ESSAI

DE

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

Contenant diverses applications de cette Science à l'Astronomie.

PAR JEAN TREMBLEY.

A NEUCHATEL,

De l'Imprimerie de SAMUEL FAUCHE Pere & Fils,
Imprimeurs-Libraires du Roi.

M. DCC. LXXXIII.

1783

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Binding intrudes into the text

This has been a co-operative project between the NOAA Central Library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009

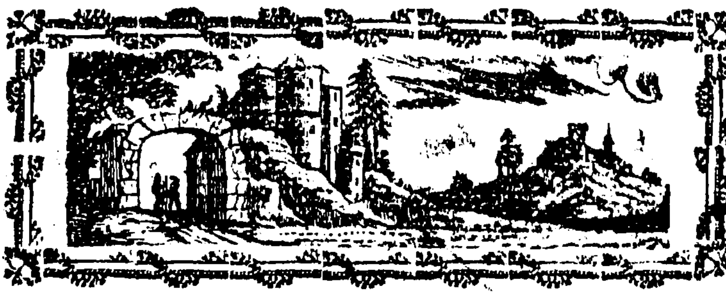
ESSAI

DE

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

AVANT-PROPOS.

Mon but n'eſt point ici de dire des choſes neuves ſur la Trigonométrie ſphérique, mais ſeulement de démontrer auſſi ſimplement & avec le moins de figures qu'il eſt poſſible, les propoſitions utiles pour la réſolution des triangles, & dont on fait un uſage ſi fréquent en Aſtronomie. L'exceſſive complication des figures qu'emploient la plupart des Auteurs, effraie l'imagination des jeunes gens & leur rend l'étude de cette Science très-pénible. Je ne me ſervirai ici que de deux propoſitions qu'on trouve dans les Ouvrages de M. de la Caille, de M. de la Lande, & dans d'autres Auteurs, & j'en déduirai la réſolution de tous les triangles, tant rectangles qu'obliquangles, d'une maniere purement analytique. Je ſuppoſe qu'on ſoit au fait de la Trigonométrie rectiligne, & des rapports divers des ſinus, coſinus, tangentes, ſécantes, &c. ainſi que *des ſinus & coſinus de la ſomme & de la différence des arcs. Ces propoſitions ſe démontrent par-tout & de la maniere la plus ſimple. Je paſſerai auſſi ſous ſilence tant les préliminaires de la Trigonométrie rectiligne, qu'on peut lire dans tous les Auteurs. Je ne m'attacherai qu'à la réſolution des triangles & aux réſultats qu'on peut en tirer pour la pratique de l'Aſtronomie.*



ESSAI

DE

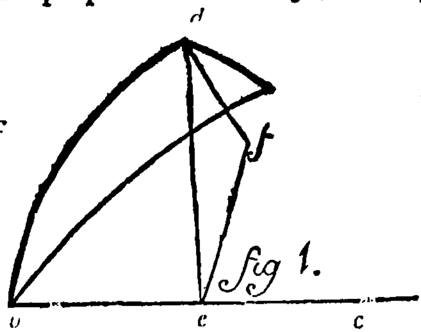
TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

Contenant diverses applications de cette Science à l'Astronomie.

CHAPITRE PREMIER.

Propositions fondamentales.

ON sait que dans la Trigonométrie rectiligne l'on résout tous les triangles rectangles par ces deux propositions; 1°. que le rayon est à l'hypothénuse comme le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle; 2°. que le rayon est à un côté comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est au côté opposé à cet angle. Or, on peut appliquer ces propositions aux triangles sphériques rectangles, en faisant que l'hypothénuse & les côtés du triangle rectiligne, deviennent les sinus ou les tangentes des côés du triangle ſphérique. Ainſi, pour parler d'abord de la premiere propoſition, je ſuppoſe un triangle ſphérique *b a d* rectangle en *a*, du point *d*: (*fig.* 1.) j'abaiſſe une perpendiculaire *d f* ſur le plan *a b c*, *c* étant le centre de la ſphere: cette perpendiculaire *d f* étant perpendiculaire à toutes les lignes qui paſſent par ſon pied dans le plan,



eſt perpendiculaire au rayon qui va de *a* en *c*; elle eſt donc le ſinus de l'arc *a d*, (ce qui ne paroît pas ſur le papier.) du point *f* abaiſſez une perpendiculaire *f e* ſur le rayon *c b* qui eſt la commune ſection des deux plans *d b c*, *a b c*; menez la ligne *d e*, vous aurez un triangle rectiligne rectangle *d f e* : le plan du triangle *d f e* paſſant par *d f* perpendiculaire au plan *a b c*, eſt auſſi perpendiculaire à ce plan *a b c*; donc la commune ſection *b e* qui eſt dans ce plan *a b c*, eſt perpendiculaire au plan du triangle *f d e*; donc elle eſt perpendiculaire à *d e*, donc l'angle *f e d* eſt formé par deux perpendiculaires à la commune ſection *b e* menées l'une dans le plan *a b c*, l'autre dans le plan *d b c*; il eſt donc la meſure de l'inclinaiſon de ces deux plans; il eſt donc égal à l'angle *b* que ces plans font entr'eux au point *b*; de plus la ligne *d e* eſt manifeſtement le ſinus de l'arc *b d*. Cela poſé par la premiere propoſition citée ci-deſſus, j'ai dans le triangle rectiligne *d f e*, en faiſant toujours le rayon $=$ 1, 1 : *d e* $=$ ſin *d e f* : *d f*; ou en

mettant

mettant pour ces quantités leurs valeurs relatives au triangle ſphérique *b d a* que je viens de démontrer, 1 : ſin. *b d* = ſin. *a b d* : ſin. *a d*, c'eſt-à-dire, que dans tout triangle ſphérique rectangle le rayon eſt au ſinus de l'hypothénuſe, comme le ſinus d'un angle eſt au ſinus du côté oppoſé à cet angle. C'eſt la premiere des deux propoſitions dont je dois me ſervir.

Pour paſſer à la ſeconde propoſition, je ſuppoſe toujours le triangle ſphérique *b a d* rectangle en *a*; du point *a* j'abaiſſe une perpendiculaire *a e* ſur la commune ſection *b e*; du centre de la ſphere *c*, je mene la ligne *c a*; la ligne *a e* que je viens de mener, eſt manifeſtement le ſinus de l'arc *a b*; je mene enſuite la ligne *a g* perpendiculaire au plan *a b c*, & par conſéquent aux lignes *a c*, *a e*, & qui ſe termine au point où elle rencontre le rayon *c d* prolongé; cette ligne eſt tangente de l'arc *a d*, car elle eſt perpendiculaire au rayon *c a*, & ſe termine au point où elle rencontre le rayon *a d*, qui paſſe par l'autre extrémité de cet arc; je mene enſuite la ligne *g e*, & je remarque que le plan du triangle *g a e* paſſant par *g a* perpendiculaire au plan *a b c*, eſt auſſi perpendiculaire à ce même plan *a b c* (*fig.* 2.); donc *b e* commune ſection des deux plans (on ſait que la commune ſection de deux grands cercles de la ſphere eſt toujours un diametre de la ſphere) eſt perpendiculaire au plan du triangle *g a e*; donc elle eſt perpendiculaire à *g e*; donc l'angle *g e d* eſt formé par deux perpendiculaires à la commune ſection *b e*, menées l'une dans le plan *d b e*, l'autre dans le plan *a b c*; donc il eſt la meſure de l'inclinaiſon de ces deux plans; donc il eſt égal à l'angle *b* que font ces deux plans au point *b*.

Cela poſé, par la ſeconde propoſition citée ci-deſſus, on a dans le triangle rectiligne *g a e* rectangle en *a*, 1 : *a e* = tang *a e g* : *ag*, ou en mettant pour ces quantités leurs valeurs relatives au triangle ſphérique, *d a b* que je viens de démontrer, on aura 1 : ſin. *a b.* = tang *a b d* : tang *a d*, c'eſt - à - dire, que dans tout triangle ſphérique rectangle le rayon eſt au ſinus d'un côté, comme la tangente de l'angle adjacent eſt à la tangente du côté oppoſé à cet angle. Voilà la ſeconde propoſition que j'avois annoncée, & au moyen de ces deux propoſitions je réſoudrai tous les triangles tant rectangles qu'obliquangles, & je donnerai la valeur, ſoit trigonométrique, ſoit analytique de toutes leurs parties. Je commencerai par les triangles rectangles.

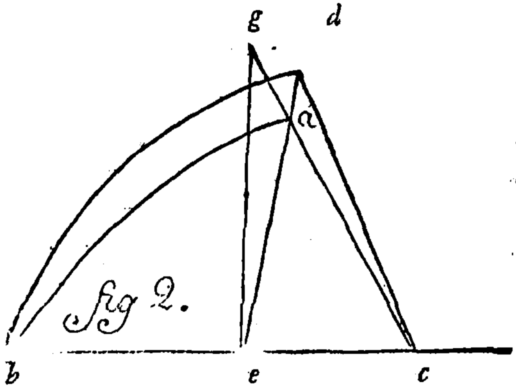
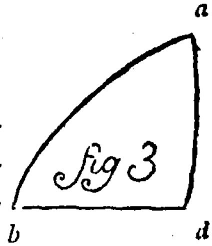


Fig 2.

CHAPITRE II.

Des triangles sphériques rectangles.



SOIT un triangle sphérique *a b d* rectangle en *d* (*fig.* 3.) : les deux propositions que nous venons de démontrer s'appliquant à chacun des deux angles *a* & *b*, il résulte de là quatre proportions qui servent de fondement à la résolution de tous les triangles rectangles. L'on aura donc,

1. $1 : \sin ab = \sin a : \sin bd;$

2. $1 : \sin ab = \sin b : \sin ad;$

3. $1 : \sin ad = \text{tang}\, a : \text{tang}\, bd;$

4. $1 : \sin bd = \text{tang}\, b : \text{tang}\, ad;$

Cela posé, nous allons résoudre les triangles sphériques rectangles pour tous les cas.

PREMIER CAS.

Étant donnés l'hypothénuse & un côté ab & ad.

On trouvera par la deuxieme proport. $\sin b = \frac{\sin ad.}{\sin ab}$

La quatrieme proportion donne $\sin bd = \frac{\text{tang}\, ad.}{\text{tang}\, b.}$

Or, $\text{tang}\, b = \frac{\sin ad}{\sqrt{\sin ab^2 - \sin ad^2}}$; donc $\sin bd =$

$\frac{\sqrt{\text{ſin } ab^2 \text{ ſin } ad^2}}{\text{coſ } ad}$ & $\text{coſ } bd = \frac{\text{coſ } ab}{\text{coſ } ad}$. La premiere proportion donne $\text{ſin } a = \frac{\text{ſin } bd}{\text{ſin } ab} = \frac{\sqrt{\text{ſin } ab^2 - \text{ſin } ad^2}}{b \text{ ſin } ab \text{ coſ } ad}$; donc

$\text{coſ } a = \frac{\sqrt{\text{ſin } ab^2 \text{ coſ } ad^2 - \text{ſin } ab^2 + \text{ſin } ad^2}}{\text{ſin } ab \text{ coſ } ad} =$

$\frac{\sqrt{\text{ſin } ad^2 - \text{ſin } ab^2 \text{ ſin } ad^2}}{\text{ſin } ab \text{ coſ } ad} = \frac{\text{ſin } ad \text{ coſ } ab}{\text{ſin } ab \text{ coſ } ad} = \frac{\text{tang } ad.}{\text{tang } ab.}$

Voici donc les réſultats de ce cas.

Angle oppoſé au côté donné, ſon ſinus $= \frac{\text{ſin côté don.}}{\text{ſin hypothén.}}$

Autre côté, ſon coſinus $= \frac{\text{coſ hypoth.}}{\text{coſ côté don.}}$

Angle adjacent au côté donné, ſon coſ $= \frac{\text{tang côt don.}}{\text{tang. hypoth.}}$

SECOND CAS.

Etant donnés un côté avec l'angle oppoſé a d & b.

La ſeconde proportion donne $\text{ſin } ab = \frac{\text{ſin } ad}{\text{ſin } b}$. La quatrieme proportion donne $\text{ſin } bd = \frac{\text{tang } ad.}{\text{tang } b}$ La premiere proportion donne $\text{ſin } a = \frac{\text{ſin } bd}{\text{ſin } ab} = \frac{\text{tang } ad}{\text{ſin } ab \text{ tang } b}$ $= \frac{\text{tang } ad \text{ ſin } b}{\text{tang } b \text{ ſin } ad} = \frac{\text{coſ } b.}{\text{coſ } ad}$. Voici donc les réſultats de ce cas.

Hypothénuſe, ſon ſinus $= \frac{\text{ſin côté donné}}{\text{ſin angle donné}}$

Autre côté, son sinus $= \dfrac{\text{tang côté donné}}{\text{tang angle donné}}$

Autre angle, son sinus $= \dfrac{\text{cos. angle donné}}{\text{cos. côté donné}}$

TROISIEME CAS.

Etant donnés un côté & l'angle adjacent b d & b.

La quatrieme proportion donne $\mathrm{tang}\, ad = \sin bd$ $\mathrm{tang}\, b$. La seconde proportion donne $\sin ab = \dfrac{\sin ad}{\sin b}$

Or, $\sin ad = \dfrac{\sin bd\ \mathrm{tang}\, b}{\sqrt{1 + \sin bd^2\ \mathrm{tang}\, b^2}}$ donc $\sin ab =$

$$\frac{\sin bd}{\cos b \sqrt{1 + \sin bd^2\ \mathrm{tang}\, b^2}} = \frac{\sin bd}{\sqrt{\cos b^2 + \sin bd^2 \sin b^2}}$$

donc $\mathrm{tang}\, ab = \dfrac{\sin bd}{\sqrt{\cos b^2 + \sin bd^2 \sin b^2 - \sin bd^2}} =$

$$\frac{\sin bd}{\sqrt{\cos b^2 - \sin bd^2 \cos b^2}} = \frac{\mathrm{tang}\, bd.}{\cos b}$$ La premiere proportion donne $\sin a = \dfrac{\sin bd}{\sin ab} = \sqrt{\cos b^2 + \sin bd^2 \sin b^2}$

donc $\cos a = \sqrt{1 - \cos b^2 - \sin bd^2 \sin b^2} =$
$\sqrt{\sin b^2 - \sin bd^2 \sin b^2} = \sin b \cos bd$. Voici donc les résultats de ce cas.

Autre côté, sa tang $=$ sin. côté donné. tang. angle donné

Hypothén. sa tang $= \dfrac{\text{tang. côté donné}}{\text{cos. angle donné}}$

Aut. ang. son cos. $=$ cos. côté don. sin. angle don.

QUATRIEME CAS.

Etant donnés l'hypothénuse & un angle a b & b.

La seconde proportion donne $\sin ad = \sin ab \sin b$.

La quatrieme proportion donne $\sin bd = \frac{\tang ad}{\tang b}$,

mais $\tang ad = \frac{\sin ab \sin b}{\sqrt{1 - \sin ab^2 \sin b^2}}$ donc $\sin bd = \frac{\sin ab \cos b}{\sqrt{1 - \sin ab^2 \sin b^2}}$ & $\tang bd = \frac{\sin ab \cos b}{\sqrt{1 - \sin ab^2 \sin b^2 - \sin ab^2 \cos b^2}} = \tang ab \cos b$. La troisieme proportion donne $\tang a = \frac{\tang bd}{\sin ad} = \frac{\tang ab \cos b}{\sin ab \sin b} = \frac{\cot. b.}{\cos ab}$

Voici donc les résultats de ce cas.

Côté opposé à l'angle donné, son sinus $=$ sin hypothén. sin angle donné.

côté adjacent, sa tang. $=$ tang. hyp. cos angle donné

Autre angle, sa tang. $= \frac{\text{cot. angle donné}}{\text{cos hypothénuse.}}$

CINQUIEME CAS.

Etant donnés les deux côtés a d & b d.

La troisieme proportion donne $\tang a = \frac{\tang bd.}{\sin ad}$

La quatrieme proportion donne $\tang b = \frac{\tang ad.}{\sin bd}$

La premiere proportion donne $\sin ab = \frac{\sin bd.}{\sin a}$ mais

$\sin a = \dfrac{\tang bd}{\sqrt{\sin ad^2 + \tang bd^2}}$ donc $\sin ab =$
$\sqrt{\sin ad^2 \cos bd^2 + \sin bd^2}$, & $\cos ab =$
$\sqrt{\cos bd^2 - \sin ad^2 \cos bd^2} = \cos ad \cos bd$. **Voici** donc les résultats de ce cas.

Un angle, sa tang. $= \dfrac{\text{tang. côté opposé}}{\text{sin côté adjacent.}}$

Hypoth. son cosin. = rectangle des cos. des côtés donn.

Sixieme Cas.

Etant donnés les deux angles a & b.

La troisieme proportion donne $\tang bd = \tang a \sin ad$. Mais en a par la quatrieme proportion $\tang ad = \tang b \sin bd$; donc $\sin ad = \dfrac{\sin bd}{\sqrt{\cot. b^2 + \sin bd^2}}$;

donc $\tang bd = \dfrac{\tang a \sin bd}{\sqrt{\cot. b^2 + \sin bd^2}}$; donc $\cos bd = \dfrac{\sqrt{\cot. b^2 + \sin bd^2}}{\tang a}$ donc $\cos bd^2 \tang a^2 = \cot b^2 + 1 - \cos bd^2$ ou $\cos bd \sqrt{1 + \tang a^2} = \sqrt{1 + \cot b^2}$, donc $\cos bd = \dfrac{\cos a.}{\sin b}$ On aura de même $\cos ad = \dfrac{\cos b.}{\sin a}$ La premiere proport. donne $\sin ab = \dfrac{\sin bd}{\sin a}$. Or, $\sin bd = \dfrac{\sqrt{\sin b^2 - \cos a^2}}{\sin b}$, donc $\sin ab = \dfrac{\sqrt{\sin b^2 - \cos a^2}}{\sin b \sin a}$

donc $\cos ab = \dfrac{\sqrt{\sin b^2 \sin a^2 - \sin b^2 + \cos a^2}}{\sin b \sin a} =$

$\frac{\sqrt{\cos a^2 - \sin b^2 \cos a^2}}{\sin b \sin a} = \cot b \cot a$. Voici les résultats de ce cas.

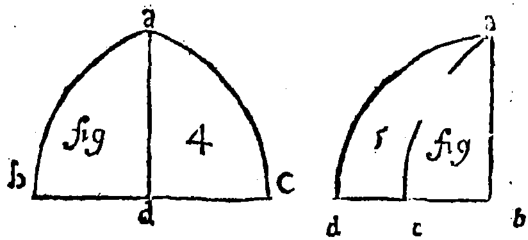
Un côté, son cosinus $= \frac{\text{cos. angle opposé}}{\text{sin. angle adjacent}}$

Hypothén. son cosin $=$ rectangl. cotang. angl. donnés.

CHAPITRE III.

Des triangles sphériques obliquangles.

JE passe aux triangles obliquangles que je résoudrai par le moyen des triangles rectangles. Soit un triangle obliquangle *a b c* (*fig.* 4. & 5.) d'un angle *a* de ce triangle. J'abaisserai l'arc *a d* perpendiculaire sur *b c*, prolongé s'il est nécessaire (les figures 4 & 5 représentent les deux cas) cela me donnera deux triangles rectangles *abd*, *adc*, deux segmens de la base *b d* & *d c*. (J'appellerai la premiere partie 1 segment, & la seconde partie 2 segment) & deux angles au sommet *b a d* & *d a c*. (J'appellerai le premier 1 segment & le second 2 segment.) Cela posé, je vais résoudre les différens



cas

cas des triangles sphériques obliquangles, & ce que je dirai s'appliquera également aux deux figures 4 & 5.

PREMIER CAS.

Étant donnés deux angles, & un côté opposé à l'un de ces angles b, c *&* a b.

Dans le triangle abd, l'on a par ce que nous avons démontré ci-dessus (proportions fondamentales 1 & 2), $1 : \sin ab = \sin b : \sin ad$; donc $\sin ad = \sin ab \sin b$, on a de même dans le triangle rectangle adc $1 : \sin ac = \sin c : \sin ad$; donc $\sin ad = \sin ac \sin c = \sin ab \sin b$, donc $\sin ab : \sin ac = \sin c : \sin b$, donc en général les sinus des angles sont entr'eux comme les sinus des côtés opposés; c'est ce qu'on appelle l'analogie commune qui nous servira encore ailleurs, & qui donne ici $\sin ac = \frac{\sin ab \sin b}{\sin c}$.

Dans le triangle abd, je connois l'hypothénuse ab & un angle b; je trouverai donc par le IV^e. Cas des triangles rectangles $\tang bd = \tang ab \cos b$ & $\tang bad = \frac{\cot b}{\cos ab}$ ou $\cot bad = \cos ab \tang b$. Dans le triangle abd, connoissant un côté bd & l'angle adjacent b, je connoîtrai ad par le III^e. Cas des triangles rectangles; j'aurai $\tang ad = \sin bd \tang b$. Dans le triang. adc, connoissant un côté ad & l'angle opposé c, j'aurai par le II^e. Cas des triangles rectangles $\sin dc = \frac{\tang ad}{\tang c} = \frac{\sin bd \tang b}{\tang c}$. Dans le triangle $a\,b\,d$, connoissant deux angles b & $b\,a\,d$, j'aurai par le VI^e. Cas des triangles rectangles $\text{cos}\,a\,d = \frac{\text{cos}\,b}{\text{sin}\,b\,a\,d}$. Dans le triangle $a\,d\,c$, connoissant un côté $a\,d$ & l'angle opposé c, j'aurai par le II^e. Cas des triangles rectangles $\text{sin}\,d\,a\,c = \frac{\text{cos}\,c}{\text{cos}\,a\,d} = \frac{\text{cos}\,c\ \text{sin}\,b\,a\,d}{\text{cos}\,b}$. Voici donc les résultats de ce cas.

Le côté opposé à l'autre angle se trouve par l'analogie commune, les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des angles opposés.

Troisieme côté $\begin{cases} \text{tang. 1 segm.} = \text{cos. angle adjac. tang. côté donné.} \\ \text{sin. 2 segm.} = \dfrac{\text{sin. 1 segm. tang. angle adjac. au côté donné.}}{\text{tang. angle opposé au côté donné.}} \end{cases}$

Troisieme angle $\begin{cases} \text{cot. 1 segm.} = \text{cos. côté donné. tang. angle adjac.} \\ \text{sin. 2 segm.} = \dfrac{\text{sin. 1 seg. cos. ang. opp. au côté donn.}}{\text{cos. ang. adjac. au côté donné.}} \end{cases}$

La perpendiculaire doit, comme on voit, être abaissée sur le côté qui joint les angles donnés.

SECOND CAS.

Etant donnés deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés, ab, ac & b.

J'ai par l'analogie commune $\sin c = \frac{\sin ab \sin b}{\sin ac}$. Dans le triangle abd j'ai, comme dans le Cas précédent, $\tang bd = \tang ab \cos b$, & $\cot bad = \cos ab \tang b$. Dans le triangle dac, connoissant l'hypothénuse ac & un côté ad, j'aurai par le premier Cas des triangles rectangles $\cos dc = \frac{\cos ac}{\cos ad}$. Dans le triangle bad, connoissant de même l'hypothénuse ab & un côté bd, j'ai $\cos ad = \frac{\cos ab}{\cos bd}$; donc $\cos dc = \frac{\cos ac \cos bd}{\cos ab}$. J'aurai encore dans le triangle dac $\cos dac = \frac{\tang ad}{\tang ac}$. Dans le triangle bad, j'aurai en connoissant l'angle bad & le côté ab par le IV^e Cas, des triangles rectangles $\tang ad = \tang ab \cos bad$; donc $\cos dac = \frac{\tang ab \cos bad}{\tang ac}$. Voici donc les résultats de ce Cas.

L'angle opposé à l'autre côté se trouve par l'analogie commune.

Troisieme côté.
- tang. 1 seg. = cos. ang. donné. tang. côté adj. à cet angle.
- cos. 2 seg. = $\dfrac{\text{cos. 1 seg. cos. côté opposé à l'angle don.}}{\text{cos. côté adj. à l'angle donné.}}$

Angle compris entre les côtés donnés.
- cot. 1 seg. = tang. angle donné. cos côté adjac.
- cos. 2 seg. = $\dfrac{\text{cos. 1 seg. tang. côté don. adj. à l'ang. don.}}{\text{tang. côté opposé à l'angle donné.}}$

La perpendiculaire doit, comme l'on voit, être abaissée de l'angle compris entre les côtés donnés.

Troisieme Cas.

Etant donnés deux côtés & l'angle compris a b, b c & b.

Dans le triangle bad j'ai, comme dans le premier de ces Cas, tang bd = tang ab cos b, & cela me donne bd, & par conséquent dc, puisque je connois bc. Dans le triangle bad, connoissant ab & bd, j'ai par le premier Cas des triangles rectangles cos $ad = \frac{\cos ab}{\cos bd}$. Dans le triangle dac, connoissant ad & dc, j'ai par le V^e. Cas. des tr. rect. cos ac = cos ad cos $dc = \frac{\cos ab \cos dc}{\cos bd}$, j'ai aussi tang $c = \frac{\text{tang } ad}{\sin dc}$. Or, dans le triangle bad connoissant bd & b, j'ai par le III^e. Cas des tr. rect. tang ad = sin bd

tang b, donc tang $c = \frac{\text{fin } bd \text{ tang } b}{\text{fin } dc}$. Voici les réfultats de ce Cas.

Troifieme côté. $\begin{cases} \text{tang. 1 feg.} = \text{cof. ang. donné. tang. côté non coupé.} \\ \text{c. côté ent.} = \dfrac{\text{cof. côté non coupé. cof. 2 fegm.}}{\text{cof. 1 fegm.}} \end{cases}$

Un angle opofé à l'un des côtés donnés. $\left\{ \text{tang. angle} = \dfrac{\text{tang. ang. donné. fin. 1 fegm. côté.}}{\text{fin 2 fegm. côté.}} \right.$

La perpendiculaire doit être abaiffée de l'angle non cherché.

QUATRIEME CAS.

Étant donnés un côté & les deux angles adjacens à ce côté ab, b & cab.

Dans le triangle bad j'ai, comme dans le premier de ces Cas, tang $bad = \frac{\cot b}{\text{cof } ab}$ ou cot $bad =$ cof ab tang b. Cela me donne bad, & par conféquent dac, puifque je connois cab. Dans ce même triangle bad, connoiffant ab & bad, j'ai par le IV^{e}. Cas des triangles rectangles tang $ad =$ tang ab cof bad. Dans le triangle dac, connoiffant ad & dac, j'ai par le III^{e}. Cas des triangles rectangles tang $ac =$ $\frac{\text{tang } ad}{\text{cof } dac} = \frac{\text{tang } ab \text{ cof } bad}{\text{cof } dac}$. Dans le triangle bad,

connoiſſant les deux angles b & bad, j'ai par le VI^{e}. Cas des triangles rectangles $\text{coſ}\ ad = \frac{\text{coſ}\ b}{\text{ſin}\ bad}$.
Dans le triangle adc, connoiſſant ad & dac, j'ai par le III^{e}. Cas des triangles rectangles $\text{coſ}\ c = \text{coſ}\ ad\ \text{ſin}\ dac = \frac{\text{coſ}\ b\ \text{ſin}\ dac}{\text{ſin}\ bad}$. Voici les réſultats de ce Cas.

$$\text{Troiſieme angle.}\left\{\begin{array}{l} \text{cot. 1 ſeg.} = \dfrac{\text{coſ. côté donné. tang.}}{\text{ang. op. au côt. cherc.}} \\[2ex] \text{coſ. ang.} = \dfrac{\begin{array}{c}\text{coſ. angle non diviſé.}\\ \text{ſin. 2 ſegm.}\end{array}}{\text{ſin 1 ſegm.}} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Un côté oppoſé}\\ \text{à l'un des angles}\\ \text{donnés.}\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{tang. côté}\\ \text{cherché.}\end{array}\right. = \frac{\begin{array}{c}\text{tang. côté donné coſ.}\\ \text{1 ſegm. angle.}\end{array}}{\text{coſ 2 ſegm. angle.}}$$

La perpendiculaire doit être abaiſſée ſur le côté non cherché.

CINQUIEME CAS.

Étant donnés les trois côtés ab, bc & ac.

Dans le triangle bad, connoiſſant ab & bd, j'aurai par le premier Cas des triangles rectangles $\text{coſ}\ ad = \frac{\text{coſ}\ ab}{\text{coſ}\ bd}$. De même j'aurai dans le triangle dac, connoiſſant ac & dc, $\text{coſ}\ ad = \frac{\text{coſ}\ ac}{\text{coſ}\ dc}$ donc $\frac{\text{coſ}\ ab}{\text{coſ}\ bd} = \frac{\text{coſ}\ ac}{\text{coſ}\ dc} = \frac{\text{coſ}\ ac}{\text{coſ}\ (bc - bd)}$ donc $\text{coſ}\ ab\ \text{coſ}\ (bc - bd) = \text{coſ}\ ac$

$\cos bd = \cos ab \cos bc \cos bd + \cos ab \sin bc \sin bd$. Donc $\cos ac = \cos ab \cos bc + \cos ab \sin bc \operatorname{tang} bd$; donc $\operatorname{tang} bd = \frac{\cos ac - \cos ab \cos bc}{\cos ab \sin bc}$. Mais dans le triangle bad, connoissant ab & bd, j'aurai par le premier Cas des triangles rectangles $\cos b = \frac{\operatorname{tang} bd}{\operatorname{tang} ab} = \frac{\cos ac - \cos ab \cos bc}{\sin ab \sin bc}$. Voilà la valeur analytique de l'un des angles, qu'il est aisé de réduire à ce qu'on appelle le calcul trigonométrique ordinaire (qui n'est pourtant pas plus court); car on sait que $\cos b = \cos \frac{1}{2} b^2 - \sin \frac{1}{2} b^2 = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} b^2$. Donc $\sin \frac{1}{2} b^2 = \frac{1 - \cos b}{2} = \frac{\sin ab \sin bc - \cos ac + \cos ab \cos bc}{2 \sin ab \sin bc} = \frac{\cos(ab - bc) - \cos ac}{2 \sin ab \sin bc}$. Or, $\cos A - \cos B = \cos \frac{1}{2} A^2 - \sin \frac{1}{2} A^2 - \cos \frac{1}{2} B^2 + \sin \frac{1}{2} B^2 = 2 - 2 \sin \frac{1}{2} A^2 - 2 \cos \frac{1}{2} B^2 = 2 (1 - \sin \frac{1}{2} A^2 - \cos \frac{1}{2} B^2) = 2 (\cos \frac{1}{2} A^2 - \cos \frac{1}{2} B^2) = 2 (\cos \frac{1}{2} A^2 (\sin \frac{1}{2} B^2 + \cos \frac{1}{2} B^2) - \cos \frac{1}{2} B^2 (\sin \frac{1}{2} A^2 + \cos \frac{1}{2} A^2) = 2 \cos \frac{1}{2} A^2 \sin \frac{1}{2} B^2 + 2 \cos \frac{1}{2} A^2 \cos \frac{1}{2} B^2 - 2 \cos \frac{1}{2} B^2 \sin \frac{1}{2} A^2 - 2 \cos \frac{1}{2} B^2 \cos \frac{1}{2} A^2 = 2 (\cos \frac{1}{2} A^2 \sin \frac{1}{2} B^2 - \cos \frac{1}{2} B^2 \sin \frac{1}{2} A^2) = 2 (\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B + \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A) \times (\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B - \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A) = 2 \sin (\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \sin (\frac{1}{2} B - \frac{1}{2} A)$. Nous aurons donc $\cos (ab - bc) - \cos ac = 2 \sin \left(\frac{ac + ab - bc}{2}\right) \sin \left(\frac{ac + bc - ab}{2}\right)$ donc $\sin \frac{1}{2} b^2 =$

$$\frac{\sin \left(\frac{ac + ab - bc}{2}\right) \sin \left(\frac{ac + bc - ab}{2}\right)}{\sin ab \sin bc} =$$

$$\frac{\sin\left(\frac{ac+ab+bc}{2}-bc\right)\sin\left(\frac{ac+ab+bc}{2}-ab\right)}{\sin ab \sin bc}$$ donc

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{ac+ab+bc}{2}-bc\right)\sin\left(\frac{ac+ab+bc}{2}-ab\right)}}{\sqrt{\sin ab \sin bc}}$$

C'est la forme à laquelle on réduit la valeur de b pour le calcul trigonométrique. On trouvera de même $\operatorname{cos}\frac{1}{2}b$; car $\cos b = 2 \cos\frac{1}{2}b^2 - 1$, donc $\cos\frac{1}{2}b^2 =$ $\frac{\cos b + 1}{2} = \frac{\sin ab \sin bc + \cos ac - \cos ab \cos bc}{2 \sin ab \sin bc} =$ $\frac{\cos ac - \cos(ab+bc)}{2 \sin ab \sin bc}$. Or, $\cos ac - \cos(ab+bc) =$ $2 \sin\left(\frac{ab+bc+ac}{2}\right) \sin\left(\frac{ab+bc-ac}{2}\right) = 2 \sin$ $\frac{ab+bc+ac}{2} \sin\left(\frac{ab+bc+ac}{2} - ac\right)$. Donc $\cos\frac{1}{2}b^2 =$ $\frac{\sin\frac{ab+bc+ac}{2}\sin\left(\frac{ab+bc+ac}{2}-ac\right)}{\sin ab \sin bc}$ & $\cos\frac{1}{2}b =$

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{ab+ac+bc}{2}\sin\left(\frac{ab+bc+ac}{2}-ac\right)}}{\sqrt{\sin ab \sin bc}}$$

VI CAS.

Sixieme Cas.

Étant donnés les trois angles a, b *&* c.

Dans le triangle bad, connoissant b & bad, j'aurai par le VI^e. Cas des triangles rectangles $\operatorname{cos} ad = \frac{\operatorname{cos} b}{\operatorname{sin} bad}$, & de même dans le triangle dac, connoissant c & dac, $\operatorname{cos} ad = \frac{\operatorname{cos} c}{\operatorname{sin} dac} = \frac{\operatorname{cos} c}{\operatorname{sin}(a - bad)}$, donc $\frac{\operatorname{cos} b}{\operatorname{sin} bad} = \frac{\operatorname{cos} c}{\operatorname{sin}(a - bad)}$, donc $\operatorname{cos} b \operatorname{sin}(a - bad) = \operatorname{cos} c \operatorname{sin} bad = \operatorname{cos} b \operatorname{sin} a \operatorname{cos} bad - \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a \operatorname{sin} bad$, ou $\operatorname{cos} c \operatorname{tang} bad = \operatorname{cos} b \operatorname{sin} a - \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a \operatorname{tang} bad$, donc $\operatorname{tang} bad = \frac{\operatorname{cos} b \operatorname{sin} a}{\operatorname{cos} c + \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a}$. Mais dans le triangle bad, connoissant b & bad, on aura par le VI^e. Cas des triangles rectangles $\operatorname{cos} ab = \operatorname{cot} b \operatorname{cot} bad$. Or, $\operatorname{cot} bad = \frac{\operatorname{cos} c + \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a}{\operatorname{cos} b \operatorname{sin} a}$; donc

$$\operatorname{cos} ab = \frac{\operatorname{cot} b \operatorname{cos} c + \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a \operatorname{cot} b}{\operatorname{cos} b \operatorname{sin} a} =$$

$\frac{\operatorname{cos} c + \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a}{\operatorname{sin} b \operatorname{sin} a}$. C'est la valeur analytique de l'un des côtés, qu'il est aisé de réduire au calcul trigonométrique ordinaire : car $\operatorname{sin} \frac{1}{2} ab^2 = \frac{1 - \operatorname{cos} ab}{2} =$

$$\frac{\operatorname{sin} b \operatorname{sin} a - \operatorname{cos} c - \operatorname{cos} b \operatorname{cos} a}{2 \operatorname{sin} b \operatorname{sin} a} =$$

$-\frac{(\cos(b+a)+\cos c)}{2\sin b\sin a}$. Mais $-(\cos A+\cos B)=$
$-\cos\frac{1}{2}A^2+\sin\frac{1}{2}A^2-\cos\frac{1}{2}B^2+\sin\frac{1}{2}B^2=$
$-2(1-\sin\frac{1}{2}A^2-\sin\frac{1}{2}B^2)=-2(\cos\frac{1}{2}A^2-\sin\frac{1}{2}B^2)$
$=-2(\cos\frac{1}{2}A^2)$
$(\sin\frac{1}{2}B^2+\cos\frac{1}{2}B^2)+\sin\frac{1}{2}B^2(\sin\frac{1}{2}A^2+\cos\frac{1}{2}A^2)=$
$-2(\cos\frac{1}{2}A^2\cos\frac{1}{2}B^2-\sin\frac{1}{2}A^2\sin\frac{1}{2}B^2)=$
$2(\sin\frac{1}{2}A^2\sin\frac{1}{2}B^2-\cos\frac{1}{2}A^2\cos\frac{1}{2}B^2)=$
$2(\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B)(\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$
$-\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B)=2\cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\cos(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A)$;
donc $-\frac{(\cos(b+a)+\cos c)}{2\sin b\sin a}=\cos$

$$\frac{\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin a}=\frac{\cos\frac{a+b+c}{2}\cos(\frac{a+b+c}{2}-c)}{\sin b\sin a}$$

$=\sin\frac{1}{2}ab^2$; donc $\sin\frac{1}{2}ab=$

$$\frac{\sqrt{\cos\frac{a+b+c}{2}\cos(\frac{a+b+c}{2}-c)}}{\sqrt{\sin a\sin b}}$$

. On trouvera de même
$\cos\frac{1}{2}ab$; car $\cos ab=\frac{2\cos\frac{1}{2}ab^2-1}{2}$; donc $\cos\frac{1}{2}ab^2$

$$=\frac{1+\cos ab}{2}=\frac{\sin b\sin a+\cos b\cos a+\cos c}{2\sin b\sin a}=$$

$$\frac{\cos(a-b)+\cos c}{2\sin b\sin a}=\frac{\cos\frac{a+c-b}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\sin a}=$$

$$\frac{\cos(\frac{a+b+c}{2}-b)\cos(\frac{a+b+c}{2}-a)}{\sin b\sin a}$$ donc $\cos\frac{1}{2}ab=$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)}}{\sqrt{\operatorname{fin} a \operatorname{fin} b}}$$. C'eſt la forme à laquelle on réduit la valeur de b par le calcul trigonométrique.

Remarque ſur les deux derniers Cas.

Je remarquerai ſur le cinquieme cas que pour la *fig.* 5 où la perpendiculaire tombe en-dehors du triangle au lieu d'avoir $dc = bc - db$, on a $dc = bd - bc$; mais malgré ce changement le réſultat du calcul eſt le même. Quant au ſixieme cas, au lieu d'avoir $dac = a - bad$, on aura $dac = bad - a$; mais en continuant le calcul d'après ce changement, on arrive auſſi au même réſultat.

L'on peut trouver pour les quatre premiers cas des valeurs analytiques des côtés & des angles cherchés, comme nous en avons trouvé pour les deux derniers cas. Nous nous ſervirons pour cela des réſultats que nous venons d'obtenir, & nous allons expoſer de ſuite ces valeurs analytiques pour les ſix cas.

PREMIER CAS.

Etant donnés deux angles & un côté oppoſé à l'un de ces angles b, c & a b.

J'ai par les formules données pour ce cas tang ad = ſin dc tang c = ſin ($bc - bd$) tang c = ſin bc

$\cos bd$ tang c — $\cos bc \sin bd$ tang c, donc tang bd
$= \frac{\sin bc \text{ tang } c}{\text{tang } b + \cos. bc \text{ tang } c} = \frac{\sin bc}{\cos bc + \text{tang } b \cot c}$
$=$ tang $ab \cos b$: donc $\sin bc =$ tang $ab \sin b \cot c$
$+$ tang $ab \cos b \cos bc$ & $\sin bc^2 +$ tang $ab^2 \sin b^2$
$\cot c^2 - 2 \sin bc$ tang $ab \sin b \cot c =$ tang ab^2
$\cos b^2 (1 - \sin bc^2)$; donc $\sin bc^2 = \frac{2 \sin bc \text{ tang } ab \sin b \cos c + \text{tang } ab^2 \cos b^2 - \text{tang } ab^2 \sin b^2 \cot c^2}{1 + \text{tang } ab^2 \cos b^2}$
& $\sin bc =$ tang $ab \sin b \cot c \pm$
$\frac{\sqrt{\text{tang } ab^2 \cos b^2 + \text{tang } ab^4 \cos b^4 - \text{tang } ab^4 c. b^2 \sin b^2 \cot c^2}}{1 + \text{tang } ab^2 \cos b^2}$
$=$ tang $ab \sin b \cot c \pm$ tang $ab \cos b$
$\frac{\sqrt{1 + \text{tang } ab^2 \cos b^2 - \text{tang } ab^2 \sin b^2 \cot c^2}}{1 + \text{tang } ab^2 \cos b^2}$
$= \sin b \cot c \cot ab \pm \cos b$
$\frac{\sqrt{\cos ab^2 + \cos b^2 - \sin b^2 \cot c^2}}{\cot ab^2 + \cos b^2}$. J'ai mainte-
nant le cosinus par la formule $\cos bc^2 = 1 -$
$\sin bc^2$, ce qui donnera en réduisant $\cos bc =$
$\frac{\sin b \cot b \cot c \pm \cos ab \sqrt{\cos ab^2 + \cos b^2 - \sin b^2 \cot c^2}}{\cot ab^2 + \cos b^2}$
Le côté ac & l'angle a se trouveront par l'analogie commune des sinus.

Remarque.

Ce calcul eſt adapté à la figure 4 ; dans la figure 5 au lieu d'avoir $dc = bc - bd$, on a $dc = bd - dc$, ce qui donne $\text{tang}\, bd = \frac{\text{ſin}\, bc}{\text{coſ}\, bc - \text{tang}\, b\, \text{cot}\, c}$ & $\text{ſin}\, bc = -\text{tang}\, ab\, \text{ſin}\, b\, \text{coſ}\, c \pm \text{coſ}$ &c. Ainſi il n'y a de différence que dans le ſigne de la quantité qui précede le radical, ce ſigne doit être + pour la figure 4 & — pour la figure 5.

SECOND CAS.

Etant donnés deux côtés & un angle oppoſé à ces côtés

a b, a c & b.

J'ai par les formules données pour ce cas $\text{coſ}\, ad = \frac{\text{coſ}\, ab}{\text{coſ}\, bd} = \frac{\text{coſ}\, ac}{\text{coſ}\, dc} = \frac{\text{coſ}\, ac}{\text{coſ}\,(bc - bd)}$ d'où l'on tire $\text{tang}\, bd = \frac{\text{coſ}\, ac - \text{coſ}\, ab\, \text{coſ}\, bc}{\text{coſ}\, ab\, \text{ſin}\, bc} = \text{tang}\, ab\, \text{coſ}\, b$. Donc $\text{coſ}\, ac - \text{coſ}\, ab\, \text{coſ}\, bc = \text{coſ}\, b\, \text{ſin}\, bc\, \text{ſin}\, ab$ & $\text{ſin}\, bc^2\,(\text{coſ}\, ab^2 + \text{ſin}\, ab^2\, \text{coſ}\, b^2) = 2\, \text{ſin}\, bc\, \text{ſin}\, ab\, \text{coſ}\, b\, \text{coſ}\, ac + \text{coſ}\, ab^2 - \text{coſ}\, ac^2$. Donc $\text{ſin}\, bc = \frac{\text{ſin}\, ab\, \text{coſ}\, b\, \text{coſ}\, ac \pm \text{coſ}\, ab \sqrt{\text{coſ}\, ab^2 - \text{coſ}\, ac^2 + \text{ſin}\, ab^2 \text{coſ}\, b^2}}{\text{coſ}\, ab^2 + \text{ſin}\, ab^2\, \text{coſ}\, b^2}$

J'ai maintenant ſon coſinus par la formule $\text{coſ}\, bc^2 = 1 - \text{ſin}\, bc^2$, ce qui me donne en réduiſant $\text{coſ}\, bc =$

$$\frac{\cos ab \sin ac + \sin ab \cos b \sqrt{\cos ab^2 - \cos ac^2 + \sin ab^2 \cos b^2}}{\cos ab^2 + \sin ab^2 \cos b^2}.$$

On trouvera les angles a & b par l'analogie commune des ſinus.

Remarque.

Dans ce cas-ci le changement dc, $bc - bd$ en $bd - bc$ ne fait rien au réſultat.

TROISIEME CAS.

Etant donnés deux côtés & l'angle compris a b, b c *&* b.

Nous venons de trouver dans le cas précédent l'équation $\tan ab \cos b = \frac{\cos ac - \cos ab \cos bc}{\cos ab \sin bc}$, qui nous donne tout de ſuite $\cos ac = \cos b \sin ab \sin bc + \cos ab \cos bc$. Nous aurons maintenant par l'analogie commune des ſinus $\sin c = \frac{\sin ab \sin b}{\sin ac}$.

Donc $\tan c = \frac{\sin ab \sin b}{\sqrt{1 - \cos ac^2 - \sin ab^2 \sin b^2}} =$ (en mettant pour $\cos ac$ ſa valeur)

$$\frac{\sin ab \sin b}{\sqrt{1 - \cos b^2 \sin ab^2 \sin bc^2 - \cos ab^2 \cos bc^2 - (2 \cos b \sin bc \cos bc \sin ab \cos ab - \sin ab^2 \sin b^2.)}}$$

Or. la quantité qui eſt ſous le radical du dénominateur eſt $= 1 - \cos b^2 \sin ab^2 \sin bc^2 - \cos ab^2$

$\cos bc^2 - 2 \cos b \sin bc \cos bc \sin ab \cos ab -$ $\sin ab^2 + \sin ab^2 \cos b^2 = \cos ab^2 + \sin ab^2 \cos b^2$ $\cos bc^2 - \cos ab^2 \cos bc^2 - 2 \cos b \sin bc \cos bc$ $\sin ab \cos ab = \cos ab^2 \sin bc^2 + \sin ab^2 \cos b^2 \cos bc^2$ $- 2 \cos b \sin bc \cos bc \sin ab \cos ab = (\sin bc$ $\cos ab - \sin ab \cos b \cos bc)^2$. Donc $\tang c =$

$$\frac{\sin ab \sin b}{\sin bc \cos ab - \sin ab \cos b \cos bc} =$$

$$\frac{\sin b}{\cot ab \sin bc - \cot b \cos bc}.$$ On trouvera l'angle a par l'analogie $\sin a = \frac{\sin ab \sin b}{\sin bc}$. Ce calcul est commun aux deux figures 4 & 5 par la raison alléguée dans le cas précédent.

Quatrieme Cas.

Etant donnés un côté & deux angles adjacens à ce côté a b, b & a.

Nous avons dans le triangle bad par le quatrieme Cas des tr. rect. $\tang ad = \tang ab \cos bad$. Nous avons de même dans le triangle dac $\tang ad = \tang ac \cos dac$; donc $\tang ab \cos bad = \tang ac \cos dac = \tang ac \cos (a - bad) = \tang ac \cos a \cos bad + \tang ac \sin a \sin bad$; donc $\tang bad = \frac{\tang ab - \tang ac \cos a}{\tang ac \sin a} = \frac{\cot b}{\cos ab}$. (par le même cas des tr. rect.). Donc $\tang ac =$

$\frac{\sin ab}{\cot b \sin a + \cos a \cos ab}$. Le côté bc se feroit trouvé de la même maniere, & l'on a toute la suite en échangeant les angles a & b, ce qui donne tang $bc =$ $\frac{\sin ab}{\cot a \sin b + \cos b \cos ab}$. Pour avoir le troisieme angle c, nous aurons par le sixieme Cas des tr. rect. $\cos ad = \frac{\cos b}{\sin bad} = \frac{\cos c}{\sin dac} = \frac{\cos c}{\sin (a - bad)}$, donc $\cos c \sin bad = \cos b \sin a \cos bad -$ $\cos b \cos a \sin bad$; donc tang $bad =$ $\frac{\cos b \sin a}{\cos c + \cos b \cos a} = \frac{\cot b}{\cos ab}$; donc $\cos c = \cos$ $ab \sin a \sin b - \cos a \cos b$.

Remarque.

Le changement de $a - bad$ en $bad - a$ ne fait rien dans l'expression des côtés, mais il affecte l'expression du troisieme angle, & l'on a pour la figure 5 tang $bad = \frac{\sin a \cos b}{\cos b \cos a - \cos c}$ & $\cos c = \cos a \cos b$ $- \cos ab \sin a \sin b$.

Cinquieme Cas.

Etant donnés les trois côtés a b, a c *&* b c.

Nous avons déja trouvé ci-dessus $\cos b =$ $\frac{\cos ac - \cos ab \cos bc}{\sin ab \sin bc}$ (cinquieme Cas des tr. obliq.).

obliq.).On aura $\cos c$ en échangeant ab & ac, ſavoir, $\cos c = \frac{\cos ab - \cos ac \cos bc}{\sin ac \sin bc}$, & $\cos a$ en échangeant bc & ac, ſavoir $\cos a = \frac{\cos bc - \cos ab \cos ac}{\sin ab \sin ac}$.

SIXIEME CAS.

Etant donnés les trois angles a, b & c.

Nous avons déja trouvé ci-deſſus $\cos ab = \frac{\cos c + \cos b \cos a}{\sin b \sin a}$. On trouvera $\cos ac$ en échangeant b & c, ſavoir $\cos ac = \frac{\cos b + \cos c \cos a}{\sin c \sin a}$, & $\cos bc$ en échangeant a & c, ſavoir $\cos bc = \frac{\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$.

CHAPITRE IV.

Des analogies de Neper.

Les analogies de Neper ont pour but de rendre les résolutions des triangles sphériques tout-à-fait semblables à celles des triangles rectilignes. Avant de les démontrer, nous considérerons dans le triangle $a\,b\,c$, où nous avons abaissé la perpendiculaire $a\,d$, les rapports entre les segmens du côté & de l'angle divisé & les côtés ou les angles adjacens. Ces rapports se déduisent immédiatement de ce que nous avons démontré sur les triangles rectangles, & servent ensuite à démontrer ce qu'on appelle les analogies de Neper.

Pour trouver d'abord les rapports des segmens de la base aux angles adjacens, on aura par le troisieme Cas des tr. rect. tang $a\,d$ $=$ sin $b\,d$ tang b $=$ sin $d\,c$ tang c. Donc sin $b\,d$: sin $d\,c$ $=$ tang c : tang b $=$ cot b : cot c ; c'est-à-dire, que les sinus des segmens de la base sert entr'eux comme les cotangentes des angles adjacens.

Pour trouver les rapports des mêmes segmens avec les côtés correspondans, on aura par le premier Cas des tr. rect. cos $a\,d$ $= \frac{\text{cos } a\,b}{\text{cos } b\,d} = \frac{\text{cos } a\,c}{\text{cos } d\,c}$, donc cos $b\,d$: cos $d\,c$ $=$ cos $a\,b$: cos $a\,c$, c'est-à-dire, que les cosinus des segmens de la base sont entr'eux comme les cosinus des côtés adjacens.

Pour trouver les rapports des segmens de l'angle vertical aux côtés adjacens, on aura par le quatrieme Cas des tr. rect. tang ad = tang ab cos bad = tang ac cos dac. Donc cos bad : cos dac = tang ac : tang ab = cot ab : cot ac, c'est-à-dire, que les cosinus des segmens de l'angle vertical sont entr'eux comme les cotangentes des côtés adjacens.

Pour trouver les rapports des segmens du même angle aux angles sur la base, on aura par le sixieme Cas des tr. rect. cos $ad = \frac{\cos b}{\sin bad} = \frac{\cos c}{\sin dac}$. Donc sin bad : sin dac = cos b : cos c, c'est-à-dire, que les sinus des segmens de l'angle vertical sont entr'eux comme les cosinus des angles sur la base.

Cela posé, je vais démontrer les analogies de Neper pour les six Cas.

PREMIER CAS.

Etant donnés deux angles & un côté opposé à l'un de ces angles b, c *&* a b. *Le côté* a c *se trouve tout de suite par l'analogie commune.*

Pour avoir le côté bc au moyen des deux angles & des deux côtés, nous remarquerons que nous avons par les deux premiers rapports précédens, les rapports des segmens de la base bc aux côtés & aux angles; nous pourrons tirer de là le rapport de la base entiere bc aux côtés & aux angles. Nous avons d'abord $\sin bd : \sin dc = \cot b : \cot c$. Donc, $\sin bd + \sin dc : \sin bd - \sin dc = \cot b + \cot c : \cot b - \cot c$. Nous avons fait voir ci-dessus que $\cos A + \cos B = 2 \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ & $\cos A - \cos B = 2 \sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Je trouverai de même les valeurs de $\sin A + \sin B$ & de $\sin A - \sin B$; car $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A + 2 \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}B =$ (en multipliant le premier terme par $\sin \frac{1}{2}B^2 + \cos \frac{1}{2}B^2 = 1$ & le second par $\sin \frac{1}{2}A^2 + \cos \frac{1}{2}A^2 = 1$) $2(\sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B^2 + \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B^2 + \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}A^2 + \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}A^2) = 2(\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B + \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B) \times (\cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B + \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B) = 2 \sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. On trouvera précisément de la même maniere $\sin A - \sin B = 2 \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \sin(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

Notre proportion deviendra donc $\sin \frac{bd + dc}{2} \cos \frac{bd - dc}{2} : \cos \frac{bd + dc}{2} \sin \frac{bd - dc}{2} = \cot b + \cot c : \cot b - \cot c = \frac{\cos b}{\sin b} + \frac{\cos c}{\sin c} : \frac{\cos b}{\sin b} - \frac{\cos c}{\sin c} = \cos b \sin c + \cos c \sin b : \cos b \sin c - \cos c \sin b = \sin(c + b) : \sin(c - b) = \sin \frac{bc}{2} \cos \frac{(bd - dc)}{2} : \cos \frac{bc}{2} \sin \frac{(bd - d}{2}$

$= \text{tang}\,\frac{bc}{2} : \text{tang}\,\frac{(bd - dc)}{2}$, donc $\text{tang}\,\frac{bc}{2} =$

$\text{tang}\,\frac{(bd - dc)}{2}\,\frac{\text{ſin}\,(c+b)}{\text{ſin}\,(c-b)}$. Pour chaſſer maintenant de cette expreſſion $\text{tang}\,\frac{(bd - dc)}{2}$, je prens le ſecond rapport ſuſmentionné qui me donne $\text{coſ}\,bd : \text{coſ}\,dc = \text{coſ}\,ab : \text{coſ}\,ac$. Donc, $\text{coſ}\,bd + \text{coſ}\,dc : \text{coſ}\,bd - \text{coſ}\,dc = \text{coſ}\,ab + \text{coſ}\,ac : \text{coſ}\,ab - \text{coſ}\,ac$ ou $\text{coſ}\,\frac{bc}{2}\,\text{coſ}\,\frac{(bd - dc)}{2}$; $\text{ſin}\,\frac{bc}{2}\,\text{ſin}\,\frac{(bd - dc)}{2} = \text{coſ}\,\frac{(ab + ac)}{2}\,\text{coſ}\,\frac{(ab - ac)}{2} : \text{ſin}\,\frac{(ab + ac)}{2}\,\text{ſin}\,\frac{(ab - ac)}{2}$; donc $1 : \text{tang}\,\frac{bc}{2}\,\text{tang}\,\frac{(bd - dc)}{2} = 1 : \text{tang}\,\frac{(ab + ac)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab - ac)}{2}$ & $\text{tang}\,\frac{(bd - dc)}{2}$

$$= \frac{\text{tang}\,\frac{(ab + ac)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab - ac)}{2}}{\text{tang}\,\frac{bc}{2}}.$$

Donc ſubſtituant cette valeur, il vient $[\text{tang}\,\frac{bc}{2}]^2 = \text{tang}\,[\frac{ab + ac}{2}]\,\text{tang}\,\frac{(ab - ac)}{2}\,\frac{\text{ſin}\,(c+b)}{\text{ſin}\,(c-b)}$. Pour ſimplifier cette expreſſion, je vais conſidérer le rapport entre les angles & les côtés que me donne l'analogie commune, ſavoir, $\sin b : \sin c = \sin ac : \sin ab$. Donc, $\sin b + \sin c : \sin b - \sin c =$

$\sin ac + \sin ab : \sin ab - \sin ac$ ou $\sin \left(\frac{+c}{2}\right)$

$\cos\left(\frac{c-b}{2}\right) : \cos\frac{(b+c)}{2} \sin\frac{(c-b)}{2} =$

$\sin\frac{(ac+ab)}{2} \cos\frac{(ab-ac)}{2} : \cos\frac{(ac+ab)}{2}$

$\sin\frac{(ab-ac)}{2}$ & $\mathrm{tang}\frac{(b+c)}{2} : \mathrm{tang}\frac{(c-b)}{2}$

$= \mathrm{tang}\frac{(ac+ab)}{2} : \mathrm{tang}\frac{(ab-ac)}{2}$ ou $\cos\frac{(b+c)}{2}$

$= \dfrac{\sin\frac{(b+c)}{2}\ \mathrm{tang}\frac{(ab-ac)}{2}}{\mathrm{tang}\frac{(c-b)}{2}\ \mathrm{tang}\frac{(ab+ac)}{2}}$. Mais $\sin(b+c)$

$= 2\sin\frac{(b+c)}{2}\cos\frac{(b+c)}{2}$ & $\sin(c-b) =$

$2\sin\frac{(c-b)}{2}\cos\frac{(c-b)}{2}$, donc $\dfrac{\sin(b+c)}{\sin(c-b)} =$

$\dfrac{\sin\frac{(b+c)}{2}\cos\frac{(b+c)}{2}}{\sin\frac{(c-b)}{2}\cos\frac{(c-b)}{2}}$ = (en ſubſtituant pour

$\cos\frac{(b+c)}{2}$ la valeur que nous venons de trouver)

$$\frac{\text{ſin}\,\frac{(b+c)^2}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab-ac)}{2}}{\text{ſin}\,\frac{(c-b)^2}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab+ac)}{2}}.$$ Donc, mettant cette valeur dans notre équation, nous aurons

$$\text{tang}\left(\frac{bc}{2}\right)^2 = \frac{\text{ſin}\frac{(b+c)^2}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab-ac)^2}{2}}{\text{ſin}\left(\frac{c-b}{2}\right)^2}$$ ou

$$\text{tang}\,\frac{bc}{2} = \frac{\text{ſin}\,\frac{(b+c)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab-ac)}{2}}{\text{ſin}\,\frac{(c-b)}{2}}.$$ Si au lieu de chercher la valeur de coſ $(b+c)$ nous avions pris celle de ſin $(b+c)$, nous aurions trouvé

$$\text{tang}\,\frac{bc}{2} = \frac{\text{coſ}\,\frac{b+c}{2}\,\text{tang}\,\frac{(ab+ac)}{2}}{\text{ſin}\,\frac{(c-b)}{2}}.$$ On a ainſi la valeur du troiſieme côté.

Cela étant trouvé, le troiſieme angle a ſe trouvera par l'analogie commune.

SECOND CAS.

Etant donnés deux côtés & un angle opposé à l'un de ces côtés, a b, a c & b.

L'angle c se trouvera tout de suite par l'analogie commune. Pour avoir l'angle a au moyen des deux côtés & des deux angles, nous procéderons comme dans le premier cas, excepté qu'au lieu des deux premiers rapports susmentionnés, nous prendrons les deux derniers. Le troisieme rapport nous donne cof bad : cof dac = cot ab : cot ac, donc cof bad + cof dac : cof bad — cof dac = cot ab + cot ac : cot ab — cot ac, ou cof $\frac{bac}{2}$ × cof $\frac{(bad - dac)}{2}$: fin $\frac{bac}{2}$ fin $\frac{(bad - dac)}{2}$ = fin $(ab + ac)$: fin $(ab - ac)$, donc tang $\frac{bac}{2}$ tang $\frac{(bad - dac)}{2}$

$$= \frac{\text{fin}\,(ab - ac)}{\text{fin}\,(ab + ac)}, \ \&\ \text{tang}\,\frac{bac}{2} =$$

$$\frac{\text{fin}\,(ab - ac)}{\text{fin}\,(ab + ac)\ \text{tang}\,\frac{(bad - dac)}{2}}.$$ Pour chasser maintenant de cette expression tang $\frac{(bad - dac)}{2}$ je prends le quatrieme rapport qui me donne fin bad : fin dac = cof b : cof c ; donc, fin bad + fin dac : fin bad — fin dac = cof b + cof c : cof b — cof c, ou

ou $\sin\frac{bac}{2}\cos\frac{(bad-dac)}{2}:\cos\frac{bac}{2}\sin\frac{bad-dac}{2}=\cos\frac{(b+c)}{2}\cos\frac{(c-b)}{2}:\sin\frac{(c+b)}{2}\sin\frac{(c-b)}{2}$; donc $\text{tang}\,\frac{bac}{2}:\text{tang}\,\frac{(bad-dac)}{2}=1:\text{tang}\,\frac{(b+c)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(c-b)}{2}$ & $\text{tang}\,\frac{bad-dac)}{2}=\text{tang}\,\frac{bac}{2}\,\text{tang}\,\frac{(b+c)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(c-b)}{2}$. Donc, subſtituant cette valeur, il vient $\text{tang}\left(\frac{bac}{2}\right)^2=$

$$\frac{\sin(ab-ac)}{\sin(ac+ab)\,\text{tang}\,\frac{(b+c)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(c-b)}{2}}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $\text{tang}\,\frac{(b+c)}{2}:\text{tang}\,\frac{(c-b)}{2}=\text{tang}\,\frac{(ac+ab)}{2}:\text{tang}\,\frac{(ab-ac)}{2}$.

Donc, $\text{tang}\,\frac{c-b}{2}=\dfrac{\text{tang}\,\frac{(ab-ac)}{2}\,\text{tang}\,\frac{(b+c)}{2}}{\text{tang}\,\frac{(ab+ac)}{2}}$.

De plus $\frac{\sin(ab-ac)}{\sin(ab+ac)}=$

$$\frac{\sin\frac{(ab-ac)}{2}\cos\frac{(ab-ac)}{2}}{\sin\frac{(ab+ac)}{2}\cos\frac{(ab+ac)}{2}}$$, substituant donc ces deux valeurs, on obtiendra tang $\left(\frac{bac}{2}\right)^2 =$

$$\frac{\sin\frac{(ab-ac)}{2}\cos\frac{(ab-ac)}{2}\operatorname{tang}\frac{ab+ac}{2}}{\sin\frac{(ab+ac)}{2}\cos\frac{(ab+ac)}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\operatorname{tang}\frac{(ab-ac)}{2}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{ab-ac}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{ab+ac}{2}\right)^2\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}.$$ Donc cot $\frac{bac}{2}$

$$= \frac{\cos\left(\frac{ab+ac}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}\right)}{\cos\frac{ab-ac}{2}}.$$ Si au lieu de prendre la valeur de tang $\frac{c-b}{2}$ j'avois pris tang $\frac{c+b}{2}$, j'aurois obtenu cette expression cot $\frac{bac}{2}$

$$= \frac{\sin\frac{(ab+ac)}{2}\operatorname{tang}\frac{c-b}{2}}{\sin\frac{(ab-ac)}{2}}.$$ On a ainsi le troisieme angle. Cela étant trouvé, on a le troisieme côté bc par l'analogie commune.

Troisieme Cas.

Etant donnés deux côtés & l'angle compris a b, a c & a.

Les deux expressions trouvées à la fin du cas précédent nous donnent $\text{tang}\,\frac{c-b}{2} =$

$$\frac{\cot\frac{bac}{2}\,\sin\frac{(ab-ac)}{2}}{\sin\frac{(ab+ac)}{2}}\ \&\ \text{tang}\,\frac{c+b}{2} = \frac{\cot\frac{bac}{2}\,\cos\frac{(ab-ac)}{2}}{\cos\frac{(ab+ac)}{2}}.$$

Ayant donc la demi somme & la différence de ces angles, on aura ces angles mêmes b & c. Cela étant trouvé, on aura le troisieme côté par l'analogie commune.

Quatrieme Cas.

Etant donnés un côté & les deux angles adjacens à ce côté b, c & b c.

Les deux expressions trouvées à la fin du premier Cas nous donnent, $\text{tang}\,\frac{(ab-ac)}{2} =$

$$\frac{\text{tang}\,\frac{bc}{2}\,\sin\frac{(c-b)}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\ \&\ \text{tang}\frac{(ab+ac)}{2} =$$

$$\frac{\text{tang}\,\frac{bc}{2}\,\text{cos}\,\frac{c-b}{2}}{\text{cos}\,\frac{(b+c)}{2}}.$$ Ayant donc la demi somme & la demi différence des côtés, on aura les côtés mêmes *a b* & *a c*. Cela étant trouvé, on aura le troisieme angle par l'analogie commune.

CINQUIEME CAS.

Etant donnés les trois côtés a b, a c & b c.

Nous avons trouvé dans le premier Cas tang $\frac{(bd - dc)}{2}$

$$= \frac{\text{tang}\,\frac{ab+ac}{2}\,\text{tang}\,\frac{ab-ac}{2}}{\text{tang}\,\frac{bc}{2}}.$$ Je connois donc la demi différence des segmens *b d*, *d c*, je connois leur demi somme, puisque je connois le côté *b c*, je connoîtrai donc ces segmens *b d*, *d c*. Cela étant, on a par le premier Cas des tr. rectang. cos *c* = cot *a c* tang *d c*.

Si on veut aussi connoître les autres angles, on les aura par l'analogie commune.

SIXIEME CAS.

Etant donnés les trois angles a, b & c.

Nous avons trouvé dans le fecond Cas tang $\frac{(bad-dac)}{2}$ $=$ tang $\frac{bac}{2}$ tang $\frac{b+c}{2}$ tang $\frac{(c-b}{2}$. Je connois donc la demi différence des fegmens de l'angle a, je connois leur demi fomme, puifque j'ai l'angle a, je connoîtrai donc ces fegmens bad & dac. Cela étant, on a par le fixieme Cas des tr. rect. cof ac $=$ cot c cot dac.

Si on veut auffi connoître les autres côtés, on les aura par l'analogie commune.

CHAPITRE V.

Usage de la trigonométrie pour résoudre les équations du troisieme degré.

ON peut faire usage des tables des sinus pour résoudre les équations algébriques. Celles du second degré se construisent tout simplement par le moyen du cercle, comme on le fait voir dans tous les livres où l'on traite de l'application de l'algebre à la géométrie. Mais celles du troisieme demandent quelques opérations qu'il est bon d'exposer avec simplicité & netteté, plusieurs auteurs ayant donné des démonstrations assez indirectes & peu satisfaisantes, au moins pour les deux dernier Cas.

Soit, l'équation $x^3 - px + q = 0$, p & q étant des nombres positifs. On sait que cette équation a ses trois racines réelles si $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$. Pour la résoudre par les tables des sinus, je remarque que la considération des sinus des arcs triples nous conduit à une équation du troisieme degré semblable à celle que je viens de proposer. Car, $\sin 3a = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a$, mais $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ & $\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2 = 1 - 2 \sin a^2$, donc $\sin 3a = 2 \sin a \cos a^2 + \sin a - 2 \sin a^3 = 3 \sin a - 4 \sin a^3$. Donc $4 \sin a^3 - 3 \sin a + \sin 3a = 0$, ou $\sin a^3 - \frac{3}{4}\sin a + \frac{\sin 3a}{4} = o$. Si l'on fait dans cette équation $\sin a = x$, on aura $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin 3a}{4} = o$, donc $p = \frac{3}{4}$ & $q = \frac{\sin 3a}{4}$, donc $\frac{p^3}{27} = \frac{1}{64}$ & $\frac{q^2}{4} = \frac{(\sin 3a)^2}{64}$. Or, un ſinus eſt toujours plus petit que l'unité (à moins qu'il ne lui ſoit égal, ce qui rend $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$ ce qui fait diſparoître le radical & évanouir toute difficulté), donc $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, donc cette équation eſt bien ſemblable à la propoſée. Pour réſoudre donc mon équation, je n'ai qu'à faire $q = \frac{\sin 3a}{4}$, je trouverai donc $\sin 3a$, & par conſéquent a, & par conſéquent $\sin a$ qui eſt la valeur x, les deux autres valeurs ſe trouveront en prenant $x = \sin(a + \frac{1}{3}c)$, $= \sin(a + \frac{2}{3}c)$. (c étant la demi circonférence du cercle).

Si j'avois l'équation $x^3 - px - q = o$, je conſidérerois que $\cos 3a = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a = \cos a^3 - 3\cos a \sin a^2 = 4\cos a^3 - 3\cos a$, donc $4\cos a^3 - 3\cos a - \cos 3a = o$, & l'on prouve comme ci-deſſus que dans cette équation $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$. Pour réſoudre donc mon équation, je n'ai qu'à faire $q = \frac{\cos 3a}{4}$, je trouverai donc cos $3a$, & par conséquent a, & par conséquent cos a qui est la valeur de x que nous faisons ici $=$ cos a; les deux autres valeurs seront $x = \cos(a + \frac{1}{3}c)$, $x = \cos(a + \frac{2}{3}c)$.

Pour démontrer rigoureusement les deux autres valeurs de x dans le premier Cas, je divise l'équation $x^3 - 3x + \sin 3a$ par $x - \sin a$ (en substituant pour $\sin 3a$ sa valeur $3 \sin a - \sin a^3$), & il me reste $x^2 + x \sin a + \sin a^2 - 3 = 0$; je résous cette derniere équation, & j'ai $x = -\frac{\sin a \pm \cos a \sqrt{3}}{2}$; j'ai donc ces deux autres valeurs, de x, $-\frac{1}{2}\sin a + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos a$ & $-\frac{1}{2}\sin a - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos a$. Or, $-\frac{1}{2}$ est le cosinus de $\frac{c}{3}$, le rayon étant l'unité, & $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en est le sinus, la premiere de ces deux valeurs devient donc $\sin a \cos \frac{c}{3} + \cos a \sin \frac{c}{3}$ ou $\sin(a + \frac{c}{3})$, de même $-\frac{1}{2}$ est le cosinus de $\frac{2c}{3}$ & $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en est le sinus, la seconde de ces valeurs devient donc $\sin a \cos \frac{2c}{3} + \cos a \sin \frac{2c}{3}$, ou $\sin(a + \frac{2c}{3})$. Les trois valeurs de x sont donc bien telles que je les ai données. On prouvera la même chose pour le second Cas, où il n'y a qu'à substituer les cosinus au lieu des sinus.

Soit maintenant l'équation $x^3 - px + q = 0$ & que

que $\frac{4}{27}p^3 < \frac{8}{5}q^2$; voici comment je trouverai la valeur réelle de x; car on sait que dans ce cas les deux autres sont imaginaires. J'ai prouvé que dans l'équation $\sin a^3 - \frac{3}{4}\sin a + \frac{1}{4}\sin 3a = o$, on avoit toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, parce que $\sin 3a$ étoit toujours < 1. Si au lieu du dernier terme $\frac{\sin 3a}{4}$, j'avois eu un terme de cette forme $\frac{1}{4\sin 3a} = \frac{1}{4}\operatorname{cosec.} 3a$, j'aurois tiré d'un semblable raisonnement une une conclusion contraire, parce que $\frac{1}{\sin 3a} = \operatorname{cosec.} 3a$ seroit toujours > 1. Il faudroit donc pouvoir comparer notre équation avec une équation qui, au lieu des sinus, renfermât les cosecantes, & dont les termes fussent analogues. Pour cela, je fais $x = \operatorname{cosec.} b$, ($b$ étant une indéterminée que je déterminerai ensuite.) Je fais cette équation $\operatorname{cosec.} b^3 - \frac{3\operatorname{cosec.} b}{4} + \frac{\operatorname{cosec.} a}{4} = o$, & je vais chercher quel doit être b pour que cette équation ait lieu. Pour trouver la valeur de b, je résous ces cosec. de b & de a en cosec. ou cot. de la moitié de b & de a. On sait que $\operatorname{tang} b = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2}$, donc $\cot b = \frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$ & $\operatorname{cosec.} b = \sqrt{1 + \cot b^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}\right)^2} = \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}b^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{1 + \cot\frac{1}{2}b^2}{2\cot\frac{1}{2}b}$. Substituant cette valeur dans l'équation, on aura

$\frac{(1 + \cot \frac{1}{2} b^2)^3}{8 \cot \frac{1}{2} b^3} - \frac{3(1 + \cot \frac{1}{2} b^2)}{8 \cot \frac{1}{2} b} + \frac{\text{cosec. } x}{4}$ $= 0$ ou $1 + \cot \frac{1}{2} b^2 + 3 \cot \frac{1}{2} b^4 + \cot \frac{1}{2} b^6 - 3 \cot \frac{1}{2} b^2 - 3 \cot \frac{1}{2} b^4 + 2 \cot \frac{1}{2} b^3 \text{ cosec. } a = 0$ ou $1 + \cot \frac{1}{2} b^6 + 2 \cot \frac{1}{2} b^3 \text{ cosec. } a = 0$. Or, cosec. a $\frac{1}{\sin a} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}$ donc $1 + \cot \frac{1}{2} b^6 + \frac{\cot \frac{1}{2} b^3}{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}$ $= 0$. Donc, $\cot \frac{1}{2} b^6 = - \frac{\cot \frac{1}{2} b^3}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} - 1$ &

$$\cot \frac{1}{2} b^3 = \frac{-1}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} \pm \sqrt{\frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} a^2 \cos \frac{1}{2} a^2} - 1} = \frac{-1}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} \pm \frac{\sqrt{1 - 4 \sin \frac{1}{2} a^2 \cos \frac{1}{2} a^2}}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}$$

$$= - \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \sin \frac{1}{2} a^2 + 4 \sin \frac{1}{2} a^4}}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} = - \frac{1 + (1 - 2 \sin \frac{1}{2} a^2)}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} = \text{(en prenant le signe } -)$$

$$- \frac{2(1 - \sin \frac{1}{2} a^2)}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} = - \frac{2 \cos \frac{1}{2} a^2}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a} = - \cot \frac{1}{2} a.$$

Donc $\cot \frac{1}{2} b^3 = - \cot \frac{1}{2} a$. Donc, dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, je ferai $q = \frac{\text{cosec. } a}{4}$ ce qui me donnera cosec. a & par conséquent a, & par conséquent $\frac{1}{2} a$, je trouverai ensuite b par l'équation $\cot \frac{1}{2} b^3 = - \cot \frac{1}{2} a$, & j'aurai par cela même x qui est $=$ cosec. b. Si j'avois eu l'équation $x^3 - px - q = 0$, j'aurois pris l'équation cosec. $b^3 - \frac{3 \text{ cosec. } b}{4} - \frac{\text{cosec. } a}{4}$

$= o$, & j'aurois eu $\cot \frac{1}{2} b^2 = \cot \frac{1}{2} a$. Si au lieu de prendre le ſigne $-$, j'avois pris le ſigne $+$, j'aurois eu $\cot \frac{1}{2} b^2 = -\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$ dans le premier Cas, & $\cot \frac{1}{2} b^2 = \operatorname{tang} \frac{1}{2} a$ dans le ſecond.

Si j'ai maintenant l'équation $x^3 + px \pm q = o$, qui, à cauſe du ſigne $+$ du ſecond terme, a néceſſairement deux racines imaginaires, ſoit que le troiſieme terme ſoit poſitif, ſoit qu'il ſoit négatif, je vois que je ne puis me ſervir d'aucune des trois équations que j'ai employées précédemment, parce que dans celle des ſinus & coſinus $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$, & dans celle des coſecantes $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} q^2$; or, ici il faut que $\frac{1}{27} p^3$ puiſſe être plus grand ou plus petit que $\frac{1}{4} q^2$ indifféremment. Cela me fait voir tout de ſuite que je puis employer les cotangentes qui peuvent être & plus petites & plus grandes que le rayon. Je prendrai donc cette équation $\cot b^3 + \frac{3}{4} \cot b \pm \frac{\cot a}{4} = o$; j'aurai donc $x = \cot b$, & je chercherai quel doit être b pour que cette équation ait lieu. Cette équation devient en mettant pour $\cot b$ ſa valeur trouvée ci-deſſus, $\frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} b^2}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} b} = \frac{\cot \frac{1}{2} b^2 - 1}{2 \cot \frac{1}{2} b}$, $\frac{(\cot \frac{1}{2} b^2 - 1)^3}{8 \cot \frac{1}{2} b^3} + \frac{3(\cot \frac{1}{2} b^2 - 1)}{8 \cot \frac{1}{2} b} \pm \frac{\cot a}{4} = o$, ou $\cot \frac{1}{2} b^6 - 3 \cot \frac{1}{2} b^4 + 3 \cot \frac{1}{2} b^2 - 1 + 3 \cot \frac{1}{2} b^4 - 3 \cot \frac{1}{2} b^2 \pm 2 \cot a \cot \frac{1}{2} b^3 = o$, ou $\cot \frac{1}{2} b^6 \pm 2 \cot a \cot \frac{1}{2} b^3 - 1 = o$, donc, $\cot \frac{1}{2} b^6 = \mp 2 \cot a \cot \frac{1}{2} b^3 + 1$ & $\cot \frac{1}{2} b^3 = \mp$

$\cot a \pm \sqrt{1 \cot a^2} = \mp \cot a + \text{cosec}\, a = \cot a + \text{cosec.}\, a$. Or, $\cot a + \text{cosec.}\, a = \cot \frac{1}{2} a$; car $\cot a + \text{cosec.}\, a = \frac{\text{cos}\, a}{\text{sin}\, a} + \frac{1}{\text{sin}\, a} = \frac{2 \text{cos} \frac{1}{2} a^2}{2 \text{cos} \frac{1}{2} a \,\text{sin} \frac{1}{2} a}$ $= \cot \frac{1}{2} a$; donc, $\cot \frac{1}{2} b^3 = \cot \frac{1}{2} a$. Suivant les signes que j'aurois pris, j'aurois trouvé $\cot \frac{1}{2} b^3 = -\cot a - \text{cosec.}\, a = -\cot \frac{1}{2} a$, & $\cot \frac{1}{2} b^3 =$

$$\cot a - \text{cosec.}\, a = \frac{\text{cos}\, a}{\text{sin}\, a} - \frac{1}{\text{sin}\, a} = -\frac{2 \text{sin} \frac{1}{2} a^2}{2 \text{cos} \frac{1}{2} a \,\text{sin} \frac{1}{2} a} = -\text{tang} \frac{1}{2} a,$$ & enfin $\cot \frac{1}{2} b^3 = \text{cosec.}\, a - \cot a = \text{tang} \frac{1}{2} a.$

On voit aussi qu'au lieu des cosecantes & des cotangentes, j'aurois pu prendre les secantes & les tangentes, & que j'aurois obtenu des résultats analogues.

Il ne me reste plus qu'une remarque à faire, c'est que dans l'application aux exemples, il faut prendre garde à l'homogeneité; nous avons toujours fait ici le rayon $= 1$, mais comme dans les équations qu'on propose, on ne sait si l'on fait la même supposition, il faudra faire $x = r \text{cos}\, a = r \text{sin}\, a$ ou $= r \text{cosec.}\, a$ ou $= r \cot a$. Par exemple, dans l'équation $x^3 - 3 x - 1 = 0$ qui doit avoir ses trois racines réelles, je prens l'équation $\text{cos}\, a^3 - \frac{3}{4} \text{cos}\, a - \frac{\text{cos}\, 3 a}{4}$ $= 0$; il faut faire $x = r \text{cos}\, a$, ce qui donne $\text{cos}\, a^3 = \frac{x^3}{r^3}$, $\text{cos}\, a = \frac{x}{r}$, j'ai donc $\frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{x}{r} -$

$\frac{\cos 3\,a}{4\,r} = 0$, (cos 3 a doit aussi être divisé par r à cause de l'homogencité), j'ai donc $x^3 - \frac{1}{4} r^2 x - \frac{r^2 \cos 3\,a}{4} = 0$. J'ai maintenant en comparant $\frac{3}{4} r = 3$, ou $r^2 = 4$ ou $r = 2$; j'ai ensuite $1 = \frac{r^2 \cos 3\,a}{4} = \cos 3\,a$, donc $\cos 3\,a = 1 = \frac{1}{2} r = \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, donc $3\,a = 60^\circ$, $a = 20^\circ$, donc $x = \cos 20^\circ = \cos 140^\circ = \cos 260^\circ$. Il faudra se conduire de même dans les autres Cas.

CHAPITRE VI.

Des analogies différentielles.

L'on sait de quelle utilité sont dans l'astronomie les analogies différentielles que M. Cotes a données dans son bel ouvrage de *Harmonia mensurarum.* Elles ne sont pas difficiles à démontrer géométriquement, mais ces démonstrations sont plus synthétiques qu'analytiques ; pour suivre donc le plan que je me propose ici, je vais les démontrer d'une maniere purement analytique, en me servant des valeurs analytiques des côtés & des angles des triangles sphériques que j'ai donnés ci-dessus.

PREMIER CAS.

Supposant constans un côté & un angle adjacent, trouver les variations des autres côtés & des autres angles d'un triangle sphérique.

Constantes a c & a.

Il est évident qu'il y a ici six rapports à chercher, car il reste deux côtés & deux angles, & l'on doit trouver les rapports des variations des côtés, les rapports des variations des angles, & les rapports des variations de chacun des deux angles à chacun des deux côtés.

L'analogie commune nous donne sin a : sin b c

$= \sin b : \sin ac$. Donc $\sin a \sin ac = \sin bc \sin b$. Donc en différentiant $dbc \cos bc \sin b + db \cos b \sin bc = 0$. Donc $dbc = -\frac{db \operatorname{tang} bc}{\operatorname{tang} b}$. Donc en faisant abstraction des signes qui varient suivant que les angles sont obtus ou aigus, on aura $db : dbc = \operatorname{tang} b : \operatorname{tang} bc$.

Maintenant on a par le quatrieme Cas des solutions analytiq. $\operatorname{tang} ac = \frac{\sin ab}{\cot b \sin a + \cos a \cos ab}$, donc $\sin ab = \operatorname{tang} ac (\cot b \sin a + \cos a \cos ab)$. Donc $dab \cos ab = \operatorname{tang} ac \left(-\frac{db}{\sin b^2} \sin a - dab \sin ab \cos a\right)$ ou $dab (\cos ab \sin b^2 + \operatorname{tang} ac \sin b^2 \sin ab \cos a) = - db \sin a \operatorname{tang} ac$. Mais par le troisieme Cas des solut. analyt. on a $\cos bc = \cos a \sin ab \sin ac + \cos ab \cos ac$, substituant cette valeur on a $dab \sin b^2 \cos bc = - db \sin a \sin ac = - db \sin b \sin bc$. Donc $dab = -\frac{db \operatorname{tang} bc}{\sin b}$, ou en faisant abstraction des signes, $dab : db = \operatorname{tang} bc : \sin b$. En composant ces deux proportions $\begin{matrix} db : dbc = \operatorname{tang} b : \operatorname{tang} bc \\ dab : db = \operatorname{tang} bc : \sin b \end{matrix}$, on obtient celle-ci $dab : dbc = 1 : \cos b$.

On a ensuite par le sixieme Cas des solut. analyt. $\cos ac \sin c \sin a = \cos b + \cos c \cos a$. Donc dc

$\cos c \cos ac \sin a = - db \sin b - dc \sin c \cos a$; ou $dc\,(\cos c \cos ac \sin a + \sin c \cos a) = - db$ $\sin b$, mais $\sin b = \frac{\sin ac \sin a}{\sin bc}$, donc $dc\,(\cos c$ $\cos ac \sin a + \sin c \cos a) = - \frac{db \sin ac \sin a}{\sin bc}$. De plus par le quatrieme Cas des ſolut. analyt. $\tang bc = \frac{\sin ac}{\cot a \sin c + \cos c \cos ac}$. Donc $\cos a \sin c + \cos c$ $\cos ac \sin a = \frac{\sin ac \sin a}{\tang bc}$. Donc $\frac{dc \sin ac \sin a}{\tang bc} = - \frac{db \sin ac \sin a}{\sin bc}$ ou $dc = - \frac{bd}{\cos bc}$, ou en faiſant l'abſtraction des ſignes, $db : dc = \cos bc : 1$.

En compoſant ces deux proportions

$$dab : db = \tang bc : \sin b$$
$$db : dc = \cos bc : 1$$

on obtient celle-ci, $dab : dc = \sin bc : \sin b$.

De même en compoſant ces deux proportions,

$$dbc : db = \tang bc : \tang b$$
$$db : dc = \cos bc : 1$$

on obtient celle-ci, $dbc : dc = \sin bc : \tang b$.

Voici

Voici donc les rapports qui résultent de ces six Cas.

$db : dbc = \text{tang}\, b : \text{tang}\, bc$	$db : dc = \text{cof}\, bc : 1$
$dab : db = \text{tang}\, bc : \text{fin}\, b$	$dab : dc = \text{fin}\, bc : \text{fin}\, b$
$dab : dbc = 1 : \text{cof}\, b$	$dbc : dc = \text{fin}\, bc : \text{tang}\, b$

Remarque.

Dans le développement de ce Cas & des suivans, j'ai employé le calcul différentiel pour abréger, car du reste il feroit aifé de procéder de façon à démontrer analytiquement toutes ces analogies fans calcul différentiel. Je vais en donner un exemple : j'ai eu au commencement de ce cas $\text{fin}\, a\, \text{fin}\, ac = \text{fin}\, bc\, \text{fin}\, b$. Faifons varier bc d'une petite quantité dbc & b d'une petite quantité db, ac & a reftant les mêmes, on aura $\text{fin}\, a\, \text{fin}\, ac = \text{fin}\, (bc + dbc)\, \text{fin}\, (b + db) = (\text{fin}\, bc\, \text{cof}\, dbc + \text{cof}\, bc\, \text{fin}\, dbc)\, (\text{fin}\, b\, \text{cof}\, db + \text{cof}\, b\, \text{fin}\, db) = (\text{fin}\, bc + dbc\, \text{cof}\, bc)\, (\text{fin}\, b + db\, \text{cof}\, b)$ (parce que le finus d'un très-petit arc eft égal à l'arc même & fon cofinus $= 1$) $= \text{fin}\, bc\, \text{fin}\, b + dbc\, \text{cof}\, bc\, \text{fin}\, b + db\, \text{cof}\, b\, \text{fin}\, bc + dbc\, db\, \text{cof}\, b\, \text{cof}\, bc = \text{fin}\, bc\, \text{fin}\, b + dbc\, \text{cof}\, bc\, \text{fin}\, b + db\, \text{cof}\, b\, \text{fin}\, bc$ (parce que le dernier terme étant le produit de deux très-petites quantités n'a aucune proportion avec les autres, & peut être négligé rélativement à eux). Retranchant maintenant la premiere équation dans la feconde, j'obtiens $dbc\, \text{cof}\, bc\, \text{fin}\, b + db\, \text{cof}\, b\, \text{fin}\, bc = 0$, ce qui eft le même réfultat que j'ai obtenu par la différentiation. Il en eft de même de tous les autres Cas. On peut donc fans inconvénient exposer la théorie des analogies différentielles à des jeunes gens qui ne connoîtroient pas encore le calcul différentiel.

Au reste, je n'ai cherché que les expressions les plus simples de ces rapports, l'on sent bien qu'en substituant les différentes valeurs analytiques des côtés & des angles, on trouvera différentes expressions, suivant le besoin qu'on peut en avoir, mais cela ne renferme aucune difficulté.

SECOND CAS.

Supposant constans un côté & l'angle qui lui est opposé, trouver les variations des autres côtés & des autres angles d'un triangle sphérique.

Constantes bc & a.

Nous avons ici les six mêmes Cas que dans le N°. précédent.

L'analogie commune nous donne $\sin a : \sin bc = \sin b : \sin ac$. Donc $\frac{\sin a}{\sin bc} = \frac{\sin b}{\sin ac}$. Donc $db \cos b \sin ac = dac \cos ac \sin b$. Donc $db : dac = \text{tang}\, b : \text{tang}\, ac$. On aura de même $\frac{\sin a}{\sin bc} = \frac{\sin c}{\sin ab}$, d'où l'on tire $dc : dab = \text{tang}\, c : \text{tang}\, ab$.

Maintenant on aura par le sixieme Cas des solut. analyt. $\cos bc = \frac{\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$. Donc $\cos bc$

$\sin b \sin c = \cos a + \cos b \cos c$, donc db ($\cos b \cos c$ $\sin c + \sin b \cos c$) $= - dc$ ($\cos c \sin b \cos bc +$ $\sin c \cos b$). Or, on a par le quatrieme Cas des folut. analyt. $\text{tang}\, ac = \frac{\sin bc}{\cot b \sin c + \cos c \cos bc}$. d'où l'on tire $\cos b \sin c + \cos c \cos bc \sin b = \frac{\sin bc \sin b}{\text{tang}\, ac}$. On a $\text{tang}\, ab = \frac{\sin bc}{\cot c \sin b + \cos b \cos bc}$, d'où l'on tire $\cos c \sin b + \cos b \cos bc \sin c = \frac{\sin bc \sin c}{\text{tang}\, ab}$. Faifant ces fubftitutions, on aura $db = \frac{dc \sin b \sin ab \cos ac}{\sin c \sin ac \cos ab} = - \frac{dc \cos ac}{\cos ab}$ (parce qu'on a par l'analogie commune $\sin b \sin ab = \sin c \sin ac$). On a donc en faifant abftraction des fignes, $db : dc = \cos ac : \cos ab$. On a enfuite par le cinquieme Cas des folut. analyt. $\cos a = \frac{\cos bc - \cos ab \cos ac}{\sin ab \sin ac}$, d'où l'on tire précifément de la même maniere que je viens de le faire pour les angles, $dab : dac = \cos c : \cos b$.

En compofant ces deux proportions,

$$dac : dab = \cos b : \cos c$$
$$dab : dc = \text{tang}\, ab : \text{tang}\, c$$

on obtient celle-ci $dac : dc = \text{tang}\, ab \cos b : \sin c$.

De même en compofant ces deux proportions,

$$dab : dac = \cos c : \cos b$$
$$dac : db = \text{tang}\, ac : \text{tang}\, b$$

on obtient celle-ci $dab : db = \text{tang}\, ac \cos c : \sin b$.

Voici donc les rapports qui résultent de ces six Cas.

$db : dac = \text{tang}\, b : \text{tang}\, ac$	$dab : dac = \text{cos}\, c : \text{cos}\, b$
$dc : dab = \text{tang}\, c : \text{tang}\, ab$	$dac : dc = \text{tang}\, ab\, \text{cos}\, b : \text{sin}\, c$
$db : dc = \text{cos}\, ac : \text{cos}\, ab$	$dab : db = \text{tang}\, ac\, \text{cos}\, c : \text{sin}\, b$

TROISIEME CAS.

Supposant constans deux côtés, trouver les rapports des variations du troisieme côté & des angles d'un triangle sphérique.

Constantes ab & ac.

On a aussi six Cas, savoir les rapports du troisieme côté à chacun des trois angles, & ceux des angles entr'eux.

On a par l'analogie commune sin b : sin ac = sin c : sin ab. Donc $\frac{\text{sin}\, b}{\text{sin}\, c} = \frac{\text{sin}\, ac}{\text{sin}\, ab}$, donc db cos b sin $c = dc$ cos c sin b & $db : dc = \text{tang}\, b : \text{tang}\, c$.

On a ensuite par le cinquieme Cas des solut analyt. $\text{cos}\, a = \frac{\text{cos}\, bc - \text{cos}\, ab\, \text{cos}\, ac}{\text{sin}\, ab\, \text{sin}\, ac}$, d'où l'on tire $\text{cos}\, a\, \text{sin}\, ab\, \text{sin}\, ac = \text{cos}\, bc - \text{cos}\, ab\, \text{cos}\, ac$. Donc $da\, \text{sin}\, a\, \text{sin}\, ab\, \text{sin}\, ac = dbc\, \text{sin}\, bc$. Donc $da : dbc = \text{sin}\, bc : \text{sin}\, a\, \text{sin}\, ab\, \text{sin}\, ac$, mais $\text{sin}\, a\, \text{sin}\, ac = \text{sin}\, b\, \text{sin}\, bc$. Donc $da : dbc = \text{sin}\, bc : \text{sin}\, b\, \text{sin}\, ab\, \text{sin}\, bc = 1 : \text{sin}\, b\, \text{sin}\, ab$, ou bien parce que $\text{sin}\, a\, \text{sin}\, ab = \text{sin}\, c\, \text{sin}\, bc$, on aura $da : dbc = \text{sin}\, bc : \text{sin}\, c\, \text{sin}\, ac\, \text{sin}\, bc = 1 : \text{sin}\, c\, \text{sin}\, ac$.

Maintenant on a par le troisieme Cas des solut. analyt. $\cos ac = \cos b \sin ab \sin bc + \cos ab \cos bc$, donc $-db \sin b \sin ab \sin bc + dbc \cos bc \sin ab \cos b - dbc \cos ab \sin bc = 0$, donc $db = \dfrac{dbc(\cos ab \sin bc - \cos bc \sin ab \cos b}{\sin b \sin ab \sin bc}$. Or $\tang c = \dfrac{\sin ab \sin b}{\sin bc \cos ab - \sin ab \cos b \cos bc}$, donc $\sin bc \cos ab - \sin ab \cos b \cos bc = \dfrac{\sin ab \sin b}{\tang c}$. Donc $db = \dfrac{dbc}{\sin bc \tang c}$, donc $db : dbc = 1 : \sin bc \tang c = \cot c : \sin bc$.

En composant ces deux proportions

$$dc : db = \tang c : \tang b$$
$$db : dbc = \cot c : \sin bc$$

on obtient celle-ci, $dc : dbc = 1 : \tang b \sin bc = \cot b : \sin bc$.

En composant ces deux proportions

$$da : dbc = 1 : \sin b \sin ab$$
$$dbc : dc = \sin bc : \cot b$$

on obtient celle-ci, $da : dc = \sin bc : \cos b \sin ab$.

En composant ces deux proportions

$$da : dbc = 1 : \sin c \sin ac$$
$$dbc : db = \sin bc : \cot c$$

on obtient celle-ci $da : db = \sin bc : \cos c \sin ac$.

Voici donc les rapports qui résultent de ces six Cas.

$db : dbc = \text{tang}\, b : \text{tang}\, c$
$da : dbc = 1 : \text{sin}\, c\, \text{sin}\, ac = 1 : \text{sin}\, b\, \text{sin}\, ab$
$db : dbc = \text{cot}\, c : \text{sin}\, bc$
$dc : dbc = \text{cot}\, b : \text{sin}\, bc$
$da : dc = \text{sin}\, bc : \text{cos}\, b\, \text{sin}\, ab$
$da : db = \text{sin}\, bc : \text{cos}\, c\, \text{sin}\, ac$

SIXIEME CAS.

Supposant constans deux angles, trouver les variations du troisieme angle & des côtés d'un triangle sphérique.

Constantes b & c.

On a aussi six Cas, savoir: les rapports des variations du troisieme angle à chacun des côtés, & les rapports des variations des trois côtés.

De l'équation $\frac{\text{sin}\, b}{\text{sin}\, c} = \frac{\text{sin}\, ac}{\text{sin}\, ab}$, on tirera comme dans le Cas précédent $dac : dab = \text{tang}\, ac : \text{tang}\, ab$.

On a par le sixieme Cas des solut. analyt. $\text{cos}\, bc = \frac{\text{cos}\, a + \text{cos}\, b\, \text{cos}\, c}{\text{sin}\, b\, \text{sin}\, c}$, d'où l'on tirera comme dans le Cas précédent $da : dbc = 1 : \text{sin}\, c\, \text{sin}\, ac = 1 : \text{sin}\, b\, \text{sin}\, ab$.

On a par le quatrieme Cas des solut. analyt. $\text{cos}\, a = \text{cos}\, ab\, \text{sin}\, a\, \text{sin}\, b - \text{cos}\, a\, \text{cos}\, b$, d'où l'on tire comme dans le Cas précédent $dac : da = \text{cot}\, ab : \text{sin}\, a$.

En composant deux de ces proportions, on aura comme dans le Cas précédent, $dab : da = \cot ac : \sin a$.

On aura de même en composant comme ci-dessus $dbc : dac = \sin a : \sin b \cos ab$.

On aura enfin $dbc : dab = \sin a : \sin c \cos ac$.

Voici donc les rapports qui résultent de ces six Cas.

$dac : dab = \tang ac : \tang ab$	$dab : da = \cot ac : \sin a$
$da : dbc = 1 : \sin c \sin ac = 1 : \sin b \sin ab$	$dbc : dac = \sin a : \sin b \cos ab$
$dac : da = \cot ab : \sin a$	$dbc : dab = \sin a : \sin c \cos ac$

Cette théorie générale s'applique aux triangles rectangles en faisant le sinus de l'angle droit $= 1$ & son cosinus $= 0$, & de même aux triangles rectilignes en prenant les côtés pour les sinus des côtés, &c. ; cela ne peut avoir aucune difficulté, & les propriétés de ces triangles peuvent rendre ces formules plus simples. Nous en verrons plus bas des exemples.

CHAPITRE VII.

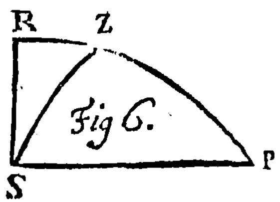
Application de la trigonométrie sphérique aux propositions fondamentales de l'Astronomie nautique de M. de Maupertuis, & à quelques-uns des problêmes contenus dans cet ouvrage.

Les solutions analytiques que nous avons donné des triangles sphériques, donnent immédiatement la solution des cinq problêmes fondamentaux sur lesquels M. de Maupertuis a fondé toute son astronomie nautique, comme je vais le faire voir.

Problême I.

Trouver la rélation entre la hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, sa hauteur & son angle horaire.

Soit Z le zénith, P le pole, S l'astre en question, on sait que PZ est le complément de la latitude ou de la hauteur du pole, PS le complément de la déclinaison,



ZS le complément de la hauteur de l'astre, & ZPS son angle horaire. Cela posé, dans le triangle *ZPS*, connoissant les trois côtés, on aura par le cinquieme

Cas

Cas des solutions analytiques $\cos ZPS = \frac{\cos ZS - \cos PS \cos PZ}{\sin PZ \sin PS}$. Or, M. de Maupertuis fait le sinus de la déclinaison de l'astre $= x$ & son cosinus $= y$, le sinus de la hauteur du pole $= s$, & son cosinus $= c$, le sinus de la hauteur h, & son cosinus $= k$, le sinus de l'angle horaire $= t$, & son cosinus u. Substituant donc ces valeurs, on aura $u = \frac{h - xs}{cy}$, ou $cuy = h - xs$.

PROBLEME II.

Trouver la rélation entre la hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, sa hauteur & son angle azymutal.

Tout restant comme ci-dessus, l'angle azymuthal est l'angle PZS dont M. de Maupertuis fait le sinus $= m$ & le cosinus n. Maintenant dans le triangle ZPS, connoissant les trois côtés, on aura par le cinquieme Cas des solut. analyt. $\cos PZS = \frac{\cos PS - \cos PZ \cos ZS}{\sin PZ \sin ZS}$ ou $n = \frac{x - sh}{ck}$ ou $nck = x - sh$.

PROBLEME III.

Trouver la rélation entre la hauteur du pole, la déclinaison d'un astre, son angle horaire & son angle azymuthal.

Dans le triangle Z P S, connoissant deux côtés & l'angle compris P Z, P S & Z P S, on aura par le troisieme Cas des solut. analyt. cot P Z S $=$

$$\frac{\text{cot PS sin PZ} + \text{cos ZPS cos PZ}}{\text{sin ZPS}} \text{ ou } \frac{n}{m} =$$

$$\frac{\frac{cx}{y} + us}{t} \text{ ou } nyt = mcx + musy.$$

PROBLEME IV.

Trouver la rélation entre la hauteur du pole, la hauteur d'un astre, son angle horaire, & son angle azymuthal.

Connoissant P Z, Z S & P Z S, ou deux côtés & l'angle compris dans le triangle Z P S, on aura par le troisieme Cas des solut. analyt. cot Z P S $=$

$$\frac{\text{cot ZS sin PZ} + \text{cos PZS cos PZ}}{\text{sin PZS}} \text{ ou } \frac{u}{t} =$$

$$\frac{\frac{h}{k}c + ns}{m} \text{ ou } mku = hct + nskt.$$

PROBLEME V.

Trouver la rélation entre la déclinaison d'un astre sa hauteur, son angle horaire & son azymuthal.

Dans le triangle ZPS l'analogie commune donne sin ZPS : sin ZS = sin PZS : sin PS ou $t : k = m : y$ ou $mk = ty$.

Ces cinq formules donnent toutes les combinaisons possibles entre les cinq élémens en question, car le nombre des combinaisons de cinq choses prises quatre à quatre est $= \frac{5\ 4\ 3\ 2}{1\ 2\ 3\ 4} = 5$.

L'on voit donc que c'est sans raison que M. de Maupertuis vante sa méthode analytique & la préfere à la méthode trigonométrique, car nos solutions sont aussi directes & bien plus simples que les siennes, ou pour mieux dire, ces problêmes ne sont que des cas particuliers des problêmes généraux de la trigonométrie sphérique, problêmes qu'il est impossible de bannir de l'astronomie, & qui d'ailleurs demandent pour être démontrés un appareil bien moindre que celui qu'emploie M. de Maupertuis. Il y a plus ; sa méthode toute analytique qu'elle paroît, l'est bien moins que notre méthode trigonométrique, puisque celle-ci conduit nécessairement & sans qu'on le veuille à la solution de ces problêmes, au lieu qu'il a fallu du travail pour imaginer l'autre. Nous aurons occasion de revenir plus bas sur les prétendus avantages de ce qu'on appelle méthode analytique par oppoſition à la méthode trigonométrique.

Au reſte, on voit bien que dans ces Problêmes les ſignes varient ſuivant la poſition de l'aſtre, & qu'ainſi il eſt important d'y faire attention.

Comme dans chacun de ces cinq Problêmes on conſidere quatre quantités, on peut trouver dans chacun une de ces quantités par le moyen des trois autres, cela fait donc en tout, vingt Problêmes différens. Au moyen de ces cinq formules, M. de Maupertuis réſoud divers Problêmes, nous allons en examiner quelques-uns.

PROBLEME VI.

L'arc ſémi-diurne d'un aſtre n'eſt autre choſe que l'angle horaire de cet aſtre, lorſqu'il ſe trouve à l'horiſon, alors ſa hauteur h eſt $= o$, ainſi la premiere formule $cuy = h - xs$, devient $= cuy - xs$, donc $u = -\frac{xs}{cy}$, c'eſt la valeur du coſinus de l'arc ſémi-diurne. Mais à cauſe de la réfraction qui éleve l'aſtre, lorſqu'il nous paroît à l'horiſon, il eſt réellement plus bas, enſorte que la hauteur h au lieu d'être $= o$ doit être faite négative & $= -$ la réfraction (ou plus exactement $= -$ la réfraction $+$ la parallaxe); la formule devient alors $cuy = - h - xs$. Pour réduire cette formule au calcul trigonométrique, on ſe ſervira de la réduction en ſeignée dans le cinquieme Cas des tr. obliq. & l'on aura ſin $\frac{1}{2}$ Z P S $=$

$$\frac{\sqrt{\text{ſin}\left(\frac{PZ+PS+ZS}{2}-PS\right)\text{ſin}\left(\frac{PZ+PS+ZS}{2}-ZS\right)}}{\sqrt{\text{ſin } PZ \text{ ſin } PS}}$$

c'eſt de cette formule que ſe ſert M. de la Lande. (Aſtronom. § 704, premiere édition.)

PROBLEME VII.

L'amplitude ortive eſt la diſtance du point où un aſtre ſe leve au vrai point de l'orient, & l'amplitude occaſe eſt la diſtance du point où un aſtre ſe couche au vrai point de l'occident. Or, les vrais points de l'orient & de l'occident ſont ceux où l'équateur coupe l'horiſon, mais l'angle azymuthal eſt la diſtance de ce même point à l'interſection du méridien avec l'horiſon, donc l'amplitude eſt la ſomme ou la différence 90° & de l'angle azymutal d'un aſtre qui eſt à l'horiſon. Pour avoir cet angle, il faut dans la ſeconde formule faire $b = o$ & $k = 1$, ce qui donne $n\,c = x$, donc $n = \frac{x}{c}$, c'eſt le coſinus de l'angle azymutal, l'on aura donc ainſi l'amplitude. Car cette équation donne $c : x = 1 : n$; le coſinus de la hauteur du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon comme le rayon eſt au coſinus de l'angle azymutal ou au ſinus de l'amplitude en vertu de la définition que j'ai donnée de l'amplitude, c'eſt la proportion que donne M. de la Lande § 723. On a négligé la réfraction dont il faut tenir compte; mais ce n'est pas ici le lieu d'en parler.

PROBLÊME VIII.

Trouver la relation entre la déclinaison d'un astre, l'angle qu'il traverse & le tems qu'il emploie à le traverser.

Soit l'astre à distances égales du méridien, ensorte que le vertical ZS soit également éloigné du méridien, du point S menez sur le méridien la perpendiculaire SR, l'analogie commune nous donnera $1 : \sin RZS = \sin ZS : \sin RS$ ou (en faisant sinus $RS = p$) $1 : m = k : p$, donc $km = p$, mais $km = ty$ par la cinquieme formule, donc $p = ty$, équation qui a lieu pour tous les Cas, parce qu'un astre met le même tems à traverser un angle à quelque distance qu'il soit du méridien. On connoîtra donc le sinus de la moitié de l'angle, & par conséquent l'angle entier.

PROBLEME IX.

Pour trouver le moment où un astre se meut perpendiculairement à l'horison, on fera les considérations suivantes. Il est évident que pour que cela ait lieu, il faut qu'un petit arc du parallele que décrit l'astre se confonde avec un petit arc du vertical, c'est-à-dire, que le parallele touche le vertical; or ce vertical est plus éloigné du méridien que tous les autres verticaux, par lesquels passe l'astre & qu'il coupe, donc la hauteur du pole & la déclinaison de l'aftre étant données, il faut chercher le plus grand angle que le vertical faffe avec le méridien, c'eft-à-dire, le plus grand angle azymuthal M. de Maupertuis réfoud ce problême en différentiant la feconde formule, mais il eft plus fimple de le réfoudre par les analogies différentielles que nous avons donné ci-deffus. Dans le triangle P Z S, les côtés P S & P Z étant conftans, on trouvera par le III^e^. Cas $d\ PZS : d\ ZS = \cot S : \sin ZS$, donc $d\ PZS = \frac{d\ ZS \cot S}{\sin ZS}$, mais pour éliminer l'angle S, nous mettrons fa valeur au moyen des cotés P Z, Z S & de l'angle compris P Z S, & nous aurons par le troifieme Cas des folutions analytiques $\cos S = \frac{\cot PZ \sin ZS - \cos PZS \cot ZS}{\sin PZS}$ donc $d\ PZS = \frac{d\ ZS\ (\cot PZ - \cos PZS \cot ZS)}{\sin PZS}$. Mais puifque l'angle P Z S eft un *maximum*, on a $d\ PZS = o$; donc $\cot PZ = \cos PZS \cot ZS$ ou $\cos PZS = \frac{\cot PZ}{\cot ZS} = \frac{\text{tang}\ ZS}{\text{tang}\ PZ}$; donc par le premier Cas des triangles rectangles le triangle P Z S eft rectangle en S, c'eft la confidération que M. Mauduit avait faite *a priori* (dans fon excellent Effai de Trigonométrie fphérique,) & dont il a déduit une folution très-élégante du probleme. L'on voit comment l'analyfe nous conduit directement à la même confidération. Cela pofé nous avons dans le triangle P Z S $\cos ZS = \frac{\cos PZ}{\cos PS}$ par le premier Cas des tr. rect.

donc $\operatorname{tang} ZS = \frac{\sqrt{\operatorname{cof} PS^2 - \operatorname{cof} PZ^2}}{\operatorname{cof} PZ}$ donc

$\operatorname{cof} PZS = \frac{\sqrt{\operatorname{cof} PS^2 - \operatorname{cof} PZ^2}}{\operatorname{fin} PZ} = \frac{\sqrt{x^2 \quad s^2}}{c}$

& $h = \frac{s}{x}$ comme le dit M. de Maupertuis, & fin

$PZS = \frac{\sqrt{\operatorname{fin} PZ^2 - \operatorname{cof} PS^2 + \operatorname{cof} PS^2}}{\operatorname{fin} PZ} = \frac{\operatorname{fin} PS}{\operatorname{fin} PZ}$, comme le dit M. Mauduit.

PROBLEME X.

La hauteur du pole & la déclinaifon d'un aftre étant données, trouver la relation entre un petit changement dans fa hauteur & le tems qu'il y emploie.

Dans le triangle PZS les cotés PZ & PS étant conftans, on aura par le troifieme Cas des analog. differ. $d\,ZPS : d\,ZS = 1 : \operatorname{fin} S \operatorname{fin} PS$, mais on a par l'analogie commune $\operatorname{fin} S = \frac{\operatorname{fin} ZPS \operatorname{fin} PZ}{\operatorname{fin} ZS}$,

donc $d\,ZPS : d\,ZS = 1 : \frac{\operatorname{fin} ZPS \operatorname{fin} PZ \operatorname{fin} PS}{\operatorname{fin} ZS}$,

ou en prenant les dénominations de M. de Maupertuis & faifant $ZPS = E$, & $ZS = V$ on aura $K\,dV = cty\,dE$ c'eft la formule qu'il trouve. Lorfque l'aftre eft à l'horifon, on a $K = 1$ & $u = \frac{xs}{cy}$

dont

donc $t = \sqrt{1 - uu} = \frac{\sqrt{ccyy - xxss}}{cy} = \frac{\sqrt{yy - ssyy - xxss}}{cy} = \frac{\sqrt{yy - ss}}{cy}$. Substituant cette valeur, on trouve $dV = dE\sqrt{yy - ss}$, c'est ce que trouve M. de Maupertuis. Si l'on fait $dV =$ au diametre du soleil, on aura $dE = \frac{dV}{\sqrt{yy - ss}} =$ au tems qu'il met à se lever ou à se coucher, & $s = \sqrt{yy - \frac{dV^2}{dE^2}} =$ au sinus de la hauteur du pole qu'on connoîtra ainsi en connoissant le diametre apparent du soleil, sa déclinaison, & le tems qu'il met à se lever ou à se coucher.

PROBLEME XI.

Trouver la relation entre la hauteur du pole, la déclinaison du soleil, le tems écoulé entre deux hauteurs égales de cet astre, son changement en déclinaison pendant ce tems, & la différence des tems qu'il emploie l'un à s'élever de la hauteur observée au méridien, l'autre à descendre du méridien à la même hauteur.

Dans le triangle ZPS, PZ & ZS étant constant, on a par le troisieme Cas des Analog. differ. $dZPS : dPS =$ cot S : sin PS; mais on a par le troisieme Cas des Solutions analytiques cot S $= \frac{\text{cot PZ sin PS} - \text{cos ZPS cos PS}}{\text{sin ZPS}}$, donc $dZPS$:

$d\,P\,S = \frac{\cot P\,Z \sin P\,S - \cos Z\,P\,S \cos P\,S}{\sin Z\,P\,S}$: sin P S; donc $d\,Z\,P\,S = d\,E = d\,P\,S \left(\frac{\cot P\,Z}{\sin Z\,P\,S} - \frac{\cot Z\,P\,S}{\tang P\,S}\right)$ ou en faisant comme M. de Maupertuis la déclinaison $=$ D, la tangente de la déclinaison $=$ X, la tangente de la hauteur du pole $=$ S, & la tangente de l'angle horaire $=$ T, on aura $d\,E = d\,D\left(\frac{S}{t} - \frac{X}{T}\right)$, c'est ce qu'on appelle la correction du midi nécessaire, lorsqu'on prend des hauteurs correspondantes, parce que du matin au soir le soleil change de déclinaison. Il est évident que pour avoir le moment où il est le plus avantageux de prendre des hauteurs correspondantes, il faut chercher le moment où le soleil se meut perpendiculairement; c'est ce que nous avons fait dans le Problême IX, nous avons prouvé que l'angle S du triangle P Z S étoit droit, ce qui donne $\cos Z\,P\,S = \frac{\tang P\,S}{\tang P\,Z}$. On peut résoudre tout de suite cette question par la méthode des *maxima* & *minima*, car pour que le tems que le soleil met à s'élever soit le plus petit possible, il faut que $d\,E$ soit un *maximum*; dans la valeur de $d\,E$ je ne fais varier que l'angle horaire, j'ai donc $d\left(\frac{S}{\sin P} - \frac{X}{\tang P}\right) = o$, ou $-\frac{S\,d\,P \cos P}{\sin P^2} + \frac{x\,d\,P}{\sin P^2} = o$ ce qui donne

$\text{cos} ZPS = \frac{x}{s} = \frac{\text{tang } PS}{\text{tang } PZ}$ (comme je l'ai trouvé par le Problême IX) $= \frac{\text{cot } d}{\text{cot lat}} = \frac{\text{tang lat}}{\text{tang } d.}$

PROBLEME XII.

Deux hauteurs d'un astre étant données, trouver la relation entre le tems qui les sépare, la déclinaison de l'astre & la hauteur du pole. Avant de résoudre ce Probleme, j'établirai un lemme de trigonométrie qui peut être utile dans plusieurs occasions. $(\text{sin}(a - b))^2 = (\text{sin } a \text{ cos } b - \text{cos } a \text{ sin } b)^2 = \text{sin } a^2 \text{ cos } b^2 + \text{cos } a^2 \text{ sin } b^2 - 2 \text{ sin } a \text{ cos } a \text{ sin } b \text{ cos } b = \text{cos } b^2 + \text{cos } a^2 - 2 \text{ cos } a^2 \text{ cos } b^2 - 2 \text{ sin } a \text{ cos } a \text{ sin } b \text{ cos } b = \text{cos } b^2 + \text{cos } a^2 - 2 \text{ cos } a \text{ cos } b \text{ cos } (a - b)$. Par le moyen de ce lemme, connoissant les sinus & cosinus de deux arcs, je connoîtrai les sinus & cosinus de la différence de ces deux arcs : venons maintenant au Problême. La premiere formule me donne $c u y = h - s x$. Pour une seconde hauteur h' elle me donne $c u' y = h' - s x$ la déclinaison & la latitude restant constantes. J'ai donc $u = \text{cos } P = \frac{h - s x}{c y}$ & $u' = \text{cos } P' = \frac{h' - s x}{c y}$. Mais par le lemme que je viens de donner $\text{cos } P^2 + \text{cos } P'^2 - 2 \text{ cos } P \text{ cos } P' \text{ cos } (P - P') = \text{sin } (P - P')^2$. Mettant pour cos P & cos P' leurs valeurs, j'aura (en faiſant coſ $(P - P^{1}) = q$ & ſin $(P - P^{1}) = p$; $h^{2} - 2shx + 2s^{2}x^{2} + h^{12} - 2h^{1}sx - 2hh^{1}q + 2hsxq + 2h^{1}sxq - 2s^{2}x^{2}q = p^{2}c^{2}y^{2}_{2} = p^{2} - p^{2}s^{2} - p^{2}x^{2} + p^{2}s^{2}x^{2} = p^{2} - p^{2}s^{2} - p^{2}x^{2} + s^{2}x^{2} - s^{2}x^{2}q^{2}$, ou en mettant tous les termes du même côté, réduiſant & faiſant $o =$ ſin vers $(P - P^{1}) = 1 -$ coſ$(P - P^{1})$, $h^{2} + h^{12} - 2hsxo - 2h^{1}sxo + o^{2}s^{2}x^{2} - p^{2} + p^{2}s^{2} + p^{2}x^{2} - 2hh^{1}q = o$ ou $oossxx + ppss + ppxx - 2hosx - 2h^{1}osx = pp + 2qhh^{1} - h^{2} - h^{12}$, ce qui eſt l'équation que donne M. de Maupertuis. Si l'on veut avoir la hauteur du pole, on cherchera ſon ſinus s, au moyen de la déclinaiſon & du tems écoulé entre les obſervations, par une équation du ſecond degré. Si l'on veut avoir la déclinaiſon de l'aſtre, on cherchera ſon ſinus x au moyen de la hauteur du pole & du tems écoulé entre les obſervations par une équation du ſecond degré. Si l'on veut avoir le tems écoulé entre les obſervations, on cherchera le coſinus q de la différence des angles horaires (en mettant dans l'équation $1 - qq$ au lieu de pp) au moyen de la hauteur du pole & de la déclinaiſon de l'aſtre par une équation du ſecond degré. Ce lemme trigonométrique rend la ſolution plus ſimple que celle de M. de Maupertuis, parce qu'il n'y entre ni radicaux ni élimination d'inconnues. On trouveroit un lemme ſemblable pour les ſinus & coſinus de la ſomme de deux arcs; mais celui que nous avons donné eſt ſur-tout utile dans l'aſtronomie.

PROBLEME XIII.

Deux hauteurs d'un aſtre étant données, trouver la relation entre l'arc azimutal qui les ſépare, la déclinaiſon de l'aſtre & la hauteur du pole.

La ſeconde formule nous donne $nck = x - sh$. Pour une ſeconde hauteur elle donne $n'ck' = x - sh'$, la déclinaiſon & la latitude reſtant conſtantes. J'ai donc $n = \text{coſ } PZS = \frac{x - sh}{ck}$ & $n' = \text{coſ } PZ'S = \frac{x - sh'}{ck'}$. Mais par le lemme que je viens de donner $\text{coſ}(PZS)^2 + \text{coſ}(PZ'S)^2 - 2 \text{ coſ } PZS \text{ coſ } PZ'S \text{ coſ}(PZS - PZ'S) = \text{ſin}(PZS - PZ'S)^2$. Donc ſubſtituant les valeurs, faiſant $\text{coſ}(PZS - PZ'S) = q$, $\text{ſin}(PZS - PZ'S) = p$ & réduiſant on aura $k^2 x^2 + k'^2 x^2 - 2kk'qx^2 + k'^2 h^2 s^2 + k^2 h'^2 s^2 + p^2 k^2 k'^2 s^2 - 2qhh'kk's^2 - 2shk'^2 x - 2sh'k^2 x + 2sh'kk'qx + 2shkk'qx - p^2 k^2 k'^2 = 0$, ce qui eſt l'équation que donne M. de Maupertuis.

PROBLEME XIV.

La hauteur du pole étant connue, & deux aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données étant vus dans un même vertical, trouver l'heure de l'obſervation.

Puiſque les aſtres ſont dans le même vertical, leurs angles azimutaux ſont égaux, ainſi la troiſieme formule nous donnera ces deux équations, $\frac{n}{m} = \frac{cx+usy}{ty} = \frac{cx^{1}+su^{1}y^{1}}{c^{1}y^{1}} = \frac{cx^{1}+su}{t^{1}} = \frac{xc+us}{t}$ (x & x^{1} étant les tangentes des déclinaifons), donc $xct^{1} - x^{1}ct = su^{1}t - sut^{1}$. Mais puifque nous avons les afcenfions droites des deux aftres, nous avons la différence de leurs angles horaires. Or on fait que fi l'on a deux arcs a & b, on aura fin $b =$ fin a cof $(a - b)$ — cof a fin $(a - b)$ & cof $b =$ cof a cof $(a - b)$ + fin a fin $(a - b)$. Faifant maintenant fin $a = t^{1}$, cof $a = u^{1}$, faifant fin $(u - u^{1}) = p$ & cof $(u - u^{1}) = q$, & fubftituant ces valeurs dans notre équation, nous aurons $xct^{1} - x^{1}ct^{1}q + x^{1}cu^{1}p = su^{1}t^{1}q - su^{12}p - su^{1}t^{1}q - st^{12}p = -sp$, donc $sp - t^{1}(cxq^{1} - cx) = -u^{1}cx^{1}p$, ou faifant avec M. de Maupertuis, $sp = A$, $cx^{1}q - cx = B$, $-cx^{1}p = C$, on aura $A - Bt^{1} = Cu^{1}$, donc $AA - 2ABt^{1} + BBt^{12} = CCu^{12} = CC(1 - t^{12})$, donc $(BB + AA)\,t^{12} = 2ABt^{1} + CC - AA$ & $t^{1} = \frac{AB}{AA+BB} \pm \sqrt{\frac{CC-AA}{AA+BB} + \frac{AABB}{(AA+BB)^2}}$ $= \frac{AB \pm C\sqrt{BB+CC-AA}}{BB+AA}$ comme le trouve M. de Maupertuis. On voit qu'une fimple fubftitution dans l'équation du Problême nous donne ce réfultat, au lieu que M. de Maupertuis en fait plufieurs. Ce Problême eft le feizieme de M. de Maupertuis.

PROBLEME XV.

La hauteur du pole étant connue, & deux aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données étant vus dans un même almicantarat, trouver l'heure de l'obſervation.

La hauteur étant encore ici la même, on aura $b = xs + cuy = x^1 s + cu^1 y^1$. Mais les aſcenſions droites des aſtres étant données, l'on connoît la différence de leurs angles horaires; j'aurai donc en me ſervant des dénominations & des remarques du Problême XIV $u = u^1 q + t^1 p$. Subſtituant cette valeur dans l'équation, j'aurai $xs + cyu^1 q + cyt^1 p = x^1 s + cu^1 y^1$, ou (en faiſant avec M. de Maupertuis $xs - x^1 s = A$, $cy^1 - cqy = B$, $cpy = C$) $A - Bu^1 - Ct^1 = o$ donc $AA - 2ABu^1 + BBu^{12} = CC(1 - u^{12})$ & $u^1 = \frac{AB + C\sqrt{BB + CC - A^2}}{BB + CC}$ comme le trouve M. de Maupertuis. Cette ſolution eſt parfaitement analogue à celle du Problême XIV. On a l'heure de l'obſervation en ajoutant ou retranchant de cet angle horaire la différence d'aſcenſion droite de cet aſtre & du ſoleil.

Ce Problême eſt le dix-huitieme de M. de Maupertuis.

PROBLEME XVI.

La déclinaiſon du ſoleil étant donnée, trouver ſur mer la hauteur du pole par la durée du jour.

Dans la premiere formule, faiſant $b = o$, on a

$sx = cuy$, donc $\frac{s}{c} = \frac{uy}{x}$. Mais il faut avoir égard au changement de déclinaiſon du ſoleil & au changement de latitude de l'obſervateur lorſqu'il eſt ſur mer. Puiſque dans ce cas $ZS = 90°$, on a $\text{cof}\, ZPS = \cot PS \cot PZ$, donc $- d\, ZPS\, \text{ſin}\, ZPS = - \frac{d\, PS \cot PZ}{\text{ſin}\, PS^2} - \frac{d\, PZ \cot PS}{\text{ſin}\, PZ^2}$, donc $d\, ZPS = \frac{d\, PS \cot PZ}{\text{ſin}\, PS^2\, \text{ſin}\, ZPS} + \frac{d\, PZ \cot PS}{\text{ſin}\, PZ^2\, \text{ſin}\, ZPS}$, ou en mettant les dénominations de M. de Maupertuis, $d\,E = \frac{s\, d\, D}{yytc} + \frac{x\, d\, L}{ccty}$, mais puiſque $sx = cuy$, on a $s^2 x^2 = c^2 y^2 (1 - t^2)$, donc $c^2 t^2 y^2 = c^2 y^2 - s^2 x^2 = c^2 - x^2$, donc $cty = \sqrt{cc - xx}$, donc $d\,E = \frac{s\, d\, D}{y\sqrt{cc - xx}} + \frac{x\, d\, L}{c\sqrt{cc - xx}}$. Ce ſont les deux expreſſions de M. de Maupertuis, qui ſe trouvent comme l'on voit bien plus commodément en prenant les expreſſions trigonométriques qu'en prenant les expreſſions algébriques. Cette valeur $d\,E$ exprime la correction qu'il faut faire à la durée du jour. Il faudroit encore tenir compte du changement en longitude, de la réfraction & de la parallaxe; mais ces conſidérations n'appartiennent pas à mon ſujet.

Ce Problême eſt le vingt-deuzieme de M. de Maupertuis.

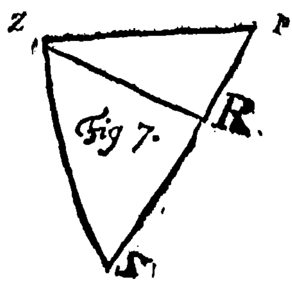
REMARQUE.

Dans le triangle P Z S nous n'avons consideré que 5, choses que nous avons combinées ensemble de toutes les manieres possibles, la sixieme que nous avons négligée est l'angle S formé par le vertical Z S & par le cercle de déclinaison P S, c'est ce qu'on appelle l'angle parallactique. On le trouve aisément au moyen des côtés P S, P Z & Z P S, car on a par le troisieme cas des solut. analyt.

$$\text{Cot S} = \frac{\text{cot P Z sin P S} - \text{cos Z P S cos P S.}}{\text{sin Z P S}}$$

Si l'on veut avoir sa valeur trigonométrique on aura par le troisieme Cas des Tr. obliq. en abaissant la perpendiculaire Z R tang P R = tang P Z cos Z P S & tang S =

$$\frac{\text{sin P R tang Z P S}}{\text{sin R S}}.$$



C'est la valeur que trouve M. de la Lande, Astron. §. 719.

CHAPITRE VIII.

Uſage de la Trigonométrie dans le calcul aſtronomique des lieux des aſtres, & développement de quelques formules relatives à ce but.

PROBLEME I.

ÉTANT données l'aſcenſion droite & la déclinaiſon d'un aſtre avec l'obliquité de l'écliptique trouver la latitude ſoit E O l'équateur, E C l'écliptique, S un aſtre quelconque, S B un arc de grand cercle perpendiculaire ſur E C, S A un arc de grand cercle perpendiculaire ſur E O, le triangle S E A donnera (Chap. II) $1 : \text{ſin } AE = \cot. SA : \cot SEA$. Or $SEB = SEA - BEA = SEA -$ obl. de l'éclip. Le même triangle donne $1 : \text{coſ } AE = \text{coſ } SA : \text{coſ } SE$ (*ibid.*). Le triangle S E B donne $1 : \text{ſin } SE = \text{ſin } SEB : \text{ſin } SB$ (*ibid.*) Soit maintenant $EA = \phi$, $SA = \delta$, $EB = \lambda$, $SB = \beta$, $BEA = \varepsilon$, on aura $\cot SEA = \text{ſin } \phi \cot \delta$, $\text{coſ } SE = \text{coſ } \phi \text{ coſ } \delta$, donc $\text{ſin } \beta = \text{ſin } SE \text{ ſin } SEB = \sqrt{1 - \text{coſ } \phi^2 \text{ coſ } \delta^2} \text{ ſin } SEB$, or $\text{ſin } SEB = \text{ſin } SEA \text{ coſ } \varepsilon - \text{coſ } SEA$

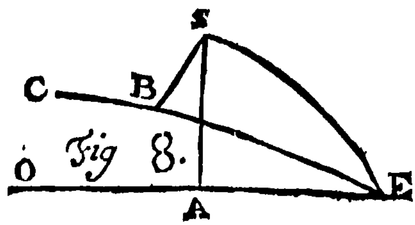


Fig 8.

$\sin\varepsilon$ & $\cos SEA = \sin\Phi \cot\delta \sin SEA$, donc $\sin SEB = (\cos\varepsilon - \sin\Phi \sin\varepsilon \cot\delta) \sin SEA$ or $\frac{1 - \sin SEA^2}{\sin SEA^2} = \sin\Phi^2 \cot\delta^2$, donc $\sin SEA = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin\Phi^2 \cot\delta^2}}$, donc $\sin SEB = \frac{\cos\varepsilon - \sin\Phi \sin\varepsilon \cot\delta}{\sqrt{1 + \sin\Phi^2 \cot\delta^2}}$, donc $\sin\beta = \frac{\sqrt{1 - \cos\Phi^2 \cos\delta^2}}{\sqrt{\sin\delta^2 + \sin\Phi^2 \cos\delta^2}} \times (\cos\varepsilon \sin\delta - \sin\Phi \sin\varepsilon \cos\delta) = \cos\varepsilon \sin\delta - \sin\Phi \sin\varepsilon \cos\delta$.

PROBLEME II.

Etant données l'ascension droite, la déclinaison & la latitude, trouver la longitude.

Dans le triangle SEA on a $\cos SE = \cos\Phi \cos\delta$, & dans le triangle SEB on a $\cos SE = \cos\lambda \cos\beta$, donc $\cos\lambda \cos\beta = \cos\Phi \cos\delta$ & $\cos\lambda = \frac{\cos\Phi \cos\delta}{\cos\beta}$.

PROBLEME III.

Etant données l'ascension droite & la déclinaison d'un astre avec l'obliquité de l'écliptique, trouver la longitude.

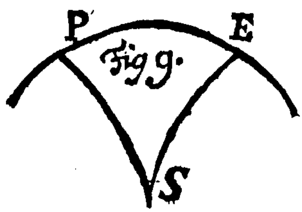
Dans le triangle SEB, on a $1 : \cos SEB =$

tang S E : tang E B ; (Chap. I.) donc tang λ = tang S E cos S E B, or cos S E B = cos S E A cos ε + sin S E A sin ε = sin Φ cot δ cos ε sin S E A + sin ε sin S E A = $\frac{(\cos\varepsilon \sin\Phi \cot\delta + \sin\varepsilon)}{\sqrt{1 + \sin\Phi^2 \cot\delta^2}}$,

donc tang $\lambda = \frac{\sqrt{1 - \cos\Phi^2 \cos\delta^2}}{\cos\Phi \cos\delta} \times \frac{(\sin\varepsilon + \sin\Phi \cot\delta \cos\varepsilon) \sin\delta}{\sqrt{\sin\delta^2 + \sin\Phi^2 \cos\delta^2}}$ ou tang λ cos Φ = sin ε tang δ + sin Φ cos ε.

PROBLEME IV.

Etant données la longitude & la latitude avec l'obliquité de l'écliptique, trouver l'angle de position.



Soit P E le colure des solstices, P le pole boréal du monde, E celui de l'écliptique, S un astre quelconque, on aura P E = obliquité de l'écliptique, P E S = compl. longit. de l'astre, E S = compl. latit. de l'astre ; dans le triangle P E S ayant ces trois choses, c'est-à-dire, deux côtés & l'angle compris, on aura l'angle S par le troisieme Cas des solut. analyt. Soit S = p, on aura cot p = $\frac{\cos\beta \cot\varepsilon - \sin\beta \sin\lambda}{\cos\lambda}$ ou cos λ cot p = cos β cot ε — sin β sin λ.

REMARQUE I.

On comprend que dans les trois premiers Problemes, les signes des quantités trigonométriques varieront suivant que l'astre S se trouvera placé relativement à l'équateur &c. à l'écliptique, mais une figure fera toujours voir quels doivent être ces signes.

REMARQUE II.

Je n'ai donné ici que les valeurs analytiques des longitudes, latitudes des 'astres, &c. parce qu'elles nous seront utiles dans la suite, les valeurs trigonométriques dont on se sert plus souvent dans l'Astronomie se trouvent trop simplement pour qu'il soit besoin de s'y arrêter. Je me contenterai d'en donner un exemple relatif à l'angle de position. On a E P S = compl. ascension droite & P S = compl. déclinaison. Maintenant la méthode la plus simple pour trouver l'angle de position est de faire cette proportion, sin S : sin E P S = sin P E : sin E S, c'est-à-dire, le sinus de l'angle de position est au cosinus de l'ascension droite, comme le sinus de l'obliquité de l'écliptique est au cosinus de la latitude. On auroit pu dire aussi, sin S : sin P E S = sin P E : sin P S, c'est-à-dire, le sinus de l'angle de position est au cosinus de la longitude comme le sinus de l'obliquité de l'écliptique est au cosinus de la déclinaison. En prenant la premiere proportion, on voit que l'angle de position n'est pas fixe, puisque l'ascension droite varie par la précession des équinoxes, cette variation étant petite, on peut trouver celle de l'angle de poſition par les analogies différentielles, car dans le triangle P E S, les deux côtés P E & E S étant conſtans, on aura par le troiſieme Cas des analog. differ. $d\,S : d\,P\,E\,S = \text{ſin}\,P\,E\,\text{coſ}\,E\,P\,S : \text{ſin}\,P\,S$, donc $d\,S = \frac{d\,P\,E\,S\,\text{ſin}\,P\,E\,\text{coſ}\,E\,P\,S}{\text{ſin}\,P\,S}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier le changement en longitude par le ſinus de l'obliquité de l'ecliptique & par le ſinus de l'aſcenſion droite, & par le coſinus de la déclinaiſon pour avoir le changement de l'angle de poſition. C'eſt ce que trouve M. de la Lande, Aſtron. §. 725.

REMARQUE III.

Dans le volume III des tables aſtronomiques de Berlin p. 226, on trouve une ſolution du Problême IV donnée par M. de la Grange au moyen d'une ſuite très-élégante. La démonſtration de cette ſolution n'y étant pas, je m'étois appliqué à la chercher, & j'en trouvai une que je vais expoſer. Depuis ce tems là M. de la Grange a donné cette démonſtration dans les Mémoires de Berlin pour 1776, mais ma démonſtration étant très-différente de la ſienne, & ne ſuppoſant que des opérations purement trigonométriques, je n'ai pas cru devoir la ſupprimer. Je commencerai par réduire mes dénominations à celles de M. de la Grange. Il fait la longitude de l'aſtre $= L$, ſa latitude $= \lambda$, l'obliquité de l'écliptique $= c$ & l'angle de poſition $= p$. J'aurai donc d'après ces dénominations tang $p =$

$$\frac{\cos L}{\cos\lambda \cot c - \sin\lambda \sin L} = \frac{\operatorname{tang} c \cos L}{\cos\lambda - \sin\lambda \operatorname{tang} c \sin L}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{tang} c \cos L}{\cos\lambda}}{1 - \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} c \sin L}.$$ Or on sait que $p = \operatorname{tang} p - \frac{1}{3} \operatorname{tang} p^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tang} p^5 - \frac{1}{7} \operatorname{tang} p^7$ &c. Et l'on a par ce que nous venons de dire, en réduisant ensuite la valeur de tang p, tang $p =$

$$\frac{\operatorname{tang} c \cos L}{\cos\lambda} + \frac{\operatorname{tang} c^2 \sin L \cos L \sin\lambda}{\cos\lambda^2} +$$
$$\frac{\operatorname{tang} c^3 \sin L^2 \cos L \sin\lambda^2}{\cos\lambda^3} + \frac{\operatorname{tang} c^4 \sin L^3 \cos L \sin\lambda^3}{\cos\lambda^4}$$
$$+ \frac{\operatorname{tang} c^5 \sin L^4 \cos L \sin\lambda^4}{\cos\lambda^5} +$$
$$\frac{\operatorname{tang} c^6 \sin L^5 \cos L \sin\lambda^5}{\cos\lambda^6} + \frac{\operatorname{tang} c^7 \sin L^6 \cos L \sin\lambda^6}{\cos\lambda^7}$$
$$+ \frac{\operatorname{tang} c^7 \sin L^6 \cos L \sin\lambda^6}{\cos\lambda^7} + \text{\&c.}$$

$$\operatorname{Tang} p^3 = \frac{\operatorname{tang} c^3 \cos L^3}{\cos\lambda^3} +$$
$$\frac{3 \operatorname{tang} c^4 \cos L^3 \sin L \sin\lambda}{\cos\lambda^4} +$$
$$\frac{6 \operatorname{tang} c^5 \cos L^3 \sin L^2 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^5} +$$
$$\frac{10 \operatorname{tang} c^6 \cos L^3 \sin L^3 \sin\lambda^3}{\cos\lambda^6} +$$
$$\frac{15 \operatorname{tang} c^7 \cos L^3 \sin L^4 \sin\lambda^4}{\cos\lambda^7} + \text{\&c.}$$

$$\operatorname{Tang} p^5 = \frac{\operatorname{tang} c^5 \cos L^5}{\cos\lambda^5} +$$

$$\frac{5 \text{ tang } c^6 \text{ cos } L^5 \text{ sin } L \text{ sin } \lambda}{\text{cos } \lambda^6} +$$

$$\frac{15 \text{ tang } c^7 \text{ cos } L^5 \text{ sin } L^2 \text{ sin } \lambda^2}{\text{cos } \lambda^7} + , \&c.$$

$\text{Tang } p^7 = \frac{\text{tang } c^7 \text{ cos } L^7}{\text{cos } \lambda^7} + \&c.$ On aura donc en substituant ces valeurs, $p = \frac{\text{cos} L}{\text{cos} \lambda} \text{ Tang } c +$

$$\frac{\text{sin} L \text{ cos} L \text{ sin} \lambda}{\text{cos} \lambda^2} \text{ tang } c^2 + \left(\frac{\text{sin } L^2 \text{ cos} L \text{ sin } \lambda^2}{\text{cos} \lambda^3} - \frac{\text{cos } L^3}{3 \text{ cos } \lambda^3}\right) \text{tang } c^3 + \left(\frac{\text{sin } L^3 \text{ cos } L \text{ sin } \lambda^3}{\text{cos } \lambda^4} - \frac{\text{cos} L^3 \text{ sin } L \text{ sin } \lambda}{\text{cos } \lambda^4}\right) \text{ tang } c^4 + \left(\frac{\text{sin} L^4 \text{ cos} L \text{ sin} \lambda^4}{\text{cos } \lambda^5} - \frac{2 \text{ cos} L^3 \text{ sin} L^2 \text{ sin } \lambda^2}{\text{cos } \lambda^5} + \frac{\text{cos } L^5}{5 \text{ cos} \lambda^5}\right) \text{ tang } c^5 +$$

$$\left(\frac{\text{sin} L^5 \text{ cos} L \text{ sin} \lambda^5}{\text{cos} \lambda^6} - \frac{10 \text{ cos } L^3 \text{ sin } L^3 \text{ sin } \lambda^3}{3 \text{ cos } \lambda^6} + \frac{\text{cos } L^5 \text{ sin } L \text{ sin } \lambda}{\text{cos } \lambda^6}\right) \text{tang } c^6 + \left(\frac{\text{sin } L^6 \text{ cos} L \text{ sin} \lambda^6}{\text{cos } L^7} - \frac{5 \text{ cos} L^3 \text{ sin} L^4 \text{ sin} \lambda^4}{\text{cos } \lambda^7} + \frac{3 \text{ cos} L^5 \text{ sin } L^2 \text{ sin } \lambda^2}{\text{cos } \lambda^7} - \frac{\text{cos } L^7}{7 \text{ cos } \lambda^7}\right) \text{ tang } c^7 + \&c.$$

Il faut maintenant d'après les formules connues réduire les multiples des sinus & cosinus en sinus & cosinus d'arcs multiples, & l'on aura après cette réduction $p = \text{cos} L \left(\frac{\text{tang } c}{\text{cos } \lambda} + \frac{1}{4} \frac{\text{tang} c^3 \text{ sin } \lambda^2}{\text{cos} \lambda^4} - \frac{1}{4}\right.$

tang

$$\frac{\tang c^3}{\cos\lambda^3} + \tfrac{1}{8}\frac{\tang c^5 \sin\lambda^4}{\cos\lambda^5} - \tfrac{1}{4}\frac{\tang c^5 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^5} + \tfrac{1}{8}$$

$$\frac{\tang c^5}{\cos\lambda^5} + \tfrac{5}{64}\cdot\frac{\tang c^7 \sin\lambda^6}{\cos\lambda^7} - \tfrac{15}{64}\cdot\frac{\tang c^7 \sin\lambda^4}{\cos\lambda^7} + \tfrac{15}{64}$$

$$\left.\frac{\tang c^7 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^7} - \tfrac{5}{64}\frac{\tang c^7}{\cos\lambda^7} + \&c.\right)$$

$$+ \sin 2\,L\left(\frac{\tang c^2 \sin\lambda}{2\cos\lambda^2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\tang c^4 \sin\lambda^3}{\cos\lambda^4} - \tfrac{1}{4}\cdot\right.$$

$$\frac{\tang c^4 \sin\lambda}{\cos\lambda^4} + \tfrac{5}{32}\cdot\frac{\tang c^6 \sin\lambda^5}{\cos\lambda^6} - \tfrac{5}{16}\cdot\frac{\tang c^6 \sin\lambda^3}{\cos\lambda^6}$$

$$\left.+ \tfrac{5}{32}\cdot\frac{\tang c^6 \sin\lambda}{\cos\lambda^6} + \&c.\right)$$

$$+ \cos 3\,L\left(-\tfrac{1}{4}\frac{\tang c^3 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^3} - \tfrac{1}{12}\cdot\frac{\tang c^3}{\cos\lambda^3} - \tfrac{3}{16}\cdot\right.$$

$$\frac{\tang c^5 \sin\lambda^4}{\cos\lambda^5} + \tfrac{1}{8}\cdot\frac{\tang c^5 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^5} + \tfrac{1}{16}\frac{\tang c^5}{\cos\lambda^5} - \tfrac{9}{64}$$

$$\frac{\tang c^7 \sin\lambda^6}{\cos\lambda^7} + \tfrac{15}{64}\cdot\frac{\tang c^7 \sin\lambda^4}{\cos\lambda^7} - \tfrac{3}{64}\cdot$$

$$\left.\frac{\tang c^7 \sin\lambda^2}{\cos\lambda^7} - \tfrac{5}{64}\cdot\frac{\tang c^7}{\cos\lambda^7} + \&c.\right)$$

$$+ \sin 4\,L\left(-\tfrac{1}{8}\frac{\tang c^4 \sin\lambda^3}{\cos\lambda^4} - \tfrac{1}{8}\frac{\tang c^4 \sin\lambda}{\cos\lambda^4}\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{8}\frac{\tang c^6 \sin\lambda^5}{\cos\lambda^6} + \tfrac{1}{8}\frac{\tang c^6 \sin\lambda}{\cos\lambda^6} + \&c.\right) + \&c.$$

Dans le coëfficient de $\cos L$, le coëfficient de $\tang c$ est $= \frac{1}{\cos L}$ le coëfficient de $\tang c^3$ est $=$ $\frac{\sin\lambda^2 - 1}{4\cos\lambda^3} = -\frac{\cos\lambda^2}{4\cos\lambda^3} = -\frac{1}{4\cos\lambda}$; le coëf-

ficient de tang c^5 eſt $= \dfrac{\sin\lambda^4 - 2\sin\lambda^2 + 1}{8\cos\lambda^5} =$
$\dfrac{\sin\lambda^2 - \sin\lambda^2\cos\lambda^2 - 2\sin\lambda^2 + 1}{8\cos\lambda^5} =$
$\dfrac{\cos\lambda^2 - \sin\lambda^2\cos\lambda^2}{8\cos\lambda^5} = \dfrac{1-\sin\lambda^2}{8\cos\lambda^3} =$
$\dfrac{\cos\lambda^2}{8\cos\lambda^3} = \dfrac{1}{8\cos\lambda}$; le coëfficient de tang c^7 eſt
$= \frac{5}{64}\left(\dfrac{\sin\lambda^6 - 3\sin\lambda^4 + 3\sin\lambda^2 - 1}{\cos\lambda^7}\right) = \frac{5}{64}$
$\dfrac{(\sin\lambda^2 - 1)^3}{\cos\lambda^7} = -\frac{5}{64}\dfrac{\cos\lambda^6}{\cos\lambda^7} = -\dfrac{5}{64\cos\lambda}$.

Ainſi le coëfficient de coſ L eſt $= \dfrac{1}{\cos\lambda}$ (tang c — $\frac{1}{4}$ tang c^3 + $\frac{1}{8}$ tang c^5 — $\frac{5}{64}$ tang c^7 + &c.) Dans le coëfficient de ſin 2 L, le coëfficient de tang c^2 eſt $\frac{1}{2}$ $\dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda^2}$, le coëfficient de tang c^4 eſt $= \dfrac{\sin\lambda^3 - \sin\lambda}{4\cos\lambda^4}$
$= \dfrac{\sin\lambda(\sin\lambda^2 - 1)}{4\cos\lambda^4} = -\dfrac{\sin\lambda\cos\lambda^2}{4\cos\lambda^4} = -$
$\dfrac{\sin\lambda}{4\cos\lambda^2}$, le coëfficient de tang c^6 eſt $= \dfrac{5\sin\lambda}{32}$
$\left(\dfrac{\sin\lambda^4 - 2\sin\lambda^2 + 1}{\cos\lambda^6}\right) = \frac{5}{32}\dfrac{\sin\lambda(1-\sin\lambda^2)^2}{\cos\lambda^6}$
$= \frac{5}{32}\dfrac{\sin\lambda\cos\lambda^4}{\cos\lambda^6} = \frac{5}{32}\dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda^2}$. Ainſi le coëfficient de ſin 2 L eſt $= \dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda^2}$ ($\frac{1}{2}$ tang c^2 — $\frac{1}{4}$ tang c^4 + $\frac{5}{32}$ tang c^6 &c.) Dans le coëfficient de coſ 3 L, le

coëfficient de tang c^3 eſt $= - \dfrac{(3 \sin \lambda^2 + 1)}{12 \cos \lambda^3}$

le coëfficient de tang c^5 eſt $= -$

$$\frac{3 \sin \lambda^4 + 2 \sin \lambda^2 + 1}{16 \cos \lambda^5} = -$$

$$\frac{3 \sin \lambda^2 + 3 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 + 2 \sin \lambda^2 + 1}{16 \cos \lambda^5} =$$

$$\frac{1 - \sin \lambda^2 + 3 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{16 \cos \lambda^5} =$$

$\dfrac{\cos \lambda^2 + 3 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{16 \cos \lambda^5} = \dfrac{1 + 3 \sin \lambda^2}{16 \cos \lambda^3}$; le coëfficient de tang c^7 eſt $= -$

$$\frac{9 \sin \lambda^6 + 15 \sin \lambda^4 - 3 \sin \lambda^2 - 3}{64 \cos \lambda^7} =$$

$$\frac{-9 \sin \lambda^2 + 18 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 - 9 \sin \lambda^2 \cos \lambda^4 + 15 \sin \lambda^2 - 15 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 - 3 \sin \lambda^2 - 3}{64 \cos \lambda^7}$$

$$= \frac{3 \sin \lambda^2 + 3 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 - 9 \sin \lambda^2 \cos \lambda^4 - 3}{64 \cos \lambda^7}$$

$$= - \frac{3 \cos \lambda^2 + 3 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2 - 9 \sin \lambda^2 \cos \lambda^4}{64 \cos \lambda^7}$$

$$= - \frac{3 + 3 \sin \lambda^2 - 9 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{64 \cos \lambda^5}$$

$$= - \frac{3 \cos \lambda^2 - 9 \sin \lambda^2 \cos \lambda^2}{64 \cos \lambda^5}$$

$$= - \frac{3 - 9 \sin \lambda^2}{64 \cos \lambda^3} = - \frac{3 (1 + 3 \sin \lambda^2)}{64 \cos \lambda^3}.$$

Ainſi le coëfficient de cof 3 L eſt $= -$

$\dfrac{(1 + 3 \sin \lambda^2)}{\cos \lambda^3} \left(\frac{1}{12} \mathrm{tang}\, c^3 - \frac{1}{16} \mathrm{tang}\, c^5 + \frac{3}{64} \right.$

tang c^7 &c.) Dans le coëfficient de ſin 4 L, le coëfficient de tang c^4 eſt $= -\left(\frac{\text{ſin}\,\lambda^3 + \text{ſin}\,\lambda}{8\,\text{coſ}\,\lambda^4}\right)$ $= -\frac{\text{ſin}\,\lambda\,(1 + \text{ſin}\,\lambda^2)}{8\,\text{coſ}\,\lambda^4}$; le coëfficient de tang c^6 eſt $= \frac{\text{ſin}\,\lambda - \text{ſin}\,\lambda^5}{8\,\text{coſ}\,\lambda^6} = \frac{\text{ſin}\,\lambda\,(1 - \text{ſin}\,\lambda^4)}{8\,\text{coſ}\,\lambda^6}$ $= \frac{\text{ſin}\,\lambda\,\text{coſ}\,\lambda^2\,(1 + \text{ſin}\,\lambda^2)}{8\,\text{coſ}\,\lambda^6} = \frac{\text{ſin}\,\lambda\,(1 + \text{ſin}\,\lambda^2)}{8\,\text{coſ}\,\lambda^4}$. Ainſi le coëfficient de ſin 4 L eſt $= -\frac{\text{ſin}\,\lambda\,(1 + \text{ſin}\,\lambda^2)}{\text{coſ}\,\lambda^4}\left(\frac{1}{8}\,\text{tang}\,c^4 - \frac{1}{8}\,\text{tang}\,c^6\ \&c.\right)$

On aura donc en réuniſſant ces valeurs,

$$p = \frac{\text{coſ}\,L}{\text{coſ}\,\lambda}\left(\text{tang}\,c - \tfrac{1}{4}\,\text{tang}\,c^3 + \tfrac{1}{8}\,\text{tang}\,c^5 - \tfrac{5}{64}\,\text{tang}\,c^7\ \&c.\right)$$

$$+ \frac{\text{ſin}\,2\,L\,\text{ſin}\,\lambda}{\text{coſ}\,\lambda^2}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,c^2 - \tfrac{1}{4}\,\text{tang}\,c^4 + \tfrac{5}{32}\,\text{tang}\,c^6\ \&c.\right)$$

$$- \frac{(1 + 3\,\text{ſin}\,\lambda^2)}{\text{coſ}\,\lambda^3}\,\text{coſ}\,3\,L \times \left(\tfrac{1}{12}\,\text{tang}\,c^3 - \tfrac{1}{16}\,\text{tang}\,c^5 + \tfrac{3}{64}\,\text{tang}\,c^7\ \&c.\right)$$

$$- \frac{\text{ſin}\,\lambda\,(1 + \text{ſin}\,\lambda^2)}{\text{coſ}\,\lambda^4}\,\text{ſin}\,4\,L\left(\tfrac{1}{8}\,\text{tang}\,c^4 - \tfrac{1}{8}\,\text{tang}\,c^6\ \&c.\right)\&c.$$

Comme les fonctions de ſin λ & coſ λ qui ſervent de coëfficient à chaque terme n'obſervent point de loi marquée, voyons ſi en les changeant en ſin $\frac{1}{2}\lambda$ & coſ $\frac{1}{2}\lambda$, ils en obſervont une plus ſenſible. On ſait que coſ λ = coſ $\frac{1}{2}\lambda^2$ — ſin $\frac{1}{2}\lambda^2$ = $(1 - t\,\tfrac{1}{2}\lambda^2)$,

$\cos\frac{1}{2}\lambda^2$, donc $\dfrac{1}{\cos\lambda} = \dfrac{1}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}\lambda^2}{1 - t\frac{1}{2}\lambda^2}} =$

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\lambda^2 + \cos\frac{1}{2}\lambda^2}{\cos\frac{1}{2}\lambda^2}}{1 - t.\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{1 + t.\frac{1}{2}\lambda^2}{1 - t.\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{1 + t.\frac{1}{2}\lambda^2}{(1 + t.\lambda)(1 - t.\frac{1}{2}\lambda)}$$

$= \dfrac{A + B\,t.\frac{1}{2}\lambda}{1 - t.\frac{1}{2}\lambda} + \dfrac{C + D\,t.\frac{1}{2}\lambda}{1 + t.\frac{1}{2}\lambda}$, ce qui donne

$$\begin{array}{llll} & A & + A\,t.\frac{1}{2}\lambda & + B\,t.\frac{1}{2}\lambda^2 = 1 + t.\frac{1}{2}\lambda^2, \text{ donc} \\ + & C & + B & - D \\ & & + D & \\ & & - C & \end{array}$$

$A + C = 1$, $A + B + D - C = o$, $B - D = 1$.
Comme il n'y a que trois équations pour quatre inconnues, il en reste une d'indéterminée, je puis donc faire $C = A$, ce qui donne $A = C = \frac{1}{2}$, j'ai ensuite $B + D = o$, $B - D = 1$, ce qui donne $D = - B$ & $2B = 1$ ou $B = \frac{1}{2}$ & $D = - \frac{1}{2}$, j'ai donc $\dfrac{1}{\cos\lambda} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t.\frac{1}{2}\lambda}{1 - t.\frac{1}{2}\lambda} +$ $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t.\frac{1}{2}\lambda}{1 + t.\frac{1}{2}\lambda}$, ou $\dfrac{2}{\cos\lambda} = \dfrac{1 + t\frac{1}{2}\lambda}{1 - t.\frac{1}{2}\lambda} + \dfrac{1 - t.\frac{1}{2}\lambda}{1 + t.\frac{1}{2}\lambda}$.

Or on sait que tang $(a + b) = \dfrac{t.a + t.b}{1 - t.a\,t.b}$ & tang $(a - b) = \dfrac{t.a - t.b}{1 + t.a\,t.b}$.

On sait de plus que l'arc dont la tangente est 1, est l'arc de 45°, nous aurons donc $\dfrac{2}{\cos\lambda} =$

$\frac{t.\,45^\circ + t.\,\frac{1}{2}\lambda}{1 - t.\,45^\circ t.\,\frac{1}{2}\lambda} + \frac{t.\,45^\circ - t.\,\frac{1}{2}\lambda}{1 + t.\,45^\circ t.\,\frac{1}{2}\lambda} = t.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda) + t.\,(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)$ & $\frac{1}{\cos\lambda} = \frac{1}{2}\,(t.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda) + t.\,(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda))$. Je fais pour abréger $t.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda) = a$ & $t.\,(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda) = b$ & j'ai $\frac{2}{\cos\lambda} = a + b$, & je remarque qu'en $a\ ab =$ $\frac{1 + t.\,\frac{1}{2}\lambda}{1 - t.\,\frac{1}{2}\lambda} + \frac{1 - t.\,\frac{1}{2}\lambda}{1 + t.\,\frac{1}{2}\lambda} = 1$. Cela posé, on aura $\frac{4}{\cos\lambda^2} = (a + b)^2$ ou $\cos\lambda^2 = \frac{4}{(a+b)^2}$, donc $\sin\lambda^2 = 1 - \frac{4}{(a+b)^2} =$

$$\frac{a^2 + 2ab + bb - 4}{(a+b)^2} = \frac{a^2 + 2ab + bb - 4ab}{(a+b)^2}$$

$= \frac{aa - 2ab + bb}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$, donc $\sin\lambda$ $= \frac{a - b}{a + b}$. J'aurai donc $\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda^2} = \frac{a-b}{a+b}$: $\frac{4}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4}$, c'est-à-dire, en remettant les valeurs de a & b $\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda^2} =$ $\frac{1}{4}\,(t.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^2 - t.\,(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)^2)$. On aura de même $\frac{1 + 3\sin\lambda^2}{\cos\lambda^3} = \left(1 + \frac{3\,(a-b)^2}{(a+b)^2}\right) \cdot \frac{8}{(a+b)^3}$

$$= \frac{(a+b)^3 + 3\,(a-b)^2\,(a+b)}{8} =$$

$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3b^3}{8}$$

$= \dfrac{4a^3 + 4b^3}{8} = \frac{1}{2}(a^3 + b^3)$. Donc en remettant les valeurs $\dfrac{1 + 3\sin\lambda^2}{\cos\lambda^3} = \frac{1}{2}(\text{t.}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^3 + \text{t.}(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)^3)$. Enfin $\dfrac{\sin\lambda\,(1 + \sin\lambda^2)}{\cos\lambda^4} =$
$\left(\left(\dfrac{a - b}{a + b}\right) + \dfrac{(a - b)^3}{(a + b)^3}\right) : \dfrac{16}{(a + b)^4} =$
$\dfrac{(a + b)^3 (a - b) + (a - b)^3 (a + b)}{16} =$
$\dfrac{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 - b^4 + a^4 - 2a^3b - 2ab^3 - b^4}{16}$
$= \dfrac{2a^4 - 2b^4}{16} = \frac{1}{8}(a^4 - b^4)$, donc en remettant les valeurs $\dfrac{\sin\lambda\,(1 + \sin\lambda^2)}{\cos\lambda^4} = \frac{1}{8}(\text{t.}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^4 - \text{t.}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^4)$. Substituant donc ces valeurs dans la formule, nous aurons

$$\begin{aligned}
p = {} & \tfrac{1}{2}\cos L\,(\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) + \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)) \\
& \quad (\text{tang}\,c - \tfrac{1}{4}\text{t.}\,c^3 + \tfrac{1}{8}\text{t.}\,c^5 - \tfrac{5}{64}\text{t.}\,c^7\ \&c.) \\
& + \tfrac{1}{4}\sin 2L\,(\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^2 - \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^2) \\
& \quad (\tfrac{1}{2}\text{tang}\,c^2 - \tfrac{1}{4}\text{t.}\,c^4 + \tfrac{5}{32}\text{t.}\,c^6\ \&c.) \\
& - \tfrac{1}{2}\cos 3L\,(\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^3 + \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^3 \\
& \quad (\tfrac{1}{12}\text{tang}\,c^3 - \tfrac{1}{16}\text{t.}\,c^5 + \tfrac{3}{64}\text{t.}\,c^7\ \&c.) \\
& - \tfrac{1}{8}\sin 4L\,(\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^4 - \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^4) \\
& \quad (\tfrac{1}{8}\text{tang}\,c^4 - \tfrac{1}{8}\text{t.}\,c^6\ \&c.)
\end{aligned}$$

Voyons maintenant si les fonctions de tang c qui entrent dans les quatre termes n'observeront pas de loi plus sensible, quand on les transformera en fonctions de tang $\frac{1}{2}c$. On sait que tang $c = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2}c}{1 - \text{tang } \frac{1}{2}c^2}$, donc tang c — tang c t. $\frac{1}{2}c^2 =$ 2 t. $\frac{1}{2}c$ & t. $\frac{1}{2}c^2 = 1 - \frac{2 \text{ t. } \frac{1}{2}c}{\text{t. } c}$ ou t. $\frac{1}{2}c = - \frac{1}{\text{t. } c} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\text{t. } c^2}} = \frac{\sqrt{1 + \text{t. } c^2} - 1}{\text{t. } c}$. Or $\sqrt{1 + \text{t. } c^2} = 1 + \frac{1}{2}\text{t. } c^2 - \frac{1}{8}\text{t. } c^4 + \frac{1}{16}\text{t. } c^6 - \frac{5}{128}\text{t. } c^8$ &c.) Donc t. $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\text{t. } c - \frac{1}{8}\text{t. } c^3 + \frac{1}{16}\text{t. } c^5 - \frac{5}{128}\text{t. } c^7$ &c. Donc le coëfficient de cos L tang $c - \frac{1}{4}$ tang $c^3 + \frac{1}{8}$ tang $c^5 - \frac{5}{64}$ tang c^7 &c. $=$ 2 *tang* $\frac{1}{2}c$. En élevant au quarré la valeur de tang $\frac{1}{2}c$, on aura tang $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{4}$ tang $c^2 - \frac{1}{8}$ tang $c^4 + \frac{5}{64}$ tang c^6 &c. Donc le coëfficient de sin 2 L, $\frac{1}{2}$ tang $c^2 - \frac{1}{4}$ tang $c^4 + \frac{5}{32}$ tang c^6 &c. $=$ 2 tang $\frac{1}{2}c^2$. En élevant au cube la valeur de tang $\frac{1}{2}c$, on aura tang $\frac{1}{2}c^3 = \frac{1}{8}$ tang $c^3 - \frac{3}{32}$ tang $c^5 + \frac{9}{128}$ tang c^7 &c., donc le coëfficient de cos 3 L, $\frac{1}{12}$ tang $c^3 - \frac{1}{16}$ tang $c^5 + \frac{3}{64}$ tang c^7 &c. $= \frac{2}{3}$ tang $\frac{1}{2}c^3$. En élevant au quarré quarré la valeur de *tang* $\frac{1}{2}c$, on aura tang $\frac{1}{2}c^4 = \frac{1}{16}$ tang $c^4 - \frac{1}{16}$ tang c^6 &c. donc le coëfficient de sin 4 L, $\frac{1}{8}$ tang $c^4 - \frac{1}{8}$ tang $c^6 =$ 2 tang $\frac{1}{2}c^4$. Substituant donc ces valeurs dans la formule, & réduisant on aura,

$$p = (\text{t. }(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) + \text{t. }(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda))\,\text{t. }\tfrac{1}{2}c \cos \text{L.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\text{t. }45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^2 - \text{t. }(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^2)\,\text{t. }\tfrac{1}{2}c^2 \sin 2\text{L.}$$
$$- \tfrac{1}{3}(\text{t. }(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^3 + \text{t. }(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^3)\,\text{t. }\tfrac{1}{2}c^3 \cos 3\text{L.}$$
$$- \tfrac{1}{4}(\text{t. }45^\circ + \lambda)^4 - \text{t. }(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^4)\,\text{t. }\tfrac{1}{2}c^4 \sin 4\text{L.}$$

C'est la formule que donne M. de la Grange, &c.

PROBLEME

PROBLÈME V.

Étant données la longitude, la latitude, & l'obliquité de l'écliptique, trouver l'ascension droite.

M. de la Grange donné dans le même endroit cité a une formule qui contient la solution de ce Problème. En voici la démonstration : En concervant les dénominations de la Remarque précédente & appellant A l'ascension droite & δ la déclinaison, on aura par le Problème I de ce Chapitre $\sin\lambda = \cos c \sin\delta - \sin A \sin c \cos\delta$; par le Problème II $\cos\delta = \frac{\cos L \cos\lambda}{\cos A}$, & par le Problème III $\tang\delta$

$$= \frac{\tang L \cos A - \sin A \cos c}{\sin c},$$ multipliant l'une par l'autre les deux dernieres formules, j'ai $\sin\delta = \frac{\sin L \cos\lambda - \tang A \cos c \cos L \cos\lambda}{\sin c}$; substituant les valeurs de $\sin\delta$ & $\cos\delta$ dans la premiere de ces formules, on obtient $\sin\lambda =$

$$\frac{\cos c \sin L \cos\lambda - \tang A \cos c^2 \cos L \cos\lambda - \tang A \sin c^2 \cos L \cos\lambda}{\sin c}$$

$$= \frac{\cos c \sin L \cos\lambda - \tang A \cos L \cos\lambda}{\sin c},$$ donc

$$\tang A = \frac{\cos c \sin L \cos\lambda - \sin\lambda \sin c}{\cos L \cos\lambda} =$$

$$\frac{\cos c \sin L - \tang\lambda \sin c}{\cos L},$$ or $\tang(L - A) =$

$$\frac{\text{tang L} - \text{tang A}}{1 + \text{tang L tang A}} = \frac{\frac{\text{fin L}}{\text{cof L}} - \frac{\text{cof}\, c \text{ fin L} + \text{tang}\, \lambda \text{ fin}\, c}{\text{cof L}}}{1 + \frac{\text{cof}\, c \text{ fin L}^2 - \text{tang}\, \lambda \text{ fin}\, c \text{ fin L}}{\text{cof L}^2}}$$

$$= \frac{\text{fin L cof L}\, (1 - \text{cof}\, c) + \text{tang}\, \lambda \text{ cof L fin}\, c}{\text{cof L}^2 + \text{cof}\, c \text{ fin L}^2 - \text{tang}\, \lambda \text{ fin}\, c \text{ fin fin L}}$$

Mais on fait que $\text{fin}\, c = 2 \text{ fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c$ & $\text{cof}\, c = \text{cof} \frac{1}{2} c^2 - \text{fin} \frac{1}{2} c^2 = 1 - 2 \text{ fin} \frac{1}{2} c^2$, d'où l'on tire $1 - \text{cof}\, c = 2 \text{ fin} \frac{1}{2} c^2$. Substituant dans notre formule ces valeurs de fin c & cof c, elle deviendra $=$

$$\frac{2 \text{ fin L cof L fin} \frac{1}{2} c^2 + 2 \text{ tang}\, \lambda \text{ cof L fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c}{\text{cof L}^2 + \text{fin L}^2 - 2 \text{ fin L}^2 \text{fin} \frac{1}{2} c^2 - 2 \text{tang}\, \lambda \text{ fin L fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\text{cof L}\, (2 \text{ fin L fin} \frac{1}{2} c^2 + 2 \text{ tang}\, \lambda \text{ fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c)}{1 - \text{fin L}\, (2 \text{ fin L fin} \frac{1}{2} c^2 + 2 \text{ tang}\, \lambda \text{ fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c}$$

$=$ en faisant pour abréger $2\, (\text{fin L fin} \frac{1}{2} c^2 + \text{tang}\, \lambda \text{ fin} \frac{1}{2} c \text{ cof} \frac{1}{2} c) = x)$ $\frac{x \text{ cof L}}{1 - x \text{ fin L}}$. On aura donc en reduisant cette formule ensuite,

$\text{tang}\, (\text{L} - \text{A}) = x \text{ cof L}\, (1 + x \text{ fin L} + x^2 \text{ fin L}^2 + x^3 \text{ fin L}^3 + x^4 \text{ fin L}^4 + x^5 \text{ fin L}^5 + x^6 \text{ fin L}^6$ &c.

& en élevant cette suite aux puissances plus hautes,

$\text{Tang}\, (\text{L} - \text{A})^3 = x^3 \text{ cof L}^3\, (1 + 3\, x \text{ fin L} + 6\, x^2 \text{ fin L}^2 + 10\, x^3 \text{ fin L}^3 + 15\, x^4 \text{ fin L}^4 +$ &c.$)$

$\text{Tang}\, (\text{L} - \text{A})^5 = x^5 \text{ cof L}^5\, (1 + 5\, x \text{ fin L} + 20\, x^2 \text{ fin L}^2 + 35\, x^3 \text{ fin L}^3 +$ &c.$)$

$\text{Tang}\, (\text{L} - \text{A})^7 = x^7 \text{ cof L}^7\, (1 + 7\, x \text{ fin L} +$ &c.

Or, on fait que

$\text{L} - \text{A} = \text{tang}\, (\text{L} - \text{A}) - \frac{1}{3} \text{ t.}\, (\text{L} - \text{A})^3 + \frac{1}{5} \text{ t.}\, (\text{L} - \text{A})^5 - \frac{1}{7} \text{ t.}\, (\text{L} - \text{A})^7 +$ &c., donc

$$L - A = x \cos L + x^2 \sin L \cos L + x^3 \sin L^2 \cos L - \frac{x^3 \cos L^3}{3}$$

$$+ x^4 \sin L^3 \cos L + x^5 \sin L^4 \cos L + x^6 \sin L^5 \cos L$$
$$- x^4 \cos L^3 \sin L - 2x^5 \cos L^3 \sin L^2 - \tfrac{10}{3} x^6 \cos L^3 \sin L^3$$
$$+ \tfrac{1}{5} x^5 \cos L^5 + x^6 \cos L^5 \sin L$$
$$+ x^7 \sin L^6 \cos L$$
$$- 5x^7 \cos L^3 \sin L^4$$
$$+ 3x^7 \cos L^5 \sin L^2 \quad \&c.$$
$$- \frac{x^7 \cos L^7}{7}$$

Or $x = 2\,(\sin L \sin \tfrac{1}{2} c^2 + \text{tang}\, \lambda \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c)$ donc

$x^2 = 4\,(\sin L^2 \sin \tfrac{1}{2} c^4 + 2\, \text{tang}\, \lambda \sin L \sin \tfrac{1}{2} c^3 \cos \tfrac{1}{2} c + \text{tang}\, \lambda^2 \sin \tfrac{1}{2} c^2 \cos \tfrac{1}{2} c^2)$.

$x^3 = 8\,(\sin L^3 \sin \tfrac{1}{2} c^6 + 3 \sin L^2 \,\text{tang}\, \lambda \sin \tfrac{1}{2} c^5 \cos \tfrac{1}{2} c + 3 \sin L\ \text{t.}\, \lambda^2 \sin \tfrac{1}{2} c^4 \cos \tfrac{1}{2} c^2 + \text{t.}\, \lambda^3 \sin \tfrac{1}{2} c^3 \cos \tfrac{1}{2} c^3.)$

$x^4 = 16\,(\sin L^4 \sin \tfrac{1}{2} c^8 + 4 \sin L^3\ \text{t.}\, \lambda \sin \tfrac{1}{2} c^7 \cos \tfrac{1}{2} c + 6 \sin L^2 \,\text{tang}\, \lambda^2 \sin \tfrac{1}{2} c^6 \cos \tfrac{1}{2} c^2 + 4 \sin L\ \text{t.}\, \lambda^3 \sin \tfrac{1}{2} c^5 \cos \tfrac{1}{2} c^3 + \text{t.}\, \lambda^4 \sin \tfrac{1}{2} c^4 \cos \tfrac{1}{2} c^4.)$

$x^5 = 32\,(\sin L^5 \sin \tfrac{1}{2} c^{10} + 5 \sin L^4\ \text{t.}\, \lambda \sin \tfrac{1}{2} c^9 \cos \tfrac{1}{2} c + 10 \sin L^3\ \text{t.}\, \lambda^2 \sin \tfrac{1}{2} c^8 \cos \tfrac{1}{2} c^2 + 10 \sin L^2 \,\text{tang}\, \lambda^3 \sin \tfrac{1}{2} c^7 \cos \tfrac{1}{2} c^3 + 5 \sin L\ \text{t.}\, \lambda^4 \sin \tfrac{1}{2} c^6 \cos \tfrac{1}{2} c^4 + \text{tang}\, \lambda^5 \sin \tfrac{1}{2} c^5 \cos \tfrac{1}{2} c^5)$ &c.

Je ne pousse pas plus loin le développement des puissances de x, parce que je ne veux qu'indiquer & démontrer clairement la marche, le reste n'ayant d'autre difficulté que la longueur du calcul. Substituant dans l'expression de $L - A$ ces valeurs de x, x^2, x^3, x^4, x^5 &c. On aura en ordonnant suivant les puissances de tang λ; $L - A = 2 \sin L \cos L \sin \frac{1}{2} c^2 + 4 \sin L^3 \cos L \sin \frac{1}{2} c^4 + 8 \sin L^5 \cos L \sin \frac{1}{2} c^6 - \frac{8}{3} \sin L^3 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^6 + 16 \sin L^7 \cos L \sin \frac{1}{2} c^8 - 16 \sin L^5 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^8 + 32 \sin L^9 \cos L \sin \frac{1}{2} c^{10} - 64 \sin L^7 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^{10} + \frac{32}{5} \sin L^5 \cos L^5 \sin \frac{1}{2} c^{10}$ &c.

$+$ tang λ $(2 \cos L \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c + 8 \sin L^2 \cos L \sin \frac{1}{2} c^3 \cos \frac{1}{2} c + 24 \sin L^4 \cos L \sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c - 8 \sin L^2 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c + 64 \sin L^6 \cos L \sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c - 64 \sin L^4 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c + 160 \sin L^8 \cos L \sin \frac{1}{2} c^9 \cos \frac{1}{2} c - 320 \sin L^6 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^9 \cos \frac{1}{2} c + 32 \sin L^4 \cos L^5 \sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c$ &c.$)$ $+$ tang λ^2 $(4 \sin L \cos L \sin \frac{1}{2} c^2 \cos \frac{1}{2} c^2 + 24 \sin L^3 \cos L \sin \frac{1}{2} c^4 \cos \frac{1}{2} c^2 - 8 \sin L \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^4 \cos \frac{1}{2} c^2 + 96 \sin L^5 \cos L \sin \frac{1}{2} c^6 \cos \frac{1}{2} c^2 - 96 \sin L^3 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^6 \cos \frac{1}{2} c^2 + 320 \sin L^7 \cos L \sin \frac{1}{2} c^8 \cos \frac{1}{2} c^2 - 640 \sin L^5 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^8 \cos \frac{1}{2} c^2 + 64 \sin L^3 \cos L^5 \sin \frac{1}{2} c^8 \cos \frac{1}{2} c^2$ &c.$)$ $+$ tang λ^3 $(8 \sin L^2 \cos L \sin \frac{1}{2} c^3 \cos \frac{1}{2} c^3 - \frac{8}{3} \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^3 \cos \frac{1}{2} c^3 + 64 \sin L^4 \cos L \sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c^3 - 64 \sin L^2 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c^3 + 320 \sin L^6 \cos L \sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c^3 - 640 \sin L^4 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c^3 + 64 \sin L^2 \cos L^5 \sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c^3$ &c.$)$ $+$ tang λ^4 $(16 \sin L^3 \cos L \sin \frac{1}{2} c^4 \cos \frac{1}{2} c^4 - 16 \sin L \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^4 \cos \frac{1}{2} c^4 + 160 \sin L^5 \cos L \sin \frac{1}{2} c^6 \cos \frac{1}{2} c^4 - 320 \sin L^3 \cos L^3 \sin \frac{1}{2} c^6 \cos \frac{1}{2} c^4 + 32 \sin L \cos L^5 \sin \frac{1}{2} c^6 \cos \frac{1}{2} c^4$ &c.$)$ $+$ &c.

En changeant les multiples des sinus & cosinus en sinus & cosinus d'arcs multiples, & reduisant, on a les termes où λ n'entre pas,

$$= \sin 2 L \, (\sin \tfrac{1}{2} c^2 + \sin \tfrac{1}{2} c^4 + \sin \tfrac{1}{2} c^6 + \sin \tfrac{1}{2} c^8 + \sin \tfrac{1}{2} c^{10} \text{ \&c.})$$

$- \sin 4 L \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} c^4 + \sin \frac{1}{2} c^6 + \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2} c^8 + 2 \sin \frac{1}{2} c^{10} \, \&c. \right) = \sin 2 L \, t. \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2} \sin 4 L \, t. \frac{1}{2} c^4$ comme on le verra plus bas. Pour avoir les termes qui forment le coëfficient de $\mathrm{tang}\, \lambda$, on considerera que $\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} c}$, donc $\sin \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c$ & $\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c^2 = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^2$, & par conséquent $\sin \frac{1}{2} c^3 \cos \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^2 - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4$; $\sin \frac{1}{2} c^5 \cos \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4 - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6$, $\sin \frac{1}{2} c^7 \cos \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8$, $\sin \frac{1}{2} c^9 \cos \frac{1}{2} c = \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 - \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^{10}$ &c., ce coëfficient devient donc $= 2 \cos L \, \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c - 2 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^2 + 8 \sin L^2 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^2 - 8 \sin L^2 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4 + 24 \sin L^4 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4 - 24 \sin L^4 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 - 8 \sin L^2 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4 + 8 \sin L^2 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 + 64 \sin L^6 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 - 64 \sin L^6 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 - 64 \sin L^4 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 + 64 \sin L^4 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 + 160 \sin L^8 \cos L \, t \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 - 160 \sin L^8 \cos L \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^{10} - 320 \sin L^6 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 + 320 \sin L^6 \cos L^3 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^{10} + 32 \sin L^4 \cos L^5 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8 - 32 \sin L^4 \cos L^5 \, t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^{10}$ &c. $= \mathrm{tang}\, \lambda \, (2 \cos L \, \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c - 2 \cos 3 L \, (t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^2 + t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^4 + t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^6 + t. \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} c^8$ &c.) Or $\sin \frac{1}{2} c^2 + \sin \frac{1}{2} c^4 + \sin \frac{1}{2} c^6 + \sin \frac{1}{2} c^8$ &c. $= \frac{\sin \frac{1}{2} c^2}{1 - \sin \frac{1}{2} c^2} = \frac{\sin \frac{1}{2} c^2}{\cos \frac{1}{2} c^2} = t. \frac{1}{2} c^2$, donc ce second terme devient $= \mathrm{tang}\, \lambda \left(2 \cos L \, \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c - 2 \cos 3 L \, \mathrm{tang}\, \frac{1}{2} c^3 \right)$. Dans les termes qui

forment le coëfficient de tang λ^2 on mettra au lieu de cof $\frac{1}{2}c^2$, 1 — fin $\frac{1}{2}c^2$, & l'on aura
4 fin L cof L fin $\frac{1}{2}c^2 - 4$ fin L cof L fin $\frac{1}{2}c^4 +$ 24 fin L^3 cof L fin $\frac{1}{2}c^4 - 24$ fin L^3 cof L fin $\frac{1}{2}c^6$ $- 8$ fin L cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^4 + 8$ fin L cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^6 +$ 96 fin L^5 cof L fin $\frac{1}{2}c^6 - 96$ fin L^5 cof L fin $\frac{1}{2}c^8$ $- 96$ fin L^3 cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^6 + 96$ fin L^3 cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^8 + 320$ fin L^7 cof L fin $\frac{1}{2}c^8 - 320$ fin L^7 cof L fin $\frac{1}{2}c^{10} - 640$ fin L^5 cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^8 + 640$ fin L^5 cof L^3 fin $\frac{1}{2}c^{10} + 64$ fin L^3 cof L^5 fin $\frac{1}{2}c^8 -$ 64 fin L^3 cof L^5 fin $\frac{1}{2}c^{10}$ &c. $=$ tang λ^2 (2 fin 2 L (fin $\frac{1}{2}c^2$ + fin $\frac{1}{2}c^4$ + fin $\frac{1}{2}c^6$ + fin $\frac{1}{2}c^8$ &c.) — 4 fin 4 L (fin $\frac{1}{2}c^4 + 2$ fin $\frac{1}{2}c^6 + 3$ fin $\frac{1}{2}c^8$ &c.).) Or tang $\frac{1}{2}c^4 =$ fin $\frac{1}{2}c^4 + 2$ fin $\frac{1}{2}c^6 + 3$ fin $\frac{1}{2}c^8$ &c. donc le troisieme terme devient $=$ tang λ^2 (2 fin 2 L tang $\frac{1}{2}c^2$ — 4 fin 4 L tang $\frac{1}{2}c^4$). Dans les termes qui forment le coëfficient de tang λ^3, on mettra au lieu de fin $\frac{1}{2}c^3$ cof $\frac{1}{2}c^3$, t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^2$ — 2 t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^4$ + t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^6$, au lieu de fin $\frac{1}{2}c^5$ cof $\frac{1}{2}c^3$, t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^4$ — 2 t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^6$ + t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^8$, & au lieu de fin $\frac{1}{2}c^7$ cof $\frac{1}{2}c^3$, t. $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^6$ — 2 tang $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^8$ + tang $\frac{1}{2}c$ fin $\frac{1}{2}c^{10}$, & l'on aura,

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ fin } L^2 \text{ cof } L \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \\ -\tfrac{8}{3} \text{ cof } L^3 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \end{array}\right\} \text{fin } \tfrac{1}{2}c^2 - 2\text{fin } \tfrac{1}{2}c^4 + \text{fin } \tfrac{1}{2}c^6)$$
$$\left.\begin{array}{l} + 64 \text{ fin } L^4 \text{ cof } L \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \\ - 64 \text{ fin } L^2 \text{ cof } L^3 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \end{array}\right\} \text{fin } \tfrac{1}{2}c^4 - 2 \text{ fin } \tfrac{1}{2}c^6 \text{ \&c.})$$
$$\left.\begin{array}{l} + 320 \text{ fin } L^6 \text{ cof } L \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \\ - 640 \text{ fin } L^4 \text{ cof } L^3 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \\ + 64 \text{ fin } L^2 \text{ cof } L^5 \text{ tang } \tfrac{1}{2}c \end{array}\right\} \text{fin } \tfrac{1}{2}c^6 \text{ \&c.}) =$$

$-\frac{8}{3}$ cof 3 L tang λ^3 t. $\frac{1}{2}c \times$ (fin $\frac{1}{2}c^2$ + fin $\frac{1}{2}c^4$ + fin $\frac{1}{2}c^6$ &c.) $= -\frac{8}{3}$ cof 3 L tang λ^3 tang $\frac{1}{2}c^3$. Dans les termes qui forment le coëfficient de tang λ^4, on mettra au lieu de $\cos\frac{1}{2}c^4$ $1 - 2\sin\frac{1}{2}c^2 + \sin\frac{1}{2}c^4$, & l'on aura

$$\left.\begin{matrix} 16\sin L^3 \cos L \\ -16\sin L \cos L^3 \end{matrix}\right\} \sin\tfrac{1}{2}c^4 - 2\sin\tfrac{1}{2}c^6 + \sin\tfrac{1}{2}c^8)$$

$$\left.\begin{matrix} +160\sin L^5 \cos L \\ -320\sin L^6 \cos L^3 \\ +32\sin L \cos L^5 \end{matrix}\right\} \sin\tfrac{1}{2}c^6 - 2\sin\tfrac{1}{2}c^8 \ \&c.) =$$

$-4\sin 4L \tan\lambda^4 (\sin\frac{1}{2}c^4 + 2\sin\frac{1}{2}c^6 \ \&c.) =$
$-4\sin 4L \tan\lambda^4 \tan\frac{1}{2}c^4$. Réunissant toutes ces valeurs, on aura $L - A = \cos L\,(2\tan\lambda \tan\frac{1}{2}c)$
$+ \sin 2L\,(\tan\frac{1}{2}c^2 + 2\tan\lambda^2 \tan\frac{1}{2}c^2) -$
$\cos 3L\,(2\tan\lambda \tan\frac{1}{2}c^3 + \frac{8}{3}\tan\lambda^3 \tan\frac{1}{2}c^3)$
$- \sin 4L\,(4\tan\lambda^2 \tan\frac{1}{2}c^4 + 4\tan\lambda^4 \tan\frac{1}{2}c^4$
$+ \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}c^4) =$

$\tan\frac{1}{2}c \cos L\ 2\tan\lambda + \tan\frac{1}{2}c^2 \sin 2L\,(1 + 2\,t.\lambda^2)$
$- \tan\frac{1}{2}c^3 \cos 3L\,(2\tan\lambda + \frac{8}{3}\tan\lambda^3)$
$- \tan\frac{1}{2}c^4 \sin 4L\,(4\,t.\lambda^2 + 4\,t.\lambda^4 + \frac{1}{2})$.

Or, en conservant les dénominations prises ci-dessus, dans la Remarque précédente, nous avons vu que $\cos\lambda = \dfrac{2}{a+b}$, $\sin\lambda = \dfrac{a-b}{a+b}$, donc $t.\lambda =$
$\dfrac{a-b}{2}$, $2\,t.\lambda = a-b$, $= t.(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda) + t.(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)$.

De plus $\tan\lambda^2 = \dfrac{(a-b)^2}{4}$, donc $1 + 2\tan\lambda^2$
$= 1 + \dfrac{(a-b)^2}{2} = \dfrac{2 + a^2 - 2ab + b^2}{2} =$
$\dfrac{2 + a^2 - 2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(t.(45^\circ$
$+ \frac{1}{2}\lambda)^2 + t.(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)^2)$. On aura de

même $2 \text{ tang } \lambda + \frac{8}{3} \text{ tang } \lambda^3 = a - b + \frac{8}{3}$

$$\frac{(a-b)^3}{8} = a - b + \frac{(a-b)^3}{3} =$$

$$\frac{3a - 3b + a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3}{3} =$$

$$\frac{3a - 3b + a^3 - 3a + 3b - b^3}{3} = \tfrac{1}{3}(a^3 - b^3)$$

$= \frac{1}{3}(\text{t.}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^3 - \text{t.}(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)^3)$.

On a enfin $\frac{1}{2} + 4 \text{ tang } \lambda^2 + 4 \text{ tang } \lambda^4 = \frac{1}{2} +$

$$(a-b)^2 + \frac{(a-b)^4}{4} =$$

$$\frac{2 + 4(a-b)^2 + (a-b)^4}{4} =$$

$$\frac{2 + 4a^2 - 8ab + 4b^2 + a4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}{4}$$

$$= \frac{2 + 4a^2 - 8 + 4b^2 + a^4 - 4a^2 + b - 4b^2 + b^4}{4}$$

$= \frac{1}{4}(a^4 + b^4) = \frac{1}{4}(\text{t.}(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)^4 + \text{t.}(45^\circ - \frac{1}{2}\lambda)^4)$. Subſtituant donc ces valeurs nous aurons,

$$A = L - (\text{t.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c \cos L$$
$$- \tfrac{1}{2}(\text{t.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^2 + \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^2) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c^2 \sin 2L$$
$$+ \tfrac{1}{3}(\text{t.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^3 - \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^3) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c^3 \cos 3L$$
$$+ \tfrac{1}{4}(\text{t.}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)^4 + \text{t.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)^4) \text{ tang } \tfrac{1}{2} c^4 \sin 4L \text{ \&c.}$$

C'eſt la formule que trouve M. de la Grange.

REMARQUE

REMARQUE.

Les deux formules de M. de la Grange dont je viens de donner la démonstration, sont des fractions composées de quantités Trigonométriques & réduites en suites régulieres. Dans les Mémoires de Berlin de 1776 où ce grand Géometre a donné une démonstration de ces formules, il en développe plusieurs autres par sa méthode, & la méthode que nous avons employée peut s'y appliquer aussi, comme je vais le faire voir. On a la formule tang $x = \frac{a \sin y + b \cos y}{\cos y + p \sin y}$ & il s'agit de trouver la valeur de x en y par une suite réguliere. On a tang $(x - y) = \frac{t.x - t y}{1 + t.x\, t.y} = \left(\frac{a \sin y + b \cos y}{\cos y + p \sin y} - \frac{\sin y}{\cos y}\right)$:

$$\left(\frac{1 + \frac{a \sin y^2 + b \sin y}{\cos y}}{\cos y + p \sin y}\right);$$

$$= \frac{a \sin y \cos y + b \cos y^2 - \sin y \cos y - p \sin y^2}{\cos y^2 + p \sin y \cos y + a \sin y^2 + b \sin y \cos y}$$

$$= \frac{(a - 1) \sin y \cos y + b - (b + p) \sin y^2}{(b + p) \sin y \cos y + (a - 1) \sin y^2 + 1}$$

$$= \frac{\frac{(a-1)}{2} \sin 2y + b - (b + p)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2y)}{\frac{(b+p)}{2} \sin 2y + (a - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2y) + 1}$$

$$= \frac{\frac{(b-p)}{2} + \frac{(b+p)}{2}\operatorname{cof} 2y - \frac{(1-a)}{2}\operatorname{fin} 2y}{\frac{(1+a)}{2} + \frac{(1-a)}{2}\operatorname{cof} 2y + \frac{(b+p)}{2}\operatorname{fin} 2y}$$

$$= \frac{b-p+(b+p)\operatorname{cof} 2y - (1-a)\operatorname{fin} 2y}{1+a+(1-a)\operatorname{cof} 2y + (b+p)\operatorname{fin} 2y}.$$

Maintenant pour ſimplifier cette expreſſion, je vois qu'en faiſant $b+p = k \operatorname{fin} \beta$ & $1-a = k \operatorname{cof} \beta$ (k & β étant des quantités indéterminées que je déterminerai bientôt), j'aurai tang $(x-y) =$ $\frac{b-p+k \operatorname{fin} \beta \operatorname{cof} 2y - k \operatorname{cof} \beta \operatorname{fin} 2y}{1+a+k \operatorname{cof} \beta \operatorname{cof} 2y + k \operatorname{fin} \beta \operatorname{fin} 2y} =$ $\frac{b-p-k \operatorname{fin}(2y-\beta)}{1+a+k \operatorname{cof}(2y-\beta)}$. Or comme j'ai trois quantités b, p, a & que je n'ai introduit que deux conſtantes arbitraires k, β, je dois en introduire encore une, je ferai donc $b-p = \operatorname{fin} \phi$, & $1+a = \operatorname{cof} \phi$ ce qui me donne $\frac{\operatorname{fin} \phi - k \operatorname{fin}(2y-\beta)}{\operatorname{cof} \phi + k \operatorname{cof}(2y-\beta)}$

$$= \frac{\operatorname{tang} \phi - \frac{k}{\operatorname{cof} \phi} \operatorname{fin}(2y-\beta)}{1 + \frac{k}{\operatorname{cof} \phi} \operatorname{cof}(2y-\beta)};$$

ces déterminations nous donnent tang $\phi = \frac{b-p}{1+a}$ & tang $\beta = \frac{b+p}{1-a}$, déterminations qui s'accordent avec celles qu'a introduites M. de la Grange. On a enſuite $k^2 \operatorname{fin} \beta^2 + k^2 \operatorname{cof} \beta^2 = k^2 =$

$(b+p)^2 + (1-a)^2$, d'où je tire $k = \sqrt{(b+p)^2 + (1-a)^2}$, M. de la Grange trouve $k = \frac{\sqrt{(b+p)^2 + (1-a)^2}}{\sqrt{(b-p)^2 + (1+a)^2}}$; mais cela vient de ce qu'il a ſuppoſé $b+p = \frac{2k \sin \beta}{\cos \phi + k \cos \beta}$, $1-a = \frac{2k \cos \beta}{\cos \phi + k \cos \beta}$, $b-p = \frac{2 \sin \phi}{\cos \phi + k \cos \beta}$ & $1+a = \frac{2 \cos \phi}{\cos \phi + k \cos \beta}$; ces ſuppoſitions étant moins ſimples que les nôtres donnent auſſi une valeur de k moins ſimple, mais du reſte tout ſe fait avec notre valeur de k comme avec celle qu'a adoptée M. de la Grange : faiſant maintenant pour abréger $\frac{k}{\cos \phi} = n$ & $2y - \beta = z$, on aura $\operatorname{tang}(x-y) = \frac{\operatorname{tang} \phi - n \sin z}{1 + n \cos z} = (\operatorname{tang} \phi - n \sin z)(1 - n \cos z + n^2 \cos z^2 - n^3 \cos z^3 \text{ \&c.})$

On aura de même

$$\operatorname{tang}(x-y)^3 = (\operatorname{tang} \phi - n \sin z)^3 (1 - n \cos z + n^2 \cos z^2 - n^3 \cos z^3 \text{ \&c.})^3$$

$$\operatorname{tang}(x-y)^5 = (\operatorname{tang} \phi - n \sin z)^5 (1 - n \cos z + n^2 \cos z^2 - n^3 \cos z^3 \text{ \&c.})$$

$$\operatorname{tang}(x-y)^7 = (\operatorname{tang} \phi - n \sin z)^7 (1 - n \cos z + n^2 \cos z^2 - n^3 \cos z^3 \text{ \&c.})^7 \text{ \&c.}$$

Il faut mettre ces valeurs dans celles de

$$x - y = \operatorname{tang}(x-y) - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}(x-y)^3 + \tfrac{1}{5} \operatorname{tang}(x-y)^5 - \tfrac{1}{7} \operatorname{tang}(x-y)^7 + \text{\&c.}$$

Or tang $(x-y)^3 = (t.\,\phi^3 - 3\,n\,t.\,\phi^2 \sin z + 3\,n^2\,t.\,\phi \sin z^2 - n^3 \sin z^3\ \&c.) \times (1 - 3\,n \cos z + 6\,n^2 \cos z^2 - 10\,n^3 \cos z^3\ \&c.)$

Tang $(x-y)^5 = (t.\,\phi^5 - 5\,n\,t.\,\phi^4 \sin z + 10\,n^2\,t.\,\phi^3 \sin z^2 - 10\,n^3\,t.\,\phi^2 \sin z^3\ \&c.) \times (1 - 5\,n \cos z + 15\,n^2 \cos z^2 - 35\,n^3 \cos z^3\ \&c.)$

Tang $(x-y)^7 = (t.\,\phi^7 - 7\,n\,t.\,\phi^6 \sin z + 21\,n^2\,t.\,\phi^5 \sin z^2 - 35\,n^3\,t.\,\phi^4 \sin z^3\ \&c.) \times (1 - 7\,n \cos z + 28\,n^2 \cos z^2 - 84\,n^3 \cos z^3\ \&c.)$. J'aurai donc en substituant ces valeurs & négligeant les quantités qui passent n^3,

$x - y = t.\,\phi\,(1 - n \cos z + n^2 \cos z^2 - n^3 \cos z^3\ \&c.) - n \sin z\,(1 - n \cos z + n^2 \cos z^2\ \&c.) - \frac{1}{3}\,t.\,\phi^3\,(1 - 3\,n \cos z + 6\,n^2 \cos z^2 - 10\,n^3 \cos z^3\ \&c.) + n\,t.\,\phi^2 \sin z\,(1 - 3\,n \cos z + 6\,n^2 \cos z^2\ \&c.) - n^2\,t.\,\phi \sin z^2\,(1 - 3\,n \cos z) + \frac{1}{3}\,n^3 \sin z^3 + \frac{1}{5}\,t.\,\phi^5\,(1 - 5\,n \cos z + 15\,n^2 \cos z^2 - 35\,n^3 \cos z^3\ \&c.) - n\,t.\,\phi^4 \sin z\,(1 - 5\,n \cos z + 15\,n^2 \cos z^2) + 2\,n^2\,t.\,\phi^3 \sin z^2\,(1 - 5\,n \cos z) - 2\,n^3\,t.\,\phi^2 \sin z^3 - \frac{1}{7}\,t.\,\phi^7\,(1 - 7\,n \cos z + 28\,n^2 \cos z^2 - 84\,n^3 \cos z^3\ \&c.) + n\,t.\,\phi^6 \sin z\,(1 - 7\,n \cos z + 28\,n^2 \cos z^2) - 3\,n^2\,t.\,\phi^5 \sin z^2\,(1 - 7\,n \cos z) + 5\,n^3\,t.\,\phi^4 \sin z^3\ \&c. = t.\,\phi - \frac{1}{3}\,t.\,\phi^3 + \frac{1}{5}\,t.\,\phi^5 - \frac{1}{7}\,t.\,\phi^7\ \&c. - n \cos z\,(t.\,\phi - t.\,\phi^3 + t.\,\phi^5 - t.\,\phi^7\ \&c.) - n \sin z\,(1 - t.\,\phi^2 + t.\,\phi^4 - t.\,\phi^6\ \&c.) + n^2 \cos z^2\,(t.\,\phi - 2\,t.\,\phi^3 + 3\,t.\,\phi^5 - 4\,t.\,\phi^7\ \&c.) + n^2 \sin z \cos z\,(1 - 3\,t.\,\phi^2 + 5\,t.\,\phi^4 - 7\,t.\,\phi^6\ \&c.) - n^2 \sin z^2\,(t.\,\phi - 2\,t.\,\phi^3 + 3\,t.\,\phi^5\ \&c.) - n^3 \cos z^3\,(t.\,\phi - \frac{10}{3}\,t.\,\phi^3 + 7\,t.\,\phi^5 - 12\,t.\,\phi^7\ \&c.) - n^3 \sin z \cos z^2$

$(1 - 6\ \mathrm{t}.\ \phi^2 + 15\ \mathrm{t}.\ \phi^4 - 28\ \mathrm{t}.\ \phi^6$ &c.$)$
$+ n^3 \sin z^2 \cos z\ (3\ \mathrm{t}.\ \phi - 10\ \mathrm{t}.\ \phi^3 + 21\ \mathrm{t}.\ \phi^5$ &c.$)$
$+ n^3 \sin z^3\ (\frac{1}{3} - 2\ \mathrm{t}.\ \phi^2 + 5\ \mathrm{t}.\ \phi^4$ &c.$)$ &c.
Or $\mathrm{t}.\ \phi - \frac{1}{3}\ \mathrm{t}.\ \phi^3 + \frac{1}{5}\ \mathrm{t}.\ \phi^5 - \frac{1}{7}\ \mathrm{t}.\ \phi^7$ &c. $= \phi$, le coëfficient de $n \cos z$ eſt $\mathrm{t}.\ \phi - \mathrm{t}.\ \phi^3 + \mathrm{t}.\ \phi^5 - \mathrm{t}.\ \phi^7$ &c. $= \mathrm{t}.\ \phi\ (1 - \mathrm{t}.\ \phi^2 + \mathrm{t}.\ \phi^4 - \mathrm{t}.\ \phi^6$ &c.$)$. Cette ſuite & toutes celles qui viendront après peuvent ſe ſommer par la méthode des ſuites récurrentes. M. de la Grange a donné dans les Mémoires de Paris de 1772 Tom. I, une très-belle méthode pour trouver la loi de ces ſuites, j'en expoſerai ici une beaucoup moins générale & moins ſavante, mais qui cependant peut être d'un uſage très-ſimple & très-commode dans un grand nombre d'occaſions.

La ſuppoſition la plus ſimple des ſuites récurrentes eſt, que chaque terme ſe forme immédiatement de celui qui le précede, elle donne en appellant m le coëfficient arbitraire qui multiplié $\mathrm{t}.\ \phi^2$, $m = -1$, donc le dénominateur de la fraction ſera $1 - m\ \mathrm{t}.\ \phi^2 = 1 + \mathrm{t}.\ \phi^2$ ſoit le numérateur $r + s\ \mathrm{t}.\ \phi^2$ &c. En ſorte qu'on ait $\frac{r + s\ \mathrm{t}.\ \phi^2}{1 + \mathrm{t}.\ \phi^2} = 1 - \mathrm{t}.\ \phi^2 + \mathrm{t}.\ \phi^4 - \mathrm{t}.\ \phi^6$ &c., on aura en multipliant en croix $r + s\ \mathrm{t}.\ \phi^2$ &c. $=$

$$1 - \mathrm{t}.\ \phi^2 + \mathrm{t}.\ \phi^4 - \mathrm{t}.\ \phi^6 \text{ \&c.} \quad \text{ce qui donne } s = 0$$
$$+ \mathrm{t}.\ \phi^2 - \mathrm{t}.\ \phi^4 + \mathrm{t}.\ \phi^6 \text{ \&c.} \qquad \text{\& } r = 1,$$

on aura donc $1 - \mathrm{t}.\ \phi^2 + \mathrm{t}.\ \phi^4 - \mathrm{t}.\ \phi^6$ &c. $= \frac{1}{1 + \mathrm{t}.\ \phi^2}$ & le coëfficient de $n \cos z$ ſera $\frac{\mathrm{t}.\ \phi}{1 + \mathrm{t}.\ \phi^2} =$

$\frac{\frac{\sin \phi}{\cos \phi}}{1 + \frac{\sin \phi^2}{\cos \phi^2}} = \sin \phi \cos \phi$, ce terme fera donc $= - n \cos z \sin \phi \cos \phi$. Le coëfficient de $n \sin z$ eft $1 - t. \phi^2 + t. \phi^4 - t. \phi^6$ &c. que nous venons de voir être $= \frac{1}{1 + t. \phi^2} = \cos \phi^2$, ce terme fera donc $- n \sin z \cos \phi^2$, & les deux termes réunis feront $- n \cos z \sin \phi \cos \phi - n \sin z \cos \phi^2$, ou en mettant pour z fa valeur $\frac{k}{\cos \phi}$, $- k \cos z \sin \phi - k \sin z \cos \phi = - k \sin (z + \phi)$. Le coëfficient de $n^2 \cos z^2$ eft $t. \phi - 2 t. \phi^3 + 3 t. \phi^5 - 4 t. \phi^7$ &c. $= t. \phi (1 - 2 t. \phi^2 + 3 t. \phi^4 - 4 t. \phi^6$ &c.)

Ici il eft évident que chaque terme ne fe forme pas d'après celui qui le précede, je paffe donc à la fuppofition que chaque terme fe forme d'après les deux précédens, je ferai donc $3 = - 2 m + n$, & $- 4 = 3 m - 2 n$ (m & n étant des coëfficiens arbitraires), j'ai en multipliant la premiere équation par 2, $6 = - 4 m + 2 n$, ajoutant cette équation avec la feconde, j'aurai $2 = - m$, donc $m = - 2$ & $n = 3 + 2 m = 3 - 4 = - 1$; donc le dénominateur de la fraction qui doit être $1 - m t. \phi^2 - n t. \phi^4$ fera $1 + 2 t. \phi^2 + t. \phi^4 = (1 + t. \phi^2)^2$. Pour trouver maintenant le numérateur je ferai

$$\frac{r + s\, t. \phi^2 + t\, t. \phi^4 \text{ \&c.}}{1 + 2 t. \phi^2 + t. \phi^4} = 1 - 2 t. \phi^2 + 3 t. \phi^4$$

$= 4$ t. Φ^6 & l'on aura en multipliant

$$\begin{array}{l} 1 - 2\,\text{t.}\,\Phi^2 + 3\,\text{t.}\,\Phi^4 - 4\,\text{t.}\,\Phi^6 = 1 \\ \quad + 2\,\text{t.}\,\Phi^2 - 4\,\text{t.}\,\Phi^4 + 6\,\text{t.}\,\Phi^6 \\ \qquad\qquad + \text{t.}\,\Phi^4 - 2\,\text{t.}\,\Phi^6 \end{array}$$

donc $t = 0$, $s = 0$, $r = 1$, enforte que $1 - 2\,\text{t.}\,\Phi^2 + 3\,\text{t.}\,\Phi^4 - 4\,\text{t.}\,\Phi^6 =$

$\frac{1}{(1 + \text{t.}\,\Phi^2)^2} = \frac{1}{\text{sec}\,\Phi^4} = \text{cof}\,\Phi^4$; donc le coëfficient, de n^2 cof z^2 fera $=$ t. Φ cof $\Phi^4 =$ fin Φ cof Φ^3 & le terme lui-même fera n^2 cof z^2 fin Φ cof Φ^3, le coëfficient de n^2 fin z^2 fera par la même raifon $\frac{\text{t.}\,\Phi}{(1 + \text{t.}\,\Phi^2)^2} =$ cof Φ^3 fin Φ, & le terme lui-même fera $- n^2$ fin z^2 fin Φ cof Φ^3; & ces deux termes réunis feront n^2 fin Φ cof Φ^3 (cof z^2 — fin z^2). Le coëfficient de n^2 fin z cof z eft $1 - 3\,\text{t.}\,\Phi^2 + 5\,\text{t.}\,\Phi^4 - 7\,\text{t.}\,\Phi^6$; j'aurai donc ici en vertu de la même fuppofition $5 = - 3\,m + n$, $- 7 = 5\,m - 3\,n$, multipliant la feconde équation par 3 j'aurai $15 = - 9\,m + 3\,n$ & ajoutant cette équation avec la feconde j'ai $8 = - 4\,m$, donc $m = - 2$ & $n = 5 + 3\,m = 5 - 6 = - 1$, donc le dénominateur de la fraction fera $1 + 2\,\text{t.}\,\Phi^2 + \text{t.}\,\Phi^4 = (1 + \text{t.}\,\Phi^2)^2$. Pour trouver maintenant le numérateur, je ferai $\frac{r + s\,\text{t.}\,\Phi^2 + t\,\text{t.}\,\Phi^4}{1 + 2\,\text{t.}\,\Phi^2 + \text{t.}\,\Phi^4} =$ $1 - 3\,\text{t.}\,\Phi^2 + 5\,\text{t.}\,\Phi^4 - 7\,\text{t.}\,\Phi^6$ & j'aurai en multipliant,

$$\begin{array}{l} 1 - 3\,\text{t.}\,\Phi^2 + 5\,\text{t.}\,\Phi^4 - 7\,\text{t.}\,\Phi^6 \\ \quad + 2\,\text{t.}\,\Phi^2 - 6\,\text{t.}\,\Phi^4 + 10\,\text{t.}\,\Phi^6 \;= 1 - \text{t.}\,\Phi^2, \text{ donc} \\ \qquad\qquad + \text{t.}\,\Phi^4 - 3\,\text{t.}\,\Phi^6 \end{array}$$

$r = 1$, $s = - 1$, $t = 0$, enforte que

$1 - 3\,t.\,\phi^2 + 5\,t.\,\phi^4 - 7\,t.\,\phi^6$ &c. $= \dfrac{1 - t.\,\phi^2}{(1 + t.\,\phi^2)^2}$
$= \left(\dfrac{1 - \sin\phi^2}{\cos\phi^2}\right) \cos\phi^4 = \cos\phi^4 - \sin\phi^2 \cos\phi^2$;
donc le coëfficient de $n^2 \sin z \cos z$ sera $(\cos\phi^4 - \sin\phi^2 \cos\phi^2)$; & le terme lui-même $n^2 \sin z \cos z$ $(\cos\phi^4 - \sin\phi^2 \cos\phi^2)$. Réunissant ce terme au précédent, on aura $n^2 \sin\phi \cos\phi^3 (\cos z^2 - \sin z^2)$ $+ n^2 \sin z \cos z\,(\cos\phi^4 - \sin\phi^2 \cos\phi^2) = n^2$ $\cos 2z \sin\phi \cos\phi^3 + \dfrac{n^2}{2} \sin 2z\,(\cos\phi^4 - \sin\phi^2$ $\cos\phi^2)$, ou en mettant pour n sa valeur $k^2 \cos 2z$ $\sin\phi \cos\phi + \dfrac{k^2}{2} \sin 2z\,(\cos\phi^2 - \sin\phi^2) = \dfrac{k^2}{2}$ $\cos 2z \sin 2\phi + \dfrac{k^2}{2} \sin 2z \cos 2\phi = k^2$ $(\sin 2z \cos 2\phi + \cos 2z \sin 2\phi) = \dfrac{k^2}{2}$ $\sin 2(z + \phi)$. Le coëfficient de $-n^3 \cos z^3$ est $t.\,\phi - \frac{10}{3}\,t.\,\phi^3 + 7\,t.\,\phi^5 - 12\,t.\,\phi^7$ &c. $=$ $\frac{1}{3}\,t.\,\phi\,(3 - 10\,t.\,\phi^2 + 21\,t.\,\phi^4 - 36\,t.\,\phi^6$ &c.$)$ Je vois en essayant la chose que chaque terme ne dépend pas uniquement des deux précédens : pour voir s'il dépend des trois précédens, il faudroit avoir plus de termes de la suite ; or pour cela il n'est pas besoin de continuer tous les calculs que nous avons faits, ce qui seroit fort long, les termes suivans se trouveront aisément par le moyen des différences, comme on va le voir.

Termes.

3		10		21		36		55		78
	7		11		15		19		23	
		4		4		4		4		

Les secondes différences sont donc constantes & $= 4$, & au moyen de ces différences je continue la suite des premieres, ce qui me donne 19 & 23, ensuite au moyen des premieres je continue la suite des termes mêmes, ce qui me donne 55 & 78. La suite est donc

$3 - 10\,t.\phi^2 + 21\,t.\phi^4 - 36\,t.\phi^6 + 55\,t.\phi^8 - 78\,t.\phi^{10}$ &c., & je forme ces trois équations

$$-36 = 21m - 10n + 3p$$
$$55 = -36m + 21n - 10p$$
$$-78 = 55m - 36n + 21p$$

Je multiplie la premiere équation par 7 & j'en retranche la troisieme, ce qui me donne $-174 = 92m - 34n$ ou $-87 = 46m - 17n$. Je multiplie la premiere équation par 10 & la seconde par 3, & je les ajoute ensemble, ce qui me donne $-195 = 102m - 37n$. Je multiplie la premiere de ces deux équations par 37 & la seconde par 17, & je les retranche l'une de l'autre, ce qui me donne $-96 = 32m$ ou $m = -3$, donc $n = \frac{46m + 87}{17} = -\frac{138 + 87}{17} = -\frac{51}{17} = -3$ & $p = -\frac{36 - 21m + 10n}{3} = -$

$\frac{36 + 63 - 30}{3} = -\frac{3}{3} = -1$. Donc le dénominateur de la fraction que je cherche qui doit être $1 - m\,t.\Phi^2 - n\,t.\Phi^4 - p\,t.\Phi^6$ sera $= 1 + 3\,t.\Phi^2 + 3\,t.\Phi^4 + t.\Phi^6 = (1 + t.\Phi^2)^3$. Maintenant pour avoir le numérateur je fais

$$\frac{r + s\,t.\Phi^2 + t\,t.\Phi^4 \ \&c.}{1 + 3\,t.\Phi^2 + 3\,t.\Phi^4 + t.\Phi^6} = 3 - 10\,t.\Phi^2 + 21\,t.\Phi^4 - 36\,t.\Phi^6 + 55\,t.\Phi^8 - 78\,t.\Phi^{10}\ \&c.$$

& j'ai en multipliant

$$\begin{array}{l} 3 - 10\,t\,\Phi^2 + 21\,t.\Phi^4 - 36\,t.\Phi^6 + 55\,t.\Phi^8 - 78\,t.\Phi^{10} \\ \quad + 9\,t.\Phi^2 - 30\,t.\Phi^4 + 63\,t.\Phi^6 - 108\,t.\Phi^8 + 165\,t.\Phi^{10} \\ \qquad\qquad + 9\,t.\Phi^4 - 30\,t.\Phi^6 + 63\,t.\Phi^8 - 108\,t.\Phi^{10} \\ \qquad\qquad\qquad + 3\,t.\Phi^6 - 10\,t.\Phi^8 + 21\,t.\Phi^{10} \end{array} =$$

$3 - t.\Phi^2$ donc $r = 3$, $s = -1$, $t = 0$ & la fraction est $\frac{3 - t.\Phi^2}{(1 + t.\Phi^2)^3}$; donc le coëfficient en question est $\frac{t.\Phi - \frac{1}{3}\,t.\Phi^3}{(1 + t.\Phi^2)^3} = \left(\frac{\sin\Phi}{\cos\Phi} - \frac{1}{3}.\frac{\sin\Phi^3}{\cos\Phi^3}\right)\cos\Phi^6$ $= \cos\Phi^5\,\sin\Phi - \frac{1}{3}\sin\Phi^3\,\cos\Phi^3$, donc le terme est $-n^3\cos z^3(\sin\Phi\,\cos\Phi^5 - \frac{1}{3}\sin\Phi^3\,\cos\Phi^3)$, ou en mettant pour n sa valeur $-k^3\cos z^3(\sin\Phi\,\cos\Phi^2 - \frac{1}{3}\sin\Phi^3) = -k^3\cos z^3(\sin\Phi - \frac{4}{3}\sin\Phi^3). = -\frac{1}{3}k^3\cos z^3(3\sin\Phi - 4\sin\Phi^3) = -\frac{1}{3}k^3\cos z^3\sin 3\,\Phi$. Le coëfficient de $n^3\sin z^2\cos z$ est $3\,t.\Phi - 10\,t.\Phi^3 + 21\,t.\Phi^5\ \&c. = t.\Phi(3 - 10\,t.\Phi^2 + 21\,t.\Phi^4\ \&c.) =$ (par ce

que nous venons de prouver) $\frac{3\,\text{t.}\,\phi - \text{t.}\,\phi^3}{(1 + \text{t.}\,\phi^2)^3} = \left(\frac{3 \sin \phi}{\cos \phi} - \frac{\sin \phi^3}{\cos \phi^3}\right) \cos \phi^6 = 3 \cos \phi^5 \sin \phi - \sin \phi^3 \cos \phi^3$, donc le terme lui-même est $n^3 \sin z^2 \cos z \times (3 \cos \phi^5 \sin \phi - \sin \phi^3 \cos \phi^3)$, ou en mettant pour n sa valeur $k^3 \sin z^2 \cos z\, (3 \cos \phi^2 \sin \phi - \sin \phi^3) = k^3 \sin z^2 \cos z\, (3 \sin \phi - 4 \sin \phi^3) = k^3 \sin z^2 \cos z \sin 3\phi$. Donc ces deux termes réunis donnent
$\frac{1}{3} k^3 \sin 3\phi\, (3 \sin z^2 \cos z - \cos z^3) = -\frac{1}{3} k^3 \sin 3\phi\, (3 \cos z - 4 \cos z^3) = -\frac{1}{3} k^3 \sin 3\phi \cos 3z$. Le coëfficient de $- n^3 \sin z \cos z^2$ est $1 - 6\,\text{t.}\,\phi^2 + 15\,\text{t.}\,\phi^4 - 28\,\text{t.}\,\phi^6$. Pour en trouver la loi, il faut chercher plus de termes, ce que je fais comme ci-dessus:

TERMES.

1	6	15	28	45	66
5	9	13	17	21	
4	4	4	4		

J'ai donc la suite $1 - 6\,\text{t.}\,\phi^2 + 15\,\text{t.}\,\phi^4 - 28\,\text{t.}\,\phi^6 + 45\,\text{t.}\,\phi^8 - 66\,\text{t.}\,\phi^{10}$ &c., & je forme ces trois équations,

$$-28 = 15m - 6n + p$$
$$45 = -28m + 15n - 6p$$
$$-66 = 45m - 28n + 15p$$

Je multiplie la premiere équation par 6, & j'en retranche la seconde, ce qui me donne — 123

$= 62m - 21n$, je multiplie la seconde équation par 5, la troisieme par 2 & je les ajoute ensemble, ce qui me donne $93 = -50m + 19n$. Je multiplie la premiere de ces deux équations par 19 & la seconde par 21 & je les ajoute, ce qui me donne $-384 = 128m$, ou $m = -3$, donc $n = \frac{93 + 50m}{19} = \frac{93 - 150}{19} = -\frac{57}{19} = -3$ & $p = -28 - 15m + 6n = -28 + 45 - 18 = 45 - 46 = -1$; donc le dénominateur de notre fraction sera $1 + 3\,\mathrm{t.}\Phi^2 + 3\,\mathrm{t.}\Phi^4 + \mathrm{t.}\Phi^6 = (1 + \mathrm{t.}\Phi^2)^3$. Pour trouver le numérateur, je fais $\frac{r + s\,\mathrm{t.}\Phi^2 + \mathrm{t.}\Phi^4 \ \&c.}{1 + 3\,\mathrm{t.}\Phi^2 + 3\,\mathrm{t.}\Phi^4 + \mathrm{t.}\Phi^6}$ $= 1 - 6\,\mathrm{t.}\Phi^2 + 15\,\mathrm{t.}\Phi^4 - 28\,\mathrm{t.}\Phi^6 + 45\,\mathrm{t.}\Phi^8 - 66\,\mathrm{t.}\Phi^{10}$ &c.

& j'ai en multipliant

$$
\begin{array}{llllll}
[1 & -6\,\mathrm{t.}\Phi^2 & +15\,\mathrm{t.}\Phi^4 & -28\,\mathrm{t.}\Phi^6 & +45\,\mathrm{t.}\Phi^8 & -66\,\mathrm{t.}\Phi^{10} \\
 & +3\,\mathrm{t.}\Phi^2 & -18\,\mathrm{t.}\Phi^4 & +45\,\mathrm{t.}\Phi^6 & -84\,\mathrm{t.}\Phi^8 & +135\,\mathrm{t.}\Phi^{10} \\
 & & +3\,\mathrm{t.}\Phi^4 & -18\,\mathrm{t.}\Phi^6 & +45\,\mathrm{t.}\Phi^8 & -84\,\mathrm{t.}\Phi^{10} \\
 & & & +\mathrm{t.}\Phi^6 & -6\,\mathrm{t.}\Phi^8 & +15\,\mathrm{t.}\Phi^{10}
\end{array}
$$

$= 1 - 3\,\mathrm{t.}\Phi^2$, donc $r = 1$, $s = -3$, $t = 0$, & la fraction est $\frac{1 - 3\,\mathrm{t.}\Phi^2}{(1 + \mathrm{t.}\Phi^2)^3} = \left(1 - \frac{3 \sin \Phi^2}{\cos \Phi^2}\right)$ $\cos \Phi^6 = \cos \Phi^6 - 3 \sin \Phi^2 \cos \Phi^4$, donc le terme est $-n^3 \sin z \cos z^2 (\cos \Phi^6 - 3 \sin \Phi^2 \cos \Phi^4)$ ou en mettant pour n sa valeur, $-k^3 \sin z \cos z^2 (\cos \Phi^3 - 3 \sin \Phi^2 \cos \Phi) = -k^3 \sin z \cos z^2 (4 \cos \Phi^3 - 3 \cos \Phi) = -k^3 \sin z \cos z^2 \cos 3\Phi$. Le coëfficient de $n^3 \sin z^3$ est $\frac{1}{4} - 2\,\mathrm{t.}\Phi^2 + 5\,\mathrm{t.}\Phi^4$ &c.

$= \frac{1}{3}(1 - 6\,t.\,\phi^2 + 15\,t.\,\phi^4\ \&c.) = ($ parce que nous venons de voir) $\frac{\frac{1}{3}(1 - 3\,t.\,\phi^2)}{(1 + t.\,\phi^2)^3} =$ $\frac{\frac{1}{3} - t.\,\phi^2}{(1 + t.\,\phi^2)^3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sin\phi^2}{\cos\phi^2}\right)\cos\phi^6 = \frac{1}{3}(\cos\phi^6$ $- 3\sin\phi^2\cos\phi^4)$ donc le terme est $\frac{1}{3}n^3\sin z^3$ $(\cos\phi^6 - 3\sin\phi^2\cos\phi^4)$ ou en mettant pour n sa valeur $\frac{1}{3}k^3\sin z^3(\cos\phi^3 - 3\sin\phi^2$ $\cos\phi) = \frac{1}{3}k^3\sin z^3(4\cos\phi^3 - 3\cos\phi)$ $= \frac{1}{3}k^3\sin z^3\cos 3\phi$, donc ces deux termes réunis feront $\frac{1}{3}k^3\cos 3\phi(\sin z^3 - 3\sin z\cos z^2) = \frac{1}{3}$ $k^3\cos 3\phi(4\sin z^3 - 3\sin z) = -\frac{1}{3}k^3\cos 3\phi$ $\sin 3z$. Réunissant maintenant ce terme à celui que nous avons obtenu plus haut, nous aurons $-\frac{1}{3}k^3$ $(\sin 3z\cos 3\phi + \cos 3z\sin 3\phi) = -\frac{1}{3}k^3$ $\sin 3(z + \phi)$ Substituant maintenant toutes ces valeurs, nous aurons $x - y = \phi - k\sin(z + \phi)$ $+ \frac{1}{2}k^2\sin 2(z + \phi) - \frac{1}{3}k^3\sin 3(z + \phi)$; donc en remettant pour z sa valeur $2y - \beta$, nous aurons enfin $x = y + \phi - k\sin(2y + \phi - \beta)$ $+ \frac{1}{2}k^2\sin 2(2y + \phi - \beta) - \frac{1}{3}k^3\sin 3(2y$ $+ \phi - \beta)$ &c.

Ce qui est la formule que trouve M. de la Grange. La loi de la progression est maintenant évidente.

Je remarquerai au sujet de la méthode que je viens d'indiquer pour trouver la loi des suites récurrentes que si l'on suppose cette loi composée de moins de termes qu'elle ne l'est réellement, on trouvera que les coëfficiens ne satisfont pas à d'autres termes qu'à ceux qu'on a fait entrer dans les équations; & que si on la suppose composée de plus de termes qu'il ne faut, on trouvera les coëfficiens superflus égaux à zéro, en forte que cette remarque évite plusieurs tâtonnemens, puisqu'il n'est pas besoin de commencer par la loi la plus simple & de procéder par ordre. Supposons par exemple, que dans la suite $1 - 2\,t.\,\varphi^2 + 3\,t.\,\varphi^4 - 4\,t.\,\varphi^6 + 5\,t.\,\varphi^8 - 6\,t.\,\varphi^{10}$ &c.; l'on eût voulu faire dépendre chaque terme des trois précédens, on auroit formé les trois équations $-4 = 3m - 2n + p$

$$5 = -4m + 3n - 2p$$
$$-6 = 5m - 4n + 3p$$

je multiplie la premiere équation par 2, & je l'ajoute à la seconde ce qui me donne $-3 = 2m - n$, je multiplie cette même équation par 3 & j'en retranche la troisieme, ce qui me donne $-4 = 3m - 2n$. Je multiplie la premiere de ces deux équations par 2 & j'en retranche la seconde, ce qui me donne $m = -2$, donc $n = 2m + 3 = -4 + 3 = 1$, & $p = -4 - 3m + 2n = -4 + 6 - 2 = 0$, ce qui fait voir que chaque terme ne dépend que des deux précédens, & nous donne la même échelle de relation que nous avons obtenue ci-dessus. Si les suites ne sont pas récurrentes, cette méthode ne donne pas la somme exacte de la suite, mais elle la donne par approximation, & d'autant plus exactement qu'on compose l'échelle de relation d'un plus grand nombre de termes, ainsi qu'il feroit aisé de le faire voir si c'en étoit ici le lieu. Une autre formule que traite M. de la Grange dans l'endroit cité est celle-ci; tang $x = \frac{a \sin y}{\cos y + p}$, donc $\text{tang}\,(x - y) = \dfrac{\text{t.}\,x - \text{t.}\,y}{1 + \text{t.}\,x\,\text{t.}\,y} =$

$$\frac{\dfrac{a \sin y}{p + \cos y} - \dfrac{\sin y}{\cos y}}{1 + \dfrac{a \sin y^2}{p \cos y + \cos y^2}} = \frac{a \sin y \cos y - \sin y \cos y - p \sin y}{\cos y^2 + p \cos y + a \sin y^2}$$

$$= \frac{\dfrac{a - 1}{2} \sin 2\,y - p \sin y}{1 + p \cos y + (a - 1) \sin y^2}$$

$$= \frac{\dfrac{a - 1}{2} \sin 2\,y - p \sin y}{\dfrac{a + 1}{2} - \dfrac{(a - 1)}{2} \cos 2\,y + p \cos y}$$

$$= \frac{(a - 1) \sin 2\,y - 2\,p \sin y}{a + 1 - (a - 1) \cos 2\,y + 2\,p \cos y}$$

$$= \frac{\dfrac{a - 1}{1 + a} \sin 2\,y - \dfrac{2\,p}{1 + a} \sin y}{1 + \dfrac{1 - a}{1 + a} \cos 2\,y + \dfrac{2\,p}{1 + a} \cos y}$$

$$= -\left(\frac{\dfrac{2\,p}{1 + a} \sin y + \dfrac{1 - a}{1 + a} \sin 2\,y}{1 + \dfrac{2\,p}{1 + a} \cos y + \dfrac{1 - a}{1 + a} \cos 2\,y}\right)$$

$= -\left(\dfrac{m \sin y + n \sin 2\,y}{1 + m \cos y + n \cos 2\,y}\right)$ (en faisant $m = \dfrac{2\,p}{1 + a}$ & $n = \dfrac{1 - a}{1 + a}$) $= -\left(\dfrac{m \sin y + n \sin 2\,y}{1 + A}\right)$ (en faisant $m \cos y + n \cos 2\,y = A$.) Or $x -$

$y = \mathrm{t.}\,(x - y) - \frac{1}{3}\,\mathrm{t.}\,(x - y)^3 + \frac{1}{5}\,\mathrm{t.}\,(x - y)^5$ &c. & $\frac{1}{1 + A} = 1 - A + A^2 - A^3 + A^4$ &c.; $(1 + A)^{-3} = 1 - 3\,A + 6\,A^2 - 10\,A^3$ &c. $(1 + A)^{-5} = 1 - 5\,A$ &c. donc

$$\begin{aligned} x - y = {} & -\,(m \sin y + n \sin 2\,y) \\ & \quad (1 - A + A^2 - A^3 + A^4\ \&c.) \\ & + \tfrac{1}{3}\,(m \sin y + n \sin 2\,y)^3 \\ & \quad (1 - 3\,A + 6\,A^2 - 10\,A^3\ \&c.) \\ & - \tfrac{1}{5}\,(m \sin y + n \sin 2\,y)^5 \\ & \quad (1 - 5\,A\ \&c.) \end{aligned}$$

On a donc, en faisant les multiplications indiquées, & mettant pour A sa valeur, $x - y = - m \sin y + \frac{1}{2}\,(m^2 - 2\,n) \sin 2\,y + m\,n \sin 3\,y + m^3\,(\frac{1}{4} \sin y + \frac{1}{4} \sin 3\,y - \frac{1}{4} \sin y + \frac{1}{12} \sin 3\,y) + m^2\,n\,(\frac{1}{2} \sin 4\,y + \frac{1}{2} \sin 2\,y + \frac{1}{4} \sin 4\,y - \frac{1}{2} \sin 2\,y + \frac{1}{4} \sin 4\,y) - \frac{1}{2}\,n^2 \sin 4\,y - m^4\,(\frac{1}{4} \sin 2\,y + \frac{1}{8} \sin 4\,y - \frac{1}{4} \sin 2\,y + \frac{1}{8} \sin 4\,y)$.

(J'ai réduit les multiples des sinus & cosinus en sinus & cosinus de multiples d'arcs, & j'ai négligé les puissances qui menoient au-dessus de sin $4\,y$) ou $x - y = - m \sin y + \frac{1}{2}\,(m^2 - 2\,n) \sin 2\,y + m\,n \sin 3\,y - \frac{m^3}{3} \sin 3\,y - m^2\,n \sin 4\,y + \frac{1}{2}\,n^2 \sin 4\,y - \frac{1}{4}\,m^4 \sin 4\,y = - m \sin y + \frac{1}{2}\,(m^2 - 2\,n) \sin 2\,y - \frac{1}{3}\,(m^3 - 3\,m\,n) \sin 3\,y + \frac{1}{4}\,(m^4 - 4\,m^2\,n + 2\,n^2) \sin 4\,y$ &c. La loi de ces coëfficiens est bien aisée à déterminer, car soit la suite $A \sin y - \frac{1}{2}\,B \sin 2\,y + \frac{1}{3}\,C \sin 3\,y - \frac{1}{4}\,D \sin 4\,y$ &c. on a $A = m$, $B = m^2 - 2\,n = A\,m - 2\,n = C = m^3 -$

3 m

$3\,mn = m^3 - 2\,mn - mn = Bm - An$;
$D = m^4 - 4\,m^2 n + 2\,n^2 = m^4 - 3\,m^2 n - (m^2 n - 2\,n^2) = Cm - Bn$; en sorte que la suite des coëfficiens forme une suite récurrente dont chaque terme dépend des deux précédens. Or, on sait par les formules de Newton que si $m = P + Q$ & $n = pq$, on aura $m^2 - 2n = P^2 + Q^2$, $m^3 - 3\,mn = P^3 + Q^3$, $m^4 - 4\,m^2 n + 2\,n^2 = P^4 + Q^4$ &c. P & Q étant les racines d'une équation de cette forme $1 + mz + nz^2 = 1 + \frac{2\,p}{1+a}z + \frac{1-a}{1+a}z^2$; donc $x - y = -m\,\text{sin}\,y + \frac{1}{2}(m^2 - 2\,n)\,\text{sin}\,2\,y - \frac{1}{3}(m^3 - 3\,mn)\,\text{sin}\,3\,y + \frac{1}{4}(m^4 - 4\,m^2 n + 2\,n^2)\,\text{sin}\,4\,y$ &c. & en mettant pour les coëfficiens leurs valeurs trouvées, on aura $x = y - (P + Q)\,\text{sin}\,y + \frac{1}{2}(P^2 + Q^2)\,\text{sin}\,2\,y - \frac{1}{3}(P^3 + Q^3)\,\text{sin}\,3\,y + \frac{1}{4}(P^4 + Q^4)\,\text{sin}\,4\,y$ &c.

C'est la formule que trouve M. de la Grange.

M. de la Grange prend ensuite la formule $t.\,x = \frac{a\,\text{sin}\,2\,y + b\,\text{sin}\,y}{\text{cos}\,2\,y + p\,\text{cos}\,y + q}$.

Pour la réduire en suite réguliere, il paroît d'abord indifférent de prendre $t.\,(x - y)$ ou $t.\,(x - 2\,y)$, mais un essai fait voir que la derniere supposition donne une forme plus réguliere. Je prends donc

$$t.\,(x - 2\,y) = \frac{t.\,x - t.\,2\,y}{1 + t.\,x\;t.\,2\,y} =$$

$$\frac{\left(\dfrac{a\sin 2y + b\sin y}{\cos 2y + p\cos y + q} - \dfrac{\sin 2y}{\cos 2y}\right)}{1 + \dfrac{a\sin 2y^2 + b\sin 2y\sin y}{\cos 2y^2 + p\cos 2y\cos y + q\cos 2y}}$$

$$= \frac{a\sin 2y\cos 2y + b\sin y\cos 2y - \sin 2y\cos 2y - p\sin 2y\cos y - q\sin 2y}{\cos 2y^2 + p\cos 2y\cos y + q\cos 2y + a\sin 2y^2 + b\sin 2y\sin y}$$

$$= \frac{\frac{a-1}{2}\sin 4y + b\sin y\cos 2y - p\sin 2y\cos y - q\sin 2y}{1 + (a-1)\sin 2y^2 + p\cos 2y\cos y + b\sin 2y\sin y + q\cos 2y}$$

$$= \frac{\frac{a-1}{2}\sin 4y + \frac{b}{2}\sin 3y - \frac{b}{2}\sin y - \frac{p}{2}\sin 3y - \frac{p}{2}\sin y - q\sin 2y}{\frac{1+a}{2} - \frac{(a-1)}{2}\cos 4y + \frac{p}{2}\cos 3y + \frac{p}{2}\cos 1y + \frac{b}{2}\cos y - \frac{b}{2}\cos 3y + q\cos 2y} =$$

$$\frac{-\frac{(b+p)}{1+a}\sin y - \frac{2q}{1+a}\sin 2y - \frac{(p-b)}{1+a}\sin 3y - \frac{(1-a)}{1+a}\sin 4y}{1 + \frac{b+p}{1+a}\cos y + \frac{2q}{1+a}\cos 2y + \frac{p-b}{1+a}\cos 3y + \frac{1-a}{1+a}\cos 4y} =$$

$$-\left(\frac{m\sin y + n\sin 2y + r\sin 3y + s\sin 4y}{1 + m\cos y + n\cos 2y + r\cos 3y + s\cos 4y}\right)$$

en faisant $m = \frac{b+p}{1+a}$, $n = \frac{2q}{1+a}$, $r = \frac{p-b}{1+a}$. $s = \frac{1-a}{1+a}$ pour abréger. Pour employer les dénominations prises dans l'exemple précédent, je ferai $A = m\cos y + n\cos 2y + r\cos 3y + s\cos 4y$ & au moyen des suites exposées ci-dessus, j'aurai $x - 2y = -(m\sin y + n\sin 2y + r\sin 3y + s\sin 4y)(1 - A + A^2 - A^3 + A^4)$ &c.) $+ \frac{1}{3}(m\sin y + n\sin 2y + r\sin 3y + s\sin 4y)^3$. $(1 - 3A + 6A^2 - 10A^3$ &c.$) - \frac{1}{5}(m\sin y + n\sin 2y + r\sin 3y + s\sin 4y)^5 (1 - 5A$ &c.)

Or on a en faisant les multiplications indiquées,

& mettant pour A sa valeur, faisant les mêmes réductions & négligeant les mêmes choses que ci-dessus,
$x - 2y = - m \sin y + \frac{1}{2}(m^2 - 2n) \sin 2y$
$+ mn \sin 3y - r \sin 3y$
$- m^3 (\frac{1}{4} \sin y + \frac{1}{4} \sin 3y - \frac{1}{4} \sin y + \frac{1}{12} \sin 3y)$
$- m^2 n (\frac{1}{2} \sin 4y + \frac{1}{2} \sin 2y + \frac{1}{4} \sin 4y - \frac{1}{2}$
$\sin 2y + \frac{1}{4} \sin 4y) + \frac{n^2}{2} \sin 4y + mr \sin 4y$
$- s \sin 4y + m^4 (\frac{1}{4} \sin 2y + \frac{1}{8} \sin 4y - \frac{1}{4} \sin 2y$
$+ \frac{1}{8} \sin 4y) = - m \sin y + \frac{1}{2}(m^2 - 2n) \sin 2y$
$- \frac{1}{3}(m^3 - 3mn + 3r) \sin 3y$
$+ \frac{1}{4}(m^4 - 4m^2 n + 2n^2 + 4mr - 4s)$
$\sin 4y$ &c.

La loi des coëfficiens se détermine comme dans le cas précédent, car soit la suite $A \sin y - \frac{1}{2} B \sin 2y + \frac{1}{3} C \sin 3y - \frac{1}{4} D \sin 4y$ &c.
On a $A = m$, $B = m^2 - 2n = Am - 2n$, $C = m^3 - 3mn + 3r = m^3 - 2mn - mn + 3r = Bm - An + 3r$, $D = m^4 - 4m^2 n + 2n^2 + 4mr - 4s = m^4 - 3m^2 n + 3mr - (m^2 n - 2n^2) + mr - 4s = Cm - Bn + Ar - 4s$, & l'on auroit trouvé en poursuivant le calcul qui n'a aucune difficulté $E = Dm - Cn + Bn - AS$, & ainsi de suite, en sorte que la suite des coëfficiens est une suite récurrente dont chaque terme dépend des quatre précédens. Or on sait par les mêmes formules de Newton que j'ai citées plus haut, que si $m = P + Q + R + S$, $n = PQ + PR + PS + QR + QS + RS$, $r = PQR + PQS + PRS + QRS$, $s = PQRS$, on aura

$m = P + Q + R + S$, $m^2 - 2n = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, $m^3 - 3mn + 3r = P^3 + Q^3 + R^3 + S^3$, $m^4 - 4m^2n + 2n^2 + 4mr - 4s = P^4 + Q^4 + R^4 + S^4$ &c, P, Q, R, S étant les racines d'une équation de cette forme $1 + mz + nz^2 + rz^3 + sz^4$, donc en mettant pour les coëfficiens leurs valeurs trouvées, on aura

$$x = 2y - (P + Q + R + S) \sin y + \tfrac{1}{2} (P^2 + Q^2 + R^2 + S^2) \sin 2y - \tfrac{1}{3} (P^3 + Q^3 + R^3 + S^3) \sin 3y + \tfrac{1}{4} (P^4 + Q^4 + R^4 + S^4) \sin 4y \text{ \&c.}$$

Ce qui est la formule que donne M de la Grange. Il est aisé de sentir que si la fraction étoit plus composée & qu'on eût tang $x =$ $\dfrac{\sin y + p \sin 2y + q \sin 3y \text{ \&c.}}{\cos y + p \cos 2y + q \cos 3y \text{ \&c.}}$ on arriveroit par un procédé analogue à des conclusions analogues, & qu'on auroit des résultats semblables à ceux que donne M. de la Grange dans le Mémoire cité.

La méthode dont je me suis servi pour traiter les formules de M. de la Grange, est toute simple & se présente d'elle-même à l'esprit, mais le détail des calculs m'a paru exiger assez d'artifices analytiques pour mériter d'être exposé : M. Lambert avoit commencé à se servir de cette méthode dans les Ephémérides de Berlin pour 1780 ; mais il s'en est tenu à un cas tout-à-fait particulier, & je ne sache pas qu'il ait repris ailleurs ce travail.

PROBLEME VI.

Expofer les fondemens du calcul aftronomique des lieux des Planetes.

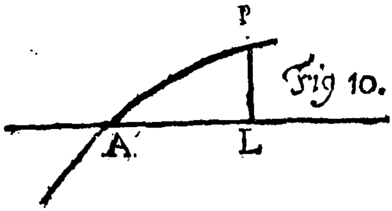


Fig 10.

Soit A P l'orbite d'une planete, A L l'écliptique. Soit la planete en P, & P L une portion du cercle de latitude qui paffe par P, A P eft ce qu'on appelle l'argument de latitude, P L eft la latitude de la Planete, P A L l'inclinaifon de fon orbite, A L la diftance de la planete au nœud A réduite à l'écliptique, qu'on appelle tout fimplement la diftance au nœud. Etant donné le lieu de la planete, on a l'argument de latitude A P en en retranchant la longitude du nœud A, & connoiffant l'inclinaifon P A L de la planete, on connoîtra dans le triangle P A L rectangle en L l'hypothénuze A P & un angle A; on aura donc par le quatrieme Cas des tr. rect. fin P L = fin latitude = fin A P fin P A L, ce qui donne cette proportion 1 : fin A P = fin P A L : fin P L; c'eft-à-dire, le rayon eft au finus de l'argument de latitude comme le finus de l'inclinaifon de l'orbite eft au finus de la latitude. C'eft la proportion que donne M de la Lande, Aftr. §. 805.

On appelle réduction à l'écliptique la différence entre l'arc A P & l'arc A L; pour la trouver je cher-

cherai le côté A L, & j'aurai par le cas cité tang A L $=$ tang A P cof P A L, ce qui donne cette proportion 1 : cof P A L $=$ tang A P : tang A L, c'eft-à-dire, le rayon eft au cofinus de l'angle d'inclinaifon comme la tangente de l'argument de latitude eft à la tangente de l'arc A L, proportion rapportée par M. de la Lande §. 806. Pour en déduire la réduction à l'écliptique ou A P $=$ A L nous remarquerons que tang (A P $-$ A L)
$= \frac{\text{tang AP} - \text{tang AL}}{1 + \text{tang AP tang AL}} =$ (en mettant pour tang A L fa valeur) $\frac{\text{tang AP}\,(1 - \text{cof PAL})}{1 + \text{tang AP}^2\ \text{cof PAL}} =$
$\frac{\text{tang AP fin verf. PAL}}{1 + \text{tang AP}^2\ \text{cof PAL}}$. Soit fin verf. P A L $= s$, & tang A P $= z$, A P $=$ A, on aura cof P A L $=$ $1 - s$ & tang (A P $-$ A L) $=$
$\frac{z\,s}{1 + zz - z^2 s} =$ (en exécutant la divifion)
$$\frac{z\,s}{1 + zz} + \frac{z^3\,s^2}{(1+zz)^2} + \frac{z^5\,s^3}{(1+zz)^3} + \frac{z^7\,s^4}{(1+zz)^4} + \&c.$$
Or $\frac{z}{1+zz} = \frac{\text{tang A}}{\text{fec A}^2} = \text{fin A cof A} = \frac{1}{2}\ \text{fin 2 A}$,
de même $\frac{z^3}{(1+zz)^2} = \frac{\text{tang A}^3}{\text{fec A}^4} = \text{fin A}^3\ \text{cof A} =$ $\frac{3}{4}$ fin A cof A $-$ $\frac{1}{4}$ fin 3 A cof A $=$ $\frac{3}{8}$ fin 2 A $-$ $\frac{1}{8}$ fin 4 A $-$ $\frac{1}{8}$ fin 2 A $=$ $\frac{1}{4}$ fin 2 A $-$ $\frac{1}{8}$ fin 4 A. (Il feroit aifé de pouffer plus loin l'approximation), donc tang (A P $-$ A L) $=$ $\frac{1}{2}$ s fin 2 A $+$ $\frac{1}{4}$ s^2 fin 2 A $-$ $\frac{1}{8}$ s^2 fin 4 A $=$ A P $-$ A L dans le cas où cette

réduction eſt fort petite. C'eſt la formule que donne M. de la Lande § 2933, & qui réſulte tout ſimplement de la diviſion, au lieu que M. de la Lande a eu recours à une méthode indirecte. Si l'on néglige les s^2, on aura $AP - AL = \frac{1}{2}\,s$ ſin $2A$, & ſi l'on fait ſin $2A = 1$ ou $A = 45°$, on aura $AP - AL = \frac{1}{2}\,s$. Donc la réduction à 45 degrés du nœud eſt égale à la moitié du ſinus verſe de l'inclinaiſon, & ailleurs il n'y a qu'à multiplier cette réduction à 45° par le ſinus du double de l'argument de latitude, c'eſt ce que dit M. de la Lande § 808.

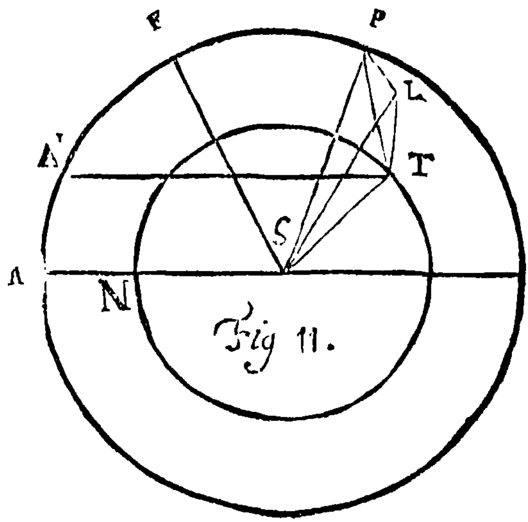


Fig 11.

Soit S le ſoleil, P une planete ſupérieure, T la terre, abaiſſons une perpendiculaire, PL ſur le plan de l'écliptique & menons les lignes SP, PT, SL, LT. Soit SF parallele à TL, ſoient TA', SA paralleles & dirigées au point de l'équinoxe du printems A ou A' duquel on commence à compter les longitudes, A S L sera la longitude héliocentrique de la planete comptée sur l'écliptique (nous venons de voir comment se faisoit cette réduction à l'écliptique) A S T sera la longitude de la terre, & T S L sera la différence des longitudes de la planete & de la terre, c'est ce que les Astronomes appellent Commutation. On connoîtra donc la Commutation dès qu'on connoît la longitude des deux planetes. Si l'on connoît de plus la distance du soleil à la terre S T, & la distance du soleil à la planete S P, on réduira cette derniere distance à l'écliptique, c'est-à-dire, qu'on cherchera S L: On aura dans le triangle rectangle S L P, $SP : SL = 1 : \text{cof}\ LSP$ (L S P est ce qu'on appelle la latitude héliocentrique qu'on suppose aussi donnée par les tables) on aura donc $SL = SP\ \text{cof}\ LSP$; maintenant dans le triangle S L T, on connoît deux côtés S T, S L & l'angle compris T S L, on aura donc l'angle S T L, car on a par le troisieme Cas des analogies de Neper, $\text{tang}\frac{(STL - SLT)}{2} = \frac{\text{cot}\frac{LST}{2}\ \text{fin}\left(\frac{SL - ST}{2}\right)}{\text{fin}\left(\frac{SL + ST}{2}\right)}$. Mais comme il s'agit ici d'un triangle rectiligne & non d'un triangle sphérique, il faut mettre au lieu des finus des côtés les côtés mêmes, (& avec cette précaution on peut déduire toutes les propriétés des triangles rectilignes de la trigonométrie sphérique) l'on aura donc tang

$$\left(\frac{STL - SLT}{2}\right) = \frac{\cot \frac{LST}{2} \left(\frac{SL - ST}{2}\right)}{\frac{SL + ST}{2}}$$

J'aurai donc cette proportion $SL + ST : SL - ST = \cot \frac{SLT}{2} : \text{tang}\left(\frac{STL - SLT}{2}\right)$; or $LST = 180^\circ - (STL + SLT)$; donc $\frac{LST}{2} = 90^\circ - \left(\frac{STL + SLT}{2}\right)$, donc $\cot \frac{LST}{2} = \text{tang}\left(\frac{STL + SLT}{2}\right)$. Donc la proportion devient $SL + ST : SL - ST = \text{tang}\left(\frac{STL + SLT}{2}\right) : \text{tang}\left(\frac{STL - SLT}{2}\right)$. Donc $\text{tang}\left(\frac{STL - SLT}{2}\right) = \text{tang}\left(\frac{STL + SLT}{2}\right) \times \frac{SL - ST}{SL + ST}$. Mais pour rendre cette formule plus propre aux usages astronomiques, je considere que $\frac{SL - ST}{SL + ST} = \frac{\frac{SL}{ST} - 1}{\frac{SL}{ST} + 1}$. Or comme $\text{tang}(A - B) = \frac{\text{tang } A - \text{tang } B}{1 + \text{tang } A \text{ tang } B}$, j'aurai $\frac{SL - ST}{SL + ST} =$

$$\frac{\text{tang}\,\frac{SL}{ST} - \text{t. }45^\circ}{1 + \text{t. }\frac{SL}{ST}\text{ t. }45^\circ} = \text{tang}\left(\frac{SL}{ST} - 45^\circ\right)$$

$= \text{t. }(x - 45^\circ)$ (en faifant $\frac{SL}{ST} = T\,x$ ou $ST : SL = 1 : \text{t. }x$ & confidérant que tang $45^\circ = 1$.)

Donc tang $\left(\frac{STL - SLT}{2}\right) =$ tang $\left(\frac{STL + SLT}{2}\right)$ tang $(x - 45^\circ)$. Pour avoir donc la tangente de la différence des deux angles, on fera cette proportion; le plus petit côté eft au plus grand comme le rayon eft à la tangente d'un angle dont on retranchera 45°, & l'on multipliera la tangente du refte par la tangente de la moitié de la fomme des deux angles, ou par la cotangente de la moitié de la commutation. C'eft la démonftration du § 816 de M. de la Lande qu'il n'a pas démontré au moins dans cette édition. Du refte, il y a plufieurs fautes d'impreffion dans ce §. Nous connoîtrons ainfi l'angle S T L qui eft le plus grand des deux angles, & qu'on appelle l'élongation, prenant alors le fupplément à 180° on aura F S T qu'on retranchera de A S T longitude de la terre, & l'on aura A S F = A T L = à la longitude géocentrique de la planete. Voilà le fondement de tout le calcul aftronomique de la longitude géocentrique d'une planete. Les fignes varient fuivant le lieu que la planete occupe dans le ciel relativement au ſoleil & à la terre. J'ai pris ici pour exemple une planete ſupérieure, le procédé eſt le même aux ſignes près pour une planete inférieure. La latitude géocentrique ſe trouve tout de ſuite, car dans le triangle PSL on a $SL : PL = 1 : \text{tang}\ PSL$, & dans le triangle PTL, $TL : PL = 1 : \text{tang}\ PTL$, donc $PL = SL\ \text{tang}\ PSL = TL\ \text{tang}\ PTL$. Donc $TL : SL = \text{tang}\ PSL : \text{tang}\ PTL$. Mais $TL : SL = \text{ſin}\ TSL : \text{ſin}\ LTS$, donc $\text{ſin}\ TSL : \text{ſin}\ LTS = \text{tang}\ PSL : \text{tang}\ PTL$ ou, le ſinus de la commutation eſt au ſinus de l'élongation comme la tangente de la latitude héliocentrique eſt à la tangente de la latitude géocentrique. C'eſt la proportion & la démonſtration de M. de la Lande § 817, & c'eſt le fondement du calcul aſtronomique de la latitude géocentriqne.

On cherchera enſuite la diſtance accourcie TL de la planete à la terre au moyen de la proportion rapportée ci-deſſus, car elle donne $TL = \frac{SL\ \text{ſin}\ STL}{\text{ſin}\ LTS}$ ou le ſinus de l'élongation eſt au ſinus de la commutation, comme la diſtance accourcie de la Planete au ſoleil, eſt à la diſtance accourcie de la planete à la terre, & alors on aura bientôt la diſtance réelle TP, parce que le triangle rectangle TLP donne $TP : TL = 1 : \text{coſ}\ PTL$ ou $TP = \frac{TL}{\text{coſ}\ PTL}$, il n'y aura donc qu'à diviſer la diſtance accourcie par le coſinus de la latitude géocentrique pour avoir la diſtance vraie ; c'eſt ce que dit M. de la Lande §. 819.

L'angle S T L qui eſt la différence entre la longitude héliocentrique & la longitude géocentrique (parce que S L T $=$ F S L $=$ A S L $-$ A S F) s'appelle la parallaxe annuelle ou la parallaxe du grand orbe. Soit un cercle quelconque & un point hors de ce cercle, la parallaxe eſt la différence de la poſition où l'on voit ce point depuis le centre du cercle, ou depuis ſa circonférence. Si ce cercle eſt l'orbite de la terre, la parallaxe eſt la parallaxe du grand orbe, c'eſt celle dont il s'agit ici, ſi c'eſt le globe terreſtre, la parallaxe eſt la parallaxe ordinaire dont le calcul eſt ſurtout néceſſaire pour les éclipſes, & dont nous traiterons dans le Chapitre ſuivant.

PROBLEME VII.

Donner une ſolution du Problême de Kepler ſuffiſante pour les uſages aſtronomiques dans le calcul des Planetes.

On démontre dans tous les livres d'Aſtronomie, (Voyez la Lande Aſtr. §. 912 & ſuiv.) que p étant l'anomalie moyenne, q l'anomalie excentrique & ϕ l'anomalie vraie, on aura $p = q + k \sin q$, (k étant l'excentricité) & $\tang \frac{1}{2} \phi : \tang \frac{1}{2} q = \sqrt{1 - k} : \sqrt{1 + k}$. On voit donc que ſi l'on connoit l'anomalie vraie on connoîtra l'anomalie excentrique, & que connoissant l'anomalie excentrique on aura l'anomalie moyenne. Il est donc fort aisé de déduire l'anomalie moyenne de l'anomalie vraie. Il n'en est pas de même du Problême où l'on demande de connoître l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne. Il est aisé à la vérité de déduire l'anomalie vraie de l'anomalie excentrique, mais la difficulté consiste à déduire l'anomalie excentrique de l'anomalie moyenne, c'est-à-dire, de tirer la valeur de q de l'équation $p = q + k \sin q$, & l'on ne connoît point de méthode rigoureuse pour le faire. C'est ce que les géometres appellent Problême de Kepler. M. de la Lande expose § 920 la méthode d'approximation qu'avoit donnée M. Cassini. Je vais l'exposer ici considérée analytiquement, ce qui sera plus clair & plus simple.

Soit $p - q$ un assez petit arc, on pourra supposer $p - q = \sin (p - q) = \sin p \cos q - \sin q \cos p$, donc $p = q + \sin p \cos q - \sin q \cos p = q + k \sin q$, donc $k \sin q = \sin p \cos q - \sin q \cos p$, ou $\sin q\ (k + \cos p) = \cos q \sin p$, ou $\tan q = \frac{\sin p}{k + \cos p}$. Cette supposition donne donc la valeur de l'anomalie excentrique par l'anomalie moyenne. Mais comme cette valeur n'est pas exacte, voici une méthode pour approcher de la vraie valeur qui me paroît réussir assez bien. Après avoir ainsi trouvé q à-peu-près, on aura $p - q$, & l'on cherchera par les tables des ſinus la différence entre $p - q$ & ſin $(p - q)$ laquelle ſoit ϕ, on aura donc $p - q = \text{ſin}\,(p - q) + \phi$. Je fais $\phi = \beta$ ſin q & j'aurai $p - q = \text{ſin}\,(p - q) + \beta\, \text{ſin}\, q$ $= \text{ſin}\, p\, \text{coſ}\, q - \text{coſ}\, p\, \text{ſin}\, q + \beta\, \text{ſin}\, q$, donc $k\, \text{ſin}\, q$ $= \text{ſin}\, p\, \text{coſ}\, q - \text{coſ}\, p\, \text{ſin}\, q + \beta\, \text{ſin}\, q$ d'où je tire $\text{tang}\, q = \dfrac{\text{ſin}\, p}{k + \text{coſ}\, p - \beta}$. Or je connois $\beta =$ $\dfrac{\phi}{\text{ſin}\, q}$, donc je connoîtrai une ſeconde valeur de q plus approchée que la premiere. Si cette valeur ne ſuffit pas, j'en chercherai une troiſieme en obtenant au moyen de la ſeconde valeur de q, une nouvelle valeur de ϕ & de β qui ſe trouve ſuffiſante dans les calculs des planetes. Pour juger de la bonté de cette méthode, je prendrai pour exemple l'orbite de Mercure qui eſt comme on ſait la plus excentrique de celles des Planetes. Je prendrai le même exemple que donne M. Hennert. (Diſſertat. Mathém. p. 87) Il prend l'anomalie moyenne de trois ſignes. On a $l\, k = 9,3130913$ ou $k = 0,20563$ en parties du rayon. On aura donc l tang $q = l$ ſin p — $l\,(k + \text{coſ}\, p) = l\,1 - l\,k = - l\,k = 10,$ 6869087, donc $q = 78^\circ\, 22'\, 48'', 4$. Maintenant $p - q = 11^\circ\, 37'\, 11'', 6 = 41831'', 6$; or ſin $(p - q) = 41545,4$ donc $\phi = 286,2$

$l\,\phi = 2,4566696$

$l\, \text{ſin}\, q = \dfrac{9,9910070}{2,4656626}$ & $\beta = \dfrac{\phi}{\text{ſin}\, q} = 292,2$

$= 0,00142$ exprimé en parties du rayon; donc

$k - \beta = 0,20421$; $l(k-\beta) = 9,3100770$. Donc log tang $q = -\log(k-\beta) = 10,6899229$ & $q = 78^\circ\ 27'\ 30''$. Paſſant à une troiſieme valeur de q je trouve $\phi = 280'',4$, $\beta = 286,1 = 0,00139$ parties du rayon, donc $k - \beta = 0,20424$ donc $l(k-\beta) = 9,3101408$ & log tang $q = 10,6898592$ d'où $q = 78^\circ\ 27'\ 24''$. M. Hennert trouve $78^\circ\ 27'\ 23''$. Mais je n'ai pas pris aſſez de décimales dans ce calcul pour approcher du vrai de plus près d'une ſeconde, & d'ailleurs cette différence n'eſt d'aucune conſéquence. L'on voit donc que cette méthode qui eſt très-ſimple & très-facile eſt auſſi exacte que celle que propoſe M. Hennert, quoique plus compliquée. M. Hennert prend un ſecond exemple (p. 90) qu'il tire de l'orbite de Mars. Il prend auſſi l'anomalie moyenne de trois ſignes. On a $lk = 8,9699487$. Donc l tang $q = 11,0300513$ ou $q = 84^\circ\ 40'\ 8'',6$. Donc $p - q = 5^\circ\ 19'\ 51'',4 = 19191'',4$ & log ſin $(p-q) = 8,9680547$

$$\begin{array}{r} 5,3144251 \\ \hline \end{array}$$

(j'ajoute ce dernier logarithme $4,2824798$ $5,3144251$ pour réduire le ſinus en ſecondes); donc ſin $(p-q) = 19163,7$ & $\phi = 27'',7$ d'où je tire $\beta = 27'',8 = 0,000135$ parties du rayon. Or $k = 0,093314$, donc $k - \beta = 0,093179$, donc $l(k-\beta) = 8,9693180$ & log tang $q = 11,0306820$, donc $q = 84^\circ\ 40'\ 35'',9$. M. Hennert trouve $84^\circ\ 40'\ 36''$. Une ſeule approximation ſuffit donc pour l'orbite de Mars, & à plus forte raiſon pour celle des planetes ſupérieures. Pour trouver la différence entre les arcs & leurs ſinus, il faut faire uſage de la table qui ſe trouve dans le Tome III des tables aſtronomiques de Berlin p. 172 & ſuiv.

La méthode dont je me ſuis ſervi fournit une autre maniere de faire l'approximation, au lieu de faire $\phi = \beta \sin q$, je n'ai qu'à faire $\phi = \beta \cos q$ & j'aurai $k \sin q = \sin p \cos q - \sin q \cos p + \beta \cos q$, donc $\tan q = \frac{\sin p + \beta}{k + \cos p}$. On voit aiſément que dans les exemples précédens où les ſin q varioient très-peu, la premiere formule valoit mieux, mais dans ceux où les ſin q varieroient beaucoup, on pourroit quelquefois ſe ſervir de la ſeconde. Au reſte, l'exemple que j'ai donné de l'orbite de Mercure étoit pris dans les circonſtances les plus défavorables, car il y a un grand nombre de Cas où même pour cette planete on n'a beſoin que d'une ſeule approximation. Ainſi, dans l'exemple cité par M. de la Lande §. 921 où l'on demande l'anomalie excentrique qui répond à 60° d'anomalie moyenne, on a $k = 0,20878$, $p = 60°$, $l \sin p = 9,9375306$, $\cos p = 0,5$; $k + \cos p = 0,70878$; $l(k + \cos p) = 9,8505115$, donc $l \tan q = l \sin p - l(k + \cos p) = 10,0870191$ & $q = 50° 42' 8''$. Donc $p - q = 9° 17' 52''$, $\phi = 147''$ & $\beta = 0,00092$, donc $k + \cos p - \beta = 0,70786$, donc $l(k + \cos p - \beta)$

$= 9,$

$= 9,8499474$ & $l \operatorname{tang} q = l \sin p - l\,(k + \cos p - B) = 10,0875832$, donc $q = 50^\circ\ 44'\ 19''$ comme le trouve M. de la Lande. Cette méthode est donc plus courte que celle de M. Cassini, & en même tems, dans les cas les plus défavorables des planetes, elle donne l'anomalie excentrique à 1″ près. Mais on ne pourroit l'appliquer à des orbites plus excentriques, bien moins à celles des cometes, parce que les premieres valeurs s'écarteroient trop de la vraie, & que les autres n'y rameneroient que très-peu.

CHAPITRE IX.

De l'usage de la Trigonométrie dans la doctrine des Parallaxes.

LA parallaxe horizontale d'un astre est l'angle sous lequel le rayon vertical de la terre est vu depuis cet astre supposé à l'horizon. Soit O P le globe terrestre, T le centre, H l'horizon, Z le zénith, L un astre quelconque ; la parallaxe horizontale sera

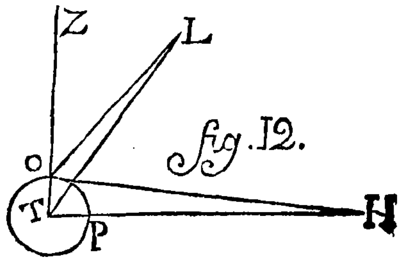


Fig. 12.

$= \frac{OT}{TH}$, c'est-à-dire, égale au rayon de la terre divisée par la distance de l'astre au centre de la terre. C'est aussi la différence du lieu où l'on voit un astre depuis la surface & depuis le centre de la terre. Car l'angle Z O H est la distance apparente au zénith, & l'angle Z T H est cette même distance vue du centre de la terre. La différence de ces deux angles est l'angle O H T. Cet angle diminue à mesure que l'astre s'éleve & devient nul au zénith. Si l'astre est en L, les deux triangles O T L, O T H nous donnent ces deux proportions, $1 : \sin OHT = TH : TO$; or $TH = TL$, donc $\frac{TO}{TH} = \frac{TO}{TL} = \sin OHT$

$\sin LOT : \sin OLT = TL : TO$, $\frac{\sin OLT}{\sin LOT} = \frac{\sin OLT}{\sin LOZ} = \frac{\sin OLT}{\cos LOH}$, donc $\sin OLT = \sin OHT \cos LOH$.

L'angle O L T eſt ce qu'on appelle la parallaxe de hauteur. Donc le ſinus de la parallaxe de hauteur eſt égal au ſinus de la parallaxe horizontale, multiplié par le coſinus de la hauteur apparente. Mais comme le globe terreſtre n'eſt pas une ſphere, mais un ſphéroïde, cette conſidération influe ſur la parallaxe, ſoit donc r le rayon de l'équateur, d la diſtance de l'aſtre au centre de la terre, & π la parallaxe horizontale équatorienne, on aura $\sin \pi = \frac{r}{d}$. Soit enſuite δ le rayon de la terre à une certaine latitude, & p la parallaxe horizontale à cette latitude, on aura $\sin p = \frac{\delta}{d}$, donc $\frac{r}{\sin \pi} = \frac{\delta}{\sin p}$ & $\sin p = \frac{\delta}{r} \sin \pi$. Soit $\frac{\delta}{r} = \epsilon$, on aura $\sin p = \epsilon \sin \pi$, ϵ étant le rapport entre le rayon de la terre à un lieu donné & le rayon de l'équateur. Afin qu'il ne manque rien à cette théorie des parallaxes; nous examinerons dans le Chapitre ſuivant les dimenſions du ſphéroïde applati.

Il ſuit de ce que je viens de dire, que l'effet de la parallaxe eſt toujours en hauteur, & ſe produit dans le même vertical; mais il eſt important de connoître quel effet cette différence de hauteur d'un aſtre produit ſur ſa longitude & ſa latitude, c'eſt ce qu'on appelle les parallaxes de longitude & de latitude, dont la connoiſſance eſt abſolument néceſſaire pour le calcul des éclipſes de ſoleil & des occultations d'étoiles par la lune. M. Lexell a donné pour cela des formules très-utiles dans les Ephémérides de Berlin pour 1777. Les démonſtrations devoient paroître dans les tranſactions philoſophiques, mais comme elles n'ont pas encore paru, je me ſuis appliqué à les chercher, & je vais les expoſer ici.

Le diametre de la lune eſt en raiſon inverſe de ſa diſtance à la terre, puiſque la meſure de ce diametre eſt l'angle viſuel ſous lequel la lune nous paroît. Ainſi D étant le diametre horizontal de la lune, & d le diametre à la hauteur apparente h, H étant la hauteur vraie, on aura $D = \frac{1}{HT}$ & $d = \frac{1}{OL}$, or $OL : LT = \text{ſin } OTL : \text{ſin } LOT$, ou $OL : HT = \text{coſ } H : \text{coſ } h$, donc $OL = \frac{HT \text{ coſ } H}{\text{coſ } h} = \frac{\text{coſ } H}{D \text{ coſ } h}$ & $d = \frac{D \text{ coſ } h}{\text{coſ } H}$. Or $H = h + P$ (P étant la parallaxe de hauteur) $= h + nD \text{ coſ } h$, (en appellant nD la parallaxe horizontale) donc $\text{coſ } H = \text{coſ } (h + nD \text{ coſ } h) = \text{coſ } h - nD \text{ ſin } h \text{ coſ } h$, (à cauſe de la petiteſſe de nD) & $\frac{1}{\text{coſ } H} = \frac{1}{\text{coſ } h} + \frac{nD \text{ ſin } h}{\text{coſ } h}$ (en négligeant le quarré de nD) donc $d = D + nDD$

$\sin b$. C'eſt la formule qui ſe trouve dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 p. 127. Comme D eſt fort petit, on peut mettre au lieu de D $\sin D$, & on aura $d = D + n \sin D^2 \sin b$, mais $\sin D^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2D$, donc $d = D + \frac{1}{2} n \sin b - \frac{1}{2} n \sin b \cos 2D = D + \frac{1}{2} n \left(\sin b - \frac{1}{2} \sin (b + 2D) - \frac{1}{2} \sin (b - 2D)\right)$. Or Mayer fait $n = \frac{11}{6}$, donc $d = D + \frac{11}{12} \left(\sin b - \frac{1}{2} \sin (b + 2D) - \frac{1}{2} \sin (b - 2D)\right)$.

C'eſt la formule qui ſe trouve dans les tables aſtronomiques de Berlin, Tome III p. 210.

Soit V le pole de l'écliptique, P Z le méridien d'un lieu, Z le point où le rayon qui paſſe par ce lieu étant prolongé coupe le méridien, l'aſtre ſitué au point M, V M le cercle de latitude, menons l'arc de grand cercle V Z. La parallaxe abbaiſſant toujours les aſtres, l'aſtre M paroîtra en L; prolongeons ZM en L & menons le cercle de latitude V L. On a par ce que j'ai dit ci-deſſus $\sin ML = \epsilon \sin \pi \sin ZL = \epsilon \sin \pi \sin (ZM + ML) = \epsilon \sin \pi (\sin ZM \cos ML + \cos ZM \sin ML)$;

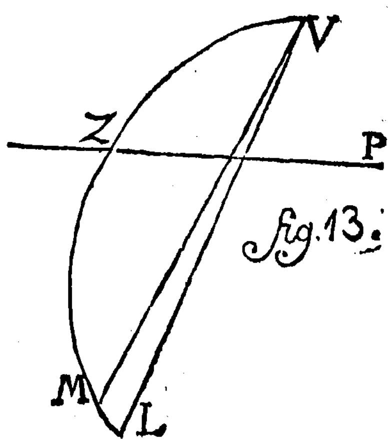


fig. 13.

donc $\frac{\sin ML}{\cos ML} = \operatorname{tang} ML = \frac{e \sin \pi \sin ZM}{1 - e \sin \pi \cos ZM}$.

Dans le triangle VZM, connoissant VZ, ZM & ZVM, on aura par l'analogie commune $\sin VZM = \frac{\sin VM \sin ZVM}{\sin ZM}$. Dans le triangle ZVL connoissant ZV, ZL & VZL, on aura par le troisieme Cas des solutions analytiques $\operatorname{tang} ZVL = \frac{\sin VZM}{\cot ZL \sin VZ - \cos VZM \cos VZ} = \operatorname{tang} (ZVM + MVL) = \frac{\operatorname{tang} ZVM + \operatorname{tang} MVL}{1 - t.\, ZVM\, t.\, MVL}$.

Donc $\operatorname{tang} MVL =$

$$\frac{\sin VZM - t.ZVM \cot ZL \sin VZ + t.ZVM \cos VZM \cos VZ}{\sin VZM\, t.\, ZVM + \cot ZL \sin VZ - \cos VZM \cos VZ}.$$

Or $\operatorname{tang} ZL = \frac{\operatorname{tang} ZM + \operatorname{tang} ML}{1 - \operatorname{tang} ZM \operatorname{tang} ML} =$ (en mettant pour tang ML sa valeur trouvée ci-dessus & réduisant) $\frac{\sin ZM}{\cos ZM - e \sin \pi}$. J'ai aussi par le cinquieme Cas des solutions analytiques $\cos VZM = \frac{\cos VM - \cos VZ \cos ZM}{\sin VZ \sin ZM}$.

Substituant dans la valeur de t. MVL les trois valeurs de sin VZM, cos VZM & tang ZL que nous venons de trouver, nous aurons;

$\operatorname{tang} MVL = \left(\frac{\sin VM \sin ZVM}{\sin ZM} - \right.$

$$\frac{\mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ\ (\cos ZM - \varepsilon \sin \pi)}{\sin ZM}$$

$$+ \frac{\mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ\,(\cos VM - \cos VZ \cos ZM)}{\sin VZ \sin ZM}\Big)$$

$$\Big(\frac{\sin VM\ \sin ZVM\ \mathrm{t.}\,ZVM}{\sin ZM}$$

$$+ \frac{\sin VZ\ (\cos ZM - \varepsilon \sin \pi)}{\sin ZM} -$$

$$\frac{\cos VZ\ (\cos VM - \cos VZ\ \cos ZM)}{\sin VZ \sin ZM}\Big) =$$

$(\sin VM \sin ZVM \sin VZ - \mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ^2 (\cos ZM - \varepsilon \sin \pi) + \mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ (\cos VM - \cos VZ\ \cos ZM)) : (\sin VM \sin ZVM\ \mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ + \sin VZ^2 (\cos ZM - \varepsilon \sin \pi) - \cos VZ (\cos VM - \cos VZ\ \cos ZM))$.

Mais on a par le troisieme Cas des solutions analytiques $\cos ZM = \cos ZVM \sin VZ \sin VM + \cos VZ \cos VM$. Substituant cette valeur dans la fraction qui donne tang MVL, le numérateur de cette fraction sera $= \sin VM \sin ZVM \sin VZ - \sin ZVM \sin VZ^3 \sin VM - \mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ^2 \cos VZ \cos VM + \varepsilon \sin \pi\ \mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ^2 + \mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ \cos VM - \sin ZVM \cos VZ^2 \sin VZ \sin VM - \mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ^3 \cos VM = \sin VM \sin ZVM \sin VZ^3 - \sin VM \sin ZVM \sin VZ^3 - \mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ \cos VM (\sin VZ^2 + \cos VZ^2) + \sin VM \sin ZVM \sin VZ \cos VZ^2 - \sin VM \sin ZVM \sin VZ \cos VZ^2 + \mathrm{t.}\,ZVM \cos VZ \cos VM + \varepsilon \sin \pi\ \mathrm{t.}\,ZVM \sin VZ^2$ (en multipliant le premier terme par $\sin VZ^2$

$+ \cos VZ^2$ & réduiſant) $= \varepsilon \sin \pi\ t.\ ZVM \sin VZ^2$. Au moyen de la même ſubſtitution le dénominateur de notre fraction devient $= \sin VM\ t.\ ZVM \sin ZVM \sin VZ + \sin VZ^3 \cos ZVM \sin VM + \sin VZ^2 \cos VZ. \cos VM - \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 - \cos VZ \cos VM + \cos VZ^2 \sin VZ \cos ZVM \sin VM + \cos VZ^3 \cos VM = \sin ZVM\ t.\ ZVM \sin VM \sin VZ + \sin VZ \cos ZVM \sin VM + \cos VZ \cos VM - \cos VZ \cos VM - \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 =$

$$\frac{\sin ZVM^2 \sin VM \sin VZ + \cos ZVM^2 \sin VZ \sin VM - \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \cos ZVM}{\cos ZVM}$$

$$= \frac{\sin VM \sin VZ - \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \cos ZVM}{\cos ZVM}.$$

Donc tang $MVL = \left(\frac{\varepsilon \sin \pi \sin ZVM \sin VZ^2}{\cos ZVM}\right) : \left(\frac{\sin VM \sin VZ - \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \cos ZVM}{\cos ZVM}\right) = \frac{\varepsilon \sin \pi \sin ZVM \sin VZ}{\sin VM - \varepsilon \sin \pi \sin VZ \cos ZVM}$. C'eſt la formule que trouve M. Lexell, & cet angle MVL eſt comme l'on voit la Parallaxe de longitude, car ſon ſommet étant au pole de l'écliptique, cet angle eſt meſuré par un arc de l'écliptique.

En ajoutant cet angle MVL à l'angle connu ZVM, on aura l'angle ZVL, & par ce moyen on connoîtra aiſément VL, ce qui donnera la parallaxe de latitude, laquelle eſt égale à $VL - VM$. Car dans les triangles VZM & VZL on aura par le troiſieme Cas des ſolutions analytiques cot $VZM =$

cot

$$\frac{\cot VM \sin VZ - \cos ZVM \cos VZ}{\sin ZVM} = \frac{\cot VL \sin VZ - \cos ZVL \cos VZ}{\sin ZVL}.$$

Donc $\cot VL =$
$$\frac{\cot VM \sin VZ \sin ZVL - \cos ZVM \cos VZ \sin ZVL + \cos ZVL \cos VZ \sin ZVM}{\sin ZVM \sin VZ}$$
$$= \frac{\cot VM \sin ZVL}{\sin ZVM} - \frac{\cot VZ}{\sin ZVM} \sin (ZVL - ZVM) = \frac{\cot VM \sin ZVL}{\sin ZVM} - \frac{\cot VZ}{\sin ZVM} \sin MVL.$$

Mais il est aisé de trouver $\sin MVL$ au moyen de t. MVL, car nous avons $\frac{\sin MVL}{\cos MVL} =$
$\frac{\varepsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVM}{\sin VM - \varepsilon \sin \pi \sin VZ \cos ZVM}$. Donc $\sin VM \sin MVL - \varepsilon \sin \pi \sin VZ (\sin MVL \cos ZVM + \cos MVL \sin ZVM) = \sin VM \sin MVL - \varepsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVL = 0$, ou $\sin MVL = \frac{\varepsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVL}{\sin VM}$. (C'est une des formules de M. Lexell.) Substituant cette valeur, nous aurons
$$\cot VL = \frac{\cot VM \sin ZVL}{\sin ZVM} - \frac{\varepsilon \sin \pi \cos VZ \sin ZVL}{\sin ZVM \sin VM} = \frac{\cot VM \sin ZVL}{\sin ZVM}\left(1 - \varepsilon \sin \pi \frac{\cos VZ}{\cos VM}\right).$$
C'est la formule que trouve M. Lexell.)

Ayant trouvé l'angle Z V L, M. Lexell cherche ensuite la valeur de tang (V L — V M. Voici comment on peut la trouver tang (V L — V M) $=$

$$\frac{t.\,VL - t.\,VM}{1 + t.\,VL\; t.\,VM} = \frac{1 - t.\,VM \cot VL}{\cot VL + t.\,VM} =$$

(en mettant pour cot V L sa valeur que nous venons de trouver.)

$$\frac{1 - \dfrac{\sin ZVL}{\sin ZVM}\left(1 - {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \dfrac{\cos VZ}{\cos VM}\right)}{\dfrac{\sin ZVL \cot VM}{\sin ZVM}\left(1 - {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \dfrac{\cos VZ}{\cos VM}\right) + t.\,VM}$$

$$= \frac{\sin ZVM \cos VM - \sin ZVL \cos VM + {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \cos VZ \sin ZVL}{\sin ZVL \cot VM \cos VM + t.\,VM \sin ZVM \cos VM - {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \sin ZVL \cos VZ \cot VM}$$

$$= \frac{\sin ZVM \sin VM \cos VM - \sin ZVL \sin VM \cos VM + {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \cos VZ \sin VZL \sin VM}{\sin ZVL \cos VM^2 + \sin ZVM \sin VM^2 - {}_{\varepsilon}\sin_{\pi} \sin ZVL \cos VM \cos VZ}.$$

Or $\sin VM \cos VM = \frac{1}{2}\sin 2\,VM$ & $-\frac{1}{2}\sin 2\,VM\,(\sin ZVL - \sin ZVM) = -\sin 2\,VM$

$$\left(\sin\frac{ZVL}{2}\cos\frac{ZVL}{2} - \sin\frac{ZVM}{2}\cos\frac{ZVM}{2}\right)$$

$$= -\sin 2\,VM \sin\frac{MVL}{2}\cos\left(\frac{ZVL + ZVM}{2}\right)$$

(en multipliant le premier terme par $\sin\dfrac{ZVM^2}{2} + \cos\dfrac{ZVM^2}{2} = 1$ & le second par $\sin\dfrac{ZVL^2}{2} + \cos\dfrac{ZVL^2}{2} = 1$ & réduisant). Donc tang (V L — V M) $=$

$$\frac{\epsilon \sin \pi \sin ZVL \cos VZ \sin VM - \sin 2\, VM \sin \frac{MVL}{2} \cos\left(\frac{ZVL + ZVM}{2}\right)}{\sin ZVL \cos VM^2 + \sin ZVM \sin VM^2 - \epsilon \sin \pi \sin ZVL \cos VM \cos VZ}.$$

C'eſt la formule que trouve M. Lexell; il y a apparence qu'il y a une faute d'impreſſion dans les Ephémérides, où l'on lit dans le numérateur $\cos\left(\frac{ZVL - ZVM}{2}\right)$ au lieu de $\cos\left(\frac{ZVL + ZVM}{2}\right)$.

Cette formule étant très-compliquée, M. Lexell en cherche une plus ſimple qui ne ſoit qu'approchée. Pour cela je mets l'équation de cot VL ſous cette forme $\frac{\cos VL}{\sin VL} = \frac{\sin ZVL \cos VM}{\sin ZVM \sin VM} - \frac{\epsilon \sin \pi \sin ZVL \cos VZ}{\sin ZVM \sin VM}$. Donc $\cos VL \sin ZVM \sin VM - \sin ZVL \sin VL \cos VM + \epsilon \sin \pi \sin ZVL \cos VZ \sin VL = 0$. Or $\sin ZVM = \sin ZVL \cos MVL - \sin MVL \cos ZVL =$ (en mettant pour $\sin MVL$ ſa valeur) $\sin ZVL \cos MVL - \frac{\epsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVL \cos ZVL}{\sin VM}$. Or $\cos MVL = \sqrt{1 - \sin MVL^2} = 1 + \frac{1}{2} \sin MVL^2 = 1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sin \pi^2 \frac{\sin VZ^2 \sin ZVL^2}{\sin VM^2}$. Donc $\sin ZVM = \sin ZVL + \frac{\frac{1}{2} \epsilon^2 \sin \pi^2 \sin VZ^2 \sin ZVL^3}{\sin VM^2} - \frac{\epsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVL \cos ZVL}{\sin VM}$. Subſtituant donc cette valeur dans notre équation, nous aurons, $\sin ZVL \sin (VL - VM) = - \varepsilon \sin \pi \sin VZ \sin ZVL \cos ZVL \cos VL - \frac{\frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \pi^2 \sin VZ^2 \sin ZVL^3 \cos VL}{\sin VM} + \varepsilon \sin \pi \sin ZVL \cos VZ \sin VL$ ou $\sin (VL - VM) = \varepsilon \sin \pi \left(\cos VZ \sin VL - \sin VZ \cos VL \cos ZVL - \frac{1}{2} \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \sin ZVL^2 \frac{\cos VL}{\sin VM}\right) = \varepsilon \sin \pi (\cos VZ \sin VL - \sin VZ \cos VL \cos ZVL - \frac{1}{2} \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \sin ZVL^2 \cot VL)$ (en mettant $\sin VL$ au lieu de $\sin VM$, ce qui ne change que très-peu la valeur du dernier terme qui est déja très-petit.) C'est la formule que trouve M. Lexell.

Pour avoir la même valeur de $\sin (VL - VM)$ en y mettant ZVM au lieu de ZVL, on considérera que dans le dernier terme on peut mettre $\sin ZVM^2$ au lieu de $\sin ZVL^2$, parce que l'on néglige les $\varepsilon^3 \sin \pi^3$; quant au second terme on aura $- \sin VZ \cos VL \cos ZVL = - \sin VZ \cos VL \cos ZVM + \sin VZ \cos VL \sin ZVM \sin MVL = - \sin VZ \cos VL \cos ZVM + \frac{\varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \cos VL \sin ZVM \sin ZVL}{\sin VM} = - \sin VZ \cos VL \cos ZVM + \frac{1}{2} \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \sin ZVM^2 \cot VL$ & l'on a $\sin (VL - VM) = \varepsilon \sin \pi (\cos VZ \sin VZ - \sin VZ \cos VL \cos ZVM + \frac{1}{2} \varepsilon \sin \pi \sin VZ^2 \sin ZVM^2 \cot VL.)$ C'est ce que trouve M. Lexell. Ces deux approximations n'ont rien d'arbitraire, dès qu'on prend pour principe de négliger les ϵ^3 ſin π^3.

Les deux plus utiles de ces formules ſont celles qui donnent les parallaxes de longitude & de latitude; M. Lexell met la premiere ſous la forme ſuivante, afin de l'adapter aux uſages aſtronomiques

$$\text{tang } MVL = \frac{\dfrac{\epsilon \text{ ſin } \pi \text{ ſin } VZ \text{ ſin } ZVM}{\text{ſin } VM}}{1 - \dfrac{\epsilon \text{ ſin } \pi \text{ ſin } VZ \text{ ſin } ZVM}{\text{ſin } VM}}$$

Au reſte, ſi V étoit le pole de l'équateur, ces deux mêmes formules donneroient les parallaxes d'aſcenſion droite & de déclinaiſon, & ſi V étoit le zénith, elles donneroient les parallaxes d'azymuth & de hauteur. Je reviens à celles de longitude & de latitude qui ſont d'un plus grand uſage dans l'aſtronomie.

On doit remarquer ſur les formules précédentes qu'à cauſe de la nonſphéricité de la terre, le point Z n'indique pas le zénith, mais le point où le rayon mené par le lieu où ſe fait l'obſervation coupe le méridien. Soit *m o n* le globe terreſtre, *p* Z' la perpendiculaire à la ſurface paſſant par l'aſtre M, P le pole de l'équateur. Dans les formules que nous avons données, nous avons conſidéré le point Z au lieu du point Z', voici comment la connoiſſance d'un de ces points mene à l'autre. On a P Z $=$ P Z' $+$ Z Z'. Or Z Z' $=$ Z M Z' $=$ *p* M *c* $=$ angle que fait le rayon avec la verticale, angle qu'on connoît par la théorie de la figure de la terre, comme on le verra dans le Chapitre ſuivant.

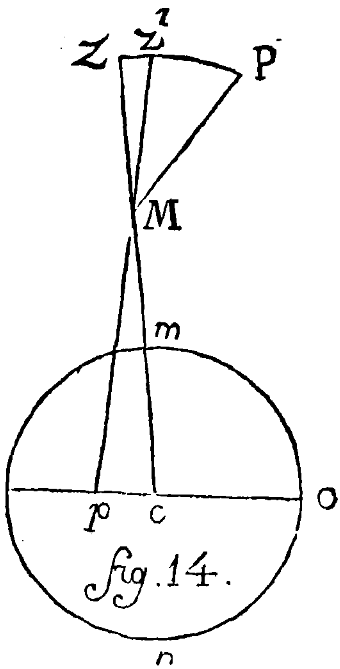


Fig. 14.

Cela poſé, dans les formules des parallaxes de longitude & de latitude, il faut pour pouvoir les calculer connoître les quantités V Z, V M & Z V M. On connoît immédiatement V M parce que c'eſt le complément de la latitude de l'aſtre, V Z eſt ce que M. de la Lande appelle la hauteur du nonagéſime;

mais un calcul bien simple nous dispense d'introduire ici le nonagésime.

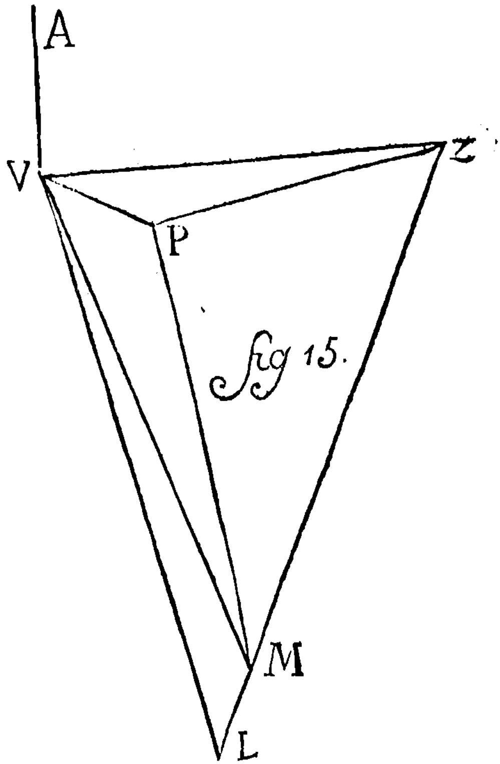


fig 15.

Soit V le pole de l'écliptique, Z le zénith, P le pole de l'équateur, M l'astre, L le point où paroît l'astre à cause de la parallaxe, menez les lignes V P, P Z, P M, V M, V L. Pour avoir V Z je considérerai le triangle V PZ; V P est la distance des deux poles ou l'obliquité de l'écliptique, P Z est le complément de la latitude du lieu, V P Z est l'angle horaire du pole de l'écliptique. On sait que l'angle horaire d'un astre est sa distance au méridien, que l'angle horaire du soleil ou la distance du soleil au méridien est le tems vrai réduit en degrés; ainsi pour avoir l'angle horaire d'un astre, il faut prendre sa distance au soleil & l'ajouter avec le tems vrai réduit en degrés. Mais la distance d'un astre au soleil est égale à l'ascension droite du soleil, moins l'ascension droite de l'astre. Donc pour avoir l'angle horaire d'un astre, il faut ajouter le tems vrai réduit en degrés avec l'ascension droite du soleil & en retrancher l'ascension droite de l'astre. Or l'angle horaire du pole de l'écliptique est évidemment 270°. J'aurai donc V P Z en ajoutant le tems vrai réduit en degrés à l'ascension droite du soleil & en en retranchant 270°. Ainsi dans le triangle V P Z je connois deux côtés & l'angle compris, je connoîtrai donc V Z & P V Z. Soit A V la ligne d'où l'on compte les longitudes, A V P est droit, j'aurai donc A V Z = A V P — P V Z. Donc j'aurai Z V M = A V M — A V Z = longit l'astre — A V Z. Je connoîtrai donc tout ce qu'il faut pour déterminer les parallaxes de longitude & de latitude. Il faut observer que l'angle V P Z est tantôt obtus & tantôt aigu suivant la position de l'astre, mais une figure le montrera toujours.

Les formules qu'on donne ordinairement pour calculer les parallaxes & qui ne sont qu'approchées, telles que M. de la Lande les donne dans son astronomie, se trouvent immédiatement au moyen des analogies différentielles que nous avons exposées ci-dessus. Il est évident que dans le triangle Z V M, lorsque l'astre paroît en L, le côté V Z & l'angle V Z M sont constans; pour avoir la parallaxe de longitude M V L, il n'y a qu'à chercher le rapport de la variation de Z M à celle de Z V M. Or, on a par le premier Cas des analogies différentielles,

d Z M

$dZM : dZVM = \sin VM : \sin VMZ$. Or $dZM = ML = p \sin ZL$ (en appellant p la parallaxe horizontale) donc $dZVM =$

$\frac{p \sin ZL . \sin VMZ}{\sin VM}$. De plus $\sin VMZ : \sin VZ = \sin VZM : \sin VM$, ou $\sin VMZ =$

$\frac{\sin VZM \sin VZ}{\sin VM}$, donc $dZVM =$

$\frac{p \sin ZL \sin VZ \sin VZM}{\sin VM^2} =$

$\frac{p \sin VZ \sin ZVM}{\sin VM}$, parce que $\sin ZVM =$

$\frac{\sin ZM \sin VZM}{\sin VM} = \frac{\sin ZL \sin VZM}{\sin VM}$. C'est la valeur de la parallaxe de longitude que donne M. de la Lande § 1294. On voit que le dernier terme du dénominateur $\epsilon \sin \pi \sin VZ \operatorname{cof} ZVM$ est négligé. Pour avoir la parallaxe de latitude $VL - VM$, il n'y a qu'à chercher par le même cas des analogies différentielles le rapport de la variation de ZM à celle de VM, or on trouve $dZM = p \sin ZL : dVM = 1 : \operatorname{cof} ZMV$. Or on a par le quatrieme Cas des solutions analytiques $\operatorname{cof} ZMV = \operatorname{cof} ZV \sin VZM \sin ZVM - \operatorname{cof} VZM \operatorname{cof} ZVM$. Donc $dVM = p \sin ZL \operatorname{cof} ZMV = p \sin ZL (\operatorname{cof} VZ \sin VZM \sin ZVM - \operatorname{cof} VZM \operatorname{cof} ZVM)$. Or $\sin ZL : \sin ZVL = \sin VL : \sin VZL$, donc $\sin ZL = \frac{\sin VL \sin ZVL}{\sin VZL} =$

V

$\frac{\text{fin } VM \text{ fi } ZVM}{\text{fin } VZM}$, donc $d\, VM = p \text{ fin } VM$ $(\text{cof } VZ \text{ fin } ZVM^2 - \text{cot } VZM \text{ cof } ZVM \text{ fin } ZVM)$.

Mais on a par le troisieme Cas des solutions analytiques $\text{cot } VZM = \frac{\text{cot } VM \text{ fin } VZ - \text{cof } ZVM \text{ cof } VZ}{\text{fin } ZVM}$, donc

$$d\, VM = p \text{ fin } VM\, (\text{cof } VZ \text{ fin } ZVM^2 - \text{cof } ZVM \text{ cot } VM \text{ fin } VZ + \text{cof } ZVM^2 \text{ cof } VZ)$$

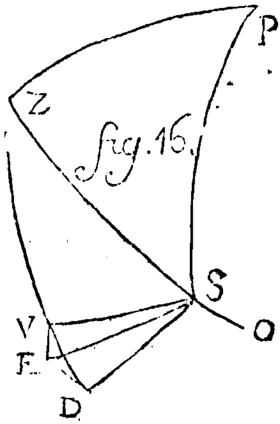
$$= p \text{ fin } VM\, (\text{cof } VZ - \text{cof } ZVM \text{ cot } VM \text{ fin } VZ)$$

$$= p \text{ fin } VM \text{ cot } VM \text{ fin } VZ \left(\frac{\text{cot } VZ}{\text{cot } VM} - \text{cof } ZVM\right)$$

$$= p \text{ cof } VM \text{ fin } VZ \left(\frac{\text{tang } VM}{\text{tang } VZ} - \text{cof } ZVM\right).$$

C'eſt la formule que trouve M. de la Lande § 1293. La méthode qui conduit à ces formules fait voir qu'elles ne ſont pas exactes, & l'application même de ces formules confirme la même choſe.

M. Lexell a joint aux formules dont nous venons de donner la démonſtration une méthode pour calculer les effets des parallaxes dans les paſſages des planetes ſur le ſoleil dans laquelle il donne une formule pour trouver la différence entre la diſtance apparente des centres & leur diſtance réelle. Ce cas eſt plus compliqué que celui des occultations des fixes, parce que dans ce dernier Cas il n'y a qu'une planete à conſidérer, au lieu que dans le cas des paſſages des planetes ſur le ſoleil il y en a deux.



Soit S le lieu du soleil, V celui de la planete, P Z le méridien du lieu où se fait l'observation, menez les arcs Z S & Z V qui sont des verticaux; soit V D la parallaxe de hauteur de la planete, & S O celle du soleil. Soit π la parallaxe horizontale équatorienne du soleil & $m\,\pi$ celle de la planete, ε le rapport du rayon de la terre pour une latitude donnée au rayon de l'équateur; soit menée D E parallele & égale à S O, on peut considérer l'effet des parallaxes comme si le soleil restoit immobile en S & que la planete fut en E, S E est la distance apparente des astres qu'on connoît par observation & S V leur distance réelle que M Lexell enseigne d'abord à connoître à peu près, au moyen de quoi il cherche la valeur de V S — E S ou de E S — V S par une formule approchée, il pousse l'approximation jusqu'aux π^2. Pour être plus clair, je vais d'abord donner cette formule en ne tenant compte que de π & en négligeant les π^2.

Ne considérons d'abord que la parallaxe V D de la planete, elle augmente l'angle Z S V de l'angle V S D. Or connoissant l'angle Z S V, Z S & S V nous aurons par les formules précédentes les valeurs de V S D & S D, savoir tang V S D =

$\frac{\varepsilon \sin m\pi \sin ZS \sin ZSV}{\sin VS - \varepsilon \sin m\pi \sin ZS \cos ZSV}$ & cot S D $=$ $\frac{\sin ZSD \cot VS}{\sin ZSV}\left(1 - \varepsilon \sin m\pi \frac{\cos ZS}{\cos VS}\right)$.

Maintenant dans le triangle E S D je connois S D, D E & E D S qui est égal au supplément de Z S D puisque D E est parallele à S O, j'aurai donc par le troisieme Cas des solutions analytiques cof S E $=$ cof S D cof D E $-$ fin S D fin D E cof Z S D, mais D E $= \varepsilon \sin \pi \sin ZS = \varepsilon \pi \sin ZS =$ fin D E & cof D E $= 1$, donc cof S E $=$ cof S D $-$ D E fin S D cof Z S D $= (1 -$ D E tang S D cof Z S D) cof S D $= (1 - \varepsilon\pi \sin ZS \tan SD \cos ZSD) \cos SD$. Or tang S D $=$

$$\frac{\sin VSZ \cos VS}{\sin ZSD \cot VS (\cos VS - \varepsilon \sin m\pi \cos ZS)}.$$

Donc cof S E $=$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\pi \sin ZS \sin VSZ \cos VS \cot ZSD}{\cot VS (\cos VS - \varepsilon \sin m\pi \cos ZS)}\right)$$

cof S D $=$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\pi \sin ZS \sin VSZ \sin VS \cot ZSD}{\cos VS - \varepsilon \sin m\pi \cos ZS}\right)$$

cof S D. Mais cot Z S D $=$

$$\frac{1 - \tan VSZ \tan VSD}{\tan VSZ + \tan VSD} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon m\pi \sin ZS \sin VSZ\ t.\ VSZ}{\sin VS - \varepsilon m\pi \sin ZS \cos VZS}\right)}{\left(t.\ VSZ + \frac{\varepsilon m\pi \sin ZS \sin VSZ}{\sin VS - \varepsilon m\pi \sin ZS \cos VSZ}\right)} =$$

$$\frac{\sin VS \cos VSZ - \epsilon m \pi \sin ZS \cos VSZ^2 - \epsilon m \pi \sin ZS \sin VSZ^2}{\sin VSZ \sin VS - \epsilon m \pi \sin ZS \sin VSZ \cos VSZ + \epsilon m \pi \sin ZS \sin VSZ \cos VSZ}$$

$$= \frac{\sin VS \cos VSZ - \epsilon m \pi \sin ZS}{\sin VS \sin VSZ} = \cot$$

VSZ. Donc $\cos SE =$

$$\left(\frac{\cos VS - \epsilon \sin m \pi \cos ZS - \epsilon \pi \sin ZS \sin VS \cos VSZ}{\cos VS - \epsilon \sin m \pi \cos ZS}\right)$$

$\cos SD$. Or la derniere des formules précédentes nous donne $\sin (SD - VS) = \sin SD \cos VS - \cos SD \sin VS = \epsilon m \pi (\cos ZS \sin SD - \sin ZS \cos SD \cos VSZ)$. Donc $\cot SD =$

$$\frac{\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS}{\sin VS - \epsilon m \pi \sin ZS \cos ZSV} = \frac{\cos SD}{\sin SD}.$$

Donc $\cos SD =$

$$\frac{\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS}{\sqrt{1 - 2 \epsilon m \pi (\cos VS \cos ZS + \sin VS \sin ZS \cos ZSV)}}$$

$= \cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ$. Donc $\cos SE = \cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS - \epsilon \pi \sin ZS \sin VS \cos VSZ + \epsilon m \pi \cos VS^2 \cos ZS + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ = \cos VS - \epsilon \pi \sin ZS \sin VS \cos VSZ - \epsilon m \pi \cos ZS \sin VS^2 + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ$. Donc $VS - ES = - \epsilon \pi \sin ZS \cos VSZ + \epsilon m \pi \cos VS \sin ZS \cos VSZ - \epsilon m \pi \cos ZS \sin VS = \pi ((m - 1) \epsilon \sin ZS \cos VSZ - \epsilon m \sin VS \cos ZS)$.

Je néglige $\cos VS$ dans le second terme parce qu'il est égal à 1, à des quantités négligeables près. Ma derniere réduction est fondée sur ce que lorſqu'on a $\cos Z' = \cos Z + \phi \sin Z$, ($\phi$ étant une très-petite quantité, on peut supposer $\cos Z' = \cos Z \cos \phi + \sin Z \sin \phi = \cos (Z - \phi)$ d'où $Z' = Z - \phi$ & $Z' - Z = - \phi$, cette réduction est vraie aux quantités de l'ordre ϕ^2 près, c'est-à-dire dans notre cas aux quantités de l'ordre π^2 près. Les deux termes de notre formule sont les deux premiers de celle de M. Lexell, & sont sans contredit les plus considérables, puisque le troisieme ne va qu'à des dixiemes, & le quatrieme qu'à des centiemes de seconde.

Pour trouver les deux derniers termes de la formule de M. Lexell, il faut faire entrer en considération les π^2; je cherche donc d'abord les valeurs de $\cos DE$ & de $\sin DE$ en ne négligeant pas les π^2, j'ai par le théoreme fondamental $\sin DE = \sin SO = \epsilon \sin \pi \sin ZO = \epsilon \sin \pi \sin (ZS + SO) = \epsilon \pi \sin (ZS + DE) = \epsilon \pi \sin ZS \cos DE + \epsilon \pi \cos ZS \sin DE$, donc $\tang DE = \frac{\epsilon \pi \sin ZS}{1 - \epsilon \pi \cos ZS}$. Donc $\sin DE =$
$\frac{\epsilon \pi \sin ZS}{\sqrt{1 - 2 \epsilon \pi \cos ZS + \epsilon^2 \pi^2}} = \epsilon \pi \sin ZS + \epsilon^2 \pi^2 \sin ZS \cos ZS$. De même $\cos DE =$
$\frac{1 - \epsilon \pi \cos ZS}{\sqrt{1 - 2 \epsilon \pi \cos ZS + \epsilon^2 \pi^2}} = 1 - \epsilon \pi \cos ZS + \epsilon \pi \cos ZS - \frac{1}{2} \epsilon^2 \pi^2 - \epsilon^2 \pi^2 \cos ZS^2 + \frac{3}{2} \epsilon^2 \pi^2 \cos ZS^2 = 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \pi^2 \sin ZS^2$. Maintenant nous avons $\cos SE = \cos SD \cos DE -$

$\sin SD \sin DE \cos ZSD = (\cos DE - \sin DE$ $\tan SD \cos ZSD) \cos SD =$ (en substituant la valeur de tang $SD =$
$\dfrac{\sin VSZ \sin VS}{\sin ZSD (\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS)}$)
$\left(\cos DE - \dfrac{\sin DE \sin VSZ \sin VS \cot ZSD}{\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS}\right)$
$\cos SD =$ (en substituant la valeur de $\cot ZSD =$
$\dfrac{\sin VS \cos VSZ - \epsilon m \pi \sin ZS}{\sin VS \sin VSZ}$), $(\cos DE -$
$\dfrac{\sin DE (\sin VS \cos VSZ - \epsilon m \pi \sin ZS)}{\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS}$)
$\cos SD$. Mais $\dfrac{1}{\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS} = \dfrac{1}{\cos VS}$
$+ \dfrac{\epsilon m \pi \cos ZS}{\cos VS^2} + \dfrac{\epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2}{\cos VS^3}$. Donc substituant cette valeur $\cos SE = (\cos DE -$
$\dfrac{\epsilon m \pi \cos DE \cos ZS}{\cos VS} - \dfrac{\sin DE \sin VS \cos VSZ}{\cos VS}$
$+ \dfrac{\epsilon m \pi \sin DE \sin ZS}{\cos VS} + \dfrac{\epsilon m \pi \cos ZS \cos DE}{\cos VS}$
$- \dfrac{\epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos DE \cos ZS^2}{\cos VS^2} -$
$\dfrac{\epsilon m \pi \sin DE \sin VS \cos ZS \cos VSZ}{\cos VS^2} +$
$\dfrac{\epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin DE \sin ZS \cos ZS}{\cos VS^2} +$
$\dfrac{\epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 \cos DE}{\cos VS^2}$) $\cos SD =$ (en

substituant pour sin D E & cos D E leurs valeurs)

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\epsilon^2\pi^2 \sin ZS^2 - \frac{\epsilon\pi \sin ZS \sin VS \cos VSZ}{\cos VS} - \frac{\epsilon^2\pi^2 \sin ZS \cos ZS \sin VS \cos VSZ}{\cos VS} + \frac{\epsilon^2 m \pi^2 \sin ZS^2}{\cos VS} - \frac{\epsilon^2 m \pi^2 \sin VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ}{\cos VS^2}\right) \cos SD.$$

Pour trouver maintenant cos S D, je prends comme ci-dessus la dernière des formules de l'article précédent, en y ajoutant seulement le dernier terme que j'avois négligé, j'ai donc $\sin(VD - VS) = \sin SD \cos VS - \cos SD \sin VS = \epsilon m\pi \cos ZS \sin SD - \epsilon m\pi \sin ZS \cos SD \cos VSZ + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 m^2\pi^2 \sin ZS^2 \sin VSZ^2 \frac{\cos SD}{\sin VS}$. (J'aurois dû mettre à la fin du dernier terme $\cot SD = \frac{\cos SD}{\sin SD}$, mais au lieu de sin S D j'ai mis sin V S ce qui est exact à des quantités de l'ordre π^3 près.) Je tire de là $\cot SD =$

$$\frac{\cos VS - \epsilon m\pi \cos ZS}{\sin VS - \epsilon m\pi \sin ZS \cos VSZ + \tfrac{1}{2}\dfrac{\epsilon^2 m^2\pi^2 \sin ZS^2 \sin VSZ^2}{\sin VS}}$$

donc $\cos SD = (\cos VS - \epsilon m\pi \cos ZS) :$

$$\sqrt{1 - \epsilon m\pi(2\cos VS \cos ZS + 2\sin VS \sin ZS \cos VSZ) + \epsilon^2 m^2\pi^2 \sin ZS^2 \sin VSZ^2 + \epsilon^2 m^2\pi^2 \cos ZS^2 + \epsilon^2 m^2\pi^2 \sin ZS^2 \cos VSZ^2}$$

$= (\cos$

$= (\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS)\ (1 + \epsilon m \pi \cos VS \cos ZS + \epsilon m \pi \sin VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 \sin VSZ^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 \cos VSZ^2 + \frac{3}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos VS^2 \cos ZS^2 + 3 \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \cos VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ) = (\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS)\ (1 + \epsilon m \pi \cos VS \cos ZS + \epsilon m \pi \sin VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 + \frac{3}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos VS^2 \cos ZS^2 + 3 \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \cos VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ) =$ (en mettant 1 au lieu de $\cos VS$ dans les termes où il y a π^2 & négligeant les termes où $\sin VS^2$ est avec π^2) $(\cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS)\ (1 + \epsilon m \pi \cos VS \cos ZS + \epsilon m \pi \sin VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 + \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 + 3 \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \cos VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ) = \cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS + \epsilon m \pi \cos ZS - \epsilon m \pi \cos ZS \sin VS^2 + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 + 3 \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ + \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 \cos VS - \epsilon^2 m^2 \pi^2 \cos ZS^2 \cos VS - \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ = \cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS \sin VS^2 + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 + \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \sin 2 ZS \cos VSZ.$

Substituant cette valeur dans celle de $\cos SE$, nous obtiendrons $\cos SE = \cos VS - \epsilon m \pi \cos ZS \sin VS^2 + \epsilon m \pi \sin VS \cos VS \sin ZS \cos VSZ - \epsilon \pi \sin VS \sin ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 + \epsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \sin 2 ZS \cos VSZ - \frac{1}{2} \epsilon^2 \pi^2 \sin ZS^2 - \epsilon^2 \pi^2 \sin ZS \cos ZS$

$\sin VS \cos VSZ + \varepsilon^2 m \pi^2 \sin ZS^2 - \varepsilon^2 m \pi^2$ $\sin VS \cos ZS \sin ZS \cos VSZ$. Donc $\cos SE - \cos VS = - \varepsilon m \pi \cos ZS \sin VS^2 + \varepsilon m \pi \sin VS$ $\cos VS \sin ZS \cos VSZ - \varepsilon \pi \sin VS \sin ZS$ $\cos VSZ + \varepsilon^2 m^2 \pi^2 \sin VS \sin 2ZS \cos VSZ$ $- \frac{1}{2} \varepsilon^2 \pi^2 \sin ZS^2 - \varepsilon^2 \pi^2 \sin ZS \cos ZS \sin VS$ $\cos VSZ - \varepsilon^2 m \pi^2 \sin VS \sin ZS \cos ZS \cos VSZ$ $- \frac{1}{2} \varepsilon^2 m^2 \pi^2 \sin ZS^2 + \varepsilon^2 m \pi^2 \sin ZS^2 =$ $\sin VS \, (- \varepsilon m \pi \cos ZS \sin VS + \varepsilon m \pi \sin ZS$ $\cos VSZ - \varepsilon \pi \sin ZS \cos VSZ -$

$$\frac{\varepsilon^2 \pi^2 \sin ZS^2}{2 \sin VS} (m^2 - 2m + 1) + \varepsilon^2 \pi^2 \sin 2ZS$$

$\cos VSZ \, (m^2 - \frac{1}{2} m - \frac{1}{2})$. Je me servirai maintenant de la réduction employée ci-dessus, mais en la poussant plus loin. Soit $\cos Z' = \cos Z - \phi$ $\sin Z$, faisons $Z' = Z + \pi$, on aura $\cos Z' =$ $\cos Z \cos \pi - \sin Z \sin \pi = \cos Z - \pi \sin Z$ $- \frac{1}{2} \pi^2 \cos Z^2 = \cos Z - \phi \sin Z$. Donc $\phi =$ $\pi + \frac{1}{2} \pi^2 \cot Z$, donc $\pi = \phi - \frac{1}{2} \phi^2 \cot Z$. Donc $SE - VS = \pi \, (- (m - 1) \, \varepsilon \sin ZS$ $\cos VSZ + m \, \varepsilon \sin VS \cos ZS) +$

$$\frac{(m-1)^2}{2} \pi \frac{\sin ZS^2}{SE} - \pi \, (m^2 - \tfrac{1}{2} m - \tfrac{1}{2})$$

$$\sin 2ZS \cos VSZ - \frac{(m-1)^2}{1} \pi$$

$$\frac{\sin ZS^2 \cos VSZ^2}{SE} + \frac{m^2 - m}{2} \pi \sin 2ZS \cos VSZ.$$

Donc $VS - ES = \pi \, (m - 1) \, \varepsilon \sin ZS \cos$

$$\cos VSZ - m \varepsilon \sin VS \cos ZS - \frac{(m-1)^2}{2}$$

$$\pi \frac{\sin ZS^2 \sin VSZ^2}{SE} + \frac{m^2 - 1}{2} \pi \sin 2 ZS \cos$$

V S Z. C'eſt la formule que trouve M. Lexell. Dans le dernier terme j'ai fait ſin V S = V' S = S E.

(Je dois remarquer qu'après avoir compoſé ces démonſtrations des formules de M. Lexell, j'ai trouvé dans un des derniers volumes des Mémoires de Pétersbourg un Mémoire ſur la différence entre le parallele vrai & le parallele apparent, où ce grand géometre démontre ſes formules pour les parallaxes de longitude & de latitude; ſa démonſtration de la parallaxe de longitude eſt très-différente de la mienne & beaucoup plus courte, mais indirecte, celle de la parallaxe de latitude revient au même que la mienne. Je ne ſache pas qu'il ait donné nulle part les démonſtrations des autres formules. Au reſte, mes démonſtrations des formules de M. Lexell ainſi que les remarques ſur le Probleme de Kepler que j'ai données dans le Chapitre précédent, ont déja paru en Allemand dans les Ephémérides de Berlin pour 1782; mais comme ce livre n'eſt pas entre les mains de tout le monde & que d'ailleurs il eſt écrit dans une langue étrangere, j'ai cru pouvoir les laiſſer à leur place d'où je les avois tirées pour les envoyer à Berlin.)

Mr. de la Grange dans un Mémoire ſur les phénomenes qui ſont ſoumis à l'influence des parallaxes, lequel eſt inſéré dans les Ephémérides de Berlin pour

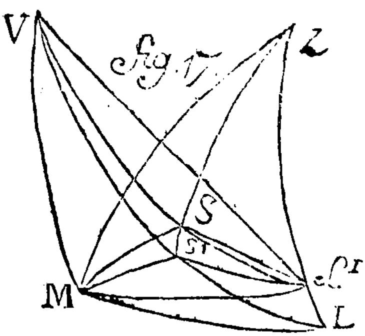
1782, expose une méthode générale qui le conduit par une analyse très-fine & très-savante à trouver la distance apparente de deux astres soumis à l'action des parallaxes. Les principes trigonométriques que nous avons exposés dans ce Chapitre suffisent pour nous conduire aux mêmes résultats d'une maniere très-simple & très-commode, comme je vais le faire voir en détail. J'indiquerai en chemin faisant la relation des quantités que je déterminerai avec les dénominations de M. de la Grange, ce qui donnera un parallele exact des deux méthodes. En reprenant la Fig. 15 je vois que dans le triangle V P Z je connois V P égal à l'obliquité de l'écliptique que M. de la Grange appelle ω, P Z égal au complément de la latitude corrigée que M. de la Grange appelle ϕ, & V P Z $=$ $90° +$ A P Z $=$ compl. θ. M. de la Grange appelle θ l'angle A P Z qui est égal au tems vrai réduit en degrés plus l'ascension droite du soleil, ou au tems moyen réduit en degrés plus la longitude du soleil. Connoissant donc dans le triangle V P Z deux côtés & l'angle compris, j'aurai par le troisieme Cas des solutions analytiques cos V Z $=$ cos V P Z sin V P sin P Z $+$ cos V P cos P Z $=$ cos ω sin ϕ $-$ sin θ sin ω cos ϕ, & tang P V Z $=$

$$\frac{\sin PZ \sin VPZ}{\sin VP \cos PZ - \sin PZ \cos VPZ \cos VP}$$

$$= \frac{\cos\phi \cos\theta}{\sin\omega \sin\phi + \cos\omega \cos\phi \sin\theta}.$$ En prenant les dénominations de M. de la Grange, on trouve cos V Z $= \frac{\zeta}{\varrho}$ & tang P V Z $= \frac{\xi}{\eta}$, donc ϱ sin PVZ

$= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ (ϱ étant le rayon du cercle, c'est-à-dire, ici le rayon du globe terrestre à la latitude ϕ). Mais $\xi^2 + \eta^2 = \cos\phi^2 \cos\theta^2 + \sin\omega^2 \sin\phi^2 + 2 \sin\omega \cos\omega \sin\phi \cos\phi \sin\theta + \cos\omega^2 \cos\phi^2 \sin\theta^2 = \cos\phi^2 - \cos\phi^2 \sin\theta^2 + \sin\phi^2 - \sin\phi^2 \cos\omega^2 + 2 \sin\omega \cos\omega \sin\phi \cos\phi \sin\theta + \cos\omega^2 \cos\phi^2 \sin\theta^2 = 1 - \cos\omega^2 \sin\phi^2 + 2 \sin\omega \cos\omega \sin\phi \cos\phi \sin\theta - \sin\theta^2 \sin\omega^2 \cos\phi^2 = 1 - (\cos\omega \sin\phi - \cos\phi \sin\omega \sin\theta)^2 = 1 - \cos VZ^2 = \sin VZ^2$, donc $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sin VZ$, donc $\varrho \sin PVZ = \frac{\xi}{\sin VZ}$ & $\xi = \varrho \sin PVZ \sin VZ$ & $\eta = \frac{\xi}{\tang PVZ} = \varrho \cos PVZ \sin VZ$, enfin $\zeta = \varrho \cos VZ$. Mais AVP étant $= 90°$. on a AVZ = compl. PVZ, donc $\xi = \varrho \cos AVZ \sin VZ$, $\eta = \varrho \sin AVZ \sin VZ$ & $\zeta = \varrho \cos VZ$. Maintenant on a ZVM = AVM — AVZ; or AVM est la longitude du point M que nous appellerons ϕ, sa latitude étant β, donc $\sin ZVM \sin (AVM - AVZ) = \sin (\phi - AVZ) = \sin\phi \cos AVZ - \cos\phi \sin AVZ = \frac{\xi \sin\phi - \eta \cos\phi}{\varrho \sin VZ}$, & $\cos ZVM = \cos (\phi - AVZ) = \cos\phi \cos AVZ + \sin\phi \sin AVZ = \frac{\xi \cos\phi + \eta \sin\phi}{\varrho \sin VZ}$. Maintenant dans le triangle ZVM, connoissant deux côtés & l'angle compris, savoir VZ, VM & ZVM, nous aurons par le troisieme Cas des solutions analytiques cos Z M = cos Z V M sin V Z sin V M + cos V Z cos V M = (en mettant les valeurs) $\frac{(\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi) \cos \beta + \zeta \sin \beta}{\varrho}$ (V M étant le complément de la latitude β) & tang V M Z = $\frac{\sin VZ \sin ZVM}{\sin VM \cos VZ - \sin VZ \cos VM \cos ZVM}$ $= \frac{\xi \sin \Phi - \eta \cos \Phi}{\zeta \cos \beta - (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi) \sin \beta}$. En prenant les dénominations de M. de la Grange on trouve cos Z M $= \lambda$, tang V M Z $= \frac{\mu}{\nu}$. (Il n'y a de différence que dans le signe de μ, ce qui vient de la maniere dont on fait la figure) donc sin $\frac{VMZ}{\varrho}$ $= \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}$. Je remarquerai avant d'aller plus loin que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho^2$ (sin P V Z^2 sin V Z^2 + cos P V Z^2 sin V Z^2 + cos V Z^2) $= \varrho^2$ (sin V Z^2 + cos V Z^2) $= \varrho^2$. Cela posé, je dis que $\mu^2 + \nu^2 = \xi^2 \sin \Phi^2 - 2 \eta \xi \sin \Phi \cos \Phi + \eta^2 \cos \Phi^2 + \zeta^2 \cos \beta^2 - 2 \zeta \sin \beta \cos \beta (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi) + \sin \beta^2 (\xi^2 \cos \Phi^2 + \eta^2 \sin \Phi^2 + 2 \eta \xi \sin \Phi \cos \Phi) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (2 \eta \xi \sin \Phi \cos \Phi + \xi^2 \cos \Phi^2 + \eta^2 \sin \Phi^2) - \zeta^2 \sin \beta^2 - 2 \zeta \sin \beta \cos \beta (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi) - \cos \beta^2 (\xi^2 \cos \Phi^2 + \eta^2 \sin \Phi^2 + 2 \eta \xi \sin \Phi \cos \Phi) = \varrho^2 - (\zeta \sin \beta + \cos \beta (\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi))^2 = \varrho^2 - \varrho^2 \cos ZM^2 = \varrho^2 \sin ZM^2$, donc $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} = \varrho$ sin

ZM & $\frac{\text{ſin VMZ}}{\varrho} = \frac{\mu}{\varrho \text{ ſin ZM}}$. Donc μ = ſin VMZ ſin ZM, $\nu = \frac{\mu}{\text{t. VMZ}}$ = coſ VMZ ſin ZM & λ = coſ ZM.



Maintenant ſoit un aſtre quelconque S dont la diſtance au point M que nous venons de conſidérer ſoit SM : ſoit Z le zénith & V le pole de l'écliptique, ſoit la la longitude de l'aſtre S & b ſa latitude, nous aurons dans le triangle VMS, VM = compl. β, VS = compl. b & MVS = à la différence des longitudes de M & de S = $a - \phi$. Nous aurons donc coſ MS = coſ MVS ſin VM ſin VS + coſ VM coſ VS = coſ $(a - \phi)$ coſ b coſ β + ſin b ſin β & tang VMS =

$$\frac{\text{ſin MVS ſin VS}}{\text{coſ VS ſin VM} - \text{coſ MVS ſin VS coſ VM}} = \frac{\text{ſin } (a - \phi) \text{ coſ } b}{\text{ſin } b \text{ coſ } \beta - \text{coſ } (a - \phi) \text{ coſ } b \text{ ſin } \beta}.$$

En prenant les dénominations de M. de la Grange, on trouve coſ MS = l, tang VMS = $\frac{m}{n}$, donc ſin

$\text{V M S} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Mais on a en développant & faisant pour abréger $a - \phi = \text{A}$, $m^2 + n^2 = \text{sin A}^2 \text{ cos } b^2 + \text{sin } b^2 \text{ cos } \beta^2 + \text{cos A}^2 \text{ cos } b^2 \text{ sin } \beta^2 - 2 \text{ sin } b \text{ cos } b \text{ sin } \beta \text{ cos } \beta \text{ cos A} = \text{cos } b^2 - \text{cos } b^2 \text{ cos A}^2 + \text{sin } b^2 - \text{sin } b^2 \text{ sin } \beta^2 + \text{cos A}^2 \text{ cos } b^2 \text{ sin } \beta^2 - 2 \text{ sin } b \text{ cos } b \text{ sin } \beta \text{ cos } \beta \text{ cos A} = 1 - \text{sin } b^2 \text{ sin } \beta^2 - \text{cos } b^2 \text{ cos A}^2 \text{ cos } \beta^2 - 2 \text{ sin } b \text{ cos } b \text{ sin } \beta \text{ cos } \beta \text{ cos A} = 1 - (\text{sin } b \text{ sin } \beta + \text{cos } (a - \phi) \text{ cos } b \text{ cos } \beta)^2 = 1 - \text{cos M S}^2 = \text{sin M S}^2$, donc $\sqrt{m^2 + n^2} = \text{sin M S}$, $\text{sin V M S} = \frac{m}{\text{sin M S}}$ & $m = \text{sin V M S sin M S}$, $n = \frac{m}{\text{t. VMS}} = \text{cos V M S sin M S}$, $l = \text{cos M S}$.

Soit encore un autre astre L dont la distance au point M soit M L: soit A la longitude de cet astre & B sa latitude, en procédant sur le triangle M V L, comme nous venons de procéder sur le triangle MVS, puisque nous connoissons dans le triangle M V L, l'angle M V L = à la différence des longitudes de M & de L, $= \text{A} - \phi$, $\text{V M} = \text{compl. } \beta$ & $\text{V L} = \text{compl. B}$, on trouvera $\text{cos M L} = \text{cos } (\text{A} - \phi) \text{ cos B cos } \beta + \text{sin B sin } \beta$, $\text{tang V M L} = \frac{\text{sin } (\text{A} - \phi) \text{ cos B}}{\text{sin B cos } \beta - \text{cos } (\text{A} - \phi) \text{ cos B sin } \beta}$. En prenant les dénominations de M. de la Grange, on a $\text{cos M L} = \text{L}$, $\text{tang V M L} = \frac{\text{M}}{\text{N}}$ d'où l'on

tire

tire comme ci-dessus $M = \sin VML \sin ML$, $N = \cos VML \sin ML$. Maintenant que la parallaxe fasse paroître l'astre S en S', S S' étant la prolongation de Z S, menons M S'. Dans le triangle M Z S où l'on connoît les trois côtés, on aura par le cinquieme Cas des solutions analytiques $\cos MZS = \frac{\cos MS - \cos MZ \cos ZS}{\sin MZ \sin ZS}$; & dans le triangle M Z S' où l'on connoît M Z, Z S' & M Z S', on aura par le troisieme Cas des solutions analytiques $\cos MS' = \cos MZS \sin ZM \sin ZS' + \cos ZM \cos ZS'$. Mais nous avons prouvé ci-dessus que $\tang ZS' = \frac{\sin ZS}{\cos ZS - \varepsilon \sin \pi}$ (π étant le sinus de la parallaxe horizontale de l'astre S) donc $\sin ZS' = \frac{\sin ZS}{\sqrt{\sin ZS^2 + \cos ZS^2 - 2\varepsilon \sin \pi \cos ZS + \varepsilon^2 \sin \pi^2}} = \frac{\sin ZS}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \sin \pi \cos ZS + \varepsilon^2 \sin \pi^2}}$ & $\cos ZS' = \frac{\cos ZS - \varepsilon \sin \pi}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \sin \pi \cos ZS + \varepsilon^2 \sin \pi^2}}$. On a donc $\cos MS' = (\cos MS - \cos MZ \cos ZS) \frac{\sin ZS'}{\sin ZS} + \cos ZS' \cos ZM =$

$$\frac{\cos MS - \cos MZ \cos ZS + \cos MZ \cos ZS - \varepsilon \sin \pi \cos MZ}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \sin \pi \cos ZS + \varepsilon^2 \sin \pi^2}}$$

$$= \frac{\cos MS - \varepsilon \sin \pi \cos ZM}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \sin \pi \cos ZS + \varepsilon^2 \sin \pi^2}}.$$

Or dans la fig. 12 nous avons T L : O L $=$ ſin Z O L : ſin Z T L $= r : r^1$ en appellant r la diſtance vraie de l'aſtre & r^1 ſa diſtance apparente. Or ſin Z O L : ſin Z T L $=$ ſin Z S^1 : ſin Z S, donc $r : r^1 =$ ſin Z S^1 : ſin Z S, donc $\frac{r^1}{r} =$

$$\frac{\text{ſin } ZS}{\text{ſin } ZS^1} = \sqrt{1 - 2\varepsilon \text{ ſin } \pi \text{ coſ } ZS + \varepsilon^2 \text{ ſin } \pi^2}.$$

donc coſ M S^1 $= \frac{r}{r^1}$ (coſ M S — ε ſin π coſ Z M)

$= \frac{r}{r^1} (l - \varepsilon \text{ ſin } \pi . \lambda)$ en employant les dénominations adoptées ci-deſſus. Nous avons fait voir plus haut que ε ſin $\pi = \frac{\varrho}{d}$, ϱ étant le rayon de la terre à la latitude en queſtion, & d la diſtance de l'aſtre au centre de la terre, que nous appellons ici r avec M. de la Grange, en ſorte que ε ſin $\pi = \frac{\varrho}{r}$, mais M. de la Grange fait $\frac{\varrho}{r} = \pi$, il appelle donc π ce que nous appellons ε ſin π, notre formule deviendra donc en adoptant ſa dénomination, coſ M $S^1 = \frac{r}{r^1} (l - \pi \lambda)$, c'eſt ce que M. de la Grange appelle l^1, nous avons donc coſ M S$^1 = l^1$. On a enſuite dans le triangle M Z S^1, tang Z M S^1 $=$

$$\frac{\text{ſin } ZS^1 \text{ ſin } MZS}{\text{ſin } ZM \text{ coſ } ZS^1 - \text{ſin } ZS^1 \text{ coſ } MZS \text{ coſ } ZM}$$

$=$ (en mettant pour fin ZS^1 & cof ZS^1 leurs valeurs)

$$\frac{\text{fin } ZS \text{ fin } MZS}{\text{fin } ZM \,(\text{cof } ZS - \varepsilon \text{ fin } \pi) - \text{fin } ZS \text{ cof } MZS \text{ cof } ZM}.$$

Or *dans le triangle* MZS *on a* fin MZS : fin ZMS $=$ fin MS : fin ZS, donc fin MZS $=$ $\frac{\text{fin } ZMS \text{ fin } MS}{\text{fin } ZS}$ & cof MZS $=$ $\frac{\text{cof } MS - \text{cof } ZM \text{ cof } ZS}{\text{fin } ZM \text{ fin } ZS}$. Nous aurons donc en fubftituant ces valeurs, tang ZMS^1 $=$

$$\frac{\text{fin } ZMS \text{ fin } MS}{\text{fin} ZM(\text{cof} ZS - \varepsilon \text{fin} \pi) - \frac{\text{cof} ZM(\text{cof} MS - \text{cof} ZM \text{cof} ZS)}{\text{fin } ZM}}$$

$$= \frac{\text{fin } ZMS \text{ fin } MS \text{ fin } ZM}{\text{fin} ZM^2 \text{cof} ZS - \varepsilon \text{fin} \pi \text{fin} ZM^2 - \text{cof} ZM \text{cof} MS + \text{cof} ZM^2 \text{cof} ZS}$$

$$= \frac{\text{fin } ZMS \text{ fin } MS \text{ fin } ZM}{\text{cof} ZS - \varepsilon \text{ fin } \pi \text{ fin} ZM^2 - \text{cof} ZM \text{ cof} MS}.$$

Or fin ZMS $=$ fin $(VMS - VMZ)$ $=$ fin VMS cof VMZ $-$ cof VMS fin VMZ, donc tang ZMS^1 $=$

$$\frac{\text{fin} MS \text{ fin} ZM \,(\text{fin} VMS \text{ cof} VMZ - \text{cof} VMS \text{ fin} VMZ)}{\text{cof} ZS - \varepsilon \text{ fin } \pi \text{ fin } ZM^2 - \text{cof} ZM \text{ cof} MS}$$

On a auffi cof ZMS $=$ cof VMS cof VMZ $+$ fin VMS fin VMZ, donc cof ZS $=$ cof ZMS fin MS fin ZM $+$ cof MS cof ZM $=$ (cof VMS cof VMZ $+$ fin VMS fin VMZ) fin MS fin ZM $+$ cof MS cof ZM, donc tang ZMS^1 $=$

$$\frac{\sin MS\,(\sin VMS \cos VMZ - \cos VMS \sin VMZ)}{\sin MS\,(\cos VMS \cos VMZ + \sin VMS \sin VMZ) - \varepsilon \sin \pi \sin ZM}$$

donc $\operatorname{tang} VMS' = \operatorname{tang}(VMZ + ZMS') =$

$$\frac{\operatorname{tang} VMZ + \operatorname{tang} ZMS'}{1 - \operatorname{tang} VMZ \operatorname{tang} ZMS'} = \frac{\sin VMZ}{\cos VMZ} +$$

$$\frac{\sin VMS \cos VMZ \sin MS - \sin VMZ \cos VMS \sin MS}{(\cos VMS \cos VMZ + \sin VMS \sin VMZ)\sin MS - \varepsilon \sin \pi \sin MZ} \cdot \left(1 - \frac{(\sin VMS \sin VMZ \cos VMZ \sin MS - \sin VMZ^2 \cos VMS \sin MS)}{(\cos VMS \cos VMZ^2 + \sin VMS \sin VMZ \cos VMZ)\sin MS - \varepsilon \sin \pi \cos VMZ \sin MZ}\right)$$

$= (\sin VMZ \cos VMZ \cos VMS \sin MS + \sin VMS \sin MS \sin VMZ^2 - \varepsilon \sin \pi \sin VMZ \sin MZ - \sin VMZ \cos VMZ \cos VMS \sin MS + \sin VMS \sin MS \cos VMZ^2) : (\cos VMS \sin MS \cos VMZ^2 + \sin VMS \sin MS \sin VMZ \cos VMZ - \varepsilon \sin \pi \cos VMZ \sin MZ + \cos VMS \sin MS \sin VMZ^2 - \sin VMS \sin MS \sin VMZ \cos VMZ) =$

$$\frac{\sin VMS \sin MS - \varepsilon \sin \pi \sin VMZ \sin MZ}{\cos VMS \sin MS - \varepsilon \sin \pi \cos VMZ \sin MZ} =$$

$\frac{m - \pi\mu}{n - \pi\nu}$, en adoptant les dénominations de M. de la Grange expliquées ci-dessus, on aura donc $\frac{m - \pi\mu}{n - \pi\nu} = \frac{m^I}{n^I} = \operatorname{tang} VMS^I$, donc

$\frac{r \sin VMS^I}{r^I} = \frac{m^I}{\sqrt{m^{I2} + n^{I2}}}$, or $m^{I2} + n^{I2} =$ $m^2 - 2\pi\mu m + \pi^2\mu^2 + n^2 - 2\pi\nu n + \pi^2\nu^2$. Mais il faut remarquer que $l^2 + m^2 + n^2 = \cos MS^2 + (\sin VMS^2 + \cos VMS^2) \sin MS^2 = \sin MS^2$

$+ \cos MS^2 = 1$, & de même $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \cos MZ^2 + (\sin VMZ^2 + \cos VMZ^2) \sin MZ^2 = \sin MZ^2 + \cos MZ^2 = 1$, donc $m^2 + n^2 = 1 - l^2$ & $\mu^2 + \nu^2 = 1 - \lambda^2$, donc $m'^2 + n'^2 = 1 - l^2 - 2\pi(\mu m + \nu n) + \pi^2(1 - \lambda^2)$.

Mais l'on a tang $ZMS = \dfrac{\frac{m}{n} - \frac{\mu}{\nu}}{1 + \frac{m\mu}{n\nu}} =$

$\dfrac{m\nu - \mu n}{m\mu + n\nu}$, donc $\cos ZMS =$

$$\frac{m\mu + n\nu}{\sqrt{m^2\nu^2 - 2mn\mu\nu + n^2\mu^2 + m^2\mu^2 + 2mn\mu\nu + n^2\nu^2}}$$

$$= \frac{m\mu + n\nu}{\sqrt{(m^2 + n^2)(\mu^2 + \nu^2)}} = \frac{m\mu + n\nu}{\sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - l^2)}}$$

$= \dfrac{m\mu + n\nu}{\sin MZ \sin MS^1}$, donc $m\mu + n\nu = \cos ZMS \sin MZ \sin MS$, donc $\cos ZS = \cos ZMS \sin MZ \sin MS + \cos MZ \cos MS = m\mu + n\nu + l\lambda$, donc $m\mu + n\nu = \cos ZS - l\lambda$, donc $m'^2 + n'^2 = 1 - l^2 + \pi^2(1 - \lambda^2) - 2\pi(\cos ZS - l\lambda) = 1 - 2\pi \cos ZS + \pi^2 - (l^2 + \pi^2\lambda^2 - 2l\lambda\pi) = 1 - 2\pi\cos ZS + \pi^2 - (l - \pi\lambda)^2 = \dfrac{r'^2}{r^2} - \dfrac{r'^2}{r^2}\cos MS'^2 = \dfrac{r'^2}{r^2}\sin MS'^2$,

donc $\sqrt{m'^2 + n'^2} = \dfrac{r'}{r} \sin MS'$, donc $\dfrac{r}{r'} \sin VMS' = \dfrac{m'}{r' \sin MS'}$ & $m' = \sin VMS' \sin MS'$ donc

$$n^{\mathrm{I}} = \frac{m^{\mathrm{I}}}{\tang \; V \; M \; S^{\mathrm{I}}} = \cos V \, M \, S^{\mathrm{I}} \; \sin M S^{\mathrm{I}}.$$

En procédant de même pour l'aſtre L que la parallaxe fait paroître en L^{I} on aura, $\cos M L^{\mathrm{I}} = L^{\mathrm{I}} = \frac{r}{r^{\mathrm{I}}} (L - \Pi \lambda)$, $\frac{M - \Pi \mu}{N - \Pi \nu} = \frac{M^{\mathrm{I}}}{N^{\mathrm{I}}}$ (Π étant le ſinus de la parallaxe horizontale de l'aſtre L), d'où l'on tire comme ci-deſſus $M^{\mathrm{I}} = \sin V M L^{\mathrm{I}} \sin M L^{\mathrm{I}}$, $N^{\mathrm{I}} = \cos V M L^{\mathrm{I}} \sin M L^{\mathrm{I}}$. Maintenant dans le triangle $S^{\mathrm{I}} M L^{\mathrm{I}}$, on a par le troiſieme Cas des ſolutions analytiques $\cos S^{\mathrm{I}} L^{\mathrm{I}} = \cos S^{\mathrm{I}} M L^{\mathrm{I}} \sin M S^{\mathrm{I}} \sin M L^{\mathrm{I}} + \cos M S^{\mathrm{I}} \cos M L^{\mathrm{I}}$, or $\cos S^{\mathrm{I}} M L^{\mathrm{I}} = \cos (V M L^{\mathrm{I}} - V M S^{\mathrm{I}}) = \cos V M L^{\mathrm{I}} \cos V M S^{\mathrm{I}} + \sin V M L^{\mathrm{I}} \sin V M S^{\mathrm{I}}$, mais $\cos V M L^{\mathrm{I}} = \frac{N^{\mathrm{I}}}{\sin M L^{\mathrm{I}}}$, $\cos V M S^{\mathrm{I}} = \frac{n^{\mathrm{I}}}{\sin M S^{\mathrm{I}}}$; donc $\cos V M L^{\mathrm{I}}$

$\cos V M S^{\mathrm{I}} = \frac{N^{\mathrm{I}} \; n^{\mathrm{I}}}{\sin M L^{\mathrm{I}} \; \sin M S^{\mathrm{I}}}$, de même $\sin$

$V M L^{\mathrm{I}} = \frac{M^{\mathrm{I}}}{\sin M L^{\mathrm{I}}}$, $\sin V M S^{\mathrm{I}} = \frac{m^{\mathrm{I}}}{\sin M S^{\mathrm{I}}}$ donc,

$\sin V M L^{\mathrm{I}} \sin V M S^{\mathrm{I}} = \frac{M^{\mathrm{I}} \; m^{\mathrm{I}}}{\sin M L^{\mathrm{I}} \; \sin M S^{\mathrm{I}}}$; donc en ſubſtituant ces valeurs, on a $\cos S^{\mathrm{I}} L^{\mathrm{I}} = M^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{I}} + N^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{I}} + L^{\mathrm{I}} l^{\mathrm{I}}$, ce qui eſt une expreſſion bien ſimple de la valeur de $S^{\mathrm{I}} L^{\mathrm{I}}$ diſtance apparente des aſtres, ce qu'il s'agiſſoit de trouver. Il eſt aiſé de lui donner la forme que trouve M. de la Grange, qui fait $p^{\mathrm{I}} = \frac{m^{\mathrm{I}}}{l^{\mathrm{I}}}$, $q^{\mathrm{I}} = \frac{n^{\mathrm{I}}}{l^{\mathrm{I}}}$, $P^{\mathrm{I}} = \frac{M^{\mathrm{I}}}{L^{\mathrm{I}}}$, $Q^{\mathrm{I}} =$

$\frac{N'}{L'}$, donc $M'm' = P'p'L'l'$, $N'n' = Q'q'L'l'$, donc cof $S'L' = L'l'(1 + P'p' + Q'q')$, mais $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$ donc $l'^2(1 + p'^2 + q'^2) = 1$ & $L'^2 + M'^2 + N'^2 = 1$, donc $L'^2(1 + P'^2 + Q'^2) = 1$, donc $L'^2 l'^2 =$

$$\frac{1}{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)}$$ & $L'l' =$

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)}}.$$ Donc cof $S'L' = $ cof $\Sigma' =$

$$\frac{1 + P'p' + Q'q'}{\sqrt{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)}},$$ comme le trouve M. de la Grange. S'il faut avoir la tangente de cette diſtance apparente, on aura tang $\Sigma' =$

$$\frac{\sqrt{1 - \text{cof}\,\Sigma'^2}}{\text{cof}\,\Sigma'},$$ mais $1 - \text{cof}\,\Sigma'^2 = 1 - (M'^2 m'^2 + N'^2 n'^2 + L'^2 l'^2 + 2(M'm'N'n' + M'm'L'l' + N'n'L'l')) = 1 - L'^2 l'^2 (1 + P'^2 p'^2 + Q'^2 q'^2 + 2(P'p'Q'q' + P'p' + Q'q')) = 1 -$

$$\frac{(1 + P'^2 p'^2 + Q'^2 q'^2 + 2(P'p'Q'q' + P'p' + Q'q'))}{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)}$$

$$= \frac{p'^2 + P'^2 + q'^2 + Q'^2 P'^2 q'^2 + Q'^2 p'^2 - 2(P'p'Q'q' + P'p' + Q'q'}{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)}$$

$$= \frac{(P' - p')^2 + (Q' - q')^2 + (P'q' - Q'p')^2}{(1 + p'^2 + q'^2)(1 + P'^2 + Q'^2)},$$

donc tang $\Sigma' =$

$$\frac{\sqrt{(P^1 - p^1)^2 + (Q^1 - q^1)^2 + (P^1 q^1 - Q^1 p^1)^2}}{1 + P^1 p^1 + Q^1 q^1}$$

comme le dit M. de la Grange.

On peut tirer aisément de cette méthode la parallaxe de longitude dont nous avons donné plus haut la démonstration d'après les formules de M. Lexell. Dans le triangle $M V S^1$ où l'on connoît deux côtés VM, MS^1 & l'angle compris $V M S^1$ on aura tang $M V S^1 =$

$$\frac{\sin V M S^1 \sin M S^1}{\cos M S^1 \sin V M - \cos V M S^1 \sin M S^1 \cos V M}$$

$$= \frac{m^1}{l^1 \sin V M - n^1 \cos V M} =$$

$$\frac{m - \pi u}{(l - \pi\lambda) \sin V M - (n - \pi\nu) \cos V M} =$$

$$\frac{\sin V M S \sin M S - \pi \sin V M Z \sin M Z}{\cos M S \sin V M - \cos V M S \sin M S \cos V M - \pi (\cos M Z \sin V M - \cos V M Z \sin M Z \cos V M)}.$$

Mais $\sin V M S \sin M S = \sin M V S \sin V S$; sin $\sin V M Z \sin M Z, = \sin M V Z \sin V Z$, $\cos M S = \cos M V S \sin V S \sin V M + \cos V S \cos V M$, $\cos M Z = \cos M V Z \sin V Z \sin V M + \cos V Z \cos V M$; $\cos V M S \sin M S. = \cos V S \sin V M - \cos M V S \sin V S \cos V M$, $\cos V M Z \sin M Z = \cos V Z \sin V M - \cos M V Z \sin V Z \cos V M$. Donc substituant ces valeurs nous aurons; tang $MVS^1 = (\sin M V S \sin V S - \pi \sin M V Z \sin V Z) : (\cos M V S \sin V S \sin V M^2 + \cos V S \sin V M \cos V M - \cos V S \sin V M \cos V M + \cos M V S$

sin

$\sin VS \cos VM^2 - \pi (\cos MVZ \sin VZ \sin$
$\sin VM^2 + \cos VZ \sin VM \cos VM - \cos VZ$
$\sin VM \cos VM + \cos MVZ \sin VZ \cos VM^2))$

$$= \frac{\sin MVS \sin VS + \pi \sin MVZ \sin VZ}{\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ}.$$

Donc $\operatorname{tang} SVS^1 = \operatorname{tang} (MVS - MVS^1)$

$$= \frac{\operatorname{tang} MVS - \operatorname{tang} MVS^1}{1 + \operatorname{tang} MVS \operatorname{tang} MVS^1} = \left(\frac{\sin MVS}{\cos MVS} - \left(\frac{\sin MVS \sin VS - \pi \sin MVZ \sin VZ}{\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ}\right)\right) :$$

$$\left(1 + \frac{\sin MVS^2 \sin VS - \pi \sin MVS \sin MVZ \sin VZ}{\cos MVS^2 \sin VS - \pi \cos MVS \cos MVZ \sin VZ}\right)$$

$= (\sin MVS \cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin MVS \sin VZ - \sin MVS \cos MVS \sin VS + \pi \sin MVZ \cos MVS \sin VZ) : (\sin VS \cos MVS^2 - \pi \cos MVS \cos MVZ \sin VZ + \sin VS \sin MVS^2 - \pi \sin MVS \sin MVZ \sin VZ) = \pi (\sin MVZ \cos MVS - \cos MVZ \sin MVS) \sin VZ : (\sin VS - \pi (\cos MVS \cos MVZ + \sin MVS \sin MVZ) \sin VZ$. Or $\sin MVZ \cos MVS - \cos MVZ \sin MVS = \sin (MVZ - MVS) = \sin ZVS$ & $\cos MVS \cos MVZ + \sin MVS \sin MVZ = \cos (MVZ - MVS) = \cos ZVS$. Donc $\operatorname{tang} SVS^1$

$$= \frac{\pi \sin ZVS \sin VZ}{\sin VS - \pi \cos ZVS \sin VZ},$$

ce qui est la formule de M. Lexell dont nous avons donné la démonstration ; on remarquera seulement que le point que M. Lexell appelle M, je l'appelle ici S, & que e sin π de M. Lexell, je l'appelle ici π.

Pour trouver la parallaxe de latitude, on considerera que dans le même triangle $V M S^{1}$, on aura par le troisieme Cas des solutions analytiques $\cos V S^{1}$ $\cos V M S^{1} \sin M S^{1} \sin V M + \cos M S^{1} \cos V M$ $= n^{1} \sin V M + l^{1} \cos V M = \frac{r}{r^{1}}((n - \pi \nu)$ $\sin V M + (l - \pi \lambda) \cos V M) = \frac{r}{r^{1}}(\cos V M S$ $\sin M S \sin V M + \cos M S \cos V M - \pi (\cos$ $V M Z \sin M Z \sin V M + \cos M Z \cos V M)) =$ $\frac{r}{r^{1}}(\cos V S - \pi \cos V Z) =$

$$\frac{\cos V S - \pi \cos V Z}{\sqrt{1 - 2 \pi \cos Z S + \pi^{2}}} =$$

$$\frac{\cos V S - \pi \cos V Z) \sin Z S^{1}}{\sin Z S}.$$

Mais dans le triangle $Z V S^{1}$, $\sin Z S^{1} : \sin V S^{1} = \sin Z V S^{1} : \sin V Z S$, donc $\sin Z S^{1} = \frac{\sin V S^{1} \sin Z V S^{1}}{\sin V Z S}$ & $\cos V S^{1} = \frac{(\cos V S - \pi \cos V Z) \sin V S^{1} \sin Z V S^{1}}{\sin V Z \sin Z S}$, donc $\cot V S^{1} = \frac{(\cos V S - \pi \cos V Z) \sin Z V S^{1}}{\sin V Z \sin Z S}$, mais dans le triangle $Z V S$, $\sin Z S : \sin V S = \sin Z V S : \sin V Z S$; donc $\sin Z S \sin V Z S = \sin V S \sin Z V S$ & $\cot V S^{1} =$

$$\frac{(\cos V S - \pi \cos V Z) \sin Z V S^{1}}{\sin V S \sin Z V S} =$$

$$\frac{\cot VS \sin ZVS'}{\sin ZVS}\left(1 - \frac{\pi \cos VZ}{\cos VS}\right).$$ C'est la formule de M. Lexell.

Après avoir montré comment on peut tirer les formules de M. Lexell de la méthode que j'ai employée pour démontrer les résultats de M de la Grange, je vais faire voir comment on peut réciproquement parvenir au résultats de M. de la Grange par le moyen des formules de M. Lexell. Dans le triangle MVS', je connois l'angle MVS' puisque je connois la parallaxe de longitude SVS', le côté VS' puisque je connois la parallaxe de latitude SS' & le côté VM. J'aurai donc $\cos MS' = \cos MVS' \sin VS' \sin VM + \cos VS' \cos VM$. Or $\tang MVS' = \frac{\sin MVS \sin VS - \pi \sin MVZ \sin VZ}{\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ}$, d'où je tire $\sin MVS' =$

$$\frac{\sin MVS \sin VS - \pi \sin MVZ \sin VZ}{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}}$$

& $\cos MVS' =$

$$\frac{\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ}{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}};$$

donc $\sin ZVS' = \sin(ZVM - MVS') = \sin ZVM \cos MVS' - \cos ZVM \sin MVS' =$

$$\frac{\sin VS \sin ZVS}{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}}.$$

Donc $\cot VS' = \frac{(\cos VS - \cos VZ) \sin ZVS'}{\sin VS \sin ZVS} =$

$$\frac{\cos VS - \pi \cos VZ}{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}}$$

Donc $\cos VS^1 = \dfrac{\cos VS - \pi \cos VZ}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}}$ & sin $VS^1 =$

$$\frac{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}}$$

Donc en substituant les valeurs, on aura $\cos MS^1 = (\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ) \times \sin VM \sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS} :$

$$\frac{\sqrt{\sin VS^2 + \pi^2 \sin VZ^2 - 2\pi \sin VZ \sin VS \cos ZVS}}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}}$$

$$+ \frac{(\cos VS - \pi \cos VZ) \cos VM}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}} =$$

$$\frac{(\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ) \sin VM}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}}$$

$$+ \frac{(\cos VS - \pi \cos VZ) \cos VM}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}} = \cos MVS$$

$\sin VS \sin VM + \cos VS \cos VM - \pi (\cos MVZ \sin VZ \sin VM + \cos VZ \cos VM) :$

$\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS} =$

$$\frac{\cos MS - \pi \cos ZM}{\sqrt{1 + \pi^2 - 2\pi \cos ZS}} = \frac{r}{r^1}(l - \pi\lambda) = l^1,$$

en employant les dénominations exposées ci-dessus.

Dans le même triangle MVS^1 j'ai tang $VMS^1 =$

$$\frac{\sin MVS' \sin VS}{\cos VS' \sin VM - \cos MVS' \sin VS' \cos VM}$$
= (en substituant pour sin & cos MVS' sin & cos VS' leurs valeurs & réduisant)

$$\frac{\left(\frac{(\sin MVS \sin VS - \pi \sin MVZ \sin VZ)}{\sqrt{1+\pi^2 - 2\pi \cos ZS}}\right)}{\left(\frac{(\cos VS - \pi \cos VZ) \sin VM - (\cos MVS \sin VS - \pi \cos MVZ \sin VZ)}{\sqrt{1+\pi^2 - 2\pi \cos ZS}} \cos VM\right)}$$

$= (\sin MVS \sin VS - \pi \sin MVZ \sin VZ) : (\cos VS \sin VM - \cos MVS \sin VS \cos VM - \pi (\cos VZ \sin VM - \cos MVZ \sin VZ \cos VM) = (\sin VMS \sin MS - \pi \sin VMZ \sin MZ) : (\cos VS \sin VM - \cos MVS \sin VS \cos VM - \alpha (\cos VZ \sin VM - \cos MVZ \sin VZ \cos VM)$ à cause de $\sin MVS : \sin VMS = \sin MS : \sin VS$ & de $\sin MVZ : \sin VMZ = \sin MZ : \sin VZ$. On a ensuite par le cinquieme Cas des solutions analytiques $\cos MVS =$
$$\frac{\cos MS - \cos VM \cos VS}{\sin VM \sin VS}$$
& par le troisieme Cas des solutions analytiques $\cos VS = \cos VMS \sin VM \sin MS + \cos VM \cos MS$, donc $\cos VS \sin VM - \cos MVS \sin VS \cos VM = \cos VS \sin VM - \frac{\cos MS \cos VM}{\sin VM}$

$$+ \frac{\cos VM^2 \cos VS}{\sin VM} =$$

$$\frac{\operatorname{cof} VS \operatorname{cof} VM^2 + \operatorname{cof} VS \operatorname{fin} VM^2 - \operatorname{cof} MS \operatorname{cof} VM}{\operatorname{fin} VM}$$

$$= \frac{\operatorname{cof} VS - \operatorname{cof} MS \operatorname{cof} VM}{\operatorname{fin} VM} =$$

$$\frac{\operatorname{cof} VMS \operatorname{fin} VM \operatorname{fin} MS + \operatorname{cof} VM \operatorname{cof} VMS - \operatorname{cof} VM \operatorname{cof} MS}{\operatorname{fin} VM}$$

$= \operatorname{cof} VMS \operatorname{fin} MS$. On trouve précifément de même en fubftituant le point Z au point S, $\operatorname{cof} VZ \operatorname{fin} VM - \operatorname{cof} MVZ \operatorname{fin} VZ \operatorname{cof} VM = \operatorname{cof} VMZ \operatorname{fin} MZ$, donc $\operatorname{tang} VMS^1 =$

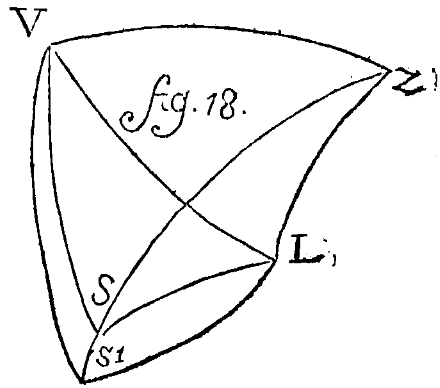
$$\frac{\operatorname{fin} VMS \operatorname{fin} MS - \pi \operatorname{fin} VMZ \operatorname{fin} MZ}{\operatorname{cof} VMS \operatorname{fin} MS - \pi \operatorname{cof} VMZ \operatorname{fin} MZ} =$$

$\frac{m - \pi\mu}{n - \pi\mu} = \frac{m^1}{n^1}$, en employant les dénominations expofées ci-deffus.

Les formules de M. Lexell nous conduifent donc aux mêmes réfultats pour $\operatorname{cof} MS^1$ & $\operatorname{tang} VMS^1$ que la méthode employée plus haut, on trouveroit de même $\operatorname{cof} ML^1$ & $\operatorname{tang} VML^1$ & l'on en conclurroit de même $\operatorname{tang} S^1L^1$. Il ne refte donc rien à defirer là-deffus, puifque j'ai démontré directement les deux méthodes, & qu'enfuite je les ai démontrées alternativement l'une par l'autre.

S'il s'agit d'appliquer cette méthode à l'obfervation des occultations des étoiles fixes par la lune, les réfultats fe fimplifient beaucoup, parce que la parallaxe des étoiles fixes eft nulle. On a donc dans ce cas $\pi = o$, ce qui donne $R^1 = R$, $L^1 = L$,

$M^1 = M$, $N^1 = N$, donc $\text{cof}\, S^1 L^1 = \text{cof}\, LS^1$ (puifque $L L^1 = o$) $= L^1 l^1 + M^1 m^1 + N^1 n^1$ $= \frac{r}{r^1} (L l - \pi L \lambda + M m - \pi M \mu + N n$ $- \pi N \nu) = \frac{\text{cof}\, L S - \pi\, \text{cof}\, Z S}{\sqrt{1 - 2\pi\, \text{cof}\, Z S + \pi^2}}$. Mais pour aller plus loin, faifons que le point M coïncide avec le point L, alors $M L = o$ & $V M L = o$, $M L^1 = o$ & $V M L^1 = o$, donc $M^1 = o$, $N^1 = o$, & $L^1 = 1$, donc $\text{cof}\, S^1 L = L^1 l^1 + M^1 m^1 + N^1 n^1 = l^1$ & $\text{tang}\, S^1 L = \text{tang}\, \Sigma^1 =$



$$\frac{\sqrt{1 - l^{12}}}{l^1} = \frac{\sqrt{m^{12} + n^{12}}}{l^1} = \frac{\sqrt{(m - \pi\mu)^2 + (n - \pi\nu)^2}}{l - \pi\lambda}.$$ Nous avons ici π = finus de la parallaxe horizontale; foit cette parallaxe $= \psi$, nous aurons $\pi\mu = \mu\, \text{fin}\, \psi$, $\pi\nu = \nu\, \text{fin}\, \psi$ & $\pi\lambda = \lambda\, \text{fin}\, \psi$; prenons au lieu de $\mu\, \text{fin}\, \psi$, $\text{fin}\, \mu\psi$ & ainfi de fuite, ce qui fe peut fans erreur fenfible, & nous aurons $\text{tang}\, \Sigma^1 =$ $\frac{\sqrt{(m - \text{fin}\, \mu\psi)^2 + (n - \text{fin}\, \nu\psi)^2}}{l - \text{fin}\, \lambda\psi}$ = (en

substituant les valeurs de l, m, n)

$$\frac{\sqrt{(\sin VLS \sin LS - \sin \mu \psi)^2 + (\cos VLS \sin LS - \sin \nu \psi)^2}}{\cos LS - \sin \lambda \psi}.$$

Or dans le triangle V L S, nous avons sin V L S sin L S = sin L V S sin V S, cos V S = cos V L S sin L S sin V L + cos L S cos V L; cos L S = cos L V S sin V S sin V L + cos V S cos V L, donc cos V L S sin L S =

$$\frac{\cos VS - \cos LS \cos VL}{\sin VL} =$$

$$\frac{\cos VS - \cos LVS \sin VS \sin VL \cos VL - \cos VS \cos VL^2}{\sin VL}$$

$= \cos VS \sin VL - \cos LVS \sin VS \cos VL.$

Substituant ces valeurs dans notre formule, nous aurons tang $\Sigma' =$

$$\frac{\sqrt{(\sin LVS \sin VS - \sin \mu \psi)^2 + (\cos VS \sin VL - \cos LVS \sin VS \cos VL - \sin \nu \psi)^2}}{\cos LVS \sin VS \sin VL + \cos VS \cos VL - \sin \lambda \psi}$$

ou en mettant pour cos L V S sa valeur $1 - 2 \sin \frac{1}{2}$ L V S, tang $\Sigma' =$

$$\frac{\sqrt{(\sin LVS \sin VS - \sin \mu \psi)^2 + (\cos VS \sin VL - \sin VS \cos VL + 2 \sin VS \cos VL \sin \frac{1}{2} LVS^2 - \nu \psi)^2}}{\sin VS \sin VL + \cos VS \cos VL - 2 \sin VS \sin VL \sin \frac{1}{2} LVS^2 - \sin \lambda \psi}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin LVS \sin VS - \sin \mu \psi)^2 + (\sin (VL - VS) + 2 \sin VS \cos VL \sin \frac{1}{2} LVS^2 - \sin \nu \psi)^2}}{\cos (VL - VS) - 2 \sin VS \sin VL \sin \frac{1}{2} LVS^2 - \sin \lambda \psi}$$

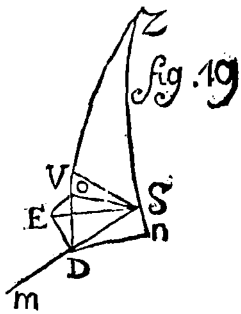
ou en faisant L V S = differ. des longitudes $= t$; V L — VS = differ. des latitudes $= u$, V L = compl.

compl. latitude = compl. B, VS = compl. b

$$\text{tang}\ \Sigma^{1} = \frac{\sqrt{(\text{fin}\ t\ \text{cof}\ b - \text{fin}\ \mu\psi)^2 + (\text{fin}\ u + 2\ \text{cof}\ b\ \text{fin}\ B\ \text{fin}\ \tfrac{1}{2}\ t^2 - \text{fin}\ \nu\psi)^2}}{\text{cof}\ u - 2\ \text{cof}\ b\ \text{cof}\ B\ \text{fin}\ \tfrac{1}{2}\ t^2 - \text{fin}\ \lambda\psi},$$

ce qui eſt la formule que trouve M. de la Grange, s'il l'on fait dans cette formule $\pi = o$, & qu'on remarque que j'appelle ici λ ce qu'il appelle λ cof B + ν fin B, & ν ce qu'il appelle ν cof B — λ fin B. Maintenant ſoit D^1 le diametre apparent de la lune & d ſon diametre horizontal, on a comme nous l'avons vu plus haut $\frac{r}{r^1} = \frac{\text{fin}\ d^1}{\text{fin}\ d}$ donc fin $d^1 = \frac{r}{r^1}$ fin d, mais nous avons dans ce cas cof $\Sigma^1 = l^1 = \frac{r}{r^1}(l - \pi\lambda)$ donc $\frac{r}{r^1} = \frac{\text{cof}\ \Sigma^1}{l - \pi\lambda}$ & fin $d^1 = \frac{\text{fin}\ d\ \text{cof}\ \Sigma^1}{l - \pi\lambda}$, mais l'immerſion ou l'émerſion de l'étoile ſe fait quand $\Sigma^1 = d^1$, donc alors fin $d^1 =$ fin $\Sigma^1 = \frac{\text{fin}\ d\ \text{cof}\ \Sigma^1}{l - \pi\lambda}$ ou tang $\Sigma^1 = \frac{\text{fin}\ d}{l - \pi\lambda}$, ou en mettant pour tang Σ^1 ſa valeur, & élévant au quarré, on a fin $d^2 = (\text{fin}\ t\ \text{cof}\ b - \text{fin}\ \mu\psi)^2 + (\text{fin}\ u + 2\ \text{fin}\ B\ \text{cof}\ b\ \text{fin}\ \tfrac{1}{2}\ t^2 - \text{fin}\ \nu\psi)^2$, ce qui s'accorde avec la formule de M. de la Grange, pour vû qu'on y faſſe D = o & $\pi = o$.

Pour les éclipſes de ſoleil, & les paſſages de vénus & de mercure ſur le diſque de cet aſtre, on peut employer l'approximation ſuivante.



Soit Z le zénith, S le soleil, V la planete, S n la parallaxe du soleil, n D la distance apparente des astres, menons DE égale & parallele à Sn, on aura S E = D n Maintenant menons l'arc de cercle E o du centre D, en sorte que D E soit égale à D o & menons S o. Dans le triangle S E o, on a $SE < So + Eo$, donc $SE - So < Eo$, mais $Eo = DE$ sin $EDo < DE$ sin DZS (car $ZSD = EDm$, donc $ZSD + ZDS + SDo = 180°$, mais $ZSD + ZDS + DZS > 180°$, parce que les trois angles d'un triangle sphérique valent toujours plus de deux droits, donc $EDo <$ DZS). Mais sin $DZS = \frac{\text{sin } SD}{\text{sin } ZS}$ (en supposant S D perpendiculaire entre les jambes de l'angle, ce qui est le cas le plus défavorable) donc $Eo <$ $\frac{DE \text{ sin } SD}{\text{sin } ZS}$, or $DE = \pi$ sin ZS (π étant la parallaxe horizontale du soleil). Donc $Eo < \pi$ sin SD, mais $\pi = 8'', 5$, & sin SD = sin $34'$ dans les cas les plus défavorables, $= \frac{1}{100}$ environ, donc $Eo < \frac{8'', 5}{100} < \frac{510'''}{100} < 5''', 1$. Donc $SE - So$ $< 5''', 1$ = à 4 ou cinq tierces tout au plus. Donc nous pouvons prendre S o au lieu de S E sans craindre une erreur qui ſurpaſſe 4 ou 5 tierces. Alors D o étant $= \Pi$, on aura V $o = \pi - \Pi$, & on calculera S o précifément comme on a calculé S D dans le cas précédent de l'occultation des fixes (cette diſtance s'appelloit alors L S') excepté qu'au lieu de π il faut mettre $\pi - \Pi$, comme il eſt évident par la ſeule inſpection de la figure. Nous aurons donc

$$\text{tang } S\,o = \frac{\sqrt{(m - (\pi - \Pi)\mu)^2 + (n - (\pi - \Pi)\nu)^2}}{l - \pi\lambda},$$

ce qui eſt la formule abrégée qu'obtient M. de la Grange par des conſidérations purement analytiques, & ſur laquelle on pratiquera les mêmes opérations que ſur celles des occultations des fixes. On raiſonnera de même pour les occultations des planetes par la lune. Ainſi quelques conſidérations trigonométriques fort ſimples donnent les mêmes réſultats que la profonde analyſe de M. de la Grange.

Ces méthodes pour calculer la diſtance apparente de deux aſtres par le moyen de leur diſtance vraie, ou réciproquement, ont excité à juſte titre l'attention des géometres & des aſtronomes, puiſque c'eſt par là qu'on trouve avec le plus de facilité & de ſûreté les longitudes en mer. On trouve dans la connoiſſance des tems de Paris une ſemblable méthode pour trouver la diſtance de la lune au ſoleil ou aux étoiles, qui eſt de M. le chevalier de Borda, & qui ne repoſant que ſur quelques propoſitions trigonométriques fort ſimples, mérite d'être expoſée ici. L'obſervation donne immédiatement la diſtance apparente des centres du ſoleil & de la lune par exemple, & les hauteurs apparentes de ces mêmes centres. En y appliquant la parallaxe & la réfraction, on en tire les hauteurs vraies, & il s'agit d'avoir actuellement la distance vraie des centres. Soit D la distance apparente des centres, a & b les hauteurs apparentes, ϕ & β les hauteurs vraies, x la distance cherchée. Soit de plus Z le zénith, & par conséquent $ZS^I =$ compl. a $ZL^I =$ compl. b, $ZS =$ compl. ϕ, $ZL =$ compl. β, $S^I L^I = D$, $SL = x$; dans le triangle sphérique $ZS^I L^I$ on connoît les trois côtés, on aura donc par le cinquieme Cas des solutions analytiques $\cos S^I Z L^I = \frac{\cos S^I L^I - \cos ZS^I \cos ZL^I}{\sin ZS^I \sin ZL^I}$ $= \frac{\cos D - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}$. Maintenant dans le triangle SZL on connoît deux côtés ZS & ZL & l'angle compris SZL, on aura donc par le troisieme Cas des solutions analytiques le troisieme côté, savoir $\cos SL = \cos x = \cos SZL \sin ZS \sin ZL + \cos ZS \cos ZL = \cos S^I Z L^I \cos \phi \cos \beta + \sin \phi \sin \beta = \frac{\cos \phi \cos \beta (\cos D - \sin a \sin b)}{\cos a \cos b} + \sin \phi \sin \beta$. Or $\cos x = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} x^2$ ou $\sin \frac{1}{2} x^2 = \frac{1 - \cos x}{2}$, donc $\sin \frac{1}{2} x^2 =$

Fig. 20.

$$\frac{1-\sin\varphi\sin\beta}{2} - \frac{\cos\varphi\cos\beta(\cos D-\sin a\sin b)}{\cos a\cos b}$$

$$= \frac{1-\sin\varphi\sin\beta+\cos\varphi\cos\beta}{2}$$

$$- \frac{\cos\varphi\cos\beta(\cos D-\sin a\sin b+\cos a\cos b)}{2\cos a\cos b}$$

$$= \frac{1+\cos(\varphi+\beta)}{2} -$$

$$\frac{\cos\varphi\cos\beta(\cos D+\cos(a+b))}{2\cos a\cos b}.$$ Or nous savons que $\cos\frac{1}{2}x^2 = \frac{1+\cos x}{2}$, & que $\cos A + \cos B = 2\cos(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\cos(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$. Faisant donc ces réductions, nous aurons $\sin\frac{1}{2}x^2 =$

$$\cos\left(\frac{\varphi+\beta}{2}\right)^2 -$$

$$\frac{\cos\varphi\cos\beta\cos\left(\frac{a+b+D}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-D}{2}\right)}{\cos a\cos b}.$$

C'est la formule qu'à donnée M. le chevalier de Borda & qui se trouve dans la connoissance des tems de 1780, p. 269. Soit $\cos M =$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{(a+b+D)}{2}\cos\frac{(a+b-D)}{2}\cos\varphi\cos\beta}{\cos a\cos b\cos\left(\frac{\varphi+\beta}{2}\right)^2}},$$

on aura $\cos M^2 =$

$$\frac{\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+D}{2}\right)\operatorname{cof}\left(\frac{a+b-D}{2}\right)\operatorname{cof}\Phi\operatorname{cof}\beta}{\operatorname{cof}a\operatorname{cof}b\operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)},$$

donc $\operatorname{fin} M^2 = 1 - \operatorname{cof} M^2 =$

$$1 - \frac{\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+D}{2}\right)\operatorname{cof}\left(\frac{a+b-D}{2}\right)\operatorname{cof}\Phi\operatorname{cof}\beta}{\operatorname{cof}a\operatorname{cof}b\operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)^2}$$

& $\operatorname{fin} M^2 \operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)^2 = \operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)^2 -$

$$\frac{\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+D}{2}\right)\operatorname{cof}\left(\frac{a+b-D}{2}\right)\operatorname{cof}\Phi\operatorname{cof}\beta}{\operatorname{cof}a\operatorname{cof}b}$$

$= \operatorname{fin}\frac{1}{2}x^2$; donc $\operatorname{fin}\frac{1}{2}x = \operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)\operatorname{fin} M$.

Nous aurons donc $l \operatorname{fin}\frac{1}{2}x = l\operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)$ $+ l\operatorname{fin} M$ & $l\operatorname{cof} M = \frac{1}{2}\left(l\operatorname{cof}\left(\frac{a+b+D}{2}\right)\right.$ $+ l\operatorname{cof}\left(\frac{a+b-D}{2}\right) + l\,\Phi + l\operatorname{cof}\beta - l\operatorname{cof}a$ $\left.- l\operatorname{cof}b\right) - l\operatorname{cof}\left(\frac{\Phi+\beta}{2}\right)$. C'eſt là le développement de la formule néceſſaire pour la pratique, & en même tems l'explication de la regle donnée à l'endroit cité de la connoiſſance des tems. Connoiſſant la diſtance vraie des centres, on cherche dans les tables qu'on a publiées à cet effet à quelle heure cette diſtance a lieu pour Paris; puis on cherche l'heure vraie pour le lieu de l'obſervation, & la différence de ces tems donne la différence des méridiens. L'heure vraie pour le lieu de l'obſervation ſe trouve fort aiſément, car on connoît la diſtance du ſoleil au pole élevé, la latitude du lieu, & la hauteur vraie du centre du ſoleil. Soit P le pole de l'équateur, Z le zénith & S le ſoleil; ſoient de plus d la diſtance au pole, l la latitude, h la hauteur vraie, on aura $PS = d$, $PZ = 90^\circ - l$, $ZS = 90^\circ - h$. L'angle ZPS eſt ce qu'on appelle l'angle horaire, l'on aura donc par le cinquieme Cas des ſolutions analyt $\operatorname{cof} ZPS$

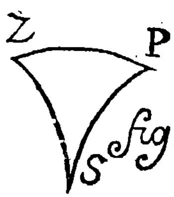


Fig. 21.

$$= \frac{\operatorname{cof}(90^\circ - h) - \operatorname{cof} d \operatorname{cof}(90^\circ - l)}{\operatorname{fin} d \operatorname{fin}(90^\circ - l)} = \frac{\operatorname{fin} h - \operatorname{cof} d \operatorname{fin} l}{\operatorname{fin} d \operatorname{cof} l}$$; donc $\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} ZPS^2 =$

$$\frac{1 - \operatorname{cof} ZPS}{2} = \frac{\operatorname{fin} d \operatorname{cof} l - \operatorname{fin} h + \operatorname{cof} d \operatorname{fin} l}{2 \operatorname{fin} d \operatorname{cof} l}$$

$$= \frac{\operatorname{fin}(d + l) - \operatorname{fin} h}{2 \operatorname{fin} d \operatorname{cof} l}.$$ Mais nous avons prouvé plus haut que $\operatorname{fin} A - \operatorname{fin} B = 2 \operatorname{cof}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{fin}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, donc $\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} ZPS^2 =$

$$\frac{\operatorname{cof}\left(\frac{d+l+h}{2}\right) \operatorname{fin}\left(\frac{d+l-h}{2}\right)}{\operatorname{fin} d \operatorname{cof} l}$$ & $\operatorname{fin} \tfrac{1}{2} ZPS =$

$$\frac{\sqrt{\operatorname{cof}\left(\frac{d+l+b}{2}\right)\operatorname{fin}\left(\frac{d+l-b}{2}\right)}}{\operatorname{fin} d \operatorname{cof} l}.$$ Donc l fin $\frac{1}{2}$

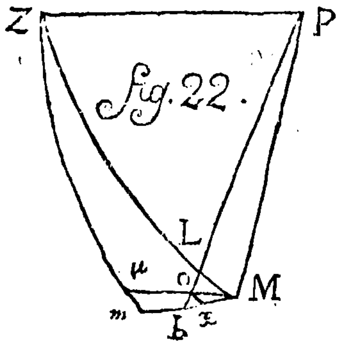
$ZPS = \frac{1}{2}$ (log. cof $\frac{d+l+b}{2}$ + l fin $\frac{d+l-b}{2}$ — l fin d — l cof l).

C'eft la regle qui eft donnée p. 268 de la connoiffance des tems. L'angle horaire trouvé étant converti en tems à raifon de 15° par heure donne l'heure vraie.

La parallaxe dont nous venons de nous occuper, produit la différence qui fe trouve entre le parallele vrai & le parallele apparent d'un aftre, dont la fituation apparente change pendant qu'il parcourt le fil d'un micrometre ou d'un réticule. M. de la Lande avoit donné § 2029 de fon Aftronomie, premiere édition, une regle pour trouver cette différence, & cette regle ne reffembloit point à celle qu'avoit donnée pour le même objet le célebre Mayer de Gœttingen. *M. de la Lande avoit cru* que *Mayer s'étoit* trompé, mais M. Lambert prouva dans les Ephémérides de *Berlin* pour 1776, que la formule de Mayer approchoit de l'exactitude autant que l'exigent les ufages aftronomiques, *& M.* de la Lande en a reconnu depuis la vérité. M. Lexell a très-bien développé toute cette matiere dans un beau Mémoire qui fe trouve parmi les Mémoires de Pétersbourg de 1774, & a pleinement confirmé les affertions de M. Lambert. Je vais chercher à démon-

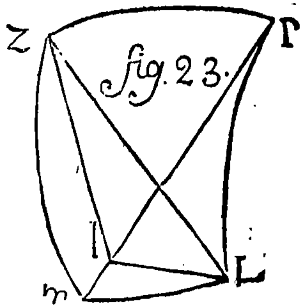
trer

trer la formule de Mayer auſſi ſimplement qu'il eſt poſſible. Soit P Z le méridien, Z L le vertical, & P L le cercle de déclinaiſon; le lieu vrai de l'aſtre étant en L, la parallaxe le fait paroître en M, ſi cette parallaxe ne varioit pas, l'aſtre paroîtroit décrire le parallele M μ, mais à cauſe de la variation



de la parallaxe, l'aſtre au lieu d'être en μ ſe trouve en m, & il s'agit de déterminer l'angle P M m que fait l'arc M m avec le cercle de déclinaiſon. Prolongeons P L juſqu'à ce qu'il coupe les arcs de grands cercles M μ, M m en o & b. L'angle P o M eſt droit, ce qui donne par le quatrieme Cas des tr. rect. ſin M o = ſin P M ſin M P L; or l'angle M P L étant ſuppoſé infiniment petit, on a ſin M o = M o = ſin P M ſin M P L. Or M o & M b pouvant être regardées comme des lignes droites, ſi dans le triangle M o b rectangle en o, on abbaiſſe la perpendiculaire $o\,x$, on aura $b\,x$ = M b — M o = $\frac{o\,x^2}{\text{M}\,o}$, donc M b = M o + $\frac{o\,x^2}{\text{M}\,o}$ = M o, $o\,x^2$ étant un infiniment petit du ſecond ordre, puiſque $o\,x$ eſt le ſinus d'un angle μ M m qui eſt déja infiniment petit; donc M o & M b ne different pas ſenſiblement; donc M b = ſin P M ſin M P L, donc l'angle P b M eſt ſenſiblement droit. On a donc par le quatrieme Cas des tr. rect. tang $P M m =$ $\frac{\cot M P L}{\cos P M}$, ou $\cot P M m = \frac{\cos P M}{\cot M P L} = \tang$ $M P L \cos P M = \tang \mu M m$. Si l'on fait $P Z = b$, $P L = a$, $P M = a^{I}$, $Z P L = A$, $Z P M = A^{I}$, $\mu M m = \psi$, on aura $\tang \psi = \tang (A^{I} - A) \cos a^{I}$; c'est un théorême qu'a trouvé M. Lexell par un calcul purement analytique. Mais $A^{I} - A$ est ce que nous avons appellé plus haut la parallaxe d'ascension droite, & nous avons démontré que $\tang (A^{I} - A) = \frac{\varepsilon \sin \pi \sin A \sin b}{\sin a - \varepsilon \sin \pi \sin b \cos A}$ $= \frac{\varepsilon \sin \pi \sin A \sin b}{\sin a}$ à peu près, donc $\tang \psi$, ou ce qui est la même chose ici $\psi =$ $\frac{\varepsilon \sin \pi \sin A \sin b \cos a^{I}}{\sin a} = \varepsilon \sin \pi \sin A \sin b \cot a$, en mettant $\cos a$ pour $\cos a^{I}$, ce qui ne fait qu'un très-petit changement, c'est la formule qu'à donnée Mayer. Or comme on a dans le triangle $P Z L$ en faisant $Z L = c$, $Z M = c^{I}$ $Z L P = C$, $Z M P = C^{I}$, $\sin Z P L : \sin Z L = \sin Z L P : \sin P Z$ ou $\sin A : \sin c = \sin C : \sin b$; on aura $\sin A \sin b = \sin c \sin C = \sin c^{I} \sin C^{I}$, parce qu'on peut sans erreur sensible mettre c^{I} au lieu de c & C^{I} au lieu de C; notre formule peut donc être mise sous cette forme $\psi = \varepsilon \sin \pi \sin c^{I} \sin C^{I} \cot a$, ou $\psi = \varepsilon \sin \pi \sin c^{I} \sin C^{I} \cot a$. Mais la formule qu'à donnée M. de la Lande est celle-ci $\psi = \varepsilon \sin \pi \cos c^{I} \sin C^{I} \cos C^{I}$, ce qui ne peut s'accorder avec la nôtre que dans le cas où cof c^1 cof C^1 = fin c^1 cot a^1, ou bien cot a^1 = cot c^1 cof C^1, c'eft-à-dire *dans le cas où l'angle PZL feroit* $= 90°$, ce qui prouve la fauffeté de la formule de M. de la Lande, puifque d'un côté cette limitation eft abfurde, & que de l'autre nous avons démontré la formule de Mayer. Du refte, M. Lexell fait voir au long par quels raifonnemens M. de la Lande eft tombé dans l'erreur, & comment il auroit fallu les rectifier.

Le parallele apparent d'un aftre differe du parallele vrai, non feulement par la variation de la parallaxe, mais auffi par celle de la déclinaifon & par celle de la réfraction. Les formules que l'on obtiendroit deviendroient beaucoup trop compliquées fi l'on confidéroit ces trois caufes comme agiffant conjointement comme cela feroit néceffaire, fi l'on vouloit procéder dans la rigueur géométrique. Ces mêmes formules fe fimplifient confidérablement, fi l'on confidere ces trois caufes féparement & indépendamment les unes des autres, & cela fuffit pour les ufages aftronomiques, l'erreur qui en réfulte pouvant fe négliger fans aucun inconvénient. C'eft pour cela qu'en traitant de la parallaxe nous avons fait abftraction de la déclinaifon & de la réfraction, nous allons maintenant confidérer la différence entre le parallele vrai & le parallele apparent provenant de la variation de la déclinaifon.



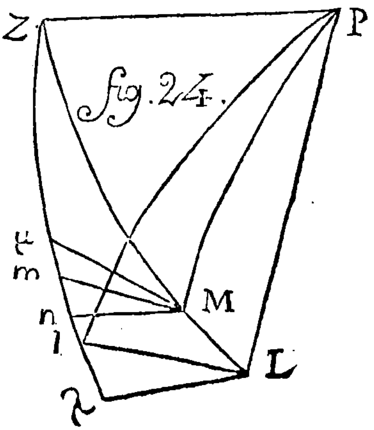
Soit P le pole de l'équateur, Z le zénith & L l'astre, il est évident que si sa déclinaison ne changeoit pas pendant qu'il parcourt le petit angle horaire L P l ou le petit arc L l que nous appellerons d A, & que nous regarderons comme infiniment petit, on auroit P l=PL; mais à cause de la variation de la déclinaison, P L = a devient = P m = $a + d\,a$, & il s'agit de trouver l'angle P L m ou l L m que fait le parallele vrai avec l'apparent. Or dans le triangle L P m, on connoît deux côtés P L, P m & l'angle compris L P m, nous aurons donc par le troisieme Cas des tr. obliq. cot P L m = tang m L l =

$$\frac{\text{sin P L cos P } m - \text{sin P } m \text{ cos L P } m \text{ cos P L}}{\text{sin P } m \text{ sin L P } m}$$

$$= \frac{\sin a \cos(a + d\,a) - \sin(a + d\,a)\cos a}{d\,\text{A} \sin a}$$

(parce que d A = & que cos L P m = 1 sin d A & cos d A = 1) $= - \frac{d\,a}{d\,\text{A}} \frac{}{\sin a}$. On cherchera dans le rapport de la variation en déclinaison à la variation de l'angle horaire & l'on aura $\frac{d\,a}{d\,\text{A}} = \delta$ & alors on aura m L $l = - \frac{\delta}{\sin a}$.

Enfin si nous considérons la réfraction, soit P le Pole de l'équateur, Z le zénith, L l'astre lequel soit relevé en M dans le vertical Z M L par la réfraction ; s'il n'y avoit point eu de réfraction, l'astre auroit été en *l*, après que l'astre auroit parcouru un angle horaire infiniment petit. Si la réfraction avoit été constante, l'astre auroit été en μ (en menant le vertical $Z \mu l$ & faisant $l \mu = LM$) mais la réfraction ayant changé, l'astre se trouve en *m*, & il s'agit de trouver l'angle P M *m* ou μ M *m*. Menons les arcs de grands cercles M μ, M *m*, L *l* & du pole Z les arcs de petit cercles L λ, M *n*. Menez aussi l'arc P *l* qui est évidemment égal à P L. Considérons le changement du triangle Z P L occasionné par la variation L P *l* ou dA de l'angle horaire, ce qui l'a fait devenir Z P *l*, Z P & P *l* sont restés les mêmes ; or par le troisieme Cas des analog. différ. deux côtés étant constans, on a $d\,ZL = ZL - Zl = l\lambda : lPL =$ sin P L sin Z L P : ou $l\lambda : dA =$ sin *a* sin C : 1, donc $l\lambda = dA$ sin *a* sin C, on aura de même $LZ\lambda : dA =$ cos Z L P sin P L : sin Z L ou $LZ\lambda : dA =$ cos C



$\sin a : \sin c$, donc $L Z \lambda = \frac{d A \cos C \sin a}{\sin c}$ (en conservant toutes les dénominations précédentes.) Or comme $L M = l \mu$, on a $Z \mu = Z L - M L - l \lambda$, faisons $M L = r$ & $m \mu = d r$, on aura $Z \mu = c - r - d A \sin a \sin C$ & $Z M = c' = c - r$. Maintenant dans le triangle $Z M \mu$, $Z M$ & $M Z \mu$ étant constans, on a par le premier Cas des analog. différ. $d Z \mu = \mu m : m M \mu = \sin M \mu : \sin Z \mu m$ ou $d r : m M \mu = \sin M \mu : \sin Z \mu m$ & $\mu M m = \frac{d r \sin Z \mu M}{\sin M \mu}$. Or $\sin Z \mu M : \sin Z M = \sin Z M \mu : \sin Z \mu = \cos C' : \sin (c' - d A \sin a \sin C)$, donc $\sin Z \mu M = \frac{\sin c' \cos C'}{\sin c'} = \cos C'$ (en négligeant la petite quantité $d A \sin a \sin C$) donc $\mu M m = \frac{d r \cos C'}{\sin M \mu}$. Mais $\sin M \mu : L Z \lambda = \cos C' : \sin c'$ ou $\sin M \mu = \frac{L Z \lambda \sin c'}{\cos C'} = \frac{L Z \lambda \sin c}{\cos C} = d A \sin a$ (en mettant pour $L Z \lambda$ sa valeur), donc $\mu M m = \frac{d r \cos C'}{d A \sin a} = \frac{d r \cos C}{d A \sin a}$ à peu près. M. Lexell trouve en négligeant comme nous avons fait toutes les quantités où entre r, $\frac{d r \cos C}{d A \sin a - d r \sin C} =$

$$\frac{\frac{dr}{dA}\operatorname{cof} C}{\operatorname{fin} a - \frac{dr}{dA}\operatorname{fin} C},$$ au lieu que notre formule eſt $\frac{dr}{dA} \cdot \frac{\operatorname{cof} C}{\operatorname{fin} a}$, mais $\frac{dr}{dA}$ ſin C eſt toujours ſi petit relativement à ſin a qu'on peut preſque toujours le négliger dans la pratique. Au reſte la formule de M. Lexell eſt aiſée à démontrer par nos principes. Puiſque $l\mu = \mathrm{LM} = \lambda n$, on a en ôtant nl, $l\lambda = n\mu$ donc tang $\mu \mathrm{M} n = \frac{\mu n}{\mathrm{M}n} = \frac{l\lambda}{\mathrm{M}n} = \frac{l\lambda}{\mathrm{L}\lambda}$ = tang C (aux quantités de l'ordre r près. De même tang $m\mathrm{M}n = \frac{mn}{\mathrm{M}n} = \frac{l\lambda - \mu m}{\mathrm{M}n} =$

$$\frac{l\lambda - \mu m}{\mathrm{M}n} = \frac{l\lambda - \mu m}{\mathrm{L}\lambda} = \frac{dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C - dr}{dA \operatorname{fin} a \operatorname{cof} C}.$$

Or tang $\mu \mathrm{M} m = \frac{\operatorname{tang} \mu \mathrm{M} m - \operatorname{tang} m \mathrm{M} n}{1 + \operatorname{tang} \mu \mathrm{M} n \operatorname{tang} m \mathrm{M} n} =$

$$\frac{\operatorname{tang} C - \frac{dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C + dr}{dA \operatorname{fin} a \operatorname{cof} C}}{1 + \frac{dA \operatorname{tang} C \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C - dr \operatorname{tang} C}{dA \operatorname{fin} a \operatorname{cof} C}} =$$

$$\frac{dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C - dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C + dr}{dA \operatorname{fin} a \operatorname{cof} C + dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C \operatorname{tang} C - dr \operatorname{tang} C} =$$

$$\frac{dr \operatorname{cof} C}{dA \operatorname{fin} a \operatorname{cof} C^2 + dA \operatorname{fin} a \operatorname{fin} C^2 - dr \operatorname{fin} C} =$$

$$\frac{dr \operatorname{cof} C}{dA \operatorname{fin} a - dr \operatorname{fin} C}.$$ C'eſt la formule que trouve

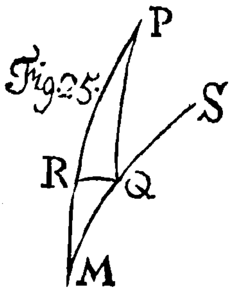
M. Lexell. Pour juger de la valeur $\frac{d\,r}{d\,A}$, il faut ſubſtituer à cette formule ſa valeur en $\frac{d\,r}{d\,c}$, parce que les tables nous donnent le rapport entre la variation de la réfraction & la variation de la hauteur. Or dans le triangle Z M P, Z P & P Z *m* étant conſtans, on a par le premier Cas des analog. différ. $d\,c : d\,A = \sin a : \sin C$, mais $d\,r : d\,A = \frac{d\,r : d\,c}{d\,c : d\,A} = \frac{d\,r : d\,c}{d\,c : \frac{d\,c \sin C}{\sin a}} = \frac{d\,r : d\,c}{\sin a : \sin C} = d\,r$ $\sin a : d\,c \sin C$, donc $\frac{d\,r}{d\,A} = \frac{d\,r}{d\,c} \cdot \frac{\sin a}{\sin C}$. Ainſi la plus grande valeur de $\frac{d\,r}{d\,A}$ a lieu, toutes choſes d'ailleurs égales lorſque $\sin a = 1$, c'eſt-à-dire, lorſque la déclinaiſon de l'aſtre eſt zéro. (Examinant maintenant la formule $\frac{d\,r}{d\,c \sin C}$, on voit que le rapport de $\frac{d\,r}{d\,c}$ eſt le plus grand poſſible à l'horizon, alors la diſtance au méridien pour la lune eſt de 6 heures, (il eſt vrai qu'on ne peut jamais l'obſerver exactement à l'horizon.) Or on voit par la table des angles parallactiques qui ſe trouve dans la connoiſſance des tems, que lorſque la déclinaiſon eſt $= 0$, l'angle parallactique pour une diſtance au méridien de 6 heures eſt de 41° 11′. Le rapport de $d\,r$ à $d\,c$ pour 5° de hauteur de l'aſtre, (car on ne s'accorde s'accorde pas encore bien ſur les réfractions horizontales) eſt ſuivant Bradley $= \frac{46''}{30'} = \frac{46''}{1800} = \frac{23''}{900}$. Donc on auroit pour ce cas là $\frac{d\,r}{d\,A} =$

$\frac{23''}{900 \text{ ſin } (41° \,..\, 11')} = \frac{23}{900.\frac{2}{3}}$ environ $=$

$\frac{3.23}{1800} = \frac{23}{600}$ à peu près. Donc notre formule $\frac{d\,r}{d\,A} \cdot \frac{\text{coſ } C}{\text{ſin } a}$ qui eſt dans ce cas $\frac{d\,r}{d\,A}$ coſ C eſt $\frac{23}{600}$ coſ C $=$ tang μ M m). Si l'on ne veut pas négliger r la même méthode peut ſervir, & l'on trouve une expreſſion plus compliquée que donne M. Lexell, & qu'il eſt inutile de rapporter ici, parce que je ne crois pas qu'on en ait jamais beſoin dans la pratique de l'aſtronomie.

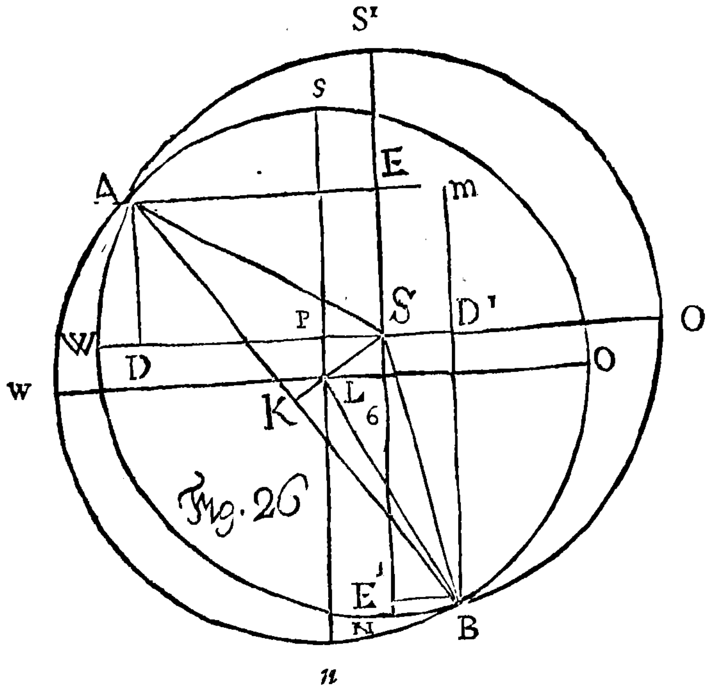
Je vais maintenant faire voir d'après M. Lexell, comment lorſqu'on connoît l'angle μ M m ou ψ que fait le parallaxe vrai avec l'apparent, on peut corriger la différence obſervée des aſcenſions droites & des déclinaiſons.

Soit P M le cercle horaire vrai dans le tems que l'aſtre qui précede a été obſervé au fil horaire qui touche le grand cercle M Q S, lequel fait avec PLM l'angle ψ. Suppoſons que l'aſtre qui ſuit paſſe à ce fil en Q & du pole P avec l'intervalle P Q décrivons l'arc Q R, on aura l'analogie commune ſin R P Q : ſin R Q $=$ 1 : ſin P Q $=$, ou parce que les petits arcs ſont égaux à leurs ſinus R P Q : R Q $=$ 1 : ſin P Q ou R P Q $= \frac{R\,Q}{\text{ſin}\ P\,Q}$, mais R Q $=$ M Q ſin Q M R $=$ M Q ſin ψ, donc R P Q $=$ $\frac{M\,Q\ \text{ſin}\ \psi}{\text{ſin}\ P\,Q}$, c'eſt la correction de la différence des aſcenſions droites. Or M Q eſt la différence obſervée des déclinaiſons des aſtres, donc appellant cette différence D, on aura R P Q $= \frac{D\ \text{ſin}\ \psi}{\text{ſin}\ P\,Q} =$ $\frac{D\ \text{ſin}\ \psi}{\text{coſ}\ D\,ec} = \frac{D\ \text{ſin}\ \psi}{\text{coſ}\ \phi}$ (en appellant ϕ la déclinaiſon de l'aſtre qui ſuit, & les circonſtances feront voir ſi cette correction eſt affirmative ou négative. La vraie différence des déclinaiſons ſera R M $=$ Q M coſ ψ $=$ D coſ ψ, & comme l'angle ψ eſt toujours très-petit, la correction pour les déclinaiſons ne ſera gueres ſenſible.



Supplement au Chapitre IX.

La doctrine des parallaxes que nous venons d'expliquer, contient à peu près tout ce qui peut servir à éclaircir le calcul des éclipses de soleil & des occultations des astres les uns par les autres. Dans les observations des éclipses de soleil, outre le commencement & la fin de l'éclipse, on a coutume d'observer les passages des bords du soleil & des cornes aux fils d'un micrometre ou d'un quart de cercle. Si c'est au micrometre, on en déduit les distances des bords & des cornes au parallele & au cercle horaire, & il s'agit de tirer de là le rayon de la lune, & les distances du centre de la lune au parallele & au cercle horaire. C'est ce qu'a fait entre autres M. Mayer dans un Mémoire sur l'éclipse de soleil du 24 Juillet 1748, il dit qu'il donnera ailleurs la méthode de ces déductions. Je vais donner cette méthode que M. Mayer n'a jamais publiée, & je l'appliquerai à un exemple tiré des calculs de M. Mayer.



Soit S' W N O le difque du foleil, S le centre, *s w n o* le difque de la lune, L le centre, A & B les deux cornes, S' N le cercle horaire, & W O le parallele qui paffent par le centre du foleil. L'obfervation nous a donné la diftance du bord de la lune *s* à ce parallele, favoir *p s*, les diftances des cornes A & B au parallele & au cercle horaire, favoir A D, A E, B D', B E'. Prolongeons A E & B D jufqu'a ce qu'ils fe rencontrent en *m*. Menons la corde A B qui étant commune aux deux cercles fera partagée en deux également & perpendiculairement par la ligne S L qui passe par les centres des deux cercles. Menons *s n* & *w o* qui sont le cercle horaire & le parallele qui passent par le centre de la lune. Il faut par le moyen des données déterminer L B $=$ au rayon de la lune, Lp & pS distances du centre de la lune au parallele & au cercle horaire. Soit L B $= r$, S k $= a$, $ps = c$, A B $= 2b$. Dans le triangle rectangle A B m, nous connoissons A m & B m qui sont les sommes des distances des cornes A & B au parallele & au cercle horaire, nous connoîtrons donc A B ou B K $= b$ qui en est la moitié. Dans le triangle rectangle S B K nous connoissons S B rayon du soleil & B K, nous connoîtrons donc S K & K S B, soit S K $= a$. Dans le triangle rectangle B E' S nous connoissons B E' & S E', nous connoîtrons donc E' S B, & par conséquent K S E' $=$ K S B $-$ B S E', nous connoîtrons donc p S L $= 90° -$ K S E', soit p S L $= \phi$. Cela posé, nous aurons L$p = r - c$, L S $= \frac{r-c}{\sin\phi}$, L K $= a - \frac{(r-c)}{\sin\phi}$, mais dans le triangle L B K, on a L B$^2 =$ L K$^2 +$ B K^2 ou $r^2 = \left(a - \frac{(r-c)}{\sin\phi}\right)^2 + b^2 = a^2 + b^2 - \frac{2a(r-c)}{\sin\phi} + \frac{r^2 - 2rc + c^2}{\sin\phi^2}$, ou $r^2 \sin\phi^2 = (b^2 + a^2) \sin\phi^2 + 2ac \sin\phi - 2ar \sin\phi + r^2 - 2cr + c^2$; ou $r^2 \cos\phi^2 = 2r\,(c + a \sin\phi) - c^2 - 2ac \sin\phi - (b^2 + a^2) \sin\phi^2$ ou $r =$

$$\frac{c + a \sin\Phi}{\cos\Phi^2} + \sqrt{\frac{(c+a\sin\Phi)^2}{\cos\Phi^4} \frac{(c+a\sin\Phi)^2}{\cos\Phi^2} \frac{b^2\sin\Phi^2}{\cos\Phi^4}}$$

$$= \frac{c + a \sin\Phi}{\cos\Phi^2} + \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi^2} \times$$

$\sqrt{(c + a \sin\Phi)^2 - b^2 \cos\Phi^2}$. Eclairciffons cette formule générale par un exemple. M. Mayer avoit trouvé à 10 h. 55′ de tems vrai le rayon du soleil $SB = 948''$, $c = 305''$, $AE = 906''$, $AD = 278''$, $BD' = 938''$, $BE' = 138''$, nous avons donc $Am = AE + BE' = 1044''$ & $Bm = 1216''$ donc $AB = \sqrt{Am^2 + Bm^2} = 1603''$ & $BK = b = \frac{AB}{2} = 801''$. Nous aurons ensuite $SK = a = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{(SB + BK)(SB - BK)} = \sqrt{1749 \cdot 147} = 507$. Nous aurons maintenant $\sin LSB = \frac{BK}{SB} = \frac{801,5}{948}$, donc $LSB = 57°. 43'. 20''$, de même $\sin E'SB = \frac{BE'}{SB} = \frac{138}{948}$ donc $E'SB = 8°. 22'. 10''$, donc $KSE' = 49°. 21'. 10''$, & $pSL = \Phi = 40°. 38'. 50''$, donc

$$\begin{aligned} la &= 2,7050535 \\ l\sin\Phi &= 9,8138476 \\ \hline la\sin\Phi &= 2,5189011 \end{aligned}$$

donc $a \sin\Phi = 330''$, donc $c + a \sin\Phi = 305'' + 330'' = 635''$, donc

$l(c+a\sin\phi) = 2,8027737$ de plus $lb = 2,9036325$
$l\cos\phi^2 = 9,7601798$ $\quad l\cos\phi = 9,8800899$

$$\frac{l(c+a\sin\phi)}{\cos\phi^2} = 1103'' \qquad lb\cos\phi = 2,7837224$$

$b\cos\phi = 608''$.

Or $\sqrt{(c+a\sin\phi)^2 - b^2\cos\phi^2} =$
$\sqrt{(c+a\sin\phi+b\cos\phi)(c+a\sin\phi - b\cos\phi)} =$
$\sqrt{1243.27}$ Or

$$\begin{aligned}
l\,1243 &= 3,0944711\\
l\,27 &= 1,4313638\\
l\,1243.27 &= 4,5258349\\
l\sqrt{1243.27} &= 2,2629174\\
l\sin\phi &= 9,8138476\\
l\sqrt{1243.27}\sin\phi &= 2,0767650\\
l\cos\phi^2 &= 9,7601798\\
l\frac{\sqrt{1243.27}\ \sin\phi}{\cos\phi^2} &= 2,3165852
\end{aligned}$$

donc $\frac{\sin\phi}{\cos\phi^2}\sqrt{(c+a\sin\phi)^2 - b^2\cos\phi^2} =$ $207''$, donc $r = 1103'' - 207'' = 896'' = 14'.56''$, c'est précisément ce que trouve M. Mayer. Ayant trouvé r, on aura aisément $Lp = r - c = 896 - 305 = 591 = 9'.51''$, comme le trouve M. Mayer. On aura enfin $pS = Lp\cot\phi$ or

$$\begin{aligned}
l\,Lp &= 2,7715875\\
l\cot\phi &= 10,0662423\\
l\,pS &= 2,8378298
\end{aligned}$$

donc $p\,S = 688'' = 11'.\ 28''$. M. Mayer ne met que $11'.\ 14''$, mais il eſt problable qu'il y a une faute d'impreſſion.

Si l'obſervation nous avoit donné avec les diſtances des cornes la diſtance du bord o au cercle hôraire, la formule auroit été ſemblable aux fonctions de l'angle ϕ près. Soit $o\,\sigma = c^{\mathrm{I}}$, $BK = b$ & $SK = a$ reſtant les mêmes, & l'on aura $L\,\sigma = r - c^{\mathrm{I}}$, $LS = \frac{r - c^{\mathrm{I}}}{\cos \phi}$, $LK = a - \frac{(r - c^{\mathrm{I}})}{\cos \phi}$, donc $r^2 = \left(a - \frac{r - c^{\mathrm{I}}}{\cos \phi}\right)^2 + b^2$, d'où l'on tire $r^2 \cos \phi^2 = (b^2 + a^2) \cos \phi^2 + 2\,a\,c^{\mathrm{I}} \cos \phi - 2\,a\,r \cos \phi + r^2 - 2\,r\,c^{\mathrm{I}} + c^{\mathrm{I}2}$ ou $r =$
$$\frac{c^{\mathrm{I}} + a \cos \phi}{\sin \phi^2} \pm \frac{\cos \phi}{\sin \phi^2} \sqrt{(c^{\mathrm{I}} + a \cos \phi)^2 - b^2 \sin \phi^2}.$$

Soit, en continuant le même exemple que ci-deſſus, $c^{\mathrm{I}} = 213$, l'angle ϕ ne varie point, Nous aurons donc

$$l a = 2,7050535 \qquad \text{donc } l(c' + a\cos\Phi) = 2,7764833$$
$$l\cos\Phi = 9,8800899 \qquad l\sin\Phi^2 = 9,6276952$$
$$l a\cos\Phi = 2,5851434 \qquad l\frac{c' + a\cos\Phi}{\sin\Phi^2} = 3,1487881$$
$$a\cos\Phi = 384'',7$$
$$c' = 213,0 \qquad \frac{c' + a\cos\Phi}{\sin\Phi^2} = 1408'',6$$
$$c' + a\cos\Phi = 597,7$$

Or $\sqrt{(c' + a\cos\Phi)^2 - b^2\sin\Phi^2} = \sqrt{(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi).(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi)}$

$$l b = 2,9036325 \qquad l(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi) = 3,0490241$$
$$l\sin\Phi = 9,8138476 \qquad l(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi) = 1,8802418$$
$$l b\sin\Phi = 2,7174801 \qquad l(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi)\times(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi) = 4,9292659$$
$$b\sin\Phi = 521'',8$$
$$c' + a\cos\Phi = 597,7$$
$$c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi = 1119,5 \qquad l\sqrt{(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi)(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi)} = 2,4646329$$
$$c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi = 75,9 \qquad l\cos\Phi = 9,8800899$$
$$l\cos\Phi\sqrt{(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi)(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi)} = 2,3447228$$
$$l\sin\Phi^2 = 9,6276952$$
$$l\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi^2}\sqrt{(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi)(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi)} = 2,7170276$$
$$\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi^2}\sqrt{(c' + a\cos\Phi + b\sin\Phi)(c' + a\cos\Phi - b\sin\Phi)} = 521''$$
$$\frac{c' + a\cos\Phi}{\sin\Phi^2} = 1409'',6$$
$$x = 887'',6 = 14'.47'',6$$

M. Mayer trouve $14'.49''$, mais il peut avoir négligé des décimales, & d'ailleurs cette différence n'eſt d'aucune importance. Cela me donne $pS = 888 - 213 = 675'' = 11'.15''$. M. Mayer met ici $11'.28''$, c'eſt ce qui me perſuade qu'il y a ici une faute d'impreſſion, & que les deux nombres ayant changé de colonne, il faut mettre $11'.28''$, dans la premiere colonne & $11'.14''$ dans la ſeconde, & alors nos réſultats ne different que d'une ſeconde de ceux de M. Mayer. On aura enfin $Lp = pS \text{ tang } \Phi$, N

$$\begin{aligned} l p S &= 2{,}8293038 \\ l\,t.\,\Phi &= 9{,}9337577 \\ l L p &= 2{,}7630615 \\ L p &= 580'' = 9'.40''. \end{aligned}$$

M. Mayer trouve $9'.41''$.

Si l'on avoit les diſtances des deux cornes A & B & le rayon de la lune, on pourroit trouver le reſte. Pour cela il n'y a qu'à reprendre l'équation ci-deſſus, $r^2 \operatorname{cof} \Phi^2 = 2rc + 2ra \sin\Phi - c^2 - 2ac \sin\Phi - (b^2 + a^2)\sin\Phi^2$ & en tirer la valeur de c laquelle ſera $c = r - a \sin\Phi \pm \sqrt{r^2 - 2ar\sin\Phi + a^2 \sin\Phi^2 - r^2\operatorname{cof}\Phi^2 - b^2 \sin\Phi^2 - a^2 \sin\Phi^2 + 2ar\sin\Phi}$ $= r - a\sin\Phi \pm \sin\Phi \sqrt{r^2 - b^2}$. Ainſi en prenant l'exemple précédent ou nous avons trouvé $r = 896''$, $a \sin\Phi = 330''$, nous aurons $r - a\sin\Phi = 566''$.

Or $\sqrt{r^2 - b^2} = \sqrt{(r+b)(r-b)} =$

$$l\,(r+b) = 3{,}2296818$$
$$l(r-b) = 1{,}9777236$$
$$l\,(r+b)\,(r-b) = 5{,}2074054$$
$$l\,\sqrt{(r+b)\,(r-b)} = 2{,}6037027$$
$$l \sin \phi = 9{,}8138476$$
$$l \sin \phi \sqrt{r^2 - b^2} = 2{,}4175503$$
$$\sin \phi \sqrt{r^2 - b^2} = 261''$$

$$\text{Or } r+b = 1697$$
$$r-b = 95$$
$$\text{Donc } r - a \sin \phi = 566''$$
$$\sin \phi \sqrt{r^2 - b^2} = 261$$
$$c = 305''$$

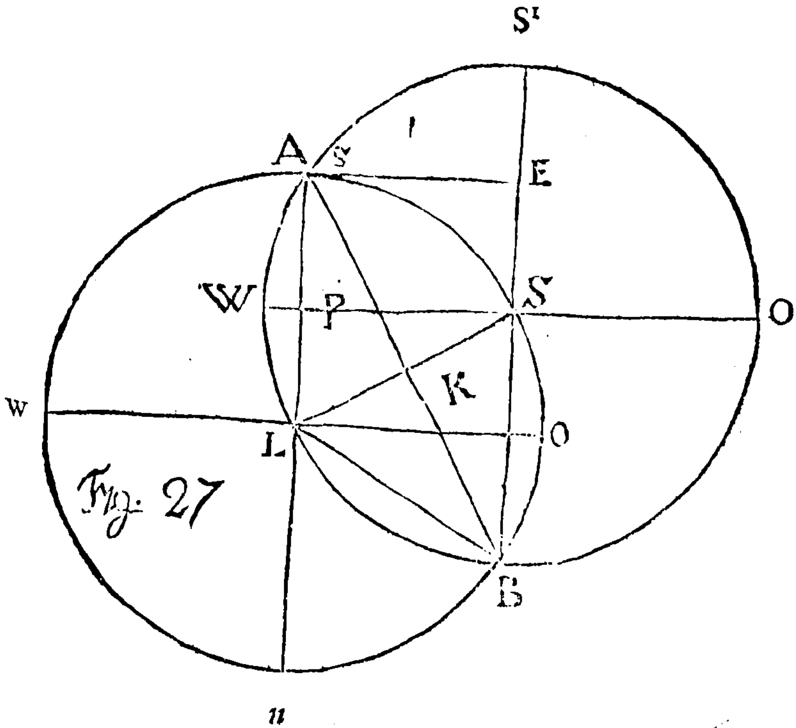
comme nous l'avions ci-dessus. Nous tirerons ensuite de-là Lp & p S comme ci-dessus.

Il semble d'abord que dans ce cas ci l'on peut procéder d'une maniere plus simple & plus directe, & sans former une équation. Car connoissant L B & B K, on connoîtra L K & connoissant S K on connoîtra S L d'où l'on tirera ensuite Lp & p S par le moyen de l'angle ϕ. Mais cette méthode présente une difficulté, c'est que pour l'employer il faut savoir si S L est plus grand que S K ou non, & c'est ce qu'on ne peut pas déterminer d'avance en faisant la figure. Notre méthode n'est pas sujete à cet inconvénient parce qu'elle n'emploie que le quarré de S K − S L, or $(SK - SL)^2 = (SL - SK)^2$, ainsi cette ambiguité ne lui nuit point & le résultat du calcul fait voir si S L est $>$ ou $<$

S K. Par exemple ici $SL = \frac{r - c}{\text{ſin}\,\phi} = \frac{591''}{\text{ſin}\,\phi}$. Or

$$\begin{aligned} l\,591 &= 2{,}7715875 \\ l\,\text{ſin}\,\phi &= 9{,}8138476 \\ \hline l\,LS &= 2{,}9577399 \\ LS &= 906'' \\ SK &= 507 \end{aligned}$$

Dont le point L eſt ſur le prolongement de SK & la figure que j'ai faite ne correſpond pas au cas que j'ai calculé. Mais cela eſt indifférent comme l'on voit pour le ſuccès de la méthode. On demandera peut-être ce que veut dire le double ſigne qui eſt devant le radical, & qu'eſt-ce qui indique que l'on doit ſe ſervir de l'un de ces ſignes plutôt que de l'autre. Une conſidération bien ſimple va éclaircir ce doute. Suppoſons la quantité contenue ſous le radical $= o$, on aura $b\,\text{coſ}\,\phi = c + a\,\text{ſin}\,\phi$, & $r = \frac{c + a\,\text{ſin}\,\phi}{\text{coſ}\,\phi^2} = \frac{b\,\text{coſ}\,\phi}{\text{coſ}\,\phi^2} = \frac{b}{\text{coſ}\,\phi}$. Donc $\text{coſ}\,\phi = \frac{b}{r} = \frac{BK}{LB}$. Pour cela il faut que le point B tombe ſur le point N, alors l'angle LSB devient égal au complement de ϕ, or on a $\frac{BK}{SB} = \text{ſin}\,LSB = \text{coſ}\,\phi = \frac{BK}{LB}$, donc alors SB doit être $= LB$, c'eſt-à-dire, que lorſque le radical devient $= o$, le



rayon de la lune eſt égal au rayon du ſoleil. Si le rayon de la lune étoit plus grand que celui du ſoleil, comme dans la figure 27, le radical prendroit le ſigne poſitif, il ſera négatif tant que le rayon de la lune ſera plus petit. Si les obſervations ſe faiſoient au quart de cercle au lieu de ſe faire au micrometre, l'on détermineroit la poſition du centre de la lune relativement au vertical & à l'azymuth, de même qu'on l'a déterminée ici relativement au parallele & au cercle horaire. Et comme tout ſe réduit enfin à trouver la longitude & la latitude, il n'eſt pas plus difficile, comme on ſait, de les trouver en connoiſſant la hauteur & l'azymuth qu'en connoiſſant l'aſcenſion droite & la déclinaiſon. Ainſi tout ce que nous venons de dire peut ſervir pour les obſervations du quart de cercle, comme pour celles du micrometre.

Quand on a déterminé par le moyen des opérations précédentes les différences d'aſcenſion droite & de déclinaiſon entre les centres de la lune & du ſoleil, on peut en déduire la latitude de la lune & la différence de longitude de ces deux aſtres. M. Mayer donne pour cela deux formules ſans démonſtrations dans le Mémoire cité. Je vais les démontrer ici. Soit ϕ l'aſcenſion droite du ſoleil, δ ſa déclinaiſon, λ ſa longitude, $d\,\phi$ la différence des aſcenſions droites de la lune & du ſoleil, $d\,\delta$ la différence de leurs déclinaiſons, $d\,\lambda$ la différence de leurs longitudes, β la latitude de la lune. Nous avons démontré dans le Chapitre précédent que $\operatorname{tang} \lambda = \frac{\operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{tang} \delta + \operatorname{fin} \phi \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{cof} \phi}$ (ε étant l'obliquité de l'écliptique); donc en différenciant on aura $\frac{d\,\lambda}{\operatorname{cof} \lambda^2} = \frac{d\,\delta \operatorname{fin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \delta^2 \operatorname{cof} \phi} + \frac{d\,\phi \operatorname{fin} \phi \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{tang} \delta}{\operatorname{cof} \phi^2} + \frac{d\,\phi \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{cof} \phi^2}$, $d\,\lambda = \operatorname{cof} \lambda^2 \left(\frac{d\,\delta \operatorname{fin} \varepsilon}{\operatorname{cof} \delta^2 \operatorname{cof} \phi} + \frac{d\,\phi \operatorname{fin} \phi \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{tang} \delta}{\operatorname{cof} \phi^2} + \frac{d\,\phi \operatorname{cof} \varepsilon}{\operatorname{cof} \phi^2}\right)$. Mais nous avons fait voir auſſi dans le Chapitre cité que $\operatorname{cof} \lambda =$

$\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\cos\beta}$. Or la latitude β de la lune étant nécessairement très-petite, on peut faire $\cos\beta = 1$ & $\sin\beta = 0$, nous aurons donc $\cos\lambda = \cos\varphi\cos\delta$ & $d\lambda = d\delta\sin\varepsilon\cos\varphi + d\varphi(\sin\varphi\sin\varepsilon\sin\delta\cos\delta + \cos\varepsilon\cos\delta^2)$. Or nous avons encore prouvé dans le même Chapitre cité que $\sin\beta = \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varphi\sin\varepsilon\cos\delta$, donc puisqu'ici $\sin\beta = 0$, on aura $\sin\varphi\sin\varepsilon\cos\delta = \cos\varepsilon\sin\delta$; donc en faisant cette substitution, $d\lambda = d\delta\sin\varepsilon\cos\varphi + d\varphi(\cos\varepsilon\sin\delta^2 + \cos\varepsilon\cos\delta^2) = d\delta\sin\varepsilon\cos\varphi + d\varphi\cos\varepsilon$, c'est une des formules que trouve Mayer. Différenciant maintenant la valeur de $\sin\beta$, nous aurons $d\beta\cos\beta = d\delta\cos\varepsilon\cos\delta - d\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon\cos\delta + d\delta\sin\delta\sin\varphi\sin\varepsilon$. Or $\cos\beta = 1$, donc $d\beta = d\delta(\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\delta\sin\varphi\sin\varepsilon) - d\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon\cos\delta$, mais $\sin\varphi\sin\varepsilon = \frac{\cos\varepsilon\sin\delta}{\cos\delta}$, donc $d\beta = d\delta\left(\frac{\cos\varepsilon\cos\delta^2 + \cos\varepsilon\sin\delta^2}{\cos\delta}\right) - d\varphi\cos\varphi\sin\varepsilon\cos\delta$, ou en réduisant & parce que $\cos\lambda = \cos\varphi\cos\delta$, $d\beta = \frac{d\delta\cos\varepsilon}{\cos\delta} - d\varphi\sin\varepsilon\cos\lambda$, c'est la seconde formule que donne Mayer.

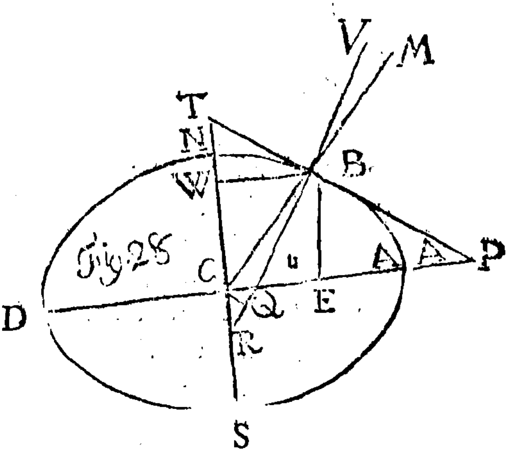
CHAPITRE X.

Usage de la trigonometrie dans la théorie de la figure de la terre.

On fait que la figure de la terre eſt celle d'un ſphéroïde applati aux poles, figure que doit prendre tout globe fluide qui tourne ſur un axe, comme Newton l'a démontré, & comme on peut le voir dans l'ouvrage de Clairaut ſur la figure de la terre. Un tel ſphéroïde eſt un ſphéroïde elliptique dont tous les méridiens ſont des ellipſes, & M. Newton a trouvé par la théorie de la peſanteur que la différence des arcs ou l'applatiſſement de ce ſphéroïde devoit être $\frac{1}{230}$. (Voyez là-deſſus le même ouvrage de Clairaut.) Les formules néceſſaires pour trouver les dimenſions de ce ſphéroïde applati ſont très-utiles dans l'aſtronomie, comme on a pu le voir dans le Chapitre précédent, & comme je le montrerai en détail dans celui-ci, & je montrerai en même tems comment on a calculé d'après ces formules les dimenſions du ſphéroïde applati dans les tables aſtronomiques de Berlin Tome III p. 165. Je prendrai la même figure qui ſe trouve à cet endroit.

Soit

Soit C le centre de la terre, N S l'axe, A D l'équateur, N A S D un méridien de la terre & B un lieu quelconque de ce méridien. T B P touche le méridien en B & est horizontale par rapport à B. V B prolongée en R est perpendiculaire à B T & par conséquent verticale en B. C Q est parallele à B T & donne la distance horizontale de la verticale B Q au centre C. B Q est la hauteur de C au-dessus de l'horizon vrai qui passe par le centre de la terre.



Une des premieres choses qu'on doit considérer dans ce sphéroïde, c'est l'angle que fait la verticale ou la perpendiculaire à la surface avec la ligne qui est dirigée au centre, c'est-à-dire, l'angle C B Q. On a vu dans la théorie des parallaxes que cet angle étoit absolument nécessaire pour pouvoir calculer toute espece de parallaxes avec une précision suffisante. Mais avant de le chercher, il est bon d'établir quelques propositions préliminaires.

Soit D le degré du méridien à la latitude où est le point B, soit T le sinus de cette latitude, &

ſoit le rapport de l'axe à l'équateur celui de $1 : 1 + \delta$, le degré de l'équateur ſera $= D\,(1 - 3\,\delta\,T^2 + 2\,\delta)$. Pour démontrer cette propoſition on remarquera que dans les ellipſes qui approchent beaucoup du cercle, les arcs ſemblables qui ſoutendent des angles égaux ſont proportionels aux rayons des cercles qui ont la même courbure que les arcs. Cherchons donc le rayon de courbure du méridien à la latitude dont le ſinus eſt T, l'on ſait que le rayon oſculateur pour une courbe dont les ordonnées y ſont paralleles & en ſuppoſant l'élément de l'abciſſe dx conſtant, & l'arc z, $R = \dfrac{dz^3}{-dx\,ddy} = \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$. Soit maintenant le petit axe de l'ellipſe b, & le grand a, nous aurons pour l'équation de l'ellipſe, en prenant les abſciſſes depuis le centre, $yy = \dfrac{bb}{aa}(aa - xx)$, nous aurons en différenciant $dy = -\dfrac{b^2 x\,dx}{a^2 y}$, $dz =$

$$\sqrt{dx^2 + \frac{b^4 x^2\,dx^2}{a^4 y^2}} = \frac{dx\sqrt{a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2}}{ab\sqrt{aa - xx}},\ ddy = -$$

$$\frac{b^2\,dx^2 - a^2\,dy^2}{a^2 y} = -\frac{b^2\,dx^2 - \dfrac{b^4 x^2\,dx^2}{a^2 y^2}}{a^2 y} =$$

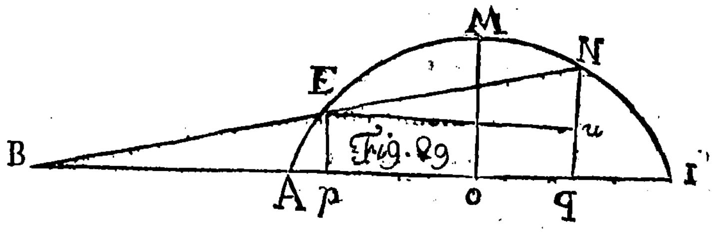
$$- \frac{a^2 b^2 y^2 dx^2 - b^4 x^2 dx^2}{a^4 y^3} = - \frac{ab\,dx^2}{(aa - xx)^{\frac{3}{2}}};$$

donc $R = \frac{(a^4 bb - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$. Mais l'on sait que la normale est $= \frac{\sqrt{a^4 bb - a^2 b^2 x^2 + b^4 x}}{a^2}$. Donc en appellant la normale N, on aura $R = \frac{N^3 . a^2}{b^4}$. Mais $N^2 = b^2 + \frac{b^4 - a^2 b^2}{a^4} x^2 = b^2 + \frac{bb - aa}{a^4} bb\,xx$. Or T étant le sinus de la latitude, nous aurons $BE = y = BU \sin BUE = BU \sin \text{latit.} = NT$, donc $yy = N^2 T^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ donc $\frac{bb}{aa} xx = bb - N^2 T^2$, donc en substituant cette valeur $N^2 = b^2 + \frac{bb - aa}{aa}(bb - N^2 T^2)$ & $N^2 (aa + (bb - aa) T^2) = b^4$. Soit maintenant $b = 1$ & $a = 1 + \delta$ & négligeons les secondes puissances de δ, puisque l'applatissement de la terre est fort petit, nous aurons $N^2 = \frac{1}{1 + 2\delta - 2\delta T^2} = 1 + 2\delta - 2\delta T^2$. Donc $N = 1 - \delta + \delta T^2$ & $N^3 = 1 - 3\delta + 3\delta T^2$, mais $a^2 = 1 + 2\delta$. Donc $R = \frac{N^3\ a^2}{b^4} = 1 - \delta + 3\delta T^2$. Pour avoir maintenant le rayon de courbure du parallele, nous remarquerons que ce rayon eſt $CE = x$, or on a par l'équation de l'ellipſe $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$ & $yy = N^2 T^2 = T^2 - 2\delta T^2 (1 - T^2)$, donc $x = \frac{a}{b}\sqrt{1 - T^2 + 2\delta T^2 (1 - T^2)}$ $= (1 + \delta)\sqrt{1 - T^2 + 2\delta T^2 (1 - T^2)}$ $= (1 + \delta)(\sqrt{1 - T^2} + \delta T^2 \sqrt{1 - T^2})$, or à l'équateur on a $T = o$, donc le rayon devient $= 1 + \delta$. Soit donc E le degré de l'équateur, on aura $E : D = 1 + \delta : 1 - \delta + 3\delta T^2$, donc $E = \frac{D(1 + \delta)}{1 - \delta + 3\delta T^2} = D(1 + 2\delta - 3\delta T^2)$.

Remarque.

Pour démontrer cette propoſition, nous avons eu beſoin de la normale de l'ellipſe, & à cette occaſion nous indiquerons ici une méthode pour trouver les tangentes & par conſéquent les normales des ſections coniques qui dépend de la trigonométrie & qui ne ſuppoſe point la notion de l'infini.

Sur le prolongement du grand axe I A d'une ellipſe A M I, on prend le point donné B, d'où l'on mene



la ſécante B N qui fait l'angle N B I $= \phi$. Nommant le demi-grand axe A $o = a$, le demi-petit axe M $o = b$, B A $= c$, on demande la valeur de la corde E N; ſoit tirée E u parallele au grand axe, & ſoit E $p = y$, A $p = x$, N $q = y^{\mathrm{I}}$, A $q = x^{\mathrm{I}}$, on aura E $u = x^{\mathrm{I}} - x$, & E N $= \frac{\mathrm{E}\,u}{\cos \Phi}$ $= \frac{x^{\mathrm{I}} - x}{\cos \Phi}$. Or j'ai par l'équation de l'ellipſe $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. J'ai de plus E $p = y =$ B p tang E B $p = (c + x)$ tang ϕ donc $yy = (c + x)^2$ tang $\Phi^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, donc $xx(bb + aa \text{ tang } \phi^2) = 2x(abb - aac \text{ tang } \Phi^2) - aacc \text{ tang } \Phi^2$ & $x =$

$$\frac{abb - aac\ \mathrm{t}.\Phi^2}{bb + aa\ \mathrm{t}.\phi^2} \pm \frac{\sqrt{(abb - aac\ \mathrm{t}.\Phi^2)^2 - aacc\ \mathrm{t}.\Phi^2(bb + aa\ \mathrm{t}.\phi^2)}}{bb + aa\ \mathrm{t}.\Phi^2}$$

$$= \frac{abb - aac\ \mathrm{t}.\Phi^2 \pm ab\sqrt{b^2 - (2ac + cc)\ \mathrm{t}.\Phi^2}}{bb + aa\ \mathrm{t}.\Phi^2}.$$

Mais puisque j'ai pour x^{I}, $y^{I}y^{I} = \frac{bb}{aa}(2ax^{I} - x^{I}x^{I})$ & $y^{I} = (c + x^{I})$ tang Φ, il s'ensuit que x^{I} est déterminé par la même équation que x, & que par conséquent dans la valeur de x^{I} le radical aura le signe $+$, & dans celle de x il aura le signe $-$. J'aurai donc $x^{I} - x =$

$$\frac{2ab\sqrt{b^2 - (2ac + cc)\,\mathrm{t}.\,\Phi^2}}{bb + aa\,\mathrm{t}.\,\Phi^2} =$$

$$\frac{2ab\cos\Phi\sqrt{b^2\cos\Phi^2 - (2ac + cc)\sin\Phi^2}}{bb\cos\Phi^2 + aa\sin\Phi^2}$$

& $\mathrm{EN} = \frac{x^{I} - x}{\cos\Phi} =$

$$\frac{2ab\sqrt{b^2\cos\Phi^2 - (2ac + cc)\sin\Phi^2}}{bb\cos\Phi^2 + aa\sin\Phi^2} =$$

$$\frac{2ab\sqrt{b^2\cos\Phi^2 - (2ac + cc)\cos\Phi^2}}{aa + (bb - aa)\cos\Phi^2}.$$

Lors EN devient $= o$, alors la sécante BN devient tangente, $x = x^{I}$, & $c + x$ devient soutangente. Ainsi nous aurons $b^2\cos\Phi^2 = (2ac + cc)\sin\Phi^2$, ou tang $\Phi^2 =$ $\frac{b^2}{2ac + cc}$, donc $x = \frac{abb - aac\,\mathrm{t}.\,\Phi^2}{bb + aa\,\mathrm{t}.\,\Phi^2} =$

$$\frac{abb - \frac{aacbb}{2ac + cc}}{bb + \frac{aab^2}{2ac + cc}} = \frac{a^2c + ac^2}{2ac + cc + aa} =$$

$\frac{ac\,(a+c)}{(a+c)^2} = \frac{ac}{a+c}$, donc $c = \frac{ax}{a-x}$ & $c+x$ $=$ sout. de l'ellipse $= \frac{2ax - xx}{a-x} = \frac{aa - xx}{x}$, si l'on prend les abscisses depuis le centre ce qui est la valeur connue de la soutangente de l'ellipse. C'est donc fig. 28 la valeur de P E, mais dans le triangle rectangle P B U, on a $EU = \frac{BE^2}{PE} =$ $\frac{yy\,x}{aa - xx} = \frac{bb}{aa}.\,x$, voilà la valeur connue de la sounormale, donc la normale $N =$ $\sqrt{yy + \frac{b^4}{a^4}xx} = \frac{\sqrt{b^4x^2 + a^4b^2 - a^2b^2x^2}}{a^2}$ comme nous l'avons dit ci-dessus. Cette méthode s'applique également à la parabole & à l'hyperbole. Maintenant nous n'aurons pas de peine à trouver l'angle C B Q. Puisque $EU = \frac{bb}{aa}x$, on aura CU $= CE - EU = x - \frac{bb}{aa}x = \left(\frac{aa - bb}{bb}\right)x$, & faisant comme ci-dessus $b = 1$, $a = 1 + \delta$, on aura $\frac{aa - bb}{bb} = 2\delta$, donc $Cu = 2\delta x$ $= 2\delta(1 + \delta + \delta T^2)\sqrt{1 - T^2}$ (en mettant pour x sa valeur trouvée plus haut & négligeant les S^2) $= 2\delta\sqrt{1 - T^2} = 2\delta$ cos latitude. Mais angle $CBQ = \frac{CQ}{BC} = \frac{CQ}{BQ}$; or B Q

$= BU + UQ$, $= N + CU$ cof lat. (parce que $UQ = CU$ fin $UCQ = CU$ cof $CUQ = CU$ cof $BUE = CU$ cof lat $) = 1 - \delta + \delta T^2 + 2\delta(1 - T^2)$, (parce que $CU = 2\delta$ cof lat.) $= 1 + \delta - \delta T^2$, on a enfuite $CQ = CU$ cof $QCU = CU$ fin $CUQ = CU$ fin $BUE = CU$ fin lat. $= 2\delta$ fin lat. cof lat. $=$ donc $CBQ = \frac{2\delta \text{ fin lat. cof lat.}}{1 + \delta(1 - T^2)} = \frac{2\delta \text{ fin lat. cof lat.}}{1 + \delta \text{ cof lat.}^2} = 2\delta$ fin lat. cof lat. $= \delta$ fin 2 lat. (en négligeant dans la divifion les δ^2). C'eft d'après cette formule qu'ont été calculés les angles CBQ dans les tables de Berlin. Pour en donner un exemple, prenons la latitude de 46° qui eft à 12′ près celle de Geneve, & nous aurons $CBQ = \delta$ fin 92° $= \delta$ fin 88°, en voici le calcul :

$$l \text{ fin } 88° = \quad 9{,}9997354$$
$$l\delta = l\tfrac{1}{230} = -\ 2{,}3617278$$
$$\overline{\quad 7{,}6380076\quad}$$

Or cette derniere quantité fe trouve égale au finus de 14′. 58″, ou à un angle de 14′. 58″, car les arcs de cette petiteffe fe confondent avec leurs finus. Cet angle de 14′. 58″ eft effectivement celui qui correfpond dans les tables de Berlin à la latitude de 46° dans la colonne 10e.

Il fuit de ce que nous avons dit plus haut que les degrés de latitude font proportionels aux rayons ofculateurs de l'ellipfe à chaque latitude. Nous avons vu auffi que l'on a en général le rayon ofculateur

$R =$

$R = 1 - \delta + 3\delta T^2$, ce qui donne pour l'équateur où $T = 0$, $R = 1 - \delta$ & pour le pole où $T = 1$, $R = 1 + 2\delta$. Or le degré du méridien mesuré sous l'équateur par Mrs. Bouguer, la Condamine, &c. s'est trouvé de 56753 toises de 6 pieds, comme on peut le voir dans les ouvrages que ces Messieurs ont publiés. Mais comme ces déterminations sont sujettes à des erreurs qui peuvent aller à 50 & même à 100 toises & au-delà, M. Lambert a pris dans les tables de Berlin pour le degré du méridien sous l'équateur, 56700 toises & a calculé les degrés pour toutes les autres latitudes d'après la formule que je viens de donner. Soit donc E^I le degré connu du méridien sous l'équateur & D celui du méridien sous une latitude quelconque, par exemple de 46°, nous aurons par ce que j'ai dit ci-dessus, $E^I : D = 1 - \delta : 1 - \delta + 3\delta T^2$; donc $D =$

$$\frac{E^I(1 - \delta + 3\delta T^2)}{1 - \delta} = E^I(1 + 3\delta T^2).$$

En voici le calcul :

$$
\begin{array}{rcl}
l\,T & = & 9{,}8569341 \\
 & & \underline{2} \\
l\,T^2 & = & 9{,}7138682 \\
l\,3 & = & \underline{0{,}4771212} \\
l\,3\,T^2 & = & 0{,}1909894 \\
l\,\delta & = & \underline{2{,}3617278} \\
l\,3\,\delta T^2 & = & 7{,}8292616 \\
3\,\delta T^2 & = & 0{,}00675 \\
1 + 3\,\delta T^2 & = & 1{,}00675 \\
l(1 + 3\,\delta T^2) & = & 0{,}0029217 \\
l\,E^1 & = & \underline{4{,}7535831} \\
l\,D & = & 4{,}7565048 \\
D & = & 57084
\end{array}
$$

On trouve D = 57084, & en prenant la formule plus exactement on trouveroit D = 57085, ce qui est à peu près le nombre qui correspond dans les tables de Berlin à la latitude de 46° dans la seconde colonne, ce nombre est 57091, mais peut-être n'a-t-on pas mis dans ce calcul autant d'exactitude que je viens d'en mettre.

L'arc N B qui est dans la premiere colonne de ces tables n'est autre chose que la somme des degrès de latitude trouvés d'après le calcul précédent. Il seroit inutile d'en donner un exemple.

La quatrieme colonne contient les degrés de longitude, c'est-à-dire, les degrés des paralleles à l'équateur, le rayon du parallele eſt ce que nous appellons x, & nous avons vu ci-deſſus que $x = (1 + \delta)(\sqrt{1 - T^2} + \delta T^2 \sqrt{1 - T^2}) = \sqrt{1 - T^2} + \delta \sqrt{1 - T^2} + \delta T^2 \sqrt{1 - T^2}$. Ayant trouvé les degrés de latitude, on trouve facilement les degrés de longitude, car ſoit D le degré de latitude à la latitude dont le ſinus eſt T & P le degré de longitude, on aura $D : P = 1 - \delta + 3\delta T^2 : \sqrt{1 - T^2} + \delta \sqrt{1 - T^2} + \delta T^2 \sqrt{1 - T^2}$, donc $P =$

$$\frac{D(\sqrt{1 - T^2} + \delta\sqrt{1 - T^2} + \delta T^2 \sqrt{1 - T^2})}{1 - \delta + 3\delta T^2}$$

$$= D\sqrt{1 - T^2}\,(1 + 2\delta(1 - T^2)).$$

En voici le calcul pour la latitude de 46°.

$$
\begin{aligned}
l\sqrt{1 - T^2} &= 9{,}8417713 \\
l(1 - T^2) &= 9{,}6835426 \\
l\,2 &= \underline{0{,}3010300} \\
l\,2(1 - T^2) &= 9{,}9845726 \\
l\,\delta &= -\ \underline{2{,}3617278} \\
l\,2\delta(1 - T^2) &= 7{,}6228448 \\
2\delta(1 - T^2) &= 0{,}00420 \\
1 + 2\delta(1 - T^2) &= 1{,}00420 \\
l\sqrt{1 - T^2} &= 9{,}8417713 \\
l(1 + 2\delta(1 - T^2)) &= 0{,}0018202 \\
l\,D &= \underline{4{,}7565677} = l\,57091 \\
l\,P &= 4{,}6001592 \\
P &= 39824
\end{aligned}
$$

Ce degré s'accorde très-bien avec le nombre correſpondant des tables de Berlin qui eſt 39821.

La troiſieme colonne contient le rayon du parallele, c'eſt-à-dire, le rayon du cercle de longitude; or puiſque nous avons les degrés de longitude, nous aurons bientôt les rayons des paralleles, car on ſait que le rayon eſt égal à un arc de 57°. 17'. 45", on fera donc pour la la latitude de 46° cette proportion; 1°. : 39821 = 57°. 17'. 45" : x qu'on trouvera par la multiplication ſuivante;

	39821
	57
	278747
	199105
p — 15'	9955
2'	1327
30"	332
45"	166
	2281577

2281577 = rayon du parallele de 46°.

Cette valeur s'accorde aſſez bien avec le nombre correſpondant des tables de Berlin qui eſt de 2281609 toiſes; il y a apparence que j'ai pouſſé l'exactitude plus loin que les auteurs de ces tables.

La cinquieme colonne contient la tangente B T en toiſes; une ſimple proportion la fait connoître dès qu'on connoit le rayon du parallele B W, car on dira $BT : BW = \text{tang } NB : \text{fin } NB$, donc $BT = \frac{BW \ \text{tang } NB}{\text{fin } NB}$.

En voici le calcul pour la latitude de 46°, ce qui donne $NB = 44°$.

$$
\begin{aligned}
l\ BW &= 6{,}3582412 \\
l\ t.NB &= \underline{9{,}9848372} \\
l\ BW\ t.NB &= 6{,}3430784 \\
l\ \text{fin } NB &= \underline{9{,}8417713} \\
l\ BT &= 6{,}5013071 \\
BT &= 2281809
\end{aligned}
$$

Ce nombre s'accorde très-bien avec le nombre correfpondant des tables de Berlin qui eft de 2281810.

La huitieme colonne contient la hauteur verticale BQ en toifes. Pour la déduire de ce qui précede, nous remarquerons que $BQ = BU + UQ = 1 - \delta + \delta T^2 + 2\delta(1 - T^2) = 1 + \delta - \delta T^2$.

En voici le calcul pour la latitude de 46°.

$$
\begin{aligned}
l\ T^2 &= 9{,}7138682 \\
l\ \delta &= \underline{2{,}3617278} \\
l\ \delta T^2 &= 7{,}3521404 \\
\delta T^2 &= 0{,}00225
\end{aligned}
$$

Or $\frac{\delta T^2}{1} = \frac{\delta T^2}{1+\delta}$ à des quantités de l'ordre δ^2

près ; donc $1 + \delta - \delta T^2 = 1 - 0{,}00225 = 0{,}99775$. Cela nous donne B Q en parties de C A, & c'eſt le nombre qu'on trouve dans les tables de Berlin, mais je n'ai pris que 5 décimales, au lieu que les auteurs de ces tables en ont pris 7. Maintenant pour avoir B Q en toiſes, il faut multiplier $1 + \delta$ ou le rayon de l'équateur, c'eſt-à-dire, le rayon B W ſous l'équateur par la quantité trouvée ou bien retrancher de ce rayon qui eſt 3277123, ce même rayon multiplié par 0,00225,

$$\begin{array}{r} 3277123 \\ 0{,}00225 \\ \hline 16385615 \\ 6554246 \\ 6554246 \\ \hline 7373{,}52675 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3277123 \\ 7373 \\ \hline 3269750 \end{array}$$

Ce nombre s'accorde très-bien avec le nombre correſpondant dans les tables de Berlin, lequel eſt de 3269758.

La ſixieme colonne renferme la diſtance au centre B C en toiſes, elle eſt fort aiſée à connoître au moyen de B Q & de C B Q, car dans le triangle rectangle C B Q on a B C : B Q = 1 : coſ C B Q, donc $BC = \frac{BQ}{\text{coſ}\, CBQ}$.

En voici le calcul pour la latitude de 46°.

$$\begin{array}{rl} l\,BQ = & 6{,}5145154 \\ l\,\text{coſ}\,CBQ = & 9{,}9999959 \\ \hline l\,BC = & 6{,}5145195 \\ BC = & 3{,}269789 \text{ toiſes.} \end{array}$$

Cela s'accorde parfaitement avec le nombre correspondant des tables de Berlin.

Nous avons vu ci-dessus qu'on avoit C Q $= \delta$ sin 2 lat., ce qui fournit la valeur de C Q tant en parties du rayon de l'équateur qu'en toises, & c'est ce que contiennent les colonnes onzieme & neuvieme des tables de Berlin.

En voici le calcul pour la latitude de 46°.

$$
\begin{array}{rcl}
l \sin 92° & = & 9,9997354 \\
l\,\delta & = & -\ 2,3617278 \\
\hline
l\ CQ & = & 7,6380076 \\
CQ & = & 0,0043452
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
l\,CA & = & 6,5154927 \\
l\,CQ & = & 7,6380076 \\
\hline
 & & 4,1535003 \\
CQ & = & 14240 \text{ toises.}
\end{array}
$$

Cela s'accorde à peu près avec les nombres correspondans des tables de Berlin qui donnent C Q $=$ 0,0043486 & C Q $=$ 14251 toises. J'ignore d'où la différence peut venir, mais elle n'est pas essentielle.

Enfin la septieme colonne contient la perpendiculaire B R en toises, elle est facile à trouver par le moyen de C Q, car C Q $=$ R Q tang N C B $=$ R Q cot B C A $=$ R Q cot lat. donc R Q $=$ C Q tang lat.

En voici le calcul pour la latitude de 46°.

l C Q	=	4,1538453
l t. lat.	=	10,0151628
l R Q	=	4,1690081
R Q	=	14757
B Q	=	3269758
B R	=	3284515

Ce nombre s'accorde assez bien avec le nombre correspondant des tables de Berlin, lequel est 3284505. Il auroit peut-être été plus simple de chercher C Q avant B Q & d'en déduire B Q par la formule B Q = C Q cot C B Q, mais la différence n'est pas considérable.

On a suivi dans ces tables le rapport que Newton assigne aux axes, parce que quoiqu'il ne s'accorde pas parfaitement avec les observations, il ne s'en écarte cependant pas assez pour qu'on soit en droit de le rejeter, & d'ailleurs les rapports qu'on y substitué tirés des observations ne s'accordent point les uns avec les autres.

Par la même raison on a conservé l'hypothese elliptique, suivant laquelle les accroissemens des degrés sont proportionels aux quarrés des sinus de latitude ; les écarts des degrés mesurés d'avec cette regle ne sont point intolérables, comme on le verra plus bas. L'hypothese de M. Bouguer suivant laquelle les accroissemens des degrés sont proportionels aux

quarrés

quarrés quarrés des ſinus de latitude, ſatisfait mieux à quelques obſervations, & moins bien à d'autres, & quand elle feroit en tout un peu plus exacte en apparence, comme elle eſt purement empyrique, une légere différence d'exactitude ne mettroit pas en droit de la préférer à une regle déduite de la théorie. J'en dis autant de l'hypotheſe de M. Hennert qui a réuni les deux ſuppoſitions dont nous venons de parler. Voici une petite table qui fera voir ce qu'on doit attendre de l'hypotheſe elliptique.

TOISES.

Degrés calculés.	*Degrés meſurés.*	*Différenc.*	*Latitudes.*	*Obſervateurs.*
56700	56753	— 53	0°. 30'	Bouguer &c.
56930	57037	— 107	33. 18	La Caille.
57003	56888	+ 115	39. 12	Maſon.
57052	56979	+ 73	43. 1	Boſcovich.
57072	57048	+ 24	44. 33	Caſſini &c.
57075	57138	— 63	44. 44	Beccaria.
57090	56881	+ 209	45. 57	Lieſganig.
57094	57040	+ 54	46. 14	Caſſini &c.
57110	57071	+ 39	47. 28	Caſſini &c.
57126	57086	+ 40	48. 43	Lieſganig.
57134	57074	+ 60	49. 22	Caſſini &c.
57148	57092	+ 56	50. 27	Caſſini &c.
57168	57145	+ 23	52. 2	Spellius &c.
57181	57300	— 119	53. 0	Norwood.
57330	57404	— 74	66. 20	Maupertuis &c.

Quand l'on ſonge à la difficulté des meſures, on ne trouvera pas ces erreurs extraordinaires à deux ou trois près qui tombent préciſément ſur les degrés dont on pourroit le plus ſe défier. D'ailleurs ces erreurs étant en plus & en moins, empêchent qu'on ne penche d'un côté plutôt que de l'autre. Si l'on prenoit une moyenne entre toutes ces erreurs on ne trouveroit que 18 toiſes, ce qui eſt certainement une quantité à négliger.

Avant de terminer ce Chapitre, je démontrerai quelques formules relatives à cet objet, que M. de la Grange a données dans le Mémoire cité des Ephémérides de Berlin pour 1782. Il appelle l'angle B C A $= \varphi$ & l'angle B U A $= \Phi'$; on voit que $\operatorname{tang} \varphi = \frac{BE}{CE} = \frac{y}{x}$ & $\operatorname{tang} \Phi' = \frac{BE}{EU}$, mais nous avons ou ci-deſſus que la ſous-normale E U étoit $= \frac{bb}{aa} x = \varepsilon^2 x$ (en faiſant avec M. de la Grange $\varepsilon = \frac{b}{a}$) donc $\operatorname{tang} \Phi' = \frac{y}{\varepsilon^2 x}$, donc $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \Phi = \varepsilon^2 \operatorname{tang} \Phi'$, équation que donne M. de la Grange. Pour réduire cette équation en ſuite, nous emploierons la méthode expoſée ci-deſſus pour les formules de M. de la Grange ſur l'angle de poſition & l'aſcenſion droite. On a tang $(\Phi' - \Phi) = \frac{t.\,\Phi' - t.\,\Phi}{1 + t.\,\Phi'\,t.\,\Phi} =$ (en mettant pour t. ϕ sa valeur) $\dfrac{t.\,\Phi^{1} - \varepsilon^{2}\ t.\,\Phi^{1}}{1 + \varepsilon^{2}\ t.\,\Phi^{12}} =$

$$\frac{t.\,\Phi^{1}\ (1 - \varepsilon^{2})}{1 + \varepsilon^{2}\ t.\,\Phi^{12}} = \frac{\dfrac{\sin \Phi^{1}}{\cos \Phi^{1}}\ (1 - \varepsilon^{2})}{1 + \varepsilon^{2}\ \dfrac{\sin \Phi^{12}}{\cos \Phi^{12}}} =$$

$$\frac{(1 - \varepsilon^{2})\ \sin \Phi^{1}\ \cos \Phi^{1}}{\cos \Phi^{12} + \varepsilon^{2}\ \sin \Phi^{12}} =$$

$$\frac{\dfrac{(1 - c^{2})}{2} \sin 2\,\Phi^{1}}{\cos \Phi^{12} + \varepsilon^{2} - \varepsilon^{2} \cos \Phi^{12}} = \frac{\dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2} \sin 2\,\Phi^{1}}{(1 - \varepsilon^{2}) \cos \Phi^{12} + \varepsilon^{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2}\ \sin 2\,\Phi^{1}}{\dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2} (1 + \cos 2\,\Phi^{1}) + \varepsilon^{2}} =$$

$$\frac{\dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2}\ \sin 2\,\Phi^{1}}{\varepsilon^{2} + \dfrac{1 - \varepsilon^{2}}{2} + \dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2} \cos 2\,\Phi^{1}} =$$

$$\frac{\dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2} \sin 2\,\Phi^{2}}{\dfrac{1 + \varepsilon^{2}}{2} + \dfrac{(1 - \varepsilon^{2})}{2} \cos 2\,\phi^{1}} =$$

$$\frac{(1 - \varepsilon^{2}) \sin 2\,\Phi^{1}}{1 + \varepsilon^{2} + (1 - \varepsilon^{2}) \cos 2\,\Phi^{1}} = \frac{\dfrac{1 - \varepsilon^{2}}{1 + \varepsilon^{2}} \sin 2\,\Phi^{1}}{1 + \dfrac{1 - \varepsilon^{2}}{1 + \varepsilon^{2}} \cos 2\,\Phi^{1}}$$

$= \frac{k \sin 2\Phi^{I}}{1 + k \cos 2\Phi^{I}}$ (en faiſant pour abréger $k = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$). Or $\varphi^{I} - \varphi = \text{t.} (\varphi^{I} - \varphi) - \frac{1}{3} \text{t.} (\varphi^{I} - \varphi)^3 + \frac{1}{5} \text{t.} (\varphi^{I} - \varphi)^5$ &c. Mais t. $(\varphi^{I} - \varphi) = k \sin 2\varphi^{I} (1 - k \cos 2\varphi^{I} \text{ \&c.}) = k \sin 2\Phi^{I} - k^2 \sin 2\Phi^{I} \cos 2\Phi^{I}$, donc $\varphi^{I} - \varphi = k \sin 2\varphi^{I} - \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi^{I}$ &c. & $\varphi = \Phi^{I} - k \sin 2\Phi^{I} + \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi^{I}$ &c. $= \Phi^{I} - \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\right) \sin 2\varphi^{I} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\right)^2 \sin 4\Phi^{I}$ &c.

C'eſt ce que trouve M. de la Grange. Il appelle enſuite le rayon de ſpéroïde $CB = \varrho$, on aura donc $\varrho^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{bb}{aa}(aa - xx) = x^2 + \varepsilon^2 (1 - xx)$ (en faiſant le rayon de l'équateur $a = 1$). Mais $x = \varrho \cos \varphi$ donc $\varrho^2 = \varrho^2 \cos \varphi^2 + \varepsilon^2 (1 - \varrho^2 \cos \Phi^2)$ ou $\varrho^2 (1 - \cos \varphi^2 + \varepsilon^2 \cos \Phi^2) = \varepsilon^2$ & $\varrho =$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi^2}} =$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{(1 - \varepsilon^2)}{2} - \frac{(1 - \varepsilon^2)}{2} \cos 2\Phi}} =$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2} - \frac{(1 - \varepsilon^2)}{2} \cos 2\Phi}}.$$

Or $\cos 2\phi = \cos\phi^2 - \sin\phi^2 =$
$\left(1 - \frac{\sin\phi^2}{\cos\phi^2}\right)\cos\phi^2 = \frac{1 - \tan\phi^2}{\sec\phi^2} =$
$\frac{1 - \tan\phi^2}{1 + \tan\phi^2} = \frac{1 - \varepsilon^4 \frac{\tan\phi'^2}{}}{1 + \varepsilon^4 \tan\phi'^2}$. Mais $\tan\phi'^2$
$= \frac{\sin\phi'^2}{\cos\phi'^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\phi'}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi'} =$
$\frac{1 - \cos 2\phi'}{1 + \cos 2\phi'}$, donc $\cos 2\phi =$

$$\frac{1 - \varepsilon^4\left(\frac{1 - \cos 2\phi'}{1 + \cos 2\phi'}\right)}{1 + \varepsilon^4\left(\frac{1 - \cos 2\phi'}{1 + \cos 2\phi'}\right)} =$$

$$\frac{1 + \cos 2\phi' - \varepsilon^4(1 - \cos 2\phi')}{1 + \cos 2\phi' + \varepsilon^4(1 - \cos 2\phi')} =$$

$$\frac{1 - \varepsilon^4 + (1 + \varepsilon^4)\cos 2\phi'}{1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4)\cos 2\phi'}.$$ Donc $\rho =$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2} - \frac{(1-\varepsilon^2)}{2}\left(\frac{1 - \varepsilon^4 + (1+\varepsilon^4)\cos 2\phi'}{1 + \varepsilon^4 + (1-\varepsilon^4)\cos 2\phi'}\right)}} =$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4)\cos 2\phi'}}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{2}\left(1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4)\cos 2\phi'\right) - \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2}\right)\left(1 - \varepsilon^4 + (1 + \varepsilon^4)\cos 2\phi'\right)}}$$

$$= \frac{\varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4) \cos 2 \phi^{1}}}{\sqrt{\varepsilon^4 - \varepsilon^4 \cos 2 \phi^{1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos 2 \phi^{1}}} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon^4) \cos 2 \phi^{1}}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2) \cos 2 \phi^{1}}}$$

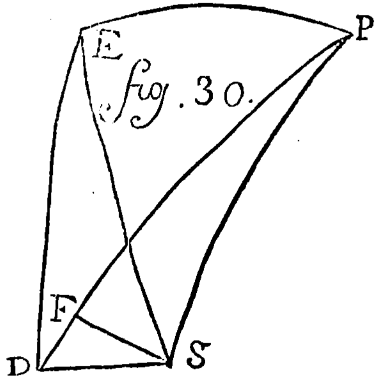
Ce ſont les formules que donne M. de la Grange.

CHAPITRE XI.

De l'usage de la trigonometrie sphérique dans le calcul astronomique de la précession des équinoxes, de l'aberration, nutation, du changement de position des astres produit par la variation de l'obliquité de l'écliptique, &c.

LA terre étant un sphéroïde applati aux poles, l'attraction que le soleil & la lune exercent sur l'équateur de la terre, fait que cet équateur change de place relativement aux étoiles fixes, en sorte que l'intersection de l'écliptique avec l'équateur est variable, c'est ce qu'on appelle la précession des équinoxes, parce que cela fait avancer les équinoxes d'environ $50'' \frac{1}{3}$ par année. Les longitudes des étoiles se comptant depuis cette intersection au point du bélier, leur longitude varie toutes les années de cette quantité. Il s'agit de savoir quel effet a ce changement de longitude sur l'ascension droite & la déclinaison des étoiles, c'est-à-dire, de trouver la précession en ascension droite & en déclinaison, par le moyen de la précession en longitude. Comme cette précession annuelle est fort petite un simple usage des analogies différentielles suffit pour nous donner ce que nous cherchons.

Soit E le pole de l'écliptique, & P le pole de l'équateur, S une étoile, S D un parallele à l'écliptique, S F un parallele à l'équateur. Que la préceſſion ait fait varier l'étoile de S en D, l'angle SED ſera la préceſſion en longitude, S P D ſera la préceſſion en



aſcenſion droite, & D F ſera la préceſſion en déclinaiſon. Le triangle E S P s'eſt changé en E D P par l'effet de la préceſſion, E P eſt reſté le même, & E D = E S, il faut donc chercher les variations d'un triangle ſphérique qui a deux côtés conſtans, & l'on aura par le troiſieme Cas des analogies différentielles S E D : S P D = ſin P S : coſ E S P ſin E S ou préc. en long. : préc. en aſc. dr = coſ déclin. : coſ angle poſit. coſ latit ; donc préc. en aſc. dr. = préc. en long. coſ angle poſit. $\frac{\text{coſ latit.}}{\text{coſ décl.}}$ Mais nous avons vu plus haut que ſin

$$\text{angl. poſit.} = \frac{\text{coſ aſc. dr. ſin obl. éclipt.}}{\text{coſ lat.}} =$$

$\frac{\text{coſ}\ \Phi\ \text{ſin}\ \varepsilon}{\text{coſ}\ \beta}$ (en faiſant aſc. dr. $= \Phi$, obl. éclipt. $= \varepsilon$, lat. $= \beta$, long. $= \lambda$, décl. $= \delta$) ; donc

coſ

$\cos$ angl. posit. $= \frac{\sqrt{\cos \beta^2 - \cos \phi^2 \sin \epsilon^2}}{\cos \beta}$. Or j'ai démontré aussi que $\sin \beta = \cos \epsilon \sin \delta + \sin \phi \sin \epsilon \cos \delta$, donc $\cos \beta^2 = 1 - \cos \epsilon^2 \sin \delta^2 - \sin \phi^2 \sin \epsilon^2 \cos \delta^2 - 2 \sin \phi \sin \delta \cos \delta \sin \epsilon \cos \epsilon$, donc $\sqrt{\cos \beta^2 - \phi^2 \sin \epsilon^2} =$

$\sqrt{1 - \cos \epsilon^2 \sin \delta^2 - \sin \phi^2 \sin \epsilon^2 \cos \delta^2 - 2 \sin \phi \sin \delta \cos \delta \sin \epsilon \cos \epsilon - \cos \phi^2 \sin \epsilon^2} =$

$\sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 - \cos \epsilon^2 \sin \delta^2 - \sin \phi^2 \sin \epsilon^2 \cos \delta^2 - 2 \sin \phi \sin \delta \cos \delta \sin \epsilon \cos \epsilon - \cos \phi^2 \sin \epsilon^2} =$

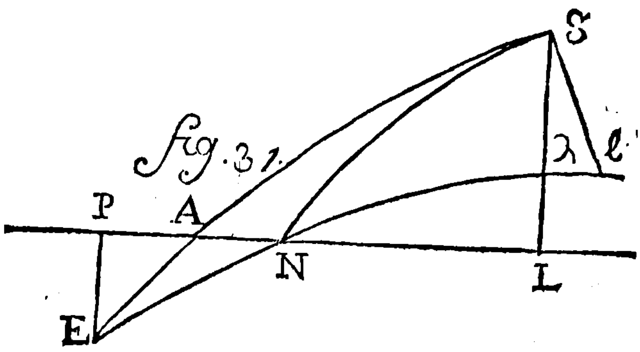
$\sqrt{\cos \epsilon^2 + \sin \epsilon^2 \sin \phi^2 - \cos \epsilon^2 \sin \delta^2 - \sin \phi^2 \sin \epsilon^2 \cos \delta^2 - 2 \sin \phi \sin \delta \cos \delta \sin \epsilon \cos \epsilon} =$

$\sqrt{\cos \epsilon^2 \cos \delta^2 + \sin \epsilon^2 \sin \phi^2 \sin \delta^2 - 2 \sin \phi \sin \delta \cos \delta \sin \epsilon \cos \epsilon} = \cos \epsilon \cos \delta - \sin \epsilon \sin \phi \sin \delta$. Donc cos angl. posit. $= \frac{\cos \epsilon \cos \delta - \sin \epsilon \sin \phi \sin \delta}{\cos \beta}$ & préc. en asc. dr. $=$ préc. en long. $(\cos \epsilon - \sin \epsilon \sin \phi \tang \delta)$, c'est la formule que donne M. de la Lande, Astr. §. 2164.

Pour avoir la précession en déclinaison on considérera qu'on a par le même cas des analogies différentielles, SED : DF $=$ 1 : sin EPS sin PE donc DF $=$ SED sin EPS sin PE ou préc. en décl. $=$ préc. en long. cos asc. dr. sin obl. écliptique., c'est la formule que donne M. de la Lande §. 2168.

Les formules que donne M. de la Lande §. 2187 & suiv. relativement aux changemens que produit ſur les aſtres la variation de l'obliquité de l'écliptique, reviennent au même que celles que l'on trouve dans les tables aſtronomiques de Berlin, Tom. II. p. 279 : voici une maniere très-ſimple de les enviſager.

Soit A N la poſition de l'écliptique au commencement de 1760, E N λ celle qu'elle a priſe après, ou qu'elle avoit avant, en ſuppoſant A N E très-petit ; ſoit un point fixe en S, menant l'arc S N, on aura le triangle ſphérique S A N, dans lequel le côté S N, & l'angle A S N ſont conſtans, E A S eſt l'équateur,



A eſt l'équinoxe pour 1760, E l'équinoxe au bout du tems t, A E eſt donc le mouvement des points équinoctiaux en aſcenſion droite ; voyons donc quelle eſt cette variation. Nous avons par le premier Cas des analogies différentielles d A S : d A N S = ſin A N : ſin N A S ou A E : A N E = ſin A N : ſin N A S. Or A N E eſt l'inclinaiſon des deux écliptiques que M. de la Grange appelle y dans les Mémoires de Paris de 1774, AN est la longitude du nœud que M. de la Grange appelle x, & SAN est l'obliquité de l'écliptique que M. de la Grange fait de $23^\circ\frac{1}{2}$, donc AE : y = sin x : sin $23^\circ\frac{1}{2}$, donc $AE = \frac{y \sin x}{\sin 23^\circ \frac{1}{2}} = y \sin x \operatorname{cosec} 23^\circ\frac{1}{2}$, c'est le mouvement des points équinoctiaux en ascension droite.

L'obliquité de l'écliptique qui étoit l'angle SAN en 1760 est devenue SEN; pour avoir la variation de cette obliquité, considérant le même triangle que ci-devant, on aura par le même cas des analogies différentielles d AS : d SAN = tang AN : sin NAS, ou AE : d SAN = t. x : sin $23^\circ\frac{1}{2}$, ou en mettant la valeur trouvée de AE, $\frac{y \sin x}{\sin 23^\circ \frac{1}{2}}$: d SAN = tang x : sin $23^\circ\frac{1}{2}$, donc $d\,SAN = \frac{y \sin x}{\tang x} = y \cos x$, c'est la variation de l'obliquité de l'écliptique.

Pour avoir maintenant le mouvement des points équinoctiaux en longitude, on abbaissera du point E un arc EP sur AN, & l'on cherchera la variation AP du côté AN, l'on aura toujours par le même cas des analogies différentielles, d AN : d ANS = sin AN : tang NAS, ou AP : ANE = sin x : tang $23^\circ\frac{1}{2}$ ou AP : y = sin x : tang $23^\circ\frac{1}{2}$, donc

$AP = \frac{y \text{ fin } x}{\text{tang } 23^\circ \frac{1}{2}} = y \text{ fin } x \text{ cot } 23^\circ \frac{1}{2}$, c'eſt la variation des points équinoctiaux en longitude.

Soit maintenant S une étoile fixe dont S L fut la latitude & A L la longitude en 1760; la variation de l'écliptique a fait que la latitude eſt devenue $S l$, & la longitude $E l$, or l'angle $L S l$ eſt évidemment égal à l'angle $L N l$, égal à l'inclinaiſon des deux écliptiques, & cette inclinaiſon étant très-petite, $S \lambda$ eſt ſenſiblement égal à $S l$; pour avoir donc la variation de la latitude, nous conſidérerons le triangle S N L dans lequel le côté S N demeure conſtant auſſi-bien que l'angle qui lui eſt oppoſé, puiſque cet angle doit toujours être droit; on a donc par le ſecond Cas des analogies différentielles $d SNL : d SL = \text{tang } SNL : \text{tang } SL$, mais on a par le ſecond Cas des trig. rect. $\text{tang } SNL : \text{tang } SL = 1 : \text{fin } NL$, donc $d\, SNL : d\, SL = 1 : \text{fin } NL$, or $d SNL = LNl = y$ & $NL = AL - AN = \lambda - x$ (j'appelle λ la longitude de l'étoile & ς ſa latitude) donc $y : d SL = 1 : \text{fin} (\lambda - x)$, donc $d\, SL = - y \text{ fin} (\lambda - x)$, je mets le ſigne $-$ parce que la variation eſt une diminution, c'eſt la variation de l'étoile en latitude.

Pour avoir la variation en longitude, nous conſidérerons que nous avons déja la variation de A N qui eſt $= \frac{y \text{ fin } x}{\text{tang } 23^\circ \frac{1}{2}}$, pour avoir celle de N L nous remarquerons que dans un triangle qui a un côté SN & l'angle opposé constant, on a par le second Cas des analogies différentielles, d N L : d S N L $=$ tang S L cos N S L : sin S N L $=$ $\frac{\text{tang S L cos N S L}}{\text{sin S N L}}$: 1, mais par le sixieme Cas des triangles rectangles, on a $\frac{\text{cos N S L}}{\text{sin S N L}} = \text{cos N L}$ donc d N L : d S N L $=$ tang S L cos N L : 1, ou d N L : y $=$ t. ζ cos $(\lambda - x)$: 1, donc d N L $= y$ cos $(\lambda - x)$ tang ζ. Il faut y ajouter A P avec le signe $-$ parce qu'il se prend en sens contraire, donc la variation de l'étoile en longitude sera $= y$ cos $(\lambda - x)$ tang $\zeta - y$ sin x cot $23^\circ \frac{1}{2}$.

Les formules que nous venons de trouver, & qu'à données M. de la Grange dans les Mémoires de Paris de 1774 ne different que pour les dénominations de celles qui se trouvent dans l'endroit cité des tables astronomiques de Berlin, comme je vais le faire voir. Je fais $\sigma' = y$ sin x & $\upsilon' = y$ cos x (je mets y au lieu de tang y à cause de la petitesse de l'angle) ce qui me donne tang $x = \frac{\sigma'}{\upsilon'}$ & $y =$ $\sqrt{\sigma'^2 + \upsilon'^2}$. Maintenant j'ai pour la variation de l'obliquité de l'écliptique, y cos $x = \upsilon'$, pour la variation de la précession des équinoxes en longitude, y sin x cot $23^\circ \frac{1}{2} = \sigma'$ cot $23^\circ \frac{1}{2}$, pour la variation de la précession en ascension droite y sin x

cosec $23^\circ\frac{1}{2}$ $=$ σ^{I} cosec $23^\circ\frac{1}{2}$, pour la variation d'un astre en latitude — y sin $(\lambda - x)$ $= y$ sin x cos $\lambda - y$ sin λ cos $x = \sigma^{\mathrm{I}}$ cos λ — v^{I} sin λ, pour la variation de cet astre en longitude y cos $(\lambda - x)$ tang $\zeta - y$ sin x cot $23^\circ\frac{1}{2}$ $=$ $(y$ cos λ cos $x + y$ sin λ sin $x)$ t. $\zeta - y$ sin x cot $23^\circ\frac{1}{2}$ $=$ $(v^{\mathrm{I}}$ cos $\lambda + \sigma^{\mathrm{I}}$ sin $\lambda)$ t. $\zeta - \sigma^{\mathrm{I}}$ cot $23^\circ\frac{1}{2}$. Ce sont là les formules des tables de Berlin, avec cette seule différence que l'on y prend l'obliquité de l'écliptique de $23^\circ.\ 28\frac{1}{2}$ au lieu de $23^\circ\frac{1}{2}$.

La lumiere qui nous vient des étoiles ayant un mouvement non pas instantané, mais successif, & la vitesse de ce mouvement n'étant pas infinie en comparaison du mouvement de la terre, il se trouve que pendant que le rayon vient du soleil à nous, la terre parcourt un certain arc de son orbite, ce qui fait qu'un observateur placé sur la terre rapporte l'étoile à un endroit du ciel différent de celui où elle est réellement.

La différence entre ces deux endroits est ce qu'on appelle l'aberration.

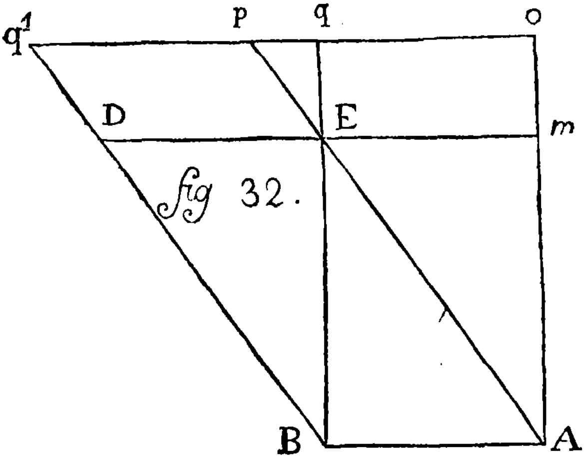


fig 32.

Pour nous en former une idée nette, nous supposerons que EB soit la vîtesse de la lumiere & AB celle de la terre ; menons ED égale & parallele à AB & achevons le parallelélogramme EDBA ; la vîtesse EB de la lumiere peut être considerée comme décomposée en ED & BD ; cela posé, la lumiere étant en E lorsque la terre est en A arrivera en B en même tems que la terre, si la lumiere venoit instantanément la terre verroit l'étoile en q dans la direction BEq, mais à cause du mouvement successif de la lumiere qu'on peut considérer comme décomposé en ED & BD, le mouvement suivant DE étant parallele & égal à celui de la terre est insensible pour la terre, elle ne s'apperçoit donc que du mouvement BD, la terre voit donc l'étoile dans la direction BDq^1 ou AEp qui lui est parallele, l'étoile paroît donc en p au lieu de paroître en q, plus avancée du côté ou va la terre de l'angle

$pEq = BEA = \frac{BA}{BE}$. Or on ſait par les éclipſes des ſatelliſtes de jupiter que la lumiere du ſoleil met environ $8'.\ 8''$ à parvenir à nous dans les moyennes diſtances, pendant ce tems là la terre parcourt un arc d'environ $20''$. Ainſi l'aberration peut aller à $20''$ tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, ce qui fait $40''$, comme l'indiquent les obſervations. Il y a une maniere plus ſimple de conſidérer la choſe. Suppoſons la terre immobile en A, & donnons au rayon ſon mouvement en ſens contraire Em, la poſition relative A, m ſera préciſément la même que la poſiſition B, E. Si le rayon étoit parti depuis m, on auroit vu l'étoile en o depuis la terre, mais il eſt parti depuis E, on voit donc l'étoile en p, la différence de ces deux lieux ou l'aberration eſt l'angle EAm = BEA, en ſorte que l'aberration fait toujours paroître l'étoile plus avancée dans le ſens du mouvement de la terre, c'eſt d'après ce principe que nous allons déterminer les aberrations en longitude & en latitude ſuivant les ſituations diverſes du ſoleil & de la terre relativement à l'étoile. Nous ſuppoſerons d'abord l'étoile dans le plan même de l'écliptique, nous lui donnerons enſuite une latitude quelconque.

Soit

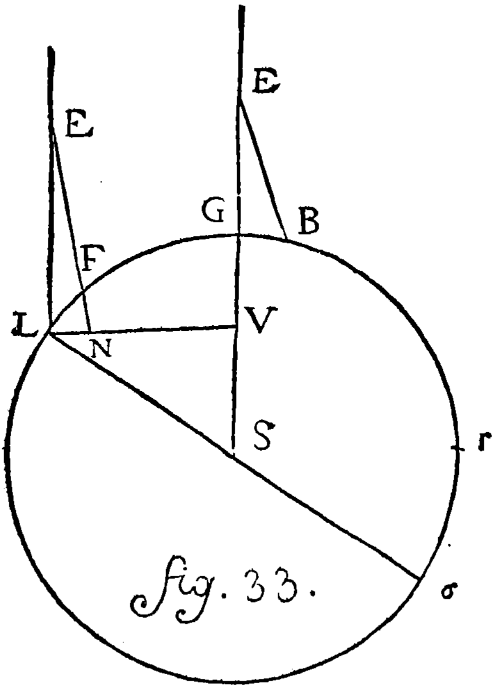
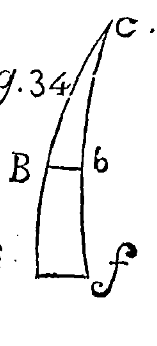


fig. 33.

Soit le ſoleil en S, l'étoile en E, la terre allant de B en G, lieu où l'étoile paroît en oppoſition avec le ſoleil, l'arc B G étant alors perpendiculaire à la ligne E G, l'aberration ſera de 20″ vers l'Orient, puiſque la terre ſe meut d'Occident en Orient, en ſorte que la longitude de l'étoile ſera augmentée de 20″. Lorſque la terre va de F en L à la diſtance G L de l'oppoſition, l'arc L F eſt oblique ſur la ligne E L, il ne meſure plus l'angle L E F; mais cet angle eſt meſuré par L N = L F coſ L F N = L F cof L G = 20″ cof L G (car l'arc formé par la tangente & par la corde eſt meſuré par la moitié de l'arc ſouſtendu par la corde). Or cof L G eſt le coſinus de la différence des longitudes de la terre & de l'étoile, car ſoit ♈ le premier point du bélier d'où ſe comptent les longitudes, ♈ L ſera la longitude de la terre, & ♈ G celle de l'étoile, ce coſinus de L G ou de L S G eſt auſſi le coſinus de G σ ou de G ♌ σ pris avec un ſigne contraire, c'eſt-à-dire, qu'il eſt auſſi le coſinus de la différence des longitudes du ſoleil & de l'étoile, en ſorte qu'on a aberr. en long. = — 20″ cof (long. ☉ — long. et.) Voilà ce qui a lieu ſi l'étoile eſt placée dans le plan de l'écliptique. Si elle en eſt éloignée, alors ce que nous venons de déterminer, au lieu d'être déterminé ſur l'écliptique le ſera ſur un arc de grand cercle parallele à l'écliptique, & il faudra réduire cette détermination à l'écliptique, ce qui n'eſt pas difficile. Soit C le pole de l'écliptique, F*f* une portion de l'écliptique, C F, C*f* deux cercles de latitude, B *b* un arc de grand cercle mené parallélement à l'écliptique à la latitude B, on aura dans le triangle rectangle B C *b* par l'analogie commune 1 : ſin B C = ſin C : ſin B *b* = C : B *b* (les petits arcs & les petits angles ſe confondant avec leurs ſinus) = F*f* : B *b*, F*f* étant la meſure de l'an-

Fig. 34



gle C, donc $Ff = \frac{Bb}{\text{ſin } BC} = \frac{Bb}{\text{coſ lat.}}$, donc il faut diviſer notre expreſſion trouvée par le coſinus de la latitude pour la réduire à l'écliptique, donc, aberr. en long. $= -$
$\frac{20'' \text{ coſ (long. } \odot - \text{long. et.)}}{\text{coſ lat. et.}}$.

C'eſt la formule qui ſe trouve dans les tables de Berlin, Tom. III. pag. 163, & dans l'aſtronomie de M. de la Lande §. 2256.

Pour trouver maintenant l'aberration en latitude, concevons une étoile S élevée au-deſſus du plan du papier qui repréſente l'écliptique, abaiſſons la perpendiculaire S N ſur ce plan, & ſoit la terre en A,

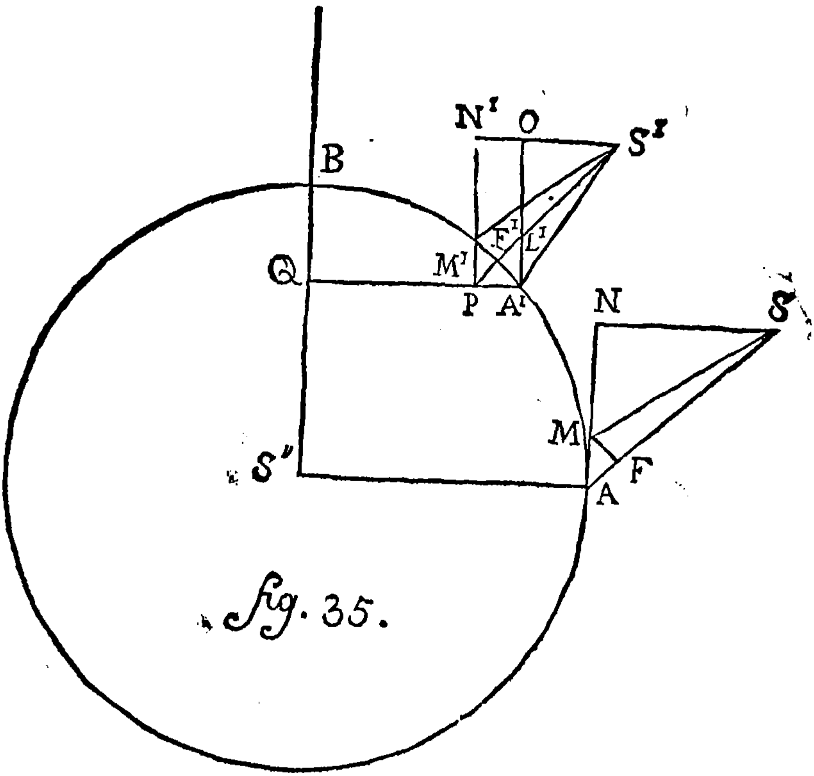


fig. 35.

en forte que l'étoile foit en quadrature à 90° de l'oppofition, menons la ligne A M N, la latitude de l'étoile étoit S A N, mais la terre étant allée de A en M, la latitude eft devenue S M N, c'eft la différence de ces deux latitudes S M N — S A N = A S M qu'on appelle l'aberration en latitude; menons l'arc M F depuis S, cet arc qui eft la mefure de A S M eft = A M fin S A N = 20″ fin lat. Soit maintenant l'arc A M tranfporté en A' M', il faudra prendre la différence des angles $S^1 M^1 N^1$, $S^1 A^1 O$ ou $S^1 M^1 N^1$, $S^1 P N^1$, $N^1 M P^1$ étant perpendiculaire sur $Q A^1$, cette différence est l'angle $P S^1 M^1$, & l'arc $M^1 F^1$ qui est sa mesure $= M^1 P$ sin $S^1 P N^1 = M^1 P$ sin latit. ; mais $M^1 P = A^1 M^1$ sin $P A^1 M^1 = A^1 M^1$ sin $A^1 B$; donc $M^1 F^1 = A^1 M^1$ sin $A^1 B$ sin latit., donc aberr. en latit. $= - 20''$ sin (long. ☉ — long et.) sin lat. et.

C'est la formule qui se trouve dans les tables de Berlin, Tom. III. pag. 163 & dans l'astronomie de M. de la Lande §. 2261.

Connoissant l'aberration en longitude & en latitude, on peut en déduire l'aberration en ascension droite & en déclinaison ; il y a plusieurs méthodes pour le faire qui sont toutes en partie synthétiques, nous allons le faire d'une maniere purement analytique. Ce problême considéré en général se réduit à celui-ci : Ayant les coördonnées d'une courbe rapportée à un axe, chercher les coordonnées de la même courbe rapportée à un autre axe.

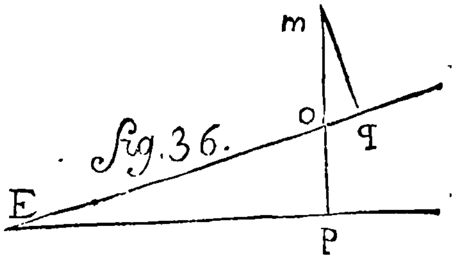


fig. 36.

Soit le point m déterminé par les coordonnées connues Ep & $p\,m$, on cherche les coordonnées Eq, $q\,m$ relatives à l'axe Eq qui fait avec l'axe Ep l'angle pE$q = p$. Soient E$p = x$, $pm = y$, on aura $Eo = \frac{Ep}{\operatorname{cos} pEo} = \frac{x}{\operatorname{cos} p}$ & $oq = mo \operatorname{sin} p$, $op = x \operatorname{tang} p$, donc $mo = y - x \operatorname{tang} p$ & $oq = y \operatorname{sin} p - \frac{x \operatorname{sin} p^2}{\operatorname{cos} p}$, donc $Eq = Eo + oq = \frac{x}{\operatorname{cos} p} + y \operatorname{sin} p - \frac{x \operatorname{sin} p^2}{\operatorname{cos} p} = \frac{x + y \operatorname{sin} p \operatorname{cos} p - x \operatorname{sin} p^2}{\operatorname{cos} p} = \frac{x \operatorname{cos} p^2 + y \operatorname{sin} p \operatorname{cos} p}{\operatorname{cos} p} = x \operatorname{cos} p + y \operatorname{sin} q$ & $mq = mo \operatorname{cos} p = y \operatorname{cos} p - x \operatorname{sin} p$. Supposons maintenant long. ☉ — long. et. $= \varepsilon$, compl lat. et. $= \text{H}$, nous aurons l'aberration en longitude (je la prends avant de la réduire à l'écliptique) $= - 20'' \operatorname{cos} \varepsilon$, & l'aberration en latitude $= - 20'' \operatorname{sin} \varepsilon \operatorname{cos} \text{H}$, soit E$p = x =$ aberr. en latit. & $pm = y =$ aberr. en longitude, Ep représentant l'axe de l'écliptique & E q celui de l'équateur, on aura E q $=$ aberr. en déclinaiſon & $q\,m$ $=$ aberr. en aſcenſion droite, mettant donc pour x & y leurs valeurs, nous aurons aberr. en aſc. dr. $=$ coſ ε coſ p $-$ ſin ε ſin p coſ H, & aberr. en décl. $=$ coſ ε ſin p $+$ ſin ε coſ p coſ H (je fais abſtraction de $-$ 20″ pour abréger, je le rétablirai à la fin du calcul). Voilà les valeurs analytiques des aberrations en aſcenſion droite & en déclinaiſon, mais comme ces valeurs paroiſſent peu propres à être réduites en tables, on leur a fait ſubir diverſes réductions pour les adapter aux uſages aſtronomiques & les ramener à une forme plus ſimple. Toutes les conſidérations qu'on a fait là-deſſus peuvent ſe déduire des formules que nous venons de trouver, comme on va le voir. On cherche d'abord quand eſt-ce que l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande; pour le trouver, il n'y a qu'à égaler à zero la différentielle de la formule que nous avons donnée, nous aurons donc, $-\,d\,\varepsilon$ ſin ε coſ p $-\,d\,\varepsilon$ coſ ε ſin p coſ H $= o$, ou $\frac{\text{ſin}\ \varepsilon}{\text{coſ}\ \varepsilon} = \text{tang}\ \varepsilon = -\frac{\text{ſin}\ p}{\text{coſ}\ p}$ coſ H $= -$ tang p coſ H. Pour voir ce qui réſulte de cette formule, il faut conſidérer la figure ſuivante.

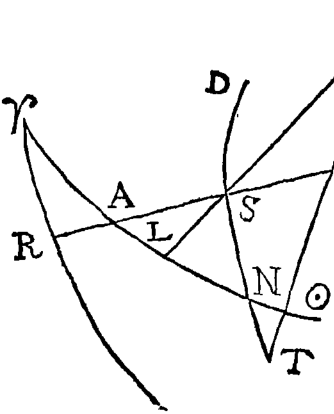


Fig. 37.

Soit E le pole de l'écliptique, P celui de l'équateur, ♈ L l'écliptique, ♈ R l'équateur, E L un cercle de latitude qui passe par l'étoile S, P A R un cercle de déclinaison qui passe par la même étoile S, E S est le complément de la latitude de l'étoile, que nous avons nommé κ, E S P = A S L = R ♈ A est l'angle de position que nous avons nommé p, L ☉ = ♈ ☉ — ♈ L est ce que nous avons appellé s, ainsi adaptant notre formule à cette figure, nous aurons tang L ☉ = — tang A S L cos E S = — tang A S L sin S L. Mais nous avons par le troisieme Cas des triangles rectangles tang A S L sin S L = tang A L donc tang L ☉ = — tang A L; donc au tems de la plus grande aberration en longitude, le soleil doit être en A, c'est-à-dire, que le cercle de déclinaison qui passe par l'étoile doit aussi passer par le soleil. Voyons ce que devient dans ce cas l'aberration en ascension droite; notre formule

nous

nous donne $\operatorname{cof} \text{H} = -\frac{\operatorname{tang} \varepsilon}{\operatorname{tang} p}$. Subſtituant cette valeur dans la valeur de l'aberration en aſcenſion droite, on aura $\operatorname{cof} \varepsilon \operatorname{cof} p + \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{fin} p \frac{\operatorname{tang} \varepsilon}{\operatorname{tang} p}$ $= \operatorname{cof} \varepsilon \operatorname{cof} p + \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{cof} p \operatorname{tang} \varepsilon =$ $\frac{\operatorname{cof} \varepsilon^2 \operatorname{cof} p + \operatorname{fin} \varepsilon^2 \operatorname{cof} p}{\operatorname{cof} \varepsilon} = \frac{\operatorname{cof} p}{\operatorname{cof} \varepsilon} = \frac{\operatorname{cof} ASL}{\operatorname{cof} AL}$.
Mais on a par le même cas des triangles rectangles $\operatorname{cof} ASL = \operatorname{cof} AL \operatorname{fin} SAL = \operatorname{cof} AL \operatorname{fin} \Upsilon AR$, donc l'aberration en aſcenſion droite ſera proportionelle à $\operatorname{fin} \Upsilon AR$, ou $= - 20'' \operatorname{fin} \Upsilon AR$. Or dans le triangle ΥAR, connoiſſant l'aſcenſion droite ΥR & l'angle de poſition $A \Upsilon R$ de l'étoile, on connoîtra ΥA, longitude du point où doit être le ſoleil au tems de la plus grande aberration, & ΥAR argument de cette plus grande aberration. Pour que cette recherche ſoit utile, il faut pouvoir exprimer l'aberration dans tous les cas par une fonction de $\operatorname{fin} \Upsilon AR$ auquel eſt proportionelle la plus grande aberration. Pour cela reprenons la formule de l'aberration en aſcenſion droite, $\operatorname{cof} \varepsilon \operatorname{cof} p - \operatorname{fin} \varepsilon \operatorname{fin} p \operatorname{cof} \text{H} = \operatorname{cof} L \odot \operatorname{cof} ASL - \operatorname{fin} L \odot \operatorname{fin} ASL \operatorname{fin} SL$. Subſtituons au lieu de $L \odot$ ſa valeur $A \odot - AL$, & nous aurons $\operatorname{cof} A \odot \operatorname{cof} AL \operatorname{cof} ASL + \operatorname{fin} A \odot \operatorname{fin} AL \operatorname{cof} ASL - \operatorname{fin} A \odot \operatorname{cof} AL \operatorname{fin} ASL \operatorname{fin} SL + \operatorname{cof} A \odot \operatorname{fin} AL \operatorname{fin} ASL \operatorname{fin} SL$. Mais on a par le ſecond Cas des tr. rect. $\operatorname{fin} SL = \frac{\operatorname{tang} AL}{\operatorname{tang} ASL}$, donc les deux termes du

milieu deviennent $= o$ & l'aberration se réduit à cos A ☉ (cos A L cos A S L + sin A S L sin A L sin S L) $=$ cos A ☉

$$\frac{(\cos AL^2 \cos ASL + \sin AL^2 \cos ASL)}{\cos AL} = \cos A\odot \frac{\cos ASL}{\cos AL},$$

mais cos A S L $=$ cos A L sin ♈ A R; donc l'aberration devient $=$ cos A ☉ sin ♈ A R $=$ $-$ 20″ sin ♈ A R cos A ☉; il n'y a donc qu'à multiplier la plus grande aberration par cos A ☉ pour avoir l'aberration actuelle, & l'on connoît A ☉, car A ☉ $=$ ♈ ☉ $-$ ♈ A $=$ long. ☉ $-$ long. ☉ au tems de la plus grande aberration. Jusqu'ici, nous n'avons point eu égard à la déclinaison de l'étoile; si elle n'est pas dans l'équateur, les déterminations que nous avons données se prennent sur un grand cercle parallele à l'équateur, mené à la déclinaison de l'étoile; pour les réduire à l'équateur, on fera le même raisonnement que nous avons fait ci-dessus pour réduire à l'écliptique l'aberration en longitude, excepté que l'on mettra l'équateur & la déclinaison au lieu de l'écliptique & de la latitude. Il suit de là que pour réduire nos déterminations à l'équateur, il faut les diviser par le cosinus de la déclinaison. Soit P S $=$ compl. décl. $= c$, il faudra diviser nos déterminations par sin c, en sorte que la plus grande aberration en ascension droite sera $= -\frac{20'' \sin ♈ AR}{\sin c}$, & que l'aberration en ascension droite sera en général $= -\frac{20'' \sin ♈ AR \cos A\odot}{\sin c}$.

C'eſt la formule que trouve M. Lambert dans les Ephémérides de Berlin pour 1776, Part. II. p. 119, & M. de la Lande dans ſon Aſtronomie §. 2277.

Pour procéder de même relativement à l'aberration en déclinaiſon, nous chercherons d'abord quand eſt-ce que l'aberration en déclinaiſon eſt la plus grande; pour cela égalant à zéro la différentielle de la formule que nous avons trouvée, nous aurons, $-d\varepsilon$ ſin ε ſin $p + d\varepsilon$ coſ ε coſ p coſ H $= o$, ou $\frac{\text{ſin}\,\varepsilon}{\text{coſ}\,\varepsilon} = \text{tang}\,\varepsilon = \frac{\text{coſ}\,p}{\text{ſin}\,p}\,\text{coſ H} = \text{cot}\,p\ \text{coſ H}$. Menant le grand cercle S T perpendiculaire au cercle de déclinaiſon P S, nous aurons en adaptant cette formule à la figure, tang L ☉ $=$ cot A S L ſin S L $=$ tang L S N ſin S L. Mais on a par le troiſieme Cas des tr. rect. tang L S N ſin S L $=$ tang L N, donc tang L N $=$ tang L ☉ & L N $=$ L ☉, donc au tems de la plus grande aberration en déclinaiſon, le ſoleil ſe trouve au point N, où le grand cercle perpendiculaire au méridien coupe l'écliptique. Voyons ce que devient dans ce cas l'aberration en déclinaiſon; ſubſtituant dans notre formule la valeur de coſ H $=$ tang ε tang p, nous aurons coſ ε ſin p + ſin ε coſ p coſ H $=$ coſ ε ſin p + ſin ε coſ p tang ε tang p $= \text{coſ}\,\varepsilon\ \text{ſin}\,p + \frac{\text{ſin}\,\varepsilon^2\ \text{ſin}\,p}{\text{coſ}\,\varepsilon} = \frac{(\text{coſ}\,\varepsilon^2 + \text{ſin}\,\varepsilon^2)\,\text{ſin}\,p}{\text{coſ}\,\varepsilon}$ $= \frac{\text{ſin}\,p}{\text{coſ}\,\varepsilon} = \frac{\text{coſ L S N}}{\text{coſ L N}}$. Mais on a par le même cas des tr. rect. coſ L S N $=$ coſ L N ſin L N S, donc la plus grande aberration en déclinaiſon ſera

proportionelle à $\sin LNS$ ou $= -20'' \sin LNS$. Or dans le triangle L N S, connoissant la latitude de l'étoile L S & l'angle de position dont le complément est L S N. on aura L N & par conséquent ♈ N longitude du soleil au tems de la plus grande aberration en déclinaison & L N S ou A N S argument de cette plus grande aberration. Il faut maintenant tâcher d'exprimer l'aberration dans tous les cas par une fonction de sin A N S auquel est proportionelle la plus grande aberration. Pour cela, je reprends la formule de l'aberration en déclinaison, $\cos \varepsilon \sin p + \sin \varepsilon \cos p \cos H = \cos L\odot \cos LSN + \sin L\odot \sin LSN \sin SL$. Substituons au lieu de $L\odot$ sa valeur $LN + N\odot$, & nous aurons, $\cos N\odot \cos LN \cos LSN - \sin N\odot \sin LN \cos LSN + \sin N\odot \cos LN \sin LSN \sin SL + \sin LN \cos N\odot \sin LSN \sin SL$. Mais on a par le second Cas des tr. rect. $\sin SL = \frac{\tan LN}{\tan LSN}$, donc les deux termes du milieu deviennent $= o$, & l'aberration se réduit à $\cos N\odot (\cos LN \cos LSN + \sin LN \sin LSN \sin SL) = \cos N\odot$
$$\frac{(\cos LN^2 \cos LSN + \sin LN^2 \sin LS)}{\cos LN} = \cos N\odot$$
$\frac{\cos LSN}{\cos LN}$, mais $\cos LSN = \cos LN \sin LNS$, donc l'aberration devient $= \cos N\odot \sin LNS = -20'' \sin LNS \cos N\odot$; il n'y a donc qu'à multiplier la plus grande aberration par $\cos N\odot$ pour avoir l'aberration actuelle, or l'on connoît $N\odot$, car $N\odot = ♈\odot - ♈N =$ long. $\odot -$ long. $\odot$ au

têms de la plus grande aberration en déclinaiſon. On peut donner encore une autre forme à cette expreſſion en mettant au lieu de N ⊙ ſa valeur A ⊙ — A N, car elle deviendra alors coſ A ⊙ coſ A N ſin A N S + ſin A ⊙ ſin A N ſin A N S. Mais on a par le premier Cas des tr. rect. ſin A N S $= \frac{\text{ſin A S}}{\text{ſin A N}}$, donc ſubſtituant cette valeur, notre expreſſion deviendra coſ A ⊙ cot A N ſin A S + ſin A ⊙ ſin A S. Mais on a par le troiſieme Cas des tr. rect. cot A N $= \frac{\text{coſ S A N}}{\text{tang A S}} = \frac{\text{coſ } \Upsilon \text{ A R}}{\text{tang A S}}$; donc notre expreſſion ſe réduit à coſ A ⊙ coſ ♈ A R coſ A S + ſin A ⊙ ſin A S, & l'aberration ſera $= -$ 20″ (coſ A ⊙ coſ ♈ A R coſ A S + ſin A ⊙ ſin A S). Ce ſont là les deux expreſſions que trouve M. Lambert dans les Ephémérides de Berlin pour 1776, pag. 120 & 121. Dans la premiere, au lieu de coſ N ⊙ il prend ſin D ⊙, ce qui revient au même, par ce qu'il prend le point D à 90° du point N. M. de la Lande donne auſſi §. 2270 & 2273 des formules qui reviennent à notre premiere formule. Si l'on veut ſavoir maintenant quand eſt-ce que l'aberration en aſcenſion droite eſt nulle, il n'y a qu'à faire coſ ϵ coſ p — ſin ϵ ſin p coſ H $= 0$, ce qui donne tang ϵ $= \frac{\cot p}{\text{coſ H}}$ ou tang L ⊙ $= \frac{\text{cot A S L}}{\text{ſin L S}}$; mais on a par le troiſieme Cas des tr. rect. tang A L $=$ tang A S L ſin L S, donc cot A L $= \frac{1}{\text{tang A S L ſin L S}} = \frac{\text{cot A S L}}{\text{ſin L S}}$, donc cot A L $=$ tang L ⊙, donc L ⊙

doit être le complément de A L, donc au tems où l'aberration en ascension droite est nulle, le soleil doit être à 90° du point A. C'est ce qui se déduisoit tout de suite de la seconde formule que nous avons obtenue, car puisque l'aberration est proportionelle à cos A ⊙, elle est nulle lorsque A ⊙ est $= 90^\circ$. On procédéra de même pour savoir quand est-ce que l'aberration en déclinaison est nulle, il n'y a qu'à faire, $\cos \varepsilon \sin p + \sin \varepsilon \cos p \cos H = o$, ce qui donne $\tang \varepsilon = -\frac{\tang p}{\cos H}$ ou $\tang L\odot = -\frac{\cot LSN}{\sin SL}$, mais on a par le troisieme Cas des tr. rect. $\tang LN = \sin SL \tang LSN$ ou $\cot LN = \frac{\cot LSN}{\sin SL}$, donc $-\cot LN = \tang L\odot$, donc L ⊙ doit être le complément de L N, donc au tems où l'aberration en déclinaison est nulle, le soleil doit être à 90° du point N. La même chose auroit pu se déduire tout de suite de notre seconde formule, car puisque l'aberration est proportionelle à cos N ⊙, elle est nulle lorsque N ⊙ est $= 90^\circ$. Ce sont les conclusions que trouvent MM. Lambert & de la Lande.

L'aberration des planetes est beaucoup plus facile à calculer que celles des étoiles, la considération de leur mouvement apparent vu depuis la terre & de leur distance à la terre suffit pour cela. On a vu ci-dessus que la lumiere met $8'. 8''$ à venir du soleil à nous, pendant ce tems là le soleil parcourt un arc de $20''$, l'aberration du soleil est donc $20''$ dans le sens où va la terre. Pour appliquer ce raisonnement aux planetes, il faut chercher d'abord le tems que met la lumiere à venir de la planete à nous, or son mouvement étant supposé uniforme, ce tems est proportionel à la distance. Soit donc la distance du soleil à la terre $= 10$, & celle de la planete à la terre $= g$, on aura cette proportion, $10 : 8'.8'' = g : \frac{(8'.8'')\,g}{10}$, tems que met la lumiere à venir de la planete à nous. Pour connoître maintenant l'aberration de la planete, il faut savoir quel arc elle parcourt pendant ce tems là relativement à la terre, (afin de n'avoir pas à considérer ici le mouvement de la terre). Soit donc t le mouvement géocentrique de la planete exprimé en minutes, ou $60\,t$ ce même mouvement exprimé en secondes, on aura $24\ \text{h.} : 60\,t = \frac{(8'.8'')\,g}{10''} \cdot \frac{60\,t\,(8'.8'')\,g}{24\ \text{h.}\ 10} =$ $\frac{6\,t\,(8'.8'')\,g}{24\ \text{h.}} = \frac{6\,(1'.1'')\,g\,t}{3\ \text{h.}} = \frac{6.61''\,g\,t}{180'} = \frac{61''}{30'}\,g\,t = \frac{61''}{1800}\,g\,t = \frac{23''}{680}\,g\,t$ à-peu-près, c'est l'aberration des planetes exprimée en secondes. Cette aberration est également en longitude, en latitude, en ascension droite, ou en déclinaison, parce qu'il n'y a qu'à prendre le mouvement diurne de la planete en longitude, latitude, ascension droite ou déclinaison. C'est la formule que donne M. Lambert dans les Ephémérides de Berlin pour 1776, p. 114. Pour l'accommoder aux usages astronomiques, M. Lambert observe que $g\,t = \frac{(t+g)^2 - (t-g)^2}{4}$

$$= \frac{t^2 + 2gt + g^2 - t^2 + 2gt - g^2}{4} = \frac{4gt}{4}$$

$= gt$. La formule d'aberration devient donc $\frac{23}{2720}((t+g)^2 - (t.-)^2)$. C'eſt la formule ſur laquelle eſt fondée la table qui ſe trouve p. 162 du Tome III des tables aſtronomiques de Berlin, & dont $t+g$ & $t+g$ ſont les deux argumens. On a ſeulement appellé d ce que j'ai appellé g. Si l'on avoit appellé 1 la diſtance du ſoleil à la terre, on auroit trouvé pour la formule d'aberration $\frac{23''}{68} g\ t$, or $l\frac{23}{68} = 9,5292$, il n'y a donc qu'a ajouter le logarithme conſtant 9,5292 à celui de g & à celui de t, c'eſt la regle que donne M. de la Lande dans l'explication des tables aſtronomiques de Halley p. 165. Si la diſtance de la terre au ſoleil eut été priſe = 10 le logarithme conſtant auroit été = 8,5292, & c'eſt effectivement ſur cette ſuppoſition qu'eſt calculée la table XIX des tables de Halley. L'aberration doit être priſe dans le ſens où va la terre, c'eſt-à-dire, dans le ſens oppoſé à celui vers lequel la planete paroît aller.

Les mêmes cauſes qui produiſent la préceſſion des équinoxes occaſionnent dans l'axe de la terre un mouvement de balancement, en vertu duquel le pole de l'équateur décrit autour du pole de l'écliptique une ellipſe dont le grand axe eſt au petit axe comme 9″ eſt à 6″, 7. Ce phénomene s'appelle nutation, & il en réſulte un changement dans les longitudes,

aſcenſions

ascensions droites & déclinaisons des astres, aussi bien que dans l'obliquité de l'écliptique. Comme ce phénomene dépend de la situation de la lune, c'est-à-dire, de la situation de ses nœuds, on suppose que le pole du monde se meut dans cette ellipse dans le même tems que les nœuds de la lune mettent à faire une révolution, en sorte que la longitude du pole soit toujours de 90° plus grande que celle du nœud. Soit E le pole de l'écliptique, P le centre autour duquel le pole de l'équateur se meuve dans une ellipse A R B, soit A M O B un cercle décrit sur le grand axe de cette ellipse & que parcourroit le pole de l'équateur s'il se mouvoit uniformément, soit E A le colure des solstices qui passe par le lieu moyen du pole, P & E M K celui qui passe par le lieu actuel du pole M, en menant l'ordonnée M N Q, N seroit le lieu moyen du pole correspondant au lieu vrai M, car le pole étant en M, le nœud doit être en S, en prenant N S $=$ 90°, & sa longitude est égale à U S $=$ 90° — U N $=$ A N. Or on a dans l'ellipse Q N : Q M $=$ P U : P R $=$ 9 : 6, 7; donc Q M $=$ $\frac{6'', 7}{9}$ Q N $=$ $\frac{6'', 7}{9}$ 9″ sin long. nœud P Q $=$ 9″ cos long. nœud. Soit long. nœud $=$ ω, on aura Q M $=$ $\frac{6'', 7}{9}$ 9″ sin ω & P Q $=$ 9″ cos ω, donc P M $=$

$$\sqrt{PQ^2 + QM^2} = 9'' \sqrt{\cos\omega^2 + \left(\frac{6'', 7}{9}\right)^2 \sin\omega^2} = Z.$$

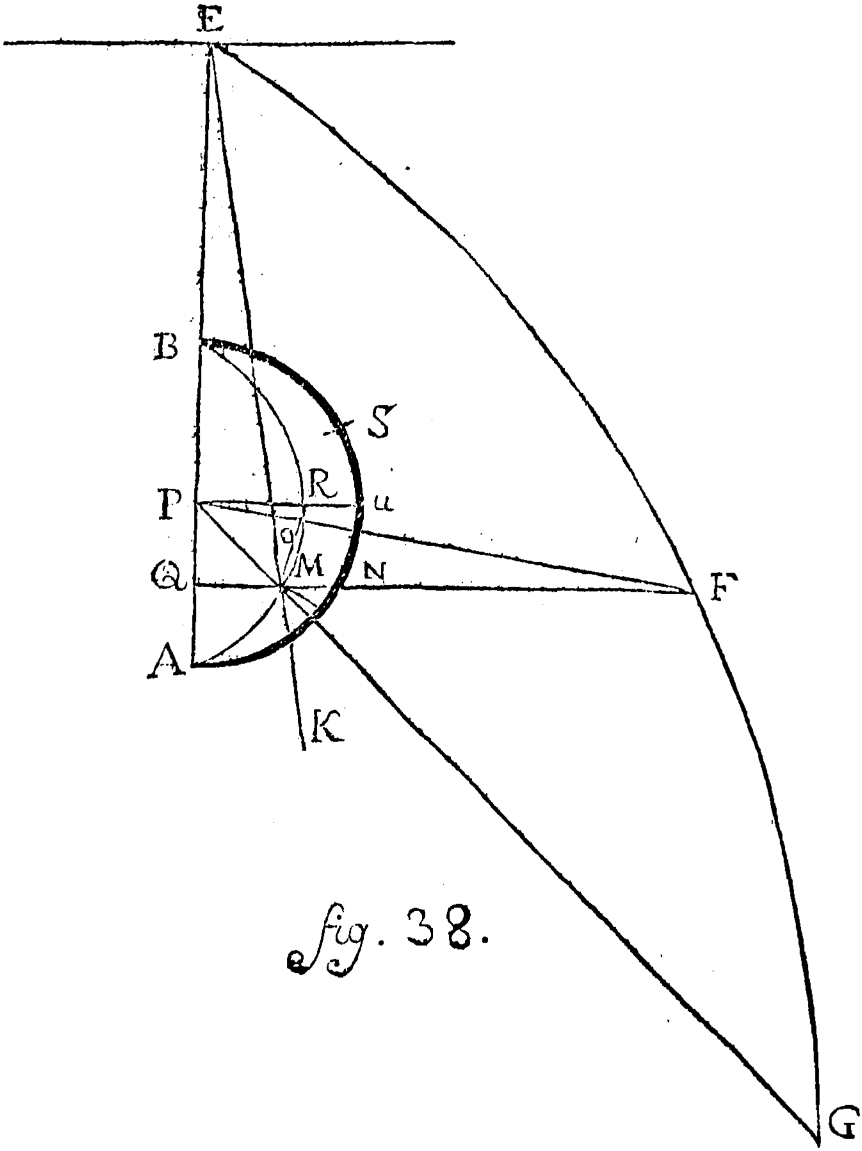


fig. 38.

Soit un aſtre F, ayant mené par cet aſtre un cercle de latitude E F qu'on prolonge juſqu'à qu'il rencontre l'arc P M G & les arcs de grand cercle P F, M F, la nutation en longitude ſera l'angle Q E M, or on a par le troiſieme Cas des tr. rect. tang Q M = tang Q E M ſin E Q = tang Q E M ſin E P, donc $\text{tang } QEM = \frac{\text{tang } QM}{\text{ſin } EP}$ ou (à cauſe de la petiteſſe des angles,) $QEM = \frac{QM}{\text{ſin } EP} = \frac{QM}{\text{ſin obl. éclipt.}}$ $= \frac{QM}{\text{ſin } 23^{\circ}\frac{1}{2}} = \frac{6'', 7 \text{ ſin } \omega}{\text{ſin } 23^{\circ}\frac{1}{2}} = 16'', 8 \text{ ſin } \omega$; c'eſt la formule que trouve M. Lambert dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 p. 114. On trouve dans les tables aſtronomiques de Berlin, Tome III. p. 163 pour cette nutation en longitude $18''$ ſin ω, mais c'eſt qu'on y a ſuivi les déterminations de Mayer, qui ſont un peu différentes de celle qu'on employe ici.

La nutation en aſcenſion droite eſt égale à la variation de l'angle E P F, or E P F = E P G — F P G, dont la nutation en aſcenſion droite eſt = *d* (E P G — F P G) = *d* E P G — *d* F P G. Or pour avoir la variation *d* E P G on conſidérera que le triangle E P G en devenant E M G conſerve le côté E G & l'angle E G M conſtans, c'eſt-à-dire, un côté & l'angle adjacent, donc par le premier Cas des analog. différ. *d* P G = P M : *d* E P G = tang E P : ſin E P G = ſin APM = ſin ϕ (en faiſant APM = ϕ), donc $d\ EPG = \frac{PM \text{ ſin } \phi}{\text{tang } EP} = z \text{ ſin } \phi \cot 23^{\circ}\frac{1}{2}$.

Pour avoir la variation de l'angle F P G, on considérera que le triangle F P G en devenant F M G conserve le côté F G & l'angle F G M constans, donc par le même cas des analog. différ. on a $d\,PG = Z : d\,FPG = \text{tang } PF : \text{sin } FPG$. Or faisant la déclinaison de l'astre $= \delta$ & $APF = \rho$, on aura $PF = \text{compl. } \delta$ & $FPG = \rho - \phi$, donc $Z : d\,FPG = \cot \delta : \sin(\rho - \phi)$, & $d\,FPG = Z \sin(\rho - \phi) \text{ tang } \delta$, donc nut. en asc. dr. $= -d\,EPG + d\,FPG = Z(\sin(\rho - \phi) \text{ tang } \delta - \sin \phi \cot 23°\tfrac{1}{2}.)$

La nutation en déclinaison est égale à la variation du coté P F, or dans le triangle F P G, on aura par le même cas cité $d\,PG = Z : d\,PF = 1 : \text{cos}\,FPG = \cos(\rho - \phi)$, donc $d\,PF =$ nut. en décl. $= z \cos(\rho - \phi)$.

L'angle de position E F P est devenue E F M, la nutation est donc à cet égard égale à l'angle P F M, or $PFM = \dfrac{MO}{\sin PF} = \dfrac{MO}{\cos \delta}$ & $MO = PM \sin FPG, = z \sin(\rho - \phi)$, donc $PFM = \dfrac{z \sin(\rho - \phi)}{\cos \delta}$, c'est aussi là la variation de l'angle parallactique.

L'effet de la nutation sur l'obliquité de l'écliptique est $= PQ = 9'' \cos \omega$. Nous avons trouvé $z = 9'' \sqrt{\cos \omega^2 + \left(\dfrac{6'',7}{9,0}\right)^2 \sin \omega^2} = 9'' \cos \omega \sqrt{1 + \left(\dfrac{6'',7}{9,0}\right) \text{tang } \omega^2}$. Or $\text{tang } \phi = \dfrac{QM}{PQ} =$

$\frac{6'',7}{9,0} \cdot \frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \frac{6'',7}{9,0} \operatorname{tang} \omega$, donc $z = 9''\cos\omega$

$\sqrt{1 + \operatorname{tang} \phi^2} = 9'' \frac{\cos \omega}{\cos \phi}$.

Nous avons trouvé la nutation en ascension droite $= z\ (\sin(\rho - \phi)\ t.\ \delta - \sin \phi \cot 23^\circ \tfrac{1}{2})$ ce qui nous donnera en y substituant les valeurs de z & décomposant la valeur de $\sin(\rho - \phi)$; $\operatorname{tang}\delta\ (9'' \sin\rho \cos\omega - 9'' \cos\rho \cos\omega \operatorname{tang}\phi) - 9'' \operatorname{tang}\phi \cos\omega \cot 23^\circ \tfrac{1}{2} =$ (en y substituant la valeur de $\operatorname{tang}\phi$) $(9'' \sin\rho \cos\omega - 6'',7 \cos\rho \sin\omega) \operatorname{tang}\delta - 6'',7 \sin\omega \cot 23^\circ \tfrac{1}{2} =$

$$\left\{\begin{matrix} 4'',5 \sin(\rho+\omega) + 4'',5 \sin(\rho-\omega) \\ -3'',35 \sin(\rho+\omega) + 3'',35 \sin(\rho-\omega) \end{matrix}\right\} \operatorname{tang}\delta - 6'',7 \sin\omega \cot 23^\circ\tfrac{1}{2} =$$

$$(1'',15 \sin(\rho+\omega) + 7'',85 \sin(\rho-\omega)) \operatorname{tang}\delta - 6'',7 \sin\omega \cot 23^\circ \tfrac{1}{2} =$$

$$(1'',15 \sin(\rho+\omega) + 7'',85 \sin(\rho-\omega) \operatorname{tang}\delta - 15'',4 \sin\omega.$$

C'est la formule qui se trouve dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 p. 111, à l'exception que dans le dernier terme au lieu de $15'',4$ il y a $15'',43$ ce qui peut venir de ce qu'on n'y a pas pris l'obliquité de l'écliptique précisément de $23^\circ \tfrac{1}{2}$.

Nous avons trouvé la nutation en déclinaison $= z \cos(\rho - \phi)$, ce qui devient en y mettant la valeur de z, $9'' \cos\rho \cos\omega + 9'' \sin\rho \sin\omega\ t.\ \phi =$ (en y mettant la valeur de $t.\ \phi$) $9'' \cos\rho \cos\omega + 6'',7 \sin\rho \sin\omega =$

$$\begin{matrix} 4'',5 \cos(\rho+\omega) + 4'',5 \cos(\rho-\omega) \\ -3,35 \cos(\rho+\omega) + 3,35 \cos(\rho-\omega) \end{matrix} = 1'',15 \cos(\rho+\omega) + 7'',85 \cos(\rho-\omega).$$

C'eſt la formule qui ſe trouve dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 p. 110.

Nous avons trouvé la variation de l'angle de poſition & de l'angle parallactique produite par la nutation, $= \frac{z \sin(\varrho - \Phi)}{\cos \delta} =$

$$\frac{9'' \sin \varrho \cos \omega - 9'' \cos \varrho \cos \omega \tan \Phi}{\cos \delta} =$$

$$\frac{9'' \sin \varrho \cos \omega - 6'',7 \cos \varrho \sin \omega}{\cos \delta} =$$

$$\frac{1'',15 \sin(\varrho + \omega) + 7'',58 \sin(\varrho - \omega)}{\cos \delta}.$$ C'eſt la formule qui ſe trouve dans les Ephémérides de Berlin pour 1776 p. 111.

Soit r l'aſcenſion droite d'un aſtre, nous aurons $\varrho = r - 90°$, & ſubſtituant cette valeur, nous aurons les formules ſuivantes de nutation :

Pour l'aſcenſion droite, $(1'',15 \sin(+\omega - 90°) + 7'',85 \sin(r - \omega - 90°)) \tan \delta - 15'',4 \sin \omega$.

Pour la déclinaiſon,

$$1'',15 \cos(r + \omega - 90°) + 7'',85 \cos(r - \omega - 90°) =$$
$$1'',15 \sin(r + \omega) + 7'',85 \sin(r - \omega)$$

Pour l'angle parallactique & l'angle de poſition.

$$(1'',15 \sin(r + \omega - 90°) + 7''85 \sin(r - \omega - 90°)) \sec \delta.$$

Ce ſont les formules qui ſe trouvent dans les tables aſtronomiques de Berlin Tom. III. p. 161, où l'on appelle δ ce que j'ai appellé ω.

F I N.

ERRATA.

Cet ouvrage n'ayant pas été imprimé sous les yeux de l'Auteur, le lecteur est prié de corriger les fautes d'impression que l'on va marquer. Au reste cet ouvrage a été composé en 1779, & l'impression en a été retardée par différentes circonstances; ce qui fait qu'on n'a pu y faire mention des ouvrages qui ont paru depuis, & en particulier du dernier Volume de l'Astronomie de M. de la Lande, où ce grand Astronome a inséré diverses corrections & un grand nombre d'augmentations relatives à quelques-uns des objets traités dans cet Essai.

Avant-propos page 2 lig. 5, au lieu de, rectiligne, *lisez* sphérique.

pag. 8 *figure* 1, mettez la lettre a à l'extrémité de la ligne tirée du point d au-dessus de df,

p. 12 lig. 1, au lieu de $\sqrt{\sin \overline{ab}^2 \sin \overline{ad}^2}$, *lis.* $\sqrt{\sin \overline{ab}^2 - \sin \overline{ad}^2}$.

Ibid. lig. 2, au lieu de, $b \sin ab \cos ad$; *lis.* $\sin ab \cdot \cos ad$.

p. 13 lig. 9, au lieu de, $\dfrac{\sin bd}{\sqrt{\cos \overline{b}^2 + \sin \overline{bd}^2 \sin \overline{b}^2}} - \sin \overline{bd}^2$,

lis. $\dfrac{\sin bd}{\sqrt{\cos \overline{b}^2 + \sin \overline{bd}^2 \sin \overline{b}^2 - \sin \overline{bd}^2}}$.

p. 16 *fig.* 5, les lettres b & d doivent être échangées.

p. 28 lig. 7, au lieu de, $\sin b \cos c$, *lis.* $\sin b \cot c$.

p. 29 lig. 6, au lieu de, $\sin b \cos c$, *lis.* $\sin b \cot c$.

p. 30 lig. antépénultieme, le signe (doit être placé devant le chiffre 1, ligne précédente,

p. 32 lig. 2, au lieu de, l'on a toute la suite, *lis.* l'on a tout de suite.

p. 34 lig. 19, au lieu de, sert, *lis.* sont.

p. 36 lig. derniere, au lieu de, $- d$, *lis.* $- dc$.

p. 38 lig. 3, au lieu de, $\sin \left(\dfrac{+c}{2}\right)$ *lis.* $\sin \left(\dfrac{b+c}{2}\right)$.

p. 50 lig. 2, au lieu de, $+ \cot \frac{1}{2} b^2$, *lis.* $+ 3 \cot \frac{1}{2} b^2$; *ibid.* lig. 10, au lieu de, $1 +$, *lis.* $1 \pm$.

p. 51 lig. antépénultieme, au lieu de, $+ 2 \cot a \cot \frac{1}{2} b^3$, *lis.* $\pm 2 \cot a \cot \frac{1}{2} b^3$.

p. 53 lig. 2, au lieu de, $\frac{1}{4} r^2 x$, *lis* $\frac{3}{4} r^2 x$; *ibid.* lig. 3, au lieu de, $\frac{3}{4} r$, *lis.* $\frac{3}{4} r^2$.

p. 57 lig. 25, au lieu de, dans la seconde, *lis.* de la seconde.

p. 62 lig. 5, au lieu de, sixieme Cas, *lis.* quatrieme Cas.

p. 69 lig. 15, au lieu de, différence 90^{d}, *lis.* différence de 90^{d}.

p. 71 lig. 13, au lieu de, cos S, *lis.* cot S; *ibid.* lig. 14, au lieu de, cos PZS cot ZS, *lis.* cos PZS cot ZS.

p. 72 lig. 4, au lieu de, $+ \cos \overline{PS}^2$, *lis.* $+ \cot \overline{PZ}^2$.

p. 78 lig. 2, au lieu de, $c\iota\, y\iota$, *lis.* $t\iota\, y\iota$; *ibid.* au lieu de, $s\, u$; *lis.* $s\, u^1$; *ibid.* lig. 14, au lieu de, $-- s\, u^1\, t\iota\, q$, *lis.* $s\, t\iota\, q^1\, q$.

p. 94 lig. 6, au lieu de, $+$, *lis.* $\times$.

p. 96 lig. pénultieme, au lieu de, $+\lambda$, *lis.* $+\frac{1}{2}\lambda$.

p. 100 lig. 12, au lieu de, fin $\frac{1}{2}$ $c5$, *lis.* fin $\frac{1}{2}$ $c9$.

p. 103 lig. 5, en commençant par la fin, au lieu de, $+ t\,(45^0 + \frac{1}{2}\lambda)$, *lis.* $-- t\,(45^0 -- \frac{1}{2}\lambda)$.

p. 104 lig. 3, au lieu de, $-- 3\, a\, b2$, *lis.* $+ 3\, a\, b^2$; *ibid.* lig. 10, au lieu de, $+ b$, *lis.* $+ 6$.

p. 107 lig. 6, à commencer par la fin, l'exposant 5 a été oublié.

p. 120 lig. derniere, ôtez le signe $=$ qui est devant C.

p. 132 lig. 4, au lieu de, S T L, *lis.* S L T.

p. 162 lig. 4, à commencer par la fin, au lieu de, $\frac{(m-1)^2}{1}$, *lis.* $\frac{(m-1)^2}{2}$.

p. 167 lig. 11, au lieu de, soit la longitude, *lis.* soit d la longitude; *fig.* 17, échangez les lettres L^1 & L.

p. 175 lig. 3, à commencer par la fin, au lieu de, $+ Q^{12}\, p^{12}\, q^{12}$, *lis.* $Q^{12} + p^{12}\, q^{12}$.

p. 178 lig. 3, au lieu de, cos V S^2, *lis.* cos V $S^2 =$.

p. 181 lig. 12, au lieu de, $-- \phi$, *lis.* $-- \pi$.

p. 182 lig. 3, au lieu de, $+$ cos V M cos V M S, *lis* $+$ cos V M cos M S; *ibid.* lig. 9, au lieu de, $n -- \pi\, \mu$, *lis.* $n -- \pi\, \nu$.

p. 184 lig. 16, au lieu de, $1 -- 2$ fin $\frac{1}{2}$ L V S, *lis.* $1 -- 2$ fin $\frac{1}{2}$ L V S^2.

p. 186 lig. 3, à commencer par la fin, au lieu de, $< 3''', 1$, *lis.* $< 5''', 1$.

p. 190 au dénominateur de la ligne premiere, au lieu de, cos $\left(\frac{\phi + \beta}{2}\right)$, *lis.* cos $\left(\frac{\phi + \beta}{2}\right)^2$.

p. 196 lig. 5, à commencer par la fin, placez le fin d A qui est à la fin de la ligne après d A $=$.

p. 197 lig. 4, à commencer par la fin, après fin Z L P : mettez 1.

p. 200 lig. 5, au lieu de, P Z m, *lis.* P Z M.

p. 204 lig. 3, à commencer par la fin, au lieu de, B D, *lis.* B D l.

p. 206 lig. 1, au lieu de, $+ \sqrt{\ }$, *lis.* $\pm \sqrt{\ }$.

p. 210 lig. 11, au lieu de, N $l\, p$ S, *lis.* or $l\, p$ S.

p. 222 lig. 12, au lieu de, lors, *lis.* lorsque.

p. 253 lig. 2, au lieu de, $N^1\, M\, P^1$, *lis.* $N^1\, M^1$ P.

p. 260 lig. 7, en commençant par la fin, au lieu de, fin L N^2 fin L S, *lis.* fin L N^2 cos L S N.

p. 264 lig. 6, au lieu de, $t + g$ & $t + g$, *lis.* $t + g$ & $t - g$.