und den Durchschnitt der beyden Richtungen aC, bC, bey C bestimmte, so ist klar, daß, weil δ, γ, durch den parallactischen Winkel y gegeben sind, man den Punkt C nicht wird bestimmen können, wenn nicht dieser Winkel y bekannt ist.

In so ferne die Punkte a, b, P gegeben sind, ließe sich nun zwar dieser parallactische Winkel berechnen. Allein die Formel dazu wird zu weitläuftig, als daß sichs zur Ausübung verlohnte, sie hieher zu setzen.

Man kann leichter diesen Winkel durch eine Art von Näherung finden, die ich hier in der Kürze erläutern will.

21. Man nenne den Winkel BCa = x, die bekannte Seite Bb (19) = a; und die gleichfalls bekannte Ba = b, so ist in den Dreyecken BbC, BaC

$$\sin (m + x) : a = \sin \delta : BC$$
$$\sin x : b = \sin \gamma : BC$$

Also

Also aus (20) statt δ und y die dort gefundenen Werthe gesetzt, so wird

$$BC = \frac{a \sin(\mu + n + y)}{\sin(m + x)} = \frac{b \sin(m + n - \nu + y)}{\sin x}$$

Weil nun y immer nur ein sehr kleiner Winkel ist, wenn P weit weg liegt, so kann man y weglassen, und es wird beynahe seyn

$$\frac{a \sin(\mu + n)}{\sin(m + x)} = \frac{b \sin(m + n - \nu)}{\sin x}$$

oder

$$a \sin(\mu + n) \sin x = b \sin(m + n - \nu) \sin(m + x)$$

demnach

$$a \sin(\mu + n) \sin x = b \sin(m + n - \nu) \sin m \cos x + b \sin(m + n - \nu) \cos m \sin x$$

Wenn man diese Gleichung durchaus mit $\sin x$ dividiret, hierauf statt $\frac{\cos x}{\sin x}$ setzt $\cot x$, so findet sich

$$\cot x = \frac{a \sin(\mu + n)}{b \sin(m + n - \nu)} - \cot m.$$

22. Dieß gäbe also den Winkel x, wenn $y = 0$, mithin P unendlich weit entlegen, oder CP mit BP gleichlaufend wäre. Weil aber

aber CP nur beynahe mit BP gleichlaufend ist, so wird auch der gefundene Werth für x nur beynahe richtig seyn.

23. Indessen kann man diesen Werth von x, so wie ihn die Rechnung (21) ergiebt, brauchen, um beynahe den Werth von BC zu finden, und es ist demnach aus (20)

$$\text{beynahe } BC = \frac{b \sin(m + n - \nu)}{\sin x}$$

24. Setzt man nun in dem Dreyecke CBP die Entfernung BP = A ohngefähr als bekannt zum voraus, so hat man

$$CB : \sin y = A : \sin(m + n + x)$$

$$\sin y = \frac{CB \sin(m + n + x)}{A}$$

Dieser Ausdruck giebt demnach einen approximirten Werth für y.

25. Ist dieser gefunden, so kann man ihn gebrauchen, um nunmehr auch x wieder genauer zu finden, als ihn die Rechnung (21) gab.

26. Ich will den approximirten Werth von $y = \lambda$ nennen, und den wahren Werth von $y = \lambda + y'$.

27. Dann wird $\delta = \mu + n + \lambda + y'$
$\gamma = m + n - \nu + \lambda + y'$
so findet sich nun nach einer ähnlichen Rechnung, wie (20 21) für cot x der verbesserte Werth, nemlich

$$\cot x = \frac{a \sin(m + n + \lambda)}{b \sin(m + n - \nu + \lambda)} - \cot m$$

Hieraus dann weiter ein verbesserter Werth für BC (23) und in (24) ein verbesserter für y, und so kann man begreiflich sich dem wahren Werthe von y, so weit man will, nähern. In den meisten Fällen wird es hinreichend seyn, nur die Rechnung bis an (24) anzustellen.

28. Begreiflich lassen sich BC und der Winkel x, so genau, als die Größen nöthig sind, um den Werth von y (24) berechnen zu können, auch durch Zeichnung finden. Man setze an Bb einen Winkel $BbC = \mu + n$, und an Ba einen Winkel $BaC = m + n - \nu$, so ergiebt sich durch den Durchschnitt der beyden Linien bC, aC, der Punkt C, also auch BC, und der Winkel x, den man mit einem Transporteur messen kann, so genau als nöthig ist, um y (24) berechnen zu können. Ist dann y, oder eigentlich der approximirte Werth desselben $= \lambda$ gefunden, so setzt man an Bb den verbesserten Winkel $BbC = \mu + n + \lambda$, und an aB den verbesserten $BaC = m + n - \nu + \lambda$, so findet sich ein verbesserter Punkt C, und

so

so kann man weiter verfahren, um den Punkt C, so genau man will, zu finden.

29. Dies zeigt also, wie man auch Gegenstände, die nicht so weit wegliegen, daß man Linien nach ihnen als parallel ansehen darf, zur bisherigen Aufgabe brauchen kann. Aber freylich ist in Ansehung der Correctionen, die man den zu bestimmenden Punkten, wie C, alsdann geben muß, wohl immer räthlicher, sich bloß der Magnetnadel zu bedienen, so lange man keine anderen bequemen Mittel hat, Parallellinien, wie mn (Fig. XCIV.) an den Standpunkten B, C u. s. w. zu erhalten. Mittagslinien bey B, C u. s. w. zu ziehen, und diese statt der Richtungen der Magnetnadel zu gebrauchen, möchte zwar mehr Richtigkeit verschaffen, allein sie mit der gehörigen Genauigkeit zu ziehen, ist weitläuftig und mühsam, und daher in den wenigsten Fällen anzuwenden.

30. Ueber den Gebrauch der Mittagslinien beym Feldmessen, lehrt übrigens noch mehreres Hr. Lambert in den Abh. d. Churbayerischen Acad. d. Wiss. I. Band II. Theil.

Es ist immer vortheilhaft, wenn ein Feldmesser allerley Hülfsmittel kennt, Oerter auf dem Felde aufzunehmen, und ich glaube daher, daß die Untersuchungen in gegenwärtiger Aufgabe nicht überflüssig seyn werden.

31. Eine andere Aufgabe, wobey Parallellinien auf dem Felde unentbehrlich sind, lehrt Hr. Werner (Königl. preuß. Landmesser): Erfahrungen von dem Gebrauche der Magnetnadeln, und wie vermittelst derselben am füglichsten eine Feldmessung angestellt werden kann. Berlin, 1778. Hr. Hofr. Kästner behandelt sie gleichfalls mit Bemerkungen darüber in der ersten Samml. seiner geometrischen Abhandlungen, 47. Abh. S. 368.

Sie ist folgende.

Aufgabe VII.

In I und H (Fig. XCVII.) kann man nach B und D zwar sehen, aber nicht messen. A und C können in I und H nicht gesehen werden, aber man kann nach A und C hinkommen, und in A und C, nach B und D visiren, aber nicht messen, oder sonst dahin kommen. Die Entfernung der beyden Standpunkte HI ist bekannt. Man soll die Punkte ABCDHI in ihrer richtigen Lage gegen einander bestimmen.

Aufl. Die mit einem Pfeil bemerkten Linien, an I, H, A, C, stellen die parallelen Richtungen der Magnetnadel vor. Die punktirten Linien HA, IC stellen diejenigen vor, nach denen man nicht visiren kann.

Um

Um nun hieraus die Figur aufzutragen, so nimmt man auf dem Papiere einen Punkt I an, zieht durch I die Richtung der Magnetnadel, und setzt an dieselbe die observirten Winkel m, n und m + DIH ab; so bekömmt man die Richtungen ID, IB, IH. Auf IH setzt man das Maaß der Standlinie, so hat man den Punkt H, durch welchen man eine Linie parallel mit der Richtung der Magnetnadel bey I ziehe. An diese Parallele setze man die Winkel μ und ν ab, so erhält man die Richtungen HD, HB, welche mit ID und IB, sich in D und B durchschneiden, und die Punkte D und B festlegen. Aus den Winkeln ν und r ergiebt sich der parallactische Winkel HBA $= \nu \pm r$, je nachdem HB, AB auf einerley Seite der Richtung der Magnetnadel, oder auf verschiedenen Seiten derselben liegen. Diesen parallactischen Winkel HBA setzt man in der gehörigen Lage an HB, so ergiebt sich die Richtung BA, und eben so aus den beobachteten Abweichungswinkeln μ und s, der parallactische Winkel HDA, den man an HD absetzen, und solchergestalt durch die Richtungen DA, AB, den Punkt A festlegen kann. Auf eben die Art kann man die parallactischen Winkel IDC, IBC aus m, n, t, u, berechnen, und an ID, IB abtragen, und solchergestalt den Punkt C festlegen. Begreiflich läßt sich auch alles auf trigonometrische Berechnung bringen, womit ich mich aber hier nicht aufhalten

halten will. Auf andere Arten, als vermittelst der Magnetnadel, würde sich diese Aufgabe nicht auflösen lassen, oder man müßte sonst noch gewisse Dinge, in dem Vierecke ABCD, als bekannt voraussetzen, z. E. etwa ein paar Seiten, wie BC, oder BA. Allein alsdann wäre das nicht die vorgelegte Aufgabe mehr.

Ueber das barometrische Höhenmessen.

Anmerkung zu §. 197.

1. Man hat seit einiger Zeit manches an Hrn. de Luc's Höhenformel (§. 198. II.) zu tadeln gefunden. Um zu beurtheilen, was daran etwa zu verbessern seyn möchte, so will ich hier verschiedenes aus meiner Abhandlung über das Höhenmessen mit dem Barometer (M. s. oben §. 198. I. 6.) dazu gebrauchen.

2. Ich habe in dieser Abhandlung (n° 146) gefunden, daß, wenn durch die ganze Höhe = h einer durch das Barometer zu messenden Luftsäule, die Temperatur überall gleich groß angenommen wird, der Werth von h, in Toisen seyn muß

$$h = \frac{0,895449}{m}(1 + A\,t)\log\text{brigg}\frac{E}{\varepsilon'}$$

wenn E den untern Barometerstand, ε′ den

obern,

obern, t die Temperatur der ganzen Luftsäule h nach Reaumurs Thermometer, A den Bruch $\frac{1}{215}$ (oder noch besser nach meinen Bestimmungen $\frac{1}{213}$) und m die Dichtigkeit der Luft in Vergleichung des Quecksilbers bey 0° Temperatur und einem Barometerstande von 28 paris. Zollen am Orte der Beobachtung bezeichnen.

3. Ich muß erinnern, daß bey dieser Formel auf die abnehmende Schwerkraft von der untern Station zur obern noch keine Rücksicht genommen ist.

4. Da man zufolge dieser Formel an dem Orte der Beobachtung den Werth von m wissen muß, und dieser Werth von m für jede andere geographische Breite des untern Stationsortes eine Abänderung erleidet, in so fern die Schwerkraft vom Aequator nach den Polen hin zunimmt, so will ich erstlich zeigen, wie auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen ist.

5. Hier ist nun klar, daß bey gleicher Temperatur der Luft, der Werth von m unter einer geographischen Breite $= \psi$, größer seyn wird als unter dem Aequator, indem eine 28 Zoll hohe Quecksilbersäule unter dem Aequator einen geringern Luftdruck, als unter der geographischen Breite ψ bezeichnet.

6. Nennt

6. Nennt man die Schwerkraft unter dem Aequator $= 1$, und die Dichtigkeit der Luft bey einem Barometerstande von 28 Zollen und 0 Grad Temperatur unter dem Aequator $= M$, die Schwerkraft unter der geographischen Breite $\psi = g$, so muß seyn

$$M : m = 1 : g$$

7. Und eben so wenn μ die Dichtigkeit der Luft bey $0°$ Temperatur und einem Barometerstande von 28 Zollen unter der geographischen Breite φ woselbst die Schwerkraft $= \gamma$ sey, ausdrückt,

$$M : \mu = 1 : \gamma.$$

8. Also $m : \mu = g : \gamma$ oder

$$m = \frac{g}{\gamma} \cdot \mu.$$

9. Wenn nun β den Bruch 0,005690 bezeichnet, so hat man

$$g = 1 + \beta \sin \psi^2$$
$$\gamma = 1 + \beta \sin \varphi^2$$

Also $\frac{g}{\gamma} = \frac{1 + \beta \sin \psi^2}{1 + \beta \sin \varphi^2}$

wofür, weil β einen sehr kleinen Werth hat, ohne merklichen Fehler

$$\frac{g}{\gamma} = 1 + \beta (\sin \psi^2 - \sin \varphi^2)$$

gesetzt werden kann.

10. Es bedeute μ (7) für den dortigen Barometerstand und Temperatur die Dichtigkeit der Luft unter dem 45sten Grad der geographischen Breite, so ist, für $\varphi = 45^\circ$; $\sin\varphi^2 = \frac{1}{2}$, also

$$\frac{g}{\gamma} = 1 + \beta\,(\sin\psi^2 - \tfrac{1}{2})$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\beta\,(2\sin\psi^2 - 1)$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi.\ (\text{Trig. S. XIII. 22.})$$

11. Demnach für jede andere geographische Breite ψ der Werth von

$$m = \mu\,(1 - \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi).$$

12. Mithin unter der geographischen Br. ψ der Werth von

$$h = \frac{0,895449}{\mu(1 - \frac{1}{2}\beta\cos 2\psi)}(1 + A\,t)\log\frac{E}{\varepsilon},$$

wofür weil β sehr klein ist

$$h = \frac{0,895449}{\mu}(1 + \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi)(1 + A\,t)\log\frac{E}{\varepsilon},$$

gesetzt werden kann.

Somit wäre denn erstlich bey der Höhenformel auf die geographische Breite Rücksicht genommen.

13. Hiebey kann man nun ferner fragen, was soll man unter der Temperatur t der ganzen

zen Luftsäule h nach (1) verstehen, wenn die Wärme von unten nach oben nicht unveränderlich, wie die Formel (1) voraussetzt, sondern, wie gewöhnlich, in der obern Station geringer als unten ist.

14. De Luc und mehrere andere Schriftsteller behaupten, daß es hinlänglich sey, in diesem Falle statt t bloß das arithmetische Mittel zwischen der untern und obern Temperatur zu nehmen. Mit welchem Rechte dies erlaubt sey, ist hier der Ort nicht zu untersuchen. Indessen so lange man sich nur mit Hypothesen über das Gesetz der Wärmeabnahme von unten nach oben begnügen muß, mag die gegebene Vorschrift immer hinlänglich seyn, die nach den in meiner Schrift geführten Rechnungen doch nie viel von der Wahrheit abweichen kann. (Das. 168 ꝛc.)

15. Wenn demnach jetzt t die untere Temperatur und τ die obere bezeichnen, so wäre $\frac{t + \tau}{2}$ das (14) erwähnte arithmetische Mittel, mithin

$$h = B\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\psi)\,(1 + A\,\frac{t + \tau}{2})\log\frac{E}{\varepsilon'}$$

wenn statt des beständigen Coefficienten $\frac{0,895449}{\mu}$ der Buchstabe B gesetzt wird.

16. Die zweyte Frage wäre, welche Zahl man in dem beständigen Coefficienten B, statt der Dichtigkeit der Luft μ (10) zu setzen habe.

17. Setzt man $\psi = 45^\circ$ also $\cos 2\psi = 0$ so wäre die Höhenformel unter dem 45sten Grad der Breite schlechtweg

$$h = B\left(1 + A\frac{t+\tau}{2}\right)\log\frac{E}{\varepsilon'}.$$

18. Aus Vergleichung dieser Formel mit würklich geometrischen Messungen von Berghöhen, welche de Luc in den Schweizergebürgen, also ohngefähr unter dem 45ten Grad der Breite, angestellt hat, ergiebt sich, daß statt des unveränderlichen Coefficienten B sehr nahe die Zahl 9221, statt A aber nicht der Bruch $\frac{1}{213}$ sondern $\frac{1}{198,25}$ gesetzt werden müsse, wenn die nach ihr bestimmten Höhen mit jenen Messungen übereinstimmen sollen, woraus denn, wenn

$$\frac{0,895449}{\mu} = 9221$$

gesetzt wird, $\mu = \frac{1}{10296}$ folgt.

19. Dagegen findet Biot durch unmittelbare Abwiegung der Luft

$\mu =$

$$\mu = \frac{1}{10467}$$

und zwar für Luft welche vollkommen frey von wässerichten Dünsten wäre, welches nun freylich in unserer Atmosphäre nie der Fall ist. (M. s. Gilberts Ann. d. Physik XXVI. B. S. 178.)

Ich will indessen für μ diesen Werth setzen, dann würde der Coefficient B = 9373, also von dem de Luc'schen sehr erheblich verschieden.

20. Aber außerdem, daß erstlich an Biots Bestimmung des Werths von μ bey möglichster Befreyung der Luft von Wasserdünsten, selbst noch manches zu erinnern ist, (M. s. Gilb. Ann. a. a. O. S. 178.) wäre doch die Frage, wie groß man eigentlich μ für eine mit mehr oder weniger Wasserdünsten erfüllte Luft anzusetzen habe.

21. Es versteht sich, daß hiebey nur von solchen Wasserdämpfen die Rede seyn kann, welche sich in vollkommen elastischen Zustande mit der Luft vermischt befinden, und welche bekanntlich durch kein Hygrometer angezeigt werden können.

Die in der Luft befindliche sensible an dem Hygrometer bemerkbare Feuchtheit hat auf

die

die Bestimmung der Dichte der Luft einen kaum bemerkbaren Einfluß, da man weiß, daß ein Cubikfuß Luft im Zustande der äußersten sensiblen Feuchtheit, die das Hygrometer anzeigen kann, kaum 10 - 12 Grane Wassers mehr enthält, als im Zustande der äußersten Trockenheit nach dem Hygrometer. Diese 10 Grane ändern das Verhältniß des specifischen Gewichts der Luft zu dem des Quecksilbers nicht merklich, sie bestehen bloß in wässerichten Theilen von concreter Form, und können eben deßwegen sich an hygrometrische Substanzen anhängen, sie nehmen aber wie Staubtheilchen die in der Luft schwimmen, einen so kleinen Raum in einem Cubikfuße Luft ein, daß sie auf das specifische Gewicht der Luft bey weiten den geringsten Einfluß haben. Selbst wenn sie sich durch die Temperatur in einen elastischen Dunst verwandelten, würden sie für den Fall, daß die Luft schon mit so viel elastischen Dampf erfüllt wäre, als sie zufolge ihrer Temperatur fassen kann, das specifische Gewicht der Luft nicht ändern, denn es würde sich aus der Luft immer wieder ein eben solcher Theil dieses elastischen Dampfes als concreter Dunst abscheiden müssen, weil jede Portion Luft nur eine bestimmte von der Temperatur abhängige Quantität elastischen Dampfes fassen kann, und alles übrige bloß concreter Dunst seyn muß.

22. Hieraus ergiebt sich, daß das Hygrometer bey den Höhenmessungen vermittelst des

Ba-

Barometers, so wie auch bey den Bestimmungen der Dichte der Luft, in so ferne sie durch die Wasserdämpfe modificirt wird, ein ganz unnützes Werkzeug ist. Nur der elastische Dampf, und das ist gerade derjenige den das Hygrometer nicht anzeigt, hat Einfluß auf die Dichte der Luft, weil jeder elastische Dampf eben so viel Luft aus der Stelle treibt, als er dem Raume nach selbst einnimmt. Aber hier ist nun durch Versuche noch nicht genau entschieden, wie groß die Dichtigkeit des mit der Luft vermischten Dampfes für jede Temperatur anzusetzen ist, weil die Versuche über die Dichte des Wasserdampfes bey 80° Temperatur, woraus man denn leicht die Dichte desselben für jede andere Temperatur würde bestimmen können (M. s. hierüber meine Abhandlung in den Comment. recent. Soc. R. Götting. Vol. I. ad an. 1808 - 1811. §. 45 etc.) selbst noch immer zwischen zwey ziemlich von einander abweichenden Angaben schweben. Biot hat bey seinen Versuchen über das specifische Gewicht der Luft zwar auf den Einfluß der Wasserdämpfe Rücksicht genommen, aber gegen sein Verfahren, die Dichtigkeit einer von Wasserdämpfen ganz befreyten Luft zu finden, läßt sich noch manches erinnern, so daß man also bis jetzt seine Bestimmungen noch auf sich beruhen lassen muß. Mit diesen Schwierigkeiten vereinigen sich noch neue, wenn man zugleich in Betrachtung ziehen will, in welchem Verhältniß

niß mit der von unten nach oben abnehmenden Temperatur in der Luftsäule h, sich auch die Dichte des Wasserdampfes ändert, da das Gesetz der Wärmeabnahme von unten nach oben, selbst noch nicht bekannt ist.

Man müßte sich also gleichfalls begnügen die Rechnung nur für die mittlere Temperatur $\frac{t + \tau}{2}$ zu führen, und dann kömmt es noch immer darauf an, ob die Luftsäule h jedesmahl gerade mit so viel Wasserdampf gesättiget ist, als sie zufolge dieser Temperatur fassen kann.

23. Ich habe durch diese Bemerkungen nur zeigen wollen, daß bey allen diesen Untersuchungen noch mehr zu thun ist, als viele, welche die Höhenformel des Hrn. de Luc, oder vielmehr den beständigen Coefficienten B in derselben getadelt haben, sich wohl einbilden, indem sie statt desselben einen bessern angegeben zu haben glauben.

24. La Place und Biot haben eine Formel für das Höhenmessen gegeben, in welcher der beständige Coefficient B, nach Ramonds trigonometrischen Messungen verglichen mit den Resultaten der barometrischen Höhenformel = 9408 angegeben wird. (M. s. Gilb. Ann. d. Physik XXVI B. S. 201.)

25. Zufolge dieses Coefficienten, würde also der Werth von $\mu = \frac{1}{10510}$ noch kleiner als Biots μ in (19) für angeblich vollkommen von Wasserdunst befreyte Luft, wie denn freylich auch seyn müßte, da Wasserdämpfe specifisch leichter als Luft sind, und es begreiflich ist, daß wenn man aus Vergleichung barometrisch bestimmter Höhen mit trigonometrischen, umgekehrt die Dichte der Luft ableiten will, man diese Dichte nie für eine vollkommen von Wasserdunst befreyte Luft erhalten wird, weil sich ein solcher Zustand der Luft nirgend in der Atmosphäre vorfindet.

Man könnte also etwa annehmen, daß Ramonds Coefficient B = 9408, einem gewissen mittlern Zustande der mit der Luft vermischten Wasserdämpfe entspräche, und also einstweilen für den wahren Coefficienten angenommen werden dürfte, bis nähere Untersuchungen noch genauere Bestimmungen für jeden einzeln Fall verstatteten.

26. Hr. de Luc hat seine Coefficienten gleichfalls aus Vergleichung seiner barometrischen Messungen mit geometrischen abgeleitet, und es kömmt also nur darauf an, zu entscheiden, welcher von beyden die genauesten Messungen dabey zum Grunde gelegt hat.

De

De Luc hat seine Höhen meistens durch das Nivelliren bestimmt. Ramond mehr aus trigonometrischen Messungen, welche wegen der Unsicherheit der terrestrischen Refractionen weniger Genauigkeit versprechen. Beyde Naturforscher berufen sich auf die Uebereinstimmung ihrer Formel mit den würklichen Messungen, und beyde haben auch beynahe unter einerley geographischer Breite (Ramond in den Pyrenäen) gemessen. Ohne nähere Untersuchung hat man also keinen Grund den Messungen Ramonds einen Vorzug vor den de Luc'ischen zu ertheilen, und ich halte es daher bis jetzt noch für zu übereilt, über de Luc's Coefficienten B so gerade zu abzusprechen. Vielleicht thut man am besten zwischen de Lucs und Ramonds Coefficienten einstweilen ein arithmetisches Mittel zu nehmen; und also

$$B = \frac{9221 + 9408}{2} = 9314 \text{ zu nehmen.}$$

27. Hr. de Luc hat sich der bequemern Rechnung wegen statt einer Höhenformel wie

$$h = 9221 \left(1 + A \frac{t + \tau}{2} \right) \log \frac{E}{\varepsilon'}$$

worinne $A = \dfrac{1}{198,25}$ einer etwas anderen bedient, so daß statt des unbequemen Coefficienten

ten 9221 ein anderer bequemerer zur Multiplication gebraucht werden kann.

28. Er fand nemlich zufolge seiner Beobachtungen, daß bey einer Temperatur $\frac{t + \tau}{2}$ $= 16\frac{3}{4}° = 16{,}75°$, die Höhe h schlechthin durch $10000 \log \frac{E}{\varepsilon'}$ ausgedrückt werden könne, wie sich auch würklich ergiebt, wenn man $\frac{t + \tau}{2} = 16°{,}75$ in die (27) angeführte Formel substituirt, denn es ist sehr nahe $9221 (1 + A\, 16{,}75) = 10000$, wenn statt A der Bruch $\frac{1}{198{,}25}$ gesetzt wird.

29. Dieser Ausdruck $10000 \log \frac{E}{\varepsilon'}$ ist die bekanntlich von Tob. Mayer zuerst angegebene Höhenformel. Sie gilt aber, wie aus dem angeführten klar ist, nur für eine Temperatur $\frac{t + \tau}{2} = 16{,}75$ wenn man die de Luc'sche (27) in Rücksicht des beständigen Coefficienten für richtig anerkennt.

30. Eine solche Temperatur $\frac{t + \tau}{2}$ für

welche

welche überhaupt eine Höhenformel wie (17)

$$h = B\left(1 + A\frac{t+\tau}{2}\right)\log\frac{E}{\varepsilon'}$$

wie auch die Größen B und A von verschiedenen Naturforschern angenommen werden mögen, sich in die Mayerische Höhe $H = 10000 \log\frac{E}{\varepsilon'}$ verwandelt, pflegt man die Normaltemperatur zu nennen. Ich will diese Temperatur = b nennen.

31. Also soll seyn

$$B(1 + A\,b) = 10000.$$

32. Dies giebt $B = \frac{10000}{1 + A\,.\,b}$

demnach für jede andere Temperatur $\frac{t+\tau}{2}$

$$h = 10000\,.\,\frac{1 + A\frac{t+\tau}{2}}{1 + A\,b}\log\frac{E}{\varepsilon'}$$

Oder welches auf dasselbe hinausläuft

$$h = 10000\left(1 - \frac{A\left(b - \frac{1}{2}(t+\tau)\right)}{1 + A\,b}\right)\log\frac{E}{\varepsilon'}$$

d. h. wenn man der Kürze halber

$$b - \tfrac{1}{2}(t+\tau) = C$$

und

und 10000 (log E — log ε′) = H nennt,

$$h = H - \frac{A\,C}{1 + Ab} \cdot H$$

34. Wird nun nach (18) $A = \frac{1}{198,25}$ und b = 16°,75 so erhält man

$$h = H - \frac{C}{215} H \text{ oder}$$

$$h = H - \frac{16,75 - \frac{t + \tau}{2}}{215} H$$

welches denn die gewöhnliche Form der de Lucischen Regel ist, aus welcher denn auch umgekehrt wieder die obige Formel (27) abgeleitet werden kann.

35. Der Zweck solcher auf eine Normaltemperatur reducirten Formeln, ist, bey der würklichen Berechnung einer Höhe wie h, statt eines so unbequemen Coefficienten wie z. B. der obige 9221 war, den so ungleich bequemeren 10000 gebrauchen zu können, wie in der (34) gefundenen Formel der Fall ist, wo H bloß die Mayerische Höhe 10000 (log E — log ε′) bezeichnet.

36. Wollte man auf eine ähnliche Weise auch die La Placesche Formel mit dem Ramon-

mon-

mondischen Coefficienten nemlich

$$h = 9408\left(1 + A\frac{t+\tau}{2}\right)(\log E - \log \varepsilon')$$

zum Behuf der Rechnung auf eine Normaltemperatur bringen, so hätte man für die dazu gehörige Normaltemperatur, umgekehrt aus

$$(32)\ b = \frac{10000 - B}{B \, . \, A}.$$

37. La Place setzt nicht $A = \frac{1}{213}$; noch auch wie in der de Lucischen Formel $= \frac{1}{198,25}$; sondern glaubt in Rücksicht einer Correction wegen der mit der Luft vermischten Wasserdämpfe am zweckmäßigsten $A = \frac{1}{200}$ $= 0,005$ (Gilb. Ann. a. a. O. S. 201) annehmen zu dürfen, welcher Werth von A nun freylich von dem de Lucischen sehr wenig abweicht. Nimmt man also $B = 9408$, $A = \frac{1}{200}$, so hat man für die Normaltemperatur

$$b = \frac{10000 - 9408}{9408 \, . \, 0,005} = 12^\circ, 59.$$

38. Mithin La Places Formel, auf diese Normaltemperatur reducirt zufolge, (33), wo

wo jetzt $C = 12^\circ, 59 - \frac{t + \tau}{2}$ gesetzt werden muß

$$h = H - \frac{C}{212,59} \cdot H$$

$$= H - \frac{12,59 - \frac{t + \tau}{2}}{212,59} H$$

wo statt 212, 59 auch ohne merklichen Fehler die Zahl 213 oder auch de Lucs 215 gesetzt werden könnte. So würde denn diese Formel sich von der de Luc'ischen bloß in der Normaltemperatur merklich unterscheiden.

39. Für einen Coefficienten B welcher das Mittel zwischen de Lucs und Ramonds wäre, also für B = 9314, (26) und für einen Werth von A, wie ihn meine Bestimmungen gegeben haben (Abh. über das Ausmessen der Wärme §. 121.) würde die Normaltemperatur $= 15^\circ, 68$ und also

$$h = H - \frac{15,68 - \frac{t + \tau}{2}}{228,63} H.$$

40. Man kann unter diesen Formeln (34. 38. 39) wählen zu welcher man das größte Zutrauen hat. Ich will es bey der La Plaçischen

cischen (38) bewenden lassen, um ein Beyspiel von der weitern Berechnungsart zu geben.

41. Hier könnte man nun sogleich für die Werthe von $\frac{C.H}{212,59}$ oder $0,0047\ C.H = K.H$ eine kleine Tabelle berechnen, wenn es ja darum zu thun ist, eine an sich leichte Multiplication durch eine Tabelle noch mehr abkürzen zu wollen. Ob die Abkürzung von Erheblichkeit ist, so bald man für diese oder jene Fälle Proportionaltheile aus einer solchen Tabelle suchen muß, will ich jedem selbst zu beurtheilen überlassen.

In gegenwärtigem Falle brauchte das Täfelchen sich nur bis auf die ganzen Grade in dem Werthe von C zu erstrecken, und nur für eine Höhe H = 1000 Toisen berechnet zu seyn, woraus sich denn leicht auch für andere Werthe von C und H die Resultate ergeben.

Das Täfelchen ist nun folgendes

C	K. H in Toiſ.	C	K H in T.
0°	0,0	16°	75,2
1	4,7	17	79,9
2	9,4	18	84,6
3	14,1	19	89,3
4	18,8	20	94,0
5	23,5	21	98,7
6	28,2	22	103,4
7	32,9	23	108,1
8	37,6	24	112,8
9	42,3	25	117,5
10	47,0	26	122,2
11	51,7	27	126,9
12	56,4	28	131,6
13	61,1	29	136,3
14	65,8	30	141,0
15	70,5	31	145,7

Weiter als bis auf C = 30° iſt es nicht nöthig die Tabelle zu berechnen. Für Zehn und Hunderttheilchen von Graden in dem Werthe von C braucht man eben die Zahlen dieſer Tafel, nur rückt man ſie für die Zehntheilchen von Graden um eine Decimalſtelle, und für die Hunderttheilchen um zwey Decimalſtellen weiter zur Rechten.

Wäre z. B. C = 3°, 34 ſo hätte man nach dem Täfelchen

für 3° . . . . 14,1 Toiſ.
0,3 . . . 1,41
0,004 . . . 0,188

Alſo für 3°,34 . . 15,7 beynahe

d. h. für H = 1000 Toiſen und C = 3°,34 wäre K.H = 15,7 T. Alſo für C = 3°,34 und H = 100 T. wäre K.H = 1,57 T. für H = 10 T. wäre KH = 0,157 Toiſ. u. ſ. w. d. h. den für H = 1000 T. gefundenen Werth von K.H rückt man nur immer, der Ordnung nach um eine Decimalſtelle weiter zur Rechten.

Wäre nun z. B. der Werth von K.H für C = 3,34 und H = 1357 Toiſ. zu berechnen, ſo hätte man

für 1000 T; K.H = 15,7 T. = 1.15,7

$$300 \;\ldots\; 4,7 = \frac{3 \cdot 15,7}{10}$$

$$50 \;\ldots\; 0,8 = \frac{5 \cdot 15,7}{100}$$

$$7 \;\ldots\; 0,1 = \frac{7 \cdot 15,7}{1000}$$

Summa K.H = 21,3

Die Hunderttheilchen von Toiſ. läßt man bey der Rechnung überall weg, und was über 5 Hunderttheilchen iſt, kann man für ein Zehntheil nehmen. Bey der würklichen Rechnung braucht man nicht alles was hier ſteht hinzuſchreiben, welches ich nur der Deutlichkeit we-

gen

gen gethan habe. Für die Ausübung ist es übrigens ganz unnöthig dem Täfelchen eine weitere Ausdehnung, als die angeführte zu geben.

42. Die bisherigen Formeln wie (27. 34. 36. 38 - 30) gelten sämmtlich nur für eine geographische Breite $= 45°$. Für eine andere geographische Breite $= \psi$, wird jede der angeführten Formeln nur noch mit $1 + \frac{1}{2} \beta \cos 2 \psi$ (15) multiplicirt.

43. Nun ist aber wegen der abnehmenden Schwerkraft von der untern Station zur obern, auch eine Verbesserung anzubringen. Es müssen nemlich in allen bisher gefundenen Formeln, die Barometerstände E, ε' auf gleiche Schwerkraft reducirt werden, weil man den obern Luftdruck nicht durch eine Quecksilbersäule ε' messen kann, in der das Quecksilber einer andern Schwerkraft als unten ausgesetzt ist, wie doch würklich der Fall ist. Das ε' in der obern Station muß geringer genommen werden, als man es der Beobachtung nach daselbst gefunden hat, wenn das ☿ daselbst eben die Schwerkraft wie unten hätte. Nennt man nun die Schwerkraft in der untern Station $= 1$, so ist diejenige der obern $= \frac{a^2}{(a+h)^2}$, wenn a den Halbmesser der Erde bezeichnet. In dem Verhältniß in welchem $\frac{a^2}{(a+h)^2}$ kleiner als 1 ist, muß die beobachtete

obere Barometerhöhe ε' kleiner genommen werden, um die wegen der Schwere korrigirte Barometerhöhe ε' zu finden, d. h. man muß in

dem Ausdrucke $\log \frac{E}{\varepsilon'}$ oder $\log E - \log \varepsilon'$,

statt ε' setzen $\varepsilon' \frac{a^2}{(a+h)^2}$

Nun ist $\log \frac{\varepsilon' \cdot a^2}{(a+h)^2} = \log \varepsilon' + 2 \log \frac{a}{a+h}$

$$= \log \varepsilon' + 2 \log \frac{1}{1+\frac{h}{a}}.$$

Weil aber $\frac{h}{a}$ immer einen sehr kleinen Bruch vorstellt, so ist ohne merklichen Fehler

$$\frac{1}{1+\frac{h}{a}} = 1 - \frac{h}{a}$$

Also $\log \frac{1}{1+\frac{h}{a}} = \log\left(1 - \frac{h}{a}\right)$

Nun ist aus (Trig. S. XLIV) wenn das dortige $\frac{dx}{x}$ einen sehr kleinen Bruch bezeichnet

log

$$\log\left(1+\frac{dx}{x}\right) \text{ oder } dy = \frac{1}{A}\,\frac{dx}{x}$$

Mithin auch dx negativ gesetzt

$$\log\left(1-\frac{dx}{x}\right) = -\frac{1}{A}\,\frac{dx}{x} \text{ oder}$$

statt $\frac{dx}{x}$ den kleinen Bruch $\frac{h}{a}$, und statt $\frac{1}{A}$ den dortigen Werth 0,43429 für das Briggische System gesetzt

$$\log\left(1-\frac{h}{a}\right) = -0,43429\,\frac{h}{a}$$

Mithin muß statt $\log \varepsilon'$ gesetzt werden $\log \varepsilon' - 2 \cdot 0,43429\,\frac{h}{a}$ oder $\log \varepsilon' - 0,86858\,\frac{h}{a}$.

In allen bisherigen Formeln setzt man also statt $\log \frac{E}{\varepsilon'}$ oder statt $\log E - \log \varepsilon'$ den Werth $\log E - \log \varepsilon' + 0,86858\,\frac{h}{a}$; oder auch $\log \frac{E}{\varepsilon'} + 0,86858\,\frac{h}{a}$.

44. Nehmen wir die ursprüngliche Formel

$$h = B\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\,\psi)\,(1 + A\,\frac{t+\tau}{2}\,\log\frac{E}{\varepsilon'}$$

und

und setzen statt $\log \frac{E}{\varepsilon'}$ den eben gefundenen Werth; so wird die wegen der geographischen Breite, und wegen der von unten nach oben abnehmenden Schwere, verbesserte Höhe $H = B(1+\frac{1}{2}\beta\cos 2\psi)\left(1+A\frac{t+\tau}{2}\right)\left(\log\frac{E}{\varepsilon'}+0{,}86.\frac{h}{a}\right)$

45. Dieß ist völlig die von La Place gegebene Höhenformel, nur daß La Place statt $\log \frac{E}{\varepsilon'}$ den Werth $\left(1+\frac{h}{a}\right)\log\frac{E}{\varepsilon'}$ hat, weil auch die obern Lufttheilchen nicht eben die Schwerkraft wie unten haben. Aber der Bruch $\frac{h}{a}$ ist immer so klein gegen 1, daß die Weglassung desselben auch bey einer Höhe von 3000 Toisen kaum einen Fehler von 2-3 Toisen ausmacht. Ich will ihn einstweilen beyseite setzen, und erst bloß die von mir gefundene Formel betrachten.

46. In dieser können wir bey genauerer Erörterung mehrere unerhebliche Glieder weglassen.

Man müßte nemlich in den gefundenen Ausdruck statt h eigentlich die wahre Höhe selbst setzen. Weil aber $\frac{h}{a}$ ein sehr kleiner Bruch

ist

ist, so ist es vollkommen hinlänglich, dafür nur den unkorrigirten Werth von h aus (16) zu setzen.

47. Man suche also die unkorrigirte Höhe nach der Formel (16) nemlich

$$h = B\left(1 + A\,\frac{t+\tau}{2}\right)\log\frac{E}{\varepsilon},$$

so ist erstlich die korrigirte (44)

$$\mathfrak{H} = B\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi)\,(1 + A\,\frac{t+\tau}{2}\log\frac{E}{\varepsilon'})$$

$$+ B\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi)\,(1 + A\,\frac{t+\tau}{2})\,0{,}86\,.\,\frac{h}{a}.$$

Hier kann man nun in dem zweyten Gliede, ohne merklichen Fehler die auf $\cos 2\psi$ und $\frac{t+\tau}{2}$ sich beziehenden Größen weglassen, denn wenn wir B nach La Place auch zu 9408 annehmen, so ist doch $\frac{9408\,.\,0{,}86858}{a}$ erst $=$ 0,0025, wenn wir für a etwa den Halbmesser der Erde für den 45° Grad der Breite nehmen, mithin a = 3266200. Tois. setzen.

Also wäre auch für eine Höhe h von 3000 Toisen der Werth des zweyten Gliedes erst

$$7{,}5\,(1 + \tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi)\left(1 + A\,\frac{t+\tau}{2}\right)\text{Toisen.}$$

Wäre

Wäre also auch selbst $\cos 2\psi = 1$ und $\frac{t+\tau}{2} = 20°$, so würde wegen $\frac{1}{2}\beta = 0{,}002845$; und $A \,.\, \frac{t+\tau}{2} = \frac{20}{213} = 0{,}094$, durch das Weglassen dieser Glieder nur ohngefähr ein Fehler von $7{,}5(0{,}0028 + 0{,}094)$ Toisen $= 0{,}6$ Toisen, also von noch keiner ganzen Toise entstehen, welches begreiflich bey einer so großen Höhe in keinen Anschlag kommen kann. In den meisten Fällen wird es kaum ein paar Zehntel von Toisen ausmachen.

48. Wir können also für die korrigirte Höhe schlechtweg setzen

$$\mathfrak{H} = (1 + \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\psi)\, h + B \,.\, 0{,}86 \ldots \frac{h}{a}$$

oder für β, B, a die obigen Werthe gesetzt

$$\mathfrak{H} = h + (0{,}0025 + 0{,}002845 \cos 2\psi)\, h.$$

Für einen andern Coefficienten B z. B. den de Luc'schen (18) ändert sich der Ausdruck $\frac{B \,.\, 0{,}86 \ldots}{a}$ um nichts Erhebliches.

49. Bey der Berechnung der unkorrigirten Höhe h in dem Ausdrucke für $\mathfrak{H}$, kann man sich am bequemsten der auf eine Normaltemperatur reducirten Formeln (34. 38. 39.) bedienen.

50. In der darin vorkommenden Mayerischen Höhe $H = 10000 (\log E - \log \varepsilon')$ müssen aber, wie sich von selbst versteht, die Barometerstände E, ε' auf einerley Temperatur, nemlich die obere Barometerhöhe ε' auf die Temperatur der untern E reducirt werden.

Setzt man die untere Temperatur $= \mathfrak{T}$, die obere $= T$, wo $\mathfrak{T}$ und T durch ein an dem Barometer selbst befindliches Thermometer angegeben werden müssen, wenn dieses nicht etwa im Freyen hinge, so muß statt des obern beobachteten Barometerstandes ε' gesetzt werden $\varepsilon' + \frac{\varepsilon'(\mathfrak{T} - T)}{4320}$

$$= \varepsilon'\left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{4320}\right).$$

Dies giebt

$$\left.\begin{array}{l} H = 10000 (\log E' - \log \varepsilon') \\ - 10000 \log\left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{4320}\right) \end{array}\right\} \text{Toisen.}$$

Weil nun aber $\frac{\mathfrak{T} - T}{4320}$ nur ein sehr kleiner Bruch ist, so hat man (43)

$$\log\left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{4320}\right) = 0{,}43429 \, \frac{\mathfrak{T} - T}{4320}$$

$$= 0{,}0001 \, . \, (\mathfrak{T} - T)$$

Also

$$\text{Also } 10000 \log\left(1 + \frac{\mathfrak{T} - T}{4320}\right) = \mathfrak{T} - T.$$

51. Demnach die sehr bequeme Formel

$$H = 10000\,(\log E - \log \varepsilon') - (\mathfrak{T} - T)$$

in Toisen.

Wenn also E, ε' die beobachteten, also unkorrigirten, Barometerstände an beyden Stationen bezeichnen, so muß man die Höhe welche man nach der Formel 10000 ($\log E - \log \varepsilon'$) bekommen würde, nur um so viel Toisen vermindern, als um so viel Grade das obere Thermometer niedriger steht als das untere, so hat man sogleich ohne weitere Rechnung die korrigirte Höhe H, welches ein neuer Vortheil des Gebrauchs der Mayerischen Höhenformel ist.

Ist etwa $\mathfrak{T} - T$ negativ, so wird man jenen Abzug in eine Addition zu verwandeln haben, wie ohne weiteres klar ist.

52. Jetzt wollen wir endlich auch noch den wegen des weggelassenen Bruchs $\frac{h}{a}$ entstehenden Correctionstheil in (45) betrachten.

Man sieht leicht daß dies $\frac{h}{a}$ noch einen Correctionstheil

$$B\left(1+\tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi\right)\left(1+A\frac{t+\tau}{2}\right)\frac{h}{a}\log\frac{E}{e'}$$

$= h\left(1+\tfrac{1}{2}\beta\cos 2\psi\right)\frac{h}{a}$ geben würde (47), wofür man aber ohne merklichen Fehler bloß $\frac{h^2}{a}$ setzen kann, d. h. so viel Toisen als der Ausdruck $0,0000003 \,.\, h^2$ geben würde, wegen $\frac{1}{a} = 0,0000003$. Für $h = 3000$ Toisen, würde dies z. B. erst eine Correction von 2,7 T. geben. Für Höhen unter 1000 Toisen kann dieser Correctionstheil füglich weggelassen werden, da er für 1000 Toisen nur 0,3 einer Toise ausmachen würde.

53. Aus allem Bisherigen ergiebt sich demnach $\mathfrak{H} = h + (0,0025 + 0,002845 \cos 2\psi)\, h$

$$+ 0,0000003 \,.\, h^2 .$$

Mithin folgende Regel für das barometrische Höhenmessen mit Zuziehung aller nöthig seyn sollenden Verbesserungen, wegen der geographischen Breite, und der Abnahme der Schwere von unten nach oben.

Ver-

Verbesserte Regel des barometrischen Höhenmessens.

I. An dem Beobachtungsorte dessen geographische Breite $= \psi$, sey der geradezu beobachtete Barometerstand an der untern Station $= E$ an der obern $= \varepsilon'$.

Das Thermometer am Barometer stehe an der untern Station auf $\mathfrak{T}$ Grade (des Reaum. Th.) in der obern auf T Grade.

Der Thermometerstand in freyer Luft sey in der untern Station $= t$ in der obern $= \tau$.

II. Man berechne nun erstlich die Höhe H nach der Formel

$$H = 10000 \, (\log E - \log \varepsilon') \text{ Toisen}$$
$$- (\mathfrak{T} - T) \text{ Tois.}$$

III. Hieraus die Höhe h nach einer der oben gegebenen Formeln z. B. der auf eine Normaltemperatur reducirten La Place'schen (38).

$$h = H - \frac{12{,}59 - \frac{1}{2}(t + \tau)}{212{,}59} H$$
$$= H - K . H$$

wo der Werth von KH aus dem Täfelchen (46) genommen werden kann. (Für die De Luc'sche Höhe h (34) oder auch diejenige in (39)

würde

würde zur Berechnung des K. H nur ein anderes Täfelchen zuvor berechnet worden seyn müssen, welches ich einem jeden selbst überlassen will.

IV. So hat man endlich die wahre korrigirte Höhe

$$\mathfrak{H} = h + (0{,}0025 + 0{,}002845 \cos 2\,\psi)\,h$$
$$+ 0{,}0000003\,h^2$$

welches ich

$$\mathfrak{H} = h + k\,.\,h + \mathfrak{k}\,.\,h^2$$

nennen will.

V. Das Glied k . h steht für ein gegebenes ψ bloß im Verhältniß der Höhe h, und das Glied $\mathfrak{k}h^2$ im Verhältniß des Quadrats der Höhe.

VI. Das Glied kh kann für eine Höhe h = 1000 Toisen aus folgenden Täfelchen genommen werden.

$\psi =$	k . h in Toiſ.	$\psi =$	k . h in T.
0^0	+ 5,3	50^0	+ 2,0
5	5,2	55	1,6
10	5,1	60	1,1
15	4,9	65	0,7
20	4,6	70	0,4
25	4,3	75	0,1
30	3,9	80	— 0,1
35	3,4	85	— 0,2
40	3,0	90	— 0,3
45	2,5	—	

Das doppelte dreyfache hievon giebt die Werthe von k . h für h = 2000; h = 3000 Toiſen u. ſ. w.

Für die Hunderte und Zehnen von Toiſen nimmt man eben die Werthe wie für die Tauſende, nur mit 10; 100 ꝛc. dividirt.

Z. B. wäre h = 1336 Toiſ. und $\psi = 43^0$ ſo hätte man für

h = 1000 T.; kh = 2,7

$$300 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 0,81 = \frac{3 \cdot 2,7}{10}$$

$$30 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 0,08 = \frac{3 \cdot 2,7}{100}$$

$$6 \;\; . \;\; . \;\; . \;\; 0,01 = \text{u. ſ. w.}$$

Alſo für h = 1336 T.; kh = 3,6 T.

und

und so in andern Fällen, wo man denn manches was hier zur Erklärung der Sache hingeschrieben ist, wegläßt.

VII. Das Glied $k.h^2$ oder $0{,}0000003.h^2$ zu berechnen, braucht man in dem Werthe von h höchstens nur die Tausende und Hunderte von Toisen zu nehmen, wo dann $k.h^2$ geschwinder berechnet ist, als man es fast aus einem Täfelchen nehmen würde. Z. B. für $h = 1336$ Toisen, würde man kh^2 nur für 1300 Toisen zu berechnen nöthig haben. Nun ist $13^2 = 169$ also $1300^2 = 1690000$; dies mit 3 multiplicirt und 7 Decimalstellen abgeschnitten, würde geben $kh^2 = 0{,}5$ T. die kleinern Theile weggelassen.

Soll indessen ja alles Tabellenform erhalten, so kann auch folgendes Täfelchen für die Werthe von $k.h^2$ dienen.

h = 800 Toiſ.	k. h² = 0, 2 Toiſ.
1000	. . 0, 3
1200	. . 0, 4
1400	. . 0, 6
1600	. . 0, 7
1800	. . 0, 9
2000	. . 1, 2
2200	. . 1, 4
2400	. . 1, 7
2600	. . 2, 0
2800	. . 2, 3
3000	. . 2, 7
3200	. . 3, 0
3400	. . 3, 3
3600	. . 3, 8

Für

Für h < 800 Toisen, wird die Correction ohne erheblichen Fehler weggelassen.

VIII. Zur Erläuterung will ich jetzt ein vollständiges Beyspiel der Berechnung geben.

Auf dem Pic de Bigorre in den Pyrenäen für welchen die geographische Breite ohngefähr $\psi = 43^o$ seyn mag, ward beobachtet:

$E = 27'' . 2''', 06$ paris. M. $= 326''', 06$

$\varepsilon' = 19 . 10, 14 \qquad = 238, 14$

$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{T} = 14^o, 9 \text{ Reaum} \\ T = 7,6 \quad — \end{array}\right\}$ also $\mathfrak{T} - T = 7, 3$

$\left.\begin{array}{l} t = 15, 3 \\ \tau = 3, 2 \end{array}\right\}$ also $\dfrac{t + \tau}{2} = 9, 25$

abgez. von $12, 59$ (III)

Nun also $\qquad C = 3, 34.$

$$\begin{aligned} \log E &= 3,5132975 \\ \log \varepsilon' &= 3,3768323 \\ 10000 (\log E - l\varepsilon') &= 1364,652 \text{ Tois.} \\ - (\mathfrak{T} - T) \text{ Tois.} &= 7,3 \\ H &= 1357,3 \\ \text{Correction } K H &= - 21,3 \text{ (s. oben 41.)} \\ \text{Also } h &= 1336,0 \\ \text{addirt } k h &= 3,6 \text{ (s. oben VI.)} \\ . . \ \mathfrak{k} h^2 &= 0,5 \ . \ . \ \text{VII.)} \\ \mathfrak{H} &= 1340,1 \ \mathfrak{T}. \end{aligned}$$

51. Dies wäre also die mit Zuziehung aller Correctionen die barometrisch bestimmte Höhe des Pik de Bigorre über der untern Station zu Tarbes in dem Cabinet des Hrn. Danges. (Vergleichen die Tables barometrigues etc. des Hrn. v. Lindenau. Gotha 1809. S. LX. und Hrn. Oltmanns Rechnung in der Monatl. Correspond. des Hrn. v. Zach. Jun. 1809. S. 591.)

55. Hr. v. Lindenau findet 1339,7 Tois. also beynahe 1340 Tois. ohne die Correctionen k h; u. k h² wegen der geographischen Breite und der abnehmenden Schwerkraft, statt dessen h nur = 1336 Toisen gefunden ward. (53) Dieser Unterschied von der Rechnung des Hrn. v. Lindenau rührt daher, daß er sich eines größern barometrischen Coefficienten B als La Place bedient.

Meine Rechnung mit Zuziehung aller Correctionen stimmt mit derjenigen des Hrn. Oltmanns auf das genaueste überein, wenn ich gleich die Zahl 500 in seiner daselbst angegebenen Formel nicht recht verstehe, wenn t + τ Reaumürsche Grade bedeuten.

56. Man wird übrigens aus dem Gange meiner Rechnung ersehen, daß derjenige, welcher sich der Logarithmentafeln bedient (und mit diesen wird doch wohl leicht jeder versehen seyn,

 welcher

welcher sich mit Messungen von Berghöhen beschäftigt) keiner andern Hülfstäfelchen, als der von mir angegebenen bedarf, welche man sich leicht auf einem Blatte hinter den Logarithmentafeln, zum Behufe des barometrischen Höhenmessens abschreiben kann.

Hr. v. Lindenau, Oltmanns *) u. a. haben statt der Logarithmen-Tafeln eigene Tafeln zum Behuf des barometrischen Höhenmessens berechnet, welche demnach denjenigen empfohlen werden können, welche sich der Logarithmen-Tafeln nicht bedienen, und mit Zuziehung des zu diesen Tafeln gehörigen Textes Alles beysammen haben wollen, was so wohl in Rücksicht der Theorie, als der Ausübung des barometrischen Höhenmessens mit möglichster Abkürzung der Rechnung zu bemerken ist.

Eine andere Berechnungsart durch Hülfe kleiner Täfelchen hat Hr. Prof. u. Ritter Gauß in dem Berliner Astronomischen Jahrbuche 1818 S. 172. mitgetheilt.

Für Höhen unter 1000 Toisen kann man in Gegenden welche über den 50sten Grad der geogra-

*) Tables hypsometriques ou tables auxiliaires pour le Calcul des hauteurs a l'aide du Baromètre d'après la formule de Mr. La Place. à Tubingue chez Cotta.

geographischen Breite hinausliegen, die wegen der Breite und abnehmenden Schwerkraft erforderlichen Correctionen ohne erheblichen Fehler weglassen, und also die Rechnung nur bis zu dem Werthe von h (53) führen, wozu denn also nur das erste Hülfs-Täfelchen (41) erforderlich ist, wenn man nicht unmittelbar nach de Lucs Formel (etwa nur mit der von 16°, 57 auf 12°, 59 verminderten Normaltemperatur) wie (§. 198. II.) rechnen will.

In wie fern aber diese, nach Ramonds beständigen Coefficienten modificirte Normaltemperatur von 12°, 59, der de Lucischen von 16°, 57 vorzuziehen ist, darüber muß nach den Bemerkungen (26 rc.) allerdings erst noch die Folge entscheiden.

Ein erheblicher und nicht durch die Beobachtungsfehler verhüllter Unterschied zwischen den barometrischen Höhenbestimmungen nach de Luc's und La Place's Höhenformel, kann sich nur erst bey Höhen über 200 Toisen offenbaren. Aber schon Höhen von 800 oder 1000 Toisen richtig zu nivelliren oder trigonometrisch, zumahl aus weit von der Höhe entfernten Standpunkten, wie bey so großen Höhen gewöhnlich der Fall ist, richtig zu bestimmen, ist eine mißliche Sache, und doch kann nur durch Hülfe so großer Höhen über die Richtigkeit von de Lucs oder La Places

Formel vollkommen entschieden werden. Es ist daher zu wünschen, daß dergleichen Messungen mit so genauen Werkzeugen als man sie jetzt hat, und mit Zuziehung einer hinlänglich berichtigten Theorie der terrestrischen Refractionen, zumahl auch mit Beyhülfe der von mir (§. 200. XVI.) angedeuteten Methode, bald in Ausführung gebracht werden möchten.

Wie viel ohngefähr der Unterschied zwischen der nach de Luc's und La Place's Formel (letztere ohne die Correction wegen der abnehmenden Schwere ꝛc. genommen) für jede Höhe betragen möchte, ergiebt sich aus folgender Vergleichung.

Nach de Luc ist $h = H\left(1 - \frac{16,75 - \frac{1}{2}(t+\tau)}{215}\right)$

La Place $h' = H\left(1 - \frac{12,59 - \frac{1}{2}(t+\tau)}{213}\right)$

wenn ich die La Placische Formel mit h' bezeichne. Dies giebt ohne merklichen Fehler

$$h' - h = \left(\frac{16,75}{215} - \frac{12,59}{213}\right) H$$

$$= \frac{1}{53}\ H \text{ beynahe}$$

Also

Also ist

$$h' = h + \frac{1}{53} H$$

d. h. zur de Lucischen Höhe addirt man $\frac{1}{53}$ der Mayerischen Höhe (29), so hat man ohne erheblichen Fehler die La Placische. Indem also de Lucs Formel die Höhen ohngefähr um $\frac{1}{53}$ zu klein gegen La Place's angiebt, welches demnach auf 53 Toisen ohngefähr eine T. beträgt, so dürfte sich vielleicht schon durch geringere Höhen als von 200 Toisen, wenn solche nur recht genau nivellirt, und dann zu wiederhohlten mahlen barometrisch bestimmt würden, etwas in Rücksicht der de Luc'ischen Formel entscheiden lassen.

Indessen will doch de Luc wenigstens auf solche Höhen keine erhebliche Abweichung seiner Formel von den nivellirten oder trigonometrisch bestimmten Höhen wahrgenommen haben.

Wollte man aus der de Luc'ischen und La Place'schen Höhenbestimmung ein arithmetisches Mittel nehmen, so könnte man dafür setzen

$$h'' = \frac{h' + h}{2} = h + \frac{1}{106} H$$

d. h.

d. h. die de Luc'ische Höhe + dem 106ten Theile der Mayerischen, welches vielleicht bis zu weiteren Berichtigung der Sache das rathsamste wäre. Es versteht sich, daß nun dieses h'' wenn es erforderlich ist, noch durch die geographische Breite ꝛc. auf eine ähnliche Weise wie oben das h, corrigirt werden müßte.

Druckfehler.

Seite 15. Zeile 8 statt $\frac{c - 1}{\rho}$ ließ $\frac{c^{\varrho} - 1}{\rho}$

= = 63. = = 8 st. dir l. die

= = 296. = = 17 st. §. 1. 3. 9. l. §. 139.

= = 492. = = 11 st. Schefers l. Scherfers.

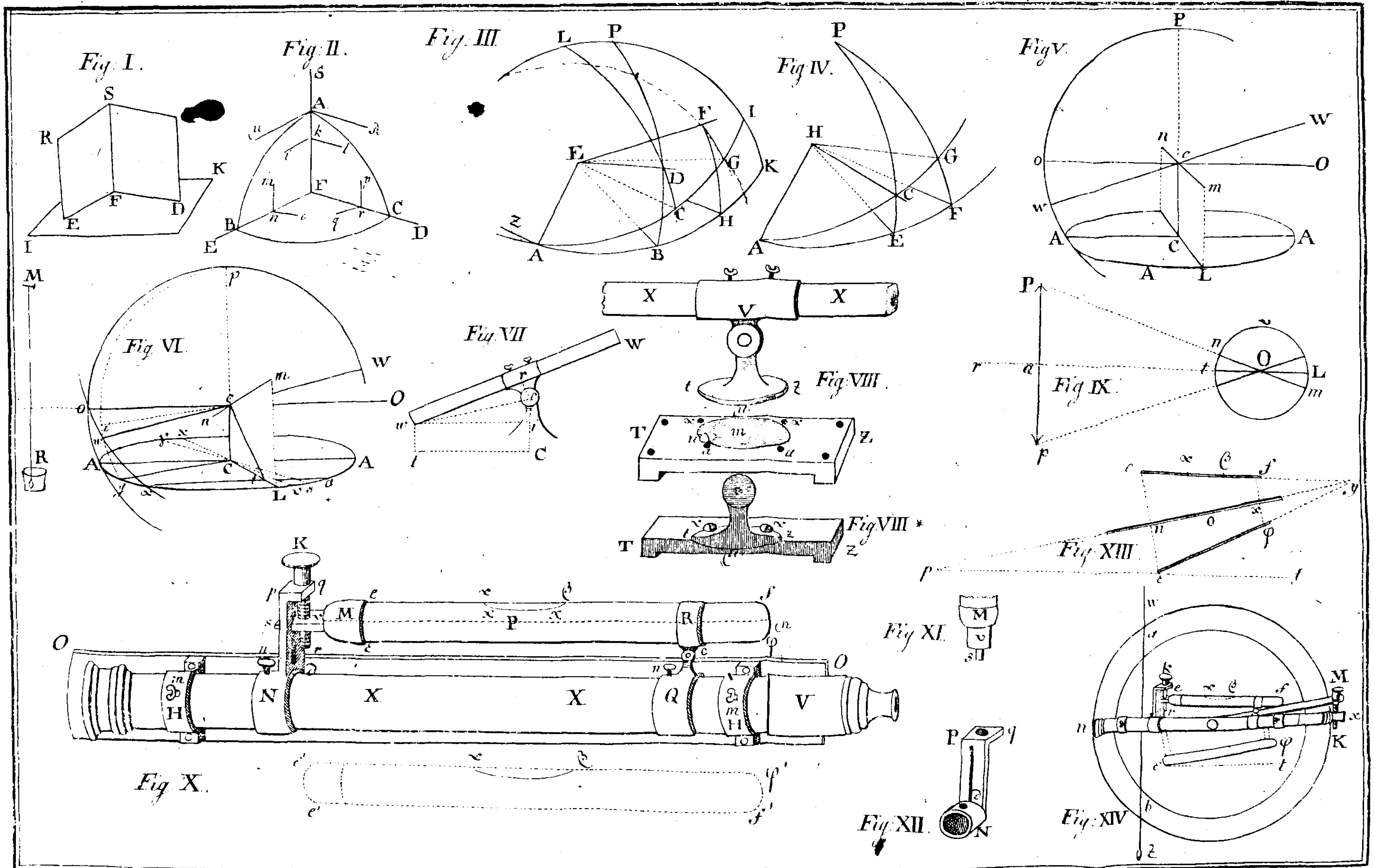
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII
Fig. VIII.
Fig. VIII *
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII
Fig. XIV

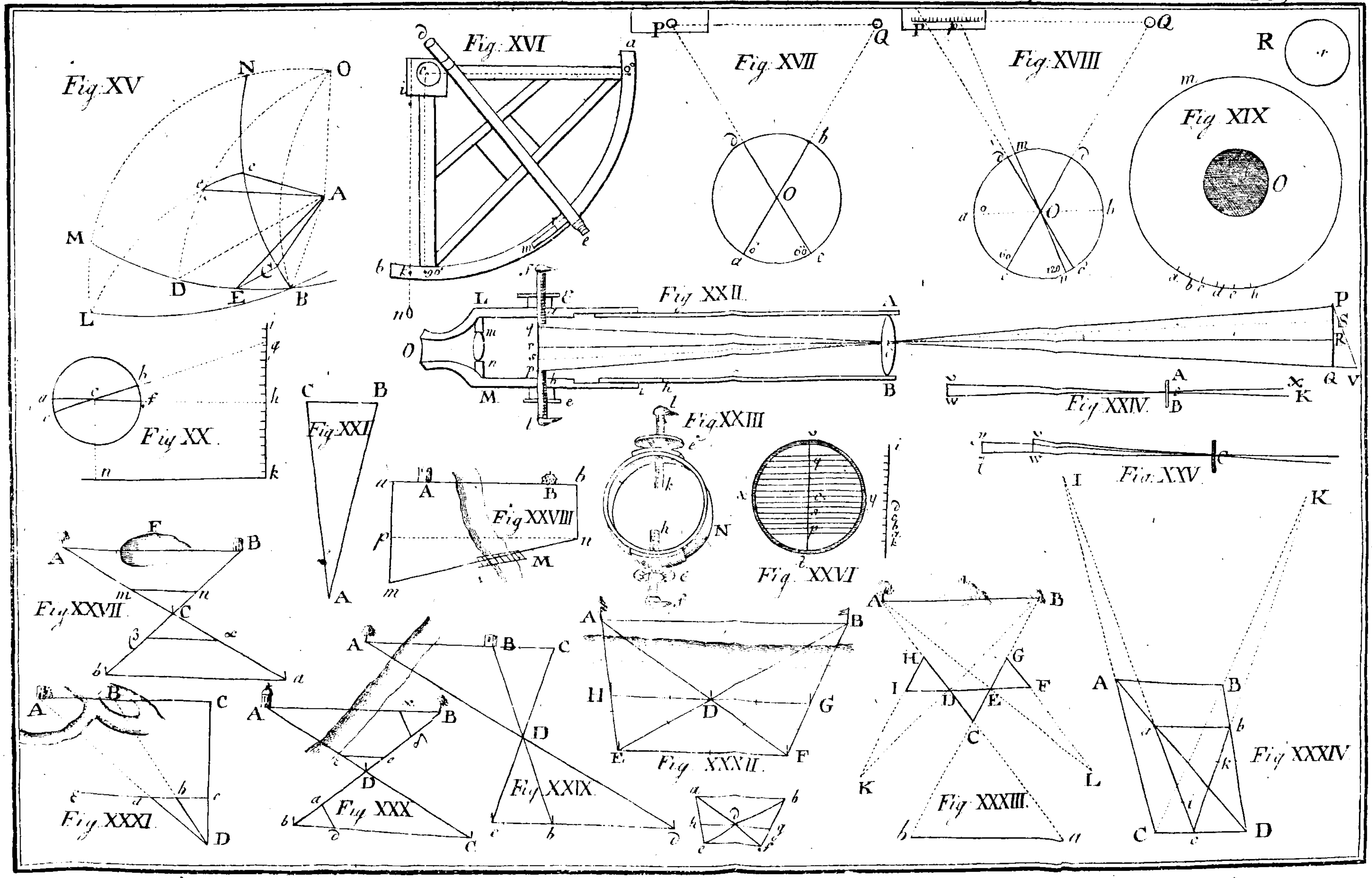
Fig. XV
Fig. XVI
Fig. XVII
Fig. XVIII
Fig. XIX
Fig. XX
Fig. XXI
Fig. XXII
Fig. XXIII
Fig. XXIV
Fig. XXV
Fig. XXVI
Fig. XXVII
Fig. XXVIII
Fig. XXIX
Fig. XXX
Fig. XXXI
Fig. XXXII
Fig. XXXIII
Fig. XXXIV

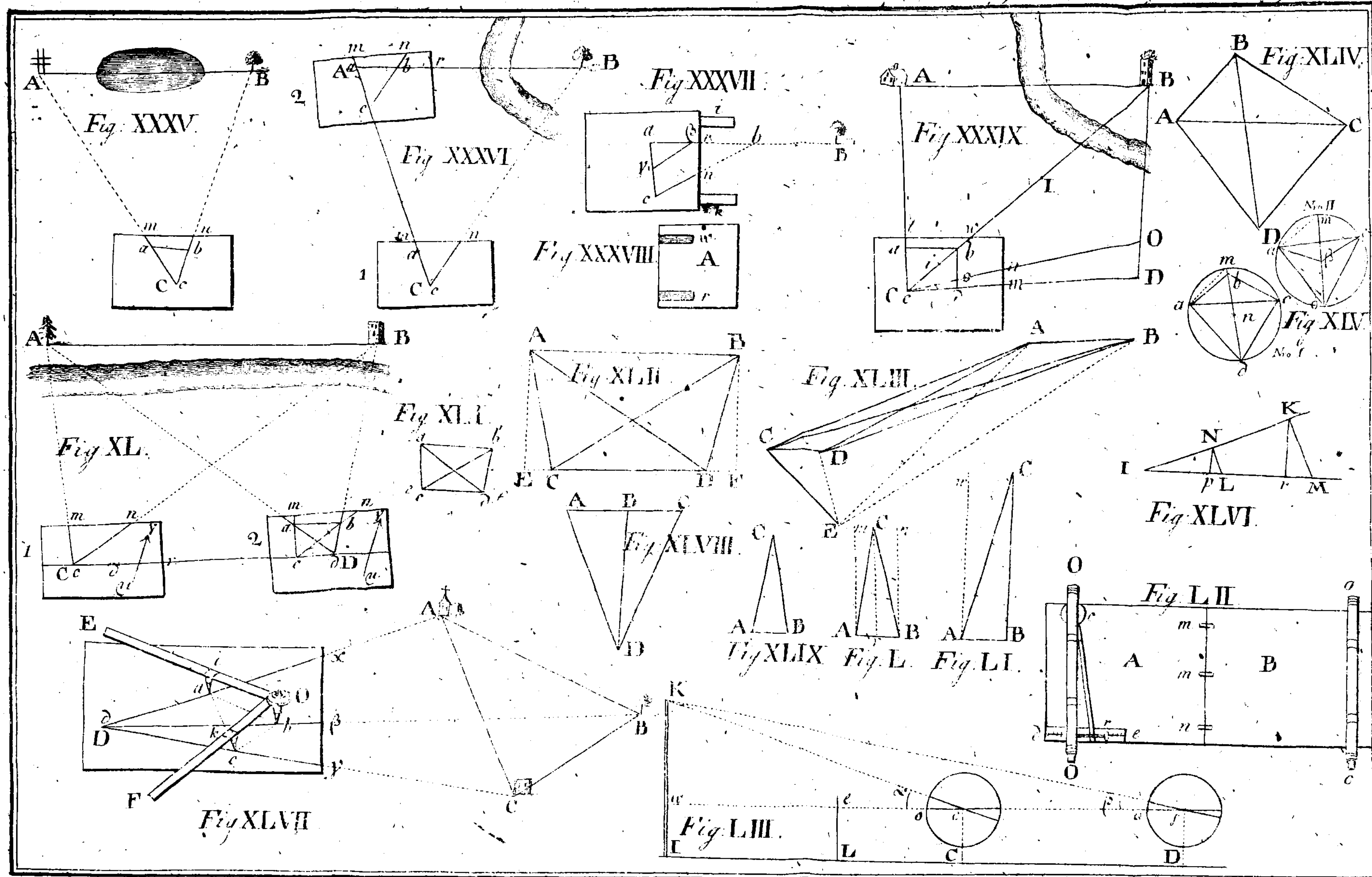
Fig. XXXV
Fig. XXXVI
Fig. XXXVII
Fig. XXXVIII
Fig. XXXIX
Fig. XL
Fig. XLI
Fig. XLII
Fig. XLIII
Fig. XLIV
Fig. XLV
Fig. XLVI
Fig. XLVII
Fig. XLVIII
Fig. XLIX
Fig. L
Fig. LI
Fig. LII
Fig. LIII

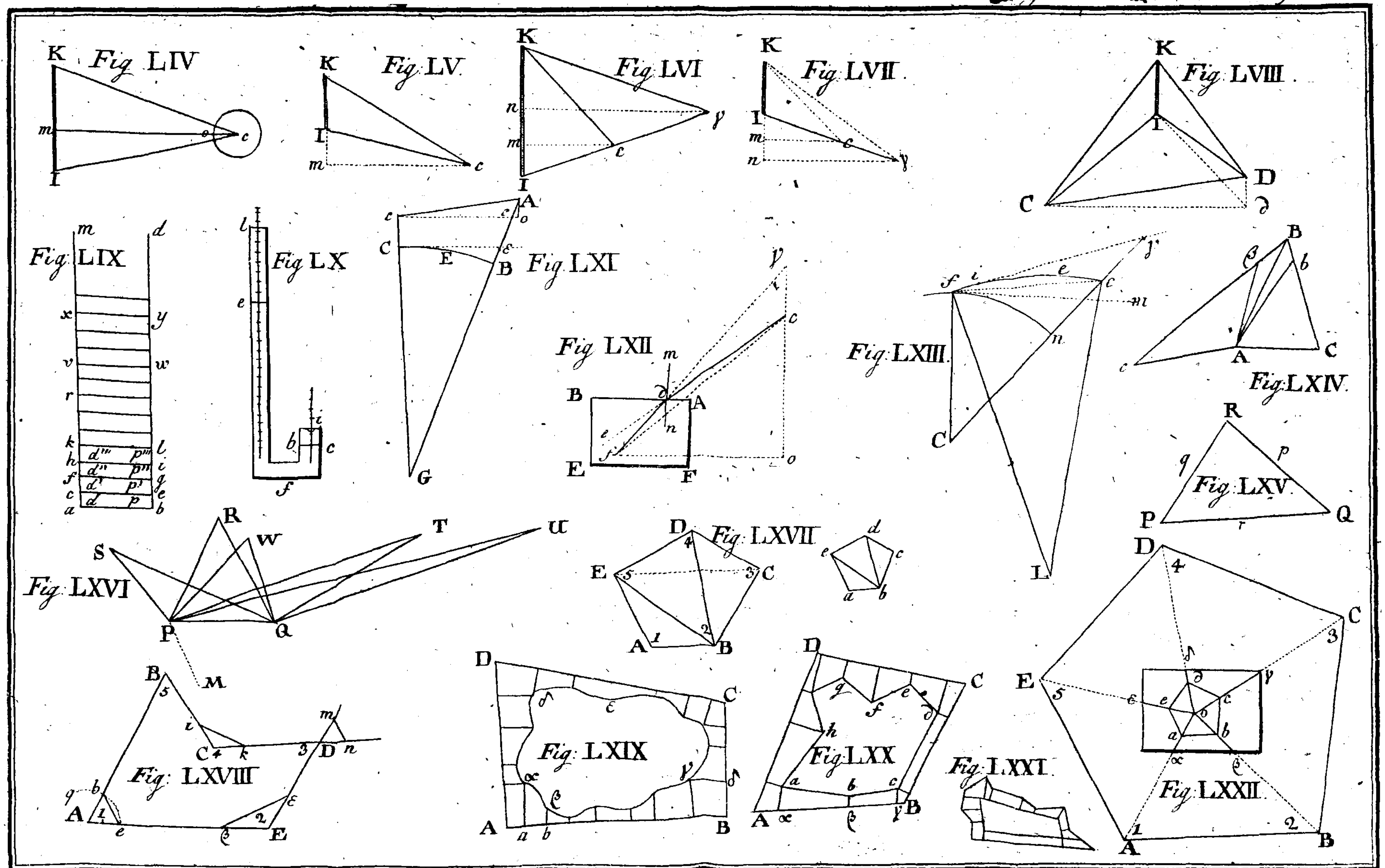

Fig. LIV
Fig. LV
Fig. LVI
Fig. LVII
Fig. LVIII
Fig. LIX
Fig. LX
Fig. LXI
Fig. LXII
Fig. LXIII
Fig. LXIV
Fig. LXV
Fig. LXVI
Fig. LXVII
Fig. LXVIII
Fig. LXIX
Fig. LXX
Fig. LXXI
Fig. LXXII

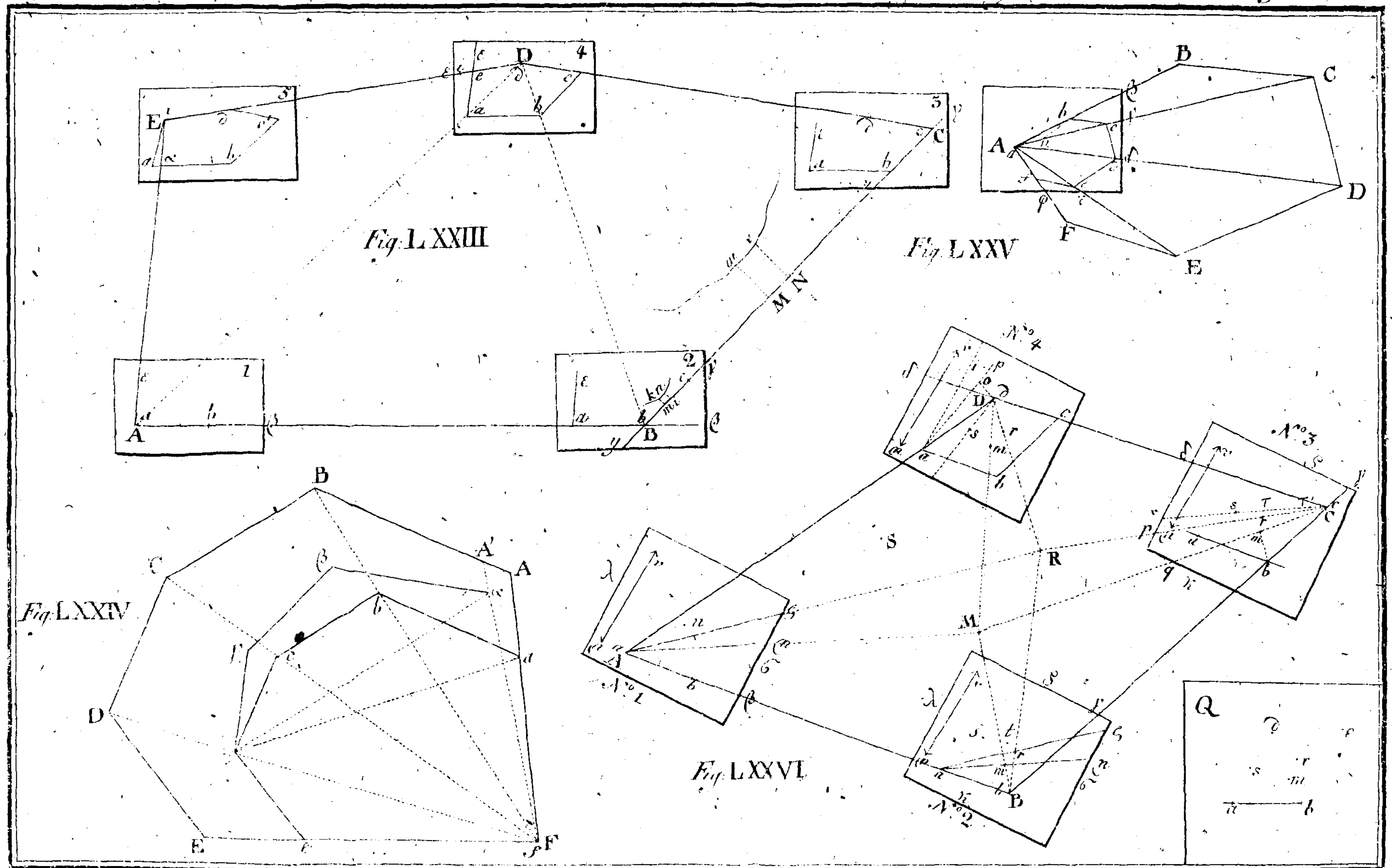
Fig. LXXIII
Fig. LXXIV
Fig. LXXV
Fig. LXXVI
No. 1
No. 2
No. 3
No. 4
Q

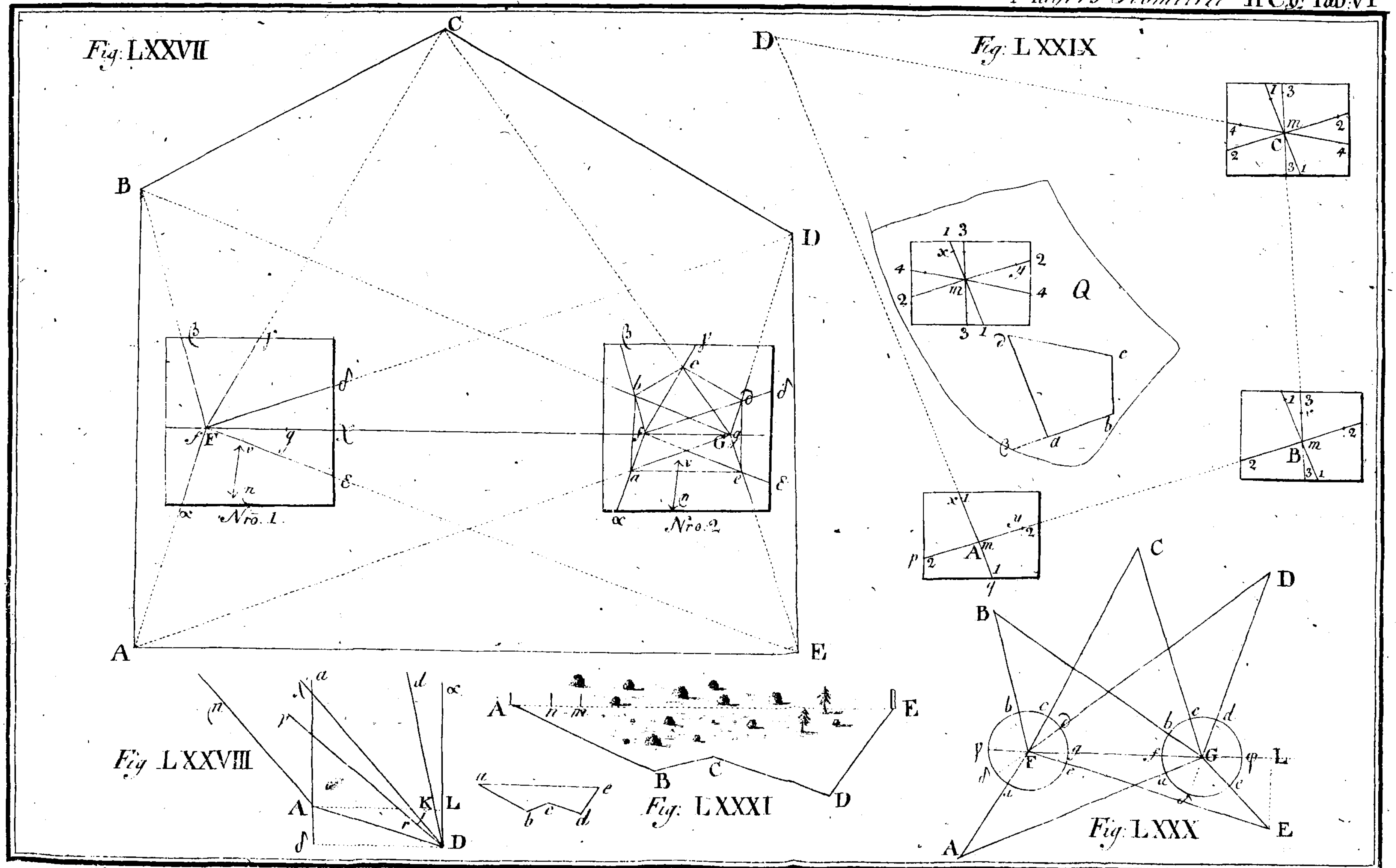

Fig: LXXVII

Fig: LXXVIII

Fig: LXXIX

Fig: LXXX

Fig: LXXXI

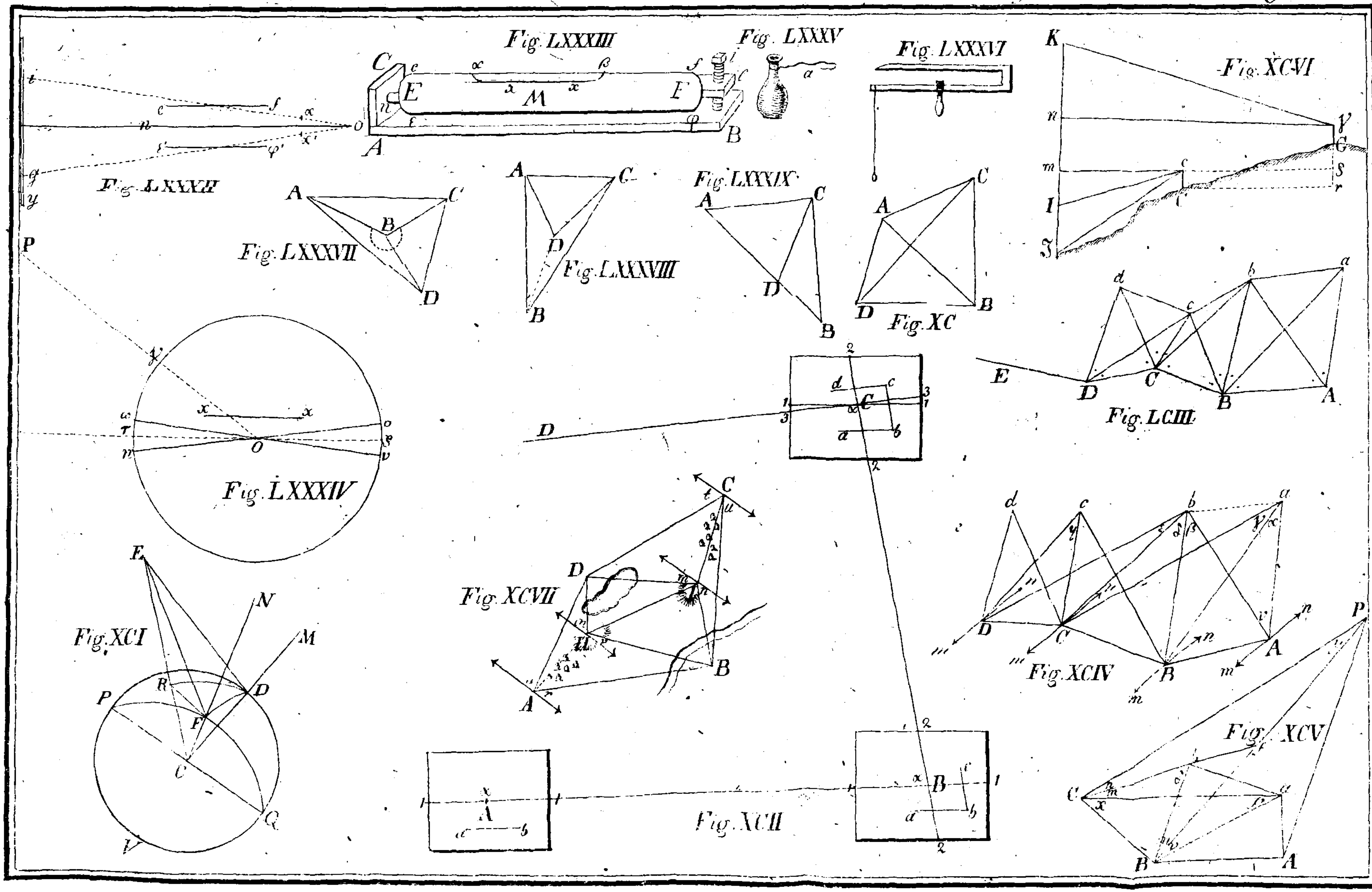

Fig. LXXXII
Fig. LXXXIII
Fig. LXXXIV
Fig. LXXXV
Fig. LXXXVI
Fig. LXXXVII
Fig. LXXXVIII
Fig. LXXXIX
Fig. XC
Fig. XCI
Fig. XCII
Fig. LCIII
Fig. XCIV
Fig. XCV
Fig. XCVI
Fig. XCVII