ANALYSE
DES
RÉFRACTIONS
ASTRONOMIQUES
ET
TERRESTRES

Par le citoyen KRAMP,

Professeur de Chymie et de Physique expérimentale à l'école centrale du Département de la Roer.

RARE BOOK
QB
155
.K692
1799

IMPRIMÉ A STRASBOURG
CHEZ PHILIPPE JACQUES DANNBACH,
L'AN DE LA RÉPUBLIQUE VII.

ET SE TROUVE A LEIPSIC
CHEZ E. B. SCHWIKKERT,
MDCCLXXXXVIIII.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Binding intrudes into the text

This has been a co-operative project between the NOAA Central Library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 14, 2008

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

Disposition des couches atmosphériques.

Différence entre l'élasticité absolue et l'élasticité spécifique d'un fluide aëriforme . . . . . *numéro* 1.

L'élasticité absolue d'un air est la force à laquelle il fait équilibre, indépendamment de sa densité. Elle est proportionnelle à la hauteur du baromètre, sauf aux réductions qui sont à faire . . . . . 2.

L'élasticité spécifique d'un air est le rapport de son élasticité absolue à sa densité. C'est l'inverse de ce qu'on appelle communément pésanteur spécifique d'un air . . . . . 5.

Table des élasticités spécifiques des principaux fluides aëriformes, à la température de dix dégrés de Réaumur ; d'après les expériences de Kirwan. 7.

Problème concernant l'équilibre mutuel de différens fluides aëriformes. Application au thermomètre de Drebbel . . . . . 8.

Les masses et les élasticités spécifiques de deux fluides aëriformes étant données, on demande l'élasticité spécifique de leur mélange ? Il faut multiplier la masse de chacun par son élasticité spécifique, et diviser la somme des produits par celle des masses . . . . . 14.

Dilatabilité d'un fluide aëriforme, à un dégré quelconque de température . 18.

Connoissant les masses, les élasticités spécifiques, et les dilatabilités de deux fluides aëriformes, on demande la dilatabilité de leur mélange . . 21.

Dilatabilité de l'air commun, à la température des caves . . . . . 22.

L'élasticité spécifique d'un air n'est pas fonction de la chaleur seule. L'humidité y entre pour le moins autant que la chaleur. Le thermomètre ne suffit pas pour déterminer l'élasticité spécifique d'un air, aux différens dégrés de température. Cette dernière ne peut être déterminée avec quelque précision, qu'en y employant le manomètre . . . . . 24.

Explication des principaux charactères dont on se servira dans la suite de cette analyse ; savoir (fig. I.)

a.....*rayon de la terre*, *C B*.

y.....*distance au centre*, *C P*.

$x = y - a$...*hauteur O P au-dessus de la surface du globe*.

1 *et P*.....*pésanteur absolue en B et en P*.

1 *et E*.....*élasticité spécifique en B et en P*.

1 *et Y*.....*densité du fluide en B et en P*.

B et H.....*hauteur du baromètre en B et en P*.

m.....*densité du mercure* . . . . . *n°*. 33.

Equation générale entre la distance au centre y, et la hauteur barométrique H, qui lui répond. Elle est $- P H d y = m B E d H$. *La soutangente de la courbe barométrique en P est donc* $m B E : P$. *Incertitude sur l'élasticité spécifique de l'air dans les hautes régions de l'atmosphère* . . 35.

Le rayon de la terre étant supposé infiniment grand, et l'élasticité spécifique de l'air étant supposée constante dans toute la hauteur de l'atmosphère, la courbe des hauteurs barométriques, ainsi que celle des densités de l'air, sera une logistique, ayant pour soutangente m B. On prévient que cette ligne sera dorénavant désignée par h : elle est généralement proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air. . . . . 40.

A 16 $\frac{3}{4}$ *de Réaumur, la soutangente h est égale à* 4343 *toises. (Nous donnons cette observation de Deluc pour ce qu'elle est. Celles de Schuckburgh sont bien loin de la confirmer. On a déja dit que l'élasticité spécifique de l'air n'est pas fonction de la chaleur seule : et que pour être bien déterminée, elle a besoin du manomètre)* . . . . . 44.

La dilatabilité de l'air, à la température des caves, est fixée à un deux-cent-trentième par dégré . . . . . 45.

On prévient que le rapport du Sinus d'incidence au Sinus de réfraction, le rayon passant de l'air dans le vuide, sera désigné par $1 : 1 + \omega$. *La lettre* ω *est proportionnelle à la densité de l'air près l'horizon. De plus, on employe la lettre n pour désigner la fraction* $\frac{\omega a}{h}$. . . . . 46.

L'élasticité spécifique de l'air étant supposée constante dans toute la hauteur de l'atmosphère, la réfraction horizontale, exprimée en parties du rayon, est égale à la racine quarrée de $\frac{1}{2} n \omega \pi$, *multipliée par la série très-convergente* $1 + A n + B n^2 +$ *etc. On donne les valeurs numériques des coëfficiens A, B etc. On peut prévenir le lecteur, qu'en divisant l'unité par* $(1 - n)^{2:5}$, *il trouvera la valeur très-approchée de la série*

$1 + An + Bn^2 +$ etc. et qu'alors il pourra se passer de l'emploi des coëfficiens . . . . . *n°.* 47.

Examen des trois tables de Bouguer, dans la zône torride. Dans toutes les trois, la réfraction horizontale se trouve conforme à la formule de 47 : *ce qui confirme la supposition d'une élasticité spécifique constante dans toute la hauteur de l'atmosphère* . . . . . 50.

Examen de la table de Lacaille. La réfraction horizontale y est plus grande d'un tiers, qu'elle ne devroit être d'après la théorie . . . . . 55.

Examen de la table de Lalande, calculée par Bonne. Elle laisse une différence d'un sixième entre l'observation et la théorie . . . . . 57.

Examen de la table de Bradley. La différence entre l'observation et la théorie n'y est plus que d'un dixième . . . . . 58.

Examen de la table de Newton. La réfraction horizontale s'y trouve parfaitement conforme à la formule de 47. . . . . 59.

Réflexions sur toutes ces tables. Il ne paroît point prouvé encore par les observations, que dans la disposition des couches atmosphériques, la nature se soit prescrit une autre loi que celle d'une élasticité spécifique constante. Cependant, pour ne rien laisser à désirer dans cette analyse, et voulant substituer à E une fonction convenable de la hauteur, on propose pour la courbe aux élasticités spécifiques, une logistique, dont la soutangente est désignée par g . . . . . 61.

L'élasticité spécifique E étant supposée égale à $e^{-x:g}$, on prouve que les densités de l'air peuvent être très-sensiblement représentées par les ordonnées d'une nouvelle logistique, ayant pour soutangente $\frac{gh}{g-h}$. Cette nouvelle soutangente est désignée par s : et c'est elle qu'il faudra employer à la place de h, dans le calcul des réfractions. . . . . 69.

On employe la réfraction horizontale de la table de Bradley, pour fixer à 27183 *toises la longueur de la ligne g, soutangente de la courbe aux élasticités spécifiques* . . . . . 74.

La courbe aux hauteurs barométriques est bien moins affectée par la supposition d'une élasticité spécifique décroissante. La différence ne commence à être sensible qu'à des hauteurs, dont la mesure trigonométrique est absolument incertaine. . . . . 78.

Est-il probable que la courbe aux élasticités spécifiques soit sensiblement affectée par les variations de l'atmosphère? . . . . . n°. 80.

Table des soutangentes de la courbe aux densités, qui répondent aux différens dégrés du thermomètre de Réaumur, tant dans la supposition d'une élasticité constante, que dans celle d'une élasticité décroissante. . . 82.

La soutangente aux élasticités spécifiques est-elle la même à toutes les latitudes? Il y a des raisons de croire, qu'elle décroit de l'équateur vers les poles . . . . . 83.

CHAPITRE SECOND.

Principes généraux de la route de la lumière par les airs.

La réfraction de la lumière est l'effet de l'attraction que les corps transparens exercent sur elle . . . . . 1.

L'attraction des corps sur la lumière ne s'étend qu'à de très-petites distances 2.

La trajectoire que décrit un rayon de lumière, en passant par une atmosphère composée de couches sphériques et concentriques, est identique avec celle, qui auroit été décrite par un corps, animé d'une force accélératrice, dirigée vers le centre, et proportionnelle à $-dY:dy$ . . . 3.

Dans le passage de la lumière par une atmosphère quelconque, disposée par couches sphériques et concentriques, les différences des quarrés des vitesses sont partout proportionnelles aux différences des densités . . . . . 16.

Etant donné le rapport du Sinus d'incidence au Sinus de réfraction, dans le passage d'un air de la densité M dans un air de la densité N, déterminer le même rapport pour des densités quelconques . . . . . 19.

Le rayon passant de l'air dans le vuide, la fraction ω *sera constamment proportionnelle à la densité de cet air* . . . . . 21.

On désigne par A l'angle I B P, distance apparente au zénith; par t, la perpendiculaire C T; par ϕ *l'angle au centre B C P; par R la courbure de l'arc B P qui lui répond. De plus, on introduit les lettres h et v, pour représenter d'une manière plus abrégée, les fractions* $\frac{s\ Sin.\ A}{a}$ *et* $\frac{a\ Sin.\ A}{y}$ . . . . . 23.

On détermine les expressions des deux différentielles: savoir

$$d\varphi = -\frac{dv}{\sqrt{(1-vv-2\omega+2\omega Y)}};$$

$$dR = -\frac{\omega Y v\, dv}{k\sqrt{(1-vv-2\omega+2\omega Y)}} \quad \ldots\ldots\ n^{o}.\ 28.$$

La dernière de ces deux différentielles étant développée en série, l'intégration de chacun de ses termes revient à celle de $e^{v:c} V\, dv$, *dont l'intégrale est réductible à* $e^{v:c}(cV - c^2 V' + c^3 V'' - \text{etc.})$; *série d'autant plus convergente que la fraction c sera petite, ce qui est précisément le cas des réfractions astronomiques* . . . . . 30.

Digression sur l'intégrale de $e^{W:c} V\, dv$; *les lettres V et W désignant des fonctions quelconques de v, et c désignant quelque très-petite fraction* . . 32.

La fraction V étant telle, que V^2 *soit égale à* v^2, *divisé par* $(1-vv)^{2n+1}$, *ce qui est le cas du terme général de dR, on détermine la loi générale de la progression que forment les rapports différentiels* V', V'', V''' *etc.* 41.

On désigne par t la tangente de la distance apparente A; et par c la petite fraction $\frac{s}{a}$. *Premier cas,* $n = 0$. *Il en résulte la série* $t - ct^3 + 3c^2 t^5 - 15c^3 t^7 + 105c^4 t^9 - \text{etc.}$ . . . . . 43.

Second cas, $n = 1$. *Il en résulte la série* $t^3 - 3ct^5 + 15c^2 t^7 - 105c^3 t^9 + \text{etc.}$ 45.

Troisième cas, $n = 2$. *Il donne la série* $t^5 - 5ct^7 + 35c^2 t^9 - 315c^3 t^{11} + \text{etc.}$ 46.

La réfraction astronomique, depuis le zénith jusqu'à 82 degrés de distance, est égale à ωt, *multiplié par* $1 - (c - \frac{1}{2}\omega)\, tt + 3c\,(c - \frac{3}{4}\omega)\, t^4 - 15c^2 (c - \frac{7}{8}\omega)\, t^6 + \text{etc.}$ *Les réfractions calculées d'après cette série, sont un peu plus petites que ne les auroit données la règle de Bradley: les différences, sensibles depuis 70° de distance, vont très-régulièrement en croissant jusques vers 84 degrés* . . . . . 47.

La réfraction est proportionnelle à la densité de l'air, depuis le zénith jusqu'à 84 degrés de distance apparente. . . . . . 49.

Au-delà de 84 degrés, la série que nous venons de trouver, divergente à l'infini, devient absolument incalculable. Pour résoudre le problème alors, il faut une classe de quantités transcendantes entièrement nouvelle, et n'ayant rien de commun avec les fonctions ordinaires de l'analyse. On reserve pour le chapitre suivant l'examen de ce que deviennent ces nouvelles fonctions dans le cas de l'infini . . . . . 51.

CHAPITRE TROISIÈME.

Analyse des facultés numériques.

On donne le nom de faculté aux produits dont les facteurs constituent une progression arithmétique: tels que $a(a+r)(a+2r)\ldots(a+mr-r)$.

Pour la marquer, on propose la notation a^{mIr}. *Comme dans tous les cas, la lettre I regarde tout ce qui la précède, les exposans, quoique complexes, pourront toujours être écrits sans parenthèse; et ce n'est pas un des moindres avantages de cette notation* . . . . . *n°.* 1.

Réduction des facultés à différence négative, à d'autres facultés dont les différences sont positives . . . . . 3.

Réduction d'une faculté proposée à une base, ou une différence quelconque. 4.

Théorème fondamental des facultés . . . . . 6.

Réduction des facultés à exposant négatif . . . . . 9.

Les produites infinies de Wallisius ne sont autre chose que des rapports de facultés à exposant fractionnaire, auxquels on peut toujours les réduire 11.

Le rapport des Sinus de deux angles, tel que Sin. $m\pi$: *Sin.* $n\pi$, *est celui de la faculté* $m^{1-m-nI1}$ *à la faculté* $n^{1-m-nI1}$ . . . . . 16.

Trouver la valeur des facultés $n^{1:2I1}$, $n^{1:2I-1}$; *de même que des facultés* $B^{1:2I2}$, $B^{1:2I-2}$. *Ces facultés reviennent à la quadrature du cercle, pourvu que la base soit un nombre entier* . . . . . 22.

Le rapport des deux facultés à exposant fractionnaire a^{cI1} : A^{cI1} *est réductible à des rapports de Sinus, tels que Sin.* $m\pi$: *Sin.* $n\pi$, *toutes les fois que la somme des deux bases et de l'exposant, savoir* $a+A+c$, *est un nombre entier* . . . . . 29.

Le rapport des Sinus de deux angles, tel que Sin. $m\pi$: *Sin.* $n\pi$, *est celui de la faculté* $(+m)^{n-mI+1}$ *à la faculté* $(-m)^{n-mI-1}$ . . . . . 36.

La tangente d'un angle quelconque $m\pi$ *est égale à la faculté* $(+m)^{1:2I+1}$, *divisée par la faculté* $(-m)^{1:2I-1}$ . . . . . 39.

Digression sur le calcul des quantités imaginaires . . . . . 40.

La faculté du binome $(a+b)^{nIr}$ *peut être représentée par une série composée de produits de facultés monomes, dont les coëfficiens sont absolument identiques*

identiques avec ceux du binome de Newton. Le théorème binomial n'est donc en effet qu'un cas très-particulier d'un autre théorème plus général . . n°. 54.

Modifications dont ce nouveau théorème est susceptible . . . . . 61.

L'intégrale de $t^{m-1} e^{-t^n} dt$, *prise depuis* $t = o$ *jusqu'à* t *infinie, est égale à la faculté* $1^{m:n\,I\,1}$, *divisée par* m . . . . . 62.

L'intégrale de $e^{-tt} dt$, *prise depuis* $t = o$ *jusqu'à* t *infinie, est égale à la moitié de la racine quarrée de* π . . . . . 66.

L'intégrale de $t^{m-1} e^{-t^n} dt$, *prise depuis* $t = o$ *jusqu'à* t *infinie, est réductible à la quadrature du cercle, toutes les fois que* $\frac{m}{n} = \frac{1}{2} + p$; p *étant un nombre entier quelconque* . . . . . 67.

Etant donnée l'intégrale de $e^{-t^n} dt$, *prise depuis* $t = o$ *jusqu'à* t *infinie, trouver celle de* $t^{m-1} e^{-t^n} dt$; m *étant un nombre entier quelconque* . . 69.

Les intégrales de $t^{2m} e^{-tt} dt$, *ainsi que de* $t^{-2m} e^{-tt} dt$, *sont toujours réductibles à la quadrature du cercle. Application aux cas particuliers* . . 70.

L'intégrale de $x^{B-1} (1-x^r)^n dx$, *prise depuis* $x = o$ *jusqu'à* $x = 1$, *est égale à la faculté* $r^{n\,I\,r}$, *divisée par la faculté* $B^{n+1\,I\,r}$ . . . . . 76.

On détermine la valeur de l'intégrale de $x^{B-1} (1-xx)^{n-\frac{1}{2}} dx$; *l'exposant* n *étant un nombre entier, positif ou négatif* . . . . . 78.

L'intégrale de $\frac{x^{B-1} dx}{(1-x^{1:n})^{Bn}}$ *est égale à* $\frac{Ang.\ n\pi}{Sin.\ Bn\pi}$ . . . . . 82.

La faculté $a^{m\,I\,r}$ *pouvant être dans tous les cas, développée dans une série telle que* $a^m + Aa^{m-1} r + Ba^{m-2} r^2 + Ca^{m-3} r^3 +$ *etc. finie dans le cas d'un exposant entier, et infinie dans tous les autres cas, on donne aux coëfficiens* A, B, C *etc. le nom de* coëfficiens généraux, *et on leur consacre la notation* $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.* . . . . . 85.

On a généralement $(m+1) Jn = mJn + m, mJ(n-1)$. . . . . 88.

Table des coëfficiens généraux pour les dix premières facultés . . . . . 90.

Etant donné l'exposant de la faculté m, *et l'index du terme de la série* n,

déterminer le coëfficient général $m\,J\,n$, *indépendamment des coëfficiens précédents* $m\,J\,(n-1)$, $m\,J\,(n-2)$ *etc. L'analyse combinatoire fournit deux solutions de ce problème* . . . . . n°. 91.

Définition de ce qu'on convient de nommer aggrégat combinatoire. *On lui consacre la lettre majuscule latine* A . . . . . 97.

Le coëfficient général $m\,J\,n$ *est susceptible de prendre les deux formes suivantes : l'une* $\frac{m.m-1\ldots m-n}{1.\,2.\,3\ldots n+1}N1+\frac{m.m-1\ldots m-n-1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+2}N2+$ *etc.*

l'autre $\frac{m-n.m-n+1\ldots m}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots n+1}N1-\frac{m-n.m-n+1\ldots m+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots n+2}N2+$ *etc.*

Les coëfficiens partiels $N1$, $N2$, $N3$ *etc. seront des nombres indépendants de l'exposant* n, *absolus et entiers. On fait connoître des valeurs numériques que reçoivent ces coëfficiens, depuis* $n=1$ *jusqu'à* $n=7$. 100.

On passe aux facultés à exposant négatif : ayant alors $(-m)\,J\,n=(-m+1)\,J\,n+m$, $(-m)\,J\,(n-1)$. . . . . 105.

Les coëfficiens généraux des facultés à exposant entier et négatif ne sont autre chose que les différences premières, secondes, troisièmes etc. des puissances des nombres naturels. Le coëfficient général $(-m)\,J\,n$ *est égal à* $\Delta^{m-1}\,m^{m-1+n}$, *divisé par* $1.\,2.\,3\ldots m-1$ . . . . . 107.

Le coëfficient général $(-m)\,J\,n$ *peut être regardé comme aggrégat combinatoire, avec les modifications que la supposition d'un exposant négatif entraine nécessairement* . . . . . 112.

On demande le coëfficient du terme x^n *de la puissance indéterminée d'infinitinome* $(a\,x^\alpha+b\,x^\beta+c\,x^\gamma+\text{etc.})^m$, *indépendamment des coëfficiens précédents* . . . . . 116.

Usage qu'on peut faire des principes précédents, pour déterminer d'une manière très-générale, les puissances quelconques des deux infinitinomes :

$$P=\frac{1}{x}\,Log.\frac{1}{1-x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\text{etc.}$$

$$Q=\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{24}+\text{etc.}$$

On donne les expressions générales de P^m, Q^m, *quelque soit l'exposant* m. *Remarque concernant les cas où l'exposant* m *est négatif* . . . . . 119.

On propose de développer la puissance a^m *dans une série procédant d'après*

les facultés de la base a ; telle que $a^{mIr} - Aa^{m-1Ir}r + Ba^{m-2Ir}r^2 - \text{etc.}$ *On demande la loi générale des coëfficiens A, B etc. Théorème très-remarquable à ce sujet, proposé sans démonstration* . . . . . n°. 122.

Application du théorème précédent au cas de $a = 2$, $r = 1$. *Il en résulte de nouvelles séries, lesquelles, continuées à l'infini, sont égales à l'unité, et dont on a eu besoin pour constater la formule intégrale* $\int X dx = XX dx : dX$, *multipliée par* $1 - U' + U'' - U''' + \text{etc.}$ . . . . . 126.

On reprend le développement de la faculté 1^{mIr} *en forme de série* $1 + Ar + Br^2 + Cr^3 + \text{etc.}$; *et on donne la loi très-simple, d'après laquelle chacun de ses coëfficiens doit être déterminé par ceux qui le précèdent* . . . 127.

Application au cas de $m = 0$. *On rencontre les nombres de Bernoulli. Ces nombres sont ce que deviennent les coëfficiens généraux* $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$, *etc. dans le cas de* $m = 0$, *divisés par zéro, et affectés du signe opposé* . . . . . 129.

On se sert des nombres de Bernoulli, pour donner une simplicité beaucoup plus grande aux équations démontrées en 127, *en les réduisant à la moitié des termes qu'elles contiennent*. . . . . 134.

Application aux cas où l'exposant m a une forme fractionnaire. Le développement en est rendu aussi facile, que dans le cas d'un exposant entier. . 136.

Développement des facultés à exposant fractionnaire, dans lesquelles les dénominateurs de ces exposants se trouvent entre les limites un *et* six . . . . 141.

Connoissant les coëfficiens généraux d'une faculté à exposant fractionnaire a^{mIr}, *développée en suite infinie, on demande de rendre cette série convergente à volonté*. . . . . 142.

Premier cas ; a et r positifs . . . . . 143.

Second cas ; a et r négatifs . . . . . 144.

Applications à des cas particuliers . . . . . 145.

Les trois premiers termes suffisent pour avoir la valeur d'une faculté à exposant fractionnaire, jusqu'à sept décimales. On se prépare à la recherche du logarithme hyperbolique d'une faculté proposée . . . . . 155.

On demande ce que devient la faculté a^{mIr} *dans le cas d'un exposant infiniment petit*. . . . . 158.

L'exposant m de la faculté a^{mIr} *passant à l'état* $m + dm$, *déterminer les*

variations qu'en reçoivent les coëfficiens généraux $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.*
Application aux huit premiers cas . . . . . n°. 160.

L'expression générale du rapport différentiel $d(mJn) : dm$ *n'ayant pas été donnée dans l'ouvrage même, on la donne ici. Elle est* $(m-n+\alpha)\, mJ(n-1) - \beta, mJ(n-2) - \delta, mJ(n-4) - \zeta, mJ(n-6) -$ *etc.*
On se sert des rapports différentiels qu'on vient de déterminer, pour trouver les expressions générales de $\Sigma^1 Y$, $\Sigma^2 Y$, $\Sigma^3 Y$, $\Sigma^4 Y$, *etc. On demontre généralement et rigoureusement, que* $\Sigma^m Y$ *n'est autre chose que*

$$\Delta^{-m} Y + \frac{y^{m-1\,Ir}}{1.2\ldots m-1.r}\frac{A}{{}^{m-1}} + \frac{y^{m-2\,Ir}}{1.2\ldots m-2.r}\frac{B}{{}^{m-2}} + \frac{y^{m-3\,Ir}}{1.2\ldots m-3.r}\frac{C}{{}^{m-3}} + \text{etc.}$$

Le nombre des constantes A, B, C *etc. est égal à l'ordre de sommation.* 167.
Désignant par Y', Y'', Y''' *etc. les rapports différentiels successifs* $\frac{r\,dY}{dy}$, $\frac{r^2\,ddY}{1.2\,dy^2}$, $\frac{r^3\,d^3Y}{1.2.3\,dy^3}$ *etc.; désignant de même par* $'Y$, $''Y$, $'''Y$ *etc. les intégrales successives* $\frac{1}{r}\int Y\,dy$, $\frac{1}{rr}\int^2 Y\,dy^2$, $\frac{1.2}{r^3}\int^3 Y\,dy^3$ *etc. on demande à développer la somme d'un ordre indéterminé, ou* $1.2.3\ldots m-1.\Sigma^m Y$, *dans une série infinie, telle que* ${}^m Y + a$, ${}^{m-1} Y + b$, ${}^{m-2} Y + c$, ${}^{m-3} Y +$ *etc. En même tems on fait connoître les valeurs numériques des coëfficiens* a, b, c *etc. depnis* $\Sigma' Y$ *jusqu'à* $\Sigma^6 Y$ . . . . . 170.

Le citoyen Lagrange s'est occupé de ce problème : il en a fait le sujet d'un mémoire sur une nouvelle espèce de calcul, relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, inséré parmi ceux de l'académie de Berlin, année 1772. *Il a déterminé les équations, moyennant lesquelles on peut déterminer chacun de ces coëfficiens par tous ceux qui le précèdent. Nos formules sont différentes de celles du citoyen Lagrange, en ce qu'elles font connoître pour chacun de ces coëfficiens sa valeur absolue, et indépendante des autres.*

Déterminer le logarithme hyperbolique de la faculté $a^{m\,Ir}$ . . . . . 177.
On désigne par Γy *la série* $\beta y + \frac{1}{3}\delta y^3 + \frac{1}{5}\zeta y^5 +$ *etc. dont on a eu besoin dans l'expression du logarithme hyperbolique de la faculté* $a^{m\,Ir}$ . . 179.
Trouver le gamma d'une quantité quelconque proposée, par une série convergente à volonté. Exemples . . . . . 182.

Plus le nombre r est grand, plus le gamma de r ou Γ r approche de la moitié du logarithme hyperbolique de r : 2 π. C'est là sa valeur asymptotique. n° 189.
Le gamma de l'unité, ou Γ 1, est égal à $1 - \frac{1}{2}$ *Log. 2 π* . . . . . 191.
Le gamma de deux, ou Γ 2, est égal à la moitié de 1 — *Log.* 2 . . . . . 194.
Les gammas de toutes les fractions, de l'une des deux formes générales, $\frac{1}{m+1}$, $\frac{2}{2m+1}$, *se réduisent à une pure addition de logarithmes hyperboliques* . . . . . 195.
Paradoxe concernant les logarithmes des nombres négatifs, servant à confirmer les doutes que nous avons déjà élevés sur la théorie généralement reçue, et qui ont été l'objet de la digression, qui se trouve au commencement de ce chapitre . . . . . 196.
Les quantités a, m, r, étant fractionnaires, irrationnelles ou transcendantes, comme on voudra, déterminer les logarithmes hyperboliques des facultés $(+a)^{mI+r}$ *et* $(-a)^{mI-r}$, *par des séries convergentes à volonté, et telles que les deux premiers termes de la série suffisent pour trouver le logarithme demandé à huit décimales de près. Exemples* . . . . . 203.
Transformer le logarithme hyperbolique d'une faculté proposée en une série qui procède d'après les puissances décroissantes de l'exposant m, et qui par conséquent converge d'autant plus, que l'exposant m est un grand nombre. 212.

On trouve les premiers germes de l'analyse qui est l'objet de ce chapitre, dans un mémoire du citoyen Vandermonde, sur les irrationnelles de différens ordres, avec une application au cercle, inséré parmi ceux de l'académie des sciences de Paris; année 1772, part. I. L'auteur peut assurer au reste, qu'à l'époque où le présent ouvrage fut entièrement achevé, et que l'impression en étoit déjà très-avancée, il n'avoit pas la moindre connoissance du travail de ce célèbre analyste; et qu'il l'ignoreroit encore aujourd'hui, sans les renseignemens littéraires, que le citoyen Arbogast, professeur à l'ecole centrale du département du Bas-Rhin, a bien voulu lui communiquer.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Réfractions qui approchent de l'horizon.

La fonction X étant telle, que sa différentielle d X ait x — a pour un de ses facteurs, et c désignant quelque très-petite fraction, on demande la

valeur de l'intégrale de $e^{X:c}\,dx$, *prise de manière qu'elle s'évanouisse pour une valeur de* x, *qui diffère peu de* a . . . . . n°. 1.

La solution que nous donnons de ce problème, et qui consiste à ramener l'intégrale proposée à celle de $t^{m+n}\,e^{-t^n}\,dt$, *les deux exposants* m, n, *se trouvant toujours être des nombres entiers; quelque soit d'ailleurs la fonction* X, *est due au citoyen Laplace. Cet illustre géomètre en a fait le sujet du mémoire, sur l'approximation des formules qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances, inséré parmi ceux de l'académie des sciences, année 1782.*

Dans le cas où l'intégrale proposée doit s'évanouir pour $x = a$, *la formule intégrale se trouvera entièrement réduite aux facultés à exposant fractionnaire* 6.

La fonction Y *étant telle que* $c\ \mathrm{Log.}\ Y = v - \mathrm{Sin.}\ A$, *et* c *désignant quelque petite fraction, on demande l'intégrale de* $-\frac{Y\,v\,dv}{\sqrt{(1-vv)}}$, *prise depuis* $v = \mathrm{Sin.}\ A$ *jusqu'à* $v = o$, *l'angle* A *différant peu de* 90° . . . . 7.

Les mêmes choses étant supposées, on demande l'intégrale de $-\frac{Y\,dv}{(1-vv)^{3:2}}$, *prise depuis* $v = \mathrm{Sin.}\ A$ *jusqu'à* $v = o$, *l'angle* A *différent peu de* 90° . 11

Les mêmes choses étant supposées, on demande l'intégrale de $-\frac{Y\,v\,dv}{(1-vv)^n\sqrt{(1-vv)}}$, *prise depuis* $v = \mathrm{Sin.}\ A$ *jusqu'à* $v = o$, *l'angle* A *différant peu de* 90°. . 14.

On se sert de cette dernière intégrale pour trouver l'expression complette de la réfraction horizontale. Exprimée en partie du rayon, elle est égale à la racine quarrée de $\frac{1}{2}\,n\,\omega\,\pi$, *multipliée par la série* $1 + An + Bn^2 + \text{etc.}$ 20.

On avertit encore une fois qu'au lieu de multiplier par la série $1 + An + Bn^2 + \text{etc.}$, *on peut aussi diviser par* $(1-n)^{2:5}$. *De cette manière on pourra entièrement se passer de la connoissance numérique des coefficiens* A, B *etc. L'erreur que cela produira, fait à très-peu près la cinq-centième partie de la valeur totale de la réfraction.*

Etant donné l'état du baromètre et celui du manomètre, on demande la réfraction horizontale. Exemples . . . . . 31.

Table des réfractions horizontales qui répondent aux différens degrés du thermomètre de Réaumur, le baromètre étant supposé à 28 pouces . . . 37.

La hauteur du baromètre demeurant la même, la réfraction horizontale est à très-peu près proportionnelle au quarré de l'élasticité spécifique de l'air. 38.

Réfractions horizontales à de très-grands froids. Observation faite par les Hollandois en 1597, à 76 degrés de latitude. Ces exemples s'accordent très-bien avec notre formule : mais ils prouvent que passé les cinq ou six premiers degrés au-dessous de la congélation, la diminution de l'élasticité spécifique suit une marche bien plus rapide, que ne la comporteroit la règle ordinaire . . . . . 40.

On examine le cas d'une réfraction horizontale infinie . . . . . 45.

Passant aux réfractions approchantes de l'horizon, on réduit l'intégrale de $-\frac{Kv\,dv}{(1-vv)\sqrt{(1-vv)}}$, *dans tous les cas, à celle de* $e^{-tt}\,dt$ . . . . 47.

L'intégrale de $e^{-tt}\,dt$ *ne peut être connue qu'à l'aide d'une table particulière, toutes les fois que* t *est compris entre les limites* un tiers *et* trois entiers . . . . . 51.

L'intégrale de $e^{-tt}\,dt$ *ayant été désignée par* y, *on fait connoître les expressions des rapports différentiels* $\frac{dy}{dt}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$ *etc. afin de rendre compte de la construction des tables qui se trouvent à la fin de l'ouvrage.* 55.

On convient de désigner par Et *le produit* $e^{tt}\int e^{-tt}\,dt$ . . . . . 57.

On donne l'intégrale de $-\frac{Y(1-Y)^n v\,dv}{(1-vv)^n\sqrt{(1-vv)}}$, *prise depuis* $v = \text{Sin. } A$ *jusqu'à* $v = 0$, *l'angle* A *différant peu de* 90° . . . . . 59.

Série qui exprime généralement la réfraction, depuis l'horizon jusqu'à huit ou dix degrés de hauteur apparente . . . . . 62.

Le produit Et *est égal à* $\frac{1}{2}e^{tt}\sqrt{\pi}$, *moins la somme de la série* $t + \frac{2t^3}{1.3} + \frac{4t^3}{1.3.5} + \frac{8t^7}{1.3.5.7} + \text{etc.}$ . . . . . 64.

On développe l'expression entière de la réfraction voisine de l'horizon, en une série qui procède par puissances ascendantes de t. *Cette série cesse d'être sensiblement convergente, à un demi-degré de hauteur apparente* . 68.

Désignant par R *la réfraction horizontale, et par* $R - dR$ *celle qui convient à la hauteur apparente* dH, *supposée infiniment petite, on aura* $dR : dH = \omega : c - \omega = n : 1 - n$ . . . . . 73.

On applique la série trouvée en 72 à l'examen des observations de Bouguer,

concernant les réfractions qui appartiennent à des dépressions apparentes au-dessous de l'horizon . . . . . n°. 75.

Comme la convergence à peine sensible de la série de 72 nous oblige d'en revenir pour le calcul rigoureux à celle de 62, on donne un exemple d'un pareil calcul. . . . . . 83.

Comme la série de 62 elle-même ne paroît pas encore répondre aux besoins de la pratique, on propose de lui substituer une méthode approximative, en sacrifiant la précision de quelques secondes à la facilité du calcul. On demande donc à développer la série qui exprime la réfraction voisine de l'horizon, selon les puissances descendantes de t, en lui donnant la forme $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, *multiplié par* $\frac{1}{2t} - \frac{A}{4t^3} + \frac{1.3B}{8t^5} - \frac{1.3.5C}{16t^7} + \text{etc.}$ . . . . . 92.

La progression des coëfficiens A, B, C etc. s'étant trouvée très-sensiblement géométrique, on en conclud, qu'en désignant par Fn la série de 21, savoir $1 + An + Bn^2 + \text{etc.}$ *et prenant la variable u égale à* $\frac{Fn, H}{\sqrt{2c}}$, *la réfraction sera très-sensiblement égale à* $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, *multiplié par Fn, Eu. L'erreur que cette approximation laisse subsister, ne va nulle part à plus de huit secondes.* . . . . . 99.

Table des réfractions calculées d'après cette règle, en minutes et secondes de l'ancienne division, et mises à côté de celles de Bradley . . . . . 102.

Exemple d'un pareil calcul, pour un état donné du baromètre et du manomètre. On fixe à 190 secondes de la nouvelle division, ou 0,000298 la valeur de ω, qui répond à l'état de l'atmosphère, dans lequel la densité de l'air est à celle du mercure, comme un à dix mille . . . . . 106.

Table, qui fait connoître pour les cent premiers millièmes d'un quart de circonférence de hauteur apparente, les réfractions qui leur répondent, exprimées en millionièmes du quart, et calculées d'abord selon la règle de Bradley, ensuite selon la formule de 92; le baromètre étant à 28 pouces, le thermomètre à dix degrés de Réaumur. . . . . . 115.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Examen des solutions d'Euler, Bradley, Mayer et Lambert.

SOLUTION D'EULER.

L'extrait que nous donnons se rapporte au mémoire sur la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère, selon les divers degrés, tant de la chaleur,

chaleur, que de l'élasticité de l'air, insérée parmi ceux de l'académie de Berlin, 1754 . . . . . n°. 1.

On commence par rapporter les expressions d'Euler aux nôtres. Il se sert du terme de chaleur, pour désigner l'élasticité spécifique de l'air. Il suppose cette chaleur décroissante depuis l'horizon jusqu'aux régions élevées de l'atmosphère. Il fait $E = \frac{f}{f+x}$. *La ligne f d'Euler répond exactement à notre soutangente g* . . . . . 12.

La formule $\frac{f}{f+x}$ *d'Euler peut absolument être confondue avec la nôtre* $e^{-x:g}$, *dans le calcul des densités de l'air. La différence qui se trouve entre les deux formules, ne va nulle part à la cinq-centième partie de la densité de l'air près l'horizon* . . . . . 6.

Ce grand analyste n'est pas heureux dans l'intégration de sa différentielle $d\Phi$. *Le principe de la belle solution de Laplace n'étoit pas connu encore. Il y substitue une méthode approximative, qui ne se comporte pas avec la rigueur de l'analyse. Il regarde la trajectoire comme faisant partie d'une courbe asymptotique, très-éloignée de son commencement, et comprise sous l'équation* $t y^m = C$ . . . . . 12.

Il trouve la réfraction r comprise sous une équation du second degré $rr + 2Pr = QQ$: *les quantités P, Q, dépendant tant de la hauteur apparente H, que de la densité et de l'élasticité de l'air* . . . . . 18.

Conformément à cette formule, la réfraction horizontale, exprimée en parties du rayon, seroit égale à la racine quarrée de $\frac{2n\omega}{1-n}$; *ce qui produit une erreur de cinq minutes au moins, dans les températures moyennes* . . 19.

Selon cette même formule, les réfractions, en s'éloignant de l'horizon, prendroient des décroissemens plus grands d'un tiers, qu'elles ne doivent en prendre, et qu'elles n'en prennent réellement . . . . . 23.

Cette même formule donne deux minutes et demie pour la valeur de la réfraction à quarante-cinq degrés de hauteur apparente . . . . . 24.

On conclud qu'il faut absolument renoncer à la formule d'Euler . . . . . 25.

SOLUTION DE BRADLEY.

Elle est fondée sur le rapport constant entre l'angle au centre et la partie de la réfraction qui lui répond, que Bradley avoit supposé . . . . . 27.

En examinant ce principe, on trouve que ce rapport ne peut être regardé comme constant, qu'autant que la hauteur apparente excède huit ou dix dégrés ; et que l'élévation au-dessus de l'horizon peut être regardée comme évanouissante à l'égard de la soutangente aux densités. De plus, ce rapport est très-variable dans les différens états de l'air ; et dans les températures moyennes, il est bien différent de ce que Bradley avoit supposé 30.

La règle de Bradley, de même que celle d'Euler, peut être ramenée à une équation du second dégré, qu'on peut très-facilement résoudre, et sans le secours d'aucune fausse position, en y employant la bissection de l'angle. 35.

On peut déduire de la règle de Bradley, le rapport différentiel $dR : dH$ *près l'horizon, égal à* $\omega : c - \omega$. . . . . 36.

Divisant la réfraction à quarante-cinq dégrés de hauteur apparente, par le quarré de la réfraction horizontale, l'une et l'autre étant exprimées en parties du rayon, on trouve le facteur constant de Bradley . . . . . 37.

Ce facteur étant comparé avec celui qu'on peut retirer de l'égalité $dR : dH = \omega : c - \omega$, *on retrouve exactement la formule qu'Euler avoit donnée pour la réfraction horizontale.* . . . . . 38.

La règle de Bradley peut servir pour déterminer avec une très-grande précision, les réfractions depuis 70° *dégrés de distance jusqu'à* 80° *passés. Elle est inutile pour des hauteurs plus considérables, et fautive pour des hauteurs au-dessous de* 10 *dégrés* . . . . . 40.

SOLUTION DE MAYER.

La règle de Mayer, de même que celles d'Euler et de Bradley, revient à une équation du second dégré, qu'on peut résoudre facilement, en y employant la bissection de l'angle . . . . . 41.

Il suit de cette règle, que la réfraction horizontale est proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par la racine quarrée du cube de l'élasticité spécifique ; et que le quotient $dR : dH$ *près l'horizon est proportionnel à la hauteur du baromètre, divisée par le quarré de l'élasticité spécifique. Ni l'un, ni l'autre de ces deux théorèmes ne peut s'accorder avec la théorie rigoureuse des réfractions* . . . . . 43.

En supposant aux quantités constantes des deux règles une valeur déterminée, la différence entre ces deux règles est absolument insensible dans le calcul des réfractions. Celle de Bradley mérite la préférence, parce qu'avec deux facteurs de moins elle donne les mêmes résultats. . . . n°. 46.

SOLUTION DE LAMBERT.

Elle est fondée sur ce que le lieu géométrique des points S (fig. I.) ou la courbe ASED (fig. III.) dont la courbure en effet n'excède pas sept ou huit dégrés, peut être regardée comme circulaire sans erreur sensible. 48.

Lambert connut très-bien la hauteur AB, égale à la soutangente aux densités s; de même que le rapport dR : dH près l'horizon. La formule que Lambert donne pour ce dernier, se ramene facilement à $\omega : c - \omega$ . . 52.

Le principe de Lambert fournit deux manières de déterminer le rayon de la courbe ASED, supposée circulaire. Et comme ces deux manières sont bien loin de donner le même résultat, le principe de Lambert ne sauroit être admis . . . . . 53.

Lambert n'a pas tiré de son principe tout le parti qu'il pouvoit en tirer. Il conduit très-naturellement à une expression de la réfraction horizontale, qui sans être absolument rigoureuse, approche cependant de la vérité de bien plus près, que celle d'Euler. Lambert n'a pas entrevu cette conséquence, importante de son tems pour le calcul des réfractions. . . . . . 54.

CHAPITRE SIXIÈME.

Réfractions terrestres.

Rayon osculateur à chaque point de la trajectoire. Il est réciproquement proportionnel à la densité de l'air . . . . . 4.

Le rayon osculateur au sommet de la trajectoire horizontale, est proportionnel au quarré de l'élasticité spécifique de l'air, divisée par la hauteur du baromètre. Il ne peut être dans aucun cas, égal à sept fois le rayon de la terre. . . . . . 6.

Inclinaison de l'horison visuel avec l'horizon vrai. Sans la réfraction, elle est égale à la racine quarrée de $\frac{2x}{a}$. *La réfraction le diminue dans un rapport constant, qui dans les températures moyennes est celui de* 10 : 9 *à-peu-près* . . . . . 12.

La trajectoire étant supposée horizontale, (fig. IV.) l'angle au centre B C P se trouve dans un rapport sensiblement constant, non pas avec la réfraction terrestre correspondante, ou la courbure de l'arc B P, comme Bradley l'avoit cru, mais avec la racine quarrée de la fraction $\frac{2x}{a}$. *Ce rapport est celui de l'unité à la racine quarrée de* $1 - n$ . . . . . 27.

Règle très-simple pour déterminer la réfraction terrestre qui découle de ce principe, la trajectoire toutes fois étant supposée horizontale . . . . . 34.

Pour déterminer d'une manière très-approchée les réfractions terrestres approchantes de l'horizon, on employe un principe analogue à celui de Bradley, en supposant la réfraction terrestre proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée d'un certain multiple de la réfraction. L'exposant de ce multiple est absolument le même que dans le cas de la réfraction astronomique: savoir $\frac{c - \omega}{2\omega}$ . . . . . 37.

L'objet ayant été observé de deux points différens de la surface du globe, éloignés l'un de l'autre d'une distance connue, on demande l'élévation de l'objet au-dessus de l'horizon . . . . . 41.

La sphéricité de la terre rabaisse l'objet; la réfraction le relève un peu, en diminuant cette partie soustractionnelle dans le rapport de $1 : 1 - n$. *Et comme ces deux effets sont absolument inséparables l'un de l'autre, la réfraction tend toujours à rabaisser l'objet, et non à le relever, comme on croit ordinairement* . . . . . 47.

On demande la longueur du cone ténébreux, que la terre, éclairée par le soleil, laisse après elle. Cette longueur se trouve réduite par la réfraction au cinquième de sa valeur totale; et renfermée entre les deux tiers et les sept dixièmes de la distance de la lune à la terre . . . . . 49.

Réfractions qui appartiennent aux deux premiers dégrés de dépression apparente. Manière de les déterminer avec précision . . . . . 55.

Cologne, le 1 Germinal, an de la république VII.

ANALYSE

ANALYSE
DES REFRACTIONS
ASTRONOMIQUES ET TERRESTRES.

CHAPITRE PREMIER.

Disposition des couches atmosphériques.

1. La force élastique d'un air étant un effet très-compliqué de plusieurs causes, telles que sont, premièrement, la nature physique et inaltérable de chaque air en particulier; ensuite, le dégré de chaleur qu'il éprouve, l'humidité dont il est imprègné, l'espace qu'on lui fait occuper, et autres encore, il me paroît nécessaire avant tout, de distinguer entre *l'élasticité absolue* d'un air, et son *élasticité spécifique.*

DÉFINITION.

2. *Je nommerai élasticité absolue d'un air, la force qui tend à le comprimer, et à laquelle il fait équilibre, indépendamment de sa densité.* Supposons une vessie qui contient de l'air, fermée de toutes parts, placée dans le vuide, et chargée du poids de dix livres, l'élasticité absolue de cet air, ainsi que de chacune de ses molécules, sera égale à dix livres.

COROLLAIRE.

3. L'air atmosphérique et libre, se trouvant toujours chargé du poids de toute la colonne atmosphérique qui se trouve au-dessus de lui, et qui équivaut lui-même à celui de la colonne de mercure qu'il soutient dans le barometre, l'élasticité absolue de l'air commun sera donc constamment proportionnelle à la hauteur de cette colonne, sauf aux réductions que pourra exiger la différence de chaleur, ainsi que celle de pésanteur absolue, dans le cas de températures et de latitudes très-différentes.

THÉOREME.

4. *L'élasticité absolue que peut exercer une masse donnée d'un fluide aëriforme, est en raison inverse du volume qu'on lui fait occuper; ou bien elle est directement proportionnelle à sa densité.* Ce théorème est le résultat de la célèbre expérience de *Mariotte*. Il est inutile de dire qu'elle ne peut regarder que les condensations moyennes; les deux cas extrêmes, d'un volume infini et d'un volume infiniment petit, devant se refuser également à son application rigoureuse.

DÉFINITION.

5. *Le rapport de l'élasticité absolue d'un air à sa densité, est ce qui forme son élasticité spécifique.* L'élasticité spécifique d'un air est donc égale au quotient de l'élasticité absolue qu'en exerce une masse donnée, divisée par la densité de cette masse; ou bien, au produit qu'on obtient, en multipliant l'élasticité absolue qu'exerce une masse donnée de cet air, par le volume qu'on lui fait occuper. Le rapport de l'élasticité absolue à l'élasticité spécifique dans la science des fluides aëriformes, est exactement le même que celui de la masse à la pésanteur spécifique, dans la science des fluides non-élastiques.

COROLLAIRE I.

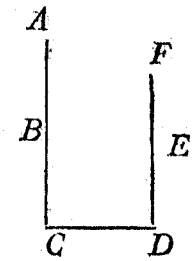
6. Lorsque deux airs différens sont en équilibre entr'eux, leur élasticité absolue étant la même alors, leurs élasticités spécifiques seront réciproquement proportionnelles aux densités qu'elles auront alors. L'élasticité spécifique est donc l'inverse de ce qu'on a appellé jusqu'ici *pésanteur spécifique* d'un air, terme qui ne renfermoit aucun sens, parceque, devant entièrement dépendre du volume qu'on lui fait occuper, elle doit être considérée comme une chose absolument arbitraire.

COROLLAIRE II.

7. Prenant pour température moyenne celle des caves, qui répond à dix de *Réaumur*, il n'y aura qu'à diviser l'unité par les nombres qu'on nous a donné jusqu'ici pour réprésentatifs des pésanteurs spécifiques des différens airs, pour avoir leurs élasticités spécifiques. En voici la table, calculée sur celle des pésanteurs spécifiques, qui se trouve dans *l'Essay on phlogiston de Kirwan*; l'état de l'air se trouvant très-voisin de 28 *poll. Barom.* et de 10 *dégrés de Réaumur*.

Air commun	1,000;
Gas oxygène	0,907;
Gas azotique	1,035;
Gas hydrogène	11,862;
Gas hydrogène des marais	1,493;
Gas acide carbonique	0,666;
Gas hydrogène sulfuré	0,904;
Gas ammoniacal	1,666;
Gas hydrogène phosphoré	0,476;
Gas nitreux	0,837;
Gas acide muriatique	0,588;
Gas acide sulfureux	0,441;
Gas acide fluorique	0,338.

PROBLEME.



5. *ABCDEF est un tuyau parfaitement cylindrique, composé de deux branches perpendiculaires AC, DF, fermées par les bouts A, F; et d'une branche horisontale CD. Chacune des deux branches perpendiculaires contient dans sa partie supérieure une certaine quantité d'un fluide aëriforme quelconque, mais différent dans les deux branches. L'élasticité spécifique de ces deux airs est supposée connue; la partie inférieure BCDE est occupée par un filet de mercure, d'une longueur donnée. On demande la position des deux points B, E, où le mercure doit s'arrêter, pour qu'il y ait équilibre.*

SOLUTION.

9. Employant l'air extérieur pour terme de comparaison entre les deux airs que contient le tuyau, nous désignerons par 1 son élasticité spécifique; par h la hauteur du barometre qui exprime son élasticité absolue; par i l'espace qu'un grain d'air atmosphérique occuperoit dans le tuyau du problème. De plus, exprimons par E, e, les élasticités spécifiques des deux airs; par M, m, leurs masses, exprimées en grains; et mettons pour plus de simplicité, $EMi = A$, $emi = B$. Comparant ensuite l'élasticité absolue de chacun des deux airs à celle de l'air atmosphérique, on trouvera l'une égale à $\frac{hA}{AB}$, l'autre égale à $\frac{hB}{FE}$; on aura donc, en faisant $AC = a$, $DF = b$,

l'équation $\frac{hA}{a-BC} + BC = \frac{hB}{b-DE} + DE$. La somme des deux lignes $BC + DE$ est connue; mais leur différence $BC - DE$ ne l'est pas; ainsi, faisant $BC + DE = 2c$; $BC - DE = 2v$, on parviendra à l'équation du troisième dégré $2v^3 = 2(a-b)vv + h(A+B)v + 2(a-c)(b-c)v + hA(b-c) - hB(a-c)$, de laquelle on tirera l'inconnue v, conformément à la condition de l'équilibre.

COROLLAIRE.

10. Si l'une des deux branches, DF, étoit ouverte par en haut, la hauteur barométrique h remplaçant alors l'élasticité absolue de l'air enfermé $\frac{hB}{FE}$, on aura l'équation $\frac{hA}{a-BC} + BC = h + DE$; qui se réduit à $2vv = (2a - 2c + h)v + (A - a + c)h$. Ce cas est celui du thermomètre de *Drebbel*. Il ne remplit pas trop bien les vues de l'inventeur, parce qu'il est baromètre et thermomètre à la fois. Mais on pourra l'employer avec succès, pour construire une échelle des élasticités spécifiques, pour tel fluide aëriforme qu'on veut. On fera passer une quantité déterminée de l'air qu'on veut examiner, dans la branche AC; on remplira de mercure la partie inférieure de l'instrument, après quoi on l'exposera à différens dégrés de chaleur déterminés. La position des points B, E, fera connoître chaque fois la quantité v; ensuite regardant A comme l'inconnue de l'équation, on aura $A = a - c + \frac{2vv - (2a - 2c + h)v}{h}$; d'où l'on tirera le dégré d'élasticité spécifique, qui répond à chaque dégré du thermomètre.

THÉOREME.

11. *Deux masses d'air quelconques, exerçant sous les volumes V, v, des élasticités absolues égales entr'elles; je dis que si l'on mêle ensemble ces deux airs, en leur faisant occuper le volume $V + v$, le mélange des deux airs exercera la même élasticité absolue, que chacun des deux airs avant d'être mêlés.* Nous supposons que les deux airs n'exercent entr'eux aucune affinité qui altère leurs élasticités spécifiques; et sous cette restriction, le théorème n'a pas besoin d'être démontré.

PROBLEME.

12. *Deux masses d'air quelconques, exerçant sous les volumes V, v, les élasticités absolues P, p, on demande l'élasticité absolue qu'exercera le mêlange des deux airs, réduit au volume $V+v$.*

SOLUTION.

13. Le second des deux airs auroit exercé une élasticité absolue P, égale à celle du premier, s'il avoit occupé le volume $\frac{pv}{P}$. Les deux airs mêles ensemble exerceront donc sous le volume $V+\frac{pv}{P}$ ou $\frac{PV+pv}{P}$ la même élasticité absolue P. Réduit au volume $V+v$, ce mêlange exercera donc l'élasticité absolue $\frac{PV+pv}{V+v}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME.

14. *Ayant E, e pour élasticités spécifiques des deux masses d'air M, m, appartenantes à deux fluides aëriformes différens, on demande l'élasticité spécifique du mêlange, x.*

SOLUTION.

15. Faisons occuper à ces deux masses d'air les volumes absolument arbitraires V, v, et à leur mêlange le volume $V+v$. Nous aurons $\frac{M}{V}$, $\frac{m}{v}$ pour pesanteurs spécifiques des deux airs, et $\frac{M+m}{V+v}$ pour celle de leur mêlange. On aura de plus $\frac{ME}{V}$, $\frac{me}{v}$ pour élasticités absolues des deux airs, et $\frac{Mx+mx}{V+v}$ pour celle de leur mêlange. Cette dernière devant être égale à $\frac{ME+me}{V+v}$, on aura $x=\frac{ME+me}{M+m}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

16. Appliquons cette règle à l'air commun, composé, comme on sait, de 27 parties de gas oxygène, et de 73 de gas azote. Ayant $M=27$, $m=73$; et de plus $E=0{,}907$; $e=1{,}035$; on aura pour élasticité spécifique du mêlange 1,00044. La très-petite différence de ce nombre d'avec l'unité fait

voir, que la composition de l'air commun répond parfaitement à la règle qu'on vient de démontrer.

EXPÉRIENCE.

17. La chaleur, en raréfiant l'air, lui donne la faculté d'exercer la même élasticité absolue sous une moindre densité qu'auparavant. L'effet de la chaleur sur un air donné est donc d'augmenter son élasticité spécifique ; celui du froid est de la diminuer.

DÉFINITION.

18. Désignant par E l'élasticité spécifique d'un air quelconque qui répond à un dégré déterminé du thermomètre T, on pourra exprimer par $(1+\frac{t-T}{m})E$ l'élasticité spécifique du même air, appartenante au dégré $T+t$. La petite fraction $\frac{1}{m}$ fera donc connoître *la dilatabilité* du fluide aëriforme proposé, qui répond au dégré du thermomètre T.

COROLLAIRE.

19. Désignant de plus par E, E', E'' les élasticités spécifiques qui répondent aux dégrés T, t, u, on aura $\frac{E'}{E}=1+\frac{t-T}{m}$; $\frac{E''}{E}=1+\frac{u-T}{m}$; d'où l'on tire $\frac{E''}{E'}=1+\frac{u-t}{m+t-T}$. Donc, si la dilatabilité d'un fluide aëriforme est $\frac{1}{m}$ au dégré T, elle sera $\frac{1}{m+t-T}$ au dégré t ; elle seroit de même $\frac{1}{m+u-T}$ au dégré u.

PROBLEME.

20. *Connoissant les masses M, m ; les élasticités spécifiques E, e ; et les dilatabilités N, n de deux fluides aëriformes différens, trouver la dilatabilité de leur mélange.*

SOLUTION.

21. Supposant que les élasticités spécifiques et les dilatabilités se rapportent au dégré du thermomètre t, l'élasticité spécifique du mêlange sera $\frac{ME+me}{M+m}$ à cette température. A $t+dt$ dégrés, l'élasticité spécifique de l'un sera

$(1 + N dt)\ E$; celle de l'autre deviendra $(1 + n dt)\ e$; on aura donc pour élasticité spécifique du mêlange $\frac{(1 + N dt)\ ME + (1 + n dt)\ me}{M + m}$. Le rapport des deux élasticités devenant ainsi égal à $1 + \frac{MEN + men}{ME + me} dt$, on voit que la dilatabilité demandée est $\frac{MEN + men}{ME + me}$.

OBSERVATIONS.

22. Les auteurs varient singulièrement sur la dilatabilité de l'air commun, qui est cependant le plus connu de tous. Si l'on réduit à la température commune des caves les différentes observations qu'ils nous ont laissé, on trouvera cette dilatabilité égale à

$\frac{1}{165}$..... selon *Roy*.
$\frac{1}{193}$..... selon *Bradley*.
$\frac{1}{195}$..... selon *Vandermonde*, *Berthollet*, *Monge*.
$\frac{1}{208}$..... selon *de Luc*.
$\frac{1}{221}$..... selon *Schuckburgh*, *Bonne*.
$\frac{1}{230}$..... selon *Tobias Mayer* (plus exactement $\frac{1}{227,4}$).
$\frac{1}{240}$..... selon *de Saussure*.
$\frac{1}{260}$..... selon *de la Caille*.
$\frac{1}{266}$..... selon *Guyton*.

OBSERVATIONS.

23. On est encore plus incertain sur l'élasticité spécifique de l'air, qui convient à la température de l'eau bouillante. Elle est égale à

1,339 ..... selon *de Saussure*.
1,375 ..... selon *Lambert*.
1,380 ..... selon *Tobias Mayer*.
1,400 ..... selon *Amontons*.
1,403 ..... selon *de Luc*.
1,414 ..... selon *Bonne*.
1,433 ..... selon *Vandermonde*, *Berthollet*, *Monge*.
1,437 ..... selon *Schukburgh*.
1,484 ..... selon *Roy*.
1,9375..... selon *Priestley*.
1,9389..... selon *Guyton*, *Prieur*.
2,5707..... selon *Prony*.

REMARQUE I.

24. Ces différences sont beaucoup trop grandes, pour pouvoir être rejettées sur le compte de l'expérience seule. Il faudra en conclure plutôt que l'élasticité spécifique de l'air commun ne dépend pas seulement du dégré de chaleur qu'il éprouve; mais qu'en outre elle doit être fonction de quelque autre qualité de l'air, qui y influe pour le moins autant que la chaleur.

REMARQUE II.

25. Le professeur *Schmidt*, université de *Giessen*, pays de *Hesse*, a constaté par un grand nombre d'expériences laborieuses et exactes, que cette qualité n'est-autre chose que l'humidité de l'air, c'est-à-dire, la quantité de vapeurs aqueuses qu'il tient en dissolution. Il a prouvé que le même dégré de chaleur agissoit bien différemment sur un air humide que sur un air sec; il s'est occupé de l'élasticité spécifique des vapeurs aqueuses; il a fini par construire une table des élasticités spécifiques de l'air, pour les différens dégrés du thermomètre et de l'hygromètre. Il a publié son travail dans un mémoire précieux, ayant pour titre: *sur la force expansive de l'air, chargé de vapeurs aqueuses, à des températures différentes;* inséré parmi ceux du *Journal physique de Gren*, vol. IV. cahier III. Je me dispenserai cependant d'en donner un extrait ici, parce que je le regarde comme très-imparfait, et qu'il l'est en effet, de l'aveu même de son auteur.

REMARQUE III.

26. Pour rendre aussi complette que possible l'expression générale de l'élasticité spécifique de l'air, dans l'état actuel de nos connoissances, considérons d'abord les vapeurs aqueuses, éparses et dissoutes dans l'air commun, comme un fluide aëriforme particulier, exerçant sous une densité donnée sa propre élasticité absolue, différente de celle de l'air parfaitement sec. Désignons par $M+m$ une masse donnée d'air atmosphérique, les deux lettres M, m exprimant les quantités des deux fluides dont elle est composée, la première appartenant à l'air parfaitement sec, l'autre aux vapeurs aqueuses qu'il tient en dissolution. Imaginons un hygromètre construit de manière, que par le nombre de ses divisions il indique sur le champ la fraction $\frac{m}{M+m}$; et désignant cette fraction par h, nous aurons $\frac{M}{M+m} = 1 - h$. Désignons

de

de plus par E, e, les élasticités spécifiques des deux fluides; par N, n, leurs dilatabilités, à la température de la glace. Cela étant, nous aurons à la température indiquée par t, l'élasticité spécifique de l'air sec égale à $E(1+Nt)$; celle des vapeurs aqueuses égale à $e(1+nt)$; l'élasticité spécifique de l'air chargé de vapeurs sera donc $E(1+Nt)-h(E-e)-ht(NE-ne)$. Telle est la formule, dont il s'agit de faire l'application, pour avoir dans tous les cas l'élasticité spécifique de l'air commun. Nous nous permettrons là-dessus les observations suivantes.

27. *Premièrement.* Nous n'avons aucun hygrometre qui par le nombre de ses divisions indique la proportion des vapeurs aqueuses, tenues en dissolution dans l'air commun.

28. *Secondement.* Nous ignorons quelle est l'élasticité spécifique des vapeurs aqueuses à la température de la glace; et nous n'avons pas des notions plus certaines sur leur dilatabilité. Le travail de *Bétancourt* sur la force expansive des vapeurs aqueuses a un tout autre objet.

29. *Troisièmement.* La formule elle-même $E(1+Nt)-h(E-e)-ht(NE-ne)$ suppose qu'il n'existe entre l'air sec et les vapeurs aqueuses aucune affinité particulière, qui altère la marche naturelle de leurs élasticités spécifiques. Cette supposition est-elle rigoureusement permise? Nous l'ignorons encore.

30. *Quatrièmement.* Cette même formule suppose de plus, que de dégré en dégré l'élasticité spécifique de l'air sec, ainsi que celle des vapeurs aqueuses, prend des accroissemens égaux entr'eux. Cette supposition est permise tout au plus depuis *zéro* jusqu'au trentième dégré au-dessus de la congélation. Elle ne peut plus être admise au-delà de ce terme; et quant aux élasticités spécifiques de l'air au-dessous de la glace, nous devons dire par anticipation, que les observations de réfractions horisontales, faites à des froids très-rigoureux, se refusent également à la progression arithmétique, ainsi qu'à la somme de deux progressions géométriques, proposée par *Prony*.

31. Enfin, supposant même que toutes ces conditions eussent été parfaitement remplies, est-on bien sûr que les résultats d'une suite d'observations faites à l'horison, demeureront encore les mêmes à des hauteurs quelconques au-dessus de lui? Une réflexion très-naturelle suffira pour nous persuader du contraire. Plus on monte dans l'atmosphère, et plus le froid de ces régions fait baisser le thermometre. En suivant la règle ordinaire, cela indiqueroit une diminution dans l'élasticité spécifique de l'air. Cependant nous conclurrons bientôt des observations de *Bouguer*, que dans la zone torride,

l'élasticité spécifique de l'air doit être très-sensiblement la même depuis l'horison jusqu'aux régions les plus élevées de l'atmosphère. Et quant aux zones tempérées, si les calculs rigoureux de réfractions horisontales, comparés avec les observations de ces mêmes réfractions, nous font présumer qu'il existe en effet quelque décroissement dans l'élasticité spécifique de l'air, il est certain du moins qu'il se trouve bien moins considérable que la température de l'air dans ces régions ne devroit l'exiger.

32. Il suffira de ces réflexions, je crois, pour faire voir, qu'en suivant la route ordinaire, pour arriver à la connoissance de l'élasticité spécifique de l'air, on n'y parviendra probablement jamais. Un instrument au contraire, qui par le nombre de ses divisions nous indiquât sur le champ la densité de l'air, de même que le barometre en indique l'élasticité absolue, le thermometre la chaleur, l'hygrometre l'humidité, nous meneroit directement au but que nous nous proposons ; car divisant la hauteur du baromètre par la densité, on auroit sur le champ l'élasticité spécifique de l'air dans tous les cas possibles. Je dois donc prévenir le lecteur, que je suis occupé de la construction d'un *manomètre*, marquant à chaque instant le rapport de la densité de l'air à celle du mercure, et qu'incessamment je ferai part au public des connoissances aërologiques, acquises à l'aide de cet instrument, aussi utile aux physiciens, qu'indispensable aux astronomes.

33. Nous voici arrivés au point le plus important, et qui constitue l'objet principal de ce chapitre: c'est la disposition des couches atmosphériques, et la loi générale à laquelle elle est assujettie. Supposons la terre entourée d'une masse élastique, composée d'un nombre quelconque des fluides aëriformes les plus hétérogènes, disposées cependant par couches concentriques, de manière qu'à chaque distance du centre de la terre, la pésanteur absolue, la densité, l'élasticité absolue et l'élasticité spécifique de l'air puissent être regardées comme fonctions de cette distance. Soit (*fig. I.*)

a..... rayon de la terre, CB.
y..... distance au centre, CP.
1 et P.. pésanteur absolue en B et en P.
1 et E.. élasticité spécifique en B et en P.
1 et Y.. densité du fluide en B et en P.
B et H.. hauteur du barometre en B et en P.
m..... densité du mercure.

DEFINITION.

34. Imaginons une courbe, ayant pour axe, l'axe même de la terre prolongé CBI; les abscisses étant les distances mêmes au centre, y, auxquelles nous donnerons pour ordonnées, les hauteurs barométriques qui répondent à ces distances. Nous l'appellerons *courbe des hauteurs barométriques*, ou simplement *courbe barométrique.*

THÉOREME.

35. *La soutangente de la courbe barométrique dans chacun de ses points, est égale à* $mEB : P$.

DEMONSTRATION.

36. Il doit y avoir naturellement équilibre entre le poids d'une colonne de mercure de la hauteur $-dH$, et celui d'une colonne d'air ayant pour hauteur dy, à telle distance du centre qu'on veut. La pésanteur absolue étant la même pour les deux colonnes, on doit avoir $-mdH = Ydy$; *première équation fondamentale.* Reste à évaluer Y. Les élasticités absolues étant généralement proportionnelles aux hauteurs barométriques multipliées par les pésanteurs absolues, le rapport des élasticités absolues en B et en P sera celui de $B : HP$. Ce rapport étant divisé par celui des élasticités spécifiques, donnera celui des densités; on aura donc $1 : Y = BE : HP$; *autre équation fondamentale*, qui combinée avec la première, donne $-\frac{Hdy}{dH} = \frac{mBE}{P}$. On aura donc $\frac{mBE}{P}$ pour expression de la soutangente. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE I.

37. Le problème de la disposition des couches atmosphériques est donc réduit à l'intégration de l'équation $-PHdy = mBEdH$. Le produit mB est une quantité constante. P est une fonction très-connue de y; d'ailleurs elle peut absolument être confondue avec l'unité, dans toute l'étendue de l'atmosphère, où la densité de l'air est encore sensible. Reste à connoître la fonction E, qui exprime l'élasticité spécifique de l'air à la distance y. Et c'est ce qu'on ignore. On ne sait pas, si elle est la même dans toute la hauteur de l'atmosphère, ou si elle va en augmentant, ou enfin, si elle va en diminuant. D'abord il se présente une raison physique très-simple qui devroit la faire aller en diminuant, c'est le froid des régions supérieures,

dont l'effet se réduit constamment à affoiblir l'élasticité spécifique d'un fluide aëriforme quelconque. D'un autre côté, l'équilibre naturel des fluides aëriformes sembleroit exiger le contraire, les régions les plus élevées de l'atmosphère devant naturellement être occupées par ceux d'entr'eux, qui à pression égale l'emportent en légèreté sur les autres, et qui par cette raison même doivent se placer au-dessus d'elles.

REMARQUE II.

38. Voilà donc deux causes qui agissent évidemment en sens contraire. Seroit-ce qu'elles se détruisissent mutuellement? L'élasticité de l'air des hautes régions seroit-elle précisément réduite à l'élasticité des régions inférieures, par le plus grand froid des premières? L'élasticité spécifique alors seroit la même dans toute la hauteur de l'atmosphère; cela seroit fort commode pour le calcul, mais ce cas est le moins probable de tous. Le froid des régions supérieures prévaudroit-il sur l'élasticité spécifique de l'air, naturellement plus grande? Ou bien, cette élasticité l'emporteroit-elle sur les effets du froid? Dans le premier cas, l'élasticité spécifique de l'air iroit en diminuant, dans le second elle iroit en croissant; et c'est entre ces deux cas qu'il importe de décider.

REMARQUE III.

39. Le calcul des réfractions horisontales va prononcer sur cette importante question. Nous verrons que dans nos zones tempérées l'élasticité spécifique de l'air va réellement en décroissant depuis l'horison jusqu'aux régions les plus élevées; et en même tems nous allons avoir une donnée sure pour déterminer avec précision le rapport des élasticités spécifiques aux limites extrêmes de l'atmosphère. Commencons par le cas le plus simple.

PROBLEME.

41. *On demande l'expression de la hauteur barométrique H, et celle de la densité Y, en regardant le rayon de la terre comme infiniment grand, et en supposant l'élasticité de l'air constante, dans toute la hauteur de l'atmosphère.*

SOLUTION.

41. Ayant $E = 1$, $P = 1$, l'équation $-PHdy = mBEdH$ deviendra $-Hdy = mBdH$; et supposant $y - a = x$, on aura l'intégrale $H = Be^{-x:mB}$. A la place de l'autre équation $BEY = HP$ il viendra $H = BY$, ce qui

donne $Y = e^{-x:mB}$. Les deux courbes, celle des densités, et celle des élasticités spécifiques, seront donc identiquement les mêmes dans le cas d'une élasticité spécifique constante ; l'une et l'autre étant une logistique, dont la soutangente est $m\,B$.

COROLLAIRE I.

42. Le nombre m est égal à la densité du mercure, divisée par la densité de l'air. Le produit $m\,B$ est donc proportionnel à la hauteur du barometre B, qui exprime l'élasticité absolue de l'air à l'horison, divisée par sa densité. Ainsi la soutangente de la logistique, entièrement indépendante de la hauteur du barometre, sera proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air.

COROLLAIRE II.

43. Je désignerai constamment la soutangente barométrique par la lettre h ; elle lui sera consacrée dans la suite. On aura donc les deux équations $H = B\,e^{-x:h}$, $Y = e^{-x:h}$. Reste à déterminer h. Cela n'aura aucune difficulté pour ceux qui seront pourvus de notre manometre ; l'échelle de cet instrument leur marquera dans tous les cas le nombre m ; et la multiplication de la hauteur du barometre B par m leur fera connoître la soutangente h. Le calcul et l'observation suppléeront en attendant, le mieux qu'il est possible, au défaut de cet instrument.

OBSERVATION.

44. *A la température de* 16 $\frac{3}{4}$ *de Réaumur, les quatre premières décimales de la différence des logarithmes tabulaires de deux hauteurs barométriques, observées dans deux points différemment élevés au-dessus de l'horison, font connoître la différence des élévations des endroits, en toises de Paris :* telle est la fameuse observation de *de Luc*. Cela veut dire en d'autres termes : *A* 16 $\frac{3}{4}$ *de Réaumur, la soutangente h est égale à* 4343 *toises.*

COROLLAIRE.

45. La soutangente étant trouvée pour une certaine température, il reste à la déterminer pour toutes les autres. Cela dépend de l'élasticité spécifique de l'air, qui est fonction de la chaleur et de l'humidité à la fois ; mais comme l'état actuel de la physique ne nous permet pas encore de faire entrer en compte cette dernière, nous devons nous restreindre à la chaleur seule. Reste donc à choisir parmi les différentes fractions rapportées en 22. J'ai cru

que ce choix n'étoit pas arbitraire dans un ouvrage sur les réfractions astronomiques; j'ai préféré $\frac{1}{230}$, résultat d'une infinité d'observations faites par *Tobias Mayer*, l'observateur le plus exact et le plus infatigable de son siècle. Cela donne pour la température des caves, ou dix dégrés de *Réaumur*, $h = 4218$ toises: telle est la valeur qne je lui supposerai dans la suite.

REMARQUE.

46. Reste à faire l'application de cette donnée au calcul de la réfraction horisontale. Ici je serai obligé de proposer par anticipation quelques théorèmes, dont on trouvera la démonstration dans le second et dans le quatrième chapitre. Je désignerai donc par $1 : 1 + \omega$ le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, dans le passage d'un rayon de l'air dans le vuide. Nous verrons que ce rapport est en même tems celui du sinus de la distance apparente à celui de la distance vraie, depuis le zénith jusqu'à 70° de distance. De plus, la fraction ω est constamment proportionnelle à la densité de l'air près l'horison. Enfin, depuis le zénith jusqu'à 70° de distance, la réfraction est égale à ω, multiplié par la tangente de la distance apparente.

THÉOREME.

47. *Supposant l'élasticité spécifique de l'air constante dans toute la hauteur de l'atmosphère, et faisant* $\frac{\omega a}{h} = n$, *la réfraction horisontale, exprimée en parties du rayon, sera égale à la racine quarrée de* $\frac{1}{2} n \omega \pi$, *multipliée par la série* $1 + An + Bn^2 + Cn^3 +$ etc.; *les coëfficiens* A, B, C, D *etc. étant des nombres constans et absolus, dont les valeurs sont:*

$$A = 2^{1:2} - 1;$$
$$2\,B = 3^{3:2} - 2.\,2^{3:2} + 1;$$
$$6\,C = 4^{5:2} - 3.\,3^{5:2} + 3.\,2^{5:2} - 1;$$
$$24\,D = 5^{7:2} - 4.\,4^{7:2} + 6.\,3^{7:2} - 4.\,2^{7:2} + 1;$$
$$120\,E = 6^{9:2} - 5.\,5^{9:2} + 10.\,4^{9:2} - 10.\,3^{9:2} + 5.\,2^{9:2} \cancel{+} - 1;$$

etc. etc. Le calcul numérique, dressé sur ces formules, donne

$$A = 0{,}414214;\ Log.\ A = 9{,}6172248;$$
$$B = 0{,}269649;\ Log.\ B = 9{,}4307988;$$
$$C = 0{,}200865;\ Log.\ C = 9{,}3029043;$$
$$D = 0{,}160253;\ Log.\ D = 9{,}2048061;$$
$$E = 0{,}132935;\ Log.\ E = 9{,}1236393.$$

Comme la série est très-convergente dans tous les cas, il est inutile d'aller jusqu'au cinquième coëfficient; et presque toujours on peut s'arrêter au troisième.

PROBLEME.

48. *Connoissant la réfraction horisontale R, et la fraction ω, égale à la réfraction qui convient à 45 degrés de hauteur apparente, et proportionnelle à la densité de l'air, déterminer la soutangente h, proportionnelle à son élasticité spécifique.*

SOLUTION.

49. L'inconnue du problème n dépend de la solution de l'équation $R\sqrt{2} = (1 + An + Bn^2 + Cn^3 \text{ etc.})\sqrt{\omega n \pi}$. Comme il est impossible d'en tirer l'inconnue n autrement que par approximation, désignons par p une valeur approchée de n, et par $(1-v)\,p$ ou p', ensuite par $(1-v')\,p'$ ou p'' etc. des valeurs plus approchées que n'étoit p. On trouvera $\frac{1}{2}v$, en divisant $1 + Ap + Bp^2 + Cp^3 + \text{etc.} - \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{p\omega\pi}}$, par $1 + 3Ap + 5Bp^2 + 7Cp^3 + \text{etc.}$ De $(1-v)\,p = p'$ on passera à $(1-v')\,p' = p''$, de celle-ci à $(1-v'')\,p'' = p'''$ etc. et comme la série est très-convergente, la troisième opération fera connoître l'inconnue n avec une précision plus que suffisante. On aura ensuite la soutangente h, en divisant ωa par n.

OBSERVATION I.

50. On trouve dans la première table des réfractions, dressée par *Bouguer*, sur une suite d'observations astronomiques, faites dans la zone torride, au bord de la mer, $\omega = 44'' = 0{,}00021332$ en parties du rayon; et $R = 27' = 0{,}007854$. Si d'après ces deux données on demande la soutangente barometrique h, supposons au hasard $Log.\ p = 9{,}2511411$; il n'est pas difficile d'avoir une valeur approchée de $Log.\ p$, parce que cette soutangente qu'on cherche, doit nécessairement se trouver entre 3600 et 4800 toises. On tire de là par un calcul très-facile $v = \frac{134890}{1272392}$; ce qui donne $p' = \frac{1137502}{1272392}\,p$; et $Log.\ p' = 9{,}2024688$. Cette dernière valeur donne $v' = -\frac{2000}{1238015}$, d'où l'on tire $p'' = \frac{1240015}{1238015}\,p'$. Cette valeur peut être prise pour n; il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à v''. Cela donne $Log.n = 9{,}2031647$.

En effet, si l'on employe ce logarithme, pour évaluer l'expression générale $(1 + An + Bn^2 + \text{etc.}) \sqrt{\tfrac{1}{2}\omega n \pi}$, on trouve 27 minutes de réfraction horisontale, sans qu'il y ait une seconde d'erreur. De n on déduit h, ou la soutangente demandée, égale à 4378,84 toises ; ce qui suppose une température de 18 dégrés au-dessus de la glace.

REMARQUE.

51. Comme il paroît par la rélation des citoyens *Bouguer* et *Condamine*, que la température moyenne au bord de la mer est effectivement de 18° dans cette partie du nouveau monde, l'on voit que la supposition d'une élasticité spécifique constante se trouve pleinement confirmée par l'observation de *Bouguer*. De plus, un coup d'oeil sur la formule $R = (1 + An + Bn + \text{etc.}) \sqrt{\tfrac{1}{2}\omega n \pi}$ nous fait voir, que toutes choses égales d'ailleurs, en supprimant même les termes An, Bn^2 etc. l'inconnue n est proportionnelle au quarré de la réfraction horisontale; et qu'ainsi de très-légères erreurs, commises dans celle-ci, en produisent de très-graves dans l'estimation de la température. Une demi-minute de moins dans la réfraction horisontale auroit indiqué une température de 48° au-dessus de la glace; et dès-lors il auroit fallu renoncer à la supposition d'une élasticité spécifique constante.

OBSERVATION II.

52. La seconde table de *Bouguer* est pour *Quito* à 1479 toises au-dessus du niveau de la mer. Prenant un milieu entre les deux réfractions, à 44 et 46 dégrés de hauteur apparente, elle donne $\omega = 36''$, faisant 0,00017453 en parties du rayon; et la réfraction horisontale de $22' 50''$. On en tire pour soutangente des hauteurs barométriques, $h = 4030$ toises; c'est celle qui convient à la température d'un demi-dégré au-dessous de la glace. Comme il est dit positivement dans le mémoire de cet astronome, année 1749, que cette observation a été faite *au pied des neiges*, l'on voit que si l'on avoit imaginé ces réfractions exprès, pour prouver l'accord qui regne entr'elles et l'hypothèse qu'on avoit employée, l'on ne pouvoit guères mieux choisir. La supposition d'une élasticité spécifique constante dans la zone torride se trouve donc confirmée par cette seconde observation de *Bouguer*, de même que par la première.

OBSER-

OBSERVATION III.

53. Une troisième table de *Bouguer* fait connoître l'augmentation que prennent les réfractions de la table précédente, pour des lieux moins élevés de 500 toises. On y trouve la réfraction horisontale, égale à 24′ 32″; et $\omega = 41''$ ou 0,00019872 en parties du rayon. On en déduit la soutangente barométrique h, égale à 4533 toises; appartenante à une température de 27 dégrés au-dessus de la glace, dans la supposition d'une élasticité spécifique constante; ce qui s'accorde fort bien avec la latitude de la ville de *Quito*, et la hauteur de l'endroit, où étoit l'observateur.

REMARQUE.

54. Les trois observations de *Bouguer* remplissent parfaitement les conditions, que la haute analyse exige. Dans les trois observations, la réfraction horisontale a exactement été ce qu'elle devoit être, d'après la formule générale, calculée sur la supposition d'une élasticité spécifique constante dans toute la hauteur de l'atmosphère. Nous pouvons donc mettre au nombre des vérités presque géométriques, que dans la disposition des couches atmosphériques, tout le mêlange possible de gas, de vapeurs, de fluides hétérogènes etc. ne sauroit porter atteinte aux deux grandes loix de la nature :

Densité de l'air, proportionnelle au poids qui comprime;

Réfrangibilité, proportionnelle à la densité;

et que si ces loix ne sont pas observées dans toute l'étendue de la surface du globe, elles sont maintenues au moins avec la plus grande rigueur dans cette vaste partie de la zone torride, qui a servi aux observations de *Bouguer* et *Condamine*.

OBSERVATION IV.

55. Descendant la surface du globe, de l'équateur vers les poles, entrons dans cette partie de la zone tempérée, qui a servi aux observations du célèbre *de la Caille*, et examinons la table de réfractions qu'il nous a donnée. Nous y trouvons $\omega = 66''$, ce qui fait 0,00032 en parties du rayon; et la réfraction horisontale de 33′ 30″. Appliquant à ces données, la méthode enseignée en 49, pour déterminer la soutangente barometrique, nous la trouvons égale à 6424 toises. Cette soutangente appartient à la température de 130 dégrés au-dessus de la glace; température bien supérieure à celle de l'eau bouillante, et même à celle du souffre fondant. Réciproquement, si

l'on suppose à l'observation de *la Caille* la température moyenne des caves, qui est la plus probable de toutes, et qu'on employe, pour calculer la réfraction horisontale, la formule générale de 47, que nous avons trouvée parfaitement d'accord avec toutes les observations de *Bouguer*, nous trouvons $43' 9''$, au lieu des $33' 30''$, marquées dans la table de *la Caille*.

REMARQUE.

56. Nous ne sommes pas les seuls qui trouvent à redire à la table des réfractions, dressée par ce grand astronome; on est généralement persuadé, que ses réfractions sont beaucoup trop fortes. Il ne nous appartient pas au reste, de répandre le plus léger nuage sur le travail précieux de cet illustre observateur; mais ce que nous devons dire, et ce dont tout le monde conviendra avec nous, c'est que la réfraction horisontale de *la Caille* est absolument incompatible avec la supposition d'une élasticité spécifique constante; et que cet accord entre le calcul et l'observation, que nous avons trouvé dans la zone torride, n'est plus le même dans la zone tempérée.

OBSERVATION V.

57. La table de réfractions qui se trouve dans les anciennes éditions de *l'astronomie de la Lande*, et qui a été calculée par *Bonne*, donne $\omega = 59''$, ce qui fait 0,0002868; et la réfraction horisontale de $32' 24''$. De plus, il est dit qu'elle appartient à 10° de température, pour laquelle nous avons $h = 4218$ toises. Calculant d'après ces données la réfraction horisontale, conformément à la formule de 47, on la trouve égale à $38' 11''2$; ce qui fait une différence de $5' 47''$ ou *d'un sur six*, entre l'observation, et le calcul fondé sur la supposition d'une élasticité spécifique constante. D'un autre côté, regardant la réfraction horisontale de $32' 24''$ comme donnée, et cherchant la soutangente h qui lui répond dans la supposition d'une élasticité spécifique constante, on trouve $h = 5550$ toises; soutangente qui suppose une température de 83° au-dessus de la glace, température encore supérieure à celle de l'eau bouillante.

OBSERVATION VI.

58. Examinons encore la table de réfractions qui se trouve dans la dernière édition de *l'astronomie de la Lande*, et qui est proprement celle de *Bradley*, réduite à la température de 10 dégrés, aussi bien que cela pouvoit se faire

en supposant la réfraction proportionnelle à la densité de l'air; supposition que nous trouverons bien éloignée de la vérité, aux approches de l'horison. Elle donne $\omega = 0{,}000275$; et la réfraction horisontale de $32' 56''$. La température de 10° donne $h = 4218$ toises. Appliquant à ces données la formule de 47, on trouve la réfraction horisontale égale à $36' 26''$. Il y a donc entre l'observation et le calcul fondé sur l'hypothèse d'une élasticité constante, une différence de $3' 30''$; c'est-à-dire, *d'un sur dix*. D'un autre côté, regardant la réfraction horisontale comme donnée, et cherchant la soutangente h qui lui convient dans cette même hypothèse, on trouve $h = 4993$ toises; ce qui suppose une température de 52 dégrés au-dessus de la glace.

59. Prenons pour dernier exemple, la table de réfractions que nous a laissé le plus grand de tous les géomètres, et le plus habile de tous les observateurs qui aient jamais existé; l'homme sans lequel notre astronomie mériteroit à peine le nom de science, parce que c'est à lui seul que nous devons la connoissance des éternelles loix de la nature, et l'application de l'analyse à ces mêmes loix, en un mot, l'immortel NEWTON. Quelques années avant sa mort il communiqua à son ami *Halley* la table de réfractions, que celui-ci s'empressa de publier dans les *Philos. Transact. année* 1721. Il n'est pas dit comment cette table a été faite, ni si elle est le résultat de l'analyse, ou bien celui de l'observation, et dans le premier cas il seroit très-intéressant de connoître la méthode dont *Newton* s'est servi. Il eut mieux fait sans doute de l'indiquer; mais il étoit dans sa quatre-vingtième année alors, respectons sa vieillesse, et acceptons la table telle qu'elle est, avec la reconnoissance que nous devons à son auteur.

60. La table de *Newton* donne $33' 45''$ de réfraction horisontale; et $54''$ de réfraction à 45 dégrés de hauteur apparente. On en déduit $\omega = 0{,}0002618$; et si l'on employe cette valeur pour déterminer la soutangente des densités h, moyennant la méthode d'approximation enseignée en 48, on trouve cette soutangente égale à 4377 toises; elle indique une température de 18 dégrés et deux tiers au-dessus de la glace. Et réciproquement, l'air se trouvant à la température de 18 dégrés et deux tiers, la réfraction horisontale de *Newton* est exactement ce qu'elle doit être dans la supposition d'une élasticité spécifique constante. Est-ce l'observation ou l'analyse qui a fourni cette table au géomètre anglois? Dans le premier cas, l'exemple d'un pareil accord seroit unique peut-être dans toute l'histoire de la physique; d'autant plus que nous verrons dans le quatrième chapitre, toutes les réfractions approchantes

de l'horison, répondre avec une exactitude presqu'égale aux conditions de l'analyse, ce qu'elles sont bien loin de faire dans les trois tables de *Bouguer*. Dans le second, il faudra demander d'abord, pourquoi *Newton* a-t-il supposé dans le calcul de sa table, la température de 18 dégrés, préférablement à toute autre? Ensuite, comment a-t-il fait pour parvenir à la formule de 47, qui seule pouvoit lui donner une réfraction précisément égale à 33′ 45″, à la température de 18 dégrés et deux tiers. On peut répondre à la première question d'une manière assez satisfaisante. Multipliant 28 pouces par le produit des deux nombres 14 et 800, dont le premier exprime le rapport moyen des densités du mercure et de l'eau, le second celui des densités de l'eau et de l'air, on trouve 4355 toises, ce qui diffère très-peu de 4377: et ce qui indiqueroit rigoureusement une température de 17 dégrés et deux tiers. Il est plus difficile de lever la seconde difficulté. La formule de 47 dépend d'une analyse très-relevée, qu'*Euler* ignoroit encore en 1754, et dont les principes n'ont été bien dévéloppés que par *de la Place*, dans son *Mémoire sur l'approximation des formules, qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances*; inséré parmi ceux de l'académie de l'année 1782. Le grand *Newton* y seroit-il parvenu dès le commencement de ce siècle, par des voies qu'il nous a laissé ignorer? Cela ne seroit pas absolument impossible de la part d'un homme pour qui rien n'étoit impossible dans la haute analyse; mais il seroit assez singulier au moins, qu'il n'en eut laissé aucune trace dans le reste de ses immortels écrits.

REMARQUE I.

61. Comme il paroît cependant que la table de *Newton* est beaucoup plutôt le résultat de l'analyse que celui de l'observation, nous la mettrons de côté, quelque favorable qu'elle soit d'ailleurs à la supposition d'une élasticité spécifique constante; et nous nous arrêterons d'abord aux trois tables de *la Caille*, *la Lande* et *Bradley*. On convient généralement que les réfractions de la première sont trop fortes, depuis six dégrés de hauteur apparente jusqu'au zénith. Quant aux deux autres, comme le citoyen *la Lande* dans la dernière édition de son astronomie, a supprimé la table de réfraction qui se trouvoit dans les anciennes éditions, en y substituant celle de *Bradley*, il n'y a pas de doute non plus que cette dernière ne mérite la préférence. Ainsi donc, celle de toutes nos tables de réfraction, qui est généralement reconnue pour la plus exacte et la plus conforme aux observations, est en même tems

celle qui se rapproche le plus de la supposition naturelle d'une élasticité spécifique constante.

REMARQUE II.

62. Cependant, en adoptant cette table, nous trouvons une différence de $3' \, 30''$ entre le calcul et l'observation : ce qui indiqueroit une élasticité spécifique assez sensiblement décroissante, depuis l'horison jusqu'aux régions élevées de l'atmosphère. Comme il seroit à désirer cependant, qu'une supposition aussi naturelle que celle d'une élasticité spécifique constante, fut véritablement la loi de la nature ; et que d'ailleurs il est peu probable en effet, qu'une supposition déja reconnue pour très-véritable dans la zone torride, par les observations d'un astronome tel que *Bouguer*, ne le soit plus dans les zones tempérées, il vaut la peine sans doute d'examiner sans prévention, à quoi peut se réduire cette prétendue différence entre le calcul et l'observation.

63. La réfraction horisontale, exprimée en parties du rayon, est égale à $\sqrt{\frac{1}{2}\omega n \pi}$, multipliée par la série très-convergente $1 + An + Bn^2 +$ etc. Les coëfficiens π, A, B etc. sont des nombres absolus. L'expression entière ne renferme donc que deux quantités variables: l'une ω, réfraction à 45° de hauteur apparente ; l'autre n, mise à la place de $\frac{\omega a}{h}$; la lettre h désignant la soutangente barométrique à la température de l'observation, et se trouvant proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air.

64. *Premièrement.* Il est reconnu que la détermination de la réfraction à 45° de hauteur est sujette à de très-grandes difficultés ; aussi les observateurs varient singulièrement à ce sujet; *de la Caille* la porte à 66 secondes, tandis que *Halley* et *Flamstead* ne lui en assignent que 54. Supposant en effet $\omega = 54''$, et joignant à cette donnée $h = 4218$ toises, conformément aux observations de *de Luc;* on trouve la réfraction horisontale égale à $34' \, 30''$; ainsi cette différence prétendue de $3' \, 30''$ entre le calcul et l'observation, se trouvera sur le champ réduite à $1' \, 30''$.

65. *Secondement.* Quant à la soutangente h, proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air, j'ai déja remarqué combien il doit être difficile de la déterminer d'après la règle de *de Luc*, en ce qu'il est très-prouvé, que cette ligne est fonction de la chaleur et de l'humidité à la fois, et que pour la déterminer avec précision, il faut absolument se servir du manometre.

Cependant je ne voudrois pas insister sur cette difficulté, parce que la soutangente h n'entre dans le dénominateur de la réfraction que comme racine quarrée, et qu'une erreur de quarante toises dans l'évaluation de cette soutangente, ne produiroit qu'une différence de dix secondes sur la réfraction horisontale.

66. *Troisièmement.* Est-il bien vrai qu'à la température de 28 *poll. barom.* et de 10 dégrés de *Réaumur*, la réfraction horisontale ne soit pas plus grande que $32' 56''$? Le ciel de l'Angleterre, et celui de la capitale de la France, sont-ils assez purs et sereins, pour nous faire espérer un nombre suffisant d'observations de réfraction horisontale, faites avec toute l'attention qu'elle mérite? La très-grande différence qui se trouve entre les observations de cette espèce, faites à des températures absolument égales, et par des observateurs également célèbres, ne prouve-t-elle pas précisément le contraire? N'est-il pas même très-solidement prouvé par les observations recueillies par *le Monnier*, et que nous rapporterons en son lieu, que dans une infinité de cas la réfraction horisontale peut aller à 40, à 45, et même à 50 minutes; et ne doit-on pas en conjecturer avec beaucoup de vraisemblance, que cette réfraction en général est sensiblement plus grande, qu'elle n'est marquée ordinairement dans nos tables? Enfin si parmi ces observations, il en est qui se trouvent absolument conformes à la supposition naturelle d'une élasticité spécifique constante; si ces observations ont été faites sous un ciel bien plus pur et serein, que celui de *Paris* ou de *Londres;* si ces mêmes observations s'accordent entr'elles dans tous les autres points, je demande si elles ne doivent pas naturellement l'emporter sur d'autres observations, faites sous un ciel bien moins pur, discordantes entr'elles dans presque tous les points, et ne pouvant être conciliées avec la théorie qu'à l'aide d'une hypothèse aussi peu naturelle, aussi contraire même à l'idée de l'équilibre mutuel des fluides aëriformes, qne celle d'une élasticité spécifique décroissante?

67. Il ne me paroît donc point démontré encore par la petite différence de $3' 30''$, entre le calcul et l'observation que l'examen de la table de *Bradley* nous a fait appercevoir, que dans la disposition des couches atmosphériques dans nos climats, la nature se soit prescrit une autre loi quelconque que celle d'une élasticité spécifique constante, ou d'une élasticité absolue proportionnelle à la densité. Cependant, pour ne rien laisser à désirer dans cette analyse, substituons à E une fonction de la hauteur x, et voyons ce qui en pourra résulter pour le calcul des réfractions.

HYPOTHESE.

68. Quelque soit cette fonction, il faut d'abord qu'elle ne commence à différer sensiblement de l'unité, qu'à la hauteur de 500 à 600 toises, parce que dans tout cet intervalle les différences des élevations des endroits, sont très-sensiblement proportionnelles aux différences des logarithmes des hauteurs barométriques. A quatre mille toises, l'élasticité spécifique peut avoir diminué d'un quart ou d'un cinquième. A douze mille, il est permis qu'elle soit à l'unité comme 3 : 4, ou comme 5 : 7. Il est fort indifférent ce qu'elle devienne après, attendu qu'à de plus grandes hauteurs la densité de l'air paroît trop foible pour affecter sensiblement les réfractions astronomiques. Or, on remplit le mieux ces différentes conditions, en prenant pour la courbe des élasticités spécifiques une logistique dont la soutangente est différente de celle des hauteurs barométriques, et beaucoup plus grande qu'elle. Nous la désignerons par g. Nous aurons $E = e^{-x:g}$; équation de la courbe aux élasticités spécifiques.

PROBLEME.

69. *Ayant* $E = e^{-x:g}$, *on demande la loi des hauteurs barométriques, et celle des densités.*

SOLUTION.

70. Des deux équations $-mdH = Ydy$, et $BEY = HP$, on tire d'abord $mBEdH = -HPdy$. Ayant $mB = h$, faisant de plus comme ci-dessus $y - a = x$, et considérant que la pésanteur absolue P peut absolument être confondue avec l'unité dans toute l'étendue de l'atmosphère où la densité de l'air est encore sensible, cette équation deviendra $hEdH = -Hdx$; ayant pour intégrale $Log.\frac{B}{H} = \frac{g}{h}(\frac{1}{E} - 1)$. Ajoutant à ce logarithme celui de E, qui est $-\frac{x}{g}$, on aura $Log.\frac{B}{Y} = -\frac{x}{g} + \frac{g}{h}(\frac{1}{E} - 1)$; ayant pour différentielle $\frac{dY}{Y} = -(\frac{1}{hE} - \frac{1}{g})dx$. Le dévéloppement en série donne

$$\frac{1}{E} = 1 + \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg} + \frac{x^3}{6g^3} + \frac{x^4}{24g^4} + \text{etc.}$$

$$Log.\frac{B}{H} = \frac{x}{h}(1 + \frac{x}{2g} + \frac{x^2}{6g^2} + \frac{x^3}{24g^3} + \text{etc.})$$

$$Log.\frac{1}{Y} = -\frac{x}{g} + \frac{x}{h}(1 + \frac{x}{2g} + \frac{x^2}{6g^2} + \text{etc.})$$

COROLLAIRE I.

71. Comme la soutangente des élasticités spécifiques g est au moins de trente-mille toises, à ce que le calcul nous apprendra bientôt; et que la plus grande hauteur à laquelle l'air paroît encore influer sensiblement sur la réfraction, est tout au plus de vingt-mille toises, on peut très-bien s'arrêter au second terme de la série très-convergente $1 + \frac{x}{2g} + \frac{x^2}{6g^2} +$ etc.; et même, en s'arrêtant au seul premier terme, et supposant $Log. \frac{1}{Y} = \frac{x}{h} - \frac{x}{g}$, ou x divisé par $\frac{gh}{g-h}$, on aura employé une approximation, qui ne pourra pas nous écarter sensiblemeut de la vérité.

COROLLAIRE II.

72. Le décroissement des densités de l'air dans la supposition d'une élasticité spécifique décroissante en progression géométrique, sera donc très-sensiblement représenté par une nouvelle logistique, ayant pour soutangente $\frac{gh}{g-h}$. Désignant cette nouvelle soutangente par s, on aura $Y = e^{-x:s}$; équation des densités, si non entièrement véritable, du moins beaucoup plus approchante que l'équation ordinaire $Y = e^{-x:h}$.

COROLLAIRE III.

73. Mettant μ à la place de $\frac{\omega a}{s}$, de même qu'en 47, on avoit fait $n = \frac{\omega a}{h}$, il est clair que μ sera la racine de l'équation $R = (1 + A\mu + B\mu^2 +$ etc.$)$ $\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\pi}$; la réfraction horisontale étant désignée par R. Tirant de cette équation la valeur de μ, par la méthode enseignée en 49, on aura $s = \frac{\omega a}{\mu}$; et ensuite $g = \frac{sh}{s-h} = \frac{\omega a h}{\omega a - \mu h}$, pour valeur de la soutangente aux élasticités spécifiques.

APPLICATION I.

74. La table de *Bradley*, réduite à la température de 10°, donne $h = 4218$ toises; $\omega = 56'' 8 = 0{,}000275$; et $R = 32' 56''$. On en tire $s = 4992{,}71$ pour

pour valeur rigoureuse de la soutangente aux densités, dans la supposition d'une élasticité spécifique décroissante. Cela fait connoître g, soutangente aux élasticités spécifiques, égale à 27183,37 toises.

APPLICATION II.

75. Comme cependant il regne une incertitude de quelques secondes dans le compte de la réfraction à 45° de hauteur, de l'aveu même des meilleurs observateurs, supposons d'après *Halley* $\omega = 54'' = 0{,}0002618$; et voyons ce qui en résultera pour s et g. On aura s, soutangente aux densités, égale à 4558,69 toises; et g, soutangente aux élasticités spécifiques, égale à 56443,45 toises. Dans ce dernier cas, l'élasticité spécifique de l'air ne se trouveroit réduite à la moitié, qu'à 50000 toises de hauteur. A 1200 toises la diminution de cette élasticité spécifique seroit encore absolument insensible à nos instrumens météorologiques ordinaires.

REMARQUE I.

76. Il a fallu se décider entre les deux valeurs, qu'on peut supposer à la réfraction ω, l'une conforme à la table de *Bradley*, l'autre à l'observation de *Halley*. Quoique ces deux observateurs soient absolument égaux en mérite, cependant pour ne pas avoir à me reprocher, d'avoir favorisé l'un d'eux, uniquement pour faire quadrer mes formules aux observations, je me suis déclaré pour *Bradley*. Voici à présent la table complette des trois soutangentes, avec leurs logarithmes, auxquels nous joindrons ceux des rapports $\frac{h}{a}$, $\frac{s}{a}$, $\frac{g}{a}$.

$$h = 4218{,}00 \text{ toises};$$
$$s = 4992{,}71 \text{ toises};$$
$$g = 27183{,}37 \text{ toises};$$
$$Log.\ h = 3{,}6251066;$$
$$Log.\ s = 3{,}6983365;$$
$$Log.\ g = 4{,}4343033;$$
$$Log.\ (h:a) = 7{,}1096139;$$
$$Log.\ (s:a) = 7{,}1828438;$$
$$Log.\ (g:a) = 7{,}9188106;$$
$$h:a = 0{,}0012871047;$$
$$s:a = 0{,}0015235046;$$
$$g:a = 0{,}0082948900.$$

REMARQUE II.

77. Ainsi donc, à 100 toises de hauteur, la diminution de l'élasticité spécifique doit être absolument insensible pour nos mesures usitées, n'étant encore égale qu'à un trois-centième de sa valeur totale. A 300 toises elle aura diminué d'un *centième;* à 900 toises d'un *trentième;* à 1300 toises d'un *vingtième;* à 2600 toises d'un *dixième;* à 5000 toises d'un *cinquième;* à 11200 elle se trouvera réduite aux *deux tiers*, à 16000 toises aux cinq-neuvièmes de ce qu'elle étoit à l'horison.

REMARQUE III.

78. La hauteur du barometre H est bien moins affectée par la supposition d'une élasticité spécifique décroissante. Ayant $Log.\frac{B}{H}=\frac{x}{h}(1+\frac{x}{2g}+\text{etc.})$, on voit que pour des élévations moyennes au-dessus de l'horison l'on peut se servir sans erreur sensible de l'ancienne formule $Log.\frac{B}{H}=\frac{x}{h}$; ou $H=Be^{-x:h}$. La table des hauteurs barométriques dans la nouvelle hypothèse est donc sensiblement la même, que celle des densités dans l'ancienne.

REMARQUE IV.

79. Quant aux hauteurs à mesurer par les observations barométriques, voici à quoi peut se réduire la différence entre les deux hypothèses. On a dans l'une $x=h\ Log.\ (B:H)$. L'autre donne x égale à g, multiplié par le logarithme hyperbolique de $1+\frac{h\ Log.\ (B:H)}{g}$. Supposant $B=28$ *pouces;* $h=4218$ *toises*, ce qui suppose une température de *dix degrés;* et ayant de plus $g=27183$ toises, on trouve pour

Haut. barom. H.	*Elévation de l'endroit x. en supposant l'élasticité constante;*	*décroissante.*	*Erreur.*
28	0,00	0,00	0
26	312,59	310,82	1 sur 176;
24	650,21	642,03	1 sur 83;
21	1213,44	1187,13	1 sur 47;
14	2923,69	2776,90	1 sur 20.

De ces quatre différences il n'y a que la dernière qui puisse être bien sensible pour nos instrumens météorologiques; mais c'est à une hauteur, qu'on ne trouvera nulle part dans l'ancien monde, et dont la mesure géométrique est absolument incertaine.

REMARQUE V.

80. La soutangente aux élasticités spécifiques g (supposée toutes fois qu'elle ne soit pas infiniment grande, et que toute cette hypothèse des élasticités spécifiques décroissantes ne se réduise enfin à être une pure illusion, produite par la très-grande difficulté des observations de cette espèce) est-elle une quantité invariable et indépendante des différentes modifications de l'atmosphère? Nous l'ignorons. Les observations barométriques ne peuvent guères nous en instruire, à moins qu'elles ne fussent faites à des hauteurs de quinze cent à deux mille toises; car à de moindres hauteurs on trouvera toujours la différence des élévations des endroits sensiblement proportionnelle à la différence des logarithmes des hauteurs barométriques. Le seul moyen de s'en assurer, seroit de faire des observations de réfraction horisontale, en beaucoup plus grand nombre, et avec plus de précision, qu'on n'a fait jusqu'ici. Peut-être trouveroit-on, que la hauteur du barometre et la densité de l'air restant absolument les mêmes à l'horison, les réfractions horisontales peuvent différer sensiblement entr'elles. Il seroit difficile alors d'expliquer cette différence, à moins que de supposer un changement survenu à la soutangente g, laquelle, dépendant uniquement des modifications qui peuvent arriver dans les couches élevées de l'atmosphère, pourroit très-bien varier, sans que ni la densité, ni l'élasticité absolue de l'air à l'horison, se ressentissent de cette variation.

REMARQUE VI.

81. Quelque soit notre incertitude à cet égard, il paroît cependant que la soutangente aux élasticités spécifiques n'est pas sujette à des variations aussi considérables que la soutangente barométrique h, qui pour chaque dégré du thermometre éprouve un changement d'un deux-cent-trentième. La première ne dépend que des variations qui peuvent arriver dans les régions fort élevées de l'atmosphère, exemptes, comme on sait, d'une infinité de causes éphémères, qui affectent différemment ses régions inférieures: et s'il nous étoit permis de pénétrer dans les premières, armés de tout l'appareil de nos instrumens météorologiques, il est probable que nous en trouverions la température aussi invariable que celle des caves. Je continuerai donc, sans crainte d'erreur sensible, de supposer à cette soutangente g, la valeur de 27183 toises.

REMARQUE VII.

82. Il faut bien se garder de confondre ensemble les deux soutangentes h, s. La première, $h = mB$, égale à la hauteur du barometre multipliée par le rapport de la densité de l'air à celle du mercure, proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air près l'horison, et prenant comme elle l'accroissement d'un deux-cent-trentième pour chaque dégré du thermometre de *Réaumur*; elle exprime le décroissement des densités dans l'ancienne supposition d'une élasticité spécifique constante; et dans la nouvelle, elle peut encore servir pour déterminer d'une manière approchée le décroissement des hauteurs barométriques. L'autre, $s = \frac{gh}{g-h} = \frac{gmB}{g-mB}$ exprime le décroissement des densités dans l'hypothèse d'une élasticité spécifique décroissante en progression géométrique; ainsi c'est elle qu'il faut employer exclusivement dans le calcul des réfractions astronomiques. En voici la table :

Dégré de Réaumur.	*Soutangente aux densités, en supposant l'élasticité*	
	constante, h.	*décroissante, s.*
30	4588,4	5520,2
28	4551,4	5466,7
26	4514,2	5413,3
24	4477,3	5360,2
22	4440,2	5307,1
20	4403,2	5254,3
18	4366,2	5201,7
16	4329,1	5149,2
14	4292,1	5096,9
12	4255,0	5044,7
10	4218,0	4992,8
8	4181,0	4941,0
6	4143,9	4889,3
4	4106,9	4837,8
2	4069,8	4786,3
0	4032,8	4735,2
—2	3995,8	4684,3
—4	3958,7	4633,4
—6	3921,7	4582,8
—8	3884,6	4532,2
—10	3847,6	4481,9.

REMARQUE VIII.

83. Conformément aux principes que nous venons d'établir, nous supposerons constamment, dans la suite de cet ouvrage, $Y = e^{-x:s}$; en supposant s, soutangente aux densités, égale à $\frac{gh}{g-h} = \frac{gmB}{g-mB}$. Quant à la lettre n, elle ne désignera plus la fraction $\frac{\omega a}{h}$, mais $\frac{\omega a}{s}$, conformément à la supposition d'une élasticité spécifique décroissante, supposition très-probable au moins dans toute l'étendue de nos zones tempérées. Je désignerai de même par la lettre c la petite fraction $\frac{s}{a}$, dont nous ferons un usage très-fréquent dans la suite. La soutangente g se trouvant infiniment grande sous l'équateur, ce qui donne $s = h$, on y fera constamment $Y = e^{-x:mB}$, et $n = \frac{\omega a}{mB}$. A des latitudes moyennes, telles que sont celles de nos villes d'Italie, de France, ou d'Angleterre, la soutangente g se trouvera égale à trente-mille toises à-peu-près; il n'est pas nécessaire de la connoître avec une très-grande précision, attendu que le calcul des réfractions en général n'en est que très-peu affecté. L'analogie au reste nous porte à croire, qu'à des latitudes plus grandes, et qui approchent davantage de 90 dégrés, la soutangente g pourra bien devenir beaucoup plus petite que 30000 toises; et qu'alors, la différence des deux soutangentes h et s sera bien plus sensible que dans nos zones tempérées. Cependant, dans l'état actuel de nos connoissances, nous ne pourrions proposer que des conjectures; il est reservé sans doute aux siècles futurs, de nous faire connoître la véritable valeur de la soutangente g, qui lui appartient à chaque dégré de latitude.

CHAPITRE SECOND.

Principes généraux de la route de la lumière par les airs.

LEMME.

1. *La réfraction de la lumière est l'effet de l'attraction que les corps transparens exercent sur elle.* Cette proportion est la base du système de *Newton ;* elle sera également la base de notre analyse ; et si elle ne paroissoit pas suffisamment prouvée encore par les expériences et observations que le géomètre anglais nous a transmises, elle acquerroit un dégré de certitude de plus, par l'accord entre les résultats de nos calculs et les réfractions observées.

LEMME.

2. *L'attraction des corps sur la lumière ne s'étend qu'à de très-petites distances.* Nous croyons ce lemme suffisamment prouvé par les expériences connues sur l'inflexion de la lumière, de même que par l'impossibilité physique d'apprécier la partie véritablement curviligne du rayon réfracté, ni de déterminer la distance, où il commence à se détourner de sa route. Au point de contact même, l'attraction du corps transparent sur la lumière doit être très-grande, mais elle doit décroître très-rapidement, et cesser d'être sensible à une distance beaucoup trop petite pour être déterminée par aucun moyen de physique connu.

PROBLEME.

3. *Un rayon de lumière S B étant supposé traverser une atmosphère, composée de couches sphériques et concentriques, de manière que la densité du milieu dans un point quelconque B soit fonction de sa distance au centre C B ; déterminer la force accélératrice, dont il est sollicité à se détourner de sa route, et à se rapprocher de la perpendiculaire B C.*

SOLUTION.

4. Du centre B, et d'un rayon pris à volonté, décrivez la circonférence de cercle $A\,E\,D\,F$; et ayant pris les deux points M, m, infiniment près l'un de l'autre, abaissez les perpendiculaires $M\,P$, $m\,p$. Alors, désignant

par y la distance du point B au centre de l'atmosphère; par Y, la densité du milieu en B; par r, le rayon BM pris à volonté; par x, l'abscisse BP; cherchons d'abord l'expression de la somme des forces attractives, exercées par les particules d'air qui composent la zone produite par la révolution de l'élément Mm autour de l'axe BC, sur la particule de lumière, placée en B.

5. Cette somme sera en raison composée des quatre quantités suivantes. *Premièrement*, la surface de la zone, $2\pi r\,dx$. *Secondement*, la fraction $\frac{x}{r}$, conformément au principe de la composition des forces. *Troisièmement*, la force attractive absolue R, qui convient à la distance $BM = r$, et qui peut être considérée comme une quantité constante, étant la même dans tous les points de la zone. *Quatrièmement*, la densité de l'air qui convient à la distance au centre CB.

6. Cette densité est égale à $Y - \frac{x\,dY}{dy} + \frac{x^2\,ddY}{1.2\,dy^2} - \frac{x^3\,d^3Y}{1.2.3\,dy^3} +$ etc.; expression qui se réduit à $Y - \frac{x\,dY}{dy}$, d'après le second lemme. On aura donc $2\pi Rx\,dx\,(Y - \frac{x\,dY}{dy})$, pour somme des forces attractives, exercées par la zone, produite par la révolution de l'élément Mm autour de l'axe BC.

7. Intégrant cette quantité, en prenant x seule comme variable, on trouvera $\pi Rxx\,Y - \frac{2}{3}\pi R\,x^3\,\frac{dY}{dy}$, pour valeur de l'attraction totale, exercée par la zone produite par la révolution de l'arc DM, autour de l'axe BC. Prenant x négatif, on aura $\pi Rxx\,Y + \frac{2}{3}\pi R\,x^3\,\frac{dY}{dy}$, pour valeur de l'attraction exercée par la zone opposée, qui est produite par la révolution de l'arc DM' autour de l'axe BC. Otant cette dernière expression de la première, et mettant r à la place de x, on aura $-\frac{4}{3}\pi r^3 R\,\frac{dY}{dy}$, pour attraction totale, exercée par la surface sphérique, dont le rayon est BM, sur la particule de lumière, placée dans son centre.

8. Supposons une seconde surface sphérique, décrite du même centre, et éloignée de la première de la distance infiniment petite dr. On aura $-(\frac{dY}{dy})\,\frac{4}{3}\pi r^3\,R\,dr$ pour expression de la somme des forces attractives, exercée par la masse d'air, qui est comprise entre les deux surfaces; et

$-\left(\frac{dY}{dy}\right)\frac{4}{3}\pi\int r^3 R\,dr$ pour expression de la force accélératrice, dirigée vers le centre de l'atmosphère, et qui résulte de l'attraction totale de l'air, sur la particule de lumière placée en B, aussi loin qu'elle peut s'étendre.

9. Dans cette expression, l'intégrale de $r^3 R\,dr$, qui ne renferme point les deux variables Y, y, et qui est absolument la même quelque soit la distance au centre, fait simplement la fonction d'un facteur constant. La route de la lumière au travers cette atmosphère sera donc la même que celle d'un projectile, animé par une force accélératrice, qui seroit dirigée vers le centre, et proportionnelle à $-\frac{dY}{dy}$. *Tel est le problème qu'il s'agissoit de résoudre.*

10. Si la densité de l'atmosphère est la même partout, ayant alors pour Y une quantité constante, on aura $dY = o$; la route de la lumière sera donc rectiligne.

11. S'il y avoit $Y = A - Byy$, la force attractive devenant proportionnelle alors à la distance même, la route de la lumière seroit une ellipse, ayant son centre au centre de l'atmosphère.

12. Si la densité étoit proportionnelle au quarré de la distance au centre, ou plus généralement, si $Y = A + Byy$, la route de la lumière sera une hyperbole, ayant son centre au centre de l'atmosphère.

13. Si la densité étoit réciproquement proportionnelle à la distance au centre, ou plus généralement, s'il y a $Y = A + \frac{B}{y}$, la route de la lumière sera une section conique, ayant son foyer au centre de l'atmosphère. Si le cas existoit dans la nature, cette section conique seroit certainement une hyperbole, la vitesse infinie de la lumière devant naturellement l'emporter sur les autres quantités constantes de l'équation.

14. Si dans la formule précédente B devenoit négatif, l'expression de la densité étant alors $Y = A - \frac{B}{y}$, la route de la lumière seroit encore une hyperbole, mais disposée tellement, que le centre de l'atmosphère se trouvât occupé par le foyer de la branche opposée.

15. Enfin, si la densité étoit réciproquement proportionnelle au quarré de la distance au centre, ou plus généralement, s'il y avoit $Y = A + \frac{B}{yy}$,

la

la route de la lumière seroit une spirale parabolique, ayant son foyer au centre de l'atmosphère.

THÉOREME.

16. *Dans le passage de la lumière par une atmosphère quelconque, disposée par couches sphériques et concentriques, les différences des quarrés des vitesses sont partout proportionnelles aux différences des densités.*

DEMONSTRATION.

17. Désignons par y la distance au centre AP; par Y, la densité du milieu en P; par v, la vitesse du rayon en P; par F, la force accélératrice au même endroit, on aura $v\,dv = -KF\,dy$; et comme $F = -\frac{dY}{dy}$, il en résulte $v\,dv = K\,dY$; et $vv = K\,(Y + Const.)$ Donc, prenant à volonté deux points fixes de la trajectoire, et désignant par M, N, les densités du milieu; par f, g, les vitesses du rayon dans ces deux points, on aura

$$ff - vv = K\,(M - Y);$$
$$ff - gg = K\,(M - N);$$

d'où l'on tire $ff - vv : ff - gg = M - Y : M - N$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

18. Donc, désignant par m, n, t, les perpendiculaires abaissées sur les tangentes, aux endroits de la courbe où les densités du milieu sont M, N, Y, on aura $\frac{1}{tt} = \frac{1}{mm} - \left(\frac{1}{mm} - \frac{1}{nn}\right)\frac{M - Y}{M - N}$; équation générale de la trajectoire, dont l'application ne suppose plus autre chose que la connoissance de Y, fonction de la distance y.

COROLLAIRE II.

19. Le rapport entre deux quelconques de ces perpendiculaires, telles que m, t, devant être le même que celui, qui est entre le sinus d'incidence et le sinus de réfraction d'un rayon, qui passeroit immédiatement du milieu M dans le milieu Y, l'équation précédente renferme encore la solution du problème suivant: *étant donné le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction; pour un rayon qui passeroit d'un air de la densité M dans un air de la densité N, trouver quel sera le même rapport dans le passage d'un air de*

la densité M dans un air de la densité Y. On aura $\frac{mm}{tt} = 1 + \frac{M-Y}{M-N}$ $(\frac{mm}{nn} - 1) = 1 - \frac{M-Y}{M-N}(1 - \frac{mm}{nn})$.

COROLLAIRE III.

20. Si les rapports $m:n$, et $m:t$ différoient si peu de l'unité, qu'en faisant $\frac{m}{n} = 1 + \omega$, $\frac{m}{t} = 1 + \psi$, il fut permis de s'arrêter à la première puissance des fractions ω, ψ, et de supprimer les puissances plus élevées, on auroit la proportion $\omega : \psi = M - N : M - Y$. Les fractions $\omega : \psi$ seroient donc entr'elles, comme les différences des densités des milieux respectifs.

21. Donc, désignant par $1 : 1 + \omega$, le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, d'un rayon passant de l'air dans le vuide, la fraction ω sera constamment proportionnelle à la densité de cet air, réprésentée par la fraction $\frac{1}{m}$ ou $\frac{B}{h}$; elle sera donc directement comme la hauteur du barometre B, et réciproquement comme la soutangente de la courbe barométrique h.

22. Donc enfin, ayant trouvé qu'à la température de 28 *pouces du barometre*, et 10 dégrés de *Réaumur*, on avoit $\omega = 0{,}000275$; il ne sera pas difficile de déterminer cette même fraction ω pour une autre température quelconque, sauf aux corrections ultérieures dont cette théorie est encore susceptible, et que nous n'avons pas dissimulé dans le premier chapitre. L'échelle de notre manometre marquera immédiatement la fraction ω, de même que le nombre m, qui lui est réciproquement proportionnel.

23. Soit C le centre de la terre; BOM, une partie de sa circonférence; GPB, un rayon venant de l'infini, et rencontrant l'axe CI sous un angle PBI que nous désignerons par A; BD, PT, les tangentes de la courbe aux points B, P; GE, l'asymptote de la courbe; et CD, CT, CE, les perpendiculaires, abaissées du centre de la terre sur ces tangentes. Désignons de plus par a, le demi-diamètre de la terre; par y, le rayon vecteur CP; par t, la perpendiculaire CT; par ϕ, l'angle au centre BCP; par R, la courbure de l'arc BP; par ds, l'élément de la courbe Pp.

THÉOREME.

24. *Dans une courbe quelconque, le rayon vecteur CP étant désigné par y, et la perpendiculaire CT par t; le rayon osculateur en M sera égal à*

$\frac{y\,dy}{dt}$; *l'élément de la courbe M m ou d s sera égal à* $\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-tt)}}$; *la courbure de cet élément où d R sera égale à* $\frac{dt}{\sqrt{(yy-tt)}}$; *et l'élément de l'angle au centre ou d* ϕ *sera égal à* $\frac{t\,dy}{y\sqrt{(yy-tt)}}$. Ces théorèmes, pour être démontrés, n'ont besoin que des premiers élémens de l'analyse.

THÉOREME.

25. *La perpendiculaire* $CT = t$ *est égale à* $(1+\omega-\omega Y)\,a\,Sin.\,A$. Ce théorème est un corollaire très-naturel de 18, en y supposant $m = a\,Sin.\,A$; $n = (1+\omega)\,a\,Sin.\,A$; et en se servant des réductions approximatives, que l'extrême petitesse de la fraction ω, qui ne va jamais à un trois-millième, permet d'employer sans crainte d'erreur sensible.

COROLLAIRES.

26. Substituant cette valeur de t, savoir $t = (1+\omega-\omega Y)\,a\,Sin.\,A$, et faisant pour plus de simplicité $\frac{a\,Sin.\,A}{y} = v$, on trouvera l'élément de l'angle au centre $d\phi = -\frac{dv}{\sqrt{(1-vv-2\omega+2\omega Y)}}$; et l'élément de la courbure de l'arc BP ou $dR = -\frac{\omega v\,dY}{\sqrt{(1-vv-2\omega+2\omega Y)}}$, en supprimant dans le dénominateur le facteur $1-\omega+\omega Y$, dont le dévéloppement ne produiroit que des quantités multipliées par le quarré de ω, et que par conséquent on pourra regarder comme évanouissantes en comparaison des autres. L'intégrale de cette dernière différentielle, prise depuis $v = Sin.\,A$ jusqu'à $v = o$, fera connoître la réfraction astronomique qui appartient à la distance apparente A. L'intégrale de l'autre, ou ϕ, prise entre les mêmes limites, marquera la distance apparente A augmentée de la réfraction, c'est-à-dire, sa distance vraie.

27. De ces deux différentielles, dR a besoin d'une réduction à cause de dY, différentielle de la densité Y, qu'elle renferme. On a trouvé $Y = e^{-xts}$, en supposant la pésanteur absolue constante. Si on l'avoit supposé réciproquement proportionnelle au quarré des distances, comme elle est réellement, on auroit eu $Y = e^{-\frac{a}{s}\frac{y-a}{y}}$. Continuant de faire $\frac{a\,Sin.\,A}{y} = v$, et faisant de

même par analogie $\frac{s\,Sin.\,A}{a} = k$, on aura $Y = e^{\frac{v - Sin.\,A}{k}}$, ce qui donnera $\frac{dY}{dv} = \frac{Y}{k}$; $\frac{ddY}{dv^2} = \frac{Y}{kk}$; $\frac{d^3Y}{dv^3} = \frac{Y}{k^3}$, et généralement $\frac{d^nY}{dv^n} = \frac{Y}{k^n}$.

28. Substituant cette valeur de Y dans l'expression de dR, l'on verra tout le grand problème des réfractions astronomiques et terrestres, réduit à l'intégration des deux différentielles suivantes:

$$d\varphi = -\frac{dv}{\sqrt{(1 - vv - 2\omega + 2\omega Y)}};$$

$$dR = -\frac{\omega Y v\,dv}{k\sqrt{(1 - vv - 2\omega + 2\omega Y)}}.$$

29. L'une et l'autre de ces deux intégrales ne peuvent être intégrées que par parties. Je remarquerai cependant qu'il est fort inutile de nous occuper séparément de chacune d'elles, attendu que l'une des deux est nécessairement donnée par l'autre. D'après une propriété très-connue de tous les quadrilatères en général, l'angle au centre ACP est égal à la somme des deux angles $A + R$, moins l'angle P, intercepté entre la branche de la courbe BP, et le rayon vecteur CP. Cet angle n'a besoin d'aucune intégration; son sinus est égal à $t:y$; fraction dont la valeur très-approchée est $(1 + \omega - \omega Y)\,v$; cet angle diffère donc infiniment peu de $Ang.\,Sin.\,v$; et si nous supposons $P = Ang.\,Sin.\,v + Q$, on trouvera Q par le moyen de l'équation du second dégré $QQv - 2\,Q\sqrt{(1 - vv)} + 2\omega v\,(1 - Y) = o$, qu'on peut aisément réduire à $Q = \frac{\omega v\,(1 - Y)}{\sqrt{(1 - vv)}}$, à l'exception des cas, où l'angle A approcheroit très près d'un angle droit. Ainsi, laissant la différentielle $d\varphi$, nous nous occuperons exclusivement de la différentielle dR, dont l'intégrale constitue proprement l'objet de cette analyse, savoir, la courbure de la trajectoire.

30. Dévéloppant en série l'élément de courbure dR, on le trouve égal à $-\frac{\omega Y v\,dv}{k\sqrt{(1-vv)}} - \frac{\omega^2 Y(1-Y)\,v\,dv}{k\,(1 - vv)^{3:2}} - \frac{1.3\,\omega^3 Y(1-Y)^2\,v\,dv}{1.\,2\,k\,(1 - vv)^{5:2}} - \frac{1.3.5\,\omega^4 Y(1-Y)^3\,v\,dv}{1.\,2.\,3\,k\,(1 - vv)^{7:2}}$ etc.

Ayant $Y = e^{\frac{v - Sin.\,A}{k}}$, il est clair que l'intégration complette de chacun des termes de cette série, revient à la forme générale $\frac{e^{v:k}\,v\,dv}{(1 - vv)^{n+1:2}}$.

THÉOREME.

31. *Désignant par V une fonction quelconque de v, et par V', V'', V''' etc.*

les rapports différentiels $\frac{dV}{dv}$, $\frac{dV'}{dv}$, $\frac{dV''}{dv}$ *etc. l'intégrale de la différentielle* $e^{v:c} V dv$ *sera égale à* $e^{v:c}(cV - c^2 V' + c^3 V'' - c^4 V''' +$ *etc.*) Cette série sera d'autant plus convergente que la fraction c sera petite; ce qui est précisément le cas des réfractions astronomiques.

REMARQUE.

32. Ce théorème, dont on trouve la démonstration dans tous les élémens de haute analyse, n'est proprement qu'un petit corollaire d'une proposition infiniment plus générale. L'intégrale de $e^{W:c} V dv$, dans laquelle c désigne une petite fraction, tandis que V et W représentent des fonctions quelconques de v, peut être dévéloppée en une série parfaitement analogue à celle du théorème précédent: et je crois rendre quelque service à mes lecteurs par l'analyse de ses principes.

33. Nous devons à *Jean Bernoulli* la série générale $\int X dx = xX - \frac{x^2 dX}{2 dx} + \frac{x^3 dd X}{2.3 dx^2}$ etc. Je remarquerai en passant que cette série, quelque générale qu'elle soit, ne présente encore qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général encore, en vertu duquel, étant donnée la série A, A', A'', A''' etc. composée de quantités quelconques, et désignant par B, C, D etc. la première, la seconde, la troisième différence du terme initial A, la somme de ses n premiers termes sera égale à $nA + \frac{n.n-1}{1.2} B + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.} C +$ etc.

34. Si l'on applique cette série générale à la différentielle proposée $e^{W:c} V dv$, son premier terme deviendra $e^{W:c} \int V dv$; les autres se trouveront successivement divisés par les puissances de c, savoir c, c^2, c^3 etc. Cette dernière série est très-convergente toutes les fois que c est un très-grand nombre. Mais dans le cas opposé, la divergence inévitable de la série empêchera d'en faire usage; il faudra donc songer à la remplacer par quelque autre série, qui ait sur la précédente l'avantage d'être disposée d'après les puissances ascendantes de c.

35. Pour cet effet, je reprends la série de *Bernoulli*: $\int X dx = xX - \frac{x^2 dX}{1.2 dx} + \frac{x^3 d dX}{1.2.3 dx^2}$ — etc. et par une simple transposition de lettres

j'en tire $\int x\,dX = Xx - \frac{X^2\,dx}{1.2\,dX} + \frac{X^3\,ddx}{1.2.3\,dX^2}$ — etc. Ensuite, ayant $\int x\,dX = Xx - \int X\,dx$, je parviens à la suivante $\int X\,dx = \frac{X^2\,dx}{1.2\,dX} - \frac{X^3\,dx}{1.2.3\,dX^2} + \frac{X^4 d^3 x}{1.2.3.4\,dX^3}$ etc. Cette dernière série est aussi générale que celle de *Bernoulli;* et comme les puissances de dX s'y trouvent partout dans le dénominateur, il est évident que dans le cas d'un c très-petit, elle doit être libre du vice de divergence, qu'on doit reprocher à celle de *Bernoulli.* Reste donc à la transformer de manière, qu'elle se trouve disposée d'après les puissances ascendantes de la fraction c. On y parviendra de la manière suivante.

36. Désignons $\frac{X\,dx}{dX}$ par Z; et faisons $\frac{dZ}{dx} = U'$; $\frac{d(ZU')}{dx} = U''$; $\frac{d(ZU'')}{dx} = U'''$ etc. De cette notation nous tirerons d'abord.

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{ZU'}{X};$$
$$\frac{dU'}{dX} = \frac{U'' - U'U'}{X};$$
$$\frac{dU''}{dX} = \frac{U''' - U'U''}{X};$$
$$\frac{dU'''}{dX} = \frac{U'''' - U'U'''}{X}; \text{ etc. etc.}$$

37. De plus, ayant $\frac{dx}{dX} = \frac{Z}{X}$. on en déduira par des différentiations successives, en mettant à la place de $\frac{dU'}{dX}$, $\frac{dU''}{dX}$, $\frac{dU'''}{dX}$ etc. les valeurs qu'on vient de trouver, les expressions suivantes :

$$\frac{dx}{dX} = \frac{Z}{X};$$
$$\frac{ddx}{dX^2} = -\frac{Z(1 - U')}{XX};$$
$$\frac{d^3x}{dX^3} = +\frac{Z(2 - 3U' + U'')}{X^3};$$
$$\frac{d^4x}{dX^4} = -\frac{Z(6 - 11U' + 6U'' - U''')}{X^4}$$

etc. etc. etc.

38. Ensuite, faisant usage des expressions qu'on vient de trouver, dans la série $\int X\,dx = \frac{X^2\,dx}{1.2\,dX} - \frac{X^3\,ddx}{1.2.3\,dX^2} + \frac{X^4\,d^3x}{1.2.3.4\,dX^3}$ — etc. on trouvera cette même intégrale exprimée par la série suivante :

$$ZX\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \text{etc.}\right)$$
$$-ZXU'\left(\frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{11}{2.3...5} + \frac{50}{2.3..6} + \frac{274}{2.3...7} + \text{etc.}\right)$$
$$+ZXU''\left(\frac{1}{2.3.4} + \frac{6}{2.3.5} + \frac{35}{2.3...6} + \frac{225}{2.3...7} + \frac{1624}{2.3...8} + \text{etc.}\right)$$
$$-ZXU'''\left(\frac{1}{2.3.4.5} + \frac{10}{2.3...6} + \frac{85}{2.3...7} + \frac{735}{2.3...8} + \frac{6769}{2.3...9} + \text{etc.}\right)$$

39. Le chapitre suivant, en nous faisant connoître la loi que suivent les numérateurs de ces fractions, nous fera voir en même tems, que chacune de ces séries, continuée jusqu'à l'infini, est égale à l'unité. On aura donc $\int X dx = ZX\,(1 - U' + U'' - U''' + U^{IV} - \text{etc})$. De cette manière on parviendra donc, quoique par des routes bien différentes, à la belle série que le citoyen *Laplace* a donné le premier dans son mémoire *sur l'intégration des fonctions différentielles qui renferment des facteurs élevés à de très-grandes puissances. Année* 1782, *page* 7.

40. Les termes de cette dernière série sont disposés d'après les puissances ascendantes de la fraction c. Faisant $X = e^{v:c}$; $dx = V dv$; on aura $Z = cV$; $ZU' = ccV'$; $ZU'' = c^3 V''$ etc. on aura donc $e^{v:c}\,(cV - ccV' + c^3 V'' - \text{etc.})$ pour intégrale de la différentielle proposée $e^{v:c}\,V dv$.

THÉOREME.

41. *La fonction V étant égale à $\frac{v}{(1-vv)^{n+1:2}}$, on trouvera les rapports différentiels $\frac{dV}{dv} = V'$; $\frac{dV'}{dv} = V''$; $\frac{dV''}{dv} = V'''$ de la manière suivante. On aura*

$$(1-vv)^{n+1:2}\,V = v;$$
$$(1-vv)^{n+3:2}\,V' = 1 + 2nvv;$$
$$\frac{(1-vv)^{n+5:2}\,V''}{2n+1} = 3v + 2nv^3;$$
$$\frac{(1-vv)^{n+7:2}\,V'''}{2n+1} = 3 + 12(n+1)vv + 4(n+1)nv^4;$$
$$\frac{(1-vv)^{n+9:2}\,V^{IV}}{(2n+1)(2n+3)} = 15v + 20(n+1)v^3 + 4(n+1)nv^5;$$

$$\frac{(1-vv)^{n+11:2}\,V^{V}}{(2n+1)(2n+3)}=15+90(n+1)vv+60(n+2)(n+1)v^4+8(n+2)(n+1)nv^6;$$

$$\frac{(1-vv)^{n+13:2}\,V^{VI}}{(2n+1)\ldots(2n+5)}=105v+210(n+2)v^3+84(n+2)(n+1)v^5+8(n+2)(n+1)nv^7.$$

LOI GÉNÉRALE DES COEFFICIENTS.

42. Il faut distinguer les rapports différentiels à index pairs, d'avec ceux à index impairs. On trouve pour les premiers, V^{2p} généralement exprimé par $(2n+1.\ 2n+3\ldots\ldots 2n+2p-1)\ (3.\ 5\ldots 2p+1)$, divisé par la puissance $(1-vv)^{n+2p+1:2}$, et multiplié par la série $v+Av^3+Bv^5+Cv^7+$ etc.; dans laquelle

$$A=\frac{n+p-1}{1}.\frac{2p}{3};$$

$$B=\frac{n+p-1.\ n+p-2}{1.\ 2}.\frac{2p.\ 2p-2}{3.\ 5};$$

$$C=\frac{n+p-1.\ n+p-2.\ n+p-3.}{1.\ 2.\ 3}.\frac{2p.\ 2p-2.\ 2p-4}{3.\ 5.\ 7};$$

etc. etc. Quant aux seconds, on aura V^{2p+1} généralement exprimé par $(2n+1.\ 2n+3\ldots\ldots 2n+2p-1)\ (3.\ 5\ldots 2p+1)$, divisé par la puissance $(1-vv)^{n+2p+3:2}$, et multiplié par la série $1+Avv+Bv^4+Cv^6+$ etc.; dans laquelle

$$A=\frac{n+p}{1}.\frac{2p+2}{1};$$

$$B=\frac{n+p.\ n+p-1}{1.\ 2}.\frac{2p+2.\ 2p}{1.\ 3};$$

$$C=\frac{n+p.\ n+p-1.\ n+p-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{2p+2.\ 2p.\ 2p-2}{1.\ 3.\ 5}.$$

PREMIER MEMBRE: $n=o$.

43. La première partie de l'intégrale est donc celle de $-\frac{\omega Y v dv}{\sqrt{(1-vv)}}$. La supposition de $v=Sin.\ A$ déterminera la constante; et cette même constante sera identique avec le premier terme de la réfraction astronomique, la supposition de y infini, ou de $v=o$, faisant nécessairement disparoître tout le reste de l'intégrale. Ce premier terme sera donc égal à $\omega\ tang.\ A$, multiplié par $1-\frac{k}{v\,Cos.^2 A}+\frac{3.k\,k}{Cos.^4 A}-$ etc.; ou bien, rétablissant la valeur de la

fraction

fraction k, qui se réduit à $c\ Sin.\ A$, on aura pour premier terme de la réfraction astronomique $\omega\ tang.\ A$, multiplié par

$$1 - \frac{c}{Cos.^2 A} + \frac{3\,c\,c\ Sin.^2 A}{Cos.^4 A}$$
$$- \frac{3\,c^3\ Sin.^2 A\ (1 + 4\ Sin.^2 A)}{Cos.^6 A}$$
$$+ \frac{15\,c^4\ Sin.^4 A\ (3 + 4\ Sin.^2 A)}{Cos.^8 A}$$
$$- \frac{45\,c^5\ Sin.^4 A\ (1 + 12\ Sin.^2 A + 8\ Sin.^4 A)}{Cos.^{10} A}$$
$$+ \frac{315\ c^6\ Sin.^6 A\ (5 + 20\ Sin.^2 A + 8\ Sin.^4 A)}{Cos.^{12} A}$$
$$- etc.\ etc.\ etc.$$

44. Cette première partie de la réfraction astronomique est en même tems la principale de toutes; les autres qui se trouvent multipliées par les puissances plus élevées de ω, étant incomparablement plus petites, et ne commençant à être sensibles que vers le quatre-vingtième dégré. L'extrême petitesse de la fraction c, qui s'éleve à peine à un sept-centième, rend cette série susceptible d'une simplicité beaucoup plus grande encore. Désignant par t la tangente de la distance apparente, la réfraction deviendra sans erreur sensible égale à $\omega\,t$, multiplié par la série $1 - c\,tt + 3\,c^2\,t^4 - 15\,c^3\,t^6 + 105\,c^4\,t^8 -$ etc. dont les coëfficiens constituent la série hypergéométrique des nombres impairs. Cela n'empêche pas que la série entière $\omega\,t - \omega\,c\,t^3 + 3\,\omega\,c^2\,t^5 - 15\,\omega\,c^3\,t^7 + 105\,\omega\,c^4\,t^9 -$ etc. ne soit très-convergente jusqu'au quatre-vingt-deuxième dégré; attendu que son second terme ne s'éleve à une seconde qu'à 66° 9′; le troisième à 78° 13′; le quatrième à 80° 46′; le cinquième à 81° 38′; le sixième à 81° 58′. Ainsi donc, depuis le zénith jusqu'à 70° de distance, on aura $R = \omega\,t$; la réfraction étant proportionnelle à la distance apparente. La formule $R = \omega\,t\,(1 - c\,tt)$ donne la réfraction jusqu'à 80° de distance. Avec $R = \omega\,t\,(1 - c\,tt + 3\,c^2\,t^4)$ on peut aller jusqu'à 82° de distance. Mais on ne pourroit guères aller plus loin, à moins que de commettre des erreurs plus fortes qu'une seconde. A 84 dégrés enfin, la divergence inévitable de la série ne permettra plus d'en faire usage.

SECOND MEMBRE $n = 1$.

45. Le second membre de la série différentielle est $- \frac{\omega^2\,Y\,(1 - Y)\,dv}{k\,(1 - v\,v)^{3:2}}$,

égal à $-\frac{\omega^2 Y dv}{k(1-vv)^{3:2}} + \frac{\omega^2 Y^2 dv}{k(1-vv)^{3:2}}$. Faisant $Sin.\ A = 1$, ce que la convergence de la série, et la petitesse de la fraction c nous permet de faire, sans crainte d'une demi-seconde d'erreur, l'intégrale de $-\frac{\omega^2 Y dv}{(1-vv)^{3:2}}$, prise depuis $v = Sin.\ A$ jusqu'à l'infini, sera égale à $\omega^2 t^3$, multiplié par $c - 3c^2 tt + 15 c^3 t^4 - 105 c^4 t^6$. Mettant dans cette série $\frac{1}{2} c$ à la place de c, on trouvera de même l'intégrale de $-\frac{\omega^2 Y^2 dv}{(1-vv)^{3:2}}$, égale à $\omega^2 t^3$, multiplié par $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} c^2 tt + \frac{15}{8} c^3 t^4 - \frac{105}{16} c^4 t^6 +$ etc. Le second membre de la réfraction astronomique, qui renferme le quarré de ω_2 sera donc égal à $\omega^2 t^3$, multiplié par $\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{4}) 3 c tt + (1 - \frac{1}{8}) 3.5\ c^2 t^4 - (1 - \frac{1}{16}) 3.5.7\ c^3 t^6 +$ etc. Le premier terme de cette série ne s'éleve à une seconde qu'à 78° 47′ de distance apparente; le second à 82° 2′; le troisième à 82° 53′. Cette série est donc beaucoup moins convergente que la précédente; heureusement qu'elle ne commence à être sensible qu'à quatre-vingt dégrés de distance.

46. Le troisième membre de la série différentielle est $-\frac{3\omega^3 Y(1-Y)^2 v dv}{2c(1-vv)^{5:2}}$. La supposition de $Sin.\ A = 1$ étant encore plus permise ici que dans les cas précédents, l'intégrale de $-\frac{Y v dv}{(1-vv)^{5:2}}$, prise depuis $v = Sin.\ A$ jusqu'à $v = o$, sera égale a $ct^5 - 5 cc t^7 + 5.7\ c^3 t^9 - 5.7.9\ c^4 t^{11} +$ etc. On aura donc pour intégrale de ce troisième terme, $\frac{1}{2}\omega^3 t^5$, multiplié par $1 - (3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}) 5 c t^2 + (3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{9}) 5.7\ c^2 t^4 - (3 - \frac{3}{8} + \frac{1}{27}) 5.7.9\ c^3 t^6 +$ etc. Le premier terme de cette série ne s'éleve à une seconde qu'à 86° 8′ de distance apparente. Elle n'est plus absolument convergente alors; heureusement que depuis le zénith jusqu'à 82° de distance elle est généralement si petite, que sans crainte d'erreur d'une demi-seconde nous pouvons la supprimer entièrement. Ainsi donc, en nous bornant aux deux premiers membres, nous aurons le théorème suivant.

THÉOREME.

47. *La réfraction astronomique, depuis le zénith jusqu'à près de quatre-vingt-quatre dégrés de distance apparente, est égale à ωt, multiplié par $1 - (c - \frac{1}{2}\omega) tt + 3c(c - \frac{3}{4}\omega) t^4 - 3.5\ c^2 (c - \frac{7}{8}\omega) t^6 +$ etc. sans qu'il puisse y avoir une seconde d'erreur.* Voici la table des réfractions astronomiques, depuis 70 dégrés jusqu'à 84 dégrés de distance apparente, calculées sur cette série,

et mises à côté de celles de la table de *la Lande*, qui ont été calculées sur la règle de *Bradley*.

Dist. appar.	*Réfractions d'après la série*	*Réfractions sur la règle de Bradley*	*Différence.*
70°	2′34″3	2′35″1	0″8.
72°	2′52″0	2′53″5	1″5.
74°	3′14″7	3′16″2	1″5.
76°	3′42″7	3′45″0	2″3.
78°	4′19″4	4′22″6	3″2.
80°	5′ 8″9	5′14″1	5″2.
82°	6′20″4	6′28″6	8″2.

REMARQUES.

48. Quelques insensibles que paroissent les différences entre les réfractions, calculées d'après les deux règles, nous ne pouvons nous dissimuler cependant, que la série que nous venons de trouver, conformément aux véritables principes de la physique et du calcul, donne les réfractions depuis 70° de distance apparente, jusqu'à 84°, un peu plus petites que ne les auroit donné la règle de *Bradley;* on remarquera en même tems, que ces mêmes différences vont assez sensiblement, et même très-régulièrement en croissant. Les formules du quatrième chapitre nous apprendront à continuer cette table au-delà de 84 dégrés de distance, ce que la divergence de la série nous empêche de faire pour le présent; nous verrons ces différences continuer à augmenter, et nos réfractions se trouver enfin inférieures de quatre-vingt secondes à ce qu'elles auroient été conformément à la règle de *Bradley*. Ce *maximum* aura lieu à deux dégrés de hauteur apparente. Passé ce terme, les réfractions prendront des accroissements beaucoup plus rapides que ne l'auroit comporté la règle de *Bradley;* les deux tables se rapprocheront sensiblement l'une de l'autre; à quatre-vingt dix dégrés de distance apparente enfin, nous retrouverons la réfraction horizontale de 32′ 56″, qui nous avoit servi à déterminer avec précision la principale de nos données.

49. La réfraction est très-exactement proportionnelle à la densité de l'air, représentée par la fraction ω, tant qu'elle est exprimée par ω *tang. A;* ainsi, depuis le zénith jusqu'à plus de 70° de distance on peut continuer sans erreur sensible, à réduire les réfractions de la table, à une autre température quelconque, en y employant les multiplicateurs ordinaires qui expriment

la densité de l'air, sauf aux erreurs que ces derniers renferment eux-mêmes, en ce qu'étant calculés seulement sur les changements du barometre et du thermometre, on n'y a pas tenu compte des différens états de l'hygrometre. Notre manometre, en réunissant à cet égard, les trois instrumens dans un seul, et en nous faisant connoître sur le champ la fraction ω, vaudra mieux sans doute que les tables ordinaires de multiplicateurs.

50. Au-delà de 70°, si la hauteur du barometre venoit à changer, l'élasticité spécifique de l'air, et la fraction c qui l'exprime restant les mêmes, la réfraction sera encore proportionnelle à la densité de l'air, en suivant à cet égard la hauteur de barometre, à laquelle la fraction ω demeure proportionnelle, s'il n'arrive aucun changement dans l'élasticité spécifique. Cela est fondé sur ce que la fraction ω affecte très-peu la série $1 - (c - \frac{1}{2}\omega)\, tt +$ etc. étant à peine égale au cinquième de c, dans les températures moyennes. Il n'en est pas de même d'un changement survenu dans la valeur de c. Cette fraction affecte très-sensiblement la série $1 - c\,tt + 3\,c^2\,t^4 - 3.\,5\,c^3\,t^6 +$ etc. Heureusement que les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs; ce qui diminue considérablement l'erreur commise par la supposition d'une réfraction, proportionnelle à la densité de l'air. Voyons cependant jusqu'où peut aller le *maximum* de cette erreur. La fraction c passant à l'état $c + dc$, par un changement survenu dans l'élasticité spécifique de l'air, la fraction ω se trouvera transformée en $\frac{\omega c}{c + dc}$ ou $(1 - \frac{dc}{c})\,\omega$; et supposant la réfraction proportionnelle à la densité de l'air, elle deviendra $(1 - \frac{dc}{c})\,\omega t\,(1 - c\,tt + 3\,c^2\,t^4 - 15\,c^3\,t^6 +$ etc. Cette supposition n'est pas exacte; un calcul rigoureux auroit exigé qu'on eut mis partout $c + dc$ à la place de c; on auroit eu pour expression de la réfraction $(1 - \frac{dc}{c})\,\omega t$, multiplié par $(1 - c\,tt + 3\,c^2\,t^4 - 15\,r^3\,t^6 +$ etc.$) - (1 - 6\,c\,tt + 45\,c^2\,t^4 +$ etc.$)\,tt\,dc$; ou bien, en supprimant le quarré de dc, $(1 - \frac{dc}{c})\,\omega t\,(1 - c\,tt + 3\,c^4\,t^4 - 15\,r^3\,t^6 +$ etc.$)$ $- (1 - 6\,c\,tt + 45\,c^2\,t^4 -$ etc.$)\,\omega\,t^3\,dc$. On voit donc qu'en supposant la réfraction proportionnelle à la densité, on commet une erreur *en plus*, égale à $(1 - 6\,c\,tt + 45\,c^2\,t^4 -$ etc.$)\,\omega\,t^3\,dc$. Cette erreur sera parvenue à son *maximum*, lorsque $c\,tt = \frac{1}{15}$; ce qui arrive à une distance apparente A égale à 81° 24′. La série $1 - 6\,c\,tt + 45\,c^2\,t^4 -$ etc. se trouvant égale alors à $\frac{3}{4}$ à-peu-

près, l'erreur en question deviendra $\frac{\omega}{\sqrt{6000\,c}} \cdot \frac{dc}{c}$. Donc, supposant l'élasticité spécifique de l'air augmentée d'un dixième, ce qui exige un changement de température égal à 23 dégrés de *Réaumur*, le *maximum* de cette erreur, exprimé en parties du rayon, deviendra égal à 0,0000045478 ; ce qui équivaut à une seconde à-peu-près. L'on peut donc assurer, que par des changemens survenus dans la température de l'air, la réfraction astronomique reste proportionnelle sans erreur sensible à sa densité, aussi longtems que pour le calcul de cette réfraction, l'on peut se servir de la série $\omega t\,(1 - ctt + 3\,c^2\,t^4 - \text{etc.})$ Quant aux changements qui surviennent aux réfractions encore plus approchantes de l'horizon, le quatrième chapitre nous apprendra à les déterminer.

51. Il nous reste donc à surmonter la très-grande difficulté, que la nature de la série générale qui exprime la réfraction, oppose au calcul, aussitôt que la distance apparente de l'astre passe quatre-vingt-deux dégrés, et que la petitesse des puissances de *Cos. A.* prévaut tellement sur celle des puissances de la fraction c, que la série entière en devient entièrement incalculable. Si l'on énonce généralement cette difficulté, l'on verra qu'elle revient au problème suivant: *La fonction X étant telle que sa différentielle dX ait $x - a$ pour un de ses facteurs, et c désignant quelque très-petite fraction, on demande la valeur de l'intégrale de $e^{X:c}\,dx$, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour une valeur de x, qui diffère peu de a.* Les géomètres dans ces derniers tems ont enfin trouvé les moyens de résoudre ce problème; mais ils ont reconnu en même tems que sa solution supposoit l'emploi d'une classe de quantités transcendantes entièrement nouvelle, et n'ayant rien de commun avec aucune des fonctions connues et usitées jusqu'ici. Considérées dans toute la généralité qui leur convient, ces quantités ne peuvent être connues qu'à l'aide d'une table particulière, aussi nouvelle aujourd'hui, que celle des logarithmes peut l'avoir été dans le siècle où ils furent inventés; et les géomètres me sauront quelque gré peut-être, d'avoir calculé cette table importante, qu'ils trouveront à la fin de la présente analyse. Le chapitre suivant nous apprendra en attendant, ce que deviennent ces nouvelles fonctions dans les cas, où il est encore possible de les ramener aux fonctions ordinaires, moyennant certaines séries très-simples, et qu'on peut rendre convergentes à volonté, en y employant une méthode particulière, que nous allons communiquer aux géomètres.

CHAPITRE TROISIÈME.

Analyse des facultés numériques.

DÉFINITIONS.

1. Je désignerai par le nom de *facultés*, les produits dont les facteurs constituent une progression arithmétique; tels que $a\ (a+r)\ (a+2r) \ldots (a+mr-r)$. Cette classe de fonctions analytiques n'a jamais eu de dénomination particulière: nous allons voir qu'elle méritoit d'en avoir une.

2. Dans chaque faculté il y aura à considérer: *premièrement*, la *base* de la faculté, premier terme de la progression, a. *Secondement*, la *différence* de la faculté, r. *Troisièmement*, l'*exposant* de la faculté, ou le nombre des facteurs, m. *Quatrièmement*, le *dernier terme* de la progression, $a+mr-r$. Le dernier terme peut être considéré comme premier, en prenant la différence négative.

3. Pour marquer une faculté, je me servirai de la notation, a^{mIr}. La faculté devenant puissance, lorsque la différence s'évanouit, et la puissance par conséquent étant un cas très-particulier de la faculté en général, on aura $a^{mIo} = a^m$. La différence peut être prise négativement; alors a^{mI-r} désignera le produit $a\ (a-r)\ (a-2r) \ldots (a-mr+r)$. Cette dernière faculté est absolument identique avec $(a-mr+r)^{mIr}$; de même que a^{mIr} est identique avec $(a+mr-r)^{mI-r}$. En général, on aura $a^{mIr} = b^{mI-r}$, toutes les fois que $b-a = mr-r$.

4. La faculté a^{mIr} peut être mise sous la forme $a^m (1^{mI\frac{r}{a}})$; ou bien sous celle-ci $r^m \left(\frac{a}{r}\right)^{mI1}$. Nous croyons inutile d'en faire la démonstration. En général, on peut donner à toute faculté proposée, une base, ou une différence quelconque, sans rien changer à sa valeur. Veut-on que la faculté a^{mIr} ait pour son premier terme le nombre A? On la mettra sous cette forme: $\frac{a^m A^{mI(rA:a)}}{A^m}$. Veut-on que cette même faculté ait le nombre R pour différence? on verra que a^{mIr} est absolument identique avec

$\frac{r^m (Ra : r)^{mIR}}{R^m}$. Ces deux transformations sont d'une application très-étendue dans le calcul des facultés.

5. Il sera inutile sans doute de démontrer, que lorsque l'exposant m devient égal à zéro, la faculté a^{mIr}, de même que la puissance a^m, se réduit à l'unité. Ainsi $a^{0Ir} = 1$. Quant à a^{1Ir}, il est égal à a. Ainsi *la première faculté*, ou celle qui a pour exposant l'unité même, ne renferme pas la différence r. Elle n'est sensible, que lorsque l'exposant n'est pas égal à l'unité.

THÉOREME.

6. *La faculté* $a^{(m+n)Ir}$ *peut être considérée d'une double manière comme produit de deux facultés; elle est égale à* $a^{mIr}(a+mr)^{nIr}$; *elle est encore égale à* $a^{nIr}(a+nr)^{mIr}$.

COROLLAIRES.

7. Ainsi, quelques soient a, r, m, n, on a l'égalité $a^{mIr}(a+mr)^{nIr} = a^{nIr}(a+nr)^{mIr}$. L'importance de ce corollaire très-simple se fera sentir par l'usage que nous en ferons dans l'évaluation d'une infinité de fonctions absolument transcendantes. Nous en parlerons bientôt.

8. Si l'on prend la somme des deux exposants $m+n=o$, on trouvera les quatre égalités suivantes, moyennant la réduction enseignée en 3:

$$1 = a^{nIr}(a-r)^{-nI-r};$$
$$1 = a^{nI-r}(a+r)^{-nIr};$$
$$1 = a^{-nIr}(a-r)^{nI-r};$$
$$1 = a^{-nI-r}(a+r)^{nIr}.$$

9. Ces équations nous apprennent à réduire moyennant une simple division, les facultés à exposant négatif, à d'autres facultés dont les exposants sont positifs: et réciproquement. On aura

a^{-nIr}, égal à l'unité, divisée par $(a-r)^{nI-r}$

a^{-nI-r}, égal à l'unité, divisée par $(a+r)^{nIr}$

C'est ainsi que le produit des nombres naturels $1.2.3\ldots n$, dans le cas de n entier et négatif, donne un infini du premier ordre, égal à l'unité, divisée par $0.1.2.3\ldots n-1$; le produit des nombres impairs $1.3.5\ldots 2n-1$ devient alors ± 1, divisé par $1.3.5\ldots 2n-1$; le produit des nombres $1.4.7\ldots 3n-2$ se transforme en ± 1, divisé par $2.5.7\ldots 3n-1$ etc. Nous recommandons surtout les quatre réductions, enseignées en 3.4.6.9.

l'usage de ces notions élémentaires dans l'analyse des facultés est habituel; c'est cette source, infiniment simple en apparence, d'où nous déduirons une infinité de vérités neuves et importantes.

10. Les facultés en général forment une classe de fonctions très-élémentaires et simples, tant que leur exposant est un nombre entier. Mais ces fonctions si simples en apparence sont du genre le plus transcendant, sitôt que leur exposant devient fractionnaire: alors l'analyse des facultés nous ouvre un vaste champ de fonctions transcendantes, qui n'ont rien de commun avec les fonctions généralement reçues dans les opérations de haute analyse; et dont jusqu'ici on n'a pas fait le cas qu'elles méritoient, faute d'en connoître les principes. Dans le cas le plus simple, où $m = \frac{1}{2}$, la base a étant un nombre entier quelconque, et la différence r étant ou 1, ou 2, la faculté $a^{m/r}$ revient à la quadrature du cercle. Nous pouvons assurer encore, que le rapport des deux facultés $a^{m/r} : b^{m/r}$ est réductible au calcul des sinus, toutes les fois que la somme des trois nombres $a + b + m$ est un nombre entier, positif ou négatif. Dans tous les autres cas, les facultés à exposant fractionnaire forment un genre de fonctions transcendantes entièrement neuf. Nous diviserons ce chapitre en deux parties. Dans la première nous ferons voir l'usage qu'on peut faire des facultés à exposant fractionnaire, dans une infinité d'opérations de haute analyse; nous verrons qu'une infinité de fonctions transcendantes, qui avoient échappé jusqu'ici à la sagacité des géomètres, et qu'on n'avoit pu évaluer par aucune des méthodes connues, ne sont autre chose dans le fond que des facultés à exposant fractionnaire. L'autre partie nous fera trouver des méthodes très-générales, de trouver la valeur de toute faculté proposée avec la plus grande facilité; nous verrons que c'est là une des opérations les plus simples de l'analyse; nous trouverons que la réduction des facultés à exposant fractionnaire, dans de certains cas très-particuliers, aux rapports des sinus et tangentes, n'est nullement un avantage pour les premières; et qu'au contraire les sinus et tangentes sont trop heureuses encore, de pouvoir être évaluées immédiatement, moyennant les facultés à exposant fractionnaire.

PROBLEME.

11. *Trouver la valeur de la produite infinie* $\frac{a.\ a+r.\ a+2r.\ a+3r.\ etc.}{b.\ b+r.\ b+2r.\ b+3r.\ etc.}$. Je donne le nom de *produite infinie* à ces sortes de fractions, ayant pour numérateur et pour dénominateur des produits composés d'un nombre infini de facteurs,

facteurs, qui ordinairement forment une progression arithmétique, ou plusieurs progressions arithmétiques différentes, quoique cette condition ne soit pas absolument nécessaire.

SOLUTION.

12. On tire du théorème énoncé en 5 l'égalité générale $\frac{a^{mIr}}{(a+nr)^{mIr}} = \frac{a^{nIr}}{(a+mr)^{nIr}}$. On supposera n infiniment grand, et on fera $a+mr=b$, ce qui donnera $m=\frac{b-a}{r}$. Cette supposition fera passer la faculté $(a+nr)^{mIr}$ à l'état de puissance; elle deviendra $(inf.\, r)^{\frac{b-a}{r}}$. De l'autre côté on aura la produite infinie proposée. Cette produite sera donc égale à $a^{\frac{b-a}{r}Ir}$, divisé par $(inf.\, r)^{\frac{b-a}{r}}$.

COROLLAIRE.

13. La produite infinie $\frac{a.\, a+r\ etc.}{a+c.\, a+c+r\ etc.}$ est donc égale à $a^{\frac{c}{r}Ir}$, divisée par $(inf.\ r)^{c:r}$; tandis que la produite $\frac{A+c.\ A+c+r\ etc.}{A.\, A+r\ etc.}$ se réduira à $(A+c)^{-\frac{c}{r}Ir}$, divisé par $(inf.\, r)^{-c:r}$. La première produite est donc constamment un infiniment petit, l'autre un infiniment grand, de l'ordre $\frac{c}{r}$. Mais le produit des deux produites constitue une quantité entièrement finie, ce qui fournit le théorème suivant, qui est un des plus importans de l'analyse:

THÉOREME.

14. *La produite infinie* $\frac{a\,(A+c)\,(a+r)\,(A+c+r)\,(a+2r)\,(A+c+2r)\ etc.}{A\,(a+c)\,(A+r)\,(a+c+r)\,(A+2r)\,(a+c+2r)\ etc.}$ *est égale à la faculté* $a^{\frac{c}{r}Ir}$, *divisée par la faculté* $A^{\frac{c}{r}Ir}$

COROLLAIRE.

15. La produite susdite est donc une fraction rationnelle, toutes les fois que c est un multiple de r. Donnons pour exemple la produite $\frac{4.\ 20.\ 7.\ 23.\ 10.\ 26.\ 13.\ 29.\ 16.\ 32.\ 19.\ 35.\ 22\ etc.}{11.\ 13.\ 14.\ 16.\ 17.\ 19.\ 20.\ 22.\ 23.\ 25.\ 26.\ 28.\ 29\ etc.}$. Elle donne $a=4$; $A=11$; $c=9$; $r=3$; elle doit être égale à $\frac{4.\ 7.\ 10}{4.\ 14.\ 17}$, conformément au théorème; elle l'est

en effet, parce que tous les autres facteurs se détruisent, à l'exception de $\frac{32.\ 35}{25.\ 28}$, fraction qui diffère déjà peu de l'unité, et qui dans l'infini coïncideroit avec elle.

THÉOREME.

16. *Le rapport* $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi}$ *est égal à* $\frac{m^{(1-m-n)I1}}{n^{(1-m-n)I1}}$.

DÉMONSTRATION.

17. Il est démontré dans tous les ouvrages de haute analyse, que le rapport $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi}$ est égal à la produite infinie $\frac{m}{n}.\frac{1-m}{1-n}.\frac{1+m}{1+n}.\frac{2-m}{2-n}.\frac{2+m}{2+n}.\frac{3-m}{3-n}$ etc.etc. Comparant cette expression à la formule générale de 14, on aura $a=m$; $A=n$; $r=1$; $c=1-m-n$; donc $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi}=\frac{m^{(1-m-n)I1}}{n^{(1-m-n)I1}}$. Les réductions enseignées en 3, 6, 9, feront subir à cette expression une infinité de transformations, sans rien changer à sa valeur. Nous en rapporterons quelques-unes.

THÉOREME.

18. *On a* $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi}=\frac{m.\ 1^{nI1}\ (1-m)^{mI1}}{n.\ 1^{mI1}\ (1-n)^{nI1}}$.

DÉMONSTRATION.

19. De $\frac{m^{(1-m-n)I1}}{n^{(1-m-n)I1}}$ on fait $\frac{m^{(1-m)I1}\ 1^{-nI1}}{n^{(1-n)I1}\ 1^{-mI1}}$ (6). Au lieu d'une différence positive on employera une différence négative; on aura (3): $\frac{o^{(1-m)I-1}\ o^{mI-1}}{o^{(1-n)I-1}\ o^{nI-1}}$. On fera passer les facultés du numérateur au dénominateur, et réciproquement; on aura (9): $\frac{1^{(n-1)I1}\ (1-m)^{mI1}}{1^{(m-1)I1}\ (1-n)^{nI1}}$. Cette dernière expression se réduit naturellement à $\frac{m.\ 1^{nI1}\ (1-m)^{mI1}}{n.\ 1^{mI1}\ (1-n)^{nI1}}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

20. Dans le cas particulier de m infiniment petit, on aura $\frac{m\pi}{Sin.\ n\pi}=$

$\frac{m.\,1^{nI_1}}{n.(1-n)^{nI_1}}$; ce qui donne $\frac{n\pi}{Sin.\,n\pi} = \frac{1^{nI_1}}{(1-n)^{nI_1}}$. Cette formule fournit une méthode facile et élégante, de calculer le sinus de tout angle proposé.

THÉOREME.

21. *La faculté* 1^{2nI_1} *est égale à* $2^n\,1^{nI_1}\,1^{nI_2}$. Car la faculté $1.\,2.\,3\ldots\ldots 2n$ est le produit des deux facultés $1.\,3.\,5\ldots\ldots 2n-1$, et $2.\,4.\,6\ldots\ldots 2n$; dont la première est 1^{nI_2}, l'autre $2^n\,1^{nI_1}$. On tire de ce lemme le corollaire suivant, qui peut être utile dans plusieurs occasions: $(1+n)^{nI_1} = 2^n\,1^{nI_2}$. Il est fondé sur ce que la faculté 1^{2nI_1} est décomposable en $1^{nI_1}(1+n)^{nI_1}$, en vertu de 6.

PROBLEME.

22. *Trouver la valeur des deux facultés* $1^{(1:2)I_1}$, $1^{(1:2)I_2}$.

SOLUTION.

23. Supposant $n = \frac{1}{2}$, dans les deux théoremes énoncés en 20. 21. on tire de l'un $\frac{1}{2}\pi = \frac{1^{(1:2)I_1}\sqrt{2}}{1^{(1:2)I_2}}$; de l'autre $1 = 1^{(1:2)I_1}\,1^{(1:2)I_2}\sqrt{2}$. Combinant ensemble ces deux propositions, on trouve $1^{(1:2)I_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; et $1^{(1:2)I_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

PROBLEME.

24. *Trouver la valeur des deux facultés* $n^{(1:2)I_1}$, $n^{(1:2)I-1}$.

SOLUTION.

25. On tire de 7. $(a+nr)^{mI_r} = \frac{(a+mr)^{nI_r}\,a^{mI_n}}{a^{nI_r}}$. Faisant ici $a=1$, $r=1$, $m=\frac{1}{2}$; on aura, après les réductions qui se présentent d'elles-mêmes, $(1+n)^{(1:2)I_1} = \frac{3^{nI_2}}{2^{nI_2}}.\,1^{(1:2)I_1}$; d'où l'on tire $n^{(1:2)I_1} = \frac{3^{(n-1)I_2}}{2^{(n-1)I_2}}.\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Quant à $n^{(1:2)I-1}$, il se réduit à $(n+\frac{1}{2})^{(1:2)I_1}$; et comme $n^{(1:2)I_1}(n+\frac{1}{2})^{(1:2)I_1} = n$, en vertu de 6, il en résulte $n^{(1:2)I-1} = \frac{2^{nI_2}}{1^{nI_2}\sqrt{\pi}}$. Ainsi les deux facultés $n^{(1:2)I_1}$, $n^{(1:2)I-1}$ reviennent à la quadrature du cercle, toutes les fois que n est un nombre entier.

PROBLEME.

26. *Trouver la valeur des deux facultés* $B^{(1:2)I2}$; $B^{(1:2)I-2}$.

SOLUTION.

27. Faisant usage de la même formule $(a+nr)^{mIr} = \frac{(a+mr)^{nIr}\, a^{mIr}}{a^{nIr}}$; la supposition de $a=1$, $r=2$, $m=\frac{1}{2}$ donne $(1+2n)^{(1:2)I2} = \frac{2^{nI2}}{1^{nI2}} 1^{(1:2)I2} = \frac{2^{nI2}\sqrt{2}}{1^{nI2}\sqrt{\pi}}$. La supposition de $a=2$, $r=2$, $m=\frac{1}{2}$ donne $(2+2n)^{(1:2)I2} = \frac{3^{hI2}}{2^{hI2}} 2^{(1:2)I2} = \frac{3^{hI2}\sqrt{\pi}}{2^{hI2}\sqrt{2}}$. De ces deux formules, la première sert aux cas où B est un nombre impair, l'autre à celui où B est un nombre pair. Quant à $B^{(1:2)I-2}$, comme $(2h)^{(1:2)I-2}$ est identique avec $(1+2h)^{(1:2)I2}$, et $(1+2h)^{(1:2)I-2}$ avec $(2+2h)^{(1:2)I2}$, on aura $(2h)^{(1:2)I-2} = \frac{2^{hI2}\sqrt{2}}{1^{hI2}\sqrt{\pi}}$, et $(1+2h)^{(1:2)I-2} = \frac{3^{hI2}\sqrt{\pi}}{2^{hI2}\sqrt{2}}$.

REMARQUE.

28. C'est un plaisir de voir, combien ces deux problèmes, qui ne supposent que les principes les plus élémentaires, ont exercé le génie des plus grands géomètres. Pour y réussir, ils s'adressoient ordinairement à la méthode des interpolations. Cette méthode les envoyoit promener dans l'infini; il falloit y avoir été longtems avant qu'on eut la permission de revenir dans le fini. Au reste la marche très-simple que nous avons suivie, embrasse bien d'autres objets encore. Le théorème énoncé en 7. nous apprend, que si des quatre facultés, a^{mIr}, a^{nIr}, $(a+mr)^{nIr}$, $(a+nr)^{mIr}$, trois sont données, la quatrième se trouve par une simple règle de trois. Donc, si a^{mIr} est connu dans un seul cas particulier, l'exposant m étant un nombre fractionnaire, on trouvera par une simple règle de trois, toute faculté A^{mIr}, dont la base A est comprise sous la forme $a+nr$. C'est ainsi que, connoissant la seule faculté $2^{(1:3)I5}$, on trouvera par une simple règle de trois, la suite de facultés $7^{(1:3)I5}$, $12^{(1:3)I5}$, $17^{(1:3)I5}$ etc. de même que $(-3)^{(1:3)I5}$, $(-8)^{(1:3)I5}$, $(-13)^{(1:3)I5}$ etc. Toutes ces solutions particulières au reste seront comme absorbées dans la méthode générale que nous donnerons, pour trouver la valeur d'une faculté quelconque.

PROBLEME.

29. *Déterminer les cas, où la produite infinie de* 14, *savoir* $\frac{a\,(A+c)\,etc.}{A\,(a+c)\,etc.}$, *que nous avons réduite à* $a^{cI_1} : A^{cI_1}$ *(en supposant la différence r égale à l'unité, ce qui n'ôte rien à la généralité de la produite) est réductible à des rapports de sinus, tels que* $Sin.\ m\pi : Sin.\ n\pi$.

SOLUTION.

30. Nous avons trouvé en 16. $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{(1-m-n)I_1}}{n^{(1-m-n)I_1}}$. Prenant à volonté un nombre entier quelconque h, nous aurons $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{(h-h+1-m-n)I_1}}{n^{(h-h+1-m-n)I_1}}$. Le dévéloppement de ces deux facultés donne $\frac{Sin.m\pi}{Sin.n\pi} = \frac{m^{hI_1(m+h)-(h-1+m+n)I_1}}{n^{hI_1(n+h)-(h-1+m+n)I_1}}$, ce qui revient à $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{hI_1(n+h-1)^{(h-1+m+n)I-1}}}{n^{hI_1(m+h-1)^{(h-1+m+n)I-1}}}$; et enfin, en employant les différences positives, $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{hI_1(1-m)^{(h-1+m+n)I_1}}}{n^{hI_1(1-n)^{(h-1+m+n)I_1}}}$. Le dévéloppement ultérieur des deux facultés non dévéloppées peut être effectué de deux manières. Suivant l'une nous avons, $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{hI_1}(1-m)^{(h-1)I_1}(h-m)^{(m+n)I_1}}{n^{hI_1}(1-n)^{(h-1)I_1}(h-n)^{(m+n)I_1}}$. L'autre donne $\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{m^{hI_1}(1-m)^{hI_1}(h+m)^{(1-m-n)I_1}}{n^{hI_1}(1-n)^{hI_1}(h+n)^{(1-m-n)I_1}}$. Ces deux théorèmes nous font voir, que la produite proposée $\frac{a^{cI_1}}{A^{cI_1}}$ est reductible aux rapports des sinus, toutes les fois que la somme $a+A+c$ est un nombre entier; mais aussi, qu'il faut distinguer les deux cas, de $a+A+c$ *pair*, et de $a+A+c$ *impair*. Dans le *premier* cas, $a+A+c$ étant un nombre pair, tel que $2h$, on aura $\frac{a^{cI_1}}{A^{cI_1}} = \frac{(h-A)^{hI_1}(1-h+A)^{(h-1)I_1}\,Sin.\ (h-a)\pi}{(h-a)^{hI_1}(1-h+a)^{(h-1)I_1}\,Sin.\ (h-A)\pi}$. Dans le *second* cas, $a+A+c$ étant un nombre impair, tel que $2h+1$, on aura $\frac{a^{cI_1}}{A^{cI_1}} = \frac{(A-h)^{hI_1}(1-A+h)^{hI_1}\,Sin.\ (a-h)\pi}{(a-h)^{hI_1}(1-a+h)^{hI_1}\,Sin.\ (A-h)\pi}$.

EXEMPLE I.

31. *On demande le terme de la série* $\frac{19}{15}+\frac{19.26}{15.22}+\frac{19.26.33}{15.22.29}$ *etc. qui répond à l'index* $\frac{43}{7}$? Le terme général qui répond à l'index u, n'étant autre chose que $\frac{19^{uI7}}{15^{uI7}}$, on aura $a=\frac{19}{7}$; $A=\frac{15}{7}$; $c=\frac{43}{7}$; et comme la somme de ces trois nombres est égale à 11, on trouvera la quantité cherchée, en mettant dans la seconde formule, $h=5$. Elle deviendra $\frac{20.13.6.1.\ 8.27.34.41.48.55}{16.\ 9.2.5.12.23.30.37.44.51}\cdot\frac{Sin.\frac{2}{7}\pi}{Sin.\frac{1}{7}\pi}$.

EXEMPLE II.

32. *On demande le terme de la série* $\frac{11}{23}+\frac{11.24}{23.36}+\frac{11.24.37}{23.36.49}$ *etc. qui répond à l'index* $-\frac{8}{13}$? On a $a=\frac{11}{13}$; $A=\frac{23}{13}$; $c=-\frac{8}{13}$; somme des trois nombres 2, nombre pair. Donc, faisant usage de la première formule, et mettant 1 à la place de h, la quantité cherchée deviendra $\frac{5\ Sin.\frac{2}{13}\pi}{Sin.\frac{3}{13}\pi}$.

PROBLEME.

33. *Déterminer la valeur de la produite* $\frac{A^p B^q}{C^{p+q}}.\frac{(A+r)^p(B+r)^q}{(C+r)^{p+q}}.\frac{(A+2r)^p(B+2r)^q}{(C+2r)^{p+q}}$ etc. C'est la forme la plus générale qu'on ait donné jusqu'ici à ces sortes de fonctions; encore ce n'a été que dans quelques exemples particuliers.

SOLUTION.

34. Faisant $\frac{A}{C}.\frac{A+r}{C+r}.\frac{A+2r}{C+2r}$ etc. ou $\frac{A^{(C-A):rIr}}{(inf.r)^{(C-A):r}}=X$; et $\frac{B}{C}.\frac{B+r}{C+r}.\frac{B+2r}{C+2r}$ etc. ou $\frac{B^{(C-B):rIr}}{(inf.r)^{(C-B):r}}=Y$; la produite proposée sera égale à $X^p\ Y^q$; fonction qui aura pour dénominateur $(inf.r)^{\frac{pC-pA+qC-qB}{r}}$. Pour que ce dénominateur soit une quantité finie, il faut que son exposant s'évanouisse; ainsi pour que la produite proposée ait une valeur finie, il faut que $C=\frac{pA+qB}{p+q}$. Substituant cette valeur dans $X^p\ Y^q$, et faisant $\frac{qB-qA}{pr+qr}=m$, $\frac{pA-pB}{pr+qr}=n$, on trouve pour équivalent de la produite proposée $\left(A^{mIr}\right)^p\left(B^{nIr}\right)^q$.

COROLLAIRE.

35. Faisant ici $p+q=1$, et de plus $B=A+r$; ce qui donne $q=1-p$, $C=A+pr$; on tire de la formule générale qu'on vient de trouver, $\frac{A^{pIr}}{A^p}$ pour équivalent de la produite $\frac{A^{(1-p)}(A+r)^p}{A+pr}.\frac{(A+r)^{1-p}(A+2r)^p}{A+pr+r}.\frac{(A+2r)^{1-p}(A+3r)^p}{A+pr+2r}$. etc. C'est l'ancien théorème fourni par l'interpolation ; et c'est à lui que se réduit à-peu-près tout le chapitre du *calcul différentiel d'Euler* qui en traite. On croyoit avoir beaucoup gagné, en réduisant à des produites infinies, des facultés à exposant fractionnaire A^{pIr}. On n'y gagnoit enfin que la solution des cas qui se rapportent à la quadrature du cercle. Il eut été beaucoup mieux fait d'apprendre à évaluer les facultés à exposant fractionnaire quelconque: on auroit eu un moyen certain et général, de trouver non seulement la valeur de toute produite infinie donnée, mais encore celles d'une infinité d'autres quantités transcendantes. Nous en parlerons dans la seconde partie de ce chapitre.

THÉOREME.

36. *Le rapport* $\frac{Sin.\, m\pi}{Sin.\, n\pi}$ *est égal à* $\frac{(+m)^{n-mI+1}}{(-m)^{n-mI-1}}$.

DÉMONSTRATION

37. De $\frac{m^{1-m-nI1}}{n^{1-m-nI1}}$ on fait $\frac{m^{n-m+1-2nI1}}{n^{1-2n+n-mI1}}$; ce qui se réduit, moyennant 6, à $\frac{m^{n-mI1}\, n^{1-2nI1}}{n^{1-2nI1}(1-n)^{n-mI1}}$; ou bien, en supprimant les facteurs identiques du numérateur et du dénominateur, à $\frac{m^{n-mI1}}{(1-n)^{n-mI1}}$, ce qui est identique, en vertu de 3, avec $\frac{(+m)^{n-mI+1}}{(-m)^{n-mI-1}}$. *Les exposants, quoique complexes, paroissent ici sans parenthèse, et ils le seront toujours dans la suite. Il suffit d'avertir que dans tous les cas, la lettre I regardera tout ce qui la précède.*

38. Faisant ici $n-m=p$, et $n=m+p$, le théorème précédent se transformera en $\frac{Sin.\,(m+p)\pi}{Sin.\, m\pi}=\frac{(-m)^{pI-1}}{(+m)^{pI+1}}=Cos.\, p\pi+Sin.\, p\pi.\, Cotang.\, m\pi.$

Enfin, la supposition de $p = \frac{1}{2}$, nous fera connoître le théorème suivant, que nous donnons pour un des plus importants de l'analyse.

THÉOREME.

39. *La tangente d'un angle quelconque $m\pi$, est égale à la faculté* $(+m)^{1:1 I+1}$, *divisée par la faculté* $(-m)^{1:2 I-1}$.

REMARQUES.

40. Ce théorème, non moins remarquable par sa vérité que par sa simplicité, fournit une méthode très-simple, pour trouver la tangente d'un angle proposé; et une autre méthode encore plus facile, pour en calculer le logarithme hyperbolique. Mais aussi nous ne dissimulerons pas que les conséquences naturelles auquelles il mène, nous obligeront de changer les idées généralement reçues sur les puissances fractionnaires des nombres négatifs, ainsi que sur leurs logarithmes. Il est très-clair d'abord, que toute faculté, telle que $a^{n I r}$, peut être dévéloppée en une série $a^n + A a^{n-1} r + B a^{n-2} r^2 + C a^{n-3} r^3 + \text{etc.} = a^n \left(1 + \frac{A r}{a} + \frac{B r r}{a a} + \frac{C r^3}{a^3} + \text{etc.}\right)$, dont les coëfficiens A, B, C, etc. sont des fonctions de l'exposant n seul; bientôt nous indiquerons la loi de ces coëfficiens; nous trouverons des moyens pour rendre la série $1 + \frac{A r}{a} + \frac{B r^2}{a^2} + \text{etc.}$ convergente *à volonté*; et nous nous en servirons avec avantage, pour trouver *dans tous les cas*, la valeur d'une faculté quelconque proposée. Il est très-clair encore, qu'en prenant à la fois la base et la différence négatives, la faculté $(-a)^{n I - r}$ sera égale à $(-a)^n \left(1 + \frac{A r}{a} + \frac{B r^2}{a^2} + \frac{C r^3}{a^3} + \text{etc.}\right)$. Il paroît donc s'ensuivre que le rapport des deux facultés $(+a)^{n I + r} : (-a)^{n I - r}$ doit être essentiellement le même que celui des deux puissances $(+a)^n : (-a)^n$; ainsi nous aurons:

$$\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{(+m)^{n-m}}{(-m)^{n-m}};$$

$$\frac{Sin.\ n\pi}{Sin.\ m\pi} = \frac{(+n)^{m-n}}{(-n)^{m-n}};$$

$$Tang.\ m\pi = \frac{(+m)^{1:2}}{(-m)^{1:2}}.$$

41.

41. Ici les réflexions se présentent en foule. Les deux premieres propositions conduisent très-naturellement à celle-ci : $\frac{(-m)^p}{(+m)^p} = Cos.p\pi + Cot.m\pi.$ $Sin.\ p\pi$; en faisant comme ci-dessus, $n - m = p$. Faisant p négatif, cette équation devient $\frac{(+m)^p}{(-m)^p} = Cos.\ p\pi - Cot.\ m\pi.\ Sin.\ p\pi.$ Combinant ensemble les deux équations, on en déduit très-naturellement le théorème aussi neuf qu'extraordinaire, en vertu duquel le produit des deux facteurs $Cos.\ p\pi + Cot.m\pi.\ Sin.\ p\pi.$ et $Cos.p\pi - Cot.m\pi.\ Sin.p\pi$ seroit égal à l'unité, quelques valeurs qu'on voulut supposer aux deux nombres m et p.

42. Il n'y a pas le moindre doute en effet que toutes ces propositions ne soient très-vraies, tant que $Sin.\ p\pi = o$, et que p est un nombre entier, positif ou négatif. Il n'y a pas le moindre doute non plus que dans tous les autres cas sans exception, ces mêmes propositions ne soient ce qu'il y a de plus révoltant et de plus monstrueux en fait de géométrie, tant élémentaire que transcendante.

43. Il a été très-facile de parvenir à ces théorèmes; et peut-être n'y a-t-il jamais eu de démonstration plus claire, et plus conforme aux principes généralement reconnus. Il sera plus difficile peut-être de trouver la raison des contradictions sans nombre, auxquelles ils mènent très-naturellement. Se rejettera-t-on sur la multiplicité des racines, qui se présente en effet dès qu'on assigne à l'exposant p une valeur fractionnaire? Mais au milieu de cette multiplicité de racines, on ne pourra certainement pas nier qu'en suivant la route des principes universellement reçus, le rapport $(+m)^p : (-m)^p$ ne soit dans tous les cas, généralement et identiquement le même que celui de $(+1)^p : (-1)^p$. En vertu de cette réduction on aura donc

$$\frac{Sin.\ m\pi}{Sin.\ n\pi} = \frac{(+1)^{n-m}}{(-1)^{n-m}};$$

$$\frac{Sin.\ n\pi}{Sin.\ m\pi} = \frac{(+1)^{m-n}}{(-1)^{m-n}};$$

$$Tang.\ m\pi = \frac{(+1)^{1:2}}{(-1)^{1:2}}.$$

44. Les deux premières propositions s'accordent parfaitement entr'elles; mais elles mènent à l'absurde; il s'ensuivroit que le rapport des sinus de deux angles est fonction de leur différence seule. La troisième est encore

plus absurde, en ce qu'elle établiroit pour tangente d'un angle quelconque, non seulement une quantité constante, mais encore une quantité imaginaire.

45. Ce n'est pas tout. Le rapport des deux puissances $(+m)^p : (-m)^p$, que nous avons enseigné en 41. nous fait présumer, que $(-m)^p$ est égal dans tous les cas à $(+m)^p$, multiplié par $Cos.\, p\pi + Cot.\, m\pi.\, Sin.\, p\pi$; ou bien, divisé par $Cos.\, p\pi - Cot.\, m\pi.\, Sin.\, p\pi$. Il ne sera pas nécessaire de répéter ce que nous avons déja dit sur la contradiction manifeste qui règne entre ces deux règles. Mais il s'ensuivroit de plus que quelque valeur qu'on voulut supposer à l'exposant p, entière ou fractionnaire, positive ou négative, la puissance $(-m)^p$ fut toujours et constamment une quantité réelle, et qu'en un mot, il n'existât point de quantités imaginaires dans toute l'étendue de l'analyse.

46. Comment se sauvera-t-on de ces contradictions? Dira-t-on que la faculté a^{mIr} n'est pas généralement égale à a^m, multiplié par $1 + \frac{Ar}{a} + \frac{Brr}{aa} +$ etc. les coëfficiens A, B etc. étant des fonctions de l'exposant m seul? Cependant il ne paroît pas qu'il y ait un seul théorème de haute analyse, qui soit aussi clairement et aussi solidement prouvé que celui-là. Il en est de même de l'autre: $(-a)^{mI-r} = (-a)^m (1 + \frac{Ar}{a} + \frac{Brr}{aa} +$ etc.): qui de plus en est une conséquence très-naturelle, en mettant $-a$ et $-r$ à la place de $+a$ et $+r$. Dira-t-on qu'en comparant les deux théorèmes, il ne s'ensuive pas que le rapport des deux facultés $(+a)^{mI+r} : (-a)^{mI-r}$ soit identique avec celui des deux puissances $(+a)^m : (-a)^m$? Il paroît bien difficile cependant qu'en admettant les deux théorèmes, on se refuse à la conséquence très-claire qui en découle naturellement, à moins que de supposer que la série $1 + \frac{Ar}{a} + \frac{Brr}{aa} +$ etc. ne fut pas égale à elle-même.

47. Remontera-t-on jusqu'aux théorèmes eux-mêmes qui nous ont aidé à réduire le rapport des sinus de deux angles au rapport de deux facultés à exposant fractionnaire? Dira-t-on, par exemple, que la tangente d'un angle quelconque $m\pi$ n'est pas égale à la faculté $(+m)^{1:2I+1}$, divisée par $(-m)^{1:2I-1}$? Alléguera-t-on pour raison très-plausible en effet, et parfaitement conforme aux principes généralement reçus de l'analyse élémentaire, que la faculté $(-m)^{1:2I-1}$ doit être une quantité imaginaire, ayant la racine

certainement imaginaire $(-m)^{1/2}$ pour l'un de ses deux facteurs, et pour l'autre la série très-réelle $1 + \frac{Ar}{a} + \frac{Brr}{aa} +$ etc.? Mais sans répéter la démonstration très-rigoureuse que nous en avons donnée, l'on se sauroit certainement se refuser à admettre un théorème, qui dans toutes ses applications ne mène qu'à des résultats exactes et justes. C'est ainsi que pour trouver la tangente de 72°, nous aurons $m = \frac{2}{5}$; de plus on a dans le cas où l'exposant de la faculté est $\frac{1}{2}$, $A = -\frac{1}{8}$; $B = +\frac{1}{128}$; $C = +\frac{5}{1024}$ etc. Cela donne

$$(+2:5)^{1:2I+1} = 0{,}4817638;$$
$$(-2:5)^{1:2I-1} = 0{,}1565395.$$

Le quotient des deux quantités 3,0776835 est la tangente de 72°.

48. Seroit-ce enfin qu'en renonçant à une partie de nos principes universellement adoptés, on sentit la nécessité d'en venir à une réforme totale de toute notre théorie des racines et des logarithmes des quantités négatives? Pourra-t-on convenir que la plus grande partie des propositions qui les concernent, devoient être absolument indémontrables, de la manière dont on a essayé de les démontrer jusqu'ici? Je ne serois pas éloigné de croire en effet, que toute l'application que nous avons faite jusqu'ici de notre théorie générale des puissances, aux racines et logarithmes des quantités négatives, ne soit une conclusion *a particulari ad universale*, qui ne devroit être guères excusable en fait d'analyse. Ce que je puis avancer en attendant avec la dernière certitude, c'est qu'en dépit de tous les principes généralement adoptés, dans tous les cas où l'exposant p a une valeur réelle, positive ou négative, entière ou fractionnaire, rationnelle ou irrationnelle, la faculté $(-m)^{pI-1}$ est toujours et constamment une quantité réelle; quoiqu'elle soit ouvertement le produit de deux facteurs, dont l'un $1 + \frac{A}{m} + \frac{B}{mm}$ etc. est très-certainement réel, et dont l'autre $(-m)^{p}$ devroit être une quantité imaginaire, toutes les fois que l'exposant p, supposé fractionnaire, eut un nombre pair pour dénominateur.

49. Conformément aux principes généralement reçus, la puissance $(-1)^{x}$ ne peut avoir en général que deux seules valeurs réelles, savoir, ou $+1$, ou -1; dans tous les autres cas elle n'aura que des valeurs imaginaires. Je crois en avoir assez dit pour rendre cette théorie plus que suspecte; mais voici d'autres argumens encore, qui viennent à l'appui de mon assertion.

D'abord il répugne à toute idée d'une loi de continuité, ainsi qu'à l'induction générale que nous présente tout l'ensemble de l'analyse, que la fonction $(-1)^x$ doive passer alternativement de $+1$ à -1, et repasser de -1 à $+1$, sans passer par aucun état intermédiaire. A quelque classe de fonctions algébriques qu'appartienne l'expression $(-1)^x$, il faut nécessairement que comme toute autre fonction elle ait sa différentielle, et ses différences finies; il faut que $(-1)^{x+dx}$ diffère infiniment peu de $(-1)^x$; et que $(-1)^{x+\Delta x}$ diffère de $(-1)^x$ d'une quantité assignable. Or, d'après la théorie ordinaire il n'y a ni l'un ni l'autre. La différence finie de cette fonction ne seroit assignable que dans un nombre très-borné de cas; et alors elle seroit ou *zéro*, ou *moins deux*; entre $(-1)^x$ et $(-1)^{x+1}$ il y auroit un vuide immense. Quant à la différentielle de $(-1)^x$, il n'est pas un seul géomètre, qui en se conformant aux idées reçues, soit en état de nous dire ce que c'est.

50. De plus, cette théorie ordinaire est défectueuse sous plus d'un rapport. Elle n'est applicable qu'aux seuls cas, où l'exposant x est, sinon un nombre entier, du moins une fraction rationnelle. Mais que ferons-nous de $(-1)^{\sqrt{2}}$? que deviendra $(-1)^x$ dans l'infinité de cas, qui nous donnent pour exposants, des quantités irrationnelles, exponentielles, circulaires, enfin transcendantes quelconques? Ici les plus grands géomètres, en se conformant à la théorie ordinaire, sont obligés d'avouer ingénument leur ignorance; et cette ignorance, il faut l'avouer, ne fait pas trop d'honneur à l'analyse.

51. Mais, objectera-t-on, cette théorie des racines imaginaires ne nous a jamais conduit jusqu'ici qu'à des résultats vrais et rigoureux: et dans cette infinité d'applications qu'on en a fait à tout ce qui pouvoit être un objet quelconque des hautes mathématiques, on s'est toujours et constamment retrouvé sur la route unique de la vérité et de la précision. Il est fort heureux sans doute que cela ait été ainsi *jusqu'ici*; et qu'une suite de théorèmes qui n'avoient jamais été prouvés par la démonstration qu'on en donnoit, l'ait été par l'événement. Sommes-nous bien certains d'être toujours également heureux? Une suite de principes dont jusqu'ici on n'a fait application qu'à cette classe de fonctions très-particulières que nous nommons *puissances*, et à laquelle nous sommes accoutumés de tout réduire en fait d'analyse, menera-t-elle à des résultats également vrais, lorsqu'il sera question de les appliquer à des fonctions plus générales? Peut-être la suite de ce chapitre fera-t-elle revenir les géomètres de cette heureuse sécurité. Nous y proposerons

la sommation d'une série très-simple; nous trouverons moyen de réduire le problème à des logarithmes de facultés à exposant fractionnaire, en observant de nous en tenir scrupuleusement aux principes généralement reçus; les résultats absolument faux auxquels nous nous verrons dévolus, prouveront aux géomètres, que ces mêmes principes, qu'ils avoient cru très-solidement et très-universellement démontrés, étoient bien loin de l'être.

52. Nous finissons ces remarques par l'assurance que nous donnons à nos lecteurs, que les doutes que nous avons élevés, que les contradictions apparentes que nous avons rencontrées, ne retarderont notre marche en aucune manière; que malgré ces obstacles nous poursuivrons notre route, et que nous arriverons à des résultats constans et certains. La bizarrerie apparente d'une faculté à exposant fractionnaire et à base négative, ne nous empêchera pas de la calculer, d'en trouver la valeur précise, et de nous en servir avec le plus grand avantage dans le calcul d'une infinité de quantités transcendantes, qui avoient échappé jusqu'ici à la sagacité des géomètres.

53. Une vérité très-importante, et qui doit servir de base à toutes les recherches qui vont suivre, c'est que le dévéloppement ordinaire de la puissance du binome est applicable aux facultés; et qu'ainsi cet illustre théorème binomial, qui auroit seul suffi peut-être pour immortaliser son auteur, n'est qu'un cas très-particulier d'un théorème infiniment plus général. Nous allons exposer cette grande vérité dans tout l'ordre, et avec toute la clarté, dont elle peut être susceptible.

PROBLEME.

54. *La faculté du binome* $(a+b)^{nIr}$ *devant être représentée par une série composée de facultés de monomes, telle que* $a^{nIr}+Aa^{n-1Ir}b+Ba^{n-2Ir}b^{2Ir}+Ca^{n-3Ir}b^{3Ir}+$ etc. *on demande la loi des coëfficiens* A, B, C, D etc.

SOLUTION.

55. On commencera par substituer successivement à la place de b, les valeurs $-r$, $-2r$, $-3r$, $-4r$ etc. Alors, observant que la faculté $(-mr)^{nIr}$ doit nécessairement s'évanouir, dès que n devient égal à $m+1$ ou plus grand que $m+1$, on aura les équations suivantes:

$$a^{nIr}=a^{nIr};$$
$$(a-r)^{nIr}=a^{nIr}-Aa^{n-1Ir}r;$$
$$(a-2r)^{nIr}=a^{nIr}-2Aa^{n-1Ir}r+2Ba^{n-2Ir}r^2;$$

$$(a-3r)^{nIr}=a^{nIr}-3Aa^{n-1Ir}r+6Ba^{n-2Ir}r^2-6Ca^{n-3Ir}r^3;$$
$$(a-4r)^{nIr}=a^{nIr}-4Aa^{n-1Ir}r+12Ba^{n-2Ir}r^2-24Ca^{n-3Ir}r^3+$$
$$24Da^{n-4Ir}r^4;\text{ etc. etc. etc.}$$

56. On ôtera chacune de ces équations de celle qui la précède immédiatement ; et pour faire ces soustractions, on observera que généralement, quelques soient Z, r, n, on a toujours $Z^{nIr}-(Z-r)^{nIr}=nZ^{n-1Ir}r$. On trouvera

$$na^{n-1Ir}=Aa^{n-1Ir};$$
$$n(a-r)^{n-1Ir}=Aa^{n-1Ir}-2Ba^{n-2Ir}r;$$
$$n(a-2r)^{n-1Ir}=Aa^{n-1Ir}-4Ba^{n-2Ir}r+6Ca^{n-3Ir}r^2;$$
$$n(a-3r)^{n-1Ir}=Aa^{n-1Ir}-6Ba^{n-2Ir}r+18Ca^{n-3Ir}r^2-24Da^{n-4Ir}r^3;$$
$$n(a-4r)^{n-1Ir}=Aa^{n-1Ir}-8Ba^{n-2Ir}r+36Ca^{n-3Ir}r^2-96Da^{n-4Ir}r^3+$$
$$\text{etc. etc. etc.}$$

57. La première de ces équations donne $A=n$. Continuant à soustraire :

$$n(n-1)a^{n-2Ir}=2Ba^{n-2Ir};$$
$$n(n-1)(a-r)^{n-2Ir}=2Ba^{n-2Ir}-6Ca^{n-3Ir}r;$$
$$n(n-1)(a-2r)^{n-2Ir}=2Ba^{n-2Ir}-12Ca^{n-3Ir}r+24Da^{n-4Ir}r^2;$$
$$n(n-1)(a-3r)^{n-2Ir}=2Ba^{n-2Ir}-18Ca^{n-3Ir}r+72Da^{n-4Ir}r^2-$$
$$120Ea^{n-5Ir}r^3;\text{ etc. .etc. etc.}$$

58. On voit par la première de ces équations que $B=\frac{n.\,n-1}{1.\,2}$. On aura ensuite

$$n\ldots(n-2)a^{n-3Ir}=6Ca^{n-3Ir};$$
$$n\ldots(n-2)(a-r)^{n-3Ir}=6Ca^{n-3Ir}-24Da^{n-4Ir}r;$$
$$n\ldots(n-2)(a-2r)^{n-3Ir}=6Ca^{n-3Ir}-48Da^{n-4Ir}r+120Ea^{n-5Ir}r;$$
$$n\ldots(n-2)(a-3r)^{n-3Ir}=6Ca^{n-3Ir}-72Da^{n-4Ir}r+360Ea^{n-5Ir}r$$
$$-720Fa^{n-6Ir}r^3;\text{ etc. etc. etc.}$$

59. Ainsi $C=\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2\,3}$. Répétant la même opération, on aura

$$n\ldots(n-3)\ldots\ldots a^{n-4Ir}=24Da^{n-4Ir};$$
$$n\ldots(n-3)(a-r)^{n-4Ir}=24Da^{n-4Ir}-120Ea^{n-5Ir}r;$$
$$n\ldots(n-3)(a-2r)^{n-4Ir}=24Da^{n-4Ir}-240Ea^{n-5Ir}r+720Fa^{n-6Ir}r^2;$$
$$n\ldots(n-3)(a-3r)^{n-4Ir}=24Da^{n-4Ir}-360Ea^{n-5Ir}r+2160Fa^{n-6Ir}r^2$$
$$-5040Ga^{n-7Ir}r^3;\text{ etc. etc. etc.}$$

60. Ici l'on voit encore que $D=\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}$. Nous croyons

avoir indiqué la route qui mène aux coëfficiens qui suivent; et qu'on trouvera parfaitement identiques avec ceux du binome de *Newton*. Comme on n'a supposé nulle part que l'exposant n est un nombre entier, on peut regarder la démonstration comme générale. Nous pouvons donc avancer, comme un des théorèmes les plus importans de l'analyse, que la faculté du binome peut être dévéloppée en une série composée de facultés de monomes; telle que $a^{nIr} + n a^{n-1 Ir} + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2 Ir} b^{2Ir} + \frac{n,n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3 Ir} b^{3Ir} +$ etc. etc.

61. Ce théorème est susceptible d'une infinité de modifications différentes. Nous donnerons d'abord celles qui dépendent de la position dont on peut affecter les quantités b, r, ainsi que l'exposant n, en les supposant négatifs ou positifs. Nous donnerons à ce dernier une forme fractionnaire, $\frac{m}{n}$. De plus nous diviserons généralement par $a^{m:n\,Ir}$, afin que le premier terme de la série se trouve réduit à l'unité. On parviendra aux huit théorèmes suivants:

Théor. I. $\frac{(A+B)^{m:n\,I-r}}{A^{m:n\,I-r}} = 1 + \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2I-n} B^{2Ir}}{1.2\,nn.A^{2I-r}} + etc.$

Theor. II. $\frac{(A-B)^{m:n\,I-r}}{A^{m:n\,I-r}} = 1 - \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2I-n} B^{2I-r}}{1.2\,nn.A^{2I-r}} - etc.$

Théor. III. $\frac{(A+B)^{m:n\,Ir}}{A^{m:n\,Ir}} = 1 + \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2I-n} B^{2I-r}}{1.2.nn\,A^{2Ir}} + etc.$

Théor. IV. $\frac{(A-B)^{m:n\,Ir}}{A^{m:n\,Ir}} = 1 - \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2I-n} B^{2Ir}}{1.2.nn\,A^{2Ir}} + etc.$

Théor. V. $\frac{(A+r)^{m:n\,Ir}}{(A+B+r)^{m:n\,Ir}} = 1 - \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2In} B^{2Ir}}{1.2\,nn.A^{2I-r}} - etc.$

Théor. VI. $\frac{(A+r)^{m:n\,Ir}}{(A-B+r)^{m:n\,Ir}} = 1 + \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2In} B^{2I-r}}{1.2\,nn\,A^{2I-r}} + etc.$

Théor. VII. $\frac{(A-r)^{m:n\,I-r}}{(A+B-r)^{m:n\,I-r}} = 1 - \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2In} B^{2I-r}}{1.2\,nn\,A^{2Ir}} - etc.$

Théor. VIII. $\frac{(A-r)^{m:n\,I-r}}{(A-B-r)^{m:n\,I-r}} = 1 + \frac{mB}{nA} + \frac{m^{2In} B^{2Ir}}{1.2\,nn\,A^{2Ir}} + etc.$

Après avoir exposé ces théorèmes en général, nous allons examiner quelques-uns des plus remarquables d'entre les cas particuliers.

THÉOREME.

62. *L'intégrale* $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$, *prise depuis* $t = 0$ *jusqu'à* t *infini, est égale à la faculté* $1^{m:n\,I}1$, *divisée par* m.

DEMONSTRATION.

63. Cette proposition ne renferme qu'un cas très-particulier de notre théorème VII. Divisant de part et d'autre l'équation de ce théorème par $A - r$, et faisant $r = n$, $A = m + n$, elle deviendra $\frac{m^{m:n\,I-n}}{m(B+m)^{m:I-n}} = \frac{1}{m} - \frac{B:n}{m+n} + \frac{(B:n)^{2I-1}}{1.2\,(m+2n)} - \frac{(B:n)^{3I-1}}{1.2.3\,(m+3n)} + \frac{(B:n)^{4I-1}}{1.2.3.4\,(m+4n)}$ — etc. La supposition de B infini fera passer les facultés de $B:n$ et de $B+m$ à l'état de puissances ; l'équation deviendra alors $\frac{m^{m:n\,I-n}}{m\,B^{m:n}} = \frac{1}{m} - \frac{B:n}{m+n} + \frac{BB:nn}{1.2\,(m+2n)} - \frac{B^3:n^3}{1.2.3\,(m+3n)} + \frac{B^4:n^4}{1.2.3.4\,(m+4n)}$ — etc. Ici, faisant $B = n\,t^n$, et multipliant de part et d'autre par t^m, on aura la série $\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m+n}}{m+n} + \frac{t^{m+2n}}{1.2\,(m+2n)} - \frac{t^{m+3n}}{1.2.3.\,(m+3n)}$ + etc. égale à $\frac{m^{m:n\,I-n}}{m\,n^{m:n}}$; expression absolument identique avec $\frac{(m:n)^{m:n\,I-1}}{m}$. Quant à la faculté $(m:n)^{m:n\,I-1}$, la remarque faite en 3. la réduit à $1^{m:n\,I}1$. D'un autre côté la série $\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m+1}}{m+n}$ + etc. n'est autre chose que le dévéloppement de l'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$. Donc, cette intégrale dans le cas de t infini, est égale à $1^{m:n\,I}1 : m$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRES.

64. L'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ est un nombre entièrement rationnel, toutes les fois que m est divisible par n. On aura $\int t^{hn-1} e^{-t^n} dt = \frac{1.2.3....h-1}{n}$; fraction rationnelle, si h est un nombre entier.

65. Les deux intégrales $\int t^{n-1} e^{-t^n} dt$, et $\int t^{2n-1} e^{-t^n} dt$, sont consamment égales entr'elles, quelque soit l'exposant n, et égales à $\frac{1}{n}$.

66.

66. L'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ revient à la quadrature du cercle, toutes les fois que $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$. On aura généralement $\int t^{m-1} e^{-t^{2m}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}$. Faisant ici $m = 1$, on en tire le résultat remarquable $\int e^{-tt} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. *Ainsi l'intégrale de $e^{-tt} dt$, prise depuis $t = 0$ jusqu'à t infini, est égale à la moitié de la racine quarrée du rapport du diamètre à la circonférence.*

67. La réduction de l'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ à la quadrature du cercle a encore lieu, lorsque $\frac{m}{n} = \frac{1}{2} + p$; p étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Par cette supposition, n prendra la forme $\frac{2m}{1+2p}$; et on aura généralement l'intégrale de $t^{m-1} e^{-t^n} dt$ égale à $\frac{1^{pI2}\sqrt{\pi}}{2^p n}$. Faisant $m = 1$, l'intégrale de $e^{-t^n} dt$ se trouvera généralement égale à $\frac{3^{pI2}\sqrt{\pi}}{2^{p+1}}$, toutes les fois que l'exposant n est de la forme $\frac{2}{1+2p}$.

68. L'intégrale $\int t^{hm-1} e^{-t^{hn}} dt$ est égale à l'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$, divisée par h. Ainsi chaque intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$, dont les exposants m, n, ont une valeur déterminée, servira à en trouver une infinité d'autres. Cela est trop simple pour avoir besoin d'exemples.

69. Étant donnée l'intégrale $\int e^{-t^n} dt$, on trouve celle de $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ par une règle assez facile, toutes les fois que $\frac{m-1}{n}$ est un nombre entier, positif ou négatif, tel que p. Car la première intégrale étant égale à $1^{1:nI1}$, l'autre à $1^{m:nI1} : m$, celle-ci sera donc égale à la première, multipliée par $\frac{1^{m:nI1}}{m.1^{1:nI1}}$. Or, la faculté $1^{m:nI1}$ ou $1^{\frac{1+m-1}{n}I1}$ pouvant être dévéloppée en $1^{1:nI1}$ $\left(\frac{1}{n}+1\right)^{pI1} = \left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}+2\right) \ldots\ldots \left(\frac{m}{n}-1\right)\frac{m}{n} 1^{1:nI1}$, la fraction $\frac{1^{m:nI1}}{m.1^{1:nI1}}$ deviendra $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}+1.\frac{1}{n}+2 \ldots \frac{m}{n}-1$. Ainsi l'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ sera égale à l'intégrale $\int e^{-t^n} dt$, multipliée par la faculté 1^{pIn}, et divisée par la puissance n^p.

70. Faisant l'application de ce théorème au cas de $n = 2$, on aura

$$\int t^2 e^{-tt} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4};$$

$$\int t^4 e^{-tt} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{8};$$

$$\int t^6 e^{-tt} dt = \frac{3.5}{16}\sqrt{\pi};$$

$$\int t^8 e^{-tt} dt = \frac{3.5.7}{32}\sqrt{\pi};$$

et en général $\int t^{2m} e^{-tt} dt = \frac{1.3.5\ldots.2m-1}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}.$

71. La même règle s'étend à l'intégrale de $t^{-m-1} e^{-t^n} dt$. Ici m devenant négatif, on aura $p = -\frac{m+1}{n}$; et faisant $\frac{m+1}{n} = q$, il faudra mettre dans la formule précédente $-q$ à la place de p. La faculté $1 - q\,I\,n$ passant au dénominateur, elle y deviendra $(1-n)\,q\,I - n$, ce qui se réduit à $(1-qn)\,q\,I\,n = (-m)\,q\,I\,n$ ou enfin à $\pm m\,q\,I - n$, en employant les différences positives. L'intégrale proposée sera donc égale à celle de $e^{-t^n} dt$, multipliée par $\pm nq$, et divisée par $m\,q\,I - n$; le signe *plus* se rapportant aux exposants *pairs*, le signe *moins* aux exposants *impairs*.

72. Passant encore au cas de $n = 2$, on trouvera

$$\int t^{-2} e^{-tt} dt = -\sqrt{\pi};$$

$$\int t^{-4} e^{-tt} dt = +\tfrac{2}{3}\sqrt{\pi};$$

$$\int t^{-6} e^{-tt} dt = -\frac{4\sqrt{\pi}}{3.5};$$

$$\int t^{-8} e^{-tt} dt = +\frac{8\sqrt{\pi}}{3.5.7};$$

etc. etc. etc.

73. L'intégrale $\int t^{m-1} e^{-1:t^n} dt$ est essentiellement la même que $\int t^{-m-1} e^{-t^n} dt$; seulement elle est affectée d'un signe contraire. Il en est de même des deux intégrales $\int t^{m-1} e^{-1:t^n} dt$ et $\int t^{-m-1} e^{-t^n} dt$. Mais chacune des deux dernières diffère essentiellement de $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$.

Pour en sentir la différence, supposons $m = 1$, et examinons l'intégrale $\int e^{-1:t^n} dt$. Elle sera égale à la faculté $1^{-1:n\,I\,1}$. Cette faculté passe au dénominateur ; elle y devient $0^{1:n\,I-1}$. Il ne faut pas croire que cette dernière faculté soit égale à *zéro* ; elle ne s'évanouit que dans le cas d'un exposant entier ; pour un exposant fractionnaire elle se réduit à $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1:n\,I\,1}$; ce qui revient à $(n-1)^{1:n\,I\,n}$, divisé par $n^{1:n}$. On aura donc $1^{-1:n\,I\,1}$, de même que l'intégrale qui lui équivaut $\int e^{-1:t^n} dt$, égale à $n^{1:n}$, divisé par la faculté $(n-1)^{1:n\,I\,n}$.

74. Appliquons encore ce théorème au cas $n = 2$, et cherchons la valeur de l'intégrale $\int e^{-1:tt} dt$. Elle se trouvera égale à $\sqrt{2}$, divisé par la faculté $1^{1:2\,I\,2}$. Nous avons déjà évalué cette faculté ; nous l'avons trouvé $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi l'intégrale $\int e^{-1:tt} dt$ deviendra égale à $\sqrt{\pi}$; et telle doit être aussi la valeur de la faculté $1^{-1:2\,I\,1}$. Elle l'est en effet ; car elle se réduit à $1^{\frac{1}{2}-1\,I\,1}$; dont le dévéloppement donne $1^{1:2\,I\,1}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1\,I\,1}$; ce qui revient à $1^{1:2\,I\,1}$, divisé par $\left(\frac{1}{2}\right)^{1\,I-1}$, ou bien, multiplié par 2. On aura donc, comme ci-dessus, $1^{-1:2\,I\,1} = \sqrt{\pi}$.

REMARQUE.

75. Dans le peu d'exemples allégués nous nous sommes bornés aux cas où l'intégrale $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$ étoit un nombre rationnel, et à ceux où cette même intégrale se réduisoit a la quadrature du cercle. Nous répétons ce que nous avons dit en 8. C'est une des opérations les plus simples de l'analyse, d'évaluer numériquement une faculté quelconque, quelque exposant qu'elle puisse avoir, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, rationnel ou irrationnel. Un problème réduit une fois à l'évaluation numérique de quelque faculté, doit être regardé comme aussi facilement et aussi complettement résolu, que s'il dépendoit de l'extraction de quelque racine cubique. C'est ce que nous verrons dans la suite de cet ouvrage. Ayant réduit ainsi les intégrales de $t^{m-1} e^{-t^n} dt$ dans le cas de t infini, nous passerons à un autre genre de fonctions transcendantes, qui se réduisent également à l'évaluation des facultés.

THÉOREME.

76. *L'intégrale de* $x^{B-1}(1-x^r)^n dx$, *prise depuis* $x=o$ *jusqu'à* $x=1$, *est égale à la faculté* r^{nIr}, *divisée par la faculté* B^{n+1Ir}.

DÉMONSTRATION.

77. Prenons l'équation du théorème IV: divisons la de part et d'autre par $A-r$; et faisons $A=B+r$; mettons de plus n à la place de $\frac{m}{n}$; nous aurons $\frac{r^{nIr}}{B^{n+1Ir}}=\frac{1}{B}-\frac{n}{B+r}+\frac{n^{2I-1}}{1.2(B+2r)}-\frac{n^{3I-1}}{1.2.3(B+3r)}+$ etc. Cette dernière suite n'est en effet que le dévéloppement de l'intégrale $\int x^{B-1}(1-x^r)^n dx$, prise depuis $x=o$ jusqu'à $x=1$. Donc etc. etc.

PROBLEME.

78. *Déterminer la valeur de l'intégrale de* $x^{B-1}(1-xx)^{n-(1:2)}$.

SOLUTION.

79. Ayant ici $r=2$, et $n-\frac{1}{2}$ au lieu de n, la formule donnera immédiatement $\frac{2^{n-(1:2)I2}}{B^{n+(1:2)I2}}$ pour valeur de l'intégrale. La faculté du numérateur se réduit à $\frac{1^{nI2}}{1^{1:2I2}}=\frac{1^{nI2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$; celle du dénominateur devient $B^{1:2I2}(B+1)^{nI2}$; ainsi l'intégrale prendra la forme $\frac{1^{nI2}\sqrt{\pi}}{(B+1)^{nI2}B^{1:2I2}\sqrt{2}}$. Comme n est un nombre entier, il ne reste que $B^{1:2I2}$ qu'il faudra réduire. La proposition 26 nous apprend à distinguer les deux cas, de B impair, et de B pair. Pour le premier, l'intégrale $\int x^{2h}(1-xx)^{n-(1:2)}dx$ devient égale à $\frac{1^{hI2}\,1^{nI2}}{2^{hI2}(2+2h)^{nI2}}.\frac{\pi}{2}$. Dans l'autre, on aura $\int x^{2h+1}(1-xx)^{n-(1:2)}dx$ égal à $\frac{2^{hI2}\,1^{nI2}}{3^{hI2}(3+2h)^{nI2}}$.

PROBLEME.

80. *Déterminer la valeur de l'intégrale de* $\frac{x^{B-1}dx}{(1-xx)^{n+(1:2)}}$.

SOLUTION.

81. Il n'y a qu'à supposer n négatif. Il faudra encore distinguer les deux cas de $B-1$ pair, et de $B-1$ impair. On trouvera pour la solution du

premier, $\frac{\int x^{2h}\,dx}{(1-xx)^{n+(1:2)}} = \pm \frac{1^{hI2}\,(2h-2n+2)^{nI2}}{2^{hI2}\;1^{nI2}}.\frac{\pi}{2}$. La solution de l'autre sera renfermée dans la formule $\frac{\int x^{2h+1}\,dx}{(1-xx)^{n+(1:2)}} = \pm \frac{2^{hI2}\,(2h-2n+3)^{nI2}}{3^{hI2}\;1^{nI2}}$. Le signe *plus* a lieu, lorsque n est un nombre pair; le signe *minus* répond à n impair.

PROBLEME.

82. *Essayons encore notre formule générale, sur l'intégrale de* $\frac{x^{B-1}\,dx}{(1-x^{1:n})^{Bn}}$.

SOLUTION.

83. On tirera de la formule donnée en 76, après avoir multiplié son numérateur et son dénominateur par n^n, *premièrement*, $\frac{1^{-BnI1}}{B\,(Bn+1)^{-BnI1}}$; ensuite, faisant passer les facultés du numérateur au dénominateur, et réciproquement, $\frac{(Bn)^{BnI-1}}{B.\,o^{BnI-1}}$; enfin, substituant une différence positive à la négative, $\frac{1^{BnI1}}{B\,(1-Bn)^{BnI1}}$. On sait par le théorème énoncé en 20, que $\frac{1^{BnI1}}{(1-Bn)^{BnI1}}$ est équivalent à $\frac{Ang.\;Bn\pi}{Sin.\;Bn\pi}$. On en conclurra que l'intégrale proposée $\int\frac{x^{B-1}\,dx}{(1-x^{1:n})^{Bn}}$ est égale à $\frac{n\pi}{Sin.\;Bn\pi}$. On en tirera comme cas particulier, l'égalité suivante : $\int\frac{dx}{(1-x^{1:n})^{n}} = \frac{n\pi}{Sin.\;n\pi}$.

REMARQUE.

84. C'est à ce très-petit nombre de propositions fondamentales, que se réduisent les deux immenses chapitres de *Euler*, *de valoribus integralium quos certis tantum casibus recipiunt*, et, *de evolutione integralium per producta infinita.* Il s'est donné la peine de rassembler un très-grand nombre de théorèmes, concernant ces produites et ces intégrales ; et cependant il s'en faut de beaucoup qu'il ait épuisé ce que renferme la seule formule que nous avons énoncé en 76. On pourroit augmenter à volonté le nombre de ces théorèmes; mais il n'en vaut pas la peine. Au reste, pressé par l'objet principal de cet ouvrage, j'avertis que je terminerai ici la première partie de ce chapitre, concernant l'usage qu'on peut faire des facultés à exposant fractionnaire,

et la nécessité de les introduire, quoiqu'il s'en faille de beaucoup cependant, que nous l'ayons épuisé. Je me reserve de dévélopper cette matière dans un autre ouvrage, avec tout le détail dû à la nouveauté du sujet, et à son importance dans les applications de l'analyse; et je passerai à la seconde partie, ayant pour objet l'évaluation d'une faculté quelconque proposée par des séries convergentes à volonté.

85. Étant donnée la suite des nombres naturels, depuis 1. 2. 3.... jusqu'à m *inclusivement*, je déclare que je désignerai dorénavant

par $mJ1$, la somme de ces nombres;
par $mJ2$, la somme de leurs produits de *deux à deux*;
par $mJ3$, la somme de leurs produits de *trois à trois;*
par $mJ4$, la somme de leurs produits de *quatre à quatre;*
et généralement:
par mJn, la somme de leurs produits de n à n.

86. Conformément à cette notation, la faculté a^{mIr} pourra être réprésentée par la série $a^m + mJ1$, $a^{m-1}r + mJ2$, $a^{m-2}r^2 + mJ3$, $a^{m-3}r^3 + etc.$ Si cette faculté a pour exposant un nombre entier et positif quelconque, cette série sera finie, ayant pour dernier terme $mJ(m-1)$, ar^{m-1}. Dans tous les autres cas, la série sera infinie; mais la méthode que nous enseignerons, de la rendre convergente à volonté dans tous les cas, la rendra tout aussi facile à manier, que si l'exposant étoit entier et positif.

87. Les coëfficiens mJm, $mJ(m+1)$, $mJ(m+2)$ *etc.* seront tous égaux à zéro; et en général on aura $mJn = o$, aussitôt que $n-m$ sera, ou égale à zéro, ou égale à un nombre entier quelconque. Il n'en est pas de même de leurs rapports différentiels; les fractions $\frac{d.mJm}{dm}$, $\frac{d.mJ(m+1)}{dm}$, $\frac{d.mJ(m+2)}{dm}$ *etc.* auront des valeurs très-assignables, et que nous enseignerons dans la suite de ce chapitre. Quant à mJo, ce coëfficient sera égal à l'unité.

88. De ce que $a^{m+1Ir} = (a+mr)\,a^{mIr}$, il s'ensuit que

$$(m+1)\,J1 = mJ1 + m;$$
$$(m+1)\,J2 = mJ2 + m,\ mJ1;$$
$$(m+1)\,J3 = mJ3 + m,\ mJ2;$$

et en général.. $(m+1)\,Jn = mJn + m,\ mJ(n-1)$.

89. Pour abréger mes formules, je supposerai la base de la faculté, de même que sa différence égale à l'unité. On aura donc $1^{mI1} = 1 + mJ1 + mJ2 + mJ3 + etc.$ Le lecteur y suppléera facilement, en remplaçant

l'unité, facteur commun de tous les termes, par les puissances convenables de a et de r. Le coëfficient général $m J n$ appartiendra toujours à $a^{m-n} r^{n}$. Et ainsi des autres.

90. Comme il est très-nécessaire, de connoître la suite de ces coëfficiens au moins pour les dix premières facultés, nous les mettrons ici;

$1^{1} I^{1} = 1;$

$1^{2} I^{1} = 1 + 1;$

$1^{3} I^{1} = 1 + 3 + 2;$

$1^{4} I^{1} = 1 + 6 + 11 + 6;$

$1^{5} I^{1} = 1 + 10 + 35 + 50 + 24;$

$1^{6} I^{1} = 1 + 15 + 85 + 225 + 274 + 120;$

$1^{7} I^{1} = 1 + 21 + 175 + 735 + 1624 + 1764 + 720;$

$1^{8} I^{1} = 1 + 28 + 322 + 1960 + 6769 + 13132 + 13068 + 5040;$

$1^{9} I^{1} = 1 + 36 + 546 + 4536 + 22449 + 67284 + 118124 + 109584 + 40320;$

$1^{10} I^{1} = 1 + 45 + 870 + 9450 + 63273 + 269325 + 723680 + 1172700 + 1026576 + 362880.$

PROBLEME.

91. *Etant donné l'exposant de la faculté, m, et l'exposant du terme de la série n, déterminer le coëfficient $m J n$, indépendamment des coëfficiens précédents $m J (n-1)$, $m J (n-2)$ etc.* Pour résoudre ce problème, il faut recourir à l'analyse combinatoire; elle nous en fournit deux solutions différentes.

PREMIERE SOLUTION.

92. Prenez l'équation indéterminée $q + 2r + 3s + 4t + etc. = n$. Rassemblez en toutes les solutions qu'elle admet en nombres entiers et positifs. Ayant désigné $n + q + r + s + t + etc.$ par λ, calculez pour chacune de ces solutions la valeur du produit $\frac{m^{\lambda} I^{-1}}{1^{q} I^{1}\, 1^{r} I^{1}\, 1^{s} I^{1}\, etc.\, 2^{q}\, 3^{r}\, 4^{s}\, etc.}$. La somme de tous ces produits sera égale au coëfficient demandé $m J n$.

93. *On demande le coëfficient du terme r^{5} de la faculté $1^{8} I^{r}$, ou $8 J 5$.* Je prends l'équation $q + 2r + 3s + 4t + 5u = 5$, qui me fournit sept solutions différentes, savoir:

q	r	s	t	u	λ
5	0	0	0	0	10
3	1	0	0	0	9

2 „ 0 „ 1 „ 0 „ 0 ... 8
1 „ 2 „ 0 „ 0 „ 0 ... 8
1 „ 0 „ 0 „ 1 „ 0 ... 7
0 „ 1 „ 1 „ 0 „ 0 ... 7
0 „ 0 „ 0 „ 0 „ 1 ... 6.

Les deux premiers produits s'évanouiront, parce que pour ces deux produits λ est plus grand que m. La somme des cinq autres sera 8. 7. 6. 5. 4. 3 $\left(\frac{2}{2.4.4}+\frac{2}{2.2.9}+\frac{2}{2.5}+\frac{2}{3.4}+\frac{1}{6}\right)$. Cela donne pour coëfficient demandé 13132 ; et tel est précisément celui de la table.

SECONDE SOLUTION.

94. Ayant rassemblé toutes les différentes combinaisons des lettres q, r, s, t, u *etc.* en nombres entiers et positifs, qui épuisent l'équation indéterminée $q+2r+3s+4t+5u+etc.=n$, on calculera pour chacune d'elles le produit $\frac{(m-n)^{\lambda}\,1^{1}}{1^{q}\,1^{q}\,1^{r}\,1^{r}\,1^{s}\,1^{s}\,etc.\,2^{q}\,6^{r}\,24^{s}\,120^{t}\,etc.}$; la suite 2:6:24:120 etc. étant connue pour être la série hypergéométrique des nombres naturels. On affectera du signe *plus* les produits pour lesquels λ est pair; on donnera le signe *moins* à ceux qui ont un λ impair; l'excès des premiers sur les seconds sera égal au coëfficient demandé.

95. *Proposons le même exemple, savoir* 8 *J* 5 ; *ayant* $m=8$, $n=5$. Les sept produits, dont aucun ne s'évanouira alors, auront tous pour facteur commun la faculté 3. 4. 5. 6. 7. 8 ; elle se trouvera multipliée par la somme des fractions $\frac{9.10.11.12}{2.3.4\ 5.32}-\frac{9.10.11}{6.6.8}+\frac{9.10}{8.24}+\frac{9.10}{4.36}-\frac{9}{2.120}-\frac{9}{6.24}+\frac{1}{720}$; ce qui donne pour coëfficient demandé 13132, comme auparavant.

REMARQUE.

96. J'ai proposé ces deux solutions en forme de lemme; je serai obligé d'en agir de même avec la plus grande partie des théorèmes qui suivront, pour ne pas grossir le volume mal-à-propos, et me détourner de l'objet principal que je me propose. J'ai donné la démonstration de l'un dans un ouvrage publié par *Charles Frédéric Hindenburg*, professeur de physique à l'université de Leipsic, ayant pour titre : *Le théorème polynomial, le plus important de toute l'analyse, etc. etc.* La démonstration de l'autre n'est encore publiée nulle part ; elle existe dans les mémoires que j'ai envoyés à ce géomètre, et qu'il

aura

aura soin de faire imprimer dans ses *archives mathématiques*. Il est remarquable que les deux solutions, quoique très-différentes en apparence, donnent pourtant le même résultat. Nous en verrons bientôt la raison.

DÉFINITION.

97. Je donnerai le nom *d'aggrégat combinatoire*, ou simplement *d'aggrégat*, à cette espèce particulière d'intégrales, qui dépendent de la solution complette de quelque équation indéterminée, et qu'il me semble très-nécessaire d'introduire dans l'analyse. Un *aggrégat* quelconque suppose, *premièrement*, *une* et quelques fois *deux* équations indéterminées, à un nombre indéfini d'inconnues; qui ordinairement est du premier dégré, et qui ne peut admettre qu'un nombre déterminé de solutions différentes, en valeurs entières et positives. *Secondement*, une quantité ordinairement algébrique, qui est fonction de toutes ces inconnues à la fois. Substituant dans cette fonction, à la place des inconnues qu'elle renferme, les différens nombres entiers et positifs que la solution complette de l'équation indéterminée a fait découvrir, et ajoutant en une seule somme les valeurs particulières que cette fonction en reçoit, on aura ce que j'appelle *aggrégat combinatoire*. Je lui consacrerai particulièrement la lettre majuscule latine A. Cela étant, l'on comprend ce que veut dire l'énoncé suivant.

THÉOREME.

98. *L'équation indéterminée étant* $q + 2r + 3s + 4t + etc. = n$, *et* λ *désignant la somme* $n + q + r + s + t + etc.$, *on aura*

$$mJn = A \frac{m^{\lambda I - 1}}{1^q I_1 \, 1^r I_1 \, 1^s I_1 \, etc. \; 2^q 3^r 4^s \, etc.};$$

$$mJn = A \pm \frac{(m-n)^{\lambda I_1}}{1^q I_1 \, 1^r I_1 \, 1^s I_1 \, etc. \; 2^q 6^r 24^s \, etc.}.$$

THÉOREME.

99. *Le nombre de solutions différentes en valeurs entières et positives, qu'admet l'équation indéterminée* $q + 2r + 3s + 4t + etc. = n$, *est égal au coëfficient du terme* x^n *dans la série, qui résulte de la division de l'unité par le produit infini* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$ *etc.* Cette série est égale à $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 231x^{16} + 297x^{17} + 385x^{18} + 490x^{19} + 627x^{20} + 792x^{21} + 1002x^{22} + 1250x^{23} + 1570x^{24} + etc.$

100. Ce théorème nous oblige d'abréger de beaucoup les deux solutions que nous venons d'enseigner, à moins qu'on ne veuille calculer 42 termes différens, pour trouver le coëfficient $m\,J\,10$; et jusqu'à 1570 termes, pour trouver le coëfficient $m\,J\,24$, dans quelque cas particulier. Ce seroit le travail d'une année au moins. Nous y parviendrons de la manière suivante.

101. On voit par l'équation $q + 2r + 3s + 4t + etc. = n$, que l'exposant λ, égal à $n + q + r + s + t + etc.$ doit être nécessairement compris entre les limites $n + 1$ et $2n$. Ainsi la faculté $m^{\lambda I - 1}$, qui sert de numérateur au terme général du premier aggrégat, doit nécessairement se trouver entre les limites $m^{n+1\,I-1}$ et $m^{2n\,I-1}$. De même la faculté $(m-n)^{\lambda I i}$ qui sert de numérateur au terme général du second aggrégat, doit se trouver entre les limites $(m-n)^{n+1\,I\,i}$ et $(m-n)^{2n\,I\,i}$. D'où il faut conclurre, que le coëfficient demandé $m\,J\,n$ doit être égal à $N'.\,m^{n+1\,I-1} + N''.\,m^{n+2\,I-1} + N'''.\,m^{n+3\,I-1} + \ldots\ldots + N^{N}.\,m^{2n\,I-1}$, conformément au premier aggrégat; et que d'après le second, ce même coëfficient doit être égal à $N'.\,(m-n)^{n+1\,I\,i} - N''.\,(m-n)^{n+2\,I\,i} + N'''.\,(m-n)^{n+3\,I\,i} - \ldots\ldots + N^{N}\,(m-n)^{2n\,I\,i}$: les coëfficiens des deux séries N', N'', N''' *etc.* ne renfermant plus l'exposant de la faculté m, et se trouvant fonctions de n seul.

102. On peut donner au coëfficient général $m\,J\,n$ les deux formes suivantes. On aura, conformément au premier aggrégat, $m\,J\,n = \frac{m.\,m-1\ldots m-n}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+1}N1 + \frac{m.\,m-1\ldots m-n-1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+2}N2 + \frac{m.\,m-1\ldots m-n-2}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+3}N3 +$ etc. Et conformément au second il y aura $\pm m\,J\,n = \frac{m-n.\,m-n+1\ldots m}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+1}N1 - \frac{m-n.\,m-n+1\ldots m+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+2}N2 + \frac{m-n.\,m-n+1\ldots m+2}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n+3}N3 -$ *etc.* Ici les coëfficients partiels $N1$, $N2$, $N3$ *etc.* seront des nombres indépendants de l'exposant m, absolus et *entiers*, tandis que les coëfficients N', N'', N''' *etc.* eussent été fractionnaires. La loi que suivent ces nouveaux coëfficients, est extrêmement simple; on en jugera par les formules suivantes.

103. La forme du premier de nos deux aggrégats combinatoires donne

$$m\,J\,1 = \frac{m.\,m-1}{1.\,2}A1;$$

$$m\,J\,2 = \frac{m\ldots m-2}{1.\,2.\,3}B1 + \frac{m\ldots m-3}{1.\,2.\,3.\,4}B2;$$

$$m\,J\,3 = \frac{m\ldots m-3}{1.\,2.\,3.\,4}C1 + \frac{m\ldots m-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}C2 + \frac{m\ldots m-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}C3;$$

etc. etc. et on aura pour la détermination des coëfficients $A1$; $B1$, $B2$; $C1$, $C2$, $C3$ *etc.* les équations très-simples :

$$A1 = 1;$$

$$B1 = 2A1 = 2;$$
$$B2 = 3A1 = 3;$$

$$C1 = 3B1 = 6;$$
$$C2 = 4(B1 + B2) = 20;$$
$$C3 = 5B2 = 15;$$

$$D1 = 4C1 = 24;$$
$$D2 = 5(C1 + C2) = 130;$$
$$D3 = 6(C2 + C3) = 210;$$
$$D4 = 7(C3) = 105;$$

$$E1 = 5D1 = 120;$$
$$E2 = 6(D1 + D2) = 924;$$
$$E3 = 7(D2 + D3) = 2380;$$
$$E4 = 8(D3 + D4) = 2520;$$
$$E5 = 9D4 = 945;$$

$$F1 = 6E1 = 720;$$
$$F2 = 7(E1 + E2) = 7308;$$
$$F3 = 8(E2 + E3) = 26432;$$
$$F4 = 9(E3 + E4) = 44100;$$
$$F5 = 10(E4 + E5) = 34650;$$
$$F6 = 11E5 = 10395;$$

$$G1 = 7F1 = 5040;$$
$$G2 = 8(F1 + F2) = 64224;$$
$$G3 = 9(F2 + F3) = 303660;$$
$$G4 = 10(F3 + F4) = 705320;$$
$$G5 = 11(F4 + F5) = 866256;$$
$$G6 = 12(F5 + F6) = 540540;$$
$$G7 = 13F6 = 135135;$$

104. La forme du second des deux aggrégats combinatoires donne

$$+mJ1 = \frac{m-1.m}{1.2.}A1;$$

$$-mJ2 = \frac{m-2...m}{1.2.3}B1 - \frac{m-2....m+1}{1.2.3.4}B2;$$

$$+mJ3 = \frac{m-3...m}{1.2.3.4}C1 - \frac{m-3....m+1}{1.2.3.4.5}C2 + \frac{m-3....m+2}{1.2.3.4.5.6}C3;$$

$$-mJ4 = \frac{m-4...m}{1.2.3.4.5}D1 - \frac{m-4....m+1}{1.2.3.4.5.6}D2 + \frac{m-4....m+2}{1.2.3.4.5.6.7}D3 - \frac{m-4....m+3}{1.2.3.4.5.6.7.8}D4;$$

etc. etc. Les coëfficients $A1$; $B1$, $B2$; $C1$, $C2$, $C3$ *etc.* suivront encore la loi très-simple qui suit:

$$A1 = 1;$$

$$B1 = A1 = 1;$$
$$B2 = 3A1 = 3;$$

$$C1 = B1 = 1;$$
$$C2 = 4B1 + 2B2 = 10;$$
$$C3 = 5B2 = 15;$$

$$D1 = C1 = 1;$$
$$D2 = 5C1 + 2C2 = 25;$$
$$D3 = 6C2 + 3C3 = 105;$$
$$D4 = 7C3 = 105;$$

$$E1 = D1 = 1;$$
$$E2 = 6D1 + 2D2 = 56;$$
$$E3 = 7D2 + 3D3 = 490;$$
$$E4 = 8D3 + 4D4 = 1260;$$
$$E5 = 9D4 = 945;$$

$$F1 = E1 = 1;$$
$$F2 = 7E1 + 2E2 = 119;$$
$$F3 = 8E2 + 3E3 = 1918;$$
$$F4 = 9E3 + 4E4 = 9450;$$
$$F5 = 10E4 + 5E5 = 17325;$$
$$F6 = 11E5 + \quad = 10395;$$

$$
\begin{aligned}
G1 &= & F1 &= 1;\\
G2 &= 8\,F1 + & 2\,F2 &= 246;\\
G3 &= 9\,F2 + & 3\,F3 &= 6825;\\
G4 &= 10\,F3 + & 4\,F4 &= 56980;\\
G5 &= 11\,F4 + & 4\,F5 &= 190575;\\
G6 &= 12\,F5 + & 6\,F6 &= 270270;\\
G7 &= 13\,F6 & &= 135135.
\end{aligned}
$$

105. Venons aux facultés à exposant négatif, 1^{-mIr}. Ici nous aurons à faire à des coëfficiens tels que $(-m)\,J1$, $(-m)\,J2$, $(-m)\,J3$ *etc.*; on aura donc $1^{-mIr} = 1 + (-m)\,J1,\ r + (-m)\,J2,\ r^2 + (-m)\,J3,\ r^3 + etc.$ La parenthèse étoit inutile dans l'exposant de la faculté; elle devient nécessaire dans le coëfficient, la raison en est palpable. Les corollaires donnés en 88, prennent à présent la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
(-m)\,J1 &= (-m+1)\,J1 + m;\\
(-m)\,J2 &= (-m+1)\,J2 + m,\ (-m)\,J1;\\
(-m)\,J3 &= (-m+1)\,J3 + m,\ (-m)\,J2;
\end{aligned}
$$

et généralement $(-m)\,Jn = (-m+1)\,Jn + m,\ (-m)\,J(n-1)$.

106. Moyennant cette formule on a dressé la liste des dix premières facultés à exposant négatif, que nous allons transcrire:

$$
\begin{aligned}
1^{-1Ir} &= 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + etc.\\
1^{-2Ir} &= 1 + 3\,r + 7\,r^2 + 15\,r^3 + 31\,r^4 + 63\,r^5 + 127\,r^6 + 255\,r^7 + 511\,r^8 + etc.\\
1^{-3Ir} &= 1 + 6\,r + 25\,r^2 + 90\,r^3 + 301\,r^4 + 966\,r^5 + 3025\,r^6 + 9330\,r^7 + etc.\\
1^{-4Ir} &= 1 + 10\,r + 65\,r^2 + 350\,r^3 + 1701\,r^4 + 7770\,r^5 + 34105\,r^6 + 145750\,r^7 + etc.\\
1^{-5Ir} &= 1 + 15\,r + 140\,r^2 + 1050\,r^3 + 6951\,r^4 + 42525\,r^5 + 246730\,r^6 + etc.\\
1^{-6Ir} &= 1 + 21\,r + 266\,r^2 + 2646\,r^3 + 22827\,r^4 + 179487\,r^5 + 1323652\,r^6 + etc.\\
1^{-7Ir} &= 1 + 28\,r + 462\,r^2 + 5880\,r^3 + 63987\,r^4 + 627396\,r^5 + 5715424\,r^6 + etc.\\
1^{-8Ir} &= 1 + 36\,r + 750\,r^2 + 11880\,r^3 + 159027\,r^4 + 1899612\,r^5 + 20912320\,r^6 + etc.\\
1^{-9Ir} &= 1 + 45\,r + 1155\,r^2 + 22275\,r^3 + 359502\,r^4 + 5135130\,r^5 + etc.\\
1^{-10Ir} &= 1 + 55\,r + 1705\,r^2 + 39325\,r^3 + 752752\,r^4 + 12662650\,r^5 + etc.
\end{aligned}
$$

107. On voit bien par cette table, que les coëfficiens des facultés à exposant entier et négatif, ne sont autre chose que les différences premières, secondes, troisièmes, quatrièmes etc. des puissances des nombres naturels. Le problème suivant nous en dira la raison.

PROBLEME.

108. *La faculté à exposant négatif*, 1^{-mIr}, *qui se réduit par la division à* $\frac{1}{(1-r)^{mI-r}}$, *et qui par conséquent est identique avec* 1, *divisé par* $(1-mr)(1-mr+r)(1-mr+2r)\ldots\ldots(1-r)$ *devant être décomposée en fractions simples, telles que* $\frac{A}{1-mr}+\frac{B}{1-m+r}+\frac{C}{1-mr+2r}+\ldots+\frac{M}{1-r}$, *on demande la loi des numérateurs* A, B, C *etc.*

SOLUTION.

109. En suivant les principes démontrés depuis longtems, on trouvera

$$1^{m-1Ir}\quad A=+m^{m-1};$$

$$1^{m-1Ir}\quad B=-\frac{m-1}{1}(m-1)^{m-1};$$

$$1^{m-1Ir}\quad C=+\frac{m-1.m-2}{1.\ 2}(m-2)^{m-1};$$

$$1^{m-1Ir}\quad D=-\frac{m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3}(m-3)^{m-1};$$

et pour dernier terme 1^{m-1Ir} $M=1$.

110. Le coëfficient que nous cherchons $(-m)\,Jn$ n'étant autre chose que le coëfficient de r^n dans le développement de la faculté 1^{-mIr}, on aura donc $(-m)\,Jn$ égal à la série $m^{m-1+n}-\frac{m-1}{1}(m-1)^{m-1+n}+\frac{m-1.m-2}{1.\ 2}(m-2)^{m-1+n}-\frac{m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3}(m-3)^{m-1+n}$ etc. divisée par 1^{m-1Ir} ou $1.\ 2.\ 3\ldots.m-1$.

Enfin, cette série n'étant évidemment autre chose que $\Delta^{m-1}\ m^{m-1+n}$, on parviendra au théorème suivant : *Le coëfficient général* $(-m)\,Jn$ *est égal à* $\Delta^{m-1}\ m^{m-1+n}$, *divisé par* $1.\ 2.\ 3\ldots.m-1$ *ou* 1^{m-1Ir}. Voyons les cas particuliers :

$$(-1)\,In=1;$$

$$(-2)\,In=\Delta 2^{n+1};$$

$$(-3)\,In=\Delta\Delta 3^{n+1}:2;\ \text{etc. etc.}$$

111. Je dois avertir ici que sous Δy je n'entends pas, comme on fait ordinairement, l'excès de la fonction suivante y' sur y; mais l'excès de la fonction même y sur celle qui précède immédiatement $'y$. J'aurai donc

$$\Delta y = y - {}'y;$$
$$\Delta.\Delta y = y - 2.{}'y + {}''y;$$
$$\Delta^3 y = y - 3.{}'y + 3.{}''y - {}'''y;$$

et pour les ordres négatifs, $\Delta^{-1} y = y + {}'y + {}''y + {}'''y + etc. = \Sigma y;$

$$\Delta^{-2} y = y + 2.{}'y + 3.{}''y + 4.{}'''y + etc. = \Sigma^2 y;$$
$$\Delta^{-3} y = y + 3.{}'y + 6.{}''y + 10.{}'''y + etc. = \Sigma^3 y;$$

etc. etc. Il résulte de cette notation l'avantage réel, que les sommes de tous les ordres, telles que Σy, $\Sigma^2 y$, $\Sigma^3 y$ *etc.* se termineront constamment dans mes formules au terme même y, qui est supposé le dernier.

112. Au reste, les coëfficiens $(-m)\,Jn$, pourront encore être regardés comme aggrégats combinatoires, de même que $m\,Jn$, avec les modifications que la supposition d'un exposant négatif entraine nécessairement. On aura

$$(-m)\,Jn = A \pm \frac{m^{\lambda I_1}}{1^{qI_1}\,1^{rI_1}\,1^{sI_1}\,etc.\;2^q\,3^r\,4^s\,etc.};$$

$$\text{et } (-m)\,Jn = A + \frac{(m+n)^{\lambda I - 1}}{1^{qI_1}\,1^{rI_1}\,1^{sI_1}\,etc.\;2^q\,6^r\,24^s\,etc.};$$

l'équation indéterminée étant toujours $q + 2r + 3s + etc. = n$, et λ désignant encore la somme $n + q + r + s + t + etc.$

113. Quant aux deux séries rapportées en 101, et dont il faut se servir toutes les fois qu'il est question de déterminer le coëfficient $(-m)\,Jn$, indépendamment des termes précédens; elles prendront, dans le cas d'un m négatif, la forme suivante. La première deviendra: $\pm(-m)\,Jn = N'.m^{n+1\,I_1} - N''.m^{n+2\,I_1} + N'''.m^{n+3\,I_1} - etc.$ cette série regarde les coëfficiens partiels donnés en 103. L'autre donnera $(-m)\,Jn = N'.(m+n)^{n+1\,I-1} + N''.(m+n)^{n+2\,I-1} + N'''.(m+n)^{n+3\,I-1} + etc.$; et dans le calcul de cette série il faut employer les valeurs des coëfficiens, calculées en 104.

114. *Supposant* $m = 10$, *on demande le coëfficient* $(-m)\,J6$. Les coëfficiens de 103 donnent 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16, multiplié par la somme des

fractions $-\frac{1}{7}+\frac{29.17}{2^5 5}-\frac{59.17.18}{2.3^4 5}+\frac{7.17.18.19}{2^6 3^2}-\frac{17.18.19.20}{2.3.4.6.8}+\frac{17.18.19.20.21}{2.4.6.8.10.12}$.
Par la table de 104 on aura ce même coëfficient égal à 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10, multiplié par la somme des fractions $\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{9.17}{2^7 3^2 5}+\frac{9.8.17}{2^6 3^4 5}+\frac{9.8.7.}{2^7 3}+\frac{9.8.7.6}{6.2.4.6.8}+\frac{9.8.7.6.5}{2.4.6.8.10.12}$. L'une et l'autre des deux formules donne par un calcul qui n'est pas trop long, 193754990 pour le coëfficient demandé; précisément tel qu'il se trouve dans la table de 106.

LEMME I.

115. Le coëfficient du terme $A^p B^q C^r D^f$ *etc.* de la puissance indéterminée d'infinitinome $(A+B+C+D+etc.)^m$ est égal à $\frac{1^{mI1}}{1^{pI1}\,1^{qI1}\,1^{rI1}\,1^{fI1}\,etc.}$.

Ou bien, en divisant de part et d'autre par 1^{pI1}, à $\frac{m^{m-pI-1}}{1^{qI1}\,1^{rI1}\,1^{fI1}\,etc.\,etc.}$.

L'exposant m est partout égal à la somme des exposants $p+q+r+f+etc.$; et la puissance d'infinitinome $(A+B+C+D+etc.)^m$ elle-même est un aggrégat combinatoire, ayant pour terme général $\frac{m^{m-pI-1}\,A^p B^q C^r\,etc.}{1^{qI1}\,1^{rI1}\,1^{fI1}\,etc.}$; les inconnues p, q, r, f *etc.* étant données par l'équation indéterminée $p+q+r+f+etc.=m$.

LEMME II.

116. Le coëfficient du terme x^n de la puissance d'infinitinome $(ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+dx^\delta+etc.)^m$ est un aggrégat combinatoire, ayant pour terme général $\frac{a^p b^q c^r d^f\,etc.\,1^{mI1}}{1^{pI1}\,1^{qI1}\,1^{rI1}\,1^{fI1}\,etc.}$; expression dans laquelle les inconnues p, q, r, f *etc.* sont données par les deux équations indéterminées:

$$p+q+r+f+etc.=m;$$
$$\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta f+etc.=n.$$

117.

117. *Le polynome* $a x + b x^3 + c x^4 + d x^7$ *étant supposé élevé à la cinquième puissance, on demande le coëfficient du terme* x^{14}? On aura les deux équations indéterminées:

$$p + q + r + f = 5;$$
$$p + 3q + 4r + 7f = 14;$$

d'où l'on tire la troisième $2q + 3r + 6f = 9$. Cette équation n'admettant en tout que trois solutions en nombres entiers et positifs, on n'aura que trois combinaisons différentes, savoir:

p	q	r	f
1	3	1	0
2	0	3	0
3	0	1	1.

Ces valeurs étant substituées dans le terme général de 116, on trouvera le coëfficient demandé égal à $20\, a b^3 c + 10\, a^2 c^3 + 20\, a^3 c d$.

118. Le coëfficient du terme x^n dans la puissance d'infinitinome $(1 + bx + cx^2 + d x^3 + etc.)^m$ est l'aggrégat combinatoire, ayant pour terme général la fonction $\frac{b^q c^r d^f etc. m^{\mu I - 1}}{1^{q I 1} \cdots 1^{r I 1} 1^{f I 1} etc.}$, et pour équation indéterminée $q + 2r + 3f + etc. = n$; la lettre μ désignant de plus la somme des inconnues dans chaque combinaison, $q + r + f + etc.$

119. Il est surtout deux infinitinomes, qui méritent une attention particulière, par l'application heureuse qu'on peut faire du théorème précédent, pour déterminer leurs différentes puissances. L'un des deux est l'infinitinome $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + etc. = \frac{1}{x} Log. \frac{1}{1 - x}$; je le désignerai par P. L'autre est l'infinitinome $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{2.3.4} + \frac{x^4}{2.3.4.5} + etc. = \frac{e^x - 1}{x}$; je le désignerai par Q. Cela étant, je crois pouvoir avancer sans aucune démonstration ultérieure, les quatre théorèmes qui suivent: ils sont fondés sur le rapport très-naturel qui se trouve entre le coëfficient du terme r^n dans le dévéloppement de la faculté $1^{m I r}$, et le coëfficient du terme x^n dans le dévéloppement des deux puissances P^m, Q^m; l'un et l'autre se

trouvant être un aggrégat combinatoire, ayant pour dénominateur commun l'un des deux produits suivants :

$$1^{qI1}\ 1^{rI1}\ 1^{sI1}\ etc.\ 2^{q}\ 3^{r}\ 4^{s}\ etc.$$

$$\text{et } 1^{qI1}\ 1^{rI1}\ 1^{sI1}\ etc.\ 2^{q}\ 6^{r}\ 24^{s}\ etc.$$

THÉOREME.

120. *On a* $P^{m} = 1 + \frac{(m+1)J1,x}{m+1} + \frac{(m+2)J2,x^2}{m+1.\,m+2} + \frac{(m+3)J3,x^3}{m+1....m+3} + etc.$

$$P^{-m} = 1 - \frac{(-m+1)J1,x}{m-1} + \frac{(-m+2)J2,x^2}{m-1.\,m-2} - \frac{(-m+3)J3,x^3}{m-1....m-3} + etc.$$

$$Q^{m} = 1 + \frac{(-m)\,J1,x}{m+1} + \frac{(-m)\,J2,x^2}{m+1.\,m+2} + \frac{(-m)\,J3,x^3}{m+1....m+3} + etc.$$

$$Q^{-m} = 1 - \frac{m\,J1,x}{m-1} + \frac{m\,J2,x^2}{m-1.\,m-2} - \frac{m\,J3,x^3}{m-1....m-3} + etc.$$

121. Moyennant ces formules générales, les puissances de ces infinitomes sont parfaitement déterminées, tant que l'exposant est positif; et nous devons recommander au lecteur la connoissance des séries qui les expriment, et qui se rencontrent beaucoup plus fréquemment qu'on ne croit, dans plusieurs opérations de haute analyse. Il n'en est pas de même des puissances P^{-m}, Q^{-m}. Le terme général de l'une est $\frac{(n-m)\,Jn,\,x^n}{m-1....m-n}$; celui de l'autre $\frac{m\,Jn,\,x^n}{m-1....m-n}$. Tant que m est plus grand que n, ces fractions suivent la loi ordinaire. Mais sitôt que n devient égal à m, leurs numérateurs et leurs dénominateurs s'évanouissent en même tems; et il faudra substituer alors aux coëfficiens $(n-m)\,J\cdot n$ et $m\,Jn$ les rapports différentiels de ces fonctions. La suite nous apprendra à les déterminer.

122. Jusqu'ici nous nous sommes occupés à dévélopper la faculté donnée 1^{mIr}, en une série qui procède selon les puissances de r. Il nous reste à résoudre le problème inverse, et de développer la puissance proposée a^{m} en une série qui procède selon les facultés de a, en supposant une différence quelconque. Il doit y avoir nécessairement une suite de coëfficiens A, B, C, D *etc.* telle que $a^{m} = a^{mIr} - Aa^{m-1Ir}r + Ba^{m-2Ir}r^2 - Ca^{m-3Ir}r^3 + Da^{m-4Ir}r^4 - etc.$ Les deux théorèmes suivants, que nous proposons en

forme de lemmes, en laissant au lecteur le soin de les démontrer, nous feront connoître la loi de ces coëfficiens, qui est assez singulière.

THÉOREME I.

123. *La puissance* a^m *est égale à la somme des facultés suivantes, quelque soit la différence* r; savoir: $a^{mI-r} + (1-m)J1, a^{m-1\,I-r}\, r + (2-m)J2, a^{m-2\,I-r}\, r^2 + (3-m)J3, a^{m-3\,I-r}\, r^3$ *etc.* Le terme général de cette série $(n-m)\,Jn$ ou $(-m+n)\,Jn$ n'est autre chose que le coëfficient du terme r^n, dans le dévéloppement de la faculté à exposant négatif $1^{-(m-n)\,I1}$; ainsi les coëfficiens A, B, C, D *etc.* que nous cherchons, sont absolument les mêmes que ceux de la table donnée ci-dessus; seulement ils seront autrement disposés.

124. Comme $o\,I\,n$ est égal à zéro, et $(-1)\,J\,n$ égal à l'unité, quelque soit n, il est clair que, l'exposant m étant un nombre entier, la série qui exprime a^m doit être nécessairement finie, ayant pour dernier terme $a\,r^{m-1}$

THÉOREME II.

125. *La puissance à exposant négatif* $(a-r)^{-m}$ *est égal à la série suivante, continuée à l'infini:* $\frac{1}{a^{mIr}} + \frac{(m+1)\,J1,r}{a^{m+1\,Ir}} + \frac{(m+2)\,J2,r^2}{a^{m+2\,Ir}} + \frac{(m+3)\,J3,r^3}{a^{m+3\,Ir}} +$ *etc. quelque soit la différence* r. Le coëfficient général de cette série n'étant encore autre chose que le coëfficient du terme r^n dans le dévéloppement de la faculté à exposant positif $1^{m+n\,I1}$, il est évident que les coëfficiens de la série qui exprime $(a-r)^{-m}$ sont encore les mêmes que ceux de la table donnée ailleurs, mais disposés dans un ordre différent.

126. Pour faire voir l'importance de cette série qui exprime la puissance négative de $a-r$ en facultés négatives de a, nous allons l'appliquer au cas le plus simple de tous, $a=2$, $r=1$. On en tirera

$$1 = \frac{1}{1.\ 2} + \frac{1}{2.\ 3} + \frac{1}{3.\ 4} + \frac{1}{4.\ 5} + \frac{1}{5.\ 6} + \frac{1}{6.\ 7} + \frac{1}{7.\ 8} + \text{etc.}$$

$$1 = \frac{1}{2.\ 3} + \frac{3}{2.\ 3.\ 4} + \frac{11}{2.3.\ 4.5} + \frac{50}{2.3....6} + \frac{274}{2.3....7} + \frac{1764}{2.3....8} + \frac{13068}{2.3...9} + \frac{109584}{2.3...10} + \text{etc.}$$

$$1 = \frac{1}{2.\ 3.\ 4} + \frac{6}{2.\ 3.\ 5} + \frac{35}{2.3....6} + \frac{225}{2.3....7} + \frac{1624}{2.3....8} + \frac{13032}{2.3....9} + \frac{118124}{2.3...10} + \frac{1172700}{2.3...11} + \text{etc.}$$

$$1 = \frac{1}{2.\,3.\,5} + \frac{10}{2.\,3.\,6} + \frac{85}{2.3....7} + \frac{735}{2.3....8} + \frac{6769}{2.\,3.\,9} + \frac{67284}{2.3...10} + \frac{723680}{2.3....11} + etc.$$

$$1 = \frac{1}{2.3....6} + \frac{15}{2.3....7} + \frac{175}{2.3....8} + \frac{1960}{2.3....9} + \frac{22449}{2.3...10} + \frac{269325}{2.3...11} + etc.$$

$$1 = \frac{1}{2.3....7} + \frac{21}{2.3....8} + \frac{322}{2.3....9} + \frac{4536}{2.3...10} + \frac{63273}{2.3..11} + etc.$$

Ce sont précisément ces séries, dont nous avons eu besoin dans le chapitre précédent, pour constater la formule intégrale $\int X\,dx = \frac{X\,X\,dx}{dX}$ $(1 - U' + U'' - U''' + U^{IV} - etc.)$ et dont nous avons différé de donner la démonstration jusqu'ici. On voit au reste que ce ne sont que des cas très-particuliers d'autres théorèmes infiniment plus généraux, dont l'usage est très-fréquent dans plusieurs opérations de haute analyse.

PROBLEME.

127. *Reprenons encore le développement de la faculté* 1^{mIr} *en forme de série* $1 + Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + etc.$ *et recherchons la loi, d'après laquelle chacun de ses coëfficiens doit être déterminé par tous ceux qui le précèdent.*

SOLUTION.

128. On a généralement $(a + mr)\,a^{mIr} = a\,(a + r)^{mIr}$. Donc, ayant d'un côté $a^{mIr} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 + etc.$ il s'ensuivra que $(a + mr)a^{mIr} = a^{m+1} + (m + A)\,a^m r + (mA + B)\,a^{m-1}r^2 + (mB + C)\,a^{m-2}r^3 + etc.$ De l'autre, appliquant le théorème binomial au dévéloppement de la faculté $(a + r)^{mIr}$, on aura $a\,(a + r)^{mIr} = a^{m+1} + (m + A)\,a^m r + \left(\frac{m.\,m-1}{1.\,2} + \frac{m-1}{1}A + B\right)a^{m-1}r^2 + \left(\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3} + \frac{m-1.\,m-2}{1.\,2.}A + \frac{m-2}{1}B + C\right)a^{m-2}r^3 + etc.\ etc.$

Égalant enfin les coëfficiens des deux côtés, on aura

$$A = \frac{m.\,m-1}{1.\,2};$$

$$2B = \frac{m-1.m-2}{1.\,2}A + \frac{m...m-2}{1.\,2.\,3};$$

$$3\,C = \frac{m-2.m-3}{1.\ 2}B + \frac{m-1..m-3}{1.\ 2\ 3}A + \frac{m....m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4};$$

$$4\,D = \frac{m-3.m-4}{1.\ 2}C + \frac{m-2..m-4}{1.\ 2.\ 3}B + \frac{m-1..m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}A + \frac{m....m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5};$$

$$5\,E = \frac{m-4.m-5}{1.\ 2}D + \frac{m-3..m-5}{1.\ 2.\ 3}C + \frac{m-2..m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4}B + \frac{m-1..m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}A + \frac{m...m-5}{1.2.3.4.5.6}.$$

129. Faisons immédiatement l'application de ces théorèmes généraux au cas le plus important de tous; celui de m infiniment petit. Mettons dm à la place de m; et comme alors tous les coëfficiens auront ce dm pour facteur, et que d'ailleurs ils seront tous affectés du signe *moins*, désignons par $-\alpha\,dm$, $-\beta\,dm$, $-\gamma\,dm$, $-\delta\,dm$ *etc.* les valeurs particulières, que les coëfficiens A, B, C, D *etc.* reçoivent dans le cas de dm, mis à la place de m. On aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= \alpha;\\
\tfrac{1}{3} &= \alpha - 2\beta;\\
\tfrac{1}{4} &= \alpha - 3\beta + 3\gamma;\\
\tfrac{1}{5} &= \alpha - 4\beta + 6\gamma - 4\delta;\\
\tfrac{1}{6} &= \alpha - 5\beta + 10\gamma - 10\delta + 5\varepsilon;\\
\tfrac{1}{7} &= \alpha - 6\beta + 15\gamma - 20\delta + 15\varepsilon - 6\zeta;\ \textit{etc. etc. etc.}
\end{aligned}$$

130. Faisant le calcul des quantités α, β, γ, δ *etc.* conformément à ces formules, il se trouvera que toutes celles d'un index *impair*, savoir α, γ, ε, η, ι *etc.* sont égales à zéro, excepté le premier α, qui est égal à $\frac{1}{2}$; et que toutes celles d'un index pair, telles que β, δ, ζ, ϑ, $\varkappa$ *etc.* sont alternativement positives et négatives. On aura enfin

$$\begin{aligned}
\beta &= +\tfrac{1}{12};\\
\delta &= -\tfrac{1}{120};\\
\zeta &= +\tfrac{1}{252};\\
\vartheta &= -\tfrac{1}{240};\\
\varkappa &= +\tfrac{1}{132};\\
\mu &= -\tfrac{691}{32760};\\
\xi &= +\tfrac{1}{12};\\
&\textit{etc. etc. etc.}
\end{aligned}$$

131. Les nombres α, β, δ, ζ, ϑ *etc.* ne sont donc autre chose que les *nombres de Bernoulli*; ce qu'on pouvoit déjà voir par la forme des équations. On peut donc donner la proportion suivante sous la forme de

DEFINITION.

132. *Les nombres de Bernoulli sont ce que deviennent les coëfficiens généraux* $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc. dans le cas de* $m=o$; *divisés par zéro, et affectés du signe opposé.*

133. Le nombre de Bernoulli qui a pour index n, n'étant autre chose que $\frac{-o\,In}{o}$, pourra donc être considéré comme aggrégat combinatoire, ayant pour équation indéterminée $q+2r+3s+4t+etc.=n$, et pour terme général

$$\text{ou } \pm\frac{1^{\lambda-1\,I1}}{1^{q\,I1}\,1^{r\,I1}\,1^{s\,I1}\,etc.\;2^{q}\,3^{r}\,4^{s}\,etc.};$$

$$\text{ou } \pm\frac{1^{n\,I1}\,1^{\mu-1\,I1}}{1^{q\,I1}\,1^{r\,I1}\,1^{s\,I1}\,etc.\;2^{q}\,6^{r}\,24^{s}\,etc.};$$

la lettre μ désignant la somme des inconnues $q+r+s+t+etc.$ dans chaque combinaison en particulier, et λ étant égale à $n+\mu$, ou à $n+q+r+s+t+etc.$

134. Le premier usage que nous allons faire de ces nombres, ce sera de simplifier les équations rapportées en 128, d'où dépend l'évaluation numérique de toute faculté proposée à exposant fractionnaire; en réduisant ces équations à la moitié des termes qu'ils contiennent, plus un. En combinant d'une certaine manière, les équations de 128 avec celles de 129, on rencontre les équations suivantes, qui sont plus simples de moitié:

$$\frac{mJ1}{m.\,m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha;$$

$$\frac{2,\;mJ2}{m-1.m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ1-\frac{m}{1}\beta;$$

$$\frac{3,\;mJ3}{m-2.m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ2-\frac{m-1}{1}\beta,mJ1;$$

$$\frac{4,\;mJ4}{m-3.m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ3-\frac{m-2}{1}\beta,mJ2-\frac{m\ldots.m-2}{1.\,2.\,3}\delta;$$

$$\frac{5,\;mJ5}{m-4\;m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ4-\frac{m-3}{1}\beta,mJ3-\frac{m-1..m-3}{1.\,2.\,3}\delta,mJ1;$$

$$\frac{6,\;mJ6}{m-5.m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ5-\frac{m-4}{1}\beta,mJ4-\frac{m-2..m-4}{1.\,2.\,3}\delta,mJ2-\frac{m\ldots..m-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\zeta;$$

$$\frac{7,\;mJ7}{m-6.m+1}=\frac{m-1}{m+1}\alpha,mJ6-\frac{m-5}{1}\beta,mJ5-\frac{m-3..m-5}{1.\,2.\,3}\delta,mJ3-\frac{m-1..m-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\zeta,mJ1.$$

135. Quoique ces équations soient beaucoup plus simples que celles de 128, en ce qu'elles ne renferment que la moitié des termes, elles ne sont pas cependant exemptes de difficultés, dans les cas surtout, où l'exposant m est un nombre fractionnaire. Ces difficultés viennent de la réduction des fractions, qui dès le quatrième terme ont des dénominateurs très-compliqués, ce qui rend les erreurs de calcul presque inévitables dans la pratique. J'ai donc imaginé une méthode, moyennant laquelle toute la recherche des coëfficiens $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.* est réduit à un pur calcul de nombres entiers, quelque puisse être d'ailleurs l'exposant de la faculté. Je m'en vais communiquer aux géomètres les résultats de mon travail.

136. Ainsi, étant proposée une faculté à exposant fractionnaire quelconque $a^{m:n\,I1}$, dont il faut déterminer les coëfficiens de la manière la plus simple et la moins sujette aux erreurs, je commence d'abord par déterminer la suite de nombres entiers M, A, B, C, D, E *etc.* en employant à cette fin les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
M &= -m\,(n-m);\\
A &= -3\,(n-m)^2 + n(n+m);\\
B &= A + 2n(n+m);\\
C &= 5\,(n-m)^2\,B - n(n+m)\times(5A + 2nn);\\
D &= 3\,C - n(n+m)\times(20B + 24nn);\\
E &= 7\,(n-m)^2\,D - n(n+m)\times(35C - 140nnA - 80n^4);\\
F &= E - n(n+m)\times(14D - 28nnB - 480n^4);\\
G &= 3\,(n-m)^2\,F - n(n+m)\times(7E - 294nnC + 1680n^4A + 1008n^6);\\
H &= 5\,G - n(n+m)\times(40F - 784n^2D + 22400n^4B + 40320n^6);\\
I &= 11\,(n-m)^2\,H - n(n+m)\times(165G - 1848n^2E + 10880n^4C - 66528on^6A\\
&\qquad - 403200n^8).
\end{aligned}
$$

137. Le calcul de ces nombres est très-facile dans tous les cas; ce sont des nombres entiers, qui ne supposent aucune réduction. Ensuite, on n'aura plus qu'à leur joindre les facteurs et les dénominateurs convenables, pour en faire les coëfficiens demandés. On se règlera d'après la table suivante:

$$\frac{m}{n}\,J1 = \frac{-m\,(n-m)}{2nn};$$

$$\frac{m}{n}\,J2 = \frac{(n-m)\,mA}{2^3\,3n^4};$$

$$\frac{m}{n} J3 = \frac{(n-m)^{2In} m (n-m) B}{2^4 3^2 n^6};$$

$$\frac{m}{n} J4 = \frac{(n-m)^{3In} m C}{2^7 3^2 5 n^8};$$

$$\frac{m}{n} J5 = \frac{(n-m)^{4In} m (n-m) D}{2^8 3^3 5^2 n^{10}};$$

$$\frac{m}{n} J6 = \frac{(n-m)^{5In} m E}{2^{10} 3^4 5^2 7 n^{12}};$$

$$\frac{m}{n} J7 = \frac{(n-m)^{6In} m (n-m) F}{2^{11} 3^4 5^2 7^2 n^{14}};$$

$$\frac{m}{n} J8 = \frac{(n-m)^{7In} m G}{2^{15} 3^5 5^2 7^2 n^{16}};$$

$$\frac{m}{n} J9 = \frac{(n-m)^{8In} m (n-m) H}{2^{16} 3^7 5^3 7^2 n^{18}};$$

$$\frac{m}{n} J10 = \frac{(n-m)^{9In} m I}{2^{18} 3^7 5^4 7^2 11. n^{20}}.$$

138. Moyennant ces formules, le calcul des coëfficiens généraux, dans les cas les plus compliqués, se trouvera réduit à la plus grande simplicité; d'autant plus qu'il n'est jamais nécessaire d'aller jusqu'au dixième coëfficient. et que dans la plus grande partie des cas on peut s'arrêter au cinquième. Quelques exemples éclaircirons cette méthode.

139. Soit $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$. Ayant $m = 1$, $n = 2$, on trouvera $M = -1$; $A = +3$; $B = +15$; $C = -63$; $D = -135.19$; $E = +55.237$. On aura donc $1^{\frac{1}{2}Ir} = 1 - \frac{r}{2^3} + \frac{rr}{2^7} + \frac{5r^3}{2^{10}} - \frac{21r^4}{2^{15}} - \frac{399r^5}{2^{18}} + \frac{869r^6}{2^{22}} + etc.$ Telle est en général l'expression de toute faculté, ayant $\frac{1}{2}$ pour exposant.

140. Soit $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$. Ayant $m = 3$, $n = 5$, on trouvera $M = -6$; $A = +28$; $B = +108$; $C = -5440$; $D = -126720$. Donc $1^{\frac{3}{5}Ir} = 1 - \frac{3r}{5^2} + \frac{7rr}{5^4}$

$+\frac{63\,r^3}{5^6}-\frac{17.\,28\,r^4}{5^8}+\frac{154.\,408\,r^5}{5^{11}}$. Telle est l'expression générale de toute faculté, ayant $\frac{3}{5}$ pour exposant.

141. Enfin, voici les développemens des facultés à exposant fractionnaire, dans lesquelles les dénominateurs de ces exposants se trouvent entre les limites *un* et *six*.

$$1^{\frac{1}{6}Ir}=1-\frac{5\,r}{2^3\,3^2}-\frac{55\,r^2}{2^7\,3^4}+\frac{4675}{2^{10}\,3^7}\,r^3+\frac{37697}{2^{11}\,3^9}\,r^4-\frac{11.\,29.\,35.\,37}{2^{14}\,3^{10}}\,r^5-\text{etc.}$$

$$1^{\frac{1}{5}Ir}=1-\frac{2\,r}{5^2}-\frac{3\,r^2}{5^4}+\frac{42}{5^6}\,r^3+\frac{19.\,105}{5^8}\,r^4-\frac{19.\,41.\,42}{5^{11}}\,r^5-\text{etc.}$$

$$1^{\frac{1}{4}Ir}=1-\frac{3\,r}{2^5}-\frac{7\,r^2}{2^{11}}+\frac{231}{2^{16}}\,r^3+\frac{77.\,103}{2^{23}}\,r^4-\frac{11.\,63.\,361}{2^{28}}\,r^5-\text{etc.}$$

$$1^{\frac{1}{3}Ir}=1-\frac{r}{3^2}\cdots\cdots+\frac{10}{3^7}\,r^3+\frac{11}{3^9}\,r^4-\frac{77}{3^{10}}\,r^5-\text{etc.}$$

$$1^{\frac{2}{5}Ir}=1-\frac{3\,r}{5^2}+\frac{2\,r^2}{5^4}+\frac{78}{5^6}\,r^3+\frac{39}{5^8}\,r^4-\frac{13.\,23.\,243}{5^{11}}\,r^5-\text{etc.}$$

$$1^{\frac{1}{2}Ir}=1-\frac{r}{2^3}+\frac{r^2}{2^7}+\frac{5}{2^{10}}\,r^3-\frac{21}{2^{15}}\,r^4-\frac{399}{2^{18}}\,r^5+\text{etc.}$$

$$1^{\frac{3}{5}Ir}=1-\frac{3\,r}{5^2}+\frac{7\,r^2}{5^4}+\frac{63}{5^6}\,r^3-\frac{17.\,28}{5^8}\,r^4-\frac{17.\,24.\,154}{5^{11}}\,r^5+\text{etc.}$$

$$1^{\frac{2}{3}Ir}=1-\frac{r}{3^2}+\frac{r^2}{3^4}+\frac{7}{3^7}\,r^3-\frac{28}{3^9}\,r^4-\frac{182}{3^{11}}\,r^5+\text{etc.}$$

$$1^{\frac{3}{4}Ir}=1-\frac{3\,r}{2^5}+\frac{25\,r^2}{2^{11}}+\frac{135}{2^{16}}\,r^3-\frac{39.\,307}{2^{23}}\,r^4-\frac{17.\,89.\,117}{2^{28}}\,r^5+\text{etc.}$$

$$1^{\frac{4}{5}Ir}=1-\frac{2\,r}{5^2}+\frac{7\,r^2}{5^4}+\frac{22}{5^6}\,r^3-\frac{22.\,23}{5^8}\,r^4-\frac{11\,28.\,71}{5^{11}}\,r^5+\text{etc.}$$

$$1^{\frac{5}{6}Ir}=1-\frac{5\,r}{2^3\,3^2}+\frac{35\,r^2}{2^7\,3^3}+\frac{13.\,25}{2^{10}\,3^7}\,r^3-\frac{19.91.431}{2^{15}\,3^9}\,r^4-\frac{19.23.91.125}{2^{18}\,3^{10}}\,r^5+\text{etc.}$$

Ainsi donc, pour achever entièrement l'ouvrage que nous nous étions proposé, il ne reste plus qu'à résoudre le problème suivant.

PROBLÈME.

142. *Connoissant les coëfficiens généraux d'une faculté à exposant fractionnaire* 1^{mIr}, *développée en suite infinie* $1+Ar+Br^2+Cr^3+Dr^4+\text{etc.}$ *on demande de rendre cette série convergente à volonté.*

PREMIER CAS.

143. Supposons a et r positifs. Prenons à volonté un nombre entier quelconque n. Nous aurons en vertu de 6, $a^{mIr} = \frac{a^{nIr}(a+nr)^{mIr}}{(a+mr)^{nIr}}$, ou bien, en faisant $\frac{r}{a+nr} = u$, $a^{mIr} = \frac{a^{nIr}(a+nr)^{m}}{(a+mr)^{nIr}}$, multiplié par la série $(1 + Au + Buu + Cu^3 + etc.)$ Cette dernière série étant convergente à volonté, le problème est résolu.

SECOND CAS.

144. Supposons a et r négatifs. Dans ce cas, la formule qu'on vient de donner renfermeroit le terme $(-a-nr)^m$; puissance de nombre négatif à exposant, au moins fractionnaire, peut être irrationnel, et même transcendant. C'est un écueil, qu'en attendant il conviendra d'éviter. Le moyen en est facile; il n'y a qu'à supposer n négatif. Donc, prenant à volonté un nombre quelconque entier n, et faisant $\frac{r}{nr-a} = v$, on aura $(-a)^{mI-r} = \frac{(r-a-mr)^{nIr}(nr-a)^{m}}{(r-a)^{nIr}}$, multiplié par la série convergente à volonté $1 - Av + Bv^2 - Cv^3 + Dv^4 - Ev^5 + etc.$

EXEMPLE I.

145. Feignant d'ignorer la valeur de l'intégrale $\int e^{-tt} dt$, on demande à trouver par la méthode générale qu'on vient d'enseigner, la valeur de la faculté $1^{\frac{1}{2}I1}$, qui lui équivaut? On a donc $m = \frac{1}{2}$; $a = 1$; $r = 1$; $A = -\frac{1}{2^3}$ $B = +\frac{1}{2^7}$; $C = +\frac{5}{2^{10}}$; $D = -\frac{21}{2^{15}}$; $E = -\frac{399}{2^{18}}$. Pour nous épargner une extraction de racine quarrée, nous prendrons n tel, que $a + nr$ ou $1 + n$ soit un quarré parfait; donc, faisant $n = 8$, on aura $u = \frac{1}{9}$. Cela suffit pour rendre la série $1 + Au + Buu$ *etc.* extrêmement convergente; on aura

son premier terme = 1,000000000
le second ..... — 0,013888888
le troisième ..... + 0,000096450
le quatrième..... + 0,000006698
le cinquième .... — 0,000000098
le sixième ..... — 0,000000026

somme de la série 0,986214136 = S. On aura donc $1^{\frac{1}{2}I1} = \frac{2.4.6.8.10.12.14.16}{3.5.7.9.11.13.15.17} 3S$; ce qui se réduit à $\frac{2^{15} S}{3.5.11.13.17}$ ou bien 0,886226925. Telle est en effet $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, sans qu'il y ait l'erreur *d'un* dans la neuvième décimale.

EXEMPLE II.

146. Si l'on demandoit la valeur de $(-1)^{\frac{1}{2}I-1}$, la formule de 144 fera voir que c'est un infini du premier ordré; ayant pour dénominateur $(r-a)^{nIr}$; c'est-à-dire, une faculté dont la base est zéro; et dont l'exposant est un nombre entier. Cela est conforme à la formule donnée en 39, savoir, *tang.* $m\pi = (+m)^{\frac{1}{2}I1} : (-m)^{\frac{1}{2}I-1}$. Le cas particulier de $m = 1$, donne ici $o = 1^{\frac{1}{2}I1} : (-1)^{\frac{1}{2}I-1}$; ainsi cette dernière faculté doit être un infini du premier ordre.

EXEMPLE III.

147. On demande à évaluer la faculté $1^{\frac{1}{3}I1}$? Ayant $a = 1$, $r = 1$, $m = \frac{1}{3}$, prenons n tel que $a + nr$ devienne un cube parfait; ainsi, faisant $n = 7$, on aura $(a + nr)^m = 2$; et $u = \frac{7}{8}$. Ayant de plus $A = -\frac{1}{9}$; $B = o$; $C = +\frac{10}{3^7}$; $D = +\frac{11}{3^9}$; $E = -\frac{77}{3^{10}}$; la série deviendra

1,000000000
— 0,013888888
+ 0,000008931
+ 0,000000136
— 0,000000040.

Sa somme sera donc $0{,}986120139 = S$. Cela étant, on aura pour expression de la faculté demandée $\frac{3.6.\ 9.12.15.18.21}{4.7.10.13.16.19.22}\, 2\, S$; ce qui revient à $\frac{3^9\, S}{2^3\ 11.13.19}$, ou bien $0{,}892979513$. Telle est la valeur de $1^{\frac{1}{3}I_1}$, ou bien de l'intégrale $\int e^{-t^3}\, dt$, qui lui est égale.

EXEMPLE IV.

148. Proposons la faculté $1^{\frac{3}{4}I_1}$. Ayant $a = 1$, $r = 1$, $m = \frac{3}{4}$, prenons $u = 9$, ce qui donne $a + nr = 10$, $u = \frac{1}{10}$. La table 141 nous fait connoître les coëfficiens généraux de la faculté: savoir $A = -\frac{3}{2^5}$; $B = +\frac{25}{2^{11}}$; $C = +\frac{135}{2^{16}}$; $D = -\frac{39.\ 307}{2^{23}}$; $E = -\frac{17.\ 89.\ 117}{2^8}$. Calculons d'abord la série. Nous aurons

$$\begin{aligned} 1 &= \ 1{,}000000000 \\ A\,u &= -\ 0{,}009375000 \\ B\,u^2 &= +\ 0{,}000122070 \\ C\,u^3 &= +\ 0{,}000002060 \\ D\,u^4 &= -\ 0{,}000000143 \\ E\,u^5 &= -\ 0{,}000000007 \end{aligned}$$

Somme de la série $= 0{,}990748980$. L'expression de la faculté sera égale à $\frac{4.\ 8.12.16.20.24.28.32.36}{7.11.15.19.23.27.31.35.39}\, 10^{3:4}\, S$: ce qui se réduit à $\frac{2^{25}\ 10^{3:4}\, S}{3.5.7.11.13.19.23.31.}$ Achevant le calcul par logarithmes, on trouvera $0{,}91906242$ pour la valeur de la faculté demandée. Divisée par 3, elle fait connoître l'intégrale $\int t^2\, e^{-t^4}\, dt$; on la trouvera égale à $0{,}30635414$.

EXEMPLE V.

149. Cherchons encore la faculté $(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}I_1}$. On a $a = \frac{3}{4}$; $m = \frac{1}{2}$; $r = 1$; $A = -\frac{1}{8}$; $B = +\frac{1}{2^7}$; $C = +\frac{5}{2^{10}}$; $D = -\frac{21}{2^{15}}$; $E = -\frac{399}{2^{18}}$. Prenant à volonté $n = 9$, on aura $a + mr = \frac{5}{4}$; $u = \frac{4}{39}$; les cinq premiers termes de la suite $1 + Au + Buu + Cu^3$ *etc.* donneront $S = 0{,}98726685o$. La

faculté elle-même en deviendra $\frac{3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19.\ 23.\ 27.\ 31.\ 35.\ \sqrt{39}}{5.\ 9.\ 13.\ 17.\ 21.\ 25.\ 29.\ 33.\ 37.\ 2}S$; ce qui se réduit à $\frac{399.\ 713.\ \sqrt{39}}{2210.\ 1073}S$. Achevant le calcul par logarithmes, on trouvera celui de la faculté égal à $-1,8690372$; la faculté elle-même $0,739669$.

EXEMPLE VI.

150. Voyons à présent la faculté $(-\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}I-1}$: ce qui nous obligera à revenir à la formule de 144; les lettres a, r, m, A, B, C, D, E *etc.* retenant les mêmes valeurs. Prenant à volonté $n=10$, on aura $r-a=\frac{1}{4}$, $r-a-mr=-\frac{1}{4}$; $v=\frac{4}{37}$. Les cinq premiers termes de la suite $1-Av+Bvv-Cv^3+etc.$ donneront $1,013598588 = S'$; la faculté elle-même deviendra $-\frac{1.\ 3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19.\ 23.\ 27.\ 31.\ 35.\ \sqrt{37}}{1.\ 5.\ 9.\ 13.\ 17.\ 21.\ 25.\ 29.\ 33.\ 37.\ 2}S'$; ce qui revient encore à $\frac{399.\ 713.\ \sqrt{37}}{2210.\ 1073}S'$. La faculté sera absolument la même qu'auparavant; seulement elle sera affectée d'un signe contraire, savoir $-0,739669$.

151. Comme le quotient de ces deux facultés doit exprimer la tangente de $\frac{3}{4}\pi$ ou 135°, en vertu de 39, il est fort naturel, que ces deux facultés soient égales entr'elles, mais affectées de signes contraires. En général, comme en vertu de 36, le quotient des deux facultés $(+m)^{hI+1} : (-m)^{hI-1}$ doit être égal au rapport des deux sinus, $Sin.\ m\pi : Sin.\ (m+h)\pi$, on en conclurra que ces deux facultés sont égales entr'elles toutes les fois que $2m+h$ est un nombre entier. Si ce nombre est impair, elles seront affectées du même signe; s'il est pair, elles auront des signes différens.

152. On peut employer la faculté $(3:4)^{\frac{1}{2}I1}$, pour trouver la longueur de la courbe élastique, réprésentée, comme on sait, par l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$: intégrale qui en vertu de 76, se réduit au quotient des deux facultés, $(3:4)^{\frac{1}{2}I1} : (1:2)^{\frac{1}{2}I1}$. Comme cette dernière se réduit à $\frac{1^{\frac{1}{2}I2}}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, on aura la longueur de la courbe élastique, en multipliant la faculté $(3:4)^{\frac{1}{2}I1}$ par $\sqrt{\pi}$. On la trouvera donc par un calcul très-facile, égale à $1,3110284$.

EXEMPLE VII.

153. Voyons encore les facultés $(+2:5)^{\frac{1}{2}I+1}$ et $(-2:5)^{\frac{1}{2}I-1}$. Nous nous servirons pour la première de la formule de 143 ; et prenant à volonté $n=9$, nous aurons $u=\frac{5}{47}$; et les coëfficiens A, B, C *etc.* étant encore les mêmes, les cinq premiers termes de la série $1+Au+Buu+Cu^3+etc.$ donneront $S=0{,}986796321$; la faculté elle-même devant être égale à $\frac{4.14.24.34.44.54.64.74.84}{9.19.29.39.49.59.69.79.89}S\sqrt{\frac{47}{5}}$; son logarithme deviendra 9,6828340. Il faudra employer la formule de 144 pour trouver la seconde des deux facultés ; et prenant encore $n=9$, ce qui donne $u=\frac{5}{43}$; nous aurons $S'=1{,}014631698$ pour somme de la série $1-Av+Bvv-Cv^3+etc.$ Quant à la faculté elle-même, comme elle doit être égale à $\frac{1.11.21.31.41.51.61.71.81}{6.16.26.36.46.56.66.76.86}S'\sqrt{\frac{43}{5}}$, son logarithme deviendra 9,1946101. Les deux facultés seront donc absolument réelles ; la première étant 0,4817638 ; et la seconde 0,1565345.

154. La différence des deux logarithmes donne 0,4882239. C'est exactement le logarithme de la tangente de 72° ; et elle doit l'être, en vertu du théorème énoncé en 39.

155. Dans tous ces exemples nous voulions avoir la somme de la série $1+Au+Buu+Cu^3+etc.$ jusqu'à neuf décimales ; ce qui nous a obligé d'en calculer cinq termes. Si l'on veut se contenter de sept décimales, l'on aura assez des trois premiers termes ; et certainement c'est tout ce qu'on peut exiger d'une méthode d'approximation. Au reste, nous allons voir, que si le calcul d'une faculté quelconque à exposant fractionnaire n'est pas difficile, celui de son logarithme hyperbolique est encore incomparablement plus facile. Quoique nous pourrions trouver l'expression générale du logarithme d'une faculté quelconque, par les méthodes connues, nous préférons cependant de suivre une route absolument nouvelle, et beaucoup plus générale que toutes les méthodes de sommations qui ont été inventées jusqu'ici.

156. *La faculté* 1^{mIr}, *dans le cas d'un exposant infiniment petit, est égale à* $1-(\alpha r+\beta r^2+\delta r^4+\zeta r^6+\vartheta r^8+etc.)m$. Les coëfficiens α, β, δ, ζ *etc.* sont les nombres de *Bernoulli*, déterminés en 129. Comme ces nombres sont ce que deviennent les coëfficiens généraux $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.*

dans le cas de m infiniment petit, le théorème n'a besoin d'aucune démonstration ultérieure.

157. Comme la série $\alpha r + \beta r^2 + \delta r^4 + \zeta r^6 + \vartheta r^8$ *etc.* se rencontrera fréquemment dans la suite, je la désignerai par Λr ; Λ étant le *lambda* grec majuscule. On aura donc dans le cas d'un exposant petit $1^{mIr} = 1 - m\Lambda r$.

158. *La faculté* a^{mIr}, *étant égale à* $a^m\, 1^{mIr:a}$, *deviendra dans le cas d'un exposant infiniment petit* $1 + m\,(Log.\ a - \Lambda \frac{r}{a})$. Dans le cas où a seroit la base du système hyperbolique, on auroit $1 + m\,(1 - \Lambda \frac{r}{a})$.

159. *La différentielle de la faculté* a^{mIr}, *en faisant varier son exposant* m, *est égale à* $a^{mIr}\, dm$, *multiplié par* $Log.\ (a + mr) - \Lambda \frac{r}{a + mr}$. Ce théorème est fondé sur ce que la faculté à exposant binome $a^{(m+dm)Ir}$, est égale, en vertu de 6, à $a^{mIr}\,(a + mr)^{dmIr}$. Cela étant, il nous reste à résoudre le problème suivant.

PROBLEME.

160. *L'exposant de la faculté* 1^{mIr} *passant à l'état* $m + dm$, *déterminer les variations qu'en reçoivent les coëfficiens généraux* $mJ1$, $2J2$, $mJ3$, *etc.*

SOLUTION.

161. Comme la différentielle de cette faculté est égale à $1^{mIr}\, dm$, multiplié par $Log.\ (1 + mr) - \Lambda \frac{r}{1 + mr}$, commençons par réduire cette dernière fonction en série, disposée d'après les puissances de r. Elle deviendra

$$
\begin{aligned}
&(m - \alpha)\, r\,;\\
&-\left(\tfrac{1}{2}\, mm - \alpha m + \beta\right) r^2\,;\\
&+\left(\tfrac{1}{3}\, m^3 - \alpha m^2 + 2\, m\beta - \gamma\right) r^3\,;\\
&-\left(\tfrac{1}{4}\, m^4 - \alpha m^3 + 3\, m^2\beta - 3\, m\gamma + \delta\right) r^4\,;\\
&+\left(\tfrac{1}{5}\, m^5 - \alpha m^4 + 4\, m^3\beta - 6\, m^2\gamma + 4\, m\delta - \varepsilon\right) r^5\,;
\end{aligned}
$$

162. Pour donner à cette série une forme plus simple, désignons

par $M1$, la somme des termes $\frac{1}{2} mm - \alpha m$;

par $M2$, la somme des termes $\frac{1}{3} m^3 - \alpha m^2 + 2\beta m$;

par $M3$, la somme des termes $\frac{1}{4} m^4 - \alpha m^3 + 3\beta m^2 - 3\gamma m$;

par $M4$, la somme des termes $\frac{1}{5} m^5 - \alpha m^4 + 4\beta m^3 - 6\gamma m^2 + 4\delta m$;

etc. etc. La fonction $Log.\,(1+mr) - \Lambda \frac{r}{1+mr}$ deviendra par ce moyen, égale à $(m-\alpha)\,r - (M\,1+\beta)\,r^2 + (M\,2-\gamma)\,r^3 - (M\,3+\delta)\,r^4 + (M\,4-\varepsilon)\,r^5 - etc.\ etc.$

163. En multipliant cette suite par 1^{mlr} ou $1+mJ1$, $r+mJ2$, r^2+mJ3, r^3+mJ4, r^4+ *etc. etc.* les coëfficiens du produit des deux séries feront connoître sur le champ, quoique sous une forme très-compliquée encore, les accroissemens que prennent les coëfficiens, par la variation de l'exposant. On trouvera

$d(mJ1) : dm = m-\alpha;$

$d(mJ2) : dm = (m-\alpha)\,mJ1 - (M\,1+\beta);$

$d(mJ3) : dm = (m-\alpha)\,mJ2 - (M\,1+\beta)\,mJ1 + (M\,2-\gamma);$

$d(mJ4) : dm = (m-\alpha)\,mJ3 - (M\,1+\beta)\,mJ1 + (M\,2-\gamma)\,mJ1 - (M3+\delta);$

$d(mJ5) : dm = (m-\alpha)\,mJ4 - (M\,1+\beta)\,mJ3 + (M\,2-\gamma)\,mJ2 - (M\,3+\delta)\,mJ1 + (M\,4-\varepsilon).$

164. Les deux considérations suivantes donneront à ces expressions générales une forme beaucoup plus simple. *Premièrement:* les quantités $M\,1$, $M\,2$, $M\,3$, $M\,4$ *etc.* ne sont autre chose que les sommes des puissances des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à $m-1$ *inclusivement.* Nous croyons inutile d'en donner ici la démonstration. Tous les livres élémentaires de haute analyse nous apprennent, que la somme des puissances des nombres naturels est susceptible de prendre la forme d'une série, disposée d'après les puissances du dernier terme, dont les coëfficiens sont ceux du binome de *Newton*, multipliés par les nombres consécutifs de *Bernoulli.*

165. *Secondement.* Comme les coëfficiens de la faculté 1^{mlr}, savoir $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.* ne sont autre chose que les sommes des produits des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à $m-1$ *inclusivement*, il doit donc exister entre les quantités $M\,1$, $M\,2$, $M\,3$ *etc.* d'un côté, et les coëfficiens $mJ1$, $mJ2$, $mJ3$ *etc.* de l'autre, cette même suite d'équations, qui a lieu généralement entre les coëfficiens d'une équation quelconque, et les sommes des puissances de leurs racines. On aura donc:

$$mJ1 = M\,1;$$
$$2,\ mJ2 = mJ1,\ M\,1 - M\,2;$$
$$3,\ mJ3 = mJ2,\ M\,1 - mJ1,\ M\,2 + M\,3;$$
$$4,\ mJ4 = mJ3,\ M\,1 - mJ2,\ M\,2 + mJ1,\ M\,3 - M\,4;$$
etc. etc.

166.

166. Faisant usage de ces égalités, et supprimant les nombres impairs γ, ε, η *etc.* qu'on sait être égaux à zéro, on trouvera

$$
\begin{aligned}
d(mJ1):dm &= m-\alpha;\\
d(mJ2):dm &= (m-1-\alpha)mJ1-\beta;\\
d(mJ3):dm &= (m-2-\alpha)mJ2-\beta,mJ1;\\
d(mJ4):dm &= (m-3-\alpha)mJ3-\beta,mJ2-\delta;\\
d(mJ5):dm &= (m-4-\alpha)mJ4-\beta,mJ3-\delta,mJ1;\\
d(mJ6):dm &= (m-5-\alpha)mJ5-\beta,mJ4-\delta,mJ2-\zeta;\\
d(mJ7):dm &= (m-6-\alpha)mJ6-\beta,mJ5-\delta,mJ3-\zeta,mJ1;\\
d(mJ8):dm &= (m-7-\alpha)mJ7-\beta,mJ6-\delta,mJ4-\zeta,mJ2-\vartheta;
\end{aligned}
$$

167. Ces mêmes rapports différentiels des coëfficiens généraux, savoir $d(mJ1)$, $d(mJ2)$, $d(mJ3)$ *etc.* nous serviront à déterminer des formules générales de sommation pour tous les ordres. Pour faire entendre ce qui va suivre, je déclare que je désignerai par y une variable quelconque; par r, sa différence finie, supposée constante; par Y, ${}_1Y$, ${}_2Y$, ${}_3Y$, ${}_4Y$ *etc.* des fonctions analogues de y, $y-r$, $y-2r$, $y-3r$, $y-4r$ *etc.* qu'enfin je ferai

$$
\begin{aligned}
\Delta Y &= Y - {}_1Y;\\
\Delta^2 Y &= Y - 2\,{}_1Y + {}_2Y;\\
\Delta^3 Y &= Y - 3\,{}_1Y + 3\,{}_2Y - {}_3Y;\\
\Delta^4 Y &= Y - 4\,{}_1Y + 6\,{}_2Y - 4\,{}_3Y + {}_4Y;
\end{aligned}
$$

de manière que $\Delta^n Y$ sera égal à $Y - n\,{}_1Y + \frac{n.n-1}{1.2}\,{}_2Y - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,{}_3Y + \frac{n\ldots n-3}{1.2.3.4}\,{}_4Y$ — *etc.* Il suit immédiatement de cette formule, que l'on doit avoir

$$
\begin{aligned}
\Delta^{-1}Y &= Y + {}_1Y + {}_2Y + {}_3Y + {}_4Y + \text{etc.} = \Sigma^1 Y;\\
\Delta^{-2}Y &= Y + 2\,{}_1Y + 3\,{}_2Y + 4\,{}_3Y + 5\,{}_4Y + \text{etc.} = \Sigma^2 Y;\\
\Delta^{-3}Y &= Y + 3\,{}_1Y + 6\,{}_2Y + 10\,{}_3Y + 15\,{}_4Y + \text{etc.} = \Sigma^3 Y;\\
\Delta^{-4}Y &= Y + 4\,{}_1Y + 10\,{}_2Y + 20\,{}_3Y + 35\,{}_4Y + \text{etc.} = \Sigma^4 Y;
\end{aligned}
$$

etc. etc. et qu'en général les sommes d'une fonction quelconque, de tous les ordres, ne sont que des différences à exposants négatifs.

168. Les équations générales qu'on vient de donner ont besoin d'un nombre de constantes arbitraires, égal à l'ordre de sommation, pour devenir complettes. Elles prendront alors la forme suivante :

$$\Sigma Y = \Delta^{-1}Y + A;$$

$$\Sigma^2 Y = \Delta^{-2}Y + \frac{yA}{r} + B;$$

$$\Sigma^3 Y = \Delta^{-3}Y + \frac{y^{2Ir}A}{1.\,2\,r^2} + \frac{yB}{r} + C;$$

$$\Sigma^4 Y = \Delta^{-4}Y + \frac{y^{3Ir}A}{1.\,2\,r^3} + \frac{y^{2Ir}B}{1.\,2\,r^2} + \frac{yC}{r} + D;$$

etc. etc. Il faut observer que, les constantes A, B, C, D *etc.* étant disposées, comme on voit, par facultés de y, les constantes de la dernière équation sont les mêmes que dans les équations précédentes. On leur donneroit une forme plus simple, en les disposant par puissances de y; on auroit alors $\Sigma^4 Y = \Delta^{-4}Y + y^3A + y^2B + yC + D$; mais alors les constantes A, B, C auroient des valeurs différentes et particulières dans chacune de ces équations.

169. Supposant la différence r infiniment petite, et passant à l'état de vraie différentielle, on aura

$$\int Y dy = \frac{d^{-1}Y}{dy} + A;$$

$$\int^2 Y dy = \frac{d^{-2}Y}{dy^2} + yA + B;$$

$$\int^3 Y dy = \frac{d^{-3}Y}{dy^3} + \frac{y^2A}{1.\,2} + yB + C;$$

$$\int^4 Y dy = \frac{d^{-4}Y}{dy^4} + \frac{y^3A}{1.2.3} + \frac{y^2B}{1.\,2} + yC + D.$$

170. Enfin, pour mettre de l'ordre dans les formules qui vont suivre, je me servirai des marques Y', Y'', Y''', Y^{IV} *etc.* pour désigner les rapports différentiels successifs $\frac{rdY}{dy}$, $\frac{r^2ddY}{1.2\,dy^2}$, $\frac{r^3d^3Y}{1.\,2.\,3.\,dy^3}$, $\frac{r^4d^4Y}{1.\,2.\,3.\,4\,dy^4}$ *etc.* Je désignerai de même par $'Y$, $''Y$, $'''Y$, ^{IV}Y *etc.* les intégrales successives $\frac{1}{r}\int Y dy$, $\frac{1}{rr}\int^2 Y dy$, $\frac{1.\,2}{r^3}\int^3 Y dy$, $\frac{1.2.3}{r^4}\int^4 Y dy$ *etc. etc.*

171. Cela étant, je crois pouvoir proposer sans démonstration les propositions suivantes, dont la première est le simple énoncé du théorème de *Taylor*, et dont les autres sont des conséquences nécessaires et immédiates de ce théorème. Je les tire de *Euler*, *calcul différentiel*, partie II. §. 56.

$$\Delta Y = Y' - Y'' + Y''' - Y^{IV} + Y^{V} - Y^{VI} + etc.$$

$$\frac{\Delta^2 Y}{2} = Y'' - 3Y''' + 7Y^{IV} - 15Y^{V} + 31Y^{VI} - 63Y^{VII} + etc.$$

$$\frac{\Delta^3 Y}{1.\ 2.\ 3} = Y''' - 6Y^{IV} + 25Y^{V} - 90Y^{VI} + 301Y^{VII} - 966Y^{VIII} + etc.$$

$$\frac{\Delta^4 Y}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = Y^{IV} - 10Y^{V} + 65Y^{VI} - 350Y^{VII} + 1701Y^{VIII} - 7770Y^{IX} + etc.$$

$$\frac{\Delta^5 Y}{1.2.3.4.5} = Y^{V} - 15Y^{VI} + 140Y^{VII} - 1050Y^{VIII} + 6951Y^{IX} - 42525Y^{X} + etc.$$

$$\frac{\Delta^6 Y}{1.2.3.4.5.6} = Y^{VI} - 21Y^{VII} + 266Y^{VIII} - 2646Y^{IX} + 22827Y^{X} - 179487Y^{XI} + etc.$$

172. On voit évidemment, que les coëfficiens numériques de ces séries sont identiquement les mêmes que ceux des facultés à exposant négatif, qui ont été rapportés en 112. Cela n'est pas étonnant, parceque les uns et les autres doivent être les différences premières, secondes, troisièmes, quatrièmes etc. des puissances des nombres en progression naturelle, 1, 2, 3, 4, 5 etc. Ainsi, le terme général de ces coëfficiens étant $(-m)\,J\,n$, on en tire le théorème général qui en suit :

THÉOREME.

173. *La différence de l'ordre m, ou* $\Delta^m Y$, *est égale à* 1^{mI1}, *multiplié par la série* $Y^m - (-m)\,J\,1$, $Y^{m-1} + (-m)\,J\,2$, $Y^{m-2} - (-m)\,J\,3$, $Y^{m-3} + (-m)\,J\,4$, Y^{m-4} — *etc.* Ainsi donc, pour avoir l'expression très-générale de $\Sigma^m Y$, d'un ordre de sommation quelconque, on n'aura qu'à supposer m négatif, et mettre $-m$ à la place de $+m$. Il en résultera le théorème suivant :

THÉOREME.

174. $1^{(m-1)I1}\,\Sigma^m Y = {}^{m}Y + mJ1,\ {}^{m-1}Y + mJ2,\ {}^{m-2}Y + mJ3,\ {}^{m-3}Y + mJ4,\ {}^{m-4}Y + etc.$ Le théorème général de cette suite est donc $mJn,\ {}^{m-n}Y$. Le premier terme dont le numérateur s'évanouit, sera donc $mJm,\ Y$; l'autre $mJ(m+1),\ Y'$; le troisième $mJ(m+2),\ Y''$ *etc.* Tous ces termes sont supposés avoir pour dénominateur commun la différentielle dy ; ainsi, substituant à la place des coëfficiens généraux mJm, $mJ(m+1)$, $mJ(m+2)$ *etc.* les rapports différentiels de ces variables, et multipliant ces termes successi-

vement par Y, Y', Y'' *etc.* on aura la suite de termes, procédant à l'infini, et qui, joints aux premiers, donnent la valeur de $1^{(m-1)I1}\Sigma^m Y$. C'est ainsi qu'enfin on parvient aux séries générales de sommation, que nous allons communiquer aux géomètres, et qui ont l'avantage de pouvoir être rendues convergentes à volonté, *dans tous les cas.*

$$\Sigma\, Y = {}'Y + \alpha\, Y + \beta\, Y' + \delta\, Y''' + \zeta\, Y^{V} + \vartheta\, Y^{VII} + \varkappa\, Y^{IX} + \mu\, Y^{XI} + \text{etc.}$$

$$\Sigma^2 Y = {}''Y + {}'Y + (\alpha - \beta)\, Y + \beta\, Y' - \delta\, Y'' + \delta\, Y''' - \zeta\, Y^{IV} + \zeta\, Y^{V} - \vartheta\, Y^{VI} + \vartheta\, Y^{VII} - \varkappa\, Y^{VIII} + \varkappa\, Y^{IX} - \text{etc.}$$

1. 2 $$\Sigma^3 Y = {}'''Y + 3\,{}''Y + 2\,{}'Y + (2\alpha - 3\beta)\, Y + (2\beta + \delta)\, Y' - 3\delta\, Y'' + (2\delta + \zeta)\, Y''' - 3\zeta\, Y^{IV} + (2\zeta + \vartheta)\, Y^{V} - 3\vartheta\, Y^{VI} + (2\vartheta + \varkappa)\, Y^{VII} - 3\varkappa\, Y^{VIII} + (2\varkappa + \mu)\, Y^{IX} - 3\mu\, Y^{X} + (2\mu + \xi)\, Y^{XI} - \text{etc.}$$

1. 2. 3 $$\Sigma^4 Y = {}^{IV}Y + 6\,{}'''Y + 11\,{}''Y + 6\,{}'Y + (6\alpha - 11\beta - \delta)\, Y + (6\beta + 6\delta)\, Y' - (11\delta + \zeta)\, Y'' + (6\delta + 6\zeta)\, Y''' - (11\zeta + \vartheta)\, Y^{IV} (6\zeta + 6\vartheta)\, Y^{V} - (11\vartheta + \varkappa)\, Y^{VI} + (6\vartheta + 6\varkappa)\, Y^{VII} - (11\varkappa + \mu)\, Y^{VIII} + (6\varkappa + 6\mu)\, Y^{IX} - (11\mu + \xi)\, Y^{X} + \text{etc.}$$

1. 2. 3. 4 $$\Sigma^5 Y = {}^{V}Y + 10\,{}^{IV}Y + 35\,{}'''Y + 50\,{}''Y + {}'Y + (24\alpha - 50\beta - 10\delta)\, Y + (24\beta + 35\delta + \zeta)\, Y' - (50\delta + 10\zeta)\, Y'' + (24\delta + 35\zeta + \vartheta)\, Y''' - (50\zeta + 10\vartheta)\, Y^{IV} + (24\zeta + 35\vartheta + \varkappa)\, Y^{V} - (50\vartheta + 10\varkappa)\, Y^{VI} + (24\vartheta + 35\varkappa + \mu)\, Y^{VII} - (50\varkappa + 10\mu)\, Y^{VIII} + (24\varkappa + 35\mu + \xi)\, Y^{IX} - \text{etc.}$$

1. 2. 3. 4. 5 $$\Sigma^6 Y = {}^{VI}Y + 15\,{}^{V}Y + 85\,{}^{IV}Y + 225\,{}'''Y + 274\,{}''Y + {}'Y + (120\alpha - 274\beta - 85\delta - \zeta)\, Y + (120\beta + 225\delta + 15\zeta)\, Y' - (274\delta + 85\zeta + \vartheta)\, Y'' + (120\delta + 225\zeta + 15\vartheta)\, Y''' - (274\zeta + 85\vartheta + \varkappa)\, Y^{IV} + (120\zeta + 225\vartheta + 15\varkappa)\, Y^{V} - (274\vartheta + 85\varkappa + \mu)\, Y^{VI} + (120\vartheta + 225\varkappa + 15\mu)\, Y^{VII} - (274\varkappa + 85\mu + \xi)\, Y^{VIII} + \text{etc.}$$

175. Il ne reste donc plus qu'à évaluer numériquement les coëfficiens de ces séries, pour leur donner dans la pratique du calcul une utilité immédiate. On trouvera

$$\Sigma\, Y = {}'Y + \tfrac{1}{2}\, Y + \frac{Y'}{12} - \frac{Y'''}{120} + \frac{Y^{V}}{252} - \frac{Y^{VII}}{240} + \frac{Y^{IX}}{132} - \frac{691\, Y^{XI}}{12.\,13.\,210} + \frac{Y^{XIII}}{12} - \text{etc.}$$

1 $$\Sigma^2 Y = {}''Y + {}'Y + \frac{5Y}{12} + \frac{Y'}{12} + \frac{Y''}{120} - \frac{Y'''}{120} - \frac{Y^{IV}}{252} + \frac{Y^{V}}{252} + \frac{Y^{VI}}{240} - \frac{Y^{VII}}{240} - \frac{Y^{VIII}}{132} + \frac{Y^{IX}}{132} + \frac{691\, Y^{X}}{12.\,13.\,210} - \frac{691\, Y^{XI}}{12.\,13.\,210} - \frac{Y^{XII}}{12} + \text{etc.}$$

$$1.\ 2\ \Sigma^3 Y = {}'''Y + 3''Y + 2'Y + \frac{3Y}{4} + \frac{19\,Y'}{120} + \frac{Y''}{40} - \frac{4Y'''}{165} - \frac{Y^{IV}}{84} + \frac{19\,Y^{V}}{5040}$$
$$+ \frac{Y^{VI}}{80} - \frac{Y^{VII}}{1320} - \frac{Y^{VIII}}{44} - \frac{2141\,Y^{IX}}{360360} + \frac{691\,Y^{X}}{10920} + \frac{337\,Y^{XI}}{8190}\ etc.$$

$$1.\ 2.\ 3\ \Sigma^4 Y = {}^{IV}Y + 6'''Y + 11''Y + 6'Y + \frac{251\,Y}{120} + \frac{9Y'}{20} + \frac{221\,Y''}{2520} - \frac{11\,Y'''}{420}$$
$$- \frac{199\,Y^{IV}}{5040} - \frac{Y^{V}}{840} + \frac{101\,Y^{VI}}{2640} + \frac{9\,Y^{VII}}{440} - \frac{2039\,Y^{VIII}}{32760} - \frac{4871\,Y^{IX}}{60060}$$
$$+ \frac{4871\,Y^{X}}{32760}\ etc.$$

$$1.\ 2.3.\ 4\ \Sigma^5 Y = {}^{V}Y + 10\,{}^{IV}Y + 35'''Y + 50''Y + {}'Y + \frac{95\,Y}{12} + \frac{863\,Y'}{504} + \frac{95\,Y''}{252}$$
$$- \frac{47\,Y'''}{720} - \frac{79\,Y^{IV}}{504} - \frac{159\,Y^{V}}{3696} + \frac{35\,Y^{VI}}{264} + \frac{51913\,Y^{VII}}{360360}$$
$$- \frac{6049\,Y^{VIII}}{36036} - \frac{34097\,Y^{IX}}{72072}\ etc.$$

$$1.2.3.4.5\ \Sigma^6 Y = {}^{VI}Y + 15\,{}^{V}Y + 85\,{}^{IV}Y + 225'''Y + 274''Y + {}'Y + \frac{19087\,Y}{504}$$
$$+ \frac{1375\,Y'}{504} + \frac{9829\,Y''}{5040} - \frac{19\,Y'''}{112}\ etc.$$

176. Ces séries ne sont véritablement finies, que dans les cas où les rapports différentiels Y', Y'', Y''' *etc.* deviennent quelque part égaux à zéro. Heureusement il n'est pas nécessaire qu'elles le soient, parce que, quelqu'infinies qu'elles soient, l'analyse nous présente des moyens, de les rendre convergentes à volonté. Nous ne pouvons mieux éclaircir ceci, que par le logarithme même de la faculté a^{mIr}, qui est proprement le but, vers lequel aboutissent nos recherches.

PROBLEME.

177. *Déterminer le logarithme hyperbolique de la faculté* a^{m+1Ir}.

SOLUTION.

178. Ce logarithme étant égal à la somme des logarithmes suivants: $Log.\ a + Log.\ (a+r) \ldots\ldots + Log.\ (a+mr)$; la lettre m sera proprement la variable du problème général, qui y étoit désignée par y, et qui dans le cas présent a pour différence *l'unité*; de plus, ayant $Y = Log.\ (a+mr)$; il y

aura $Y' = \frac{r}{a+mr}$; $Y'' = -\frac{r^2}{2(a+mr)^2}$; $Y''' = +\frac{r^3}{3(a+mr)^3}$; $Y^{IV} = -\frac{r^4}{4(a+mr)^4}$, *etc. etc.* Quant à $'Y$, ou $\int Y\,dy$, cette intégrale sera égale à $\left(\frac{a}{r}+m\right) Log. \frac{a+mr}{e}$. Enfin, l'intégrale devant s'évanouir pour $m=0$, on aura $Log.\ hyp.\ a^{m+1\,Ir} = -m + \left(\frac{1}{2}-\frac{a}{r}\right) Log.a + \left(m+\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right) Log.\ (a+mr) - \Gamma\frac{r}{a} + \Gamma\frac{r}{a+mr}$.

DÉFINITION.

179. Je me sers pour la première fois de la notation $\Gamma\frac{r}{a}$, $\Gamma\frac{r}{a+mr}$. Il me reste à expliquer à quoi sert ici la lettre grecque *gamma*. Je déclare donc que je désignerai généralement par Γy la série $\beta y + \frac{1}{3}\delta y^3 + \frac{1}{5}\zeta y^5 + \frac{1}{7}\vartheta y^7 + \frac{1}{9}\varkappa y^9 + \frac{1}{11}\mu y^{11} + etc.$ les valeurs absolues des nombres β, δ, ζ, *etc.* étant toujours celles que nous avons données en 129. De plus, comme la suite nous apprendra que cette fonction a besoin d'une dénomination particulière, pour ne pas faire de nom nouveau, je dirai simplement *le gamma* de la variable y.

180. Le *gamma* de *zéro* est donc *zéro* lui-même. Le *gamma* de $-y$ est égal au *gamma* de y, pris en sens contraire. Quant aux *gamma* des autres nombres, ce sont pour la plupart des quantités transcendantes d'un genre entièrement nouveau. Dans de certains cas particuliers ces *gamma* sont réductibles aux logarithmes hyperboliques, dans d'autres à la quadrature du cercle.

181. Otant du logarithme de $a^{m+1\,Ir}$ celui de $a+mr$, on trouve celui de la faculté $a^{m\,Ir}$ exprimé par $-m + m\,Log.\,a + \left(m-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right) Log.\frac{a+mr}{a} - \Gamma\frac{r}{a} + \Gamma\frac{r}{a+mr}$.

PROBLEME.

182. *Trouver le gamma d'une quantité quelconque proposée*, $\frac{r}{a}$.

PREMIER CAS.

183. Si $\frac{r}{a}$ est une fraction peu considérable, qui n'excède pas $\frac{1}{7}$ ou $\frac{1}{8}$, la solu-

tion du problème se présente d'elle-même; la suite $\frac{\beta r}{a} + \frac{\delta r^3}{3a^3} + \frac{\zeta r^5}{5a^5} + \frac{\vartheta r^7}{7a^7} + etc.$ ou $\frac{r}{12a} - \frac{r^3}{360a^3} + \frac{r^5}{1260a^5} - \frac{r^7}{1680a^7} + etc.$ étant tellement convergente alors, que ses trois premiers termes suffisent pour en trouver la valeur jusqu'à neuf décimales, sans qu'il y ait l'erreur *d'un* dans la dernière chiffre.

SECOND CAS.

184. Dans tous les autres cas où $\frac{r}{a}$ n'est pas une fonction très-petite, y compris même ceux où il excéderoit un nombre quelconque, on se servira de la méthode suivante. On choisira à volonté un nombre entier quelconque m; je le prends ordinairement égal à 7, 8, ou *neuf* tout au plus. On calculera le *gamma* de la fraction $\frac{r}{a+mr}$, qui sera toujours plus petite que $\frac{1}{m}$, quelque soit la quantité $\frac{r}{a}$. Ensuite on aura $\Gamma\frac{r}{a} = \Gamma\frac{r}{a+mr} - m - Log.a^{mIr} + m\,Log.\,a + \left(m - \frac{1}{2} + \frac{a}{r}\right) Log.\,\frac{a+mr}{a}$. Ainsi le *gamma* de la fraction $\frac{r}{a+mr}$ servira à trouver le *gamma* de la fraction proposée $\frac{r}{a}$; il n'en coutera que sept ou huit logarithmes hyperboliques, qu'il faudra ajouter ensemble.

185. La supposition de $a = 1$ donne à cette règle une forme plus simple, sans qu'elle ôte rien à sa généralité. On aura $\Gamma r = \Gamma\frac{r}{1+mr} - m - Log.1^{mIr} + \left(m - \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right) Log.\,(1+mr)$.

186. *Trouver le gamma de l'unité.* Ayant $r = 1$, $a = 1$, on prendra à volonté $m = 9$, pour avoir $\Gamma 1 - \Gamma\frac{1}{10} - Log.504.720 - 9 + \frac{19}{2} Log.10$. On trouvera

$$\begin{aligned}
Log.\ 504 &= 6{,}22257626807\,;\\
Log.\ 720 &= 6{,}57925121201\,;\\
Log.\ 504.720 &= 12{,}80182748008\,;\\
\text{Ensuite } Log.\ 10 &= 2{,}302585092994\,;\\
10\ Log.\ 10 &= 23{,}02585092994\,;\\
\tfrac{1}{2}\ Log.\ 10 &= 1{,}15129254650\,;
\end{aligned}$$

Donc $\frac{19}{2}$ *Log.* 10 = 21,87455838344 ;
Otez 12,80182748008 ;
Il restera 0,07273090336.

Reste à déterminer le *gamma de* $\frac{1}{10}$. On trouvera presque sans calcul :

son premier terme = + 0,00833333333 ;
le second = — 0,00000277777 ;
le troisième = + 0,00000000794 ;
le quatrième = — 0,00000000006 ;

On aura $\Gamma 1 = 0,08106146679$; sans qu'il y ait une erreur dans la dernière décimale.

187. *Proposons le gamma de* 100. Prenant à volonté $m = 8$, on aura $\Gamma 100 = \Gamma \frac{100}{801} - 8 -$ *Log.* (101. 201. 301. 401. 501. 601. 701) + $(8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{100})$ *Log.* 801. Nous laisserons au lecteur de faire ce calcul qui est très-facile ; il trouvera $\Gamma 100 = 1,434007956$.

188. En suivant la même route, et prenant $m = 8$, on trouvera le *gamma* de 10000 égal à $\Gamma \frac{10000}{80001} - 8 -$ *Log.* (10001. 20001. 30001. 40001. 50001. 60001. 70001) + $(8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{10000})$ *Log.* 80001. Ici on sera obligé d'employer les logarithmes vulgaires, et de multiplier ensuite par 2,302585. Si l'on veut se borner à sept décimales, on n'aura besoin que des deux premiers termes de la série de *gamma*. On trouvera $\Gamma 10000 = 3,6871950$.

189. Généralement, si r est un nombre très-grand, on trouvera le *gamma* de r *à très-peu près* égal à $\frac{1}{2}$ *Log.* $\frac{r}{2\pi}$. Le *gamma* d'un nombre véritablement infini est donc infiniment grand, mais il s'en faut de beaucoup que ce soit un infini du premier ordre. C'est ainsi que l'unité, suivie d'une centaine de zéros, n'auroit pour *gamma* qu'un nombre très-médiocre, égal à 114,2103 à-peu-près.

190. Voici la table des *gammas* des douze premiers termes, de la progression naturelle des nombres.

$\Gamma 1 = 0,081061467$;
$\Gamma 2 = 0,153416410$;
$\Gamma 3 = 0,216713399$;
$\Gamma 4 = 0,272510402$;
$\Gamma 5 = 0,322293915$;
$\Gamma 6 = 0,377210412$;
$\Gamma 7 = 0,397891175$;

Γ 8

$$\Gamma\, 8 = 0{,}435437993;$$
$$\Gamma\, 9 = 0{,}470159364;$$
$$\Gamma\, 10 = 0{,}502457220;$$
$$\Gamma\, 11 = 0{,}532653608;$$
$$\Gamma\, 12 = 0{,}561010299.$$

THÉOREME.

191. *Le gamma de l'unité, ou* $\Gamma\, 1$, *est égal à* $1 - \frac{1}{2}\, Log.\, 2\pi$.

DÉMONSTRATION.

192. Considérons la produite $\frac{2.\,2}{1.\,3}.\frac{4.\,4}{3.\,5}.\frac{6.\,6}{5.\,7}\ldots\ldots\frac{2n.\,2n}{2n-1.\,2n+1}$. Elle est égale à $\frac{2^{2n}\left(1^{nI1}\right)^2}{\left(1^{nI2}\right)^2\,(2n+1)}$. Ayant démontré en 21, que la faculté 1^{nI2} n'est autre chose que 1^{2nI1}, divisé par $2^n\, 1^{nI1}$, cette expression se réduira à $\frac{2^{4n}\left(1^{nI1}\right)^4}{\left(1^{2nI1}\right)^2\,(2n+1)}$. On sait que cette produite, continuée à l'infini, donne la moitié du rapport du diamètre à la circonférence, ou $\frac{1}{2}\pi$. Ainsi $\frac{\pi}{2}$ est ce que devient l'expression $\frac{2^{4n}\left(1^{nI1}\right)^4}{\left(1^{2nI1}\right)^2\,(2n+1)}$, dans le cas de n infiniment grand.

193. Prenons les logarithmes des deux côtes. On tire de 181. $Log.\, 1^{nI1} = -n + (n+\frac{1}{2})\, Log.\,(n+1) - \Gamma\, 1 + \Gamma\, \frac{1}{n+1}$; et dans le cas de n infiniment grand, $Log.\, 1^{nI1} = -n + (n+\frac{1}{2})\, Log.\,(n+1) - \Gamma\, 1$. On aura de même $Log.\, 1^{2nI1} = -2n + (2n+\frac{1}{2})\, Log.\,(2n+1) - \Gamma\, 1$. Il s'ensuit que $Log.\,\pi - Log.\, 2 = -Log.\, 2 + 2 + Log.\, n - 2\Gamma\, 1 - Log.\,(2n+1)$. Mais dans le cas de n infiniment grand, le logarithme de $2n+1$ ne diffère de celui de $2n$ que d'une quantité infiniment petite. L'équation précédente se réduira donc à $Log.\,\pi = -Log.\, 2 + 2 - 2\Gamma\, 1$; d'où l'on tire $\Gamma\, 1 = 1 - \frac{1}{2}\, Log.\, 2\pi$. On peut donc dire que les logarithmes de toutes les facultés

1^{nI1}, de même que ceux des intégrales $\int t^{m-1} e^{-t^n} dt$, qui y sont réductibles. dépendent en quelque sorte de la quadrature du cercle.

THÉOREME.

194. *Le gamma de deux, ou* $\Gamma 2$, *est égal à* $\frac{1 - Log. 2}{2}$. Car appliquant la formule de 181 au cas de $a = 1$, $r = 2$, $m = \frac{1}{2}$, on trouvera le logarithme de la faculté $1^{1:2\ I2}$ égale à $-\frac{1 - Log. 2}{2} - \Gamma 2 + \Gamma 1$. Or, ledit logarithme doit être nécessairement égal à la moitié de celui de $\frac{2}{\pi}$. D'un autre côté, on vient de trouver $\Gamma 1 = 1 - \frac{1}{2} Log. 2\pi$. Réduction faite, on aura $\Gamma 2$ égal à la moitié de $1 - Log. 2$.

195. Le premier de ces deux théorèmes nous faisant connoître le *gamma* de *un*, le second celui de *deux*, l'on voit que les *gammas* de toutes les fractions, de l'une des deux formes générales $\frac{1}{m+1}$ et $\frac{2}{2m+1}$ se réduisent à une pure addition de logarithmes hyperboliques. Car on a $\Gamma \frac{1}{m+1} = \Gamma 1 + m + Log. 1^{mI1} - (m + \frac{1}{2}) Log. (m+1)$; et $\Gamma \frac{2}{2m+1} = \Gamma 2 + m + Log. 1^{mI2} - m\ Log. (2m+1)$.

196. Ces théorèmes sont aussi vrais que rigoureusement démontrés. On peut parvenir de même à une expression de Γr, en y employant les logarithmes des nombres négatifs. Mais ce qu'il y a de très-singulier, c'est qu'en suivant à cet égard les principes généralement reçus, on parvient à un résultat absolument faux. En voici la démonstration; je la crois digne à tous égards de l'attention des géomètres.

197. Je reprends la formule $\Gamma r - \Gamma \frac{r}{1+mr} = -m - Log. 1^{mIr} + \left(\frac{1}{r} + m - \frac{1}{2}\right) Log. (1 + mr)$. J'aurai de même pour un autre exposant quelconque n, $\Gamma r - \Gamma \frac{r}{1+nr} = -n - Log. 1^{nIr} + \left(\frac{1}{r} + n - \frac{1}{2}\right)$. Je déterminerai n de manière, que $\frac{r}{1+nr}$ devienne égal à $\frac{r}{1+mr}$, pris négativement. Ainsi,

faisant $n = -\frac{2}{r} - m$; et mettant partout $-\frac{2}{r} - m$ à la place de n, j'aurai $\Gamma r + \Gamma \frac{r}{1+mr} = \frac{2}{r} + m - Log.\, 1^{m-(2:r)Ir} - \left(\frac{1}{r} + m + \frac{1}{2}\right) Log.\,(-1-mr)$. Enfin, faisant $m = o$, j'aurai $2\Gamma r = \frac{2}{r} - Log.\, 1^{-2:rIr} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\right) Log.\,(-1)$: équation, laquelle moyennant les réductions enseignées au commencement de ce chapitre, se réduit à $2\Gamma r = \frac{2}{r} + Log.(-1)^{2:rIr} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\right) Log.\,(-1)$.

198. Voilà donc $2\Gamma r$ réduit aux logarithmes des nombres négatifs. Ces logarithmes doivent nécessairement se détruire; et il n'est pas difficile en effet de les faire sortir du calcul. Faisons pour plus de simplicité, $\frac{1}{r} + \frac{1}{2} = p$, $\frac{1}{r} - \frac{1}{2} = q$. Ayant alors $\frac{2}{r} = p + q$, l'équation deviendra $2\Gamma r = \frac{2}{r} + Log.\,(-1)^{p+qIr} - p\, Log.\,(-1)$; qui se réduit premièrement à $2\Gamma r = \frac{2}{r} + Log.\,(r:2)^{qIr} + Log.\,(-1)^{pIr} - p\, Log.\,(-1)$; ensuite, en vertu de 6 à $2\Gamma r = \frac{2}{r} + q\, Log.\left(\frac{r}{2}\right) + Log.\, 1^{qI2} + Log.\,(-1)^{pIr} - p\, Log.\,(-1)$.

199. En se conformant ici aux principes généralement reçus des nombres négatifs, la faculté $(-1)^{pIr}$ doit être parfaitement identique avec 1^{pI-r}, multiplié par la puissance $(-1)^{p}$. On aura donc $2\Gamma r = \frac{2}{r} + q\, Log.\frac{r}{2} + Log.\, 1^{qI2} + Log.\, 1^{pI-r}$. La faculté 1^{pI-r} se réduisant naturellement à $(1-qr)^{pIr}$, égale à $(r:2)^{pIr}$, qui se réduit encore à 1^{pI2}, multiplié par $(r:2)^{p}$, l'expression se réduira donc à $2\Gamma r = \frac{2}{r} + (p+q)\, Log.\frac{r}{2} + Log.\, 1^{pI2} + Log.\, 1^{qI2}$: ou bien, $2\Gamma r = \frac{2}{r}\left(1 + Log.\frac{r}{2}\right) + Log.\, 1^{pI2} + Log.\, 1^{qI2}$

200. On simplifie encore cette expression, si l'on fait attention, qu'ayant $p = q + 1$, on doit avoir $1^{pI2} = \left(\frac{2}{r}\right) 1^{qI2}$; ce qui réduit enfin l'expression de $2\Gamma r$ à $\frac{2}{r} + \left(1 - \frac{2}{r}\right) Log. \frac{2}{r} + 2\, Log.\, 1^{qI2}$. Ici, si l'on fait $r = \frac{2}{2m+1}$, l'on aura $\Gamma \frac{2}{2m+1} = \frac{1}{2} + m - m\, Log. (2m+1) + Log.\, 1^{mI2}$; expression débarrassée de tous ses logarithmes de nombres négatifs; expression qu'on a trouvée en suivant à cet égard, avec la plus grande rigueur, les notions généralement reçues sur les logarithmes de ces nombres; et néanmoins entièrement fausse. Il y manque $-\frac{Log.\, 2}{2}$; la véritable expression étant $\Gamma \frac{2}{2m+1} = \frac{1 - Log.\, 2}{2} + m - m\, Log. (2m+1) + Log.\, 1^{mI2}$. *J'avoue franchement que toutes les peines que je me suis données pour trouver la raison de ce paralogisme, ont été inutiles jusqu'ici; j'aurai infiniment d'obligation au géomètre, qui voudra bien me l'indiquer. Il me semble qu'elle tient essentiellement à notre théorie des puissances fractionnaires et des logarithmes des nombres négatifs, et que le théorème* $Log. (-a) = Log.\, a + Log. (-1)$, *malgré son extrême apparence de simplicité, est encore bien loin d'être rigoureusement démontré.*

THÉOREME.

201. *Le logarithme hyperbolique de l'intégrale* $\int t^{\mu n - n - 1} e^{-t^n} dt$, *prise depuis* $t = 0$ *jusqu'à* t *infini, est égal à* $\frac{1}{2} Log.\, 2\pi + (\mu + m - \frac{1}{2}) Log. (\mu + m) + \Gamma \frac{1}{\mu + m} - (\mu + m) - Log. (\mu n - n)\, \mu^{mI1}$: m étant un nombre entier quelconque entièrement arbitraire. Ce théorème est fondé sur ce que l'intégrale susdite est égale à $\frac{1^{(\mu-1)I1}}{\mu n - n}$. Le reste est une pure application des théorèmes déjà connus.

EXEMPLE.

202. *On demande le logarithme hyperbolique de l'intégrale* $\int t^2 e^{-t^4} dt$? Ayant ici $n = 4$; $\mu n - n - 1 = 2$; on trouvera $\mu - 1 = \frac{3}{4}$. Ensuite, supposant le nombre arbitraire m égal à 8, le logarithme de l'intégrale demandée se réduira

en vertu de la formule, à $\Gamma\frac{4}{39} - \frac{39}{4} - Log.\,(300.\ 437.\ 891.\ 1519) + \frac{2\,Log.\,\pi + 37\,Log.\,39}{4}$. En voici le calcul.

$$\begin{aligned}
Log.\ 39 &= 3{,}663561646;\\
37\ Log.\ 39 &= 135{,}551780907;\\
2\ Log.\ \pi &= 2{,}289459772;\\
\text{Somme} &= 137{,}841240679;\\
\text{Divisée par } 4 \ldots &\ 34{,}460310170;\\
\text{D'autre part: } \tfrac{39}{4} &= 9{,}750000000;\\
Log.\ 300 &= 5{,}703782475;\\
Log.\ 437 &= 6{,}079933195;\\
Log.\ 891 &= 6{,}792344427;\\
Log.\ 1519 &= 7{,}325807503;\\
\text{Somme} &= 35{,}651867600.
\end{aligned}$$

Otez cette somme de la première, il reste $-$ 1,191557430. Reste à y ajouter le gamma de la fraction $\frac{4}{39}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\text{le premier terme} &= +\ 0{,}008547010;\\
\text{le second} &= -\ 0{,}000002997;\\
\text{le troisième} &= +\ 0{,}000000009.
\end{aligned}$$

On aura donc $\Gamma\frac{4}{39} = 0{,}008544022$. On en tire le logarithme hyperbolique de l'intégrale proposée $= -$ 1,183013407; son logarithme vulgaire égal à 9,486223805; l'intégrale elle-même 0,30635414; ce qui répond parfaitement à la solution donnée en 148.

PROBLEME.

203. *Les quantités a, m, r étant fractionnaires, irrationnelles, ou transcendantes, comme on voudra, déterminer le logarithme hyperbolique de la faculté* $(+a)^{ml+r}$

SOLUTION.

204. Le problème peut être regardé comme résolu par la formule générale de 181; et il l'est en effet. Mais elle renferme les gamma des deux fractions $\frac{r}{a}$ et $\frac{r}{a+mr}$, qu'il faut déterminer séparément par la solution donnée en 184, et qui exigent l'introduction de deux nombres arbitraires entiers. Ainsi, prenant à volonté deux nombres arbitraires entiers h, k, qu'on pourra choisir entre *six* et *neuf*, et qui peuvent aussi être égaux entr'eux,

le logarithme demandé se trouvera exprimé par la formule générale qui suit:

$$Log.hyp.(+a)^{mI+r} = h - k - m + Log.a^{hIr} - Log.(a+mr)^{kIr}$$
$$-\left(\frac{a}{r}+h-\frac{1}{2}\right)Log.(a+hr)+\left(\frac{a}{r}+m+k-\frac{1}{2}\right)Log.(a+mr+kr)$$
$$-\Gamma\frac{r}{a+hr}+\Gamma\frac{r}{a+mr+kr}.$$

EXEMPLE.

205. Proposons le logarithme de la faculté $(2:5)^{\frac{1}{2}I1}$. Prenant à volonté $h = 7$, $k = 8$, la formule qu'on vient de donner se réduira à $-\frac{3}{2} + Log.(1024.\ 128.\ 935) - Log.(1729.\ 667.\ 4661) - \frac{69}{10} Log.\frac{37}{5} + \frac{42}{5} Log.\frac{89}{10} - \Gamma\frac{5}{37} + \Gamma\frac{10}{89}$. On trouve

Pour les quantités positives:	*Pour les quantités négatives:*
$Log.\ 89 = 4,4886363697$;	$Log.\ 37 = 3,6109179126$;
$Log.\ 10 = 2,3025850930$;	$Log.\ 5 = 1,6094379124$;
$Log.\ \frac{89}{10} = 2,1860512767$;	$Log.\ \frac{37}{5} = 2,0014800002$;
$\frac{42}{5} Log.\ \frac{89}{10} = 18,3628307243$;	$\frac{69}{10} Log.\ \frac{37}{5} = 13,8102120014$;
$Log.1024 = 6,9314718056$;	$Log.1729 = 7,4552984857$;
$Log.\ 935 = 6,4805465293$;	$Log.\ 667 = 6,5027900459$;
$Log.\ 128 = 4,8520302639$;	$Log.4661 = 8,4469852964$;
$Somme = 36,9868793231$;	$Somme = 36,2152858294$;

La somme de ces deux nombres sera égale à 0,7715934937. Il faut y ajouter $-\frac{3}{2} - \Gamma\frac{5}{37} + \Gamma\frac{10}{89}$. Les trois premiers termes de la série donnent $\Gamma\frac{5}{37} = 0,011254441$; et $\Gamma\frac{10}{89} = 0,009359371$. On aura donc $Log.\ a^{mIr} = -0,730301576$; son logarithme vulgaire 9,6828340555; la faculté elle-même 0,4817638; ce qui répond à la solution donnée en 153.

PROBLEME.

206. *Les mêmes choses étant supposées, on demande une formule semblable, qui exprime le logarithme hyperbolique de la faculté* $(-a)^{mI-r}$

SOLUTION.

207. Pour éviter les logarithmes de nombres négatifs, il faut prendre les deux quantités arbitraires dans la classe des quantités négatives. Ainsi, prenant à volonté deux nombres entiers quelconques p, q, on trouvera pour le logarithme hyperbolique de $(-a)^{mI-r}$ la formule générale qui suit:

$$Log.\ hyperb.\ (-a)^{mI-r} = -p+q-m-Log.(r-a)^{pIr} + Log.(r-mr-a)^{qIr}$$
$$+(p+\tfrac{1}{2}-\tfrac{a}{r})Log.(pr-a)-(q-m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{a}{r})Log.(qr-mr-a)$$
$$+\Gamma\frac{r}{pr-a}-\Gamma\frac{r}{qr-mr-a}.$$

EXEMPLE.

208. On demande le logarithme de la faculté $(-2:5)^{\frac{1}{2}I-1}$? Ayant $a=\frac{2}{5}$, $r=1$, $m=\frac{1}{2}$, et prenant à discrétion $p=q=7$, la formule susdite se réduira à $-\frac{1}{2}+Log.\ (527.\ 2501)-Log.\ (1196.\ 576.\ 32)+\frac{71}{10}Log.\ \frac{66}{10}-\frac{66}{10}Log.\frac{61}{10}+\Gamma\frac{10}{66}-\Gamma\frac{10}{61}$. On trouvera

Pour les quantités positives :	*Pour les quantités négatives :*
$Log.\ 66 = 4,1896547420$;	$Log.\ 61 = 4,1108738642$;
$Log.\ 10 = 2,3025850930$;	$Log.\ 10 = 2,3025850930$;
$Log.\ \frac{66}{10} = 1,8870696490$;	$Log.\ \frac{61}{10} = 1,8082887712$;
$\frac{71}{10}Log.\ \frac{66}{10} = 13,3981945079$;	$\frac{66}{10}Log.\ \frac{61}{10} = 11,9347058899$;
$Log.\ 527 = 6,2672005485$;	$Log.\ 1196 = 7,0867379345$;
$Log.\ 2501 = 7,8244459309$;	$Log.\ 576 = 6,3561076607$;
$Somme = 27,4898409874$;	$Log.\ 32 = 3,4657359028$;
	$Somme = 28,8432873 88$;

somme des deux $-1,353446401$. Il faut y ajouter $-\frac{1}{2}+\Gamma\frac{10}{66}-\Gamma\frac{10}{61}$. On trouve par un calcul très-facile, $\Gamma\frac{10}{66}=0,012616662$; et $\Gamma\frac{10}{61}=0,013649056$. On aura donc pour logarithme hyperbolique de la faculté proposée $-1,854478795$; pour logarithme vulgaire $9,1946101$; la faculté elle-même sera égale à $0,1565345$; ce qui est conforme à la solution donnée en 153.

REMARQUE.

209. En comparant ensemble les solutions enseignées en 141, 203, 206, dont la première sert à trouver la faculté a^{mIr}, et dont l'autre mene au calcul de son logarithme hyperbolique, il est bien certain d'abord que les séries $1+Au+Buu+Cu^3+etc.$ de même que $1-Av+Bvv-Cv^3+etc.$ sont bien moins convergentes que la série qui fait connoître les gamma des fractions $\frac{r}{a+hr}$, $\frac{r}{a+mr+hr}$, attendu que les deux premiers termes de cette série donnent la valeur cherchée jusqu'à huit décimales de près. D'ail-

leurs ses coëfficiens sont constants ; on a toujours $\Gamma y = \frac{y}{12} - \frac{y^3}{360} + etc.$ tandis que les coëfficiens A, B, C, D *etc.* de la première série sont tous fonctions de l'exposant de la faculté m, et qu'à l'exception des douze cas dont nous avons donné la table en 141, il faut toujours faire préalablement le calcul de ces coëfficiens, dans chaque cas particulier. Il est donc réellement beaucoup plus facile de trouver le logarithme hyperbolique d'une faculté proposée, que de trouver immédiatement la faculté même ; et c'est ce que nous avions déjà avancé en 155.

PROBLEME.

210. *Transformer le logarithme hyperbolique d'une faculté proposée, en une série qui procède d'après les puissances décroissantes de m.*

SOLUTION.

211. Il n'y a qu'à développer la formule générale de 189. On trouvera, en faisant $\frac{a}{r} = c$,

$$Log.\, a^{m\Gamma r} = m\, Log.\, a - m - \Gamma\frac{1}{c} + (m + c - \tfrac{1}{2})\, Log.\, \frac{m}{c} + c$$
$$+ \frac{1}{m}\left(\beta - \frac{c}{2} + \frac{cc}{2}\right)$$
$$- \frac{1}{mm}\left(\beta c - \frac{cc}{4} + \frac{c^3}{6}\right)$$
$$+ \frac{1}{m^3}\left(\frac{\delta}{3} + \beta cc - \frac{c^3}{6} + \frac{c^4}{12}\right)$$
$$- \frac{1}{m^4}\left(\frac{3\delta c}{3} + \beta c^3 - \frac{c^4}{8} + \frac{c^5}{20}\right)$$
$$+ \frac{1}{m^5}\left(\frac{\zeta}{5} + \frac{6\delta cc}{3} + \beta c^4 - \frac{c^5}{10} + \frac{c^6}{30}\right)$$
$$- \frac{1}{m^6}\left(\frac{5\zeta c}{5} + \frac{10\delta c^3}{3} + \beta c^5 - \frac{c^6}{12} + \frac{c^7}{42}\right) \text{ etc. etc. etc.}$$

REMARQUE.

212. Voilà donc le logarithme hyperbolique d'une faculté proposée, transformée en une série d'autant plus convergente, que l'exposant m est un grand nombre. On en tirera facilement, si l'on veut, le théorème très-connu, par lequel le terme moyen de la puissance du binome $(1+1)^{2n}$ est à la somme de tous les termes 2^{2n}, comme $1 : \sqrt{n\pi}$. *Tels sont les principes analytiques, dont nous aurons besoin dans le chapitre qui suit, ayant pour objet les réfractions approchantes de l'horizon.*

CHAPITRE QUATRIÈME.

Réfractions qui approchent de l'horizon.

PROBLEME.

1. *La différentielle dX ayant $x-a$ pour un de ses facteurs, et c désignant quelque très-petite fraction, on demande la valeur de l'intégrale de $e^{X:c}\,dx$, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour une valeur de x, qui diffère peu de a.*

SOLUTION.

2. Désignons par K ce que devient X, lorsqu'on y suppose $x=a$; et introduisons la nouvelle variable t, telle que $ct=K-X$. De cette équation nous tirerons x en puissances ascendantes de t; nous aurons $x=Bt^{m}+Ct^{m+n}+Dt^{m+2n}+etc.$ Cela donne $dx=dt$, multiplié par $mBt^{m-1}+(m+n)Ct^{m+n-1}+(m+2n)Dt^{m+2n-1}+etc.$; et la différentielle proposée deviendra $e^{K:c}e^{-t}\,dt$, multiplié par $mBt^{m-1}+(m+n)Ct^{m+n-1}+(m+2n)Dt^{m+2n-1}+etc.$ L'intégrale du problème sera donc réduite aux intégrales de $t^{m-1}e^{-t}\,dt$; $t^{m+n-1}e^{-t}\,dt$ *etc.* prises de manière qu'elles s'évanouissent pour $t=o$. Ces intégrales n'étant plus infiniment grandes, et de plus, les coëfficiens B, C, D *etc.* devant former une suite très-convergente par la condition même du problème, le but qu'on se proposoit, est rempli.

3. La constante à ajouter dépend de la valeur de x, qui doit faire évanouir l'intégrale $\int e^{X:c}\,dx$. Supposons qu'elle doive s'évanouir pour $x=b$, valeur de x qui par la condition du problème diffère peu de $x=a$, et désignons par L ce que devient X, lorsqu'on y fait $x=b$. Soit de plus $cT=K-L$. On aura l'intégrale complette $\int e^{X:c}\,dx$, égale à $mB\int t^{m-1}e^{-t}\,dt+$

$(m+n)\, C\int t^{m+n-1} e^{-t}\, dt + etc. - m\, B\int T^{m-1} e^{-T}\, dT - (m+n)\, C\int T^{m+n-1} e^{-T}\, dT - etc.$

4. Dans cette formule les intégrales sont prises de manière qu'elles s'évanouissent pour $t=o$, $T=o$. Si on veut les prendre depuis t infini, T infini, il faudra les affecter des signes opposés ; on aura $\int e^{X:c}\, dx$ égal à $e^{K:c}$, multiplié par $m\, B\int T^{m-1} e^{-T}\, dt + (m+n)\, C\int T^{m+n-1} e^{-T}\, dT + etc. - m\, B\int t^{m-1} e^{-t}\, dt - (m+n)\, C\int t^{m+n-1} e^{-t}\, dt - etc.$

5. L'intégrale $\int e^{X:c}\, dx$, prise depuis $x=b$ jusqu'à la valeur de x, qui rend la fonction X un infini négatif, et qui répond à t infini, sera donc égale à $e^{K:c}$, multiplié par $mB\int T^{m-1} e^{-T}\, aT + (m+n)\, C\int T^{m+n-1} e^{-T}\, dT + etc.$; ayant $c\,T = K - L$.

6. Dans les cas enfin où l'intégrale $\int e^{X:c}\, dx$ doit s'évanouir pour $x=a$, la quantité T devenant *zéro* alors, et les intégrales $\int T^{m-1} e^{-T}\, dT$, $\int T^{m+n-1} e^{-T}\, aT$ *etc.* devant être prises depuis l'infini jusqu'à *zéro*, la formule intégrale se trouvera entièrement réduite aux facultés ; on aura $\int X\, dx = e^{K:c}$, multiplié par $1^{mI1}\, B + 1^{(m+n)I1}\, C + etc.$ Le problème est donc très-simple, tant que les exposants m, n, sont des nombres entiers. Si ces exposants sont fractionnaires, ayant 2 pour dénominateur, l'intégrale revient à la quadrature du cercle. Dans tous les autres cas, ce sera une affaire de facultés à exposant fractionnaire ; on les évaluera sans difficulté, moyennant les règles du chapitre précédent.

PROBLEME.

7. *Ayant* $-\dfrac{Y\, v\, dv}{\sqrt{(1-vv)}}$ *pour premier terme de la série qui exprime la différentielle* $\dfrac{c\, dR}{\omega}$, *la densité de l'air* Y *se trouvant égale à* $e^{\frac{v - Sin.\, A}{c}}$, *trouver l'intégrale de ce premier terme, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour* $v = Sin.\, A$; *l'angle* A *différant peu de* 90°.

SOLUTION.

8. Faisant $1 - vv = xx$, et $X = \sqrt{(1 - xx)} - Sin.\,A$, la différentielle proposée deviendra $e^{X:c}\,dx$. Ayant donc $dX = -\frac{x\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$; et cette fonction devant s'évanouir pour $x = 0$, ce qui donne $v = 1$, supposition qui par les conditions du problème diffère peu de $v = Sin.\,A$, on fera $K = 1 - Sin.\,A$, et on aura $ct = 1 - \sqrt{(1 - xx)}$; d'où l'on tire $x = \sqrt{2ct}$, multiplié par $1 - \frac{1}{4}ct - \frac{1.1}{4.8}c^2t^2 - \frac{1.1.3}{4.8.12}c^3t^3 - etc.$; et $dx = dt\sqrt{2c}$, multiplié par $\frac{1}{2}t^{-1:2} - \frac{1.3}{2.4}ct^{1:2} - \frac{1.1.5}{2.4.8}c^2t^{3:2} - \frac{1.1.3.7}{1.4.8.12}c^3t^{5:2} - etc.$ L'on aura enfin $\int e^{X:c}\,dx = e^{K:c}\sqrt{2c}$, multiplié par $\frac{1}{2}\int T^{-1:2}e^{-T}\,dT - \frac{1.3}{2.4}c\int T^{1:2}e^{-T}\,dt + etc. - \frac{1}{2}\int t^{-1:2}e^{-t}\,dt + \frac{1.3}{2.4}c\int t^{1:2}e^{-T}\,dt - etc.$; la quantité T étant égale à $\frac{1 - Sin.\,A}{c}$; et les intégrales étant prises depuis T infini, et t infini.

9. Le premier terme de la réfraction astronomique est ce que devient $\int e^{X:c}\,dx$, dans le cas de $v = 0$, qui est celui de $x = 1$, et de $t = \frac{1}{c}$. L'intégrale se trouvant réduite alors à la constante seule, la réfraction astronomique à des hauteurs très-approchantes de l'horizon sera égale à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}e^{\frac{1 - Sin.\,A}{c}}$, multiplié par $\frac{1}{2}\int T^{-1:2}e^{-T}\,dT - \frac{1.3}{2.4}c\int T^{1:2}e^{-T}\,dT + etc.\ etc.$

10. Le cas de $A = 90^\circ$ donne la réfraction horizontale : son premier terme sera donc égal à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, multiplié par $1^{\frac{1}{2}} - \frac{c}{4}1^{\frac{3}{2}}I_1 - \frac{1.1\,c^2}{4.8}1^{\frac{5}{2}}I_1 - etc.$; ce qui se réduit à $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$, multiplié par $1 - \frac{3}{8}c - \frac{3.5}{8.16}c^2 - \frac{9.5.7}{8.16.24}c^3 - \frac{9.25.7.9}{8.16.24.32}c^4 - etc.$ Supposant $\omega = 0{,}000275$; et la soutangente aux densités conformément à ce que nous en avons dit dans le premier chapitre, le second terme de cette série ne s'élevera pas à une seconde entière. Ainsi, supprimant ce second terme, le premier membre de la réfraction horizontale,

qui est multiplié par ω, sera réduit à $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$. Il n'est pas tems encore d'insister sur cette formule; nous remarquerons seulement, que son second terme ayant été trouvé assez petit pour être supprimé, on peut en agir de même avec toutes les réfractions très-approchantes de l'horizon; elles seront donc généralement égales à $\frac{\omega e^{T}}{\sqrt{\rho c}}$, multiplié par $\int T^{-1:2} e^{-T} dT$; ayant $T = \frac{1 - Sin. A}{c}$, et l'intégrale étant prise depuis T infini.

PROBLEME.

11. *Ayant* $\frac{Y dv}{(1-vv)^{3:2}}$ *pour second nombre de la série qui exprime la différentielle* $\frac{d\Phi}{\omega}$, *et l'angle A différant peu de* 90°, *déterminer l'intégrale de ce terme, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour* $x = A$.

SOLUTION.

12. La différentielle $\frac{dv}{(1-vv)^{3:2}}$ est celle de $\frac{v}{\sqrt{(1-vv)}}$. Ainsi, supposant $\frac{v}{\sqrt{(1-vv)}} = x$, ce qui donne $vv = \frac{xx}{1+xx}$, faisant de plus $X = v - Sin. A$, la différentielle proposée se changera en $e^{X:c} dx$. De plus on trouve $dX = dv = \frac{dx}{(1+xx)^{3:2}}$; expression qui s'évanouit pour un x infini, ce qui répond précisément à $v = 1$; supposition qui diffère très-peu de $v = Sin. A$, conformément à la condition du problème. On fera donc $K = 1 - Sin. A$; et on introduira la nouvelle variable t, telle que $ct = 1 - \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$; d'où l'on tire $x\sqrt{2ct} = 1 - \frac{3}{4}ct - \frac{5}{32}cc.tt - \frac{7}{128}c^3t^3 - \frac{45}{32.64}c^4t^4$ *etc.*; et $2dx\sqrt{2c} = dt$, multiplié par $-t^{-3:2} - \frac{3}{4}ct^{-1:2} - \frac{3.5}{4.8}c^2t^{1:2} - \frac{3.5.7}{4.8.12}c^3t^{3:2} -$ *etc.* On aura $2\int e^{X:c} dx\sqrt{2c} = e^{K:c}$, multiplié par $-\int T^{-3:2} e^{-T} dT -$ *etc.* $+ \int t^{-3:2} e^{-t} dt +$ *etc.* les intégrales étant généralement prises depuis t infini et T infini; et T étant égale à $\frac{1 - Sin. A}{c}$.

13. La réfraction astronomique est encore ce que devient cette intégrale dans le cas de $v = o$, ou de $t = \frac{1}{c}$. Elle sera donc égale à $\frac{e^{K:c}}{2\sqrt{2c}}$, multiplié par $-\int T^{-3:2} e^{-T} dT - etc.$ Dans le cas de $A = 90°$, qui est celui de la réfraction horizontale, les facultés prennent la place de toutes ces intégrales; on aura pour expression de cette réfraction, $\frac{\omega}{\sqrt{2c}}$, multiplié par $1^{-\frac{1}{2}I1} - \frac{3}{4}c.\, 1^{\frac{1}{2}I1} - \frac{1.\,5}{4.\,8} 1^{\frac{3}{2}I1} cc - \frac{1.\,3.\,7}{4.\,8.\,12} 1^{\frac{5}{2}I1} c^3 - etc.$; ce qui se réduit à $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$, multiplié par $1 - \frac{3}{8}c - \frac{3.\,5}{8.\,16} cc - \frac{9.\,5.\,7}{8.\,16.\,24} c^3 - \frac{9.\,25.\,7.\,9}{8.\,16.\,24.\,32} c^4 - etc.$; et ce qui se trouve absolument identique avec la série du problème précédent.

PROBLEME.

14. *Ayant* $-\frac{Yv\,dv}{(1vv)^{n+1:2}}$ *pour terme général de la série qui exprime la différentielle* $\frac{c\,dR}{\omega}$, *on demande l'intégrale de ce terme, prise de manière qu'elle s'évanouisse pour* $v = Sin.\,A$; *dans le cas où* A *diffère peu de l'angle droit.*

SOLUTION.

15. La différentielle $\frac{v\,dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$ est celle de $\frac{1}{(1-vv)^{n-1:2}}$, divisée par $2n-1$. Donc, si on la suppose égale à dx, afin de réduire l'intégrale proposée à $-e^{X:c} dx$, on aura $X = v - Sin.\,A$, et $dX = dv = \frac{(1-vv)^{n+1:2}}{v} dx$; expression que la supposition $v = 1$, supposition qui par la condition du problème diffère très-peu de $v = Sin.\,A$, rend égale à *zéro*. Donc, faisant $K = 1 - Sin.\,A$, il nous faudra tirer x de l'équation $ct = 1 - v$; ou $1 - vv = 2ct - cctt$. Nous avons $(2n-1)x = (1-vv)^{-n+1:2}$; ce qui donne $1 - vv = ((2n-1)x)^{-\frac{2}{2n-1}}$; nous avons donc l'équation $(2n-1)x = (2ct - cctt)^{-\frac{2n-1}{2}}$; qui donne $dx = -(2ct - cctt)^{-\frac{2n+1}{2}} (c - cct)\, dt$. L'intégrale de la différentielle proposée sera donc celle de $e^{K:c} (2ct - cctt)^{-\frac{2n+1}{2}} (c - cct)\, e^{-t}\, dt$.

16. Les exemples précédens nous ont déjà instruit que pour les besoins qu'exige le calcul des réfractions, on peut parfaitement s'arrêter au premier terme de la série; les autres ne pouvant jamais aller à une seconde dans le cas de leur plus grande valeur. L'intégrale de la différentielle proposée se réduira donc à la différence des deux intégrales $\int T^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-T} dT - \int t^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-t} dt$, multipliée par $e^{K:c}$, et divisée par $2(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$. La supposition $v = o$ fera évanouir la seconde des deux intégrales: on aura donc l'intégrale proposée, depuis $v = Sin. A$ jusqu'à $v = o$, égale à $e^{K:c} \int T^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-T}$, divisé par $2(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$; l'intégrale étant prise depuis T infini jusqu'à $T = \frac{1 - Sin. A}{c}$.

17. Enfin dans le cas de $A = 90°$, qui est celui de la réfraction horizontale, on aura $K = o$, $T = o$; et l'intégrale $\int T^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-T} dT$ devant être prise depuis T infini jusqu'à $T = o$, on aura celle de la différentielle proposée égale à $-\frac{1^{-\frac{2n-1}{2}} \Gamma 1}{(2n-1)(2c)^{\frac{2n-1}{2}}}$. La faculté qui constitue le numérateur, se réduit à $\frac{2^{n-1} \sqrt{\pi}}{1^{n\Gamma-2}}$; ou bien à $\mp \frac{2^{n-1} \sqrt{\pi}}{1^{n\Gamma 2}}$; le signe *moins* regardant les *n pairs*, le signe *plus* les *n impairs*. On aura donc l'intégrale de la différentielle proposée $-\frac{Yvdv}{(1-vv)^{n+1:2}}$, dans le cas de $A = 90°$, prise depuis $v = 1$ jusqu'à $v = o$, égale à $\pm \sqrt{\pi}$, divisé par $1^{n\Gamma 2} c^{n-1} \sqrt{2c}$; le signe *plus* regardant les exposans *pairs*; le signe *moins* les exposans *impairs*.

18. Voyons les cas particuliers. Nous aurons

$$\text{l'intégrale de } -\frac{Yvdv}{\sqrt{(1-vv)}} = +\frac{\sqrt{c\pi}}{\sqrt{2}};$$

$$\text{celle de } -\frac{Yvdv}{(1-vv)^{3:2}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}};$$

celle de $-\frac{Y v dv}{(1-vv)^{5:2}} = +\frac{\sqrt{\pi}}{3c\sqrt{2c}}$;

celle de $-\frac{Y v dv}{(1-vv)^{7:2}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{3.5cc\sqrt{2c}}$;

celle de $-\frac{Y v dv}{(1-vv)^{9:2}} = +\frac{\sqrt{\pi}}{3.5.7c^3\sqrt{2c}}$;

celle de $-\frac{Y v dv}{(1-vv)^{11:2}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{3.5.7.9c^4\sqrt{2c}}$.

COROLLAIRE.

19. L'intégrale de $-\frac{Y^m v^n dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$ découle naturellement de la précédente. Comme Y^m n'est autre chose que $e^{\frac{v-Sin.A}{c:m}}$, on n'aura qu'à mettre $\frac{c}{m}$ à la place de c. Cette intégrale, prise depuis $v = Sin.A$ jusqu'à $v = o$, deviendra donc dans le cas de $A = 90^\circ$, égale à $\pm m^{n-1}\sqrt{m\pi}$, divisé par $1^{n:2}c^{n-1}\sqrt{2c}$.

PROBLEME.

20. *Trouver l'expression complette de la réfraction horizontale.*

SOLUTION.

21. Il n'y a qu'à faire l'intégration des différens termes de la série différentielle dR, donnée en II. 30. moyennant la formule qu'on vient de donner. Faisant $\frac{\omega}{c}$ ou $\frac{\omega a}{s} = n$, on aura la réfraction horizontale égale à $\sqrt{\frac{1}{2}n\omega\pi}$, multipliée par une série telle que $1 + An + Bn^2 + etc.$; les coëfficiens A, B, C *etc.* étant des nombres absolus, dont les valeurs sont

$$A = 2^{1:2} - 1;$$
$$2B = 3^{3:2} - 2.2^{3:2} + 1;$$
$$6C = 4^{5:2} - 3.3^{5:2} + 3.2^{5:2} - 1;$$
$$24D = 5^{7:2} - 4.4^{7:2} + 6.3^{7:2} - 4.2^{7:2} + 1;$$
$$120E = 6^{9:2} - 5.5^{9:2} + 10.4^{9:2} - 10.3^{9:2} + 5.2^{9:2} - 1.$$

22. L'on peut donner à la série $1 + An + Bn + etc.$ la forme suivante;

elle en devient plus simple en apparence, mais elle convergera moins:
$e^{-n} + 2^{1:2} \sqrt{n} e^{-2n} + 3^{3:2} n^2 e^{-3n} + 4^{5:2} n^3 e^{-4n} + etc.$

23. Nous avons donné en I. 47. les valeurs numériques des coëfficiens A, B, C, D *etc.* avec ceux de leurs logarithmes. Les voici encore

$$A = 0{,}414214;\ Log.\ A = 9{,}6172248;$$
$$B = 0{,}269649;\ Log.\ (B:A) = 9{,}8135740;$$
$$C = 0{,}200865;\ Log.\ (C:B) = 9{,}8721055;$$
$$D = 0{,}160253;\ Log.\ (D:C) = 9{,}9019018;$$
$$E = 0{,}132935;\ Log.\ (E:D) = 9{,}9188332.$$

EXEMPLE.

24. Le citoyen *Laplace* dans *l'Exposition du système du monde*, a supposé $h = 24080$ pieds; et $\omega = 183$ *sec.* faisant 0,0002874 en parties du rayon, à la température de 28 pouces de hauteur barométrique, et à 0 dégrés du thermometre. D'apres ces données il a calculé la réfraction horizontale, en y employant une formule que cet illustre géomètre rendra publique sans doute dans sa *Méchanique céleste*; il a trouvé qu'elle devoit être de 7300 *sec.* en supposant que dans toute la hauteur de l'atmosphère la densité de l'air est proportionnelle au poids qui le comprime. En attendant que cette formule parvienne à la connoissance du public, appliquons à ces mêmes données la formule dont nous venons de faire la démonstration: $(1 + An + Bn^2 + etc.) \sqrt{\tfrac{1}{2} n \omega \pi}$. Nous aurons

$$Log.\ h\ (en\ toises) = 3{,}6035016;$$
$$Log.\ a\ (en\ toises) = 6{,}5154927;\ donc$$
$$Log.\ c = -3{,}0880089.\ \ Otez\ de$$
$$Log.\ \omega = -4{,}4584568.\ \ Il\ restera$$
$$Log.\ n = -1{,}3704479;$$

ce qui donne 1,11514 pour valeur exacte de la série $1 + An + Bnn + etc.$ ayant pour logarithme 0,0473294. On a de plus

$$Log.\ \omega = -4{,}4584568;$$
$$Log.\ n = -1{,}3704479;$$
$$Log.\ \pi = 0{,}4971499;\ donc$$
$$Log.\ n\omega\pi = -4{,}3260546;\ dont\ ôtant$$
$$Log.\ 2 = 0{,}3010300;\ il\ restera$$
$$Log.\ \tfrac{1}{2} n\omega\pi = -4{,}0250246.$$

On

On aura donc $-2{,}0125123$ pour logarithme de la racine quarrée de $\frac{1}{2} n \omega \pi$; auquel on ajoutera celui de la série $1 + A n +$ *etc.* et on aura $-2{,}0598417$ pour logarithme de la réfraction horizontale, exprimée en parties du rayon. Si on veut l'avoir en secondes de la nouvelle division, on y ajoutera le logarithme de $\frac{2000000}{\pi}$, et on trouvera 3,8637218. La réfraction horizontale sera donc égale à 7307 secondes de la nouvelle division; ce qui se trouve parfaitement conforme au calcul du citoyen *Laplace*.

25. Quant à l'application de cette formule au calcul et à l'analyse des tables, nous renvoyons le lecteur à ce que nous en avons dit dans le premier chapitre. Il y verra les réfractions horizontales des trois tables de *Bouguer* pour la zone torride, dans l'accord le plus parfait avec notre formule; il fera cette même remarque sur la table de *Newton*. Passant ensuite aux tables de *la Caille*, *la Lande* et *Bradley*, il trouvera qu'en adoptant pour ces trois tables la soutangente barométrique $h = 4218$ toises, qui répond à dix dégrés de *Réaumur*, et calculant d'après cette donnée et la fraction ω, réfraction à 45° de hauteur, la réfraction horizontale, la table de *la Caille* laissoit entre le calcul et l'observation une différence *d'un tiers*, celle de *la Lande*, d'un *sixième*, celle de *Bradley*, d'un *dixième*. Il en tirera la conséquence, *ou*, que ces différences ne sont dues qu'à la difficulté généralement reconnue d'observer avec précision la réfraction horizontale, et celle de 45° de hauteur, et qu'ainsi elles ne prouvent rien contre la supposition naturelle d'une élasticité spécifique constante: *ou bien*, que cette supposition, admissible dans la zone torride, ne l'est pas dans les zones tempérées, et qu'il y faut substituer celle d'une élasticité spécifique décroissante.

26. Au sujet de cette dernière hypothèse, je repéterai que l'élasticité spécifique de l'air étant représentée par $e^{-x:g}$, la densité pouvoit très-bien être représentée par les ordonnées d'une nouvelle logistique, dont la soutangente s, égale à $\frac{gh}{g-h}$, différoit d'autant moins de la soutangente ordinaire h, que la véritable disposition des couches atmosphériques approchoit davantage de la supposition d'une élasticité spécifique constante, qu'alors, faisant $\frac{\omega a}{s} = n$, la formule $(1 + A n + B n^2 +$ *etc.*$) \sqrt{\frac{1}{2} \omega n \pi}$, faisoit connoître la réfraction horizontale avec une très-grande précision, conformément aux observations.

27. Comme la série $1 + An + Bn^2 + etc.$ est essentielle pour le calcul des réfractions approchantes de l'horizon, je déclare que je désignerai cette série par Fn. La réfraction horizontale sera donc égale à $Fn, \sqrt{(\frac{1}{2}\omega n \pi)}$; ou bien à $nFn, \sqrt{\frac{s\pi}{2a}}$. On trouvera dans la quatrième des tables qui se trouvent à la fin de cet ouvrage, les valeurs de Fn, et les logarithmes de Fn, qui répondent aux différentes valeurs de n, depuis $n = 0{,}300$ jusqu'à $0{,}150$. Et quoique la progression des premières différences de ces derniers ne paroisse pas avoir toute la régularité qu'on pourroit désirer à la rigueur, cependant l'erreur qui peut en résulter sur le calcul des réfractions, ne sera jamais d'un dixième de secondes.

28. Désignant par b la hauteur du barometre en général, et par B, H, W, ce que deviennent les quantités b, h, ω, à la température de 28 *poll. barom.* et 10 dégrés de *Réaumur*, on aura $\omega : W = bH : Bh$; ce qui donne $n = \frac{WHab}{hsB} = \frac{WHab(g-h)}{ghhB}$; expression qui dans le cas d'une élasticité spécifique constante se réduira à $\frac{WHab}{hhB}$. Dans ce dernier cas, la fraction n est donc directement comme la hauteur du barometre b, et réciproquement comme le quarré de la soutangente h, proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air. La fraction $\frac{WHa}{B}$ doit être regardée alors comme une quantité constante; ayant pour logarithme 5,1327740 conformément à la table de *Bradley*. La réfraction horizontale alors sera égale à nFn, multiplié par la racine quarrée de $\frac{s\pi}{2a}$. Le logarithme de la racine quarrée de $\frac{\pi}{2a}$ est égal à $-4{,}8403136$. La réfraction demandée se trouvera exprimée en parties du rayon. Si on veut l'avoir en *secondes* de la nouvelle division, faisant chacune un millionième du quart de circonférence, on n'aura qu'à supposer le logarithme de la racine quarrée de $\frac{s\pi}{2a}$, égal à 2,6441937 au lieu de $-4{,}8403136$.

EXEMPLE.

29. *Le thermometre étant à huit dégrés au-dessous de la glace, le barometre à* 19 *pouces et* 9 *lignes, on demande la réfraction horizontale?* La table de I. 82 donne pour ce cas

$h = 3884,6$;

$s = 4532,8$.

On a de plus $b = 28,75$. On trouve donc

$Log.\ h = 3,5893463$;

$Log.\ s = 3,6563091$;

$Log.\ hs = 7,2456554$;

Otez de $Log.\ b = 1,2955671$;

Reste $-6,0499117$;

Ajoutez $5,1327740$;

Cela donne 9,1826857 pour le logarithme de n. Ainsi $n = 0,152295$. La table donne

$Log.\ F\,n = 0,0294424$; ajoutant

$Log.\ n = 9,1826857$;

$Log. \sqrt{s} = 1,8281545$;

$Log. \sqrt{\frac{\pi}{2a}} = 2,0441937$;

Le logarithme de la réfraction horizontale devenant ainsi 3,6854763; cette réfraction se trouvera être 4836 *sec.*; ce qui fait 26′ 7″.

30. Ce calcul n'est nullement difficile, mais il est très-certainement défectueux, en ce qu'il suppose que, le dégré du thermometre étant donné, on peut déterminer l'élasticité spécifique de l'air, moyennant les principes de la progression arithmétique, en y appliquant les données tirées de l'observation de *de Luc*, sur lesquelles la table de I. 86 a été calculée. Cela est absolument destitué de fondement. Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit là-dessus dans le premier chapitre; nous dirons seulement, que le seul moyen de prévenir les erreurs sans nombre, que cette théorie entraine nécessairement, c'est de se servir du manometre. La graduation de cet instrument fait connoître tout de suite le nombre m, rapport de la densité de l'air à celle du mercure; ensuite, multipliant la hauteur du barometre b par ce nombre, on aura la soutangente h avec infiniment plus d'exactitude, que la théorie ordinaire ne pouvoit la donner.

31. Pour appliquer cet instrument au calcul des réfractions, voyons d'abord la valeur de ω, qui répond à $m = 10000$. Supposant le barometre à 28 pouces, on aura alors la soutangente h égale à 280000 pouces, ou 3889 toises. Si elle avoit été égale à 4218 toises, on auroit eu alors $\omega = 56''8$ ou 0,000275. On trouvera donc la valeur de ω que nous cherchons, par la

proportion suivante 3889 : 4218 = 0,000275 : W ; ce qui donne W = 0,00029827 ou 190 *sec.* On aura de plus *Log.* W = — 4,4746125.

32. Ainsi donc, si l'on veut se servir du manometre dans le calcul des réfractions, on trouvera d'abord le logarithme de ω, en ôtant de 0,4746125 le logarithme du nombre, indiqué par le manometre. Multipliant la hauteur du barometre par ce même nombre, on trouvera h, soutangente barométrique. On aura enfin s, soutangente des densités, par la formule $s = \frac{gh}{g-h}$. Ou bien, désignant par K le nombre 2,9827 ; et par t le nombre du manometre, il y aura $\omega = \frac{K}{t}$;

$$n = \frac{aK(g-bt)}{gbtt};$$

et la réfraction horizontale alors sera égale à Fn, multipliée par la racine quarrée de $\frac{nK\pi}{2t}$. On peut remarquer que *Log.* $\frac{aK}{g}$ = 4,4131344 ; la hauteur barométrique b étant exprimée en pouces. Quant au logarithme de la racine quarrée de $\frac{K\pi}{2}$, on le supposera 0,3353662, si on demande la réfraction en parties du rayon ; et 6,1392463, si on veut qu'elle soit exprimée tout de suite en *sec.*

EXEMPLE I.

33. *Supposant le barometre à 20 pouces, et le manometre à 14437, déterminer la réfraction horizontale?* On trouve d'abord bt = 4010 toises ; et $g-bt$ = 23173. Pour trouver n,

Log. t =	4,1594770	
Log. tt =	8,3189540	
Log. b =	1,3010300	
Log. btt =	9,6199840.	*Otez de*
Log. $(g-bt)$ =	4,3649823.	*Il restera*
	—6,7449983.	*Ajoutez*
	4,4131344.	*Vous aurez*
Log. n =	—1,1581327.	

On aura donc n = 0,143924 ; ce qui donne

Log. Fn = 0,0277007. *On ajoutera à cela*

$Log. \sqrt{n} = 1,5790663$; *et de plus*
$6,1392463$; *ce qui fait*
$5,7560133$. *On en ôte*
$Log. \sqrt{t} = 2,0797385$; *il reste*
$3,6662748$ pour logarithme de la réfraction horizontale. Elle sera donc égale à 4637 *sec.* ce qui fait 25′, 2″.

EXEMPLE II.

34. *Le barometre se soutenant à* 28 *pouces*, 6 *lignes; et le manometre marquant* 10864, *on demande la réfraction horizontale?* On trouve h ou $bt = 3998$ toises; ce qui donne $g - bt = 23185$ toises. Donc

$Log.\ t = 4,0359898$;
$Log.\ tt = 8,0719796$;
$Log.\ b = 1,4232459$;
$Log. btt = 9,4952255$. *Otez de*
$4,4131344$. *Il restera*
$-6,9179089$. *Ajoutez*
$Log.\ (g - bt) = 4,3652071$; *vous aurez*
$Log.\ n = -1,2831160$; *ce qui donne* $n = 0,19118$; et
$Log. Fn = 0,0378821$. *Ajoutez*
$Log. \sqrt{n} = -1,6415580$; *et*
$0,3353662$; *vous aurez*
$0,0148063$. *De quoi ôtant*
$Log. \sqrt{t} = 2,0179949$; *il restera*
$-3,9968114$ pour logarithme de la réfraction horizontale; qui sera par conséquent égale à 0,009927 ou 34′ 8″.

EXEMPLE III.

35. *Le barometre étant à* 28 *pouces*, 9 *lignes; et le manometre marquant* 9000, *on demande la réfraction horizontale?* Cela donne h ou $bt = 359375$ toises; et de là $g - bt = 23589,62$ toises. Donc

$Log.\ t = 3,9542425$;
$Log.\ tt = 7,9084850$;
$Log.\ b = 1,4586378$;

$$\begin{aligned}
Log.\, btt &= 9{,}3671223. && \textit{Otez de}\\
&\ 4{,}4131344. && \textit{Il restera}\\
&\ -5{,}0460116. && \textit{Ajoutez}\\
Log.\,(g-bt) &= 4{,}3727206. && \textit{Vous aurez}\\
Log.\ \ n &= -1{,}4187322\,; && \textit{ce qui donne}\\
n &= 0{,}26226\,; && \textit{et}\\
Log.\,Fn &= 0{,}0537430. && \textit{Ajoutez}\\
Log.\sqrt{n} &= -1{,}7093661\,; && \textit{et}\\
&\ 0{,}3353662\,; && \textit{vous aurez}\\
&\ 0{,}0984753\,; && \textit{de quoi ôtant}\\
Log.\sqrt{t} &= 1{,}9771213\,; && \textit{il restera}
\end{aligned}$$

— 2,1213540 pour logarithme de la réfraction horizontale; qui sera par conséquent égale à 0,013224 ou 45′ 28″.

36. Dans ces exemples j'ai supposé que la valeur de ω, répondant à $t = 10000$, étoit 61 ½ secondes. Cela est fondé sur ce qu'à la température des caves, et 28 pouces de hauteur barométrique, la réfraction de 45° étoit 56″ 8, conformément à la table de *Bradley*. On a déja remarqué que les auteurs différoient considérablement entr'eux à cet égard; ce qui ne paroîtra pas surprenant, vu que le barometre et le thermometre ne suffisent pas encore pour déterminer la densité de l'air, à qui la réfraction de 45° de hauteur doit être proportionnelle. Les observations de ce genre exigent absolument l'usage du manometre; il importeroit infiniment de savoir avec précision la réfraction astronomique à 45° de hauteur apparente, qui répondroit à une certaine division bien déterminée de cet instrument. Et s'il se trouvoit, qu'à $t = 10000$ on eut $\omega = 57''$ au lieu de 61 ½ secondes, on auroit la satisfaction de voir, que g devenant infini, et les deux soutangentes h, s se trouvant confondues ensemble, le calcul fondé sur la supposition d'une élasticité spécifique constante, répond parfaitement à l'observation, au sujet de la réfraction horizontale.

37. En suivant les idées généralement adoptés en physique jusqu'ici, sur la marche que prend l'élasticité spécifique de l'air, pour les différens dégrés du thermometre, j'ai calculé la table suivante, faisant connoître les réfractions horizontales, exprimées en secondes de la nouvelle division, qui répondent à des températures différentes, le barometre étant constamment supposé à 28 pouces de hauteur.

Dégrés de Réaumur.	*Réfraction horizontale.*
30	5253
26	5407
22	5567
18	5734
14	5910
10	6098
6	6296
2	6503
— 2	6722
— 6	6953
— 10	7200.

38. Un coup d'oeil sur cette table nous apprend combien il s'en faut que les réfractions horizontales suivent le rapport simple des densités. Dans cette supposition, les réfractions à 30° au-dessus, et 10° au-dessous de la glace, seroient entr'elles dans le rapport de 21 : 25. Nous les trouvons au contraire dans le rapport de 8 : 11, ou plus exactement de 27 : 37, qui est à très-peu près celui des quarrés de 21 : 25.

39. La partie de cette table, qui appartient à des températures au-dessus de la glace, répond fort bien aux observations. Il n'en est pas de même des températures au-dessous de la glace. Il paroît certain au contraire par les observations les plus exactes, qu'à des froids très-rigoureux, les réfractions astronomiques s'écartent absolument de la série qu'on vient de trouver.

OBSERVATIONS.

40. Le citoyen *le Monnier*, dans *l'examen des causes générales, des principes de physique et de ce qui a porté les observateurs du siècle précédent à publier des tables de réfraction qui diffèrent les unes des autres pour les mêmes hauteurs*, *Mém. de l'académie*, *année* 1780, a rassemblé les observations suivantes :

„ Le 2 Janvier 1765, au matin, par un grand froid, à $7^h\ 52'\ 37''\frac{3}{4}$ de „ tems vrai, le bord supérieur du soleil étoit élevé de $0°\ 25'\ 35''$: d'où j'ai „ conclu, dit *le Monnier*, la réfraction à ce moment là, et à cette hauteur „ apparente, de $34'\ 5''$; et de $40'$ au moins pour la réfraction horizontale.

„ Le jour suivant, l'air étant encore plus froid, à $7^h\ 48'\ 18''$ de tems vrai, „ le bord supérieur du soleil a paru élevé de six minutes ; or le calcul des

„ réfractions donne à cette hauteur apparente 44′ 43″; et 45″ au moins pour „ la réfraction horizontale.

„ Le 2 Janvier 1675, à un dégré de hauteur apparente du bord supérieur „ du soleil, *Picard* avoit essayé un calcul qui lui donnoit la réfraction de „ 25′ 0″; je la trouve, en y employant des élémens plus exacts, de 26′ 10″ „ à 7^h 57′ 56″ $\frac{3}{4}$ de tems vrai; de même le jour suivant, à 0° 30′ 0″, les ré- „ fractions tant du bord supérieur que du bord inférieur du soleil, se sont „ trouvées de 34′ 34″, et 35′ 4″; ce qui indiqueroit pareillement au moins „ 40′, ou bien un accroissement encore plus considérable dans la réfraction „ horizontale.

„ Enfin le calcul me donne le même jour, à 4° 30′ et 5° de hauteur „ apparente, la réfraction comme il suit: le 2 Janvier de 11′ 27″ $\frac{1}{2}$, et 10′ 6″; „ et le jour suivant de 11′ 20″ $\frac{1}{2}$ et 10′ 25″. Mais du plus grand froid au plus „ grand chaud des années 1738 et 1740 je n'ai plus trouvé que deux mi- „ nutes de réduction dans l'effet de la réfraction à cette hauteur de 4° 40′; „ cela diffère déja beaucoup de la variation de 12′ à 13′ à notre horizon; „ d'où il est aisé de conclurre, que les différentes densités de l'air et son „ dégré d'élasticité, si variable par les effets de la chaleur, n'influent considéra- „ blement qu'aux approches de l'horizon, n'étant assez sensibles que sur les „ réfractions horizontales, qu'on avoit trop négligées.

„ Le 20 Janvier 1765, à l'observatoire royal, le quart de cercle étant „ pointé aux environs de l'horizon d'hyver, le fil à plomb indiquoit 0° 2′ 35″ „ de hauteur; or on trouve à la page 98 de *l'histoire céleste*, qu'à 7^h 40′ 20″ „ et 7^h 43′ 40″ de la pendule, les bords supérieur et inférieur du soleil ont „ paru sur le fil horizontal de la lunette du quart de cercle: il étoit alors „ 7^h 31′ 51″ et 7^h 35′ 11″ de tems vrai; je trouve la réfraction qui appro- „ choit fort de l'horizontale, en ces momens-là, de 46′ 14″ $\frac{1}{2}$, et de 50′ 33″.

„ On trouve aussi qu'immédiatement après la seconde observation, ou „ une demi-minute après, le diametre vertical du soleil ne paroissoit, le „ disque étant sans doute elliptique, que sous un angle de 19′ 52″.

„ Le froid du mois de Mars a donné encore le 20 au matin de grandes „ réfractions au lever du soleil; et il y a apparence que c'est à la fin de Jan-

„ vier

„ vier que nous éprouvons ordinairement les plus grandes réfractions, comme „ il a été vérifié une seconde fois par *Cassini*, dans les mémoires de cette „ année-là. „

La plus grande réfraction, dont les annales de l'astronomie fassent mention, est celle qui a été observée par les Hollandais, en 1597, à la nouvelle Zemble, par 76 dégrés de latitude. Écoutons *de la Lande*: „ *Le Monnier* „ assure, qu'il a reconnu par le journal des observations, imprimées en „ 1559, que le 24 et le 27 Janvier 1597 il y avoit plus de *quatre dégrés et* „ *demi* de réfraction, et qu'on a eu tort de vouloir expliquer ces observa- „ tions, ou les révoquer en doute, ou y soupçonner de l'erreur, comme „ l'ont fait la plupart des astronomes, *Kepler*, *Cassini*, *Scotto*, et en dernier „ lieu M. *le Gentil*, *Voyages dans les mers de l'Inde*, tome I. pag. 395. „ II. 832. Il a soutenu qu'il y avoit erreur dans les observations: et il a lu „ un mémoire à ce sujet, le 5 Avril 1780. S'il n'étoit pas si difficile d'hyver- „ ner à de pareilles latitudes, on pourroit espérer des observations, capables „ de lever tous les doutes. "

REMARQUE I.

41. Comme on ne peut guères révoquer en doute la formule $(1 + An + Bn^2 + etc.) \sqrt{\frac{1}{2}\omega n \pi}$, résultat d'une solution rigoureuse, fondée sur une théorie qui est étayée elle-même par un nombre plus que suffisant de faits, la différence entr'elle et les observations qu'on vient de rapporter, ne peut retomber que sur la soutangente des hauteurs barométriques h, proportionnelle à cette élasticité spécifique de l'air, dont nous sommes bien loin de pouvoir déterminer avec précision les rapports avec la marche progressive du thermometre. Il faut en conclurre que l'élasticité spécifique de cet air, lorsqu'il est parvenu une fois à un certain dégré de froid, et chargé d'une certaine proportion de vapeurs aqueuses, décroit avec bien plus de rapidité que ne le comporteroit la progression arithmétique, qu'on adopte généralement. On en jugera par la table suivante, dans laquelle j'ai supposé la soutangente h successivement égale à 4000, 3800, 3600 *etc.* toises, en calculant de même la réfraction horizontale qui lui convient d'après la formule.

Soutangente h.	*Réfraction horizontale.*
4000 *toises*	36′ 14″ = 6769 *sec.*
3800	39′ 47″ = 7367
3600	43′ 58″ = 8141
3400	48′ 59″ = 9070
3200	55′ 7″ = 10207
3000	1° 2′ 46″ = 11623
2800	1° 12′ 37″ = 13447
2600	1° 25′ 51″ = 15895
2400	1° 44′ 47″ = 19404
2200	2° 14′ 44″ = 24950
2000	3° 11′ 59″ = 35552
1900	4° 8′ 51″ = 46080
1880	*Infinie*	*Infinie.*

REMARQUE II.

42. Je dois rendre compte d'abord de la construction de cette table. Comme la convergence de la série $1 + An + Bn^2 + etc.$ cesse d'être sensible, dès que la soutangente h se trouve au-dessous de 3000 à 2400 toises, on s'est servi, pour en déterminer la somme avec quelque précision, de l'avantage que procure la progression des coëfficiens A, B, C *etc.* qui dès le second terme devient sensiblement géométrique. Donc, désignant par o le quotient $\frac{C}{B}$ ou $\frac{D}{C}$, la somme de cette série deviendra $\frac{1-(p-A)n-(Ao-B)n^2}{1-no}$; que l'on désignera par $\frac{1-Mn-MNn^2}{1-no}$; ayant

$$Log.\ o = 9{,}8721055;$$
$$Log. M = 9{,}5194342;$$
$$Log. N = 9{,}0705601.$$

REMARQUE III.

43. Désignant ensuite par W, H, ce que devient la fraction ω, et la soutangente h à la température des caves, ce qui donne $H = 4218$ toises, $W = 0{,}000275$ (la hauteur du barometre étant supposée à 28 pouces) on fera

$$Log.\ p = 6{,}5799320 = Log.\ WHa;$$
$$Log.\ q = -4{,}8403136 = Log.\ \sqrt{\pi : 2a}.$$

Ensuite, faisant de plus $d = \frac{g-h}{g}$; $m = \frac{dp}{hh}$; $S = mq\sqrt{\frac{h}{d}}$, la réfraction demandée deviendra égale à $\frac{(1 - Mn - MNn^2)\,S}{1 - no}$. Je dois observer que cette formule la donne avec une très-grande précision.

REMARQUE IV.

44. Cette table nous apprend, qu'en prenant pour unité l'élasticité spécifique de l'air au terme de la glace, il suffit qu'elle ait diminué d'un vingtième, d'un sixième, d'un quart, pour que la réfraction horizontale aille à quarante, à cinquante, à soixante minutes. En suivant la règle ordinaire, cela ne pourroit arriver qu'à onze, à trente-sept, à cinquante-cinq dégrés au-dessous de la glace, tandis que le plus grand froid qui ait jamais été observé à *Paris*, celui de 1709, n'est jamais allé qu'à quinze dégrés. Les expériences faites avec le manometre nous apprendront, que de telles élasticités spécifiques se rencontrent à des dégrés de froid qui ne sont nullement extrêmes; pour peu qu'un air soit chargé d'une certaine proportion de vapeurs aqueuses, à quelques dégrés au-dessous de la glace, il peut très-bien perdre un quart, et même un tiers de son élasticité spécifique.

REMARQUE V.

45. La soutangente barométrique étant de 1880 toises, ce qui suppose une élasticité spécifique réduite un peu au-dessous de la moitié de ce qu'elle étoit à la glace, la réfraction horizontale devient infinie, la fraction n se trouvant alors réduite à l'unité, ce qui arrive lorsque $h = \sqrt{p}$, ou plus exactement $h = \sqrt{p - \frac{p}{2g}}$. Il faut observer, que le rayon osculateur au sommet de la trajectoire se trouvant exprimé par $\frac{s}{\omega}$ ou $\frac{a}{n}$, il se trouve précisément égal au rayon de la terre, dès qu'on a $n = 1$, ce qui arrive lorsque $h = \sqrt{aWH}$. Alors le rayon de lumière qui s'est élancé d'un point quelconque de la surface du globe, dans la direction de sa tangente, se trouvant obligé de rester attaché à cette surface, et d'en suivre exactement la courbure, il n'est pas étonnant que pour ce cas le calcul indique une réfraction horizontale infiniment grande. Il l'est encore moins qu'à une latitude de 76° les Hollandais l'aient trouvé égale à quatre dégrés et demi; je dois

ajouter même, que pour avoir de pareilles réfractions, il n'est nullement nécessaire d'aller au *Nova-Zemlaja*, et que souvent nous en aurions dans nos climats, si les vapeurs dont l'air est chargé, ne nous empêchoient pas alors de discerner les objets éloignés.

46. Il nous reste à dire un mot sur les réfractions horizontales, observées à des élévations différentes au-dessus de l'horizon. Tout revient alors à trouver $h = mB$, soutangente des hauteurs barométriques, et proportionnelle à l'élasticité spécifique de l'air, qui entoure l'observateur. Je me contenterai de remarquer ici, que le thermometre ne sauroit l'indiquer en aucune manière, les règles du citoyen *de Luc*, faites au bord du lac de Genève, n'étant admissibles tout au plus qu'à l'horizon, quand même on ne voudroit pas tenir compte de la proportion des vapeurs aqueuses, auxquelles les observateurs n'ont jamais prêté l'attention qu'elle méritoit. Ici l'usage de notre manometre devient absolument indispensable. Dans tous les états de l'atmosphère, et à des élévations quelconques au-dessus de l'horizon, cet instrument indiquera toujours, et la fraction ω, proportionnelle à la densité de l'air, et le nombre m; ce nombre, multiplié par la hauteur observée du barometre B, fera connoître la soutangente des hauteurs barométriques h; et cette derniere fera trouver celle des densités s, dont on fera usage dans l'expression de la réfraction horizontale $\frac{\omega\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2s}}(1 + An + Bn^2 + etc.)$; ou bien $\frac{\omega\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2s}}$, multiplié par $\frac{1 - Mn - MNn^2}{1 - no}$.

47. Ayant achevé ce qu'il y avoit à dire sur les réfractions horizontales, nous passons à celles qui approchent de l'horizon. Nous avons trouvé en 16 l'intégrale de $-\frac{Yvdv}{(1-vv)^{n+1:2}}$, dont elle dépend, prise depuis $v = Sin.\ A$ jusqu'à $v = o$, égale à $e^T \int T^{-\frac{2n+1}{2}} e^{-T} dT$, divisé par $2(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$. Ajoutons que dans cette intégrale la petite fraction c est mise à la place de $\frac{s\ Sin.\ A}{a}$; et que l'intégrale doit être prise depuis $T = \frac{1 - Sin.\ A}{c}$ jusqu'à T infini.

48. Commençons par nous débarrasser de cet exposant fractionnaire $\frac{2n+1}{2}$. Mettons tt à la place de T. L'intégrale en question reviendra alors à

$e^{tt}\int t^{-2n} e^{-tt}\, dt$, divisé par $(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$; cette dernière intégrale étant prise depuis t égal à la racine quarrée de $\frac{1-Sin.A}{c}$ jusqu'à t infini.

THÉOREME.

49. *L'intégrale de* $t^{-2n} e^{-tt}\, dt$ *est reductible à celle de* $e^{-tt}\, dt$, *moyennant la formule suivante.* $\pm \frac{1^{nI2}\, e^{tt} \int t^{-2n} e^{-tt}\, dt}{2^{n-1}} = 2e^{tt}\int e^{-tt}\, dt - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^3} - \frac{1.3}{4t^5} + \frac{1.3.5}{8t^7} - \frac{1.3.5.7}{16t^9} + etc.$; le dernier terme de la série étant $\frac{1^{(n-1)I2}}{2^{n-1}\, t^{2n-1}}$, et le signe *plus* regardant les valeurs *paires* de n; le signe *moins* ses valeurs *impaires*. Les intégrales des deux parts sont supposées prises depuis une valeur quelconque de t jusqu'à t infini. Nous croyons inutile de donner la démonstration de ce théorème.

CAS PARTICULIERS.

50. On a en vertu de ce théorème :

$$+ e^{tt}\int e^{-tt}\, dt = e^{tt}\int e^{-tt}\, dt;$$

$$- e^{tt}\int t^{-2} e^{-tt}\, dt = 2e^{tt}\int e^{-tt}\, dt - \frac{1}{t};$$

$$+ \tfrac{3}{2} e^{tt}\int t^{-4} e^{-tt}\, dt = 2e^{tt}\int e^{-tt}\, dt - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^3};$$

$$- \frac{3.5}{2.2} e^{tt}\int t^{-6} e^{-tt}\, dt = 2e^{tt}\int e^{-tt}\, dt - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^3} - \frac{1.3}{4t^5};$$

$$+ \frac{3.5.7}{2.2.2} e^{tt}\int t^{-8} e^{-tt}\, dt = 2e^{tt}\int e^{-tt}\, dt - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^3} - \frac{1.3}{4t^5} + \frac{1.3.5}{8t^7}.$$

PROBLÈME.

51. *L'intégrale de* $-\frac{Yv\,dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$, *et par consequent le problème entier des réfractions qui approchent de l'horizon, se trouvant réduite à celle de* $e^{-tt}\, dt$, *on demande a déterminer cette dernière intégrale, pour une valeur quelconque de* t.

PREMIER CAS.

52. Si t est une fraction très-petite, au-dessous d'un tiers ou d'un quart, on peut se servir de la série $t - \frac{t^3}{1.3} + \frac{t^5}{1.2.5} - \frac{t^7}{1.2.3.7} + etc.$ qui résulte du développement de e^{-tt}, et qui est très-convergente alors. Cette série s'évanouit pour $t = o$; ainsi elle exprime la valeur de l'intégrale, prise depuis $t = o$ jusqu'à une valeur quelconque de t.

SECOND CAS.

53. Si t est un nombre entier plus grand que trois ou quatre, l'intégrale de $e^{-tt}\,dt$, prise depuis une valeur quelconque de t jusqu'à t infini, est égale à la série $\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^3} + \frac{1.3}{4t^5} - \frac{1.3.5}{8t^7} + \frac{1.3.5.7}{16t^9} - etc.$ multipliée par $\frac{e^{-tt}}{2}$. Cette série convergera alors au commencement avec beaucoup de rapidité; parvenue à un certain terme, elle devient stationnaire, et elle diverge au-delà de ce terme; mais comme elle donne toujours des valeurs alternativement trop grandes et trop petites, elle fait connoître dans ce cas avec précision les limites des erreurs. L'on voit au reste que l'intégrale de $e^{-tt}\,dt$, prise depuis $t = o$, approche très-rapidement de sa valeur totale $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; en effet, pour $t = 3$, elle n'en diffère que de 0,0000195766g.

REMARQUE.

54. Les deux séries laissent donc entr'elles un vuide pour l'évaluation exacte de l'intégrale, qui peut aller depuis $t = \frac{1}{4}$, jusqu'à $t = 4$; et que nous ne pouvons remplir par aucune des méthodes connues. Comme la connoissance de cette intégrale est absolument essentielle pour le calcul des réfractions qui approchent de l'horizon; comme elle est également indispensable dans l'analyse des hasards; comme de plus la solution d'une infinité d'équations différentielles revient à cette même intégrale, j'ai cru qu'il valoit la peine d'en calculer la table, depuis $t = 0{,}01$ jusqu'à $t = 3{,}00$. Voici la méthode que j'ai suivi.

THÉOREME.

55. *Faisant* $y = \int e^{-tt}\,dt$, *les rapports différentiels* $\frac{dy}{dt}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$ *etc. seront égaux à ce qui suit :* savoir

$$+ dy : dt = 1;$$
$$- ddy : dt^2 = 2t;$$
$$+ d^3y : dt^3 = 4tt - 2;$$
$$- d^4y : dt^4 = 8t^3 - 12t;$$
$$+ d^5y : dt^5 = 16t^4 - 48tt + 12;$$
$$- d^6y : dt^6 = 32t^5 - 160t^3 + 120t;$$
$$+ d^7y : dt^7 = 64t^6 - 480t^4 + 720tt - 120;$$
$$- d^8y : dt^8 = 128t^7 - 1344t^5 + 3360t^3 - 1680t;$$

Et généralement $\frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}} = z^n - \frac{n.n-1}{1} z^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2} z^{n-4} - \frac{n.n-1....n-5}{1.2.3} z^{n-6} + etc.$; la lettre z étant mise à la place de $-2t$.

REMARQUE I.

56. Dans la construction de la table des intégrales de $e^{-tt} dt$, qui se trouve à la fin de ce volume, j'ai supposé la différence constante et finie de la variable t, égale à 0,01. Désignant cette différence par r, j'ai pu supposer la différence finie de l'intégrale $\int e^{-tt} dt$ égale à re^{-tt}, multiplié par $1 - rt + \frac{2tt-1}{3} rr - \frac{2t^3-3t}{6} r^3$; en me bornant au troisième terme de la série. Les intégrales sont supposées prises depuis une valeur donnée de t jusqu'à t infini. A $t = o$ répond le nombre 0,886226925; identique avec la moitié de la racine quarrée de π, et faisant connoître la valeur de l'intégrale entière depuis t infini jusqu'à $t = o$. Delà ces intégrales vont en décroissant; à $t = 1$ on trouve 0,0139402279; à $t = 2$ on voit le nombre 0,00414553469; à $t = 3$ l'intégrale n'est plus que de 0,00001957669.

REMARQUE II.

57. La seconde table contient les logarithmes de ces intégrales; et la troisième ceux des produits $e^{tt} \int e^{-tt} dt$ avec leurs premières et secondes différences. Ces dernières servent aux interpolations; on y pourra employer la formule suivante. Soit

P.... terme de la table qui répond à t.
Q.... sa première différence.
R.... sa seconde différence.

On trouvera la valeur de celui qui répond à $t+r$, égale à $P-\frac{(2Q-R+rR)}{2}r$. Si l'on veut négliger la petite erreur d'une ou de deux unités dans la sixième décimale, on peut parfaitement se contenter de $P-Qr$.

REMARQUE III.

57. Comme le produit $e^{tt}\int e^{-tt}dt$ joue un très-grand rôle dans le calcul des réfractions qui approchent de l'horizon, nous le désignerons constamment par Et, toujours séparé par une virgule des facteurs qui le suivent. On aura donc

$$+e^{tt}\int e^{-tt}dt = Et;$$

$$-e^{tt}\int t^{-2}e^{-tt}dt = 2Et-\frac{1}{t};$$

$$+\tfrac{3}{2}e^{tt}\int t^{-4}e^{-tt}dt = 2Et-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^3};$$

$$-\frac{3.5}{2.2}e^{tt}\int t^{-6}e^{-tt}dt = 2Et-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^3}-\frac{1.3}{4t^5};$$

$$+\frac{3.5.7}{2.2.2}e^{tt}\int t^{-8}e^{-tt}dt = 2Et-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^3}-\frac{1.3}{4t^5}+\frac{1.3.5}{8t^7}.$$

PROBLEME.

59. *On demande l'intégrale de* $-\frac{Y(1-Y)^n v\,dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$, *prise depuis* $v=Sin.\,A$ *jusqu'à* $v=0$, *ayant, comme on sçait,* $Log.\,Y=\frac{v-Sin.\,A}{c}$.

SOLUTION.

60. L'intégrale de $-\frac{Y\,v\,dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$ est égale à $e^{tt}\int t^{-2n}e^{-tt}dt$, divisé par $(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$; ce qui se réduit à $2^n Et-\frac{2^{n-1}}{t}+\frac{2^{n-2}}{t^3}-\frac{1.3.2^{n-3}}{t^5}+\frac{1.3.5.2^{n-4}}{t^7}-etc.$ divisé par $1^{n/2}(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$; la lettre t désignant la racine quarrée de $\frac{1-Sin.\,A}{c}$. L'intégrale de $-\frac{Y^m v\,dv}{(1-vv)^{n+1:2}}$ se réduit très-naturel-

lement

lement à l'autre, en mettant dans celle-ci $\frac{c}{m}$ à la place de c, et $t\sqrt{m}$ à la place de t. On en tire, après les réductions nécessaires, l'intégrale demandée, prise depuis $v = Sin.\ A$ jusqu'à $v = 1$, égale à $Et - \frac{n}{1} 2^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{2}) + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{3}) - \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3} 4^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{4}) + etc.$; à quoi il faudroit encore ajouter les termes:

$$- \left(1 - \frac{n}{1} 2^{n-1} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{n-1} - etc.\right) \frac{1}{2t}$$

$$+ \left(1 - \frac{n}{1} 2^{n-2} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{n-2} - etc.\right) \frac{1}{4t^3}$$

$$- \left(1 - \frac{n}{1} 2^{n-3} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{n-3} - etc.\right) \frac{1.\ 3}{8t^5}$$

$$+ \left(1 - \frac{n}{1} 2^{n-4} + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{n-4} - etc.\right) \frac{1.\ 3.\ 5}{16t^7}$$

etc. etc. Or, la série $1 - \frac{n}{1} 2^p + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^p - etc.$ ayant pour dernier terme $(n+1)^p$, est généralement égale à zéro, toutes les fois que l'exposant p est un nombre entier, positif, et moindre que n. L'intégrale du problème, prise depuis $v = Sin.\ A$ jusqu'à $v = o$; ou depuis $Y = 1$ jusqu'à $Y = o$, sera donc égale à $Et - \frac{n}{1} 2^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{2}) + \frac{n.\ n-1}{1.\ 2} 3^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{3}) - \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3} 4^{\frac{2n-1}{2}} E(t\sqrt{4}) + etc.$, divisé par $(2c)^{\frac{2n-1}{2}}$.

COROLLAIRE.

61. Enfin, si dans la formule précédente on fait successivement $n = o$, $n = 1$, $n = 2$ *etc.* qu'on affecte les termes qui en résultent, du signe qui convient à chacun d'eux, et qu'on joigne ensemble ceux qui se trouvent multipliés par $E(t\sqrt{n})$, on parvient au théorème suivant, qui renferme la solution rigoureuse, générale et complette du grand problème des réfractions voisines de l'horizon, savoir

THÉOREME.

62. *La réfraction astronomique qui appartient à la distance apparente A, comprise entre les limites 82° et 90°, et exprimée en parties du rayon, est égale a* $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$, *multiplié par*

$$e^{-\omega:k}\ Et$$
$$+\frac{\omega}{c}\,2^{1:2}\,e^{-2\omega:k}\ E\,(t\sqrt{2})$$
$$+\frac{\omega\,\omega}{2\,cc}\,3^{3:2}\,e^{-3\omega:k}\ E\,(t\sqrt{3})$$
$$+\frac{\omega^3}{6\,c^3}\,4^{5:2}\,e^{-4\omega:k}\ E\,(t\sqrt{4})$$
$$+\frac{\omega^4}{24\,c^4}\,5^{7:2}\,e^{-5\omega:k}\ E\,(t\sqrt{5})$$

$+$ *etc. etc. etc.* La fraction k est rigoureusement égale à $\frac{\int Sin.\,A}{a}$. Cependant comme l'angle A est supposé différer peu de 90°, on peut sans erreur sensible supposer $k=\frac{s}{a}$; ou bien, $k=c$, ce qui donne $\frac{\omega}{k}=n$. La plus grande erreur qui puisse en résulter, dans le cas de $A=81°$, est à peine d'une seconde.

63. La valeur rigoureuse de t est la racine quarrée de $\frac{1-Sin.A}{c}$. Désignant par H la hauteur apparente, dont la moitié peut parfaitement être confondue avec son sinus, depuis $A=81°$ jusqu'à l'horizon, on aura $t=\frac{H}{\sqrt{2c}}$; ce qui donne $t^3=\frac{H^3}{2c\sqrt{2c}}$; $t^5=\frac{H^5}{4cc\sqrt{2c}}$; $t^7=\frac{H^7}{8c^3\sqrt{2c}}$ *etc*

PROBLEME.

64. *On demande à développer le produit Et d'après les puissances ascendantes de la variable t.*

SOLUTION.

65. L'intégrale $\int e^{-tt}dt$, prise depuis t infini jusqu'à une valeur quelconque de t, est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-t+\frac{t^3}{1.3}-\frac{t^5}{2.5}+\frac{t^7}{2.3.7}-$ *etc.* On aura

donc $Et = \frac{1}{2} e^{tt} \sqrt{\pi}$, moins la somme de la série $t + \frac{2t^3}{1.3} + \frac{4t^5}{1.3.5} + \frac{8t^7}{1.3.5.7} +$ *etc.* La loi de cette série se présente d'elle-même.

66. Le produit $E(-t)$ n'est donc pas $-Et$, mais $e^{tt}\sqrt{\pi} - Et$. C'est un corollaire dont on a besoin sur-tout, lorsque la distance apparente excède quatre-vingt-dix dégrés.

67. Le développement entier de la série donne, en faisant $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = K$, le produit $Et = K - t + Ktt - \frac{2t^3}{1.3} + \frac{Kt^4}{1.2} - \frac{4t^5}{1.3.5} + \frac{Kt^6}{1.2.3} -$ *etc.*

PROBLEME.

68. *Développer l'expression entière de la réfraction voisine de l'horizon, en une série qui procède par puissances ascendantes de t.*

SOLUTION.

69. Les termes qui composent la série dans laquelle nous venons de développer Et, sont, les uns de la forme Mt^{2m}, les autres de celle-ci $-Nt^{2m+1}$. On aura donc pour coëfficient entier et complet du terme t^{2m} dans la série demandée, $Mt^{2m}\sqrt{2n\omega}$, multiplié par $1 + \frac{\Delta 2^{m+1:2}}{1} n + \frac{\Delta^2 3^{m+3:2}}{1.2} n^2 + \frac{\Delta^3 4^{m+5:2}}{1.2.3} n^3 + \frac{\Delta^4 5^{m+7:2}}{1.2.3.4} n^4 +$ *etc.* Le coëfficient du terme t^{2m+1} deviendra $-Nt^{2m+1}\sqrt{2n\omega}$, multiplié par $1 + \frac{\Delta 2^{m+2}}{1} n + \frac{\Delta^2 3^{m+2}}{1.2} n^2 + \frac{\Delta^3 4^{m+3}}{1.2.3} n^3 + \frac{\Delta^4 5^{m+4}}{1.2.3.4} n^4 +$ *etc.*

70. Commençons par cette dernière série. Sa somme est égale, dans le cas de

$m = 0$; à $\frac{1}{(1-n)}$;

$m = 1$; à $\frac{1}{(1-n)^3}$;

$m = 2$; à $\frac{1+2n}{(1-n)^5}$.

$$m = 3;\ \text{à}\ \frac{1 + 8n + 6nn}{(1-n)^7};$$

$$m = 4;\ \text{à}\ \frac{1 + 22n + 58n^2 + 24n^3}{(1-n)^9};$$

$$m = 5;\ \text{à}\ \frac{1 + 52n + 328n^2 + 444n^3 + 120n^4}{(1-n)^{11}}.$$

Ainsi les deux premiers termes de la série qui exprime la réfraction, répondants à $m = o$, et $m = 1$, deviendront, en remettant $\frac{\omega}{c}$ à la place de n, et H à la place de $t\sqrt{2c}$, $-\frac{\omega H}{c-\omega} - \frac{c\omega H^3}{3(c-\omega)^3}$.

71. Quant aux séries qui servent de coëfficient aux termes t^{2m} dans l'expression demandée de la réfraction, elles ne sont sommables dans aucun cas. Celui de $m = o$ donne l'expression de la réfraction horizontale que nous connoissons déja. Il seroit bien difficile de dire ce que devient cette série dans le cas de $m = 1$. Heureusement qu'alors ses coëfficiens forment une progression très-sensiblement arithmétique, ce qui la rend à très-peu près égale à $tt\sqrt{\frac{1}{2}n\omega\pi}$, multiplié par $\frac{1-(3-\sqrt{8})n}{(1-n)^2}$; ou bien, en rétablissant les valeurs de t, ω, à $\frac{\omega HH\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2c}}$, multiplié par $\frac{c-(3-\sqrt{8})\omega}{(c-\omega)^2}$. Enfin, considérant que le terme $(3-\sqrt{8})\omega$ est à peine le trentième de c, on obtiendra $\frac{\omega HH\sqrt{c\pi}}{2(c-\omega)^2\sqrt{2}}$.

72. Rassemblant tous ces termes, la réfraction qui appartient à la hauteur H, supposée très-petite, sera égale à la réfraction horizontale $-\frac{\omega H}{c-\omega} + \frac{\omega HH\sqrt{c\pi}}{2(c-\omega)^2\sqrt{2}} - \frac{c\omega H^3}{3(c-\omega)^3}$. Cette formule nous apprend que pour des objets situés au-dessous du niveau de l'observateur, la réfraction doit prendre des accroissemens très-rapides; étant égale alors à la réfraction horizontale, *plus* $\frac{\omega H}{c-\omega} + \frac{\omega HH\sqrt{c\pi}}{2(c-\omega)^2\sqrt{2}} + \frac{c\omega H^3}{3(c-\omega)^3}$.

73. Arrêtons-nous d'abord au premier terme, $\frac{\omega H}{c-\omega}$. Il nous fait voir,

qu'à l'horizon même, le rapport différentiel $-\frac{dR}{dH}$ ou $\frac{dR}{dA}$ est égal à $\frac{\omega}{c-\omega}$; c'est là sa valeur rigoureuse. Reste donc à examiner, à quel point les sept tables de réfraction que nous avons cité dans le premier chapitre, répondent à la condition prescrite par l'analyse, $dR : dA = \omega : c - \omega$. Les fractions ω, c, ayant été déterminées pour chacune de ces tables, il étoit très-facile de calculer la fraction $\frac{\omega}{c-\omega}$; j'en ai rassemblé les valeurs dans *la première colonne*. La *seconde* fait voir les valeurs des fractions $\frac{dR}{dA}$, tirées immédiatement de leurs tables respectives. La *troisième* marque les quotiens des premiers nombres, divisés par les derniers.

Lalande	0,204	0,150	1,36
Cassini	0,204	0,073	2,79
Bradley	0,220	0,160	1,35
Newton	0,244	0,223	1,09
Bouguer I.	0,190	0,108	1,76
Bouguer II.	0,168	0,100	1,68
Bouguer III.	0,168	0,103	1,63
de la Caille	0,195	0,076	2,56

74. L'accord parfait entre le calcul et l'observation exigeroit que les nombres de la troisième colonne fussent rigoureusement égaux à l'unité. Aucune de ces tables n'y satisfait exactement. Celle de *Newton* s'en écarte le moins; et si l'on suppose une erreur de calcul ou d'observation, égale à *dix-huit secondes*, sur la réfraction de 30′ 24″ qu'il assigne à la hauteur apparente de quinze minutes, il n'y aura plus de différence du tout. Celles de *Cassini* et *de la Caille* s'écartent le plus de la condition prescrite par la théorie; au reste, ni l'une ni l'autre ne doivent embarrasser le calculateur; la première étant fondée sur l'hypothèse infiniment vicieuse et nullement admissible d'une trajectoire rectiligne; et l'autre étant censée par tous les astronomes, d'avoir supposé les réfractions plus grandes qu'elles ne sont. Les deux tables de *Bradley* et *de Lalande*, calculées sur le théorème, en vertu duquel la réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée de trois fois la réfraction, s'accordent entr'elles, à fair pour un dA donné, le dR qui lui répond trop petit d'un tiers. Les trois tables de *Bouguer* paroissent s'écarter encore plus de la théorie; mais il est assez probable

que cette différence ne vient que d'une interpolation défectueuse. Une observation directe de *Bouguer*, faite à *Chimboraco*, le 13 *Décembre* 1738, porte à 20′ 17″ la réfraction horizontale; et à 18′ 9″ celle de 17′ de hauteur apparente. On en tire $dR = 0,126\, dA$, ce qui donne 1,33 pour le nombre correspondant de la troisième colonne.

75. Ainsi donc toutes nos tables de réfraction rendent le décroissement de la réfraction aux environs de l'horizon, beaucoup moins considérable qu'il n'est réellement. Ce point de théorie mérite d'être discuté. Nous y employerons les réfractions astronomiques, observées par *Bouguer*, le soleil se trouvant dans la moitié inférieure du ciel, et la hauteur apparente H devenant alors *négative*. Voici le résultat de ces observations, faites le 13, 14, 15 Décembre, année 1738, au soir :

Hauteur appar.	*Réfraction.*
1° 0′	14′ 32″ le 13
	13′ 46″ le 14
	13′ 23″ le 15
0° 17′	18′ 9″ le 13

Dépression appar.	*Réfraction.*
0°	20′ 17″ le 13
	19′ 34″ le 14
	19′ 25″ le 15
0° 31′	24′ 20″ le 13
1° 0′	30′ 1″ le 15
1° 7′	31′ 45″ le 13
	32′ 6″ le 15
1° 17′	34′ 47″ le 14.

76. L'application du calcul à ces observations est sujette à de très-grandes difficultés. Les unes viennent de la table elle-même, qui ne se trouve pas trop fidèle à la loi de continuité. Comparant entr'elles les observations du 13 et du 15, les premières se trouvent constamment les plus grandes à cinq, quatre, trois, deux, un, zéro dégrés de hauteur apparente; on doit donc être surpris de voir, qu'à un dégré de dépression apparente, la réfraction du 15 l'emporte de vingt secondes sur celle du 14. Comparant de même les observations faites le 14 avec celles du 15, les premières se trouvent encore les plus grandes à sept, six, cinq, quatre, trois, deux, zéro dégrés de hauteur, tandis qu'à deux dégrés, l'observation du 15 l'emporte encore sur

celle du 14. Aussi les premières différences de ces réfractions sont-elles excessivement irrégulières, ce qu'on auroit de la peine à concilier avec la marche constante de la nature, et ce qui suppose nécessairement de légères erreurs, dont l'observation s'est trouvée atteinte.

77. Ajoutons à cela que la série elle-même, donnée en 72. cesse d'être convergente à trente minutes de hauteur ou de dépression apparente. Enfin la plus grande difficulté vient de ce que cet astronome nous a laissé dans l'incertitude sur l'état de l'air au tems de l'observation: ce qui nous met dans l'impossibilité, d'assigner aux fractions c, ω, les valeurs qui leur conviennent. Il a fallu prendre la première d'après une réflexion très-vague sur la hauteur du *Chimboraco*. Ayant trouvé la température de l'air pour la seconde table de *Bouguer*, égale à celle de la glace fondante, j'ai supposé quelques dégrés de froid de plus à celle-ci; celà m'a donné la soutangente ou $h = 3900$ toises. Connoissant h, j'ai eu $Log.\ c = 7{,}0755719$. Enfin pour trouver ω, je me suis servi de la réfraction horizontale même de $20' 17''$; j'ai eu $\omega = 0{,}0001535$; et $Log.\ \omega = 6{,}1861602$.

78. Cela étant, l'application de la formule 72 donne pour dix-sept minutes de hauteur apparente, la réfraction égale à $17' 56''$. Elle fut observée par *Bouguer* de $18' 9''$. L'erreur de $13''$ est celle de *un* sur *quatre-vingt-quatre*.

79. Cette même formule donne pour trente-une minutes de dépression apparente, la réfraction égale à $25' 51''$. L'observation l'avoit donné égale à $24' 20''$. L'erreur de quatre-vingt-dix secondes est celle de *un sur dix-sept*.

80. Au milieu des incertitudes sur l'état de l'air, on peut parfaitement se contenter du calcul de la première observation. Cette circonstance doit être au moins une raison très-forte pour croire, qu'il pourroit bien s'être glissé dans la seconde observation l'erreur d'une minute à-peu-près. Des observations répétées sur les réfractions horizontales dissiperont sans doute nos incertitudes à ce sujet.

81. Dans la table suivante, calculée sur la formule de 72, j'ai supposé la réfraction horizontale égale à $32' 56''$; et celle de $45°$ de hauteur, à $56''8$, conformément à la table de *Bradley*, réduite à la température de $10°$. Cette table fait voir pour les réfractions du premier dégré de hauteur apparente, la différence entre la table de *Bradley*, et la véritable théorie des réfractions. On trouve ces dernières

à la hauteur apparente	*selon Bradley*	*véritable théorie.*
0 min.	32′ 56″	32′ 56″
6	31′ 55″	31′ 39″
12	30′ 58″	30′ 28″
18	30′ 3″	29′ 21″
24	29′ 9″	28′ 18″
30	28′ 17″	27′ 18″
36	27′ 27″	26′ 23″
42	26′ 39″	25′ 29″
48	25′ 52″	24′ 40″
54	25′ 8″	23′ 50″
60	24′ 24″	23′ 29″.

82. Il faut observer au sujet de la troisième colonne, que la suppression du quatrième terme de la série et des suivants, a produit des erreurs insensibles au commencement, mais qui à un dégré de hauteur pouvoient aller à 25 secondes à-peu-près. Le maximum de différence a donc été jusqu'ici de soixante-dix secondes; telle est effectivement l'erreur produite par la règle de *Bradley*.

83. Comme la convergence de la série donnée en 72 cesse absolument d'être sensible à un dégré de hauteur apparente, il faudra toujours en revenir pour le calcul rigoureux des réfractions approchantes de l'horizon, à celle de 62. Donnons un exemple d'un pareil calcul: et supposant $\omega = 0,000275$ et la soutangente des densités s égale à 4992,7 toises, conformément à la table de *Bradley*, réduite à la température des caves, déterminons la réfraction qui répond à trois dégrés de hauteur apparente.

84. On aura donc

$$\begin{aligned} Log.\ s &= 3,6983378; \\ Log.\ a &= 6,5154927; \\ Log.\ c &= -3,1828451; \\ Log.\ \omega &= -4,4393328; \\ Log.\ n &= -1,2564876. \end{aligned}$$

85. Passons au logarithme vulgaire de $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, facteur commun de toute la série. On le trouvera égal à $-3,9984252$. Le logarithme hyperbolique de e^{-n} est $-n$ ou $-0,1805043$; le logarithme vulgaire de cette puissance

sera

sera donc — (0,0783920) ou — 1,9216080. On aura le logarithme vulgaire de $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}e^{n}$ égal à — 3,5130879; et celui de $n\,e^{-n}$ sera égal à — 1,1780956.

86. Delà il faudra passer à t. On à $t\sqrt{c} = (Sin.\ \frac{1}{2}H)\sqrt{2}$. On aura donc

$$\begin{aligned}
Log.\ t &= -1{,}9790115;\ t = 0{,}948444;\\
Log.\ (t\sqrt{2}) &= 0{,}1275265;\ t\sqrt{2} = 1{,}341302;\\
Log.\ (t\sqrt{3}) &= 0{,}2155721;\ t\sqrt{3} = 1{,}642752;\\
Log.\ (t\sqrt{4}) &= 0{,}2780415;\ t\sqrt{4} = 1{,}896887;\\
Log.\ (t\sqrt{5}) &= 0{,}3264965;\ t\sqrt{5} = 2{,}120784;\\
Log.\ (t\sqrt{6}) &= 0{,}3660871;\ t\sqrt{6} = 2{,}323203.
\end{aligned}$$

87. Connoissant t, $t\sqrt{2}$, $t\sqrt{3}$, $t\sqrt{4}$, $t\sqrt{5}$, $t\sqrt{6}$, il faudra trouver les logarithmes de $E\,t$, $E\,(t\sqrt{2})$, $E\,(t\sqrt{3})$, $E\,(t\sqrt{4})$, $E\,(t\sqrt{5})$, $E\,(t\sqrt{6})$. On les trouvera dans la troisième table. En s'arrêtant aux premières différences, on aura

$$\begin{aligned}
Log.\ E\,t &= 9{,}5930547;\\
Log.\ E(t\sqrt{2}) &= 9{,}4911302;\\
Log.\ E(t\sqrt{3}) &= 9{,}4242169;\\
Log.\ E(t\sqrt{4}) &= 9{,}3738451;\\
Log.\ E(t\sqrt{5}) &= 9{,}3332945;\\
Log.\ E(t\sqrt{6}) &= 9{,}2992974.
\end{aligned}$$

88. De plus, n'oublions pas les logarithmes de $\frac{2^{1:2}}{1}$, $\frac{3^{3:2}}{1.\,2}$, $\frac{4^{5:2}}{1.\,2.\,3}$, $\frac{5^{7:2}}{1.\,2.\,3.\,4}$, $\frac{6^{9:2}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$. On les trouvera

$$\begin{aligned}
\text{le premier} &= 0{,}1505150;\\
\text{le second} &= 0{,}4147519;\\
\text{le troisième} &= 0{,}7269987;\\
\text{le quatrième} &= 1{,}0661838;\\
\text{le cinquième} &= 1{,}4224944.
\end{aligned}$$

On peut remarquer en passant que dans l'infini la progression de ces coëfficiens coïncide avec une progression géométrique, ayant pour exposant e, base du système hyperbolique.

89. Rassemblant les logarithmes respectifs, on trouvera ceux des différens termes de la série qui exprime la réfraction, comme il suit;

celui du premier — 3,5130879;
du second — 4,7394090;
du troisième — 4,1150932;
du quatrième — 5,5551638;
du cinquième — 5,0318939;
du sixième — 6,5323030.

90. On aura enfin 0,003989 pour la réfraction qui répond à trois dégrés de hauteur apparente, exprimée en parties du rayon; ce qui fait 13′ 43″. La table, calculée sur la règle de *Bradley*, donne 14′ 32″. La différence entre cette règle et la solution rigoureuse est donc ici de 49″. Elle est moins grande de 20″ que celle que nous avions trouvé à un dégré de hauteur; cela fait voir qu'à trois dégrés de hauteur, ces différences, ayant passé leur *maximum*, vont déja en diminuant.

91. Ce calcul est très-long sans doute. Qu'on n'en inculpe pas le calculateur, la solution rigoureuse du problème l'a exigé ainsi; et l'analyse ne présente pas des moyens encore, de sommer la série très-compliquée de 58. Dans l'état présent de cette science, nous ne pouvons atteindre à une formule plus simple, qu'en nous relâchant un peu de la rigueur de la solution, et en sacrifiant la précision de quelques secondes à la facilité du calcul. Voici quelques problèmes qui peuvent y conduire.

PROBLEME.

92. *On demande à développer la série donnée en* 58, *qui exprime la réfraction voisine de l'horizon, selon les puissances descendantes de la fraction* t, *en lui donnant cette forme:* $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, *multiplié par* $\frac{1}{2t} - \frac{A}{4t^3} + \frac{1.3B}{8t^5} - \frac{1.3.5C}{16t^7} + etc.\ etc.$

SOLUTION.

93. On a $Et = \frac{1}{2t} - \frac{1}{4t^3} + \frac{1.3}{8t^5} - \frac{1.3.5}{16t^7} + etc.\ etc.$ On tire de là les valeurs de $E(t\sqrt{2})$, $E(t\sqrt{3})$, $E(t\sqrt{4})$ *etc.* exprimées en des séries analogues, en mettant $t\sqrt{2}$, $t\sqrt{3}$, $t\sqrt{4}$ *etc.* à la place de t. Ensuite, arrangeant les termes par puissances descendantes de t, on verra les coëfficiens A, B, C, D *etc.* exprimés comme il suit:

$$A = 1 - \frac{n}{2};$$

$$B = 1 - \frac{3n}{4} + \frac{nn}{6};$$

$$C = 1 - \frac{7n}{2^3} + \frac{11}{6^2} nn - \frac{n^3}{24};$$

$$D = 1 - \frac{15n}{2^4} + \frac{85}{6^3} n^2 - \frac{50}{24^2} n^3 + \frac{n^4}{120};$$

$$E = 1 - \frac{31n}{2^5} + \frac{575}{6^4} n^2 - \frac{1660}{24^3} n^3 + \frac{274}{120^2} n^4 - \frac{n^5}{720}.$$

94. La loi de ces coëfficiens est simple. On aura le terme général de la série, qui exprime la réfraction, égal à $\frac{1}{2^p t^{2p-1}}^{(p-1)Ia}$, multiplié par

$$1 - \frac{n}{1}\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) + \frac{nn}{1.2}\left(1 - \frac{2}{2^{p-2}} + \frac{1}{3^{p-2}}\right) - \frac{n^3}{1.2.3}\left(1 - \frac{3}{2^{p-3}} + \frac{3}{3^{p-3}} - \frac{1}{4^{p-3}}\right)$$

$$+ \frac{n^4}{1.2.3.4}\left(1 - \frac{4}{2^{p-4}} + \frac{6}{3^{p-4}} - \frac{4}{4^{p-4}} + \frac{1}{5^{p-5}}\right) - \textit{etc.}$$ Cela n'est autre chose que $1 + \frac{n}{1} \Delta \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{nn}{1.2} \Delta^2 \frac{1}{3^{p-2}} + \frac{n^3}{1.2.3} \Delta^3 \frac{1}{4^{p-3}} + \frac{n^4}{1.2.3.4} \Delta^4 \frac{1}{5^{p-4}} + \textit{etc.}$

95. Ici nous observerons d'abord, que comme la fraction n n'est égale qu'à un cinquième dans les moyennes températures de l'air, et que même le *maximum* de cette fraction, où elle ne pourroit atteindre que dans les froids les plus rigoureux des pays septentrionaux, ne surpasseroit guères *un quart*, la série des coëfficiens A, B, C, D *etc.* doit coincider très-sensiblement, dès le troisième terme, avec une progression géométrique. En effet, on aura *à-peu-près*

$$\frac{B}{A} = 1 - \frac{n}{4} + \frac{nn}{24};$$

$$\frac{C}{B} = 1 - \frac{n}{8} + \frac{nn}{22};$$

$$\frac{D}{C} = 1 - \frac{n}{16} + \frac{nn}{30};$$

nombres qu'on peut considérer comme très-sensiblement égaux entr'eux, parce que les deux premiers ne diffèrent en effet que d'un quarantième ; différence qui peut être supprimée avec d'autant plus de raison, qu'elle ne commence à se faire sentir qu'au troisième terme de la série.

96. Cela étant, examinons s'il n'y auroit pas moyen de déterminer la fraction b de manière, que, faisant $buu = 1 - Sin.\ A$, la réfraction put être sensiblement représentée par $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{b}} Eu$? Elle seroit donc égale alors à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{b}}$, multiplié par $\frac{1}{2u} - \frac{1}{4u^3} + \frac{1.3}{8u^5} - \frac{1.3.5}{16u^7} + etc.$ ce qui reviendroit, à cause de $u : t = \sqrt{c} : \sqrt{b}$, à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, multiplié par $\frac{1}{2t} - \frac{b}{4ct^3} + \frac{1.3\,bb}{8cc\,t^5} - \frac{1.3.5\,b^3}{16\,c^3\,t^7} + etc.$ C'est donc cette expression qu'il faudroit égaler à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, multiplié par $\frac{1}{2t} - \frac{A}{4t^3} + \frac{1.3\,B}{8\,t^5} - \frac{1.3.5\,C}{16\,t^7} + etc.$ Cela sera possible, autant qu'il nous sera permis de supposer $b = Ac$; $bb = Bcc$; $b^3 = Cc^3$; $b^4 = Dc^4$ etc.

97. Nous avons déja remarqué que la progression des coëfficiens A, B, C, D etc. est très-sensiblement géométrique. En effet, faisant $Log.\ n = 9{,}2288082$ conformément à l'ancienne table de *la Lande*, on trouve

$$Log.\ (B : A) = 9{,}9818032\ ;$$
$$Log.\ (C : B) = 9{,}9913103\ ;$$
$$Log.\ (D : C) = 9{,}9958344\ ;$$
$$Log.\ (E : D) = 9{,}9979215\ ;$$

logarithmes qui diffèrent très-peu de l'unité, et encore moins entr'eux.

98. Reste donc à choisir entre toutes les valeurs de b, qu'on peut tirer des équations $b = Ac$, $bb = Bcc$; $b^3 = Cc^3$ etc. celle qui de toutes les petites erreurs produit la plus petite possible. On a eu pour valeur rigoureuse de la réfraction horizontale $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$, multiplié par $1 + \frac{A\omega}{c} + \frac{B\omega^2}{c^2} + etc.$ Cette même réfraction horizontale doit être égale à $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2b}}$, d'après la nouvelle formule. Cela donne $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$, multiplié par $1 + \frac{A\omega}{c} + \frac{B\omega^2}{c^2} + \frac{C\omega^3}{c^3} + etc.$

Alors, faisant $buu = 1 - Sin. A$, la réfraction qui répond à la distance apparente A, sera égale à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{b}} E u$.

99. Rétablissant la notation Fn pour désigner la suite $1 + An + Bn^2 + etc.$ la réfraction astronomique, qui répond à la hauteur apparente H, sera donc égale à $\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{c}}$, multiplié par Fn, Eu; la quantité u étant égale à $\frac{Fn, H}{\sqrt{2c}}$.

100. Enfin, appliquant ces formules à la table de *Bradley*, supposée répondre à 28 *poll. barom.* et 10° de *Réaumur*, on aura $Log. u = 1,2934651 + Log. H$; et le logarithme de la réfraction, appartenante à la hauteur apparente H, deviendra $- 2,0338278 + Log. E u$. On aura par cette règle la réfraction exprimée en parties du rayon. Si on veut l'avoir en millionièmes du quart, ou en secondes de la nouvelle division, on aura son logarithme égal à $3,8437079 + Log. E u$.

101. Si l'on désigne par $R - dR$ la réfraction qui appartient à la hauteur apparente dH, supposée infiniment petite, on aura $dR : dH = \omega (Fn)^2 : c$. Il devroit y avoir à la rigueur $dR : dH = \omega : c - \omega$. Donc, pour que la formule qu'on vient de trouver, fut entièrement rigoureuse, il faudroit que Fn fut égal à 1, divisé par la racine quarrée de $1 - n$. Elle n'en est effectivement guères éloignée; et si l'on met cette valeur à la place de Fn dans la formule qui exprime la réfraction horizontale, cette dernière, exprimée en parties du rayon, deviendra égale à la racine quarrée de $\frac{\frac{1}{2} n \omega \pi}{1 - n}$; ce qui dans les températures moyennes ne produit qu'une demi-minute d'erreur.

102. La formule très-simple, donnée en 99, fait connoître les réfractions astronomiques qui approchent de l'horizon, avec une très-grande exactitude; en effet, la différence entre cette formule, et la série rigoureuse de 58, ne va nulle part à plus de huit secondes. Je l'ai employée, pour calculer les réfractions qui appartiennent aux huit premiers dégrés de hauteur apparente. Je m'empresse d'autant plus à communiquer au public la table construite sur cette formule, qu'elle est effectivement la première qui ait été calculée sur la solution rigoureuse du problème des réfractions astronomiques, sans le secours d'aucune hypothèse étrangère.

Hauteur apparente.		Réfraction calculée suivant la formule de 99.		la règle de Bradley.		Differ. en sec.
dég.	min.	min.	sec.	min.	sec.	sec.
0	0	32	56	32	56	0
0	15	29	58	30	30	32
0	30	27	25	28	17	42
0	45	25	12	26	16	64
1	0	23	15	24	24	69
1	15	21	32	22	43	71
1	30	20	2	21	11	69
1	45	18	42	19	47	65
2	0	17	30	18	31	61
2	15	16	26	17	23	57
2	30	15	28	16	20	52
2	45	14	37	15	24	47
3	0	13	50	14	32	42
3	15	13	7	13	46	39
3	30	12	28	13	3	35
3	45	11	52	12	24	32
4	0	11	19	11	48	29
4	15	10	49	11	15	26
4	30	10	22	10	45	23
4	45	9	56	10	17	21
5	0	9	32	9	51	19
5	15	9	10	9	27	17
5	30	8	50	9	5	15
5	45	8	31	8	44	13
6	0	8	13	8	25	12
6	15	7	56	8	7	11
6	30	7	40	7	50	10
6	45	7	26	7	34	8
7	0	7	12	7	20	8
7	15	6	59	7	6	7
7	30	6	46	6	53	7
7	45	6	34	6	40	6
8	0	6	24	6	29	5

103. Cette table nous fait donc apprécier les erreurs auxquelles nous peut exposer la règle de *Bradley* dans les températures moyennes de l'air. Cette erreur atteint son maximum vers 1° 15′ de hauteur apparente; elle y est de 71 secondes. Au-delà de six dégrés de hauteur, la formule de 99, 100 se rapproche insensiblement de la règle de *Bradley*, avec laquelle elle se trouve confondue à huit dégrés de hauteur, au moins dans les températures moyennes, pour lesquelles la fraction n se trouve au-dessous d'un cinquième, ou tout au plus d'un quart.

104. Mais il faut voir aussi ce qui arrivera dans les froids très-rigoureux, pour lesquels cette fraction approche d'un tiers. Les observations recueillies par *le Monnier* prouvent suffisamment que ce cas existe dans la nature, et qu'il n'est pas à beaucoup près aussi rare que l'on pense. Nous avons déja remarqué, qu'ici le thermometre se trouvoit en défaut, et que sans le secours du manometre il étoit impossible d'atteindre à quelque précision.

105. Ainsi, désignant comme en 31 par b, la hauteur du barometre exprimée en pouces; par m, le nombre marqué par la division du manometre; par K, la valeur qu'acquiert la fraction ω dans le cas de $m = 10000$, multipliée par 10000, et qu'en attendant nous supposerons égale à 2,9827 conformément à la table de *Bradley*; on aura la réfraction astronomique, qui appartient à la hauteur apparente H, de la manière suivante: faisant d'abord $n = \frac{aK(g - bm)}{gbmm}$, fraction qui dans le cas d'une élasticité spécifique constante se réduit à $\frac{aK}{bmm}$, on aura d'abord $u = H, Fn$, multiplié par la racine de $\frac{nm}{2K}$; ensuite la réfraction astronomique, exprimée en parties du rayon, sera égale au produit des trois quantités suivantes: Fn, Eu, et la racine quarrée de $\frac{2nK}{m}$. Ce calcul n'est ni long, ni difficile, comme on verra par l'exemple suivant.

106. *Le barometre se trouvant à 28 pouces, 9 lignes; et le manometre marquant 8400, on demande les quantités constantes, servant à la construction d'une table des réfractions astronomiques.*

107. Ayant $b = 28,75$; $m = 8400$; on trouvera $bm = 3354,16$ toises ce qui donne $g - bm = 23829,2$ toises. Alors

$Log.\ m =$	3,9242793;	
$Log.\ mm =$	7,8485586.	*Ajoutez*
$Log.\ b =$	1,4586378.	*Vous aurez*
$Log.\ bmm =$	9,3071964.	*Otez de*
$Log.\ (aK : g) =$	4,4131344;	*vous aurez*
	$-$ 5,1059380.	*Ajoutez*
$Log.\ (g - bm) =$	4,3771276.	*Il viendra*
$Log.\ n =$	1,4830656.	*Donc*
$n =$	0,304134;	*ce qui donne*
$Log.\ Fn =$	0,0638073.	*Doublant*
$2\ Log.\ Fn =$	0,1276146.	*Ajoutez*
$Log.\ n =$	$-$ 1,4830656.	*Et de plus*
$Log.\ (m : 2) =$	3,6232493.	*Vous aurez*
	3,2339305.	*De quoi ôtant*
$Log.\ K =$	0,4746125;	*il viendra*
	2,7593180;	*dont la moitié*
	1,3796590	

fera connoître le logarithme de Fn, $\sqrt{\frac{nm}{2K}}$; c'est l'un des deux coëfficiens constants. Pour trouver l'autre, ayant

$2\ Log.\ Fn =$	0,1276246;	*ajoutez*
$Log.\ n =$	$-$ 1,4830656;	*et de plus*
$Log.\ K =$	0,4746125;	*vous aurez*
	0,0853027.	*De quoi ôtant*
$Log.\ (m : 2) =$	3,6232493;	*il viendra*
	$-$ 4,4620534;	*dont la moitié*
	$-$ 2,2310267	

exprimera le logarithme de l'autre coëfficient constant Fn, $\sqrt{\frac{2nK}{m}}$. On pouvoit le déduire immédiatement du premier, en ajoutant à celui-ci $Log.\ 2K - Log.\ m$.

108. Ainsi donc, cette température de l'air étant proposée, si l'on demande la réfraction astronomique qui répond à la hauteur H, on fera d'abord $Log.\ u = 1,3796590 + Log.\ H$; ce qui donne ensuite $-2,2310267 + Log.\ Eu$ pour le logarithme de la réfraction astronomique demandée. Ajoutant

à

à — 2,2310267 le logarithme de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, qui est — 1,9475450, on aura celui de la réfraction horizontale, que l'on trouvera égale à 0,015084 ou 51′ 51″.

109. La formule qu'on vient de trouver, suppose que dans l'évaluation de la hauteur apparente H et de la réfraction r, le rayon est pris pour l'unité. Si on veut prendre pour unité le quart de circonférence, il faudra faire $Log.\ u = 1,5757789 + Log.\ H$; on aura ensuite $Log.\ r = -2,0349068 + Log.\ E\,u$.

110. *Exemple.* Soit la hauteur apparente $H = 0,036$. On aura pour la température de l'air qu'on vient de supposer, $Log.\ u = 0,1370814$; donc $u = 1,3554434$; et $Log.\ E\,u = -1,4889469$. Ajoutant à ce logarithme — 2,0349068; on aura — 3,5238537 pour logarithme de la réfraction demandée, qui deviendra égale à 0,0003341; faisant 3341 secondes de la nouvelle division. Elle se trouve plus petite d'un grand sixième de ce qu'auroit donné la règle généralement adoptée jusqu'ici, d'après laquelle la densité de l'air venant à changer, les réfractions appartenantes à toutes les hauteurs sont supposées être augmentées ou diminuées dans le même rapport, savoir, celui de la densité. Nous avons déja prouvé dans le second chapitre que cette règle étoit très-admissible jusqu'à 82° de distance: nous ajouterons ici, qu'à quelques dégrés plus loin elle ne paroît pas produire encore des erreurs bien sensibles. Mais ce qui est très-certain, c'est qu'aux approches de l'horizon même elle s'éloigne beaucoup de la vérité; et que pour déterminer avec quelque précision les réfractions qui appartiennent à de très-petites hauteurs, il faudra toujours en revenir à la formule rigoureuse de 51, ou presque rigoureuse de 92.

111. Il me reste à rendre compte de la construction des deux tables de réfractions qui suivent. Elles font connoître, pour les cent premiers millièmes de hauteur apparente, faisant chacun dix minutes de la nouvelle division, les réfractions qui appartiennent à ces hauteurs, exprimées en millionièmes d'un quart de circonférence, ou en secondes de la nouvelle division.

112. La première de ces tables est calculée sur la règle de *Bradley*. On y a supposé, de même que dans la table même de cet astronome, la réfraction horizontale égale à 33′, et celle de 45° de hauteur apparente, égale à 57″. L'une et l'autre étant exprimées en parties du rayon, on aura $R = 0,00959931$;

et $\omega = 0{,}00027634$: ce qui donne fort exactement $\frac{\omega}{RR} = 3$. A cette température donc, la réfraction est généralement proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée de trois fois la réfraction ; si toutes fois l'on veut adopter la règle de *Bradley*. Dans toute autre température, il faudra substituer à 3 la fraction $\frac{\omega}{RR}$, comme nous verrons dans le chapitre suivant.

113. Donc, désignant par R la réfraction horizontale, par r celle qui convient à la distance apparente, vous aurez $r = R\ tang.\ \frac{1}{2}\ \phi$; l'angle ϕ étant tel que $tang.\ \phi = 6\ R\ tang.\ A$, et le rayon étant pris pour l'unité. Ainsi vous aurez

$$Log.\ tang.\ \phi = -\ 2{,}7603914 + Log.\ tang.\ A.$$

et

$$Log.\ r = -\ 3{,}9822401 + Log.\ tang.\ \tfrac{1}{2}\ \phi.$$

Et si l'on demande cette même réfraction exprimée en secondes de la nouvelle division, on fera $Log.\ r = 3{,}7861202 + Log.\ tang.\ \frac{1}{2}\ \phi$. C'est suivant cette règle que la première table a été construite.

114. La seconde table a été construite sur la formule de 92. Comme la table de *Bradley* ne se rapporte pas précisément à la température des caves, il a fallu déterminer d'abord la fraction c ; on a trouvé $Log.\ n = -\ 1{,}2561860$; ce qui a donné $Fn = 1{,}08485$. Du logarithme de n on a déduit celui de c, égal à $-\ 3{,}1852578$; donc $\frac{Fn}{\sqrt{2c}} = 3{,}078547$. Donc enfin, la hauteur apparente H étant supposée exprimée en millièmes d'un quart de circonférence, on a $u = 0{,}3078547\ H$; et si l'on demande la réfraction à cette hauteur, exprimée en secondes de la nouvelle division, on aura $Log.\ r = 3{,}8385798 + Log.\ E\ u$.

115. Voici à présent les deux tables.

Hauteur appar. en millièmes d'un quart.	*Réfraction, exprimée en millionièmes d'un quart, ou en secondes de la nouvelle division.*				*Différence entre les deux tables.*
	Règle de Bradley.	*Diff.*	*Formule de 92.*	*Diff.*	
0	6111		6111		0
1	5947	164	5905	206	42
2	5787	160	5709	196	78
3	5631	156	5523	186	108

Haut. appar. en millièmes d'un quart.	Réfraction, exprimée en millionièmes d'un quart, ou en secondes de la nouvelle division. Règle de Bradley.	Diff.	Formule de 92.	Diff.	Différence entre les deux tables.
4.	.5480	.151.	.5347	.176.	.133
5.	.5334	.146.	.5180	.167.	.154
6.	.5192	.142.	.5020	.160.	.172
7.	.5055	.137.	.4869	.151.	.186
8.	.4922	.133.	.4725	.144.	.197
9.	.4793	.129.	.4587	.138.	.206
10.	.4668	.125.	.4456	.131.	.212
11.	.4547	.121.	.4332	.124.	.215
12.	.4430	.117.	.4214	.118.	.216
13.	.4317	.113.	.4094	.115.	.223
14.	.4208	.109.	.3990	.109.	.218
15.	.4102	.106.	.3886	.194.	.216
16.	.4001	.101.	.3786	.100.	.215
17.	.3902	99.	.3691	95.	.213
18.	.3807	95.	.3599	92.	.208
19.	.3716	91.	.3512	87.	.204
20.	.3628	88.	.3427	85.	.201
21.	.3542	86.	.3347	80.	.195
22.	.3459	83.	.3269	78.	.190
23.	.3380	79.	.3193	74.	.185
24.	.3303	77.	.3123	72.	.180
25.	.3229	74.	.3054	69.	.175
26.	.3157	72.	.2988	66.	.169
27.	.3088	69.	.2924	64.	.164
28.	.3021	67.	.2864	60.	.157
29.	.2957	64.	.2804	60.	.153
30.	.2895	62.	.2746	58.	.149
31.	.2835	60.	.2691	55.	.144
32.	.2776	59.	.2638	53.	.138
33.	.2720	56.	.2587	51.	.133
34.	.2666	54.	.2537	50.	.129
35.	.2613	53.	.2489	48.	.124
36.	.2562	51.	.2443	46.	.119

Haut. appar. en millièmes d'un quart.	*Réfraction, exprimée en millionièmes d'un quart, ou en secondes de la nouvelle division.*				*Différence entre les deux tables.*
	Règle de Bradley.	*Diff.*	*Formule de 92.*	*Diff.*	
37	2513	49	2398	45	115
38	2465	48	2355	43	110
39	2419	46	2312	43	107
40	2375	44	2272	40	103
41	2332	43	2232	40	100
42	2290	42	2194	38	96
43	2249	41	2157	37	92
44	2210	39	2121	36	89
45	2172	38	2086	35	86
46	2135	37	2053	33	82
47	2099	36	2020	33	79
48	2064	35	1988	32	76
49	2030	34	1957	31	73
50	1997	33	1927	30	70
51	1965	32	1897	30	68
52	1934	31	1869	28	65
53	1904	30	1841	28	63
54	1875	29	1814	27	61
55	1846	29	1788	26	58
56	1819	27	1763	25	56
57	1792	27	1738	25	54
58	1766	26	1713	25	53
59	1740	26	1690	23	50
60	1715	25	1667	23	48
61	1691	24	1644	23	47
62	1667	24	1623	21	44
63	1644	23	1601	22	43
64	1622	22	1580	21	42
65	1600	22	1560	20	40
66	1579	21	1540	20	39
67	1558	21	1521	19	37
68	1537	21	1502	19	35

Haut. appar. en millièmes d'un quart.	*Réfraction, exprimée en millionièmes d'un quart, ou en secondes de la nouvelle division.*				*Différence entre les deux tables.*
	Règle de Bradley.	*Diff.*	*Formule de 92.*	*Diff.*	
69	1517	20	1483	19	34
70	1498	19	1465	18	33
71	1479	19	1448	17	31
72	1461	18	1431	17	30
73	1443	18	1414	17	29
74	1425	18	1397	17	28
75	1408	17	1381	16	27
76	1391	17	1365	16	26
77	1375	16	1350	15	25
78	1359	16	1335	15	24
79	1343	16	1320	15	23
80	1327	16	1305	15	22
81	1312	15	1291	14	21
82	1297	15	1277	14	20
83	1283	14	1264	13	19
84	1269	14	1250	14	19
85	1255	14	1237	13	18
86	1241	14	1224	13	17
87	1228	13	1212	12	16
88	1215	13	1199	13	16
89	1202	13	1187	12	15
90	1189	13	1176	11	13
91	1177	12	1164	12	13
92	1165	12	1153	11	12
93	1153	12	1141	12	12
94	1142	11	1130	11	12
95	1131	11	1120	10	11
96	1119	12	1109	11	10
97	1108	11	1098	11	10
98	1098	10	1088	10	10
99	1087	11	1078	10	9
100	1077	10	1069	9	8.

116. Cette table peut donc nous faire apprécier l'erreur à laquelle nous expose la règle de *Bradley*, appliquée aux réfractions approchantes de l'horizon. Dans les températures moyennes, cette erreur atteint son *maximum* à 0,013 ou soixante-dix minutes de hauteur apparente; elle y est égale à 72 secondes de l'ancienne division; de là elle diminue peu-à-peu, et à dix dégrés de hauteur apparente les résultats des deux règles ne diffèrent plus sensiblement entr'eux. Il est à présumer que dans des froids très-rigoureux ces erreurs deviendront beaucoup plus considérables. En les supposant proportionnelles à la densité de l'air, supposition au moins très-probable, on pourra faire usage de la table de ces erreurs que nous venons de donner, pour déterminer avec assez de précision, la réfraction qui appartient à une hauteur apparente proposée, indépendamment de la table des logarithmes de $E\,t$. On la calculera d'après la règle de *Bradley*, en observant d'en ôter ensuite la différence constamment positive, que cette règle aura produite. L'exposition de cette règle, et l'application qu'il faut en faire dans les différentes températures de l'air, seront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Examen des solutions d'Euler, Bradley, Mayer et Lambert.

SOLUTION D'EULER.

1. Nous devons à cet illustre géomètre un mémoire *sur la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère, selon les divers degrés, tant de la chaleur, que de l'élasticité de l'air*, inséré parmi ceux de *l'académie de Berlin.* 1754.

2. *Euler* commence par supposer une certaine température fondamentale de l'air, à laquelle il rapporte toutes les autres. Il désigne par b la hauteur du baromètre à cette température; par n le rapport de la densité de cet air à celle du mercure; par $1 : \alpha$ le rapport du *Sinus* d'incidence au *Sinus* de réfraction, pour les rayons qui entrent du vuide dans cet air; par γ son élasticité spécifique; par g celle qu'il exerce à une autre température quelconque. On trouve chez *Euler* le terme de *chaleur* à la place de celui *d'élasticité spécifique:* erreur très-pardonnable sans doute avant les découvertes de *Priestley*.

3. Ayant constamment désigné par b la hauteur du baromètre; par h la soutangente barométrique; par $1 : 1 + \omega$ le rapport du *Sinus* d'incidence au *Sinus* de réfraction, pour les rayons qui passent de l'air dans le vuide; ayant désigné de plus par B, H, W, ce que deviennent les quantités b, h, ω à une certaine température déterminée; l'on voit que α d'*Euler* répond à $1 - W$ de notre analyse; que le produit nb chez *Euler* désigne la soutangente barométrique à la température qu'il regarde comme fondamentale; que le n d'*Euler* est identique avec notre $\frac{H}{B}$; qu'enfin la fraction $\frac{nbg}{\gamma}$ d'*Euler* ne sert qu'à exprimer généralement cette même soutangente barométrique, que nous avons coutume de désigner par h.

4. Ce géomètre voudroit que l'on prit pour température fondamentale de l'air, celle qui répond à $\alpha = \frac{3324}{3325}$; et pour laquelle nb ou H est égale à

10000 fois vingt-huit pouces, ou 23333 pieds, faisant la 858ième partie du rayon de la terre. Une pareille soutangente suppose une température de huit dégrés au-dessous de la glace ; encore faut-il lui joindre une hauteur barométrique de 27 pouces, 4 lignes. L'état de l'air, supposé par *Euler*, ne peut donc pas être considéré comme état moyen ; nous lui substituerons celui de 28 *poll. barom.* et 10° de *Réaumur;* ce qui nous donnera, comme jusqu'ici, $W = 0{,}000275$; et $H = 4218$ toises ; d'où l'on tire

$$\begin{aligned} Log.\ W &= -4{,}4393327\,; \\ Log.\ H &= 3{,}6251066\,; \\ Log.\ aW &= 2{,}9548254\,; \\ Log.\,(H:a) &= -3{,}1096139. \end{aligned}$$

5. *Euler* jugea de même que nous, l'élasticité spécifique de l'air décroissante depuis l'horizon jusqu'aux régions élevées de l'atmosphère. Il la désigne par g à l'horizon ; par v à la hauteur x; le rapport $g:v$ est donc identiquement le même que le notre $1:E$. Il suppose $g:v = f + x:f$; ce qui donne $E = \frac{f}{f+x}$.

6. Nous avons supposé $E = e^{-x:g}$; ainsi la ligne f d'*Euler* n'est autre chose que notre soutangente aux élasticités spécifiques g. De plus, la différence entre les deux formules, n'est pas de nature à pouvoir influer sensiblement sur le calcul des réfractions. L'une donne $E = 1 - \frac{x}{g} + \frac{x^2}{g^2} - \frac{x^3}{g^3} + etc.$; l'autre donne $E = 1 - \frac{x}{g} + \frac{x^2}{2g^2} - \frac{x^3}{6g^3} + etc.$ et comme g est égale à 30000 toises à-peu-près, l'on voit que les deux formules ne commencent à différer sensiblement entr'elles qu'à des hauteurs, où la densité de l'air elle-même a cessé d'être sensible.

7. Passant au rapport qui doit exister entre les densités de l'air à l'horizon et à la hauteur x, qu'il désigne par $h:q$, et qui par conséquent est identique avec $1:Y$ de notre analyse, il trouve $Log.\ \frac{1}{Y} = -Log.\left(1 + \frac{x}{g}\right) + \frac{x}{h}\left(1 + \frac{x}{2g}\right)$ ou $\frac{g-h}{gh}x + \frac{g+h}{2g^2h}x^2 - \frac{x^3}{3g^3} + \frac{x^4}{4g^4} - etc.$; tandis que nous avions eu $Log.\ \frac{1}{Y} = -\frac{x}{g} + \frac{g}{h}\left(e^{x:g} - 1\right) = \frac{g-h}{gh}x + \frac{x^2}{2gh} + \frac{x^3}{6g^2h}$

+

$+\frac{x^4}{24\,g^3\,h}+$ *etc.* La table suivante nous fera connoître la différence qu'il peut y avoir entre les deux formules.

Hauteur x en toises.	*Densité de l'air, en supposant* $E=e^{-x:g}$	$E=\frac{g}{g+x}$	*Différence.*
0	1,00000	1,00000	0,00000
1000	0,80350	0,80301	0,00049
2000	0,63964	0,63834	0,00130
3000	0,50430	0,50236	0,00194
4000	0,39371	0,39143	0,00228
5000	0,30422	0,30199	0,00223
6000	0,23260	0,23070	0,00190
7000	0,17584	0,17453	0,00131
8000	0,13143	0,13075	0,00068
9000	0,09706	0,09701	0,00007
10000	0,07083	0,07128	—0,00045
11000	0,05102	0,05188	—0,00086
12000	0,03627	0,03739	—0,00112
13000	0,02543	0,02670	—0,00127
14000	0,01758	0,01888	—0,00130
15000	0,01084	0,01323	—0,00128
16000	0,00803	0,00918	—0,00115
17000	0,00531	0,00631	—0,00100
18000	0,00345	0,00430	—0,00095
19000	0,00220	0,00290	—0,00070
20000	0,00138	0,00194	—0,00056.

8. L'on voit par cette table, qu'au commencement la densité de l'air d'après notre formule l'emporte sur celle d'*Euler*; qu'à neuf mille toises de hauteur les deux courbes des densités se croissent, et qu'au-delà de ce terme la densité d'*Euler* a constamment la préférence. La différence au reste atteint son *maximum* à neuf mille toises de hauteur; et comme elle n'y est égale qu'à la cinq-centième partie de la densité de l'air près l'horizon, l'on voit qu'il est absolument indifférent pour le calcul des réfractions, d'adopter la formule d'*Euler* ou bien la nôtre.

9. Ce géomètre se rencontre donc encore avec nous dans la soutangente de la véritable courbe aux densités $\frac{gh}{g-h}$, que nous avons désigné par s: supposé toutes fois que cette soutangente diffère réellement et d'une manière sensible de la soutangente barométrique h, ce qui au moins se trouve démenti par les observations de *Bouguer*, faites dans la zone torride.

10. Passant ensuite à la perpendiculaire CT, il la trouve, en réduisant ses dénominations aux nôtres, égale à $(1+\omega-\omega Y)\, a\, Sin.\, A$. Il donne enfin la différentielle de l'angle au centre, $d\Phi$. Elle revient exactement à la nôtre, $d\Phi = \frac{dv}{\sqrt{(1-vv-2\omega+2\omega Y)}}$, si l'on met $\frac{a\, Sin.\, A}{v}$ à la place de son x. Restoit à intégrer cette différentielle. Ici tout l'art de ce grand géomètre se trouve en défaut. Voilà comment il s'exprime: „ Mais de quelque „ manière qu'on tente cette équation, on n'en tirera jamais une expression „ qui marque la quantité de la réfraction pour toutes les hauteurs, quoi- „ qu'il soit fort aisé d'en assigner les réfractions qui répondent à des hauteurs „ considérables: or pour les hauteurs fort petites, ces expressions s'écarteront „ toujours beaucoup de la vérité. Ainsi tout revient ici à la découverte „ d'une méthode toute particulière qui nous conduise à la véritable cour- „ bure du rayon."

11. La méthode naturelle qui y conduisoit, étoit de développer en série la différentielle proposée, et de faire l'intégration de chacune de ses parties, en la réduisant à l'intégrale de $e^{-tt}\, dt$. Il auroit fallu construire une table de ces intégrales, que ce géomètre auroit construite en fort peu de tems, lui qui en a construit un si grand nombre de bien plus difficiles, et nous pouvons dire, de bien moins nécessaires.

12. La méthode *toute particulière d'Euler* se réduisoit au reste, à regarder la trajectoire comme faisant partie d'une courbe asymptotique, très-éloignée de son commencement, et comprise sous l'équation $t = Cy^{m-1}$. Il se crut autorisé à cette supposition par la considération seule que la courbure de la trajectoire est partout extrêmement petite. Cette considération ne suffit pas. Une considération bien autrement rigoureuse nous fait voir que le rayon osculateur aux différens points de la trajectoire devant être réciproquement proportionnel à la densité de l'air, et devant conséquemment augmenter dans le rapport de *un à dix mille*, dans un espace qui ne vaut pas encore

la millième partie du rayon de la terre, un décroissement aussi rapide dans la courbure doit seul suffire pour exclure toutes les courbes du genre hyperbolique, comprises sous l'équation $t = Cy^{m-1}$. Aussi nous allons voir que les formules d'*Euler*, bien loin d'être rigoureuses, ne peuvent pas même être admises comme des méthodes d'approximation.

13. *Euler* avoit donc quatre constantes à déterminer : la position de l'asymptote ; l'éloignement du centre ; le facteur c, et l'exposant m. Il se procure quatre équations pour déterminer ces constantes : et après avoir fait les éliminations nécessaires, il trouve la réfraction demandée r comprise sous une équation du second ordre $rr + 2Pr - QQ$.

14. Les coëfficiens P, Q, dépendent tant de la distance apparente A, que de l'état de l'air au moment de l'observation. *Euler* employe les quantités constantes B, D, pour déterminer le dernier. Ces quantités paroissent chez lui sous une forme très-compliquée. On les simplifiera beaucoup en considérant, que le n d'*Euler* n'est autre chose que $\frac{H}{B}$; que son $\frac{nbg}{V}$ désigne simplement la soutangente barométrique h ; que son $\frac{(1-\alpha)K}{c}$ n'est autre chose que ω ; de plus on sait que $\frac{Wbh}{Bh}$ se réduit de même à ω ; qu'enfin $\frac{gh}{g-h}$ n'est autre chose que s, soutangente aux densités.

15. Faisant les opérations nécessaires, le D d'*Euler* se réduira simplement à $\frac{s}{\omega a}$, ou bien à la fraction $\frac{c}{\omega}$: de plus on aura $B = \frac{c-\omega}{\omega} + \frac{s(3h-2f)}{\omega hh}$. Cette dernière quantité est particulière à la solution d'*Euler*. On ne fera pas mal de lui consacrer une lettre particulière ; ainsi, faisant $\frac{s(3h-2f)}{hh} = i$, B deviendra égale à $\frac{i+c-\omega}{\omega}$.

16. Remarquons que les variations de cette fraction i ne sont guères sensibles dans les différens états de l'air. Supposant $g = 27183$ toises, conformément à la réfraction horizontale de *Bradley*, on aura pour trente dégrés au-dessus de la glace $i = 0,71443$; et pour dix dégrés au-dessous d'elle, $i = 0,78074$.

17. On trouvera enfin, après avoir fait les substitutions convenables, et supprimé les quantités qui peuvent l'être sans erreur sensible,

$$2\,P = \frac{(c+i)\,\omega}{(c-\omega)\,tang.\,A - (i-\omega)\,cot.\,A};$$

$$Q\,Q = \frac{2\,\omega\,\omega}{(c-\omega) - (i-\omega)\,cot.^2 A}.$$

Alors on aura $r\,r + 2\,P\,r = Q\,Q$; équation finale, qui d'après *Euler* renferme la solution complette et générale du problème des réfractions.

18. Il est assez singulier que les règles de *Bradley*, *Mayer* et *Lambert* reviennent également à la solution d'une équation du second dégré. Il est plus singulier peut-être qu'aucun de ces géomètres n'ait tiré parti de la bissection de l'angle, pour résoudre son équation. Ayant $r\,r + 2\,P\,r = Q\,Q$, l'inconnue r sera égale à $Q\ tang.\,\frac{1}{2}\,\phi$; l'angle ϕ étant tel que $tang.\,\phi = \frac{Q}{P}$.

19. Le cas de $A = 90^\circ$ donne la réfraction horizontale $R = \omega$, multiplié par la racine quarrée de $\frac{2}{c-\omega}$. Ainsi donc dans la solution d'*Euler*, de même que dans la notre, la réfraction horizontale est sensiblement proportionnelle à la hauteur du barometre, divisée par la racine quarrée du cube de son élasticité spécifique.

20. L'évaluation numérique de cette formule servira de pierre de touche au système de ce grand géomètre. Supposons d'abord l'élasticité spécifique constante, et par conséquent g infini, et $h = s = 4218$ toises; d'où l'on tire $c = 0{,}0012871$; et $c - \omega = 0{,}0010121$. Ayant appliqué ces données, à la formule exacte et rigoureuse de la réfraction horizontale $\frac{\omega\,F\,n,\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,c}}$, nous l'avons trouvée égale à $36'\ 26''$; l'erreur de $3'\ 30''$ nous avoit fait conclure que dans nos zônes tempérées l'élasticité spécifique de l'air devoit aller en décroissant. Substituant ces mêmes données dans la formule d'*Euler*, on trouve $42'$ de réfraction horizontale; ainsi au lieu d'une erreur de *trois* minutes on en aura une de *neuf* minutes.

21. Désirant de faire disparoître cette différence de $3'\ 30''$ qui subsistoit encore entre le calcul et l'observation, nous avons recherché la valeur qu'il falloit mettre à la place de c, pourquoi la formule $\frac{\omega\,F\,n,\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,c}}$ donnât exactement $32'\ 56''$ de réfraction horizontale; nous avons trouvé $c = 0{,}0015235$; d'où nous avons tiré $s = 4993$ toises; et comparant entr'elles les deux soutangentes h, s, nous en avons déduit la soutangente aux élasticités spécifiques

$g = 27183$ toises. Substituant cette valeur de c dans la formule d'*Euler*, elle donnera $37' 50''$ de réfraction horizontale; elle laissera donc subsister une erreur de cinq minutes, tandis qu'à la rigueur il ne devoit plus y en avoir.

22. Si l'on cherche quel devroit être c, pour que la formule donnât exactement $32' 56''$ de réfraction horizontale, nous trouverons $c = 0,0019231$; d'où l'on tire $s = 6302$ toises; ce qui donne enfin 12754 toises pour soutangente des élasticités spécifiques. La formule d'*Euler* suppose donc à l'élasticité spécifique de l'air un décroissement très-rapide, et tel, qu'à la hauteur de 8800 toises elle se trouve déjà réduite à la moitié de ce qu'elle étoit à l'horizon : tandis que d'après la véritable formule elle étoit, si non entièrement constante, du moins décroissante dans des rapports bien moins différens de l'unité.

23. Désignant par $R - dR$ la réfraction qui appartient à la hauteur apparente dH supposée infiniment petite, nous avons vu que le rapport $dR : dH$ devoit être rigoureusement celui de $\omega : c - \omega$. La formule d'*Euler* au contraire donne $dR : dH = \left(1 + \frac{i}{2}\right) \omega : c - \omega$. Comme $1 + \frac{i}{2} = 1,37$ à-peu-près, l'on voit que les formules d'*Euler* font prendre aux réfractions approchantes de l'horizon des décroissemens plus grands d'un tiers, qu'elles ne devroient en prendre, et qu'elles n'en prennent réellement.

24. Continuons cet examen, et déterminons la réfraction à 45° de hauteur apparente. Elle doit être ω. La formule d'*Euler*, appliquée au cas de *tang.* $A =$ *cotang.* $A = 1$, donnera $\frac{2\omega}{i}$ pour la valeur de cette réfraction; ce qui revient à-peu-près à deux minutes et demie.

25. Ces exemples sont plus que suffisans pour faire voir, qu'en se servant des formules d'*Euler*, on s'exposeroit à des erreurs de plusieurs minutes, non seulement près de l'horizon, mais même à des hauteurs quelconques. Ce grand analyste n'a pas été heureux dans le choix de la méthode d'approximation, dont il fut obligé de faire usage, faute de connoître le seul chemin qui pouvoit le conduire à la solution rigoureuse. Il paroît au reste que le jugement que nous venons de porter, n'appartient pas à nous seuls; car d'un côté, l'on ne voit pas que les formules d'*Euler* aient été suivies par aucun astronome; de l'autre, nous ne voyons pas non plus qu'*Euler* y soit jamais revenu dans aucun de ses ouvrages postérieurs.

SOLUTION DE BRADLEY.

26. La règle de cet astronome a acquis la plus grande célébrité : presque tous les astronomes s'en servent aujourd'hui dans le calcul des réfractions ; il est d'autant plus nécessaire que nous la soumettions à une analyse rigoureuse.

27. Le principe sur lequel elle est fondée, regarde le rapport entre l'angle au centre ACP, et la partie de la réfraction astronomique qui lui appartient, c'est-à-dire, la courbure de l'arc AP. *Bradley*, *Simpson*, *Boscovich*, supposoient ce rapport constant, non seulement dans tous les points de la trajectoire où la densité de l'air est encore sensible, mais encore dans les différens états de l'atmosphère, dont les variations, selon eux, ne devoient pas influer sensiblement sur le rapport $ACP : AP$. C'est donc là le principe, qu'avant tout il conviendra d'examiner.

28. Supposant la réfraction astronomique proportionnelle à la tangente de la distance apparente, ce qui a lieu depuis le zénith jusqu'à 70° de distance, nous aurons d'abord $AS = \omega \, tang. A$. Mettant ωY à la place de ω, nous aurons la réfraction du même astre, l'observateur se trouvant placé en P : donc $PS = \omega Y \, tang. A$. La courbure de l'arc AP sera donc égale à $\omega (1 - Y) \, tang. A$.

29. Désignant de même la hauteur MP au-dessus de la surface de la terre par x, l'angle au centre ACP deviendra $\frac{x \, tang. A}{a}$; donc, divisant la courbure de l'arc AP par l'angle au centre C, on aura la fraction $\frac{a\omega(1-Y)}{x}$; qui par le développement de Y se réduit à $\frac{\omega}{c}$ ou n, multiplié par $1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6s^2} - \frac{x^3}{24s^3} + etc.$ Nous ferons là-dessus les réflexions suivantes.

30. *Premièrement.* Le rapport de la réfraction à l'angle au centre, ou $AP : C$, ne peut être censé constant, qu'autant que la hauteur x peut être regardée comme évanouissante à l'égard de $2f$. La constance de ce rapport ne pourra donc être admissible que pour des hauteurs de cinq-cent à six-cent toises *tout au plus* ; et alors on aura la courbure de l'arc AP égale à nC. La formule que nous venons de trouver, nous apprend qu'à la hauteur $x = f$, où la densité de l'air est très-sensible encore, parce qu'elle ne se trouve réduite encore qu'au tiers de ce qu'elle étoit à l'horizon, ce rapport se réduit de $\omega : c$ à $\omega : 2c$.

31. *Secondement.* Dès que la distance apparente excède 70°, le rapport de la réfraction à l'angle au centre devient tellement variable, que le principe de *Bradley* ne sauroit plus être admissible qu'à la hauteur de quelques centaines de toises tout au plus. C'est ainsi que dans le cas de $A = 90°$, à la température supposée jusqu'ici comme fondamentale, ce rapport se trouve égal à 5,14 à *cinquante toises* de hauteur; tandis qu'à *quatre cent toises* il est 4,58. Ainsi dans les cas mêmes, où l'on voudroit se borner à des hauteurs de 500 à 600 toises, la règle de *Bradley* ne seroit encore appliquable qu'en supposant à l'astre plus de dix dégrés de hauteur apparente. Aussi nous avons vu dans le chapitre précédent, combien cette règle, appliquée à des hauteurs fort approchantes de l'horizon, s'éloignoit de la théorie rigoureuse.

32. *Troisièmement.* En réduisant à de justes limites le principe de *Bradley*, concernant la constance du rapport susdit, il est faux que ce rapport soit le même dans les différens états de l'air; la fraction $\omega : c$ qui l'exprime se trouvant proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par le quarré de l'élasticité spécifique. Supposant la première de 28 pouces, on trouvera

à la température de	la fraction $\omega : c$
+ 30	0,15034;
+ 20	0,16445;
+ 10	0,18050;
0	0,19886;
— 10	0,21998.

Ainsi cette fraction, variant *au moins* depuis 0,15 jusqu'à 0,22, ne peut nullement être regardée comme constante dans les différens états de l'air.

33. *Quatrièmement.* Convenons que *Bradley* n'a pas été trop heureux en supposant cette fraction égale à un septième à la température de 10°; c'est la valeur qu'elle doit avoir à 35°, et non à *dix*.

34. Tel est le principe sur lequel cet astronome avoit établi le théorème suivant: *La réfraction est proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée d'un certain multiple de la réfraction.* Il multiplioit la réfraction par la moitié de $\frac{c}{\omega} - 1$; ou par $\frac{1-n}{2n}$. Ainsi, ayant supposé la réfraction égale un septième de l'angle au centre, ce qui donnoit $n = \frac{1}{7}$, la réfraction chez lui étoit proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée de trois fois la réfraction. Et sur ce principe il calcula sa table.

35. La réfraction horizontale resta indéterminée dans ce système; il fallut y suppléer par l'observation. Alors, désignant par R cette réfraction horizontale; par r toute autre réfraction, appartenante à la distance A, et par m le facteur constant, qui selon *Bradley* est égal à $\frac{c-\omega}{2\omega}$, quand le rapport de la réfraction à l'angle au centre est exprimé par $\omega : c$, nous aurons la proportion $r : R = tang.\,(A - m\,r) : cotang.\,m\,R$; qui nous fournit l'équation très-simple du second dégré : $m\,r\,r\ tang.\,A + r = m\,R\,R\ tang.\,A$. De là il résulte la règle très-simple pour calculer la réfraction : faites $r = R\ tang.\,\frac{1}{2}\,\varphi$; l'angle φ étant tel que $tang.\,\varphi = 2\,m\,R\ tang.\,A$.

36. Désignant par $R - d\,R$ la réfraction qui répond a la hauteur apparente, $d\,H$, supposée infiniment petite, la théorie rigoureuse exige que $d\,R : d\,H = \omega : c - \omega$. Voyons ce que donnera la règle de *Bradley*. Ayant dans ce cas $cotang.\,A = d\,H$, l'équation $m\,r\,r\ tang.\,A + r = m\,R\,R\ tang.\,A$ deviendra $m\,R\,R - 2\,m\,R\,d\,R + R\,d\,H = m\,R\,R$; ainsi l'on aura $d\,H = 2\,m\,d\,R$. Et comme le m de *Bradley* répond exactement à notre $\frac{c-\omega}{2\omega}$; on aura de même $d\,R : d\,H = \omega : c - \omega$. Ainsi donc dans ce point, la règle de *Bradley* se rencontre exactement avec la théorie rigoureuse des réfractions.

37. Aussitôt que la hauteur apparente approche de 15 ou de 20 dégrés, l'angle φ deviendra assez petit pour être confondu avec sa tangente; et dès-lors nous aurons $r = m\,R\,R\ tang.\,A$. La théorie rigoureuse exige que $r = \omega\ tang.\,A$. L'équation qui en résulte $\omega = m\,R\,R$ fait trouver m, lorsque ω et R sont données; en effet, supposant avec *Bradley* $\omega = 57'' = 0{,}00027634$; et $R = 33' = 0{,}00959931$; on trouve fort exactement $m = 3$; c'est la valeur que *Bradley* avoit supposé à son coëfficient.

38. Mais m devant être en même tems égale à $\frac{c-\omega}{2\omega}$, on en tire l'équation $2\,\omega\omega = (c - \omega)\,R\,R$. Le principe de *Bradley* n'est donc rigoureusement admissible qu'autant que la réfraction horizontale R est égale à ω, multiplié par la racine quarrée de $\frac{2}{c-\omega}$. C'est exactement la formule d'*Euler*; on ne se seroit pas attendu à la retrouver dans la règle de *Bradley*. Nous avons déja fait voir que cette règle est fausse; elle donne $37'\ 50''$ de la réfraction horizontale, au lieu des $33'$ qu'il y en a réellement, et que donne la

formule

formule véritable $\frac{\omega\sqrt{\pi, Fn}}{\sqrt{2c}}$. La règle de *Bradley* ne sauroit donc être vraie à la rigueur, ce que l'analyse rigoureuse de ses principes nous avoit déja fait prévoir.

39. Resteroit à examiner, s'il n'y aura pas moyen de tirer parti de la règle de *Bradley*, pour les réfractions approchantes de l'horizon, en substituant à m sa véritable valeur $\frac{c-\omega}{2\omega}$, qui dans le cas de 10° de *Reaumur* revient à 2, 27 au lieu de *trois*, que *Bradley* avoit supposé. C'est un travail que nous laisserons au lecteur. En comparant les réfractions ainsi calculées avec ce qu'elles devroient être conformément à la formule de IV. 92, il trouvera à *un dégré* de hauteur *une minute* d'erreur; à *trois dégrés* il en trouvera *deux*; à *huit dégrés*, *une et demie*; en un mot il verra que la supposition $m = \frac{c-\omega}{2\omega}$ produira par tout des erreurs beaucoup plus considérables, que si l'on avoit supposé avec *Bradley* $m = \frac{\omega}{RR}$.

40. Voilà donc en peu de mots le parti que l'on pourra tirer de la règle de *Bradley*. Faisant $m = \frac{\omega}{RR}$, et par conséquent *tang.* $\phi = \frac{2\omega}{R}$ *tang.* A; on aura $r = R$ *tang.* $\frac{1}{2}\phi$. Cette règle donnera avec une très-grande précision, les réfractions depuis 70° de distance jusqu'à 80 dégrés passés. Elle est inutile pour des hauteurs plus considérables, parce qu'alors on aura très-exactement $r = \omega$ *tang.* A; elle est fautive pour des hauteurs au-dessous de huit ou neuf dégrés, parce qu'elle y produit des erreurs de quatre-vingt, et même de quatre-vingt-dix secondes, d'après le calcul que nous en avons fait dans le chapitre précédent.

SOLUTION DE MAYER.

41. La règle de cet astronome, proposée sans démonstration dans ses tables de la lune, est encore aujourd'hui un problème à résoudre, parce qu'il nous a laissé ignorer le chemin qui l'y a conduit. Il me paroît qu'ayant examiné les règles d'*Euler* et de *Bradley*, et ayant remarqué que l'une et l'autre se réduisoit à une équation du second dégré, il a cru se rapprocher encore davantage de la vérité, en apportant à cette dernière une légère modification. La réfraction r chez *Mayer* est la racine de l'équation suivante

du second dégré : $rr + 2\,Nr\,Sin.\,A.\,Cos.\,A = M^2\,Sin.^2 A$. Elle est donc égale à $M\,Sin.\,A\,tang.\,\frac{1}{2}\,\varphi$; l'angle φ étant déterminé de manière que $tang.\,\varphi = \frac{M}{N\,Cos.\,A}$.

42. Les quantités constantes M, N, dépendent de l'état de l'air. Désignant par b la hauteur du baromètre ; par h la soutangente barométrique ; par B et H ce que deviennent ces quantités dans le cas de 28 *poll. barom.* le thermomètre se trouvant au terme même de la glace, on aura $M = \frac{33'\,b\,H^{3:2}}{B\,h^{3:2}}$; $N = 32670'' \frac{b\,H\,H}{B\,h\,h}$; et $\frac{M}{N} = \frac{2\sqrt{h}}{33\sqrt{H}}$.

43. La règle de *Mayer* donnera donc d'abord pour réfraction horizontale M ou $\frac{33'\,b\,H^{3:2}}{B\,h^{3:2}}$. Ensuite, désignant par $R - dR$ la réfraction qui répond à la hauteur apparente dH supposée infiniment petite, on aura $\frac{dR}{dH} = N'$ ou égal à $32670'' \frac{b\,H\,H}{B\,h\,h}$. La règle de *Mayer* suppose donc *premièrement*, que la réfraction horizontale est proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par la racine quarrée du cube de l'élasticité spécifique ; *secondement*, que le rapport $\frac{dR}{dH}$ est proportionnel à la hauteur du baromètre, divisée par le quarré de l'élasticité spécifique.

44. Les valeurs rigoureuses de M et N seront donc celles de la réfraction horizontale R, et du rapport $dR : dH$; c'est-à-dire, qu'on aura $M = \frac{\omega\sqrt{\pi, Fn}}{\sqrt{2c}}$; et $N = \frac{\omega}{c - \omega}$. La réfraction de *Mayer*, réduite aux valeurs rigoureuses que doivent avoir les constantes de son équation, sera égale à $R\,Sin.\,A.\,tang.\,\frac{1}{2}\,\varphi$; l'angle φ ayant pour tangente $\frac{(c - \omega)\,R}{\omega\,cos.\,A}$.

45. Aussitôt que la hauteur apparente H a passé 20°, l'angle φ se trouvera assez petit pour être confondu avec sa tangente ; dès-lors on aura $r = \frac{c - \omega}{2\,\omega} R^2\,tang.\,A$. La théorie rigoureuse exige que $r = \omega\,tang.\,A$. Egalant

ensemble les deux expressions, on en tire $R = \frac{\omega \sqrt{2}}{\sqrt{(c - \omega)}}$. Ainsi cette formule, qui appartient originairement à *Euler*, et que nous avons déja rencontrée dans la règle de *Bradley*, se retrouve encore dans celle de *Mayer*. On voit fort bien dans quelle source ces messieurs ont puisé.

46. La fraction $\frac{c - \omega}{\omega}$ n'étant autre chose que le $2\,m$ de *Bradley*, la règle de *Mayer* se réduira donc à $r = R\ Sin.\ A.\ tang.\ \frac{1}{2}\,\Phi$; ayant $tang.\ \Phi = 2\,m\,R\ sec.\ A$. Celle de *Bradley* avoit été $r = R\ tang.\ \frac{1}{2}\,\Phi$; ayant $tang.\ \Phi = 2\,m\,R\ tang.\ A$. La petitesse des deux fractions R et $2\,m\,R$ rend absolument insensible la différence entre les deux règles, qui dans tout autre cas auroit été très-considérable sans doute. On peut facilement s'assurer par le calcul, que la différence entre les deux résultats ne va nulle part à une seconde. La règle de *Bradley* mérite d'être préférée, parce qu'avec deux facteurs de moins, elle donne les mêmes résultats. Quant à *Mayer*, il est difficile de déviner les raisons qui ont pu motiver cet astronome, à apporter à la règle de son prédécesseur un amendement reconnu pour inutile.

SOLUTION DE LAMBERT.

47. Cet astronome a d'abord exposé sa méthode dans un traité qui a pour titre: *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs; à la Haye*, 1759. Il y est revenu depuis dans un *mémoire sur les réfractions*, inséré parmi ceux des *éphémérides de Berlin*, *année* 1779.

48. Voulant entièrement éviter les hypothèses physiques, auxquelles il ne se fioit pas, il établit sa règle sur une considération purement géométrique. Il s'attache d'abord à déterminer le lieu géométrique du point S, dans lequel le rayon visuel BS rencontre l'asymptote de la trajectoire ISG. Il s'assure par le calcul que la courbure entière de cette ligne, depuis le zénith jusqu'à l'horizon, n'excède pas *quatre dégrés*. Il en conclut que cette courbe peut être regardée comme circulaire sans erreur sensible; et sur cette hypothèse il établit sa règle. Voyons d'abord ce que c'est que cette courbe.

49. Désignant (*fig. I.*) la distance apparente IBS par A, et la réfraction ISB par r, on trouvera la ligne $BS = \frac{(1 + \omega)\ Sin.\ A - Sin.\ (A + r)}{r}\ a$; ce qui se réduit à a, multiplié par $\frac{\omega\ Sin.\ A}{r} - Cos.\ A + \frac{1}{2}\,r\ Sin.\ A + \frac{1}{6}\,r^2\ Cos.\ A - etc.$

Mettant ici à la place de r la valeur ω *tang.* A, qui lui appartient depuis le zénith jusqu'à 70° de distance, la ligne BS en restera absolument indéterminée. Il faut remonter jusqu'à la formule donnée en II, 43, 45, pour trouver une expression de r, qui empêche que les termes initiaux de la série ne se détruisent mutuellement. On aura $BS = s$ *sec.* A. Ainsi donc, depuis le zénith jusqu'à 80° de distance, le lieu géométrique des points S sera sans erreur sensible une ligne droite, perpendiculaire à l'axe CI, et élevée au-dessus de la surface de la terre d'une hauteur égale à s, soutangente aux densités.

50. On en tirera la conséquence naturelle qu'au zénith même le rayon osculateur de la courbe en question est infiniment grand ; conséquence peu favorable en effet à l'hypothèse circulaire de cet astronome. Reste à voir ce que deviendra cette courbe aux approches de l'horizon. Faisant $A = 90°$, on aura $\frac{BS}{a} = \frac{\omega}{R} + \frac{R}{2}$. Désignant de même par $R - dR$ la réfraction horizontale appartenante à la hauteur dH, supposée infiniment petite, on aura $\frac{BS'}{a} = \frac{BS}{a} - dH + \left(\frac{\omega}{RR} - \frac{1}{2}\right) dR$. Enfin, remettant à la place de dR sa valeur $\frac{\omega dH}{c - \omega}$, on aura $\frac{BS'}{a} = \frac{BS}{a} - \frac{2cRR - \omega RR - 2\omega\omega}{2RR(c - \omega)} dH$.

51. Soit BD (*fig. III.*) une ligne horizontale quelconque ; BA, la verticale passant par B ; $ASED$ le lieu géométrique des points S ; et DBE l'angle infiniment petit que nous avons désigné par dH ; nous aurons donc $BA = s$; $BD = a$, multiplié par $\frac{\omega}{R} + \frac{R}{2}$; et $BD - BE = a$, multiplié par $\frac{2cRR - \omega RR - 2\omega\omega}{2RR(c - \omega)} dH$. Si l'on suppose la courbe $ASED$ sensiblement circulaire, il ne reste plus qu'à déterminer le rayon de ce cercle, dont le centre doit naturellement se trouver sur le prolongement de la verticale AB. On peut le déterminer de deux manières, d'après le choix qu'on aura fait des deux points A, D ; ou bien des deux points D, E. Dans le premier cas, on aura le rayon demandé $x = \frac{BD^2}{2AB} = \frac{a(2\omega + RR)^2}{8cRR}$. Dans le second on doit avoir $x = \frac{BD - BE}{dH} = \frac{2cRR - \omega RR - 2\omega\omega}{(c - \omega)\, 2RR} a$.

52. L'expression de *Lambert* se réduit parfaitement à celle-ci, si l'on met

à la place de sa lettre R, par laquelle il désigne le rayon osculateur de la trajectoire horizontale à son sommet B, sa valeur véritable que donne la théorie rigoureuse, savoir $\frac{s}{\omega}$, qui se réduit à $\frac{fi}{\omega}$, en faisant le rayon de la terre égal à l'unité. Il en est de même du rapport $\frac{dR}{dH}$, qui se trouve chez *Lambert* $\frac{1}{R-1}$, et qui se réduit à $\frac{\omega}{c-\omega}$. Dans les *propriétés de la route de la lumière* on trouve $\frac{1}{R}$ au lieu de $\frac{1}{R-1}$; c'est une erreur dont *Lambert* est convenu depuis, et qu'il a eu soin de corriger dans la traduction allemande de ce petit ouvrage.

53. Cela étant, on conviendra que le lieu géométrique des points S, où la courbe $ASED$, ne peut être regardée comme sensiblement circulaire, qu'autant que les deux expressions trouvées en 51 sont sensiblement égales entr'elles. A la température de l'air qui est supposé dans la règle de *Bradley*,

$$\begin{aligned} \text{on aura } R &= 33' = 0{,}00959931; \\ \omega &= 57'' = 0{,}00027634; \\ \text{ce qui donne } Log.\ R &= -3{,}9822401; \\ Log.\ \omega &= -4{,}4414498; \\ Log.\ c &= -3{,}1852638; \\ c &= 0{,}00153202; \\ c-\omega &= 0{,}00125568. \end{aligned}$$

Ces valeurs étant substituées dans les deux formules de 51, qui doivent faire connoître le rayon de la courbe $ASED$, supposée sensiblement circulaire, la première donnera $0{,}3681819\ a$; la seconde $0{,}45004\ a$; et ces deux nombres, il faut le dire, ne sont pas sensiblement égaux entr'eux.

54. Égalant ensemble les deux expressions de 51, on aura une équation du second dégré, de laquelle on pourra tirer le quarré de la réfraction horizontale RR; on trouvera $\frac{1}{2}(c-\omega)RR = (2cc-2c\omega+\omega\omega) - c\sqrt{(4cc-8c\omega+5\omega\omega)}$; ou bien, en rétablissant la fraction n pour désigner $\frac{\omega}{c}$, on trouvera $\frac{1-n}{2c}RR = (2-2n+nn) - \sqrt{(4-8n+5nn)}$. Le développement en série fera connoître la réfraction horizontale R, égale à $\frac{\omega\sqrt{3}}{\sqrt{2c}}$, multiplié par

$1 + \frac{n}{3} + \frac{35\,n^2}{288} + \frac{n^3}{864} + etc.$; ou bien, égale à la racine quarrée de $\frac{3\,n^2\omega}{2}$, multipliée par cette même série $1 + \frac{n}{3} + \frac{35\,n^2}{288} + \frac{n^3}{864} + etc.$

55. Dans l'état de l'air dont nous venons de parler, on aura donc $R = 31'\ 38''$ au lieu de $33'$, qu'il devroit y avoir. La différence de 82 secondes fait voir, qu'avec ses considérations purement géométriques, *Lambert* pouvoit approcher de la vérité de bien plus près, qu'*Euler* avec ses hypothèses physiques, soutenues par des considérations géométriques.

56. La forme de l'expression qu'on vient de trouver, est absolument identique au reste avec la nôtre; $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$ ou $\sqrt{\left(\frac{1}{2}n\,\omega\,\pi\right)}$, multiplié par $1 + An + Bn^2 + Cn^3 + etc.$ Et comme ω est proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par l'élasticité spécifique de l'air, *Lambert* pouvoit tirer de ses propres considérations géométriques la conclusion approchée que *Mayer* avoit déja apperçu en partie, savoir, qu'à élasticité égale, la réfraction horizontale devoit être réciproquement proportionnelle à la racine quarrée du cube de l'élasticité spécifique. Il avoit donc grand tort, et se contredisoit réellement lui-même, en censurant *Mayer* sur ce point.

57. Les considérations géométriques de *Lambert* conduisent très-naturellement à la détermination approchée de la réfraction astronomique, à des hauteurs fort approchantes de l'horizon. Ayant déterminé le rayon de la courbe $ASED$ pour chaque état de l'air, on aura une proposition de géométrie très-simple, moyennant laquelle on trouvera BS, la hauteur apparente SBD étant donnée; ensuite de quoi la réfraction cherchée ne seroit autre chose que l'inconnue de l'équation déja rapportée en 49, savoir $a\omega\,Sin.\,A - (a\,Cos.\,A + B\,S)\,r + \frac{1}{2}\,ar^2\,Sin.\,A = o.$ Nous observerons cependant que le calcul en seroit beaucoup plus long que celui de la formule rigoureuse de IV. 92; et comme de plus cette méthode purement approximative laisseroit toujours subsister des erreurs allant à quarante secondes, et même à une minute, nous croyons inutile de nous y arrêter plus longtems.

CHAPITRE SIXIÈME.

Réfractions terrestres.

1. Dans le cours de ce chapitre nous continuerons de désigner par a le rayon de la terre; par y la distance au centre CP (*fig. I.*); par x l'élévation de l'objet au-dessus de la surface de la terre OP; par A la distance apparente de l'objet, l'observateur se trouvant placé en B; par H la hauteur apparente, ou le complément de A; par Y la densité de l'air en P; par $1 : 1 + \omega$ le rapport du *Sinus* d'incidence au *Sinus* de réfraction, le rayon étant supposé passer d'un air de la densité de celui dont l'observateur se trouve environné en A, dans le vuide; par s la soutangente aux densités; par c la fraction $\frac{s}{a}$; enfin par n la fraction $\frac{\omega}{c}$ ou $\frac{\omega a}{s}$.

2. De plus, nous suivrons le même ordre dans la recherche des réfractions terrestres, que nous avons observé dans les réfractions astronomiques. Nous supposerons premièrement la réfraction astronomique proportionnelle à la tangente de la distance apparente, ce qui a lieu depuis le zénith jusqu'au-delà de 70° de distance. Ensuite, supposant la hauteur apparente égale à zéro, nous examinerons les propriétés de la trajectoire horizontale. Nous terminerons par la réfraction des objets terrestres, peu élevés au-dessus de l'horizon.

PROBLÈME.

3. *Déterminer le rayon osculateur, à chaque point de la trajectoire.*

SOLUTION.

4. Mettant dans l'expression générale de ce rayon, $\frac{y\,dy}{dt}$, à la place de t sa valeur tirée de II. 25, savoir $(1+\omega-\omega Y)\ a\ Sin.\ A$; ensuite à la place de dY la sienne $-\frac{aY\,dy}{cyy}$, le rayon osculateur se trouvera égal à $\frac{sy^3}{\omega a^3 Y\,Sin.A}$;

ce qui se réduit à $\frac{s}{\omega Y Sin. A}$; le rapport $y^3 : a^3$ pouvant être confondu avec l'unité, dans toute l'étendue de l'atmosphère, où la densité de l'air est encore sensible.

COROLLAIRES.

5. Le rayon osculateur se trouvant réciproquement proportionnel à la densité de l'air, et devant croître conséquemment dans le rapport de *un à mille* dans un espace qui vaut à peine la cent-cinquantième partie du rayon de la terre, il est donc impossible de regarder une portion quelconque de la trajectoire comme circulaire, à moins que ce ne soit à des hauteurs, où la densité de l'air elle-même n'a pas encore éprouvé de diminution sensible.

6. Le rayon osculateur au sommet de la trajectoire supposée horizontale, la distance apparente A se trouvant égale alors à 90 dégrés, est nommé *rayon horizontal* par quelques auteurs, et nommément par *Lambert*. Ce rayon est donc égal à $\frac{s}{\omega}$ ou $\frac{a}{n}$; il est donc au rayon de la terre comme $c : \omega$ ou comme $1 : n$. La fraction ω se trouvant elle-même proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par l'élasticité spécifique de l'air, le rayon horizontal se trouvera proportionnel au quarré de l'élasticité spécifique de l'air, divisée par la hauteur du baromètre. Cette dernière étant supposée de 28 pouces, et le rayon de la terre étant pris pour l'unité, le rayon horizontal sera donc

à 30° de *Réaumur*, égal à 6,652;
à 20° 6,081;
à 10° 5,540;
à 0° 5,029;
à—10° ..... 4,546.

Il ne pourra donc jamais être égal à sept fois le rayon de la terre, valeur que *Lambert* lui avoit assigné d'après quelques observations de *Cassini*, auxquelles il appliquoit son hypothèse des trajectoires circulaires.

PROBLÈME.

7. *La hauteur O P (fig. I.) au-dessus de la surface du globe étant donnée, on demande l'angle P, intercepté entre la trajectoire et le rayon C P.* Cet angle est la distance apparente de l'astre G, vu par un observateur placé en P.

SOLU-

SOLUTION.

8. On a trouvé dans le second chapitre $y\ Sin.\ P = (1 + \omega - \omega Y)\ a\ Sin.\ A$. Divisant des deux côtés par a, et faisant pour plus de simplicité $\frac{x}{a} - \omega + \omega Y = X$, on aura $Sin.\ P = (1 - X)\ Sin.\ A$. L'angle P devant conséquemment différer très-peu de A, nous mettrons $P = A - T$; ce qui nous donnera l'équation $T\ cot.\ A + \frac{1}{2}\ T\ T = X$; d'où l'on tire $T = -tang.\ H + \sqrt{(2\ X + tang.^2 H)}$. L'angle demandé P sera donc égal à $A - \sqrt{(2\ X + tang.^2 H)} + tang.\ H$. ou bien, égal à $A - tang.\ \frac{1}{2}\ \phi,\ \sqrt{(2\ X)}$; l'angle ϕ ayant pour tangente celle de A, multipliée par $\sqrt{(2\ X)}$.

9. Tant que la hauteur apparente H excède 15 ou 20 dégrés, le petit angle T se réduisant alors à $X\ tang.\ A$, on aura $P = A - X\ tang.\ A$: expression rigoureusement vraie depuis le zénith jusqu'au-delà de 70°.

10. Mettant $e^{-x:s}$ à la place de Y, X deviendra égal à $\frac{x}{a}$, multiplié par $1 - n\left(1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6s^2} - \frac{x^3}{24s^3} + etc.\right)$; et si la hauteur x n'est pas très-considérable, on aura sans erreur sensible $X = \frac{(1-n)\ x}{a}$. On aura donc $P = A - \frac{(1-n)\ x}{a}\ tang.\ A$; la différence des deux angles $A - P$ étant sensiblement proportionnelle alors à la hauteur x.

11. Dans le cas de la trajectoire horizontale, l'angle A étant de 90°, on aura $P = 90° - \sqrt{2\ X}$; ce qui dans le cas d'un x très-petit revient à $P = 90° - \sqrt{\frac{(1-n)\ 2\ x}{a}}$. La dépression apparente de la surface du globe sera donc égale à $\sqrt{2\ X}$; et se trouvera proportionnelle, dans le cas où l'observateur n'est élevé que de quelques centaines de toises sur l'horizon, à la racine quarrée de cette hauteur.

12. Cet angle est appellé *inclinaison de l'horizon visuel avec l'horizon vrai.* On l'estime ordinairement égal à la racine quarrée de $\frac{2\ x}{a}$; exprimé alors en parties du rayon; mais c'est en ne tenant aucun compte de la réfraction, qui le rend plus petit d'un dixième à-peu-près dans les températures moyennes: la racine quarrée de $1 - n$ se trouvant égale alors à 0,905.

PROBLÈME.

13. *La réfraction astronomique étant supposée proportionnelle à la tangente de la distance apparente, déterminer pour chaque point de la courbe le rapport entre la réfraction terrestre BP, et l'angle correspondant au centre BCP. (Fig. I.)*

SOLUTION.

14. Ayant la courbure de la trajectoire entière $BG = \omega$ *tang.* A, la courbure de la branche PG sera égale à $\omega\, Y$ *tang.* A; on aura donc la réfraction terrestre BP égale à $\omega\,(1 - Y)$ *tang.* A. Quant à l'angle au centre BOP, il sera simplement égal à $\frac{x}{a}$ *tang.* A. La réfraction terrestre sera donc à l'angle au centre correspondant, comme $\omega a\,(1 - Y) : x$. Désignant par C cet angle au centre, qui est donné par la distance même de l'objet, et développant en série la différence $1 - Y$, la réfraction terrestre deviendra égale à

$$n\,C\left(1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6\,s^2} - \frac{x^3}{24\,s^3} + \text{etc.}\right)$$

COROLLAIRES.

15. On a donc eu grand tort de supposer la réfraction terrestre constamment proportionnelle à l'angle correspondante au centre; et d'établir sur ce principe une théorie des réfractions astronomiques. A cinq-mille toises de hauteur, par exemple, où la densité de l'air est très-sensible encore, parce qu'à peine elle est réduite au tiers de ce qu'elle étoit à l'horizon, ce rapport, de $1 : n\,C$ qu'il étoit, se trouvera réduit à $1 : \frac{1}{2} n\,C$.

16. Le rapport susdit n'est réellement constant que dans les cas, où le peu d'élévation de l'objet permet de supprimer entièrement la fraction $\frac{x}{2s}$; c'est-à-dire, à des hauteurs de quelques centaines de toises. Alors la réfraction, entièrement indépendante de la hauteur de l'objet, tant réelle qu'apparente, sera égale à $n\,C$; ce qui revient dans les températures moyennes à deux onzièmes de l'angle au centre. A des hauteurs plus considérables, cette règle rend toujours la réfraction un peu trop grande; il faut la diminuer conformément à la règle rigoureuse de 14.

PROBLÈME.

17. *La trajectoire étant supposée horizontale, déterminer pour chacun de ses points, la courbure de la portion BP, ainsi que l'angle au centre correspondant BCP. (Fig. IV.)*

SOLUTION.

18. Supposons l'observateur placé en P. Il y sera entouré d'un air dont la densité aura diminué dans le rapport $1 : Y$; de plus il aura $\sqrt{2X}$ pour hauteur apparente de l'astre S, placé à l'extrêmité de la trajectoire. On trouvera la courbure de la branche PS, en mettant dans la formule générale de IV. 92. ωY à la place de ω; nY à la place de n; $\sqrt{2X}$ à la place de H; on aura donc $PS = \frac{\omega Y \sqrt{2}}{\sqrt{c}} F(nY), Eu$; la quantité u étant égale à $F(nY), \sqrt{(X:c)}$. Otant PS de la courbure entière de la trajectoire, qui est $\frac{\omega\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}} Fn$, il restera la réfraction terrestre BP, égale à $\frac{\omega}{\sqrt{2c}}$, multiplié par $Fn, \sqrt{\pi - 2Y}, F(nY), Eu$. L'angle au centre enfin BCP sera égal à $BP + \sqrt{2X} = \sqrt{2X} + Fn, \sqrt{\pi - 2Y}, F(nY), Eu$.

EXEMPLE I.

19. *Supposant à R et ω les valeurs qu'elles ont dans la table de Bradley, réduite à la température de 10°, et à 28 pouces de hauteur barométrique; supposant de plus l'objet P élevé de 3200 toises sur l'horizon, et vu par un observateur placé en B dans la direction même de la trajectoire horizontale; on demande la dépression apparente de l'horizon en P; la réfraction terrestre BP; et l'angle au centre BCP.*

20. On a donc ici $Log.\ \omega = -4{,}4393327$;
$Log.\ c = -3{,}1828438$;
$Log.\ n = -1{,}2564889$;
$Log.\ a = 6{,}5154927$;
$Log.\ x = 3{,}5051500$.

21. *Calcul de Y, densité de l'air, en P.* On trouve

$Log.\ hyperb.\ Y = -\frac{x}{s} = -0{,}6409343$;

$Log.\ vulg.\ Y = 0{,}2783542$ *pris négativement*;
ou $Log.\ vulg.\ Y = -1{,}7216459$. *Ajoutez-y*
$Log.\ vulg.\ \omega = -4{,}4393327$. *Vous aurez*
$Log.\ vulg.\ \omega Y = -4{,}1609785$. *Donc*
$\omega Y = 0{,}00014487$.

22. *Calcul de $\sqrt{2X}$, exprimant la dépression apparente en P.*

$Log.\ x = 3,5051500$; *ôtez-en*
$Log.\ a = 6,5154927$; *vous aurez*
$Log.(x:a) = -4,9896573$; *donc*
$x:a = 0,000976466$; *ajoutant* $-\omega + \omega Y$, *vous aurez*
$X = 0,000846336$; *donc*
$Log.X = -4,9275428$; *ajoutant*
$Log.\ 2 = 0,3010300$; *on aura*
$Log.\ 2X = -3,2285728$; *prenant la moitié*
$Log.\sqrt{2X} = -2,6142864$; *ajoutant pour la réduction au quart,*
$-1,8038801$; *on aura*
$Log.\sqrt{2X} = -2,4181665$;

on aura donc $\sqrt{2X}$, ou dépression apparente de l'horizon en P, égale à 0,026192 ; faisant 262 minutes de la nouvelle division.

23. *Calcul de u.* On a

$Log.\ X = -4,9275428$; *ôtant*
$Log.\ c = -3,1828438$; *il restera*
$Log.\ (X:c) = -1,7446990$; *prenant la moitié*
$Log.\sqrt{(X:c)} = -1,8723495$. *On a d'un autre côté*
$Log.\ Y = -1,7216459$; *ajoutant*
$Log.\ n = -1,2564889$; *donc*
$Log.n\ Y = -2,9781348$; *et*
$n\ Y = 0,09509$; *donc*
$F\ (n\ Y) = 1,0420116$; *et*
$Log.\ F\ (n\ Y) = 0,0178727$; *ajoutant*
$Log.\sqrt{(X:c)} = -1,8723495$; *vous aurez*
$Log.\ u = -1,8902222$; *donc enfin*
$u = 0,776644$.

24. *Calcul de la courbure entière de la branche P S.* On a

$Log.\ 2 = 0,3010300$; *ôtant*
$Log.\ c = -3,1828438$; *on aura*
$Log.\ (2:c) = 3,1181862$; *prenant la moitié*
$Log.\sqrt{(2:c)} = 1,5590931$; *vous y ajouterez*
$Log.\ \omega\ Y = -4,1609785$; *de plus*
$Log.F(n\ Y) = 0,0178727$; *et encore*
$Log.\ E\ u = 6,4422230$; *et pour la réduction au quart*
$-1,8038801$; *ce qui donnera*
$-3,1860474$

pour logarithme de la courbure entière de la branche PS; qui sera donc égale à 0,001535. Otant cet angle de la réfraction horizontale entière, qui est 0,006099; vous aurez la réfraction terrestre $BP = 0,004564$; et ajoutant à BP la dépression apparente $P = 0,026192$, il en résultera l'angle au centre $BCP = 0,030756$; tous les angles étant exprimés en parties décimales du quart de circonférence.

EXEMPLE II.

25. *Le même état de l'air étant supposé, et la hauteur de l'objet OP étant de 6400 toises, déterminer la dépression apparente P, la réfraction terrestre BP, et l'angle au centre BCP.*

26. En suivant le même ordre que dans l'exemple précédent, on trouvera: le logarithme de Y, exprimant la densité de l'air en P, égal à $-1,4432914$; la densité Y y sera donc réduite à 0,27752. Elle fera connoître $X = 0,00175425$; ce qui donne pour $\sqrt{2X}$, ou dépression apparente de l'horizon en P, la valeur 0,0377085; le quart de circonférence étant supposé égal à l'unité. On passera de là à u, qu'on trouvera égale à 1,096074; ce qui donne $Eu = -1,5525201$. Ayant de plus $nY = 0,0500934$; ce qui donne $F(nY) = 1,0214523$; on aura de même la courbure entière de la branche PS, exprimée en décimales d'un quart de circonférence, égale à 0,000642. Cela donne 0,005457 pour la réfraction terrestre, ou la courbure de l'arc BP; et 0,043166 pour la valeur de l'angle au centre C, qui est en même tems la plus grande distance à laquelle l'objet P peut être apperçu.

27. On sait que sans la réfraction, la trajectoire étant supposée absolument rectiligne, la tangente de l'angle au centre BCP auroit été $\sqrt{\frac{2x}{a}}$; et telle auroit été aussi la valeur de l'angle BCP lui-même, toujours très-petit dans le cas de la réfraction terrestre. On auroit donc eu cet angle BCP égal à 0,028133 dans le premier exemple; et à 0,039787 dans le second. Il se trouve donc, que la réfraction a aggrandi le premier de ces deux angles dans le rapport de 1000 : 1093; et le second dans celui de 1000 : 1085. La presqu'égalité de ces deux rapports fait présumer, que peut-être l'angle au centre pourroit bien, dans toute la partie sensiblement curviligne de la trajectoire horizontale, se trouver dans un rapport sensiblement constant, non pas avec la réfraction terrestre BP qui lui répond, mais avec la racine

quarrée de la fraction $\frac{2x}{a}$, qui indépendamment de la réfraction exprimeroit l'angle au centre BCP. L'expression très-compliquée et irréductible de cet angle, que nous avons trouvée en 18, se trouveroit réduite alors à une simplicité, dont elle a grand besoin. Nous verrons cela dans le problème suivant.

PROBLÈME.

28. *La hauteur de l'objet OP étant fort petite, et de cent toises tout au plus, déterminer la dépression apparente P, la réfraction terrestre BP, et l'angle au centre BCP.*

SOLUTION.

29. Ayant dans ce cas $X=(1-n)\,x$, la dépression apparente de l'horizon en P deviendra donc $\sqrt{(1-n)\,2x}$, le rayon de la terre étant supposé égal à l'unité; et telle sera aussi la hauteur apparente de l'objet S, l'observateur se trouvant placé en P. Cela étant, si nous désignons par R la réfraction horizontale en B; par R^1 la réfraction horizontale en P, la courbure de branche PS de la trajectoire se réduira à $R^1-\frac{P\,dR^1}{dH}$.

30. La hauteur x étant supposée très-petite, le rapport $\frac{dR^1}{dH}$, dont la valeur rigoureuse est $\frac{\omega Y}{c+\omega Y}=\frac{nY}{1-nY}$, ne différera de $\frac{n}{1-n}$ que d'une quantité infiniment petite; la fraction $\frac{P\,dR^1}{dH}$ deviendra donc sensiblement égale à $\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$; ce qui donne pour la réfraction terrestre, ou la courbure de l'arc BP, l'expression suivante $R-R^1+\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$; et pour l'angle au centre correspondant BCP, l'expression $R-R^1+\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$. Reste à examiner ce que devient la différence des deux réfractions horizontales infiniment voisines, $R-R^1$.

31. Ayant $R=(1+An+Bn^2+etc.)\sqrt{\frac{1}{2}n\omega\pi}$; on trouvera R^1, en mettant dans l'expression précédente ωY à la place de ω; et nY à la place de Yn; on aura $R^1=(1+AnY+Bn^2Y^2\,etc.)\,Y\sqrt{\frac{1}{2}n\omega\pi}$. Comme il ne s'agit ici que d'une hauteur d'une centaine de toises au plus, mettant $1-\frac{x}{s}$

à la place de Y, l'expression deviendra $R' = R - \frac{n x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}} (1 + 2An + 3Bn^2 +$ *etc.*) La différence des deux réfractions $R - R'$ se trouvant ainsi égale à $\frac{n x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}} (1 + 2An + 3Bn^2$ *etc.*), elle sera proportionnelle à la hauteur x, et disparoîtra dans le cas de x infiniment petit, devant le terme $\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$, qui se trouve proportionnel à la racine quarrée de cette hauteur.

32. La réfraction terrestre se trouvant ainsi réduite au terme seul $\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$, en y ajoutant $\sqrt{(1-n)}\, 2x$, on trouvera l'angle correspondant au centre égal à $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$. Il auroit été $\sqrt{2x}$ sans la réfraction ; la réfraction l'a donc aggrandi dans le rapport de $\sqrt{(1-n)} : 1$; ce qui dans la température moyenne, qui sert de base à la table de *Bradley*, revient à 1000 : 1105.

33. Le rapport de l'angle au centre BCP à $\sqrt{2x}$ s'est donc trouvé

à la hauteur 0 égal à.....1000 : 1105;
à celle de 3200 toises .....1000 : 1093;
à celle de 6400 toises .....1000 : 1085;

Ainsi donc, depuis la surface de la terre, jusqu'à la plus grande hauteur où la réfraction terrestre puisse atteindre, le rapport de l'angle BCP à $\sqrt{2x}$ peut être regardé comme constant; car les nombres 1105 et 1093 peuvent être regardé comme égaux entr'eux, lorsqu'il n'est question que de la réfraction terrestre.

34. On aura donc généralement et presque rigoureusement :

la dépression apparente de l'horizon en P, égale à $\sqrt{2X}$;

l'angle au centre BCP, c'est la plus grande distance à laquelle l'objet puisse être apperçu, égal à $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$;

la réfraction terrestre correspondante BP, égale à $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}} - \sqrt{2X}$.

35. Dans les cas ordinaires, où la hauteur x est assez petite pour que la série $1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6s^2} - \frac{x^3}{24s^3} +$ *etc.* puisse être remplacée par l'unité, ce qui a lieu sans erreur sensible, jusqu'à huit-cent, et même, si l'on ne veut pas employer une grande rigueur, jusqu'à quinze-cent toises, la dépression

apparente se trouvera égale à la racine quarrée de $(1-n)\,2x$; l'angle au centre BCP sera égal à celle de $\frac{2x}{1-n}$; et la réfraction terrestre correspondante sera égale à $\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$. La réfraction terrestre sera donc à l'angle au centre, dans le rapport constant $n:1$, si l'on veut se borner aux cas ordinaires des réfractions terrestres. Mais on auroit tort d'établir sur cette proposition, le calcul des réfractions astronomiques; il faut considérer à l'égard de ces dernières, que la densité de l'air à cinq mille, et même à dix mille toises de hauteur, est encore très-sensible.

36. Il nous reste donc à déterminer les réfractions terrestres, qui approchent de très-près de l'horizon. Ici nous pouvons faire usage, sans crainte d'erreur sensible, du principe de *Bradley*. Il est fondé sur le rapport constant entre l'angle au centre, et la réfraction terrestre qui lui répond. Ce principe est faux sans doute, si on veut l'étendre jusqu'à ces régions élevées de l'atmosphère, où la densité de l'air cesse d'être sensible: et cet astronome avoit certainement tort, de lui donner cette étendue. Mais il est presque rigoureusement admissible jusqu'à des hauteurs de huit-cent à mille toises; il l'est sans erreur considérable, tant qu'il n'est question que de déterminer la réfraction terrestre. *Bradley* en a tiré la conséquence, que la réfraction étoit proportionnelle à la tangente de la distance apparente, diminuée d'un certain multiple de la réfraction. Il ne falloit pas étendre ce théorème aux réfractions astronomiques; mais il est très-admissible pour la réfraction terrestre. Reste donc à en faire l'application convenable.

37. Désignant par R la réfraction terrestre horizontale BP, qui répond à la hauteur $OP=x$; (*fig. IV.*) par r la réfraction BQ, appartenante à la distance apparente A, et qui répond à la même hauteur $NQ=x$; nous aurons $r:R=tang.(A-hr):cotang.hR$. Il en résulte de même qu'en 35. l'équation $hrr\ tang.A+r=hRR\ tang.A$. Elle nous apprend que r, exprimé en parties du rayon, est égal à $R\,tang.\frac{1}{2}\phi$; l'angle ϕ ayant pour tangente $2\,h\,R\,tang.A$. Dès que la hauteur apparente excède quinze à vingt dégrés, l'angle ϕ deviendra assez petit, pour être confondu avec sa tangente; et dès-lors on aura $r=h\,R\,R\,tang.A$.

38. La réfraction horizontale terrestre BP est égale à $\frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}$; on aura donc pour des hauteurs qui excèdent vingt dégrés, BO ou $r=\frac{2hnnx}{1-n}tang.A$. Nous

avons

avons vu en 14, que dans ce cas l'on devoit avoir $r = n\,x\,tang.\,A$, multiplié par la série $1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6s^2} - \frac{x^3}{24s^3} + etc.$ Égalant les deux valeurs, on trouvera $h = \frac{1-n}{2n}$, multiplié par la série $1 - \frac{x}{2s} + \frac{x^2}{6s^2} - \frac{x^3}{24s^3} + etc.$ Et si on néglige tous les termes qui suivent l'unité, on trouvera $h = \frac{1-n}{2n}$ ou $\frac{c-\omega}{2\omega}$; c'est exactement la valeur que nous lui avions déja assigné dans le cas des réfractions astronomiques.

39. Substituant cette valeur, on aura $r = \frac{n\sqrt{2x}}{\sqrt{(1-n)}}\,tang.\,\frac{1}{2}\phi$; l'angle ϕ ayant pour tangente, la tangente de A, multipliée par la racine quarrée de $(1-n)\,2\,x$. Telle est donc la règle pour déterminer la réfraction approchante de l'horizon; et nous ne voyons pas qu'elle puisse être réduite à une plus grande simplicité.

40. Il est remarquable que la lettre ω, qui a eu tant de part à toutes nos formules de réfractions astronomiques, disparoit entièrement du calcul des réfractions terrestres. Il n'y reste qu'une seule constante, la fraction n, proportionnelle à la hauteur du baromètre, divisée par le quarré de l'élasticité spécifique de l'air; et égale à 0,180505 dans la température supposée jusqu'ici.

PROBLÈME.

41. *L'objet E ayant été observé des deux points différens A et B, se trouvant tous les deux sur la circonférence du globe, et éloignés l'un de l'autre de la distance connue A B, trouver l'élévation de cet objet au-dessus de l'horizon D E.* (*Fig. V.*)

SOLUTION.

42. Désignons par A, A^1 les distances apparentes de l'objet, vu en A et B; par H, H^1 les hauteurs apparentes; par a la distance $A\,B$; par x la hauteur vraie de l'objet $D\,E$, et rapportons ces deux quantités au rayon de la terre, supposé égal à l'unité. De plus, mettons pour abréger m à la place de $1-n$.

43. Supposant la hauteur x connue, nous trouverons les réfractions terrestres, ou les courbures des deux arcs AE, BE, par les deux équations du second dégré, tirées de 37, savoir :

$$m\,r\,r\,tang.\,A + 2\,n\,r = 2\,n\,n\,x\,tang.\,A;$$
$$m\,r^1\,r^1\,tang.\,A^1 + 2\,n\,r^1 = 2\,n\,n\,x\,tang.\,A^1.$$

Elles donnent $AE = \frac{n}{m}$, multiplié par $-\cot. A + \sqrt{(2mx + \cot.^2 A)}$;

$BE = \frac{n}{m}$, multiplié par $-\cot. A' + \sqrt{(2mx + \cot.^2 A')}$.

D'où l'on tire $mAD = -\cot. A + \sqrt{(2mx + \cot.^2 A)}$;

$mBD = -\cot. A' + \sqrt{(2mx + \cot.^2 A')}$.

L'excès du premier produit sur le second devant être ma, on aura une équation, laquelle, délivrée de ses radicaux, et de toutes les quantités qui se détruisent de part et d'autre, se trouvera être du premier dégré, et fera connoître l'élévation x, égale à a, multiplié par $\frac{1}{\cot. H - \cot. H'} + \frac{1}{2} ma \frac{\tang.^2 H + \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'}{\tang.^2 H - 2 \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'} + \text{etc.}$

44. Cette solution comprend donc les effets de la sphéricité de la terre, et ceux de la réfraction. Si l'on veut faire abstraction de l'une et de l'autre, la formule se réduira à $x = \frac{a}{\cot. H. - \cot. H'}$; c'est la formule ordinaire et connue, que donne la trigonométrie rectiligne.

45. Si dans la solution du problème on tient compte de la sphéricité seule, en regardant la trajectoire comme absolument rectiltgne, on aura l'élévation réelle de l'objet égale à a, multiplié par $\frac{1}{\cot. H - \cot. H'} + \frac{1}{2} a \frac{\tang.^2 H + \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'}{\tang.^2 H + 2 \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'}$; ou bien, égale à $\frac{a}{\cot. H - \cot. H'} + \frac{1}{2} a a T$, si l'on désigne par T la fraction $\frac{\tang.^2 H + \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'}{\tang.^2 H - 2 \tang. H. \tang. H' + \tang.^2 H'}$. La sphéricité de la terre tend à rabaisser l'objet, en le faisant paroître moins élevé; il faut y ajouter $\frac{1}{2} a a T$, pour la réduire à sa juste valeur.

46. L'effet de la réfraction se borne à diminuer cette partie additionnelle $\frac{1}{2} a a T$ dans le rapport de $1 : m$ ou de $1 : 1 - n$. L'objet paroîtra toujours moins élevé, qu'il n'auroit été dans le cas d'une surface plane, et d'une trajectoire rectiligne; mais il paroîtra un peu moins bas, qu'il n'auroit été sans la réfraction.

47. C'est une erreur trop généralement repandue, de croire, que la ré-

fraction terrestre fait paroître les objets plus élevés qu'elles ne sont. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à considérer, qu'à cause du rapport constant entre la réfraction terrestre et l'angle au centre, les effets de la réfraction sont inséparables de ceux de la sphéricité. On ne peut faire attention à la première, sans qu'on tienne en même tems compte de l'autre. La réfraction terrestre n'est sensible, qu'autant que la terre est sphérique. Sans cette sphéricité, il y auroit toujours une réfraction : mais elle ne seroit pour ainsi dire, qu'un infiniment petit du second ordre. La sphéricité rabaisse les objets, en les faisant paroître moins élevés qu'ils ne sont. La réfraction les relève un peu ; mais comme ses effets ne sont jamais que le cinquième ou le sixième des effets de l'autre, l'effet combiné de ces deux causes se réduira toujours à rabaisser l'objet.

48. Les problèmes qui me restent à résoudre, concernent les cas, où l'observateur se trouve élevé d'une hauteur donnée au-dessus de l'horizon. Ici nous avons plus besoin que jamais d'une formule, qui exprime la réfraction horizontale, avec le plus de simplicité possible. Nous avons trouvé cette réfraction égale à la racine quarrée de $\frac{1}{2} n \omega \pi$, multipliée par la série $1 + An + Bn^2 + etc.$ J'observe que cette série ne diffère qu'infiniment peu de l'unité, divisée par $(1-n)^{2:5}$. La table suivante, en nous faisant connoître les valeurs de l'une et de l'autre, nous fera connoître la différence presqu'insensible qui se trouve entr'elles.

n	Fn	1 *divisé par* $(1-n)^{2:5}$	*Differ.*
$\frac{1}{8}$	1,05642	1,05467	0,00175.
$\frac{1}{7}$	1,06533	1,06360	0,00173.
$\frac{1}{6}$	1,07758	1,07565	0,00193.
$\frac{1}{5}$	1,09549	1,09336	0,00213.
$\frac{1}{4}$	1,12417	1,12195	0,00221.

La différence n'est en effet que de deux *millièmes* ; ce qui produit sur la réfraction horizontale une erreur de quatre secondes *en moins*. De plus, ces différences sont presqu'égales entr'elles, dans les différentes valeurs qu'on peut supposer à n : ainsi, en calculant la réfraction horizontale sur la formule $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2} n \omega \pi)}}{(1-n)^{2:5}}$, et y ajoutant ensuite les deux millièmes de sa valeur, on est sûr d'avoir fait entièrement disparoître l'erreur.

49. Désignant par Y la densité de l'air à la hauteur $EL = x$ (*fig.* VII.) au-dessus de la surface du globe, on trouvera la réfraction horizontale à cette hauteur,

ou la courbure de la branche ES, en mettant dans l'expression précédente, ωY à la place de ω, nY à la place de n. Elle deviendra donc $Y\sqrt{(\frac{1}{2}n\omega\pi)}$, divisé par $(1-nY)^{2:5}$. La réfraction décroît donc à très-peu-près dans la même proportion que la densité de l'air ; ce qui est parfaitement conforme à ce que nous avons dit plus haut.

50. Si l'on demande la longueur de la perpendiculaire CD, abaissée du centre de la terre sur l'asymptote de la trajectoire, il faudra faire la proportion $CE : CD = 1 : 1+\omega Y$. On aura donc $CD = 1+\omega Y+x = 1+\omega Y - c\,Log.\,Y$. Ainsi un rayon de lumière, passant à une distance du centre de la terre, qui est égale à $1+\omega Y - c\,Log.\,Y$, éprouvera une courbure qui, exprimée en parties du rayon, est égale à $Y\sqrt{(2n\omega\pi)}$, divisé par $(1-nY)^{2:5}$.

51. Le même rayon BEI devant rencontrer la ligne droite ACO, passant par le centre de la terre C, et donnée de position, après sa sortie entière des couches de l'atmosphère, on demande CI, distance du centre de la terre au point d'intersection ? Elle sera égale, en désignant par R la réfraction horizontale en E, à $\frac{1+\omega Y - c\,Log.\,Y}{O+2R}$; ou bien, en supprimant les parties qui peuvent l'être sans erreur sensible, à $\frac{1}{O+2R}$. Il faut remarquer que dans cette formule, les deux angles O et $2R$ sont supposés exprimées en parties du rayon ; et que de plus, l'angle O est supposé assez petit pour être confondu avec son *sinus*. Si cette dernière condition n'avoit pas lieu, il faudroit mettre 1 divisé par $Sin.\,O + 2R\,Cos.\,O$.

52. Si le rayon incident BDO se trouvoit parallèle à la ligne ACO, donnée en position, on auroit $CI = (1-nY)^{2:5}$, divisé par $Y\sqrt{(2n\omega\pi)}$. La ligne CI seroit donc à très-peu près, réciproquement proportionnelle à la densité de l'air, non pas en D, mais au point E, sommet de la trajectoire.

53. Faisant $Y = 1$, le rayon incident se trouvant élevé alors au-dessus de la surface du globe, d'une hauteur égale à ω, la ligne CO se trouvera égale alors à $(1-n)^{2:5}$, divisé par $\sqrt{(2n\omega\pi)}$. A la température de la table de *Bradley*, cette ligne est égale à 52,184 fois le rayon de la terre.

54. L'application de ces principes aux éclipses de lune est facile. La ligne ACO est alors celle qui réunit les centres du soleil et de la terre ; la ligne BDO est celle qui en effleure les bords ; l'angle O, de seize minutes à-peu-près, est donc égal à-peu-près à la moitié de la réfraction horizontale dans les températures moyennes. La ligne entière CO, égale à la longueur

du cône ténébreux que la terre forme après elle, fait la longueur de 200 demi-diamètres de la terre à-peu-près. Cette longueur se trouve réduite par les effets de la réfraction au cinquième de sa valeur totale; savoir, à 42 demi-diamètres. Poursuivant le calcul, on trouvera que dans les températures moyennes, la longueur du cône ténébreux se trouve renfermée entre les deux tiers, et les sept dixièmes de la distance de la lune à la terre. D'après ces calculs, il paroît impossible que l'ombre de la terre parvienne jamais jusqu'au corps de cette satellite; aussi savons-nous qu'il est infiniment rare qu'elle disparoisse entièrement dans les éclipses. Pour produire cet effet, il faudroit aux environs du bord circulaire de la terre qui jette l'ombre, une réfraction horizontale, égale à 24 minutes tout au plus, réfraction qui a lieu en effet au sommet des plus hautes montagnes, et qui a été observée plus d'une fois par *Bouguer*, aux *Cordilleras* du *Pérou*.

55. Il nous reste à parler des réfractions qui appartiennent aux deux premiers dégrés de dépression apparente; l'observateur se trouvant élevé d'une hauteur donnée au-dessus de l'horizon. Soit $BI = x$ (*fig. VII.*) la hauteur où se trouve l'observateur; soit de plus la trajectoire entière de la lumière, représentée par la courbe $ABCDE$, ayant son sommet en C, et composée des deux branches égales et semblables CBA et CDE; soit encore H la hauteur apparente de l'astre, l'observateur étant dirigé vers A, de manière que $-H$ exprimera la dépression apparente de l'astre, le regard de l'observateur étant tourné vers E. Il est clair, qu'en désignant par r la réfraction dans le premier cas, elle se trouvera dans le second cas, égale à r, *plus* la courbure de l'arc de trajectoire BD, compris entre les deux points B, D. Reste donc à déterminer cette courbure.

56. Nous avons vu en IV. 57, que la réfraction entière r pouvoit être représentée par une série telle que $A - BH + CH^2 - DH^3 + etc.$ Mettant ici $-H$ à la place de $+H$, on trouvera $A + BH + CH^2 + DH^3 + etc.$ pour la valeur de la courbure de la branche BCE; ce qui donne $BC = BH + DH^3 + FH^5 + etc.$

57. Tous les coëfficiens B, C, D, E, *etc.* sont eux-mêmes des séries; mais la difficulté n'est pas la même pour toutes. Le premier coëfficient A exprime la réfraction horizontale en A; on peut fort bien le supposer égal à $\sqrt{(\frac{1}{2} n \omega \pi)}$, divisé par $(1-n)^{2/5}$. Les troisième, cinquième, septième etc. coëfficiens auront de même $\sqrt{\omega/\pi}$ pour facteur; peut-être qu'on trouveroit bien des méthodes de sommation qui en feroient connoître les valeurs ap-

prochées ; mais ce qui est certain, c'est qu'à la rigueur elles n'en paroissent pas susceptibles.

58. Les second, quatrième, sixième etc. coëfficiens, admettent une sommation rigoureuse. On en trouvera les formules en IV. 59 ; et on aura par leur moyen, la courbure de l'arc $B\,C$ égale à $\frac{nH}{1-n} + \frac{nH^3}{3c(1-n)^3} + \frac{n(1+2n)H^5}{15\,cc(1-n)^5} + \frac{n(1+2n)(1+6n)H^7}{105\,c^3(1-n)^7} + etc.$ Ajoutant le double de cette formule à r, on aura la réfraction qui appartient à la dépression $-H$. Mais il faut remarquer que cette formule, tirée de IV. 57, suppose l'observateur placé sur la surface même de la terre en I. S'il est placé en B, entouré alors d'un air de la densité Y, il faudra mettre nY à la place de n ; on aura pour la courbure de l'arc $B\,C$, $\frac{nYH}{1-nY} + \frac{nYH^3}{3c(1-nY)^3} + \frac{nY(1+2nY)^5}{15\,cc(1-nY)^5} + \frac{nY(1+8nY+6nY^2)H^7}{105\,c^3(1-nY)^7} + etc.$

56. La convergence de cette série n'est guères sensible que pour le premier demi-dégré de hauteur apparente. Heureusement qu'il se présente un autre moyen encore de parvenir à la solution du problème. Du point F comme centre, et du rayon $F\,C$, décrivons l'arc de cercle $L\,C\,M$. Faisons $B\,I = x$, $N\,C = p$; le rayon de la terre étant toujours représenté par l'unité. Désignons de même par Y et P, les densités de l'air en B et en C. On aura donc

$$Y = e^{-x:s} = 1 - \frac{x}{s} + \frac{x^2}{2\,s\,s} - etc.$$

$$P = e^{-p:s} = 1 - \frac{p}{s} + \frac{p^2}{2\,s\,s} - etc.$$

$$\text{et } \frac{Y}{P} = e^{-(x-p):s} = 1 - \frac{x-p}{s} + \frac{(x-p)^2}{2\,s\,s} - etc.$$

60. La trajectoire $A\,B\,C\,D\,E$ sera évidemment horizontale pour un observateur, qu'on suppose placé en C. Un autre observateur se trouvant placé en B, l'angle $R\,B\,C$ seroit pour lui la dépression apparente du point C au-dessous de l'horizon. Cet angle, que nous nommerons H, sera donc déterminé par la seule hauteur $B\,O$, moyennant la formule que nous avons donné en 8, 11 ; on aura H égal à la racine quarrée de $\frac{2x}{a} - 2\omega + 2\omega Y$; seulement il faut observer de mettre dans cette formule $x-p$ à la place de x ; ωP à la

place de ω; et $\frac{Y}{P}$ à la place de Y: ce qui donnera H égal à la racine quarrée de $2(x-p)-2\omega(P-Y)$. On en tire l'équation $\frac{HH}{2(x-p)}=1-n+\frac{x+p}{2s}n$: si toutes fois l'on veut aller jusqu'au second terme de la série.

61. Cette équation servira à déterminer p, hauteur du sommet de la trajectoire au-dessus de l'horizon. En s'arrêtant aux premiers termes, on aura $p=x-\frac{HH}{2(1-n)}$. Si on veut connoître p plus exactement, on y comprendra le terme $\frac{x+p}{2s}n$; alors, faisant $\frac{HH}{2(1-n)}=N$; et rétablissant $m=\frac{n}{1-n}$, que nous avons déjà employé plus haut, on aura $x-p=\frac{(c-\frac{1}{2}mN)N}{c+m(x-N)}$.

62. Connoissant $CN=p$, on cherchera la densité de l'air en C, ou P, qui sera égale à $e^{-p:s}$. On se servira de cette dernière pour déterminer la réfraction horizontale en C, qu'on sait être égale à $\frac{P\sqrt{(\frac{1}{2}n\omega\pi)}}{(1-nP)^{2:3}}$; enfin, ôtant du double de cette réfraction, la réfraction qui appartient à la hauteur *plus* H, on trouvera celle qui convient à la dépression apparente, ou *moins* H. La formule donnée ci-dessus pourra aussi se réduire sans erreur sensible à $x-p=N$, multiplié si l'on veut pour plus d'exactitude, par $1+\frac{m(N-2x)}{2c}$ ou bien par $1-\frac{m(2x-N)}{2c}$.

EXEMPLE.

63. L'observateur se trouvant en B, élevé au-dessus de la surface du globe de 2400 toises, déterminer la réfraction qui répond à la dépression apparente de 1° 48′ au-dessous de l'horizon; l'état de l'air étant celui qui est supposé dans la table de *Bradley*; et pour lequel on a

$$Log.\ \omega = -4{,}4414438;$$
$$Log.\ c = -3{,}1852578;$$
$$Log.\ n = -1{,}2561860;$$
$$\text{ce qui donne } Log.\ m = -1{,}3425730.$$

64. Calculons d'abord $N=HH$, divisé par $2(1-n)$. Comme H est supposé égal à la centième partie de la demi-circonférence, on aura

$$\begin{aligned}
Log.\ H &= -\ 2{,}4971499. \quad \textit{Donc}\\
Log.\ H^2 &= -\ 4{,}9942998. \quad \textit{Otez}\\
Log.\ 2 &= \quad 0{,}3010300\ ;\ \textit{il restera}\\
&\quad -\ 4{,}6932698\ ;\ \textit{ôtez encore}\\
Log.(1-n) &= -\ 1{,}9136130\ ;\ \textit{vous aurez}\\
Log.\ N &= -\ 4{,}7796568.
\end{aligned}$$

Ce logarithme suppose que N est pris en parties décimales du rayon de la terre. Il faut y ajouter 6,5154927 pour avoir le logarithme de la même hauteur, exprimée en toises : on aura alos $Log.\ N = 3{,}2951495$. Cela fait connoître N égal à 1973,1 toises.

65. Cela donne d'abord $2x - N = 2826{,}9$ toises. Ensuite

$$\begin{aligned}
Log.\ m &= -\ 1{,}3425730\ ;\ \textit{ajoutez}\\
Log.\ (2x-N) &= \quad 3{,}4513104\ ;\ \textit{vous aurez}\\
&\quad 2{,}7938834\ ;\ \textit{ôtez}\\
Log.\ \textit{du rayon de la terre} &= \quad 6{,}5154427\ ;\ \textit{il restera}\\
&\quad -\ 4{,}2783907\ ;\ \textit{ôtez}\\
Log.\ 2 &= \quad 0{,}3010300\ ;\ \textit{il restera}\\
&\quad -\ 5{,}9773607\ ;\ \textit{ôtez}\\
Log.\ c &= -\ 3{,}1852578\ ;\ \textit{il restera}\\
&\quad -\ 2{,}7921029.
\end{aligned}$$

C'est le logarithme de la fraction $\frac{m(2x-N)}{2c}$, qui devient par conséquent 0,061959. Elle donne $x - p = 1850{,}85$ toises ; donc $p = 549{,}15$ toises. Telle est la hauteur CN du sommet de la trajectoire au-dessus de la surface du globe.

66. Déterminons la densité de l'air P à cette hauteur. Son logarithme hyperbolique sera $-\frac{p}{s}$, ou 0,1093807 pris négativement. Son logarithme vulgaire sera donc 0,0475034 pris négativement ; ce qui donne

$$\begin{aligned}
Log.\ P &= -\ 1{,}9524966\ ;\\
Log.\ n &= -\ 1{,}2561860\ ;\\
Log.\ nP &= -\ 1{,}2086826\ ;\\
nP &= \quad 0{,}16169\ ;\\
1-nP &= \quad 0{,}83831\ ;\\
Log.\ (1-nP) &= -\ 1{,}9234046\ ;\\
Log.\ (1-nP)^{2:5} &= -\ 1{,}9693618.
\end{aligned}$$

67. Reste à évaluer la formule de réfraction horizontale $P\sqrt{(\frac{1}{2}n\omega\pi)}$, divisée par $(1-n)^{2:5}$. On trouve le logarithme de cette réfraction, exprimée en secondes de la nouvelle division, égal à 3,7338897 ; ce qui donne 5418,6 secondes de la nouvelle division.

68. On a trouvé en IV. 106. 3427 secondes de la nouvelle division, pour valeur de la réfraction à *deux* centièmes de hauteur apparente. Reste donc 7410 secondes de la nouvelle division, pour valeur de la réfraction à *deux* centièmes de dépression apparente ; l'observateur se trouvant élevé de 2400 toises au-dessus de la surface du globe.

TABLES

SERVANT

AU CALCUL DES RÉFRACTIONS

APPROCHANTES DE L'HORIZON.

Blank page retained for pagination

TABLE PREMIÈRE.

Intégrales de $e^{-tt}\,dt$, depuis une valeur quelconque de t jusqu'à t infinie.

	Intégrale.	*Diff. prem.*	*Diff. II.*	*Diff. III.*
0,00	0,88622692	999968	201	199
0,01	0,87622724	999767	400	199
0,02	0,86622957	999367	599	200
0,03	0,85623590	998768	799	199
0,04	0,84624822	997969	998	197
0,05	0,83626853	996971	1195	199
0,06	0,82629882	995776	1394	196
0,07	0,81634106	994382	1590	195
0,08	0,80639724	992792	1785	194
0,09	0,79646932	991007	1979	195
0,10	0,78655925	989028	2174	192
0,11	0,77666897	986854	2366	190
0,12	0,76680043	984488	2556	189
0,13	0,75695555	981932	2745	188
0,14	0,74713623	979187	2933	186
0,15	0,73734436	976254	3119	184
0,16	0,72758182	973135	3303	183
0,17	0,71785047	969832	3486	180
0,18	0,70815215	966346	3666	175
0,19	0,69848869	962680	3841	178
0,20	0,68886189	958839	4019	173
0,21	0,67927350	954820	4192	171
0,22	0,66972530	950628	4363	168
0,23	0,66021902	946265	4531	166
0,24	0,65075637	941734	4697	163
0,25	0,64133903	937037	4860	160
0,26	0,63196866	932177	5020	157
0,27	0,62264689	927157	5177	155
0,28	0,61337532	929980	5332	151
0,29	0,60415552	916648	5483	149
0,30	0,59498904	911165	5632	145
0,31	0,58587739	905533	5777	142
0,32	0,57682206	899756	5919	138

t	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.
0,33	0,56782450	893837	6057	136
0,34	0,55888613	887780	6193	131
0,35	0,55000833	881587	6324	129
0,36	0,54119246	875263	6453	125
0,37	0,53243983	868810	6578	121
0,38	0,52375173	862232	6699	118
0,39	0,51512941	855533	6817	114
0,40	0,50657408	848716	6931	110
0,41	0,49808692	841785	7041	107
0,42	0,48966907	834744	7148	103
0,43	0,48132163	827596	7251	98
0,44	0,47304567	820345	7349	97
0,45	0,46484222	812996	7446	90
0,46	0,45671226	805550	7536	88
0,47	0,44865676	798014	7624	85
0,48	0,44067662	790390	7709	78
0,49	0,43277272	782681	7787	77
0,50	0,42494591	774894	7864	71
0,51	0,41719697	767030	7935	69
0,52	0,40952667	759095	8004	64
0,53	0,40193572	751091	8068	61
0,54	0,39442481	743023	8129	55
0,55	0,38699458	734894	8184	54
0,56	0,37964564	726710	8238	48
0,57	0,37237854	718472	8286	45
0,58	0,36519382	710186	8331	40
0,59	0,35809196	701855	8371	38
0,60	0,35107341	693484	8409	34
0,61	0,34413857	685075	8443	28
0,62	0,33728782	676632	8471	27
0,63	0,33052150	668161	8498	22
0,64	0,32383989	659663	8520	19
0,65	0,31724326	651143	8539	14
0,66	0,31073183	642604	8553	12
0,67	0,30430579	634051	8565	6
0,68	0,29796528	625486	8571	6
0,69	0,29171042	616915	8577	0
0,70	0,28554127	608338	8577	2
0,71	0,27945789	599761	8575	7
0,72	0,27346028	591186	8568	8
0,73	0,26754842	582618	8560	14
0,74	0,26172224	574058	8546	15
0,75	0,25598166	565512	8531	20

t	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.
0,76	0,25032654	556981	8511	21
0,77	0,24475673	548470	8490	25
0,78	0,23927203	539980	8465	29
0,79	0,23387223	531515	8436	31
0,80	0,22855708	523079	8405	33
0,81	0,22332629	514674	8372	37
0,82	0,21817955	506302	8335	39
0,83	0,21311653	497967	8296	42
0,84	0,20813686	489671	8254	45
0,85	0,20324015	481417	8209	46
0,86	0,19842598	473208	8163	50
0,87	0,19369390	465045	8113	52
0,88	0,18904345	456932	8061	54
0,89	0,18447413	448871	8007	56
0,90	0,17998542	440864	7951	58
0,91	0,17557678	432913	7893	61
0,92	0,17124765	425020	7832	62
0,93	0,16699745	417188	7770	65
0,94	0,16282557	409418	7705	66
0,95	0,15873139	401713	7639	67
0,96	0,15471426	394074	7572	71
0,97	0,15077352	386502	7501	70
0,98	0,14690850	379001	7431	74
0,99	0,14311849	371570	7357	74
1,00	0,13940279	364213	7283	75
1,01	0,13576066	356930	7208	77
1,02	0,13219136	349722	7131	80
1,03	0,12869414	342591	7051	78
1,04	0,12526823	335540	6973	81
1,05	0,12191283	328567	6892	81
1,06	0,11862716	321675	6811	83
1,07	0,11541041	314864	6728	83
1,08	0,11226177	308136	6645	85
1,09	0,10918041	301491	6560	85
1,10	0,10616550	294931	6475	86
1,11	0,10321619	288456	6389	85
1,12	0,10033163	282067	6304	88
1,13	0,09751096	275763	6216	87
1,14	0,09475333	269547	6129	89
1,15	0,09205786	263418	6040	87
1,16	0,08942368	257378	5953	89
1,17	0,08684990	251425	5864	89
1,18	0,08433565	245561	5775	89

t	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.
1,19	0,081880004	239786	5686	88
1,20	0,079482218	234100	5598	91
1,21	0,077141118	228502	5507	88
1,22	0,074856616	222995	5419	90
1,23	0,072626621	217576	5329	88
1,24	0,070450045	212247	5241	90
1,25	0,068327982	2070061	51513	888
1,26	0,066257921	2018548	50625	886
1,27	0,064239873	1967923	49739	884
1,28	0,062271450	1918184	48855	880
1,29	0,060353266	1869329	47975	876
1,30	0,058483937	1821354	47099	872
1,31	0,056662583	1774255	46227	868
1,32	0,054888328	1728028	45359	863
1,33	0,053160300	1682669	44496	859
1,34	0,051477631	1638173	43637	850
1,35	0,049839458	1594536	42787	847
1,36	0,048244922	1551749	41940	840
1,37	0,046693173	1509809	41100	833
1,38	0,045183364	1468709	40267	826
1,39	0,043714655	1428442	39441	819
1,40	0,042286213	1389001	38622	812
1,41	0,040897212	1350379	37810	802
1,42	0,039546833	1312569	37008	797
1,43	0,038234264	1275561	36211	786
1,44	0,036958703	1239350	35425	779
1,45	0,035719353	1203925	34646	771
1,46	0,034515428	1169279	33875	760
1,47	0,033346149	1135404	33115	751
1,48	0,032210745	1102289	32364	743
1,59	0,031108456	1069925	31621	734
1,50	0,030038531	1038304	30887	723
1,51	0,0290002273	10074170	301638	7133
1,52	0,0279928103	9772532	294505	7036
1,53	0,0270155571	9478027	287469	6937
1,54	0,0260677544	9190558	280532	6834
1,55	0,0251486986	8910026	273698	6740
1,56	0,0242576960	8636328	266958	6624
1,57	0,0233940632	8369370	260334	6527
1,58	0,0225571262	8109036	253807	6422
1,59	0,0217462226	7855229	247385	6318
1,60	0,0209606997	7607844	241067	6213
1,61	0,0201999153	7366777	234854	6104

	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.	Diff. IV.
1,62	0,0194632376	7131923	228750	6003	108
1,63	0,0187500453	6903173	222747	5895	107
1,64	0,0180597280	6680426	216852	5788	104
1,65	0,0173916854	6463574	211064	5684	110
1,66	0,0167453280	6252510	205380	5574	102
1,67	0,0161200770	6047130	199806	5472	100
1,68	0,0155153640	5847324	194334	5372	122
1,69	0,0149306316	5652990	188962	5250	89
1,70	0,0143653326	5464028	183712	5161	110
1,71	0,0138189298	5280316	178551	5051	103
1,72	0,0132908982	5101765	173500	4948	100
1,73	0,0127807217	4928265	168552	4848	107
1,74	0,0122878952	4759713	163704	4741	99
1,75	0,0118119239	4596009	158963	4642	102
1,76	0,0113523230	4437046	154321	4540	98
1,77	0,0109086184	4282725	149781	4442	102
1,78	0,0104803459	4132944	145339	4340	95
1,79	0,0100670515	3987605	140999	4245	99
1,80	0,0096682910	3846606	136754	4146	96
1,81	0,0092836304	3709852	132608	4050	96
1,82	0,0089126452	3577244	128558	3954	91
1,83	0,0085549208	3448686	124604	3863	96
1,84	0,0082100522	3324082	120741	3767	88
1,85	0,0078776440	3203341	116974	3679	95
1,86	0,0075573099	3086367	113295	3584	86
1,87	0,0072486732	2973072	109711	3498	90
1,88	0,0069513660	2863361	106213	3408	84
1,89	0,0066650299	2757148	102805	3324	90
1,90	0,0063893151	2654343	99481	3234	79
1,91	0,0061238808	2554862	96247	3155	85
1,92	0,0058683946	2458615	93092	3070	83
1,93	0,0056225331	2365523	90022	2987	80
1,94	0,0053859808	2275501	87035	2907	76
1,95	0,0051584307	2188466	84128	2831	79
1,96	0,0049395841	2104338	81297	2752	84
1,97	0,0047291503	2023041	78545	2668	53
1,98	0,0045268462	1944496	75877	2615	94
1,99	0,0043323966	1868619	73262	2521	65
2,00	0,0041455469	1795357	70740	24558	700
2,01	0,0039659989	1724616	68284	23858	697
2,02	0,0037935373	1656331	65899	23161	674
2,03	0,0036279041	1590432	63582	22487	658

t	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.	Diff. IV.
2,04	0,00346886093	15268497	613342	21829	651
2,05	0,00331617596	14655155	591513	21178	646
2,06	0,00316962441	14063642	570335	20532	603
2,07	0,00302898799	13493307	549803	19929	622
2,08	0,00289405492	12943504	529874	19307	591
2,09	0,00276461988	12413630	510567	18716	574
2,10	0,00264048358	11903063	491851	18142	582
2,11	0,00252145295	11411212	473709	17560	543
2,12	0,00240734083	10937503	456149	17017	537
2,13	0,00229796580	10481354	439132	16480	540
2,14	0,00219315226	10042222	422652	15940	510
2,15	0,00209273004	9619570	406712	15430	496
2,16	0,00199653434	9212858	391282	14934	497
2,17	0,00190440576	8821576	376348	14437	478
2,18	0,00181619000	8445228	361911	13959	447
2,19	0,00173173772	8083317	347952	13502	459
2,20	0,00165090455	7735365	334450	13043	439
2,21	0,00157355090	7400915	321407	12604	432
2,22	0,00149954175	7079508	308803	12172	411
2,23	0,00142874667	6770705	296631	11761	408
2,24	0,00136103962	6474074	284870	11353	399
2,25	0,00129629888	6189204	173517	10954	380
2,26	0,00123440684	5915687	262563	10574	375
2,27	0,00117524997	5653124	251989	10199	359
2,28	0,00111871873	5401135	241790	9840	354
2,29	0,00106470738	5159345	231950	9486	340
2,30	0,00101311393	4927395	222464	9146	331
2,31	0,00096383998	4704931	213318	8815	324
2,32	0,00091679067	4491613	204503	8491	309
2,33	0,00087187454	4287110	196012	8182	303
2,34	0,00082900344	4091098	187830	7879	292
2,35	0,00078809246	3903268	179951	7587	287
2,36	0,00074905978	3723317	172364	7300	271
2,37	0,00071182661	3550953	165064	7029	268
2,38	0,00067631708	3385889	158035	6761	260
2,39	0,00064246819	3227854	151274	6501	245
2,40	0,00061017965	3076580	144773	6256	244
2,41	0,00057941385	2931807	138517	6012	234
2,42	0,00055009578	2793290	132505	5778	226
2,43	0,00052216288	2660785	126727	5552	216
2,44	0,00049555503	2534058	121175	5336	212
2,45	0,00047021445	2412883	115839	5124	204
2,46	0,00044608562	2297044	110715	4920	196

t	Intégrale.	Diff. prem.	Diff. II.	Diff. III.	Diff. IV.
2,47	0,000423115 18	2186329	105795	4724	191
2,48	0,00040125189	2080534	101071	4533	183
2,49	0,00038044655	1979463	96538	4350	177
2,50	0,00036065192	1882925	92188	4173	171
2,51	0,00034182267	1790737	88015	4002	164
2,52	0,00032391530	1702722	84013	3838	160
2,53	0,00030688808	1618709	80175	3678	152
2,54	0,00029070099	1538534	76497	3526	148
2,55	0,00027531565	1462037	72971	3378	142
2,56	0,00026069528	1389066	69593	3236	137
2,57	0,00024680462	1319473	66357	3099	131
2,58	0,00023360989	1253116	63258	2968	138
2,59	0,00022107873	1189858	60290	2830	141
2,60	0,00020918015	1129568	57460	2749	139
2,61	0,00019788447	1072108	54711	2570	142
2,62	0,00018716339	1017397	52141	2498	118
2,63	0,00017698942	965256	49643	2380	105
2,64	0,00016733686	915613	47263	2275	101
2,65	0,00015818073	868350	44988	2174	95
2,66	0,00014949723	823362	42814	2079	94
2,67	0,00014126361	780548	40735	1985	88
2,68	0,00013345813	739813	38750	1897	85
2,69	0,00012606000	701063	36853	1812	83
2,70	0,00011904937	664210	35041	1729	78
2,71	0,00011240727	629169	33312	1651	76
2,72	0,00010611558	595857	31661	1575	71
2,73	0,00010015701	564196	30086	1504	70
2,74	0,00009451505	534110	28582	1434	67
2,75	0,00008917395	505528	27148	1367	64
2,76	0,00008411867	478380	25781	1303	59
2,77	0,00007933487	452599	24478	1244	60
2,78	0,00007480888	428121	23234	1184	56
2,79	0,00007052767	404887	22050	1128	53
2,80	0,00006647880	382837	20922	1075	51
2,81	0,00006265043	361915	19847	1024	49
2,82	0,00005903128	342068	18823	975	48
2,83	0,00005561060	323245	17848	927	43
2,84	0,00005237815	305397	16921	884	45
2,85	0,00004932418	288476	16037	839	39
2,86	0,00004643942	272439	15198	800	40
2,87	0,00004371503	257241	14398	760	38
2,88	0,00004114262	242843	13638	722	34
2,89	0,00003871419	229205	12916	688	36

t	*Intégrale.*	*Diff. prem.*	*Diff. II.*	*Diff. III.*	*Diff. IV.*
2,90	0,00003642214	216289	12228	652	31
2,91	0,00003425925	204061	11576	621	32
2,92	0,00003221864	192485	10955	589	29
2,93	0,00003029379	181530	10366	560	29
2,94	0,00002847849	171164	9806	531	27
2,95	0,00002676685	161358	9275	504	25
2,96	0,00002515327	152083	8771	479	24
2,97	0,00002363244	143312	8292	455	
2,98	0,00002219932	135020	7837		
2,99	0,00002084912	127183			
3,00	0,00001957729				

TABLE SECONDE.

Logarithmes des intégrales $\int e^{-tt}\,dt$.

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.	t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
0,00	9,9475448	49280	558	0,35	9,7403692	70174	638
0,01	9,9426168	49838	557	0,36	9,7333518	70812	640
0,02	9,9376330	50395	562	0,37	9,7262706	71452	639
0,03	9,9325935	50957	563	0,38	9,7191254	72091	642
0,04	9,9274978	51520	567	0,39	9,7119163	72733	646
0,05	9,9223458	52087	567	0,40	9,7046430	73379	645
0,06	9,9171371	52654	573	0,41	9,6973051	74024	650
0,07	9,9118717	53227	572	0,42	9,6899027	74674	648
0,08	9,9065490	53799	577	0,43	9,6824353	75322	653
0,09	9,9011691	54376	580	0,44	9,6749031	75975	654
0,10	9,8957315	54956	580	0,45	9,6673056	76629	655
0,11	9,8902359	55536	583	0,46	9,6596427	77284	659
0,12	9,8846823	56119	587	0,47	9,6519143	77943	663
0,13	9,8790704	56706	588	0,48	9,6441200	78606	656
0,14	9,8733998	57294	591	0,49	9,6362598	79262	662
0,15	9,8676704	57885	594	0,50	9,6283336	79924	666
0,16	9,8618819	58479	595	0,51	9,6203412	80590	666
0,17	9,8560340	59074	598	0,52	9,6122822	81256	668
0,18	9,8501266	59672	600	0,53	9,6041566	81924	669
0,19	9,8441594	60272	604	0,54	9,5959642	82593	672
0,20	9,8381322	60876	602	0,55	9,5877049	83265	673
0,21	9,8320446	61478	610	0,56	9,5793784	83938	673
0,22	9,8258968	62088	607	0,57	9,5709846	84611	678
0,23	9,8196880	62695	613	0,58	9,5625235	85289	678
0,24	9,8134185	63308	613	0,59	9,5539946	85967	678
0,25	9,8070877	63921	617	0,60	9,5453979	86645	683
0,26	9,8006956	64538	617	0,61	9,5367334	87328	681
0,27	9,7942418	65155	620	0,62	9,5280006	88009	684
0,2	9,7877263	65775	623	0,63	9,5191997	88693	687
0,29	9,7811488	66398	624	0,64	9,5103304	89380	687
0,30	9,7745090	67022	627	0,65	9,5013924	90067	688
0,31	9,7678068	67649	629	0,66	9,4923857	90755	690
0,32	9,7610419	68278	629	0,67	9,4833102	91445	693
0,33	9,7542141	68907	635	0,68	9,4741657	92138	692
0,34	9,7473234	69542	632	0,69	9,4649519	92830	696

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.	t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
0,70	9,4556689	93526	695	1,13	8,9890535	124590	746
0,71	9,4463163	94221	697	1,14	8,9765945	125336	748
0,72	9,4368942	94918	700	1,15	8,9640609	126084	748
0,73	9,4274024	95618	700	1,16	8,9514525	126832	750
0,74	9,4178406	96318	700	1,17	8,9387693	127582	749
0,75	9,4082088	97018	706	1,18	8,9260111	128331	751
0,76	9,3985070	97724	703	1,19	8,9131780	129082	752
0,77	9,3887346	98427	706	1,20	8,9002698	129834	764
0,78	9,3788919	99133	707	1,21	8,8872864	130598	734
0,79	9,3689786	99840	707	1,22	8,8742266	131332	764
0,80	9,3589946	100547	712	1,23	8,8610934	132096	755
0,81	9,3489399	101259	710	1,24	8,8478838	132851	758
0,82	9,3388140	101969	722	1,25	8,8345987	133609	756
0,83	9,3286171	102691	694	1,26	8,8212378	134365	758
0,84	9,3183480	103385	724	1,27	8,8078013	135123	759
0,85	9,3080095	104109	718	1,28	8,7942890	135882	759
0,86	0,2975986	104827	716	1,29	8,7807008	136641	762
0,87	9,2871159	105543	719	1,30	8,7670367	137403	761
0,88	9,2765616	106262	719	1,31	8,7532964	138164	761
0,89	9,2659354	106981	722	1,32	8,7394800	138925	764
0,90	9,2552373	107703	721	1,33	8,7255875	139689	764
0,91	9,2444670	108424	724	1,34	8,7116186	140453	764
0,92	9,2336246	109148	724	1,35	8,6975733	141217	765
0,93	9,2227098	109872	727	1,36	8,6834516	141982	766
0,94	9,2117226	110599	724	1,37	8,6692534	142748	768
0,95	9,2006627	111323	731	1,38	8,6549786	143516	766
0,96	9,1895304	112054	726	1,39	8,6406270	144282	769
0,97	9,1783250	112780	733	1,40	8,6261988	145051	769
0,98	9,1670470	113513	729	1,41	8,6116937	145820	770
0,99	9,1556957	114242	734	1,42	8,5971117	146590	770
1,00	9,1442715	114976	732	1,43	8,5824527	147360	771
1,01	9,1327739	115708	736	1,44	8,5677167	148131	773
1,02	9,1212031	116444	733	1,45	8,5529036	148904	771
1,03	9,1095587	117177	739	1,46	8,5380132	149675	774
1,04	9,0978410	117916	736	1,47	8,5230457	150449	774
1,05	9,0860494	118652	741	1,48	8,5080008	151223	775
1,06	9,0741842	119393	737	1,49	8,4928785	151998	775
1,07	9,0622449	120130	742	1,50	8,4776787	152773	776
1,08	9,0502319	120872	741	1,51	8,4624014	153549	777
1,09	9,0381447	121613	743	1,52	8,4470465	154326	777
1,10	9,0259834	122356	744	1,53	8,4316139	155103	777
1,11	9,0137478	123100	743	1,54	8,4161036	155880	781
1,12	9,0014378	123843	747	1,55	8,4005156	156661	772

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
1,56	8,3848495	157433	792
1,57	8,3691062	158225	774
1,58	8,3532837	158999	791
1,59	8,3373838	159780	782
1,60	8,3214058	160562	783
1,61	8,3053496	161345	783
1,62	8,2892151	162128	784
1,63	8,2730023	162972	783
1,64	8,2567111	163695	784
1,65	8,2403416	164479	787
1,66	8,2238937	165266	785
1,67	8,2073671	166051	787
1,68	8,1907620	166838	787
1,69	8,1740782	167625	788
1,70	8,1573157	168413	787
1,71	8,1404744	169200	790
1,72	8,1235544	169990	789
1,73	8,1065554	170779	792
1,74	8,0894775	171571	785
1,75	8,0723204	172356	795
1,76	8,0550848	173151	790
1,77	8,0377697	173941	792
1,78	8,0203756	174733	792
1,79	8,0029023	175525	795
1,80	7,9853498	176320	792
1,81	7,9677178	177112	794
1,82	7,9500066	177906	794
1,83	7,9322160	178700	797
1,84	7,9143460	179497	793
1,85	7,8963963	180290	798
1,86	7,8783673	181088	795
1,87	7,8602585	181883	795
1,88	7,8420702	182680	799
1,89	7,8238022	183479	796
1,90	7,8054543	184275	799
1,91	8,7870268	185074	800
1,92	7,7685194	185874	797
1,93	7,7499320	186671	801
1,94	7,7312649	187472	801
1,95	7,7125177	188273	800
1,96	7,6936904	189073	801
1,97	7,6747831	189874	801
1,98	7,6557957	190675	801
1,99	7,6367282	191476	804
2,00	7,6175806	192280	803
2,01	7,5983526	193083	802
2,02	7,5790443	193885	804
2,03	7,5596558	194689	804
2,04	7,5401869	195493	805
2,05	7,5206376	196298	804
2,06	7,5010078	197102	806
2,07	7,4812976	197908	806
2,08	7,4615068	198714	805
2,09	7,4416354	199519	807
2,10	7,4216835	200326	807
2,11	7,4016509	201133	808
2,12	7,3815376	201941	806
2,13	7,3613435	202747	809
2,14	7,3410688	203556	808
2,15	7,3207132	204364	809
2,16	7,3002768	205173	809
2,17	7,2797595	205982	809
2,18	7,2591613	206791	810
2,19	7,2384822	207601	812
2,20	7,2177221	208413	809
2,21	7,1968808	209222	812
2,22	7,1759586	210034	809
2,23	7,1549552	210843	814
2,24	7,1338709	211657	812
2,25	7,1127052	212469	811
2,26	7,0914583	213280	814
2,27	7,0701303	214094	812
2,28	7,0487209	214906	814
2,29	7,0272303	215720	814
2,30	7,0056583	216534	813
2,31	6,9840049	217347	815
2,32	6,9622702	218162	815
2,33	6,9404540	218977	814
2,34	6,9185563	219791	816
2,35	6,8965772	220607	815
2,36	6,8745165	221422	816
2,37	6,8523743	222238	819
2,38	6,8301505	223057	813
2,39	6,8078448	223870	819
2,40	6,7854578	224689	816
2,41	6,7629889	225505	818

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
2,42	6,7404384	226323	819
2,43	6,7178061	227142	817
2,44	6,6950919	227959	818
2,45	6,6722960	228777	819
2,26	6,6494183	229596	820
2,47	6,6264587	230416	818
2,48	6,6034171	231234	821
2,49	6,5802937	232055	819
2,50	6,5570882	232874	818
2,51	6,5338008	233692	823
2,52	6,5104316	234515	821
2,53	6,4869801	235336	819
2,54	6,4634465	236155	823
2,55	6,4398310	236978	821
2,56	6,4161332	237799	822
2,57	6,3923533	238621	821
2,58	6,3684912	239442	823
2,59	6,3445470	240265	823
2,60	6,3205205	241088	820
2,61	6,2964117	241908	828
2,62	6,2722209	242736	820
2,63	6,2479473	243556	825
2,64	6,2235917	244381	823
2,65	6,1991536	245204	826
2,66	6,1746332	246030	822
2,67	6,1500302	246852	825
2,68	6,1253450	247677	824
2,69	6,1005773	248501	827
2,70	6,0757272	249328	825
2,71	6,0507944	250153	825
2,72	6,0257791	250978	826
2,73	6,0006813	251804	824
2,74	5,9755009	252628	829
2,75	5,9502381	253457	825
2,76	5,9248924	254282	828
2,77	5,8994642	264110	827
2,78	5,8739532	255937	826
2,79	5,8483595	256763	828
2,80	5,8226832	257591	828
2,81	5,7969241	258419	827
2,82	5,7710822	259246	820
2,83	5,7451576	260066	845
2,84	5,7191510	260911	819
2,85	5,6930599	261730	831
2,86	5,6668869	262561	827
2,87	5,6406308	263388	831
2,88	5,6142920	264219	827
2,89	5,5878701	265046	831
2,90	5,5613655	265877	829
2,91	5,5347778	266706	829
2,92	5,5081072	267535	832
2,93	5,4813537	268367	830
2,94	5,4545170	269197	831
2,95	5,4275973	270028	831
2,96	5,4005945	270859	830
2,97	5,3735086	271689	831
2,98	5,3463397	272520	832
2,99	5,3190877	273352	
3,00	5,2917525		

TABLE TROISIÈME.

Logarithmes des produits $e^{tt} \int e^{-tt} dt$.

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
0,00	9,9475448	48846	311
0,01	9,9426602	48535	312
0,02	9,9378067	48223	306
0,03	9,9329844	47917	305
0,04	9,9281927	47612	303
0,05	9,9234315	47309	300
0,06	9,9187006	47009	297
0,07	9,9139997	46712	296
0,08	9,9093285	46416	291
0,09	9,9046869	46125	290
0,10	9,9000744	45835	287
0,11	9,8954909	45548	287
0,12	9,8909361	45261	281
0,13	9,8864100	44980	280
0,14	9,8819120	44700	278
0,15	9,8774420	44422	275
0,16	9,8729998	44147	273
0,17	9,8685851	43874	271
0,18	9,8641977	43603	269
0,19	9,8598374	43334	264
0,20	9,8555040	43070	267
0,21	9,8511970	42803	258
0,22	9,8469167	42545	262
0,23	9,8426622	42283	255
0,24	9,8384339	42028	256
0,25	9,8342311	41772	252
0,26	9,8300539	41520	251
0,27	9,8259019	41269	249
0,28	9,8217750	41020	245
0,29	9,8176730	40775	245
0,30	9,8135955	40530	242
0,31	9,8095425	40288	239
0,32	9,8055137	40049	239
0,33	9,8015088	39810	235
0,34	9,7975278	39575	236
0,35	9,7935703	39339	230
0,36	9,7896364	39109	229
0,37	9,7857255	38880	230
0,38	9,7818375	38650	226
0,39	9,7779725	38424	223
0,40	9,7741301	38201	223
0,41	9,7703100	37978	219
0,42	9,7665122	37759	221
0,43	9,7627363	37538	215
0,44	9,7589825	37323	215
0,45	9,7552502	37108	214
0,46	9,7515394	36894	208
0,47	9,7478500	36686	211
0,48	9,7441814	36475	208
0,49	9,7405339	36267	207
0,50	9,7369072	36060	202
0,51	9,7333012	35858	203
0,52	9,7297154	35655	201
0,53	9,7261499	35454	199
0,54	9,7226045	35255	196
0,55	9,7190790	35059	197
0,56	9,7155731	34862	195
0,57	9,7120869	34667	190
0,58	9,7086202	34477	191
0,59	9,7051725	34286	191
0,60	9,7017439	34095	185
0,61	9,6983344	33910	188
0,62	9,6949434	33722	184
0,63	9,6915712	33538	182
0,64	9,6882174	33356	182
0,65	9,6848818	33174	180

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.	t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
0,66	9,6815644	32994	179	1,09	9,5541300	26503	126
0,67	9,6782650	32815	175	1,10	9,5514797	26377	125
0,68	9,6749835	32640	177	1,11	9,5488420	26252	125
0,69	9,6717195	32463	172	1,12	9,5462168	26127	122
0,70	9,6684732	32291	175	1,13	9,5436041	26005	122
0,71	9,6652441	32116	170	1,14	9,5410036	25883	122
0,72	9,6620325	31946	170	1,15	9,5384153	25761	119
0,73	9,6588379	31776	167	1,15	9,5358392	25642	119
0,74	9,6556603	31609	170	1,17	9,5332750	25523	120
0,75	6,6524994	31439	162	1,18	9,5307227	25403	118
0,76	9,6493555	31277	166	1,19	9,528 824	25285	115
0,77	9,6462278	31111	162	1,20	9,5256539	25170	106
0,78	9,6431167	30949	162	1,21	9,5231369	25064	134
0,79	9,6400218	30787	161	1,22	9,5206305	24930	105
0,80	9,6369431	30626	157	1,23	9,5181375	24825	113
0,81	9,6338805	30469	159	1,24	9,5156550	24712	111
0,82	9,6308336	30310	146	1,25	9,5131838	24601	113
0,83	9,6278026	30164	175	1,26	9,5107237	24488	110
0,84	9,6247862	29989	144	1,27	9,5082749	24378	109
0,85	9,6217873	29845	151	1,28	9,5058371	24269	111
0,86	9,6188028	29694	152	1,29	9,5034102	24158	106
0,87	9,6158334	29542	151	1,30	9,5009944	24052	107
0,88	9,6128792	29391	148	1,31	9,4985892	23945	108
0,89	9,6099401	29243	148	1,32	9,4961947	23837	105
0,90	9,6070158	29095	146	1,33	9,4938110	23732	104
0,91	9,6041063	28949	146	1,34	9,4914378	23628	105
0,92	9,6012114	28803	144	1,35	9,4890750	23523	103
0,93	9,5983311	28659	142	1,36	9,4867227	23420	103
0,94	9,5954652	28517	144	1,37	9,4843807	23317	101
0,95	9,5926135	28373	138	1,38	9,4820490	23216	102
0,96	9,5897762	28235	142	1,39	9,4797274	23114	100
0,97	9,5869527	28093	136	1,40	9,4774160	23014	99
0,98	9,5841434	27957	140	1,41	9,4751146	22915	99
0,99	9,5813477	27817	134	1,42	9,4728231	22816	98
1,00	9,5785660	27683	137	1,43	9,4705415	22718	98
1,01	9,5757977	27546	132	1,44	9,4682697	22620	96
1,02	9,5730431	27414	136	1,45	9,4660077	22524	97
1,03	9,5703017	27278	130	1,46	9,4637553	22427	95
1,04	9,5675739	27148	122	1,47	9,4615126	22332	91
1,05	9,5648591	27016	127	1,48	9,4592794	22241	101
1,06	9,5621575	26889	133	1,49	9,4570553	22140	89
1,07	9,5594686	26756	126	1,50	9,4548413	22051	94
1,08	9,5567930	26630	127	1,51	9,4526362	21957	90

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
1,52	9,4504405	21867	93
1,53	9,4482538	21774	91
1,54	9,4460764	21683	87
1,55	9,4439081	21596	98
1,56	9,4417485	21498	75
1,57	9,4395987	21423	96
1,58	9,4374564	21327	87
1,59	9,4353237	21240	86
1,60	9,4331997	21154	86
1,61	9,4310843	21068	86
1,62	9,4289775	20982	84
1,63	9,4268793	20898	86
1,64	9,4247895	20812	85
1,65	9,4227083	20727	81
1,66	9,4206356	20646	83
1,67	9,4185710	20563	83
1,68	9,4165147	20480	80
1,69	9,4144667	20400	82
1,70	9,4124267	20318	81
1,71	9,4103949	20237	78
1,72	9,4083712	20159	81
1,73	9,4063553	20078	75
1,74	9,4043475	20003	85
1,75	9,4023472	19918	73
1,76	9,4003554	19845	78
1,77	9,3983709	19767	77
1,78	9,3963942	19690	77
1,79	9,3944252	19613	73
1,80	9,3924639	19540	77
1,81	9,3905099	19463	75
1,82	9,3885636	19388	74
1,83	9,3866248	19314	72
1,84	9,3846934	19242	75
1,85	9,3827692	19167	71
1,86	9,3808525	19096	73
1,87	9,3789429	19023	72
1,88	9,3770406	18951	70
1,89	9,3751455	18881	72
1,90	9,3732574	18809	70
1,91	9,3713765	18739	68
1,92	9,3695026	18671	72
1,93	9,3676355	18599	68
1,94	9,3657756	18531	67
1,95	9,3639225	18464	68
1,96	9,3620761	18396	69
1,97	9,3602365	18327	67
1,98	9,3584038	18260	67
1,99	9,3565778	18193	65
2,00	9,3547585	18128	66
2,01	9,3529457	18062	66
2,02	9,3511395	17996	65
2,03	9,3493399	17931	65
2,04	9,3475468	17866	63
2,05	9,3457602	17803	64
2,06	9,3439799	17739	63
2,07	9,3422060	17676	63
2,08	9,3404384	17613	64
2,09	9,3386771	17549	61
2,10	9,3369222	17488	61
2,11	9,3351734	17427	61
2,12	9,3334307	17366	63
2,13	9,3316941	17303	59
2,14	9,3299638	17244	61
2,15	9,3282394	17183	60
2,16	9,3265211	17123	59
2,17	9,3248088	17064	59
2,18	9,3231024	17005	59
2,19	9,3214019	16946	58
2,20	9,3197073	16888	58
2,21	9,3180185	16830	57
2,22	9,3163355	16773	60
2,23	9,3146582	16713	54
2,24	9,3129869	16659	57
2,25	9,3113210	16602	57
2,26	9,3096608	16545	55
2,27	9,3080063	16490	57
2,28	9,3063573	16433	54
2,29	9,3047140	16379	55
2,30	9,3030761	16324	55
2,31	9,3014437	16269	54
2,32	9,2998168	16215	54
2,33	9,2981953	16161	54
2,34	9,2965792	16107	52
2,35	9,2949685	16055	55
2,36	9,2933630	16000	51
2,37	9,2917630	15949	51

t	Logarithme.	Diff. prem.	Diff. II.
2,38	9,2901681	15898	55
2,39	9,2885783	15843	50
2,40	9,2869940	15793	52
2,41	9,2854147	15741	57
2,42	9,2838406	15690	49
2,43	9,2822716	15641	52
2,44	9,2807075	15589	51
2,45	9,2791486	15538	49
2,46	9,2775948	15489	49
2,47	9,2760459	15440	40
2,48	9,2745019	15400	48
2,49	9,2729619	15332	40
2,50	9,2714287	15292	50
2,51	9,2698995	15242	45
2,52	9,2683753	15197	49
2,53	9,2668556	15149	49
2,54	9,2653408	15099	45
2,55	9,2638309	15054	48
2,56	9,2623255	15006	47
2,57	9,2608249	14959	47
2,58	9,2593290	14912	46
2,59	9,2578378	14866	45
2,60	9,2563512	14821	49
2,61	9,2548691	14772	41
2,62	9,2533919	14731	48
2,63	9,2519188	14683	44
2,64	9,2504505	14639	45
2,65	9,2489866	14594	43
2,66	9,2475272	14551	47
2,67	9,2460721	14504	43
2,68	9,2446217	14461	45
2,69	9,2431756	14416	41
2,70	9,2417340	14375	44
2,71	9,2402965	14331	43
2,72	9,2388634	14288	43
2,73	9,2374346	14245	45
2,74	9,2360101	14200	39
2,75	9,2345901	14161	44
2,76	9,2331740	14117	41
2,77	9,2317623	14076	41
2,78	9,2303547	14035	42
2,79	9,2289512	13993	41
2,80	9,2275519	13952	41
2,81	9,2261567	13911	42
2,82	9,2247656	13869	48
2,83	9,2233787	13821	43
2,84	9,2219966	13798	50
2,85	9,2206168	13748	38
2,86	9,2192420	13710	41
2,87	9,2178710	13669	38
2,88	9,2165041	13631	42
2,89	9,2151410	13589	37
2,90	9,2137821	13552	39
2,91	9,2124269	13513	41
2,92	9,2110756	13472	36
2,93	9,2097284	13436	38
2,94	9,2083848	13398	38
2,95	9,2070450	13360	38
2,96	9,2057090	13322	38
2,97	9,2043768	13284	38
2,98	9,2030484	13246	36
2,99	9,2017238	13210	
3,00	9,2004028		

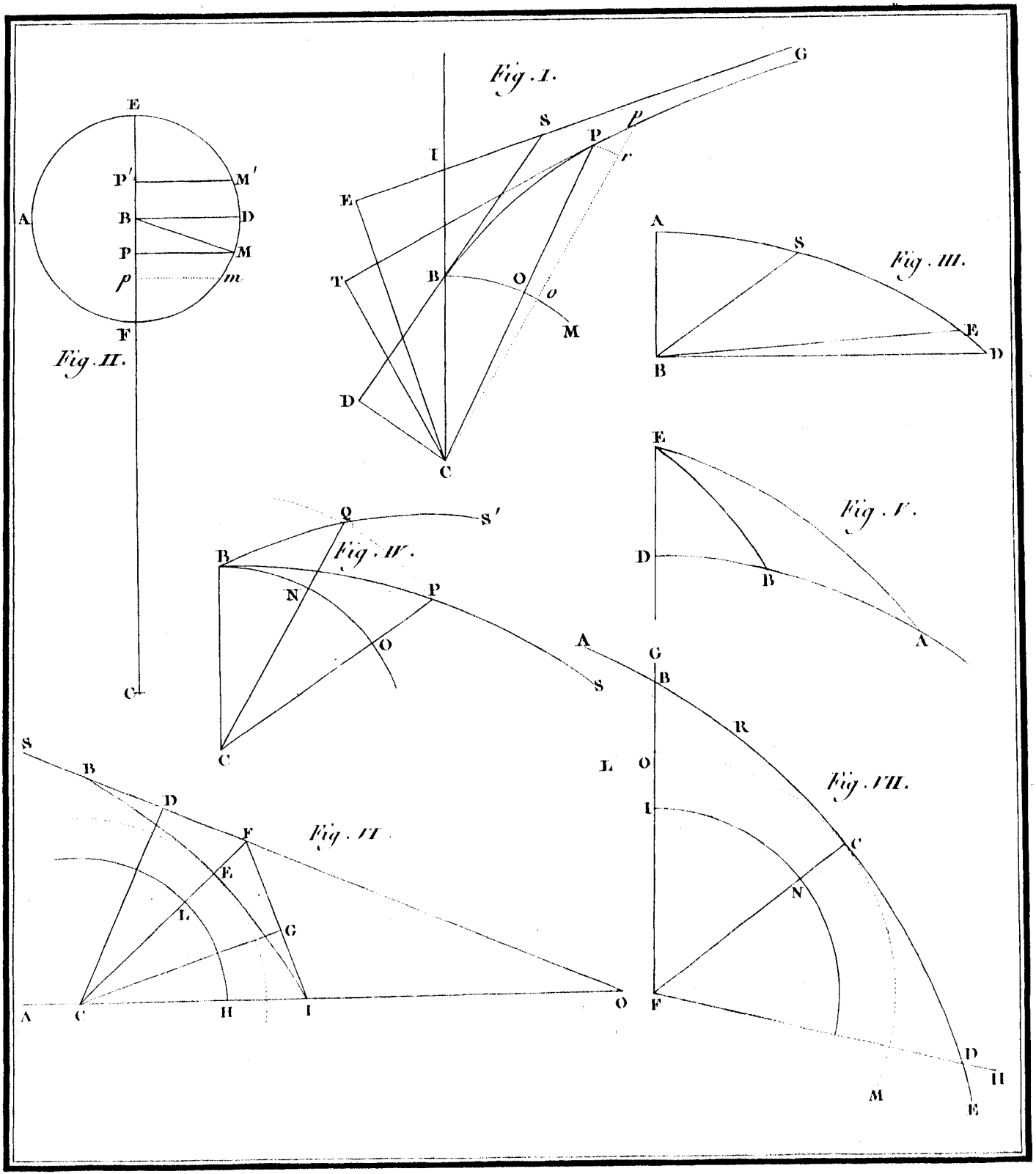


Fig. I.
G
S
p
P
r
I
E
T
B
O
o
M
D
C
Fig. II.
E
P'
M'
A
B
D
P
M
p
m
F
C
Fig. III.
A
S
E
B
D
Fig. IV.
Q
S'
B
N
P
O
C
S
Fig. V.
E
D
B
A
Fig. VI.
S
B
D
F
E
L
G
A
C
H
I
O
Fig. VII.
A
G
B
R
L
O
I
C
N
F
D
H
M
E