ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE,

Lecteur Royal en Mathématiques ; de l'Académie Royale des Sciences de Paris ; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, &c. Censeur Royal.

SECONDE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME SECOND.

ex libris Descaffij

U.S.C. AND G. SURVEY,
LIBRARY AND ARCHIVES

15964

A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint Jacques.

M. DCC. LXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009

U.S. C. AND G. S.
LIBRARY AND ARCHIVES
15964.

ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE.

TOME SECOND.

ASTRONOMIE.

LIVRE SIXIEME.

DES LOIX DU MOUVEMENT des ſix Planètes principales vues du Soleil, & de leurs élémens; c'eſt-à-dire, de la figure & de la ſituation de leurs orbites.

PUISQUE les planètes tournent autour du ſoleil, de même que la terre (1104); c'eſt au centre du ſoleil qu'on doit ſuppoſer un obſervateur pour lui faire voir les mouvemens les plus uniformes, & lui en faire connoître les circonſtances & les meſures; c'eſt pour cela que M. de la Caille en commençant ſes leçons élémentaires d'aſtronomie, ſuppoſe d'abord que ſon obſervateur ſoit placé préciſément au centre du ſoleil, pour conſidérer de-là le mouvement régulier des planètes & des comètes parmi les étoiles, toujours fixes & immobiles; & il paſſe auſſi-tôt à la recherche des loix des mouvemens planétaires: pour moi j'ai mieux

aimé considérer l'astronomie dans ses premiers élémens ; suivre les progrès lents & successifs de ceux qui l'ont perfectionnée, & ne parler des planètes vues du soleil, qu'après avoir montré que c'est autour de lui qu'elles tournent.

Utilité des oppositions & des conjonctions.

1201. Pour déterminer les mouvemens vus du soleil, il falloit un moyen d'avoir la longitude d'une planète, telle qu'on l'observeroit vue du soleil ; c'est ce qu'on a trouvé dans les *oppositions* des planètes supérieures, Mars, Jupiter & Saturne, & dans les *conjonctions inférieures* de Vénus & de Mercure (1152) ; en effet, quand une planète est opposée au soleil, le lieu de l'écliptique où elle répond, est sur une même ligne droite avec le soleil & la terre ; ainsi le lieu de la planète vu du soleil, ou le lieu vu de la terre, est absolument le même : si la terre est en *N* (*fig.* 56), & la planète en *A* opposée au soleil *S*, le point du ciel où aboutit la ligne *SNA*, marque le lieu héliocentrique (1140), aussi bien que le lieu géocentrique de la planète *A*.

Planche V. Fig. 56. Tome I.

Aussi les astronomes ont-ils soin d'observer assiduement les oppositions des planètes, comme les circonstances les plus essentielles de leurs mouvemens ; parce qu'alors l'observation faite sur la terre, tient lieu d'une observation faite dans le soleil, & sert à reconnoître l'orbite que la planète décrit autour du soleil. C'est avec des longitudes héliocentriques ou vues du soleil que nous avons déterminé les moyens mouvemens des planètes (1153), & que nous allons déterminer encore les orbites planétaires, les circonstances & les inégalités de leurs mouvemens : on trouvera dans le XXIVe livre la maniere de calculer une opposition par le moyen des observations d'une planète ; & nous rapporterons à la fin de ce VIe livre les oppositions ou les conjonctions observées le plus exactement, qui sont les plus propres à déterminer les élémens des orbites planétaires, & dont les astronomes se sont servi jusqu'à présent. Le moyen mouvement est le plus essentiel de tous les élé-

mens d'une planète ; mais nous en avons déja donné le détail dans le Ve livre, il nous reste à parler de la figure des orbites, des excentricités, des distances, des aphélies, des nœuds, des inclinaisons & des diamètres de chacune des six planètes principales.

DE LA FIGURE DES ORBITES PLANETAIRES.

1202. APRÈS avoir trouvé combien de temps les planètes emploient à terminer leurs révolutions autour du soleil, il faut rechercher les circonstances de leur mouvement dans les différentes parties de chaque révolution, ou ces inégalités périodiques dont il a déja été question pour le soleil dans le IVe livre (869), & qui dépendent de la figure des orbites planétaires.

Le mouvement de chaque planète étant rapporté au soleil, ou observé dans les temps où les apparences sont les mêmes, vues de la terre & vues du soleil, est sujet à une inégalité (semblable à celle du mouvement apparent du soleil), c'est celle que les anciens appelloient *premiere inégalité* (a) ; pour l'expliquer on se servoit ou d'un épicycle, ou d'un cercle excentrique (865, 1068) ; ces deux hypothèses étoient absolument équivalentes, comme nous l'avons fait voir.

1203. Ptolomée fit choix de l'excentrique *NHBCP* (*fig.* 24.) pour exprimer cette *premiere inégalité*, ou l'équation des planètes dans leur orbite, il y trouvoit plus de clarté ; & d'ailleurs il employoit ensuite l'épicycle pour représenter la *seconde inégalité* ; son hypothèse a été expliquée (1068), elle consistoit à faire mouvoir la planète dans un cercle, de maniere que le mouvement fût égal, non pas vu du centre *E*, mais vu d'un autre *Fig.* 24.

(a) La seconde inégalité étoit celle de la parallaxe du grand orbe, (1067, 1141), ou des stations & des rétrogradations (1181), qui étant relative au soleil ne pouvoit se déterminer qu'après avoir connu celle qui avoit lieu dans les oppositions.

point *K*, il ne donne ni démonstration, ni observation pour la justifier, & dans le fait, les anciens n'avoient pas, ce me semble, des raisons bien déterminantes pour mettre le centre d'égalité hors du centre du cercle décrit par la planète, nous nous contenterons donc d'expliquer son hypothèse, tel qu'il la donne, (liv. IX. c. 5.) pour faire connoître ensuite la maniere dont Képler s'en servit pour découvrir l'ellipticité des orbites planétaires (1208).

Hypothèse de Ptolomée pour la premiere inégalité.

Fig. 64.

1204. Du centre *B* (*fig.* 64), soit décrit le cercle excentrique *DEF*, dont l'excentricité soit *BA*, en sorte que la terre ou l'œil du spectateur soient placés en *A*; *D* sera l'apogée, *F* le périgée; si l'on prend au-dessus du centre *B* une ligne *BC* égale à *BA*, le point *C* sera celui autour duquel Ptolomée suppose que la planète décrit des angles égaux en temps égaux, ou le point d'où son mouvement paroîtroit uniforme, *Punctum æquantis*, le point d'égalité. Copernic rejetta cette hypothèse, (*liv. IV. chap.* 7. & *liv. V. chap.* 4.), parce qu'elle péchoit contre les principes de la physique de son temps, où l'on ne vouloit que des mouvemens uniformes, & où l'on admettoit encore les orbites solides que Tycho-Brahé renversa dans la suite par la considération des comètes.

Point d'égalité.

Tentatives de Tycho.

Tycho-Brahé voulant perfectionner cette hypothèse de Ptolomée, chercha si en rendant *CB* différente de *BA*, on ne parviendroit pas à mieux représenter les inégalités qu'il observoit dans les planètes, mais Képler fit voir dans la suite que tout cela étoit insuffisant; & ce fut ce qui le conduisit à trouver la véritable figure des orbites planétaires, comme nous allons l'expliquer. Riccioli a remarqué qu'avant Képler, Reinholdus à la fin des Théoriques de Purbachius avoit donné une figure ovale pour l'orbite lunaire, (*Almag. I.* 149); il n'en falloit pas davantage pour donner à Képler l'idée de rechercher si la figure des orbites planétaires étoit exactement circulaire; & Mars étoit, de toutes les planètes, la plus propre à cette recherche.

1205. Nous avons vu (493) que les premieres étincelles du génie de Képler parurent dans le livre qui a pour titre, *Mysterium Cosmographicum*, en 1596. Ce premier essai fut applaudi par *Mæstlinus* son ancien maître, & par Tycho-Brahé qui en 1597 lui en témoigna de la satisfaction, & lui inspira l'envie de s'appliquer aux observations & aux recherches d'astronomie. Képler, ayant su en 1600 que Tycho avoit abandonné son isle (474), & s'étoit retiré en Bohême, vint le trouver pour converser avec lui, & lui demander sur-tout les résultats de ses observations sur les excentricités des planètes, sur lesquelles Tycho avoit déja beaucoup travaillé, (Képler, *de stella Martis*, *pag.* 53).

Une heureuse circonstance fit alors la destinée de Képler; Tycho-Brahé, & Longomontanus qui demeuroit avec lui, s'occupoient des observations de Mars, & dressoient une table de ses oppositions moyennes depuis 1580; cette planète étoit la plus propre de toutes à faire pénétrer ce grand homme dans les secrets de la physique céleste, & elle se présenta la premiere à lui comme par hasard; il apperçut des difficultés, il s'attacha à les vaincre, & c'est-là l'époque où il faut remonter pour connoître l'origine de notre physique céleste. Circonstance heureuse pour Képler.

1206. Tycho avoit formé une hypothèse qui représentoit, à quelques minutes près, toutes les observations de Mars, au moyen d'un excentrique, en plaçant le point *A* & le point *C* (*fig.* 64), à des distances différentes par rapport au centre *B*; Képler savoit déja que l'excentrique pouvoit s'accorder, à cinq minutes près, avec les observations, & malgré cela l'hypothèse lui paroissoit peu vraisemblable; il s'occupa à discuter ces observations pour en tirer, s'il étoit possible, quelque chose de plus exact: ce fut alors que commencerent les recherches qui se trouvent détaillées dans son grand ouvrage intitulé, (*Astronomia nova* Αἰτιολογήτος, *seu Physica cœlestis*, *tradita Commentariis de motibus Stellæ Martis*, *ex observationibus C. V.* TYCHONIS-BRAHE; *Pragæ*, *Fig.* 64. Ouvrage de Képler, *de Stella Martis.*

1609. *in-fol.* 337. pages.). Je vais donner un extrait de cet ouvrage célebre, mais un aſtronome doit le lire en entier : parmi les ſuperfluités, les longueurs, les tentatives inutiles qui y ſont détaillées, on y voit une marche lumineuſe & des traits de génie qui donnent la plus grande ſatisfaction.

1207. Le premier pas qu'il falloit faire dans cette carriere, étoit de trouver les diſtances de la terre au ſoleil, qui ſervent d'échelle & de terme de comparaiſon pour toutes les autres diſtances que l'on meſure dans le ciel. Pour avoir les diſtances de la terre en divers temps de l'année, il falloit trouver l'excentricité *AB*, (*fig.* 64) de l'orbite terreſtre, c'eſt-à-dire, la diſtance entre le centre du ſoleil ſuppoſé en *A*, & le véritable centre du cercle *DEF* décrit par la terre. Les anciens avoient toujours cru, & Tycho-Brahé lui-même le croyoit, que pour l'orbite du ſoleil ou de la terre, le centre *B* étoit le point d'égalité autour duquel les mouvemens de la terre paroîtroient uniformes, & que la ligne totale *AC*, qui ſert de baſe à l'équation du centre ou à l'angle *CEA* étoit au-deſſous du centre *B*, ou de *B* en *a* ; c'étoit la premiere choſe qu'il falloit diſcuter ; & Képler reconnut bientôt la biſſection de l'excentricité, c'eſt-à-dire, qu'il vit que le centre *B* du cercle décrit par la terre occupoit le milieu de l'excentricité totale *CA*, & qu'il étoit entre le point *A* où eſt le ſoleil & le point *C*, où il faudroit être pour appercevoir des mouvemens uniformes de la terre ou des angles égaux en temps égaux.

Fig. 64.

Biſſection de l'excentricité.

1208. Képler avoit eſſayé d'expliquer phyſiquement la cauſe de l'*Equant* (1204), la cauſe pour laquelle il y avoit un point *C*, (différent du centre *B*), autour duquel on avoit un mouvement régulier & uniforme, (*Myſter. Coſmogr. c.* 22) ; c'eſt pourquoi il étoit porté d'avance à croire que la cauſe étoit générale, & que l'*Equant* devoit avoir lieu dans le mouvement de la terre autour du ſoleil, comme dans celui des autres planètes : Ptolomée & Copernic ne l'avoient point

employé, ils s'étoient contenté d'un simple excentrique, (865), mais Képler fut persuadé qu'ils avoient tort, sur-tout en 1598, lorsque Tycho lui eût écrit que *l'orbe annuel, ou l'excentrique du soleil lui paroissoit n'être pas toujours de la même grandeur.* En effet, quand Tycho supposoit le mouvement du soleil uniforme autour du centre *B*, & la terre en *A*, qu'ensuite il déterminoit l'excentricité par le moyen de l'équation de l'orbite *AEC*, qui lui faisoit trouver une excentricité *AC*, il prenoit le reste *CD* du diamètre total *FD* pour rayon du cercle, mais *CD* étoit différent du rayon *BD* qu'il avoit d'abord supposé; il devoit donc trouver les rayons de l'orbite solaire différens entre eux, & croire que le soleil n'étoit pas toujours à même distance par rapport au centre de l'excentrique; cela indiquoit à Képler que ce centre n'étoit pas le point autour duquel le mouvement régulier avoit lieu, (*de Stella Martis, pag.* 125). Ce fut pour s'en assurer que Képler rechercha par observation, quelle étoit la parallaxe annuelle de Mars (1141) dans deux positions de la terre diamétralement opposées, dans l'aphélie & le périhélie, ou à peu-près, en observant chaque fois Mars en quadrature vers le même point de son orbite.

Képler recherche l'excentricité du Soleil.

1209. Képler supposant d'abord, à l'exemple de Tycho, que l'orbite du soleil étoit un cercle dont le centre *B* étoit le point d'égalité, devoit nécessairement trouver ce cercle plus grand, ou plus petit, en le comparant aux autres planètes. Soit *S* le centre du soleil, (*fig.* 65), *M* le lieu de Mars dans son orbite, observé deux fois lorsque la terre étoit en *D* & en *E*, & Mars au même point *M* de son orbite, c'est-à-dire après la durée d'une révolution ou de plusieurs, (connue par les retours des oppositions); le point *M* étoit choisi de maniere que les angles *MCD* & *MCE* étoient des angles droits; le point *C* étant celui autour duquel la terre devoit paroître se mouvoir uniformément. Tycho, à l'exemple de Ptolomée, supposoit que les mouvemens moyens du soleil décidoient seuls de la

Fig. 65.

Fig. 65. seconde inégalité, qu'elle ne disparoissoit que quand la planète étoit opposée au lieu moyen du soleil, & qu'elle étoit égale à égale distance entre la planète & le lieu moyen du soleil; ainsi *CD* & *CE* étant égales, comme Tycho-Brahé le pensoit, & les angles *C* étant droits, les angles *DMC*, *CME*, (que nous appellons les parallaxes annuelles de Mars), devoient être les mêmes, mais comme *CE* étoit véritablement plus grande que *CD*, parce que le point d'égalité n'est point en *B*, mais en *C*, l'angle *CME* se trouvoit être plus grand que l'angle *CMD*, & celui qui s'obstinoit à supposer toujours que le rayon *BD* du cercle étoit la base de cet angle-là, étoit réduit à dire que le rayon du cercle décrit par la terre, n'étoit pas toujours de la même grandeur; c'est ce que Tycho écrivoit à Képler, & ce qui persuada ce dernier qu'il falloit mettre en *C*, & non pas au centre *B* du cercle de la terre, le point d'égalité (1068, 1204. *Képler*, *pag.* 125).

1210. Képler soupçonna donc que cette variation dans la grandeur du rayon de l'excentrique de la terre, introduite par Tycho, provenoit de ce que le point d'égalité *C*, autour duquel on comptoit les angles de commutation, ne devoit pas être le centre du cercle. Pour s'en assurer il choisit deux observations, faites le 18 Mai 1585, & le 22 Janvier 1591; il les réduisit, (par le calcul des mouvemens de Mars, connus assez exactement pour un intervalle de quelques jours), au 30 Mai 1585, & 20 Janvier 1591, jours où la longitude de Mars calculée par Tycho, étoit également de $6^s\ 13^\circ\ 28'$, & où les angles de commutation *MCD* & *MCE* étoient l'un & l'autre de $64^\circ\ 23'\frac{1}{2}$; les longitudes de Mars, suivant l'observation, étoient $5^s\ 6^\circ\ 37'$ & $7^s\ 21^\circ\ 34'$; ainsi les parallaxes annuelles *CMD*, *CME*, ou les différences entre les longitudes héliocentriques calculées, & les longitudes géocentriques observées, étoient $36^\circ\ 51'$ dans la premiere, & $38^\circ\ 6'$ dans la seconde observation, (*Képler*, *pag.* 128). Ces parallaxes ainsi différentes de $1^\circ\ 15'$, quoique les anomalies

malies de commutation ou les angles *MCT*, & *MCR*, fussent égaux, prouvoient que la ligne *CR* étoit plus grande que *CT*, & *CE* plus grande que *CD*; ainsi le point d'égalité, autour duquel les mouvemens de la terre sont sensiblement uniformes, & auquel se rapportoient les commutations égales *MCE*, *MCD*, suivant la méthode de Tycho, n'étoit pas le centre *B* de l'orbite terrestre, mais un point *C* placé de l'autre côté du centre.

1211. Képler trouva aussi, par le moyen des triangles *TCM*, *RCM*, ou des parallaxes de Mars que nous venons de rapporter, la distance *BC* de 1837 parties, dont le rayon *BD* étoit cent mille, (*Kepler*, *pag.* 130.): or, Tycho avoit déterminé par beaucoup d'observations, que la distance totale *CS* du soleil au centre d'égalité, qui répond à l'équation du centre du soleil étoit de 3584; il vit donc bien que le centre du cercle décrit par la terre, étoit entre le soleil *S* & le point d'égalité *C*, puisqu'il venoit de trouver *CB* à peu-près égal à la moitié de *CS*.

C'étoit une découverte importante que d'avoir démontré ainsi la bissection de l'excentricité pour la terre, tandis que les anciens ne l'admettoient que pour les planètes supérieures; sans cela on ne pouvoit déterminer exactement les distances de la terre au soleil en différens temps de l'année, fondement essentiel de toutes les recherches suivantes.

Aprés avoir déterminé la position du centre d'égalité, (*Puncti æquantis*), pour l'orbite de la terre, Képler songea à le déterminer aussi pour l'orbite de Mars, c'est-à-dire à déterminer son excentricité: voici la méthode qu'il employoit; nous nous contenterons d'en donner une idée, le détail en seroit trop long; on pourra le voir dans l'ouvrage cité, où toutes ses tentatives, ses calculs, ses soupçons, ses erreurs, ses découvertes, sont expliqués fort au long.

1212. Soit *B*, (*fig.* 66.) le centre de l'excentrique de Mars, *HBAI* la ligne des apsides, soit *A* le centre

Il recherche l'excentricité de Mars. *Fig.* 66.

Fig. 66. du soleil, & *C* le point autour duquel les mouvemens de la planète seroient uniformes; *F*, *G*, *D*, *E*, quatre longitudes de Mars observées, lorsque cette planète étoit en opposition, & que la seconde inégalité étoit nulle; Képler se propose le problême suivant: trouver les angles *FAH*, *FCH*, tels que les quatre points *F*, *G*, *D*, *E*, soient dans un cercle, & que le centre *B* de ce cercle soit entre les points *C* & *A*, c'est-à-dire, l'angle *BAD* égal à l'angle *CAD*: Képler ne résolvoit le problême que par une double fausse position: il supposoit d'abord qu'on connût la distance *CA* avec les angles *FCH* & *FAH*; il calculoit par la Trigonométrie toutes les autres parties de la figure, pour savoir si à la fin du calcul les quatre angles formés en *A* se trouveroient égaux à 360°, & les trois points *A*, *B*, *C*, sur une même ligne; dans ce cas tout étoit connu; sinon il ne s'agissoit que de recommencer le calcul avec d'autres suppositions, (*Képler*, *pag.* 93).

Ses tentatives. 1213. Képler nous apprend, (pag. 95), qu'il fit de semblables calculs plus de 70 fois, avant de parvenir à reconnoître que le cercle ne pouvoit satisfaire seul aux observations. Après cela, dit-il, on ne s'étonnera pas que j'aie passé cinq ans à établir la théorie de Mars; & l'on me plaindra plutôt d'avoir supporté l'ennui d'un semblable travail: en effet, un seul exemple que rapporte Képler de cette méthode, remplit dix pages de calcul dans le volume *in-fol.* que nous venons de citer; il trouva par ce moyen un cercle qui approchoit assez des quatre observations.

L'hypothèse circulaire d'accord avec les oppositions. 1214. Après avoir trouvé par-là toutes les dimensions de l'excentrique de Mars, Képler calcula dans cette hypothèse circulaire 12 oppositions de Mars observées par Tycho, & il n'en trouva aucune qui s'écartât de son calcul de plus de $1' \frac{3}{4}$. On s'étonnera, dit-il, qu'une hypothèse si bien d'accord avec les 12 oppositions, soit fausse; c'est cependant ce qu'il démontre ensuite, soit par les latitudes de Mars, soit par

les longitudes de cette planète observées dans d'autres situations : au reste, les observations de Tycho-Brahé étant nécessairement exposées à une erreur de 2′, au jugement même de Képler, c'étoit véritablement les avoir représentées avec toute la perfection possible, que d'avoir évité des erreurs de 2′, (*Képler, pag.* 110); ainsi les oppositions ne suffisoient pas pour reconnoître la figure de l'orbite de Mars. Le cercle excentrique par le moyen duquel Képler représentoit si bien les 12 oppositions, avoit pour excentricité totale $AC = 18364$, mais AB étoit de 11332 & BC de 7232 seulement, en supposant la distance de la terre 100000.

1215. Cependant Képler étoit persuadé d'ailleurs que AB devoit être égal à BC, parce qu'il y entrevoyoit une cause physique; outre cela, l'hypothèse qui représentoit très-bien les longitudes de Mars en opposition, ne satisfaisoit ni aux latitudes observées en même temps, ni aux longitudes observées hors des oppositions, parce que les distances de Mars au soleil, comme AF, AE, étoient défectueuses dans l'hypothèse circulaire que Képler venoit d'examiner, quoique les angles ne le fussent pas, en supposant AB (*Excentricitas excentrici*), de 11332 & BC, (*Excentricitas æquantis*), de 7232. Les diamètres des épicycles dans la forme de Copernic & de Tycho, étoient suivant ses calculs de 3616 & 14948; celui-ci est égal à l'excentricité totale 18564 moins la moitié de la petite excentricité 7232, ou le milieu entre B & C, parce qu'il faut que les deux rayons d'épicycle fassent entre eux la plus grande excentricité possible. La parallaxe annuelle qui dépend de ces distances de Mars au soleil, étoit fausse, lorsque l'on faisoit $AB = BC$, comme paroissoient l'exiger ces autres observations, & l'erreur alloit quelquefois à 8′, (pag. 114). Si Képler avoit regardé une erreur de 8′ comme négligeable, il en seroit demeuré-là, ainsi qu'avoit fait Tycho-Brahé; mais persuadé que ces 8′ d'erreur prouvoient la fausseté de l'hypothèse circulaire, il songea à s'assurer des distances de Mars au soleil,

Insuffisance pour les distances.

& ce furent ces distances qui lui firent ensuite connoître que l'orbite de Mars n'étoit pas un cercle parfait (1219). Ces recherches forment la plus grande partie de son ouvrage *de Stella Martis* : nous ne faisons, pour ainsi dire, que l'histoire ou l'extrait de ce livre; mais aussi ce livre seul contient le germe & les fondemens de toute l'astronomie; notre objet ayant été de présenter la marche des Inventeurs & l'histoire de l'esprit humain, nous suivons l'ouvrage où elles se trouvent totalement pour la partie & pour l'époque dont il s'agit.

1216. Képler avoit déterminé d'abord les distances de la terre au soleil (1211), il chercha ensuite les distances de Mars au soleil en trois points de son orbite, avec ses longitudes vues du soleil, afin d'avoir non-seulement la figure, mais encore la grandeur de cette orbite; nous allons rapporter sa méthode qui étoit très-bien imaginée, & très-propre à déterminer exactement ces distances. Keill attribue cette méthode à M. Halley, qui n'a vécu que long-temps après. (*Instit. astronom. pag.* 515).

Méthode pour trouver les distances de Mars au Soleil.

Planche VI. Fig. 67.

Soit S, (*fig.* 67.) le centre du soleil, M celui de Mars, B, C, deux points de l'orbite terrestre où se soit trouvée la terre, lorsque Mars étoit au même point M de son orbite, & par conséquent à la même distance SM du soleil; on connoît les deux positions de la terre, c'est-à-dire, ses longitudes & ses distances au soleil, il s'agit de trouver SM; dans le triangle rectiligne BSC l'on connoît les deux côtés BS, SC, distances de la terre au soleil, & l'angle compris BSC, différence entre les deux longitudes de la terre en B & en C, l'on trouvera les angles BCS, CBS & le côté BC. L'angle MBS est la différence entre la longitude observée de Mars & celle du soleil, au temps de l'observation faite en B; si l'on en retranche l'angle CBS que nous venons de trouver, on aura l'angle MBC; si l'on ôte aussi l'angle BCS de l'angle MCS, on aura l'angle MCB; ainsi dans le triangle MCB l'on connoît deux angles & le côté compris, on trouvera

aisément *MB* & *MC*; enfin, dans le triangle *MBS* on connoît deux côtés *MB*, *BS*, avec l'angle compris *MBS*, on trouvera la distance *MS*, avec l'angle *MSB* qui étant ajouté à la longitude de la terre lorsqu'elle étoit en *B*, donnera la longitude héliocentrique de Mars, dans chacune des deux observations.

Képler avoit choisi cinq observations différentes qui comparées deux à deux, lui donnoient le même résultat pour la distance & pour la longitude héliocentrique de Mars, en un même point *M* de son orbite, (*de Stella Martis, cap. 28. pag. 157*).

1217. Képler, par un grand nombre d'observations de Tycho-Brahé, qu'il avoit discutées avec toute la constance & la sagacité possible, établit l'excentricité du soleil de 1800 pour un rayon de cent mille; par-là il étoit en état de trouver les distances de la terre au soleil *SB*, *SC*, pour un moment quelconque, aussi bien que l'angle *CSB*: mais pour en être encore plus assuré, il refit tous ses calculs dans différentes suppositions d'excentricité, & à chaque fois il prenoit cinq observations au lieu de trois, pour que l'accord de différens résultats lui fît mieux connoître le vrai; & c'est ainsi qu'après avoir discuté dans le plus grand détail une multitude d'observations, il s'arrêta à l'excentricité de 1800, & aux distances de Mars au soleil que nous rapporterons ci-après (1219). Les différentes parties de ces recherches se confirmoient réciproquement, & il ne pouvoit pas se faire que cinq positions de la terre donnassent toutes, deux à deux, le même résultat pour la distance *SM* de Mars au soleil, à moins que les distances *SC* & *SB* de la terre au soleil n'eussent été bien supposées.

1218. Cette méthode par laquelle Képler trouvoit les distances de Mars au soleil (1216), lui donnoit un moyen de trouver aussi l'excentricité de Mars: ayant déterminé deux distances de Mars, l'une aux environs de son aphélie, l'autre aux environs de son périhélie, il trouva la premiere de 166780, (en supposant tou-

jours de 100000 la distance moyenne du soleil à la terre); & l'autre de 138500; en sorte que la distance moyenne étoit de 152640 & l'excentricité de 14140, qu'il appelloit *Centrorum excentrici & Mundi distantia*, (Képler, *pag.* 209).

Les observations que Képler employa pour le périhélie, étoient du 1r. Novembre 1589, du 26 Septembre 1591, & du 31 Juillet 1593. Lorsque ces observations ne se trouvoient pas avoir été faites précisément dans le même endroit de l'orbite de Mars, il y appliquoit les réductions nécessaires pour les faire toutes coincider en un même point; mais ces réductions étant fort petites, il n'en résultoit aucune erreur.

1219. Képler détermina ainsi, par plusieurs Observations, trois distances de Mars au soleil *AF*, *AE*, *AD*, (*fig.* 66), indépendantes de toute supposition sur la théorie de Mars, il trouva aussi l'excentricité *AB* de 14140, par la comparaison des deux distances de Mars *AH*, *AI*, prises dans l'aphélie & dans le périhélie, indépendamment de toute hypothèse; enfin, il avoit déterminé la position de la ligne des apsides *HI*, par une méthode qui étoit également exacte, soit que l'orbite fût circulaire, soit qu'elle ne le fût pas : nous parlerons de cette méthode, art. 1280.

Fig. 66.

Supposant donc l'orbite circulaire on a le triangle *ABF*, dans lequel on connoît *BF*, avec l'excentricité *AB* & l'anomalie vraie *BAF*, il est aisé de trouver la distance vraie *AF*; il en est de même des autres distances *AE*, *AD*. Voici les trois distances que Képler trouvoit dans cette supposition, (*pag.* 213.). 166605, 163883, 148539
Les distances observées. . . 166255, 163100, 147750
Ainsi l'erreur étoit. 350, 783, 789

1220. Les vraies distances de Mars au soleil étoient donc plus courtes que les distances calculées dans l'hypothèse circulaire, & cela d'autant plus qu'elles approchoient des côtés *G* & *E* de la figure. Cela prouvoit donc nécessairement que l'orbite étoit applatie, ou rentrante

par les côtés, c'eſt-à-dire, ovale, d'où ſuivoit évidemment la concluſion importante & fameuſe que Képler en tira, & qui fut la premiere loi de Képler. *Itaque plane hoc eſt, orbita planetæ non eſt circulus, ſed ingrediens ad latera utraque paulatim; iterumque ad circuli amplitudinem in perigeo exiens, cujuſmodi figuram itineris ovalem appellitant.* (*cap. 44. pag. 213. in fine.*).

Képler prouve que l'orbite de Mars eſt ovale.

Cette ovalité de l'orbite de Mars fit conclure bientôt à Képler que cette orbite étoit une véritable ellipſe; car l'ellipſe eſt de toutes les courbes alongées, ou ovales, la plus ſimple, & celle qui ſe préſente la premiere; cela fut confirmé par l'examen des lieux de Mars obſervés dans toutes ſes poſitions, qui ſe trouvèrent d'accord auſſi bien que ſes diſtances, avec les calculs faits dans l'ellipſe ordinaire. Cette concluſion que Képler étendit enſuite à toutes les planètes dans ſes tables Rudolphines, s'eſt trouvée dans toutes également exacte; elle s'eſt trouvée dans la ſuite être une conſéquence néceſſaire de l'attraction univerſelle, comme nous le dirons dans le XXIIe livre, en ſorte qu'il a été reconnu pour règle générale, que *les ſix planètes principales décrivent des ellipſes dont le foyer eſt au centre du ſoleil.*

Et enſuite que c'eſt une ellipſe.

1221. Le reſte du livre de Képler eſt employé à confirmer cette découverte par d'autres obſervations & par d'autres genres de preuves; à expliquer par des raiſonnemens phyſiques la cauſe de cette ovalité, & à chercher les moyens de calculer l'équation dans une ellipſe dont on connoîtroit l'anomalie moyenne. Nous ne ſuivrons pas l'auteur dans ces différentes tentatives, où l'on voit cependant briller le génie & l'imagination de l'auteur, mais il nous ſuffit d'avoir montré la route par laquelle il étoit arrivé à cette belle découverte.

Réflexions ſur la marche de Képler.

On a dû remarquer avec quelle ſagacité Képler avoit ſu diviſer les queſtions, pour les réſoudre chacune ſéparément, & choiſir dans le nombre prodigieux d'obſervations que Tycho lui avoit fournies, celles qui décidoient un élément, c'eſt-à-dire, un des points de la queſtion, indépendamment de tous les autres. Il avoit d'abord déterminé l'excentricité

de l'orbite terreſtre (1209) par le moyen de deux obſervations de la longitude de Mars, faites dans le temps que cette planète étoit au même point de ſon orbite : cette excentricité le mettoit à portée de connoître les autres diſtances de la terre au ſoleil en différens points de ſon orbite. Connoiſſant les diſtances de la terre au ſoleil, il s'en étoit ſervi pour trouver celles de Mars au ſoleil, dans ſon aphélie & dans ſon périhélie ; ce qui donnoit directement l'excentricité de ſon orbite (1214) ; enfin, il compara trois autres diſtances de Mars au ſoleil, calculées dans un cercle dont l'excentricité étoit connue ; & les trouvant plus longues que les vraies diſtances obſervées, il en conclut que ces vraies diſtances appartenoient à une orbite plus étroite que le cercle (1220).

Képler avoit été long-temps à ſecouer le préjugé univerſel des orbes circulaires ; il s'accuſe lui-même du temps conſidérable que lui avoit fait perdre cette fauſſe perſuaſion, fondée ſur l'autorité générale de tous ceux qui l'avoient précédé, & ſur les principes de cette métaphyſique arbitraire dont on n'oſoit s'écarter. *Primus meus error fuit viam planetæ perfectum eſſe circulum ; tantò nocentior temporis fur, quantò erat ab autoritate omnium Philoſophorum inſtructior, & Metaphyſicæ in ſpecie convenientior*, (*cap.* 40, *p.* 192).

La découverte de Képler fut conteſtée & rejettée d'abord par beaucoup d'aſtronomes, comme l'avoit été le ſyſtème de Copernic, & comme le fut enſuite l'attraction Newtonienne ; l'inertie de la matière ſemble donner aux hommes une certaine difficulté à s'élever à des idées nouvelles ; il n'y a que ceux qui ont de la jeuneſſe, du feu & de la curioſité, qui les examinent & les reçoivent, encore faut-il qu'ils n'ayent pas honte de s'inſtruire & de ſe réformer.

Après que l'orbite de Mars eût ſervi à trouver les dimenſions de l'orbite terreſtre, & la règle du mouvement planétaire, les mêmes élémens lui ſervirent à trouver ceux de toutes les autres planètes, il les trouva lui-même avec aſſez d'exactitude, au moyen des obſervations de Tycho ; & il s'en ſervit pour calculer ſes tables Rudolphines.

1222.

1222. La méthode par laquelle Képler venoit de trouver les distances de Mars au soleil, soit dans l'aphélie, soit dans le périhélie (1216), lui servit à trouver les distances de toutes les autres planètes, & par conséquent *l'excentricité* de chacune, qui n'est autre chose que la moitié de la différence entre la plus grande & la plus petite distance; ces distances lui servirent à trouver la loi dont nous parlerons ci-après (1224), & cette regle a servi aux autres Astronomes pour trouver encore plus exactement ces distances, car les calculs en ont été faits plus d'une fois: les voici suivant les tables de M. Halley, & suivant mes nouveaux calculs, d'aprés les durées des révolutions qui sont dans la table de l'article 1161. Toutes ces distances supposent que celle du soleil soit de 100000, mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données. Distances des Planètes au Soleil.

Tables des distances moyennes des Planètes au Soleil, suivant divers Auteurs.

PLANETES.	Distances moyen. suiv. Képler.	Suivant les Tab. carol. de Street.	Suivant M. Halley.	Selon mes Tables.	Logarithmes de ces distances.
Mercure.	38806	38710	38710	38709,88	9 5878218
Vénus.	72413	72333	72333	72333,24	9 8593379
La Terre.	100000	100000	100000	100000	0 0000000
Mars.	152340,5	152369	152369	152369,27	0 1828974
Jupiter.	520000	520110	520098	520097,91	0 7160851
Saturne.	951003,5	953800	954007	953936,83	0 9795196

1223 Les distances sont exprimées, suivant M. Halley, en parties, dont celle de la terre contient 100000; dans les miennes j'ai employé deux chiffres de plus pour une plus grande exactitude, c'est-à-dire, les dix millionièmes de la distance moyenne du soleil; mais j'y ai ajouté les logarithmes par le moyen desquels j'ai trouvé les distances, qui supposent la distance moyenne du soleil égale à l'unité; car c'est sous cette forme-là qu'on les emploie souvent dans les calculs astronomiques. On trouvera les distances

de la lune dans le livre IXe où il sera question des parallaxes.

Rapports plus simples.

Les distances précédentes des planètes au soleil, en négligeant les quatre derniers chiffres, sont entre elles comme les nombres 4, 7, 10, 15, 52, 95; ce sont-là les nombres les plus simples qu'il y ait pour représenter les intervalles & les grandeurs des orbes planétaires, & nous nous en sommes déja servi en expliquant la figure du systême de Copernic (1082): il est utile de se souvenir de ces six nombres dont on fait un fréquent usage dans l'astronomie. Les distances des planètes au soleil déterminées ainsi par Képler, au moyen des observations de Tycho, lui firent trouver la belle loi dont nous allons parler.

Les carrés des Temps périodiques sont comme les Cubes des distances.

1224. La plus fameuse loi du mouvement des planètes découverte par Képler, est celle du rapport qu'il y a entre les grandeurs de leurs orbites, & le temps qu'elles emploient à les parcourir; Jupiter est cinq fois plus éloigné du soleil que la terre, le contour de son orbite est cinq fois plus grand; mais il met douze fois plus de temps que la terre à parcourir cette orbite qui est seulement cinq fois plus grande; Képler chercha long-temps la cause de cette différence & la nature de ces rapports: il avoit d'abord voulu rapporter les distances des six planètes aux corps réguliers, le cube, le tétraëdre, l'octaëdre, le dodécaëdre, l'icosaëdre; ensuite à l'harmonie des corps sonores: (Voy. *Mysterium Cosmographicum*, 1596, & *Harmonices Mundi*, 1619); mais il ne trouvoit aucun rapport satisfaisant entre les temps & les distances.

Ce fut le 8 Mars 1618 qu'il lui vint à l'esprit pour la premiere fois, de comparer les puissances des différens nombres, au lieu de comparer les nombres mêmes qui exprimoient les temps périodiques des planètes &

leurs distances ; il compara donc au hazard des carrés, des cubes, &c. il essaya même les carrés des temps avec les cubes des distances ; mais trop de vivacité ou d'impatience l'égara dans quelque faute de calcul, il se trompa cette premiere fois ; il crut trouver que la règle n'avoit pas lieu, & rejetta cette proportion comme fausse & inutile. Ce ne fut que le 15 de Mai suivant qu'il revint à cette idée, en recommençant les mêmes essais & les mêmes comparaisons ; il calcula mieux, & il les trouva parfaitement d'accord ; alors enfin il reconnut qu'il y avoit réellement toujours un rapport égal & constant entre les carrés des temps périodiques de deux planètes quelconques, & les cubes de leurs distances moyennes au soleil : il fut si enchanté de cette découverte, qu'à peine il se fioit à ses calculs ; il crut se faire illusion & avoir supposé ce qu'il falloit chercher ; il n'osoit qu'à peine se persuader qu'il eût enfin trouvé une vérité cherchée pendant 17 ans : *Tantâ comprobatione & laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis, & meditationis hujus in unum conspirantium, ut somniare me & præsumere quæsitum inter principia primò crederem*, (Harmonices, liv. V. pag. 189). Qu'auroit-il dit, s'il eût pu prévoir les conséquences admirables qu'on a su tirer de cette loi ? comme nous le dirons dans le XXIIe livre.

Cette loi fut trouvée le 15 Mai 1618.

1225. La distance de la terre au soleil est à celle de Jupiter au soleil, comme 10 est à 52 ; leurs cubes sont par conséquent comme 10 à 1406, ou comme 1 est à 140,6 ; or, les durées de leurs révolutions sont de $365\frac{1}{4}$ & de $4332\frac{1}{3}$ jours, dont les carrés en négligeant les derniers chiffres, sont encore comme 1 est à $140\frac{2}{3}$; ainsi les carrés des temps périodiques sont entre eux comme 1 est à 140,6 ; donc, le rapport est le même de part & d'autre ; le carré du temps périodique de Jupiter est 140 fois plus grand que le carré du temps périodique de la terre, & le cube de la distance moyenne de Jupiter au soleil est 140 fois plus grand que le cube de la distance moyenne de la terre,

Exemple de cette loi.

c'eſt en quoi conſiſte l'égalité des rapports. Si l'on prend plus exactement les révolutions ſydérales (1161) & les diſtances (1222), on aura 140, 6874 pour le nombre exact qui exprime combien le carré de la révolution de Jupiter, & le cube de ſa diſtance contiennent ceux de la terre. On verra dans le XVIIIe livre que cette loi ſe vérifie également quand on compare les diſtances des ſatellites de Jupiter & de Saturne avec les durées de leurs révolutions, & l'on verra dans le livre XXIIe où nous traiterons de l'attraction, que de cette loi donnée par obſervation il s'enſuivoit néceſſairement que la force centrale, ou la gravité des planètes vers le ſoleil étoit en raiſon inverſe du carré de la diſtance, c'eſt-à-dire, la plus belle découverte de Newton, qui dut ſans doute ſon origine à celle de Képler.

Je me ſuis ſervi de cette loi pour trouver les diſtances moyennes des planètes qui ſont dans la table de l'article 1222; en diviſant le carré du mouvement ſéculaire total du ſoleil, relativement aux étoiles, ou de 129597736″ par le carré du mouvement ſéculaire de chaque planète (1161), & prenant la racine cube du quotient: on doit employer les mouvement ſéculaires plutôt que les temps des révolutions, parce que c'eſt le mouvement qui eſt donné immédiatement par les obſervations, & duquel on déduit les périodes; & il eſt bon de remonter à la ſource des données, toutes les fois qu'on a de nouvelles conſéquences à en tirer.

Les Aires ſont proportionnelles au Temps.

1226. Cette loi générale du mouvement des planètes devenue ſi importante dans l'aſtronomie, ſavoir, que les aires ſont proportionnelles au temps, eſt encore une des découvertes de Képler; & c'eſt ce qu'on appelle la troiſieme loi de Képler; cependant il ne démontroit cette vérité que d'une maniere incomplète; Newton a été le premier qui ait fait voir qu'elle étoit une

ſuite néceſſaire & exacte des loix générales du mouvement.

Képler étoit perſuadé que le mouvement circulaire des planètes étoit produit par une certaine force émanée du ſoleil, qui les forçoit à tourner autour de l'axe du ſoleil, comme il y tournoit lui-même. Il conſidéroit que puiſque les planètes les plus éloignées tournoient plus lentement que les planètes les plus proches du ſoleil, il falloit que la force motrice fût plus petite à une plus grande diſtance, & cela le conduiſit à établir non-ſeulement la force d'*inertie*, dont il a parlé le premier, mais encore la règle des aires proportionnelles aux temps.

1227. Képler démontre d'abord à la page 165 de ſa nouvelle phyſique céleſte, que le mouvement des planètes dans les apſides eſt proportionnel à leur diſtance au ſoleil, même dans l'hypothèſe de Ptolomée (1204), c'eſt-à-dire, qu'en prenant un arc de l'excentrique vers l'aphélie, & un autre arc de même longueur vers le périhélie, la planète eſt plus long-temps dans l'arc aphélie, à proportion que la diſtance aphélie eſt plus grande; ou, ce qui revient au même, que les aires décrites dans le même temps ſont égales.

Démonſtration de Képler.

Fig. 68.

Soit E (*fig.* 68.) le point autour duquel le mouvement eſt ſuppoſé uniforme (1204), S le centre du ſoleil à même diſtance du centre C que le point E; ayant tiré deux lignes MEO, NEP, l'arc MN & l'arc OP ſont parcourus dans le même temps ſuivant cette hypothèſe, puiſque les angles en E ſont égaux; ſi du point S on tire les lignes SO, SP, & les lignes SN, SM; je dis qu'elles formeront des ſecteurs égaux OSP, NSM: en effet, $MN : OP :: ER : EQ$, donc $MN.EQ = OP.ER$; mais $EQ = SR$ & $ER = SQ$; donc $MN.SR = OP.SQ$; donc le ſecteur SNM eſt égal au ſecteur OSP: donc dans l'hypothèſe même des anciens ſi l'on prend deux arcs MN & OP, décrits par une planète dans des temps égaux, on aura au point S des aires égales.

1228. De ce que la planète emploie plus de temps

dans ſon aphélie à parcourir un même arc, Képler conclut en général, (*page* 168), que plus la planète eſt éloignée du centre du ſoleil, plus elle eſt foiblement animée par la force motrice qui la fait tourner autour du ſoleil. Après cela il applique cette égalité des aires, (*cap.* 40.) au calcul de l'équation; enfin, il obſerve que les ſurfaces des ſecteurs doivent exprimer les anomalies moyennes : en effet, la demeure d'une planète dans chacun des arcs égaux de l'excentrique, étant toujours proportionnelle à la diſtance de la planète; ſi l'on peut avoir la ſomme de toutes les diſtances, on aura la ſomme de toutes les demeures, ou le temps employé à parcourir un arc quelconque, de quelque grandeur qu'il ſoit : or la ſomme de toutes les diſtances eſt viſiblement la ſurface entiere du ſecteur décrit par la planète; ainſi l'aire du ſecteur repréſentera l'anomalie moyenne, qui eſt proportionnelle au temps.

1229. Lorſque Képler, (*cap.* 46 & 47. *pag.* 219 & 223), paſſe à la conſidération des orbes elliptiques, il tranſporte à l'ellipſe cette propriété qu'il n'avoit démontrée que pour le cercle excentrique, ſans y employer de nouvelle démonſtration; ainſi la loi des aires proportionnelles au temps n'étoit démontrée qu'imparfaitement, elle ne pouvoit paſſer juſqu'alors que comme une approximation commode, facile dans la pratique, & juſtifiée par l'accord du calcul avec l'obſervation.

Mais lorſqu'on conſidere les orbites planètaires comme formées par le concours de deux forces & de deux directions différentes, dont l'une eſt de ſa nature uniforme & conſtante, dès-lors les aires deviennent néceſſairement & rigoureuſement proportionnelles aux temps, comme nous le démontrerons bientôt (1233).

1230. On prouve très-bien aujourd'hui, par l'obſervation des diamètres du ſoleil, que les aires ſont proportionnelles aux temps vers les apſides, ou, ce qui revient au même, que le mouvement du ſoleil eſt d'autant plus lent qu'il eſt plus éloigné de la terre. Le diamètre du ſoleil eſt de 31′ 31″ en été, & de 32′ 36″ en hyver,

ſuivant mes obſervations ; cela prouve que la diſtance du ſoleil en hyver eſt à ſa diſtance en été, comme 31′ 31″ eſt à 32′ 36″; car les grandeurs apparentes d'un objet éloigné ſont en raiſon inverſe de ſes diſtances (1384) : le mouvement horaire du ſoleil en hyver eſt de 2′ 33″; or 32′ 36″ : 31′ 31″ : : 2′ 33″ : 2′ 28″; ainſi le mouvement horaire du ſoleil devroit être de 2′ 28″ en été, ſi ce mouvement horaire étoit en lui-même conſtant & uniforme, & que ſes différences ne dépendiſſent que de l'éloignement du ſoleil ; cependant, par l'obſervation, ce mouvement horaire ne ſe trouve que de 2′ 23″; il eſt plus petit qu'il ne devroit être dans cette ſuppoſition : donc, outre les 5″ de différence qu'il doit y avoir entre les mouvemens horaires du ſoleil en été & en hyver à cauſe de ſes différentes diſtances, il y a encore une différence réelle de 5″, qui ne provient pas des diſtances, mais qui eſt un ralentiſſement véritable dans le mouvement apparent du ſoleil ; donc, le mouvement réel de la terre eſt effectivement plus lent dans l'aphélie que dans le périhélie. On voit même qu'il eſt en raiſon inverſe des diſtances, puiſque l'on trouve 2′ 23″, au lieu de 2′ 28″ qu'il y auroit, en ſuppoſant le mouvement uniforme, c'eſt-à-dire, 5″ pour l'excès du mouvement horaire en hyver ſur le mouvement en été, indépendamment des 5″ qu'il doit y avoir, à raiſon de la diſtance du ſoleil qui eſt moindre en hyver ; or 2′ 23″ eſt à 2′ 28″, comme 31′ 31″ eſt à 32′ 36″, c'eſt-à-dire, comme le diamètre en été eſt au diamètre en hyver, ou comme la diſtance en hyver eſt à la diſtance en été ; donc le mouvement du ſoleil en été eſt au mouvement qu'il paroîtroit avoir s'il alloit toujours uniformément, en raiſon inverſe de ſa diſtance.

La loi des aires proportionnelles au temps ayant été démontrée par Képler pour le cas de l'aphélie & du périhélie, & ſe trouvant vérifiée d'ailleurs par un accord général entre les obſervations & le calcul tiré de cette loi, nous pourrions la regarder comme prouvée aſtronomiquement, n'ayant pas encore traité des cauſes qui doivent produire cette loi ; cependant nous allons

démontrer en peu de mots, 1°. que les planètes tournent autour du soleil en vertu d'une force centrale ou attractive, dirigée au foyer de l'ellipse; 2°. que cette force une fois supposée, il s'ensuit que les aires sont proportionnelles au temps; ce sera une connoissance élémentaire qui préparera le lecteur à la physique céleste, dont nous traiterons dans le XXIIe livre.

Premiere loi du mouvement.

1231. C'est la premiere loi du mouvement prouvée par l'expérience, & admise par tous les mathématiciens, qu'un corps ayant parcouru une ligne droite uniformément dans l'espace d'une minute, parcourroit une autre ligne droite sur la même direction dans la minute suivante, si rien ne s'y opposoit; ainsi la planète P (*fig.* 69), ayant été une seule fois uniformément de P en Q sur la ligne droite PQ, elle continueroit à se mouvoir de Q en F sur la même direction PQF, en parcourant un espace QF égal à PQ uniformément, & dans le même espace de temps: cependant les planètes décrivent des ellipses, & non pas des lignes droites, elles courbent sans cesse leur route du côté du soleil, & reviennent après une révolution reprendre la même route à la même distance du soleil; il y a donc dans le soleil une force capable de détourner à chaque instant une planète de la ligne droite qu'elle venoit de décrire l'instant précédent. Nous examinerons la mesure & la quantité de cette force dans le XXIIe livre, où nous traiterons de l'attraction; il nous suffit ici de faire voir que cette force centrale existe, puisque sans elle les planètes ne pourroient décrire que des lignes droites, & jamais ne reviendroient aux mêmes lieux, comme elles le font, en décrivant sans cesse une courbe qui environne le soleil.

Fig. 69.

Existence d'une force centrale.

Seconde loi du mouvement.

1232. La seconde loi du mouvement que je suppose encore connue & démontrée, parce qu'elle se trouve dans tous les livres de mécanique, ou de dynamique, est celle-ci: un corps poussé à la fois par deux forces différentes, dont les directions font un angle, & dont chacune pourroit lui faire parcourir en une minute un des côtés d'un parallélogramme, en décrira la diagonale dans la même minute. La planète arrivée en Q est poussée vers

le

le soleil, suivant la direction *QS*, avec une force qui seule seroit capable de lui faire parcourir en une minute la ligne droite *QG*, tandis qu'au même instant elle est sollicitée à parcourir en une minute une ligne *QF* égale à *PQ*, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231); si sur les lignes *QG* & *QF* on forme un parallélogramme *GQFR*, la planète parcourra la diagonale *QR* dans la même minute. Il ne faut que ces trois principes pour démontrer que la loi des aires proportionnelles au temps, doit avoir lieu dans tous les cas; nous allons faire cette démonstration à peu près comme Newton, (*Philosophiæ natur. principia mathemat. l. I. sec. II. prop. I*).

Démonstration de la loi des Aires proportionnelles.

1233. Considérons une planète en un point quelconque *Q* de son orbite, venant de parcourir l'instant d'auparavant une très-petite portion *PQ* de cette orbite, que je considère comme une ligne droite; la planète parvenue de *P* en *Q*, & le rayon de son orbite ayant passé de *SP* en *SQ*, a décrit l'aire *SPQ* en une minute de temps; je dis que dans la minute suivante elle décrira une aire *SQR* égale à l'aire *SPQ*, ou un triangle égal en surface à *SPQ*, ensorte que l'aire décrite par le rayon vecteur, sera égale en temps égal. En effet, si la planète livrée à elle-même, eût continué à se mouvoir de *Q* en *F*, en vertu de la premiere loi du mouvement (1231), elle auroit décrit une aire *QSF* égale à l'aire *PSQ*, parce que ces deux triangles sont égaux, ayant des bases égales *PQ* & *QF*, & pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du point *S* sur la direction *FQP*, prolongée au dehors : mais à cause de la force centrale qui attire la planète vers le soleil, ce sera l'aire *QSR*, (à la place de l'aire *QSF*), qui sera décrite par la planète; or, les triangles *QSR*, *QSF*, sont encore égaux, parce qu'ils ont la même base *QS*, & sont compris entre les mêmes paralleles *FR* & *QS*; donc l'aire *QSR* est aussi égale à l'aire *PSQ*: ainsi il est démontré que la petite aire décrite dans la première minute, est égale à la petite aire décrite dans la minute suivante;

Fig. 69. & procédant ainsi de minute en minute dans toute la durée de la révolution, on démontreroit avec la même facilité que la même planète décrira éternellement la même aire dans le même temps, à quelque distance du soleil qu'elle parvienne, tant qu'il ne surviendra pas une force étrangère qui puisse troubler l'égalité entre *QF* & *PQ*, c'est-à-dire, entre la ligne qu'une planète vient de parcourir, & celle qu'elle tend à parcourir dans la minute suivante.

Ainsi la loi des aires proportionnelles aux temps est prouvée non-seulement par l'observation, c'est-à-dire, par l'accord général des calculs fondés sur cette loi, avec les observations, mais encore par la nature même des deux forces qui animent les planètes : nous allons donc passer au calcul du mouvement des planètes dans les orbites elliptiques, pour être en état d'assigner en tout temps le point de son orbite où une planète doit se trouver en vertu de la loi précédente.

On a appellé *Loi de Kepler* cette règle des aires proportionnelles aux temps, aussi bien que celles des articles 1220 & 1224, du nom de ce célebre inventeur; mais il n'eut pas la satisfaction de voir leur connexion & leur dépendance essentielle d'une autre loi plus générale, cela étoit réservé à Newton, dans la découverte de l'attraction universelle, comme on le verra dans le livre XXII.

Théorie du mouvement elliptique des Planètes autour du Soleil.

Rayon vecteur. 1234. Définitions. Le *rayon vecteur* d'une planète est la ligne tirée du centre du soleil au centre de la planète, ou la distance de la planète au foyer de son ellipse. Fig. 70. Soit *AMDP* (*Fig.* 70.), l'orbite elliptique d'une planète décrite autour du foyer *S*, où est placé le soleil (1220), *M* le lieu actuel d'une planète pour

un instant donné, la ligne *SM* sera le rayon vecteur. Fig. 70.

La ligne des apsides, (a), ou le grand axe de l'ellipse marque l'aphélie & le périhélie de la planète (864) : l'APHÉLIE ou l'apside supérieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus éloignée du soleil ; tel est le sommet *A* du grand axe *AP*, le plus éloigné du foyer *S*. Le PÉRIHÉLIE, ou l'apside inférieure, est le point de l'orbite où la planète est la plus proche du soleil ; telle est l'extrémité inférieure *P* du grand axe *AP*, la plus voisine du foyer *S* où réside le soleil. Aphélie.

L'ANOMALIE en général est la distance d'une planète à son aphélie ; mais il y a plusieurs manieres de mesurer cette distance.

L'ANOMALIE VRAIE est l'angle formé au foyer de l'ellipse par le rayon vecteur & par la ligne des apsides ; tel est l'angle *ASM* formé par le grand axe *AS* & par le rayon vecteur *SM*. Anomalie vraie.

L'ANOMALIE EXCENTRIQUE est l'angle formé au centre de l'ellipse, par le grand axe & par le rayon d'un cercle circonscrit, mené à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le lieu vrai de la planète. Ainsi ayant décrit un cercle *ANP* sur le grand axe *AP* de l'orbite, comme diamètre, on tirera l'ordonnée *RMN* par le point *M*, où est supposée la planète, & à l'extrémité *N* de cette ordonnée on ménera le rayon *CN*, c'est celui qui déterminera l'anomalie excentrique *AN* ou *ACN*. Anomalie excentrique.

L'ANOMALIE MOYENNE est la distance à l'aphélie, supposée proportionnelle au temps ; c'est celle qui augmente uniformément & également depuis l'aphélie jusqu'au périhélie ; ainsi une planète qui emploîroit six mois à aller de *A* en *P*, auroit à la fin du premier mois 30 degrés d'anomalie moyenne, 60 degrés à la fin du second ; & ainsi de suite, en augmentant toujours proportionnellement au temps. Si l'on prend une ligne *CX* Anomalie moyenne.

(a) Nous avons donné l'étymologie de ces noms (864). Il y a des auteurs qui écrivent *Alsides*, tels sont Riccioli, Sethward, &c. mais l'étymologie fait que l'on écrit plus communément Apsides.

Fig. 70. pour marquer l'anomalie moyenne, en ſuppoſant que cette ligne tourne uniformément autour du centre *C*, la ligne *CX* ſera d abord plus avancée que la ligne *CN*, parce que *AN* croit plus lentement vers l'aphélie où le mouvement de la planète eſt moindre que le mouvement moyen, & cet avancement augmentera tant que la vîteſſe de la planète ſera moindre que ſa vîteſſe moyenne; enſuite le point *N* ſe rapprochera du point *X*, juſqu'à ce qu'au périhélie *P* ils ſe réuniſſent enſemble; là les trois anomalies ſe confondent, & ſont également de 180 degrés.

La différence entre l'anamolie vraie, & l'anamolie moyenne forme l'équation de l'orbite ou l'équation du centre.

1235. Puiſque l'anomalie moyenne eſt proportionnelle au temps, & qu'elle eſt une portion du temps de la révolution, elle peut être meſurée par toute quantité qui aura un progrès uniforme: ainſi non ſeulement l'arc *AX*, l'angle *ACX*, & le ſecteur ou l'aire circulaire *ACX* peuvent s'appeller *Anomalie moyenne*, mais encore le ſecteur elliptique, ou l'aire *ASM*, formée par le rayon vecteur *SM*, le grand axe *SA* & l'arc d'ellipſe *AM*: en effet, les aires décrites par le rayon vecteur *SM*, étant proportionnelles aux temps (1226), le ſecteur *AMS* ſera la ſixieme partie de la ſurface elliptique *AMDPA* au bout du premier mois, (dans la ſuppoſition de l'article précédent) il en ſera par conſéquent le tiers au bout de deux mois, & toujours ainſi uniformément; en ſorte que la ſurface, ou l'aire elliptique ſera la quantité proportionnelle au temps, une fraction égale à la fraction du temps; ou à l'anomalie moyenne: ainſi l'on pourra dire à la fin du premier mois, que l'anomalie moyenne eſt 30 degrés, ou, en général, qu'elle eſt un douzieme; car alors les 30 degrés ſont la douzieme partie du ciel, l'arc ſera la douzieme partie du cercle, le temps employé à le parcourir ſera la douzieme partie du temps de la révolution entiere; & enfin l'aire *AMS* ſera la douzieme partie de l'aire entiere de

l'ellipse ; mais ordinairement c'est en degrés que nous exprimons l'anomalie moyenne. *Fig.* 70.

1236. Képler ayant trouvé que les planètes décrivoient des ellipses avec des aires proportionnelles au temps, il ne lui restoit plus que d'en conclure le vrai lieu d'une planète pour un temps donné. Lorsqu'on connoît la durée de la révolution de la planète, par exemple, celle de Mercure, qui est de 86 jours ; & qu'on demande le lieu de Mercure au bout de deux jours, c'est-à-dire, de la 43e. partie de sa révolution, on sait dès lors que l'aire du secteur *ASM* compris entre l'aphélie & le rayon vecteur *SM*, est la 43e. partie de la surface de l'ellipse ; cette portion du temps, ou cette portion de l'ellipse est proprement l'*anomalie moyenne*, que l'on peut aussi exprimer en degrés, en prenant la 43e. partie des 360 degrés ou du cercle entier : car on a vu que nous pouvons appeller indifféremment *anomalie moyenne*, une portion du temps, une portion de l'ellipse, une portion de la circonférence du cercle ; c'est toujours une fraction qui est donnée, quand on cherche le lieu d'une planète, mais c'est en degrés que nous la prendrons ci-après, pour suivre la forme usitée dans les tables astronomiques, où toutes les anomalies & toutes les équations s'expriment en degrés, minutes & secondes. On connoît toujours l'Anomalie moyenne.

1237. Lorsqu'on connoît l'anomalie moyenne, ou la surface du secteur *AMS*, il s'agit de trouver l'anomalie vraie, ou l'angle *ASM* de ce secteur. Képler sentit bien la difficulté de ce problême : *étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie*, même dans un cercle, car la difficulté est à peu-près la même que dans l'ellipse ; il se contenta d'inviter les géomètres à en chercher la solution, sans espérer qu'on la pût trouver d'une maniere directe, parce qu'elle suppose connu le rapport entre les arcs & leurs sinus, qui n'est donné que par approximation : voici comment il s'exprime au sujet de ce fameux problême, qui a toujours été appellé depuis *Problême de Képler*, parce qu'en effet il le proposa le premier, & en donna même une solution approchée. Problême de Képler.

Fig. 70. *Hæc est mea sententia : quæ quominus habere videbitur geometricæ pulchritudinis, hoc magis adhortor geometras ut mihi solvant hoc problema : Data areâ partis semicirculi, datoque puncto diametri, invenire arcum & angulum ad illud punctum : cujus anguli cruribus & quo arcu data area comprehenditur : vel aream semicirculi ex quocumque puncto diametri in datâ ratione secare. Mihi sufficit credere solvi à priori non posse propter arcus & sinus* ἐτερογένειαν (pag. 300). C'est par-là que Képler termine ses recherches ; le problême dont il désespéroit alors, est encore aujourd'hui désespéré, mais nous le résoudrons par approximation (1247).

1238. La premiere chose que nous ferons pour simplifier ces recherches, sera de renverser la question, & de supposer connue l'anomalie vraie pour en déduire l'anomalie moyenne ; cette méthode sera plus courte, souvent plus exacte, & tiendra toujours lieu dans la pratique, de la méthode directe, que nous expliquerons cependant à son tour, (1247). Cette méthode indirecte a été employée avec succès par M. l'Abbé de la Caille dans ses recherches sur le Soleil ; elle est fondée sur les deux théorêmes suivans, que nous allons démontrer d'une maniere très-simple, en supposant quelques propositions des Sections Coniques, ou de la Trigonométrie, qui seront démontrées à leur place dans les livres XXI & XXIII.

1239. Lemme. *Dans une ellipse* AMP, *à laquelle on a circonscrit un cercle* ANP ; CX *étant la ligne de l'anomalie moyenne* (1234), M *le vrai lieu de la planète*, RMN *l'ordonnée qui passe par le lieu de la planète ; le secteur circulaire* ANSA *est toujours égal au secteur circulaire* ACX *de l'anomalie moyenne.*

Démonstration. Soit T le temps entier de la révolution de la planète, & t le temps qu'elle a employé à aller de A en M, on aura par la règle des aires proportionnelles aux temps, t est à T comme le secteur AMS est à la surface de l'ellipse : de même, puisque ACX est l'anomalie moyenne, on aura t est à T comme

ACX est à la surface du cercle ; donc AMS est à ACX comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle. Mais par la propriété de l'ellipse, (liv. XXI), AMS est à ANS, comme la surface de l'ellipse est à la surface du cercle ; nous avons donc deux proportions qui ont trois termes communs, savoir AMS, la surface de l'ellipse & la surface du cercle ; le terme qui paroît différent est donc nécessairement le même ; donc ACX & ANS sont égaux entre eux. C. Q. F. D. Fig. 10.

1240. *La Racine carrée de la distance périhélie est à la racine carrée de la distance aphélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique.* Théorême premier.

Démonstration. C'est une propriété des triangles rectangles, tels que RSM, dont on trouvera la démonstration dans le XXIIIe livre, que la tangente de la moitié de l'angle RSM est égale au côté opposé RM, divisé par la somme des deux autres côtés SR, SM ; ainsi dans les triangles rectangles MSR & NCR on a cette proportion : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR : : $\frac{RM}{SR+SM} : \frac{RN}{CR+CN}$; si l'on met à la place du rapport de RM à RN celui de CD à CA qui lui est égal par la propriété de l'ellipse, & à la place de $SR+SM$ sa valeur $PR.\frac{SA}{CA}$, (voy. liv. XXI) ; & enfin PR à la place de $CR+CN$, on changera la proportion en celle-ci : tang. $\frac{1}{2}$ MSR : tang. $\frac{1}{2}$ NCR : : $\frac{CD.CA}{PR.SA} : \frac{CA}{PR}$: : $CD : SA$; & nommant a le demi-axe de l'ellipse, & e l'excentricité CS, on aura $T.\frac{1}{2}MSR$: tang. $\frac{1}{2}$ NCR : : $CD : SA$: : $\sqrt{aa-ee} : a+e$; on divisera les deux derniers termes par $\sqrt{a+e}$, & l'on aura $T.\frac{1}{2}MSR : T.\frac{1}{2}NCR$: : $\sqrt{a-e} : \sqrt{a+e}$, : : $\sqrt{PS} : \sqrt{SA}$: donc la tangente de la moitié de l'anomalie vraie ASM est à la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique ACN, comme la racine carrée de la distance périhélie PS est à celle de la distance aphélie AS. C. Q. F. D.

Fig. 70. Théorême second.

1241. *La différence entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne est égale au produit de l'excentricité par le sinus de l'anomalie excentrique.*

Démonstration. Le secteur circulaire $ANSA$, est égal au secteur de l'anomalie moyenne ACX (1239); si l'on ôte de tous deux la partie commune ACN, on aura le secteur NCX égal au triangle CNS. La surface du secteur circulaire NCX est égale au produit de CN par la moitié de l'arc NX; la surface du triangle CNS est égale au produit de CN par la moitié de la hauteur ST, qui est une perpendiculaire abaissée du foyer S sur la base NC, prolongée au-delà du centre C; ainsi les deux surfaces étant égales, & ayant un des produisans CN qui est commun à toutes deux, les autres produisans sont aussi égaux; donc l'arc NX est égal à la ligne droite ST; mais dans le triangle STC, rectangle en T l'on a $ST = CS.$ sin. TCS, par les règles de la Trigonométrie rectiligne; donc $NX = CS.$ sin. $TCS = CS.$ sin. ACN; donc la différence NX entre l'anomalie excentrique AN & l'anomalie moyenne AX, est égale au produit de l'excentricité CS par le sinus de l'anomalie excentrique ACN. C. Q. F. D.

1242. C'est en minutes & secondes qu'on a coutume d'exprimer toutes les anomalies des planètes; ainsi pour trouver la différence en secondes entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique, il faut que l'excentricité soit aussi exprimée en secondes; si l'excentricité de la planète est exprimée en parties de même espèce que la distance moyenne, on dira la distance moyenne est à l'excentricité, comme le nombre de secondes que contient le rayon d'un cercle, 206264″ 8 ou environ 57° est au nombre de secondes que l'excentricité contient. Si cette excentricité est donnée en fraction de la distance moyenne de cette même planète, comme nous la donnerons à l'art. 1278, il suffira de la multiplier par les 206264″, qui font l'arc de 57° égal au rayon, pour avoir cette excentricité en secondes; le logarithme de ce nombre de secondes est

5,3144251,

5,3144251, l'on ajoutera ce logarithme constant avec celui de l'excentricité de la planète exprimée en parties ou en fraction de la distance moyenne (1278), & l'on aura le logarithme de cette excentricité en secondes.

Pour sentir la raison de cette multiplication par 57°, ou par 206264″, supposons que l'excentricité fût la deux cent millieme partie du rayon ou de la distance moyenne, il est évident que puisqu'il y a deux cent mille secondes dans un arc égal au rayon, l'excentricité vaudroit une seconde; supposons qu'elle fût la moitié du rayon, ou $\frac{1}{2}$, elle vaudroit la moitié de 206264″, ou 103132″, c'est-à-dire, qu'en multipliant cette excentricité $\frac{1}{2}$ par 206264, on auroit le nombre de secondes que l'excentricité contient; & cela se comprendra de même de tous les autres cas; puisque l'unité est à la fraction qui exprime l'excentricité en parties du rayon, comme 206264″ sont à l'excentricité réduite en secondes, il est évident qu'en multipliant la fraction, qui contient l'excentricité en parties du rayon, par 206264″, on aura l'excentricité en secondes. Il en est de même de toutes les quantités qu'on trouve dans les calculs, exprimées en parties du rayon; lorsqu'on les veut avoir en secondes, on les multiplie par 206264″, ou l'on ajoute à leur logarithme le logarithme constant 5,3144251. C'est le contraire si l'on a des arcs en secondes, & qu'on veuille les réduire en décimales du rayon; nous avons déja fait usage de cette remarque (1133), nous le ferons encore plus souvent dans la suite, & nous en expliquerons le fondement plus en détail à la fin du livre XXIe.

Exprimer en secondes les décimales du Rayon.

1243. On verra bientôt l'application de ces deux théorêmes avec un exemple (art. 1244); mais pour plus de facilité, nous donnerons dans la table suivante pour chaque planète, les deux logarithmes constans qui servent pour les proportions contenues dans ces deux théorêmes: le premier pour l'anomalie excentrique est la moitié de la différence entre le logarithme de la distance aphélie & celui de la distance périhélie, il s'ajoute avec le logarithme de la tangente de la moitié

de l'anomalie vraie, pour avoir celui de la tangente de la moitié de l'anomalie excentrique. Le second logarithme est pour trouver l'anomalie moyenne : c'est la somme du logarithme de l'excentricité (1278) & du logarithme de 57° ; on ajoute ce logarithme constant avec celui du sinus de l'anomalie excentrique, pour avoir celui de la différence qu'il y a entre l'anomalie excentrique & l'anomalie moyenne : enfin, nous avons joint à la même table le logarithme de la moitié du petit axe, pour servir à trouver la distance (1245). Ce logarithme est la demi-somme de ceux de la distance aphélie & de la distance périhélie.

J'ai ajouté dans la table suivante les logarithmes constans pour l'orbite de la lune, en supposant sa moyenne distance égale à l'unité, & son excentricité 0,05505, qui donne pour la plus grande équation 6° 18′ 18″ 4 (1278) ; c'est ainsi que M. Halley supposoit la quantité moyenne de l'équation, comme on le verra dans le livre VIIe.

Logarithmes constans d'après les Tables de Halley.

Planetes.	1er. Logarithme constant pour l'anomalie excentrique.	2eme. Logarithme constant pour l'anomalie moyenne.	Logarithme du demi-axe conjugué, pour la distance.
Mercure,	0 0907135	4 6280602	4 5784175
Vénus,	0 0030320	3 1583660	4 8593270
Le Soleil,	0 0072975	3 5397344	4 9999385
Mars,	0 0405055	4 2828983	5 1810105
Jupiter,	0 0209575	3 9976434	5 7155795
Saturne,	0 0247830	4 0703245	5 9788450
La Lune,	0 0239391	4 0551824	9 9993409

1244. Exemple. Je suppose qu'on connoisse l'anomalie vraie de Mars 1s 0° 8′ 40″, & qu'on veuille la convertir en anomalie moyenne, le logarithme de la

distance aphélie, suivant les tables de M. Halley, est 5, 221516, le logarithme de la distance périhélie 5, 140505, comme il est aisé de le trouver par les distances moyennes (1222), & les excentricités (1278); la moitié de la différence de ces deux logarithmes est 0, 0405055, c'est le logarithme constant pour la premiere analogie. Les distances qui répondent aux deux logarithmes des tables sont 166539 & 138199, la moitié de la somme de ces deux distances est 152369, c'est le demi-axe de l'ellipse, ou la distance moyenne de Mars au soleil; la moitié de la différence entre ces mêmes distances est 14170, excentricité de Mars, suivant les tables de M. Halley, en parties dont la distance moyenne du soleil à la terre contiendroit 100000. Il faut d'abord convertir cette excentricité en fraction de la distance moyenne de Mars, prise pour unité, en disant: 152369 est à 1, comme 14170 est à 0, 0929979, dont le logarithme est 8, 9684733; pour la réduire en secondes, on fait cette proportion; 1 est à 0, 0929979, comme 57° 17′ 44″ 8, arc égal au rayon, est à un quatrieme terme qui se trouve 19182″, & dont le logarithme est 4, 2828983

Logarithme de l'excentricité, 14170 . .		4, 1513699
Otez le logarithme du demi-axe, 152369 .		5, 1828966
différence		8, 9684733
Ajoutez le logarithme de 57°		5, 3144251
Som. log. conf. pour la 2e analogie (1243)		4, 2828984
Log. constant pour la premiere analogie,		0, 0405055
L. T. de la demi-anom. vraie, 15° 4′ 20″		9, 4302374
L. T. de la demi-anom. excent. 16 28 8, 6		9, 4707429
Donc l'anomalie excent. est 32 56 17, 2		
Logar. constant pour la seconde analogie,		4, 2828983
Log. du sin. de l'an. excent. 32° 56′ 17″ 2		9, 7353855
Logarithme de 10430″, ou 2 53 50, 0		4, 0182838
Ajoutez à l'anom. excent.	32 56 17, 2	
Anomalie moyenne,	35 50 7, 2	

Si l'anomalie vraie donnée surpasse six signes ou 180°, on prendra ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, ou à 12 signes, afin d'avoir la distance à l'aphélie par le plus court chemin, dont on fera le même usage que dans l'exemple précédent; mais après avoir trouvé l'anomalie moyenne, on aura soin de reprendre aussi son supplément à 360 degrés pour avoir toujours cette anomalie moyenne comptée suivant l'ordre des signes.

C'est ainsi qu'on trouve l'anomalie moyenne, en supposant connue l'anomalie vraie; mais c'est ordinairement l'anomalie moyenne qui est donnée, & c'est l'autre que l'on cherche; dans ce cas, il faut voir à peu-près par les tables, quelle est l'équation de l'orbite qui a lieu au degré d'anomalie qui est donné; on l'applique à l'anomalie moyenne pour avoir la vraie; & cette anomalie vraie se convertit en moyenne par les règles précédentes. Si l'anomalie moyenne qui en résulte, est la même que celle qui étoit donnée, c'est une preuve que l'équation employée étoit exacte; si l'on trouve une anomalie moyenne trop grande, on diminue l'anomalie vraie supposée, & l'on a ainsi, après deux ou trois suppositions, une anomalie moyenne exactement d'accord avec celle qui étoit donnée; la différence entre celle-ci & l'anomalie vraie qui a servi à la trouver, est l'équation exacte que l'on cherchoit.

Distance au Soleil, ou rayon vecteur.

1245. Le Rayon vecteur, ou la distance d'une planète au soleil, lorsqu'on connoît l'anomalie vraie & l'anomalie excentrique, se trouve par le moyen de cette proportion : *Le sinus de l'anomalie vraie est au sinus de l'anomalie excentrique, comme la moitié du petit axe est au rayon vecteur.*

Fig. 70.

Démonstration. Ayant tiré la ligne NQ (*fig.* 70), parallèle au rayon vecteur MS, on a par les triangles semblables cette proportion $SM : QN :: RM : RN :: CD : CK$ ou CN; donc $SM : CD :: QN : CN ::$ sin. QCN : sin. CQN :: sin. RCN : sin. RSM; donc sin. CSM : sin. NCS :: $CD : SM$. *C. Q. F. D.* Cette démonstration, qui est du P. Boscovich, est beaucoup

plus ſimple que celle de M. de la Caille, (*Leçons d'Aſtronomie*, art. 213). On trouvera ci-après une autre méthode pour déterminer le rayon vecteur dans l'hypothèſe de Képler (1250).

1246. Pour faciliter l'uſage de ce théorême, nous avons mis dans la table de l'art. 1243 les logarithmes de chaque demi-axe conjugué pour les planètes principales, en ſuppoſant l'excentricité, telle qu'elle eſt dans les tables M. Halley; on ſait par la propriété ordinaire de l'ellipſe, que CD ou $\sqrt{SD^2 - CS^2} = \sqrt{CP^2 - CS^2}$, ou ce qui revient au même, $\sqrt{CP + CS}.\sqrt{CP - CS}$; c'eſt-à-dire, que CD eſt égal au produit des racines de la diſtance aphélie & de la diſtance périhélie; ainſi il eſt aiſé de trouver ce demi-axe, quand on connoît le rapport de l'excentrité & du grand axe; après quoi l'on en conclut la diſtance, par la proportion précédente. Valeur du petit axe.

Exemple. L'anomalie vraie ſuppoſée (art. 1244), eſt de 30° 8′ 40″, l'anomalie excentrique 32° 56′ 17″; on demande la diſtance de Mars au ſoleil, ou le rayon vecteur. On ajoutera enſemble le logarithme de la diſtance aphélie & le logarithme de la diſtance périhélie, on prendra la moitié de leur ſomme, & l'on aura le logarithme du demi-axe conjugué, de l'orbite de Mars;

	5, 1810105
Ajoutez le log. ſin. anom. exc. 32° 56′ 17″, 2	9, 7353855
	4, 9163960
Otez le log. ſin anom. vraie,	9, 7008609
Logarithme de la diſtance, 164261	5, 2155351

Probleme de Képler : connoiſſant l'Anomalie moyenne, trouver l'Anomalie vraie.

1247. Jusqu'ici nous avons donné les règles néceſſaires pour convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, problême facile, & auquel nous avons

coutume de réduire le problême de Képler qui en eſt l'inverſe ; néanmoins pour ſatisfaire auſſi le lecteur ſur les méthodes directes qu'on peut employer pour réſoudre le problême de Képler par approximation, nous allons rapporter, d'après M. Caſſini, (*Elem. d'aſtron. pag.* 141), la ſolution ſuivante ; & l'on en trouvera dans le XXIe livre une ſolution analytique par le moyen du calcul intégral.

Fig. 71. Dans le cercle *ANB*, (*fig.* 71), circonſcrit à l'orbite *AMB* d'une planète, on a vu que *AX* étant pris pour anomalie moyenne, la différence *NX* entre l'anomalie moyenne & l'anomalie excentrique *ACN* eſt égale à la perpendiculaire *ST* (1241) ; ſi du point *X* on tire une ligne *XY* parallele à *NCT*, ou perpendiculaire ſur *ST*, la petite ligne *SY* ſera la différence entre l'arc *NX* égal à *ST*, & le ſinus de cet arc, qui eſt égal à *YT* ; cette différence entre l'arc & le ſinus n'excède pas une demi-ſeconde, lorſque l'arc *NX* ne va pas au-delà d'un degré & demi, on peut alors la négliger entiérement, & conſidérer les lignes *NC*, *XS* comme paralleles entre elles : dans ce cas l'angle *CXS* eſt égal à l'angle *NCX* ; dans le triangle *SCX* on connoît deux côtés & l'angle compris, ſavoir, l'excentricité *SC*, le rayon du cercle, c'eſt-à-dire, *CX*, égal à la diſtance moyenne, ou au demi-axe de l'ellipſe, & l'angle compris *SCX* qui eſt le ſupplément de l'anomalie moyenne donnée *ACX* ; on trouvera donc l'angle *CXS*, égal à *NCX*, qui retranché de l'anomalie moyenne *ACX* donnera l'anomalie excentrique *ACN*, dont le ſupplément eſt *NCS* : dans le triangle *NCS* on connoît encore les deux côtés *SC*, *CN*, & l'angle compris *NCS*, on trouvera donc l'angle *NSC* ou *NSP*. Enfin, on dira ; ſuivant la propriété de l'ellipſe *PN* eſt à *PM*, ou le grand axe eſt au petit axe, comme la tangente de ce dernier angle *NSP* à la tangente de l'anomalie vraie *MSP*. *C. Q. F. T.* On pourroit auſſi à la place des deux dernieres opérations employer l'analogie de l'article 1240.

Cas où l'équation eſt petite.

1248. Si l'angle CXS ou l'arc NX qui en diffère très peu eſt aſſez grand pour que ſon ſinus égal à TY ſoit ſenſiblement moindre que l'arc, ou que NX, c'eſt-à-dire, ſi cet angle paſſe $1^{\circ}\ 30'$, on prendra la différence de l'arc au ſinus dans la table ſuivante, en décimales du rayon CA, & l'on aura SY; on cherchera auſſi le côté SX du triangle CSX, alors dans le triangle XSY rectangle en Y, on connoîtra SX & SY, en parties du rayon CA qui eſt toujours pris pour l'unité, on trouvera l'angle SXY qui retranché de SXC, donnera YXC égal à l'angle NCX, dont on avoit beſoin dans le calcul précédent pour le retrancher de l'anomalie moyenne; le reſte du calcul ſera le même. *Fig. 71.* Cas où l'équation eſt fort grande.

On voit par la néceſſité d'employer la différence entre un arc & ſon ſinus, que ce problême dépend de la quadrature du cercle, & que cette méthode s'emploîroit difficilement ſi l'excentricité étoit aſſez grande, pour que l'arc NX devînt extrêmement grand, comme cela a lieu dans les comètes; mais on y ſupplée, ſoit par la méthode indirecte de l'article 1244, ſoit par d'autres moyens dont nous parlerons dans le livre XIX. La table ſuivante peut ſe calculer par deux méthodes différentes, que nous expliquerons dans le XXIe livre. On trouvera cette table plus étendue dans M. Caſſini, p. 145.

Différence entre les Arcs de cercles & leurs ſinus en parties du rayon, & en ſecondes de degrés.

Deg.	Différence en décimales.	En ſecondes.	Deg.	Différence en décimales.	En ſecondes.
1	0 0000009	0′ 0″	7	0 0003037	1′ 3″
2	0 0000071	0 1	8	0 0004532	1 33
3	0 0000239	0 5	9	0 0006450	2 13
4	0 0000567	0 12	10	0 0008848	3 3
5	0 0001108	0 23	11	0 0011767	4 3
6	0 0001913	0 39	12	0 0015278	5 16
7	0 0003037	1 3	13	0 0019,15	6 41

Fig. 71. 1249. Exemple. Étant donnée dans l'orbe de Mercure l'excentricité 0, 20878, c'est-à-dire, de 20878 parties dont le demi-axe de l'orbe de Mercure est cent mille, on demande l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne : si du carré du grand axe on ôte le carré de l'excentricité, on aura le carré du demi petit axe CG, d'où l'on conclura $CG = 0,97796$, qu'on peut trouver encore plus facilement par la méthode de l'art. 1246. Dans le triangle XCS dont on connoît les deux côtés & l'angle compris $XCS = 120°$, on cherchera l'angle X, en disant la somme des côtés CX & CS, ou la distance aphélie, est à leur différence, qui est la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est la tangente de 20° 42′ 8″, qui retranchés de cette moitié donnent l'angle X de 9° 17′ 52″, & le côté SX de 1, 11905 ; la quantité SY est 0, 00071, suivant la table précédente ; or, $SX : SY :: R :$ sin. 2′ 11″, ainsi l'on ôtera 2′ 11″ de l'angle N ; & l'on aura CXY égal à $NCX = 9°\ 15'\ 41''$ (a), & retranchant ceci de l'anomalie moyenne, il restera pour l'angle ACN 50° 44′ 19″, dont le supplément NCS est de 129° 15′ 41″ ; ainsi dans le triangle NCS on dira la distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tang. de 25° 22′ 9″ $\frac{1}{2}$ est à la tang. d'un angle qui ajouté a 25° 22′ 9″ $\frac{1}{2}$ donne $NSP = 42°\ 36'\ 45''\frac{1}{2}$. Pour en conclure l'anomalie vraie, on dira : PN est à PM, ou le demi-grand axe 1 est à la moitié du petit axe 0, 97796, comme la tang. NSP est à la tang. de MSP, qui sera de 41° 58′ 38″ ; c'est l'anomalie vraie qui répond à 60° d'anomalie moyenne ; la différence des deux anomalies est l'équation de l'orbite ou l'équation du centre, 18° 1′ 22″ (*M. Cassini, pag. 148*).

Pour trouver le rayon vecteur. 1250. La distance de la planète au soleil est aisée à trouver en même temps que l'anomalie vraie, car dans les triangles PSN, PSM, en prenant SP,

(a) Pour plus d'exactitude, il faudroit prendre la quantité SY qui répond à 9° 15′ 41″, au lieu que nous avons pris celle qui répond à 9° 17′ 52″, mais la différence est insensible.

pour

pour rayon, les côtés SN & SM seront comme les sécantes des angles PSN, PSM, ou ce qui revient au même, en raison inverse des cosinus, donc le cosinus de l'anomalie vraie est au cosinus de l'angle PSN, comme le côté SN trouvé ci-devant est au rayon vecteur SM, qui est la distance de la planète au soleil.

1251. La méthode que je viens d'expliquer, a été donnée par M. Cassini dans les Mémoires de l'Académie pour 1719, & dans ses Elémens d'astronomie, *pag.* 141; je la trouve plus aisée à employer que la plupart des méthodes proposées jusqu'ici. On peut cependant consulter la méthode de M. Keill dans les transactions philosophiques de 1713; celle de M. de la Hire dans les mémoires de l'acad. de 1710; celle de Newton dans le premier livre de ses principes; celle de M. Herman; enfin, celle de M. T. Simpson, (Voyez *Essays on several curious and usuful subjects*, London, 1740, *pag.* 41.); celle-ci est une des plus simples pour la pratique; mais il n'y en a aucune qui soit plus commode que la méthode indirecte expliquée ci-dessus, art. 1240. *& suiv.* dont nous donnerons de nouvelles applications, art. 1301 *& suiv.*

Hypothèse Elliptique simple.

1252. Pour simplifier les opérations qu'exige la théorie exacte de Képler, (1247), on a souvent employé ce que M. Cassini appelle *Hypothèse elliptique simple*, & qui abrège considérablement le calcul. Cette hypothèse consiste à supposer que les angles au foyer supérieur de l'ellipse croissent uniformément, & soient proportionnels au temps, c'est-à-dire, que l'angle AFL, (*fig.* 74.), croisse toujours également en temps égaux, quoique les anomalies vraies comme ASL, soient fort inégales; ainsi dans l'hypothèse elliptique simple, l'angle AFL se prend pour l'anomalie moyenne; cette hypothèse est une suite naturelle de celle de Ptolomée, qui supposoit autrefois que le point d'égalité & le centre des anomalies vraies étoient, l'un au-dessus, l'autre au- *Fig.* 74.

Fig. 74. dessous du centre du cercle décrit par la planète (1068). Képler avoit reconnu combien l'on appprochoit des observations par cette hypothèse, même en prenant l'orbite pour un cercle (1214). Boulliaud reconnut qu'en employant même l'ellipse, & supposant toujours le mouvement uniforme autour d'un des foyers, on représentoit assez bien les inégalités des planètes, & que le calcul en étoit fort simple en imaginant un cercle & un épicycle à la place de l'orbite elliptique, (*Astron. Philol.* 1645, *pag.* 46).

1253. Seth Ward, professeur d'astronomie à Oxfort, publia en 1654 un examen de l'astronomie philolaïque, & en 1656, un ouvrage intitulé : *Astronomia geometrica*, in-8°, où il donne (à la *p.* 8), une autre maniere fort simple de calculer l'équation dans une orbite elliptique, en supofant le mouvement uniforme autour d'un des foyers ; en conséquence, les Anglois ont donné à l'hypothèse elliptique simple, le nom d'*Hypothèse de Ward*, c'est le nom que lui donnent Keill & M. le Monnier, (*Inst. astr. pag.* 510.), quoique Mercator & Ward lui-même aient cité Boulliaud, comme le premier auteur dans cette matiere. Cette hypothèse a été employée par Street dans ses tables Carolines, mais avec une correction que Keill attribue à Boulliaud, par erreur ; il paroît que Street la tenoit de Robert Anderson, (*Astronomia Carolina* 1710, *pag.* 40) : on peut voir sur l'exactitude de ces méthodes, Mercator *phil. transf.* 1670, n°. 57. Suivant la méthode de Seth Ward on prolonge FL, de maniere que FE soit égale au grand axe AP de l'ellipse, on aura $LE = LS$, parce que FL & LS équivalent aussi au grand axe par la propriété de l'ellipse ; ainsi le triangle LSE est isocelle, l'angle E égal à l'angle LSE, & l'angle extérieur FLS double de l'angle E.

1254. Pour trouver l'anomalie vraie, & l'équation de l'orbite ou l'angle FLS ; on considere que suivant une proportion connue dans la Trigonométrie rectiligne, la demi-somme des côtés FE & FS est à leur demi-différence, comme la tangente du demi-supplément de

l'angle LFS est à la tangente de la demi-différence des angles E & FSE : mais la demi-somme de FE & FS est égale à AS, leur demi-différence égale à PS ; la demi-somme des angles FES, FSE, est égale à la moitié de l'angle externe AFL, ou à la moitié de l'anomalie moyenne ; la demi-différence de ces angles est aussi la demi-différence de l'angle FSE & de l'angle LSE (qui est égal à LES) ; c'est donc la demi-anomalie vraie ASL ; ainsi il suffira de faire cette proportion : *la distance aphélie est à la distance périhélie, comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne est à la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.*

La distance SL de la planète au soleil se trouve aussi par une simple proportion, au moyen du triangle SLF, en disant : le sinus de l'équation du centre SLF est au double FS de l'excentricité, comme le sinus de l'anomalie moyenne LFS est au rayon vecteur SL.

1255. Nous verrons dans le VIIe livre, que M. Halley fit de cette hypothèse elliptique simple un usage commode dans ses tables de la Lune, au moyen d'une petite correction. C'est la facilité du calcul de l'anomalie vraie dans l'hypothèse elliptique simple, qui la fit admettre par M. Halley dans ses tables de la Lune, en y employant l'équation nécessaire, qu'il appelle *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri Lunæ* (1439) ; mais pour les autres planètes dont l'excentricité ne change point, M. Halley les avoit calculées rigoureusement dans l'hypothèse de Képler, & j'en ai fait de même dans mes tables. C'est le meilleur parti, sur-tout pour les planètes qui sont fort excentriques, telles que Mercure & Mars : en effet, si dans le cas proposé (art. 1249), on employoit l'hypothèse elliptique simple, on trouveroit l'équation du centre de 18° 35′ 44″, plus grande de 34′ 22″ que dans l'hypothèse de Képler, car l'anomalie vraie seroit de 41° 24′ 16″ ou le double de ce que nous avons trouvé dans la premiere proportion de l'article 1249. Défaut de l'hypothèse elliptique simple.

Dans les calculs du soleil dont la plus grande équation ne va pas à 2°, la plus grande erreur de l'hypothèse

elliptique ſimple n'eſt que de 17″, & c'eſt vers 45° de diſtance à l'apogée ou au périgée. Dans la lune, la différence peut aller à 1′ 35″; l'erreur ſe trouve en moins depuis l'apogée juſqu'à 90° d'anomalie, & depuis le périgée juſqu'à 270°, & le vrai lieu eſt plus avancé qu'il ne paroîtroit par l'hypothèſe elliptique ſimple; c'eſt le contraire dans le ſecond & le quatrieme quart d'anomalie moyenne, ou l'hypothèſe elliptique ſimple donne une trop grande anomalie. (M. Caſſini, *pag.* 147).

Nous parlerons bientôt encore de l'imperfection de cette hypothèſe, lorſqu'il s'agira de déterminer une orbite par trois obſervations, comme le fait M. Caſſini dans les deux hypothèſes (1309).

1256. Ce que nous avons expliqué juſqu'ici au ſujet de l'équation de l'orbite, ſuffit pour reconnoître trois propriétés, que nous aurons ſouvent occaſion de citer en parlant de l'équation: 1°. l'équation de l'orbite eſt nulle dans l'apſide ſupérieure, (aphélie ou apogée), puiſque vers ce point-là le lieu moyen & le lieu vrai ſont confondus; mais en partant de l'apſide, leur différence augmente rapidement, parce que la vîteſſe vraie étant la plus petite, diffère le plus de la vîteſſe moyenne: 2°. cette différence s'accumule chaque jour, tant que la vîteſſe vraie eſt moindre que la vîteſſe moyenne; lorſqu'elles ſont égales, il ſe trouve un point vers trois ſignes & quelques degrés d'anomalie moyenne où la différence qui a augmenté juſqu'alors, eſt devenue la plus grande, & où l'équation ceſſe d'augmenter, étant preſque la même pendant quelque temps, pour diminuer enſuite juſqu'à l'apſide inférieure, (ſoit périhélie, ſoit périgée) où le lieu vrai & le lieu moyen ſe retrouvent d'accord une ſeconde fois: 3°. l'équation du centre eſt ſouſtractive, ſe retranche du lieu moyen dans les ſix premiers ſignes pour avoir le lieu vrai, parce que la vîteſſe moyenne en partant de l'apſide ſupérieure, eſt plus grande que la vîteſſe vraie, ainſi le lieu moyen eſt plus avancé; il faut donc ôter de la longitude moyenne la quantité de l'équation pour avoir le lieu vrai. Le contraire

arrive après l'apſide inférieure : la vîteſſe vraie étant la plus grande, prévaut à ſon tour ſur la moyenne, & le lieu vrai ſe trouve toujours le plus avancé dans la ſeconde moitié de l'ellipſe, ou dans les ſix derniers ſignes de l'anomalie ; alors l'équation de l'orbite s'ajoute au lieu moyen pour avoir le lieu vrai, ou à l'anomalie moyenne pour avoir l'anomalie vraie. Tout cela paroîtra encore plus clair par l'inſpection & l'uſage des tables des équations du ſoleil, de la lune & des planètes, qui ſont inſérées dans cet ouvrage.

DE LA PLUS GRANDE ÉQUATION.

1257. La plus grande équation peut s'obſerver immédiatement, comme nous le dirons bientôt (1259); mais lorſque la grandeur & la figure de l'ellipſe eſt donnée, c'eſt-à-dire, lorſqu'on connoît ſa diſtance aphélie & ſa diſtance périhélie, ou ſon excentricité (1218), on peut trouver par le calcul la plus grande équation, auſſi bien que le degré d'anomalie moyenne où arrive cette plus grande équation; pour cela il ſuffit de trouver le point *M*, (*fig.* 72.), dans lequel arrive la vîteſſe moyenne. En effet, dès que la planète eſt arrivée au point où ſa vîteſſe angulaire *D F M* (c'eſt-à-dire l'angle qu'elle parcourt vue du ſoleil) eſt égale à la vîteſſe moyenne, par exemple, de 59′ 8″ par jour ſi c'eſt la terre, la longitude moyenne ceſſe d'anticiper ſur la longitude vraie; elle en diffère alors le plus qu'il eſt poſſible, parce que juſqu'à ce moment la vîteſſe réelle qui étoit plus petite, faiſoit retarder tous les jours le lieu vrai ſur le lieu moyen; mais dès que la vîteſſe vraie eſt devenue égale à la vîteſſe moyenne, elle eſt prête à la ſurpaſſer, elle va commencer à regagner ce qu'elle avoit perdu juſqu'alors, le lieu vrai ſe rapproche du lieu moyen, & l'équation de l'orbite diminue. Ainſi toute la difficulté conſiſte à trouver le point *M*, & l'anomalie *A F M* de la planète au moment où ſa vîteſſe eſt égale à la vîteſſe angulaire moyenne : pour cela, ayant pris une ligne *F M*, moyenne proportionnelle entre les deux demi-

Fig. 72.

Trouver par le calcul la plus grande équation.

Fig. 71. axes de l'orbite, on décrira du foyer *F* comme centre un cercle *MN* sur le rayon *FM*, & ce cercle aura une surface égale à celle de l'ellipse, comme nous le démontrerons en parlant des sections coniques dans le livre XXI. Supposons un corps qui décrive le cercle *MN* dans un temps égal à celui de la révolution de la planète dans son ellipse, sa vîtesse angulaire sera constamment égale à la vîtesse angulaire moyenne de la planète, par exemple, de 59′ 8″ pour le soleil; l'aire décrite dans le cercle sera toujours égale à l'aire décrite en même temps dans l'ellipse, puisque les aires totales sont égales & parcourues en temps égaux, les durées des révolutions étant les mêmes, & les aires partielles de l'ellipse proportionelles aux parties du temps : par exemple, si le soleil décrit en un jour une aire *DFR* de son ellipse égale à la 365ᵉ. partie de la surface elliptique, l'aire *EFO* décrite dans le cercle, sera aussi la 365ᵉ. partie de l'aire du cercle, (qui est égal à l'ellipse); la vîtesse vraie du soleil (ou l'angle *DFR*) sera donc égale à la vîtesse moyenne en *M*, c'est-à-dire à l'angle *DFO*; car ce sont deux secteurs égaux qui ont la même longueur *FM*, la même surface, & par conséquent le même angle; d'ailleurs les triangles égaux *MED*, *MRO* qui sont l'un en dehors du cercle, l'autre en dedans, font voir que le secteur elliptique est égal au secteur circulaire qui a le même angle en *F*; donc pour trouver le point de la vîtesse moyenne, il faut trouver l'intersection *M* de l'ellipse & du cercle qui lui est égal en surface. Ayant tiré du point *M* à l'autre foyer *B* de l'ellipse une ligne *MB*, l'on aura un triangle *BFM*, dans lequel on connoît les trois côtés, savoir *BF* qui est le double de l'excentricité, *FM* qui est la moyenne proportionnelle entre les deux demi-axes, & *BM* qui est la différence entre *FM* & le grand axe, (parce que les deux lignes *FM* & *MB* font entre elles la valeur du grand axe); ainsi résolvant le triangle *BFM* on cherchera l'angle *F* qui est l'anomalie vraie de la planète au temps de la plus grande équation.

1258. Exemple. Soit le demi-axe $CA = 38710$, &

le demi-axe conjugué = 37883, comme dans l'orbite de Mercure, $CF = 7960$ $BF = 15920$, FM sera = 38294. On résoudra le triangle BFM; la méthode la plus facile est celle-ci; de la demi-somme des trois côtés on ôte séparement chacun des trois côtés; de la somme des logarithmes des deux différences des côtés qui comprennent l'angle cherché, l'on ôte la somme des logarithmes de la demi-somme des trois côtés & de la différence du côté opposé à l'angle cherché, la moitié du reste est le logarithme de la tangente de la moitié de l'angle cherché. Dans le cas particulier du calcul de la plus grande équation, il se réduit à cette règle : de la distance aphélie, on ôte séparement la moyenne FM, & le 3e. côté BM, on a deux différences, dont on cherche les logarithmes & l'on retranche le plus petit du plus grand, de cette différence de logarithmes on ôte celle des logarithmes de la distance aphélie & de la distance périhélie, reste celui de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie.

Dans notre exemple on trouvera l'angle BFM de 81° 4′ 52″, c'est l'anomalie vraie au temps de la plus grande équation, d'où l'on peut conclure (1244) l'anomalie moyenne 104° 45′ 41″, & leur différence qui est l'équation du centre, sera 23° 40′ 49″; ce doit être la plus grande équation de l'orbe de Mercure; elle est ainsi dans mes tables, mais dans celles de M. Cassini, on la trouve beaucoup plus grande (1278).

1259. Après avoir indiqué la maniere de calculer l'équation, nous parlerons de la maniere de l'observer. Depuis l'instant où une planète part de son aphélie A, (*fig.* 72), jusqu'au temps où elle arrive au point M de sa plus grande équation, sa vîtesse est moindre que ne seroit la vîtesse moyenne, l'anomalie vraie plus petite que l'anomalie moyenne, en diffère de plus en plus; lorsque la planète ayant passé le périhélie P se trouve au point G à neuf signes d'anomalie sa distance vraie AFG à l'aphélie est également plus petite que sa distance moyenne, de la quantité de la plus *Fig.* 72.

grande équation. Si l'on a deux longitudes vraies de la planète obſervées en *G* & en *M*, elles différeront entre elles de la quantité de l'angle *GFM*, qui eſt la ſomme des deux anomalies vraies; mais la ſomme des deux anomalies moyennes ſera plus grande du double de l'équation, puiſque chaque diſtance vraie eſt plus petite que la diſtance moyenne, de la quantité de la plus grande équation; il eſt aiſé de calculer en tout temps la ſomme des deux anomalies moyennes, quoiqu'on ne connoiſſe pas le lieu de l'aphélie *A*, parce que la ſomme de deux anomalies moyennes eſt égale au mouvement moyen de la planète, dans cet intervalle de temps, & on le trouve aiſément quand on connoît la durée de la révolution (1161) ([a]); ainſi l'excès du mouvement moyen calculé, ſur le mouvement vrai obſervé donne le double de la plus grande équation, pourvu que l'on ait fait ces deux obſervations en *M* & en *G*, c'eſt-à-dire, aux temps de la vîteſſe moyenne (1257). Ce ſera le mouvement vrai qui ſera le plus conſidérable, ſi l'on prend la premiere obſervation avant le périhélie & la ſeconde après, comme dans l'exemple ſuivant (1261). Cette méthode ſe trouve dans M. Caſſini (*Elémens d'aſtron. p. 187.*) où elle n'eſt que la neuvieme, quoique la plus exacte.

1260. Pour diſcerner les temps & les obſervations convenables à cette recherche, un Obſervateur iſolé qui ne connoîtroit en aucune façon la ſituation de l'orbite de la planète, n'auroit qu'à raſſembler un grand nombre de poſitions obſervées, les comparer deux à deux, & voir combien le mouvement vrai obſervé différeroit du mouvement moyen calculé pour chaque intervalle; la plus grande de toutes les différences lui donneroit le double de la plus grande équation; car entre une moyenne diſtance & l'autre, le mouvement vrai diffère du mouvement moyen à raiſon de l'équa-

([a]) Pour plus d'exactitude, c'eſt la révolution anomaliſtique (1311) dont il faut ſe ſervir, mais dans les premieres approximations, on ſe ſert de la révolution tropique.

tion

tion soustractive dans l'une & additive dans l'autre, donc si l'on a des observations faites dans tous les points de l'orbite, on en trouvera deux où le mouvement vrai sera moindre ou plus grand que le mouvement moyen, du double de la plus grande équation. Actuellement que l'on connoît, à très-peu près, les lieux des apsides & des moyennes distances de toutes les planètes, on n'a qu'à choisir du premier coup les observations faites avant & après l'aphélie, vers le temps de la plus grande équation, comme dans l'exemple suivant.

1261. Exemple. Le 7 Octobre 1751, le vrai lieu du soleil observé par M. l'Abbé de la Caille, avant le périgée, en y faisant entrer 3 jours d'observations discutées & comparées entre elles, fut trouvé de $6^s\ 13^\circ\ 47'\ 13''\ 7$

Le 28 Mars 1752 cette long. vraie fut de $0\ \ 8\ \ 9\ \ 25\ \ 5$

La différence de ces deux longitudes, ou le mouvement vrai du soleil est donc, $5\ \ 24\ \ 22\ \ 11,\ 8$

Mais dans cet intervalle le mouvement moyen avoit dû être par le calcul $5^s\ 20^\circ\ 31'\ 43''\ 2$

Différence, double de la plus grande équat. $3\ \ 50\ \ 28\ \ 6$

Dont la moitié est l'équation de l'orbite. $1\ \ 55\ \ 14\ \ 3$

Ce seroit-là exactement la plus grande équation de l'orbite, si dans les deux observations le soleil se fût trouvé exactement dans les points de sa plus grande équation; mais ayant calculé par les tables chacune de ces deux équations, on a trouvé qu'il s'en falloit de 18″, 6, que la somme des deux équations qui avoient lieu le 7 Octobre & le 28 Mars, ne fût exactement le double de la plus grande équation; & il suffisoit pour cela d'en connoître à-peu-près la valeur, ainsi l'on ajoutera ces 18″, 6 à la quantité trouvée, & l'on aura l'équation qui résulte de ces deux observations 1° 55′ 33″, plus grande seulement de 11″½ que l'équation à laquelle M. de la Caille s'est arrêté dans ses tables. (Voy. *mémoires acad.* 1757, *pag.* 123). Celle qu'il a trouvée pour 1684 par les observations de M. de la Hire, n'en differe pas sensiblement.

Fig. 72. 1262. Comme il eſt extrêmement rare d'avoir deux obſervations qui ſoient faites préciſément dans les points *M* & *G* de la vîteſſe moyenne, on ne trouve guères dans un premier calcul la quantité exacte de la plus grande équation; mais après qu'on a trouvé à-peu-près l'équation & le lieu de l'apſide (1279), on calcule pour les deux temps d'obſervations l'équation de l'orbite, & l'on calcule auſſi la plus grande équation, (1257), on ſait alors combien l'équation donnée par les obſervations, devoit différer de la plus grande; c'eſt ainſi que dans l'exemple précédent M. de la Caille avoit trouvé 18″, 6, qu'il falloit ajouter pour avoir la véritable quantité de la plus grande équation.

1263. On peut auſſi trouver la plus grande équation ſans connoître le lieu de l'apſide, il n'y a qu'à prendre pour époque une longitude quelconque & lui comparer beaucoup d'autres longitudes pour avoir le mouvement vrai obſervé; on calculera pour chacun de ces intervalles le mouvement moyen par les tables, on aura des différences additives, & des différences ſouſtractives, la plus grande différence additive & la plus grande ſouſtractive étant ajoutées donneront le double de la plus grande équation de l'orbite, pourvu que l'on ait eu des obſervations faites ſur un aſſez grand nombre de points pour que les deux points de la plus grande équation s'y ſoient trouvés. Nous nous ſervirons de cette méthode pour trouver le lieu de l'apſide du 4e. ſatellite de Jupiter, dans le livre XVIIIe.

1264. Quand on a trouvé par obſervation la plus grande équation, & qu'on veut en conclure l'excentricité, le plus commode eſt d'employer une règle de fauſſe poſition, ou de ſuppoſer d'abord connue l'excentricité que l'on cherche, pour en conclure la plus grande équation (1257). Si elle ſe trouve trop grande on diminuera l'excentricité ſuppoſée, & l'on recommencera le calcul; cette méthode de déterminer l'excentricité par le moyen de la plus grande équation eſt ſouvent plus commode que celle dont ſe ſervit Képler

pour trouver l'excentricité de Mars (1218); ou celle dont je me servirai pour Mercure (1267). Au reste nous verrons bientôt une méthode exacte pour trouver l'excentricité sans recourir à la plus grande équation (1301).

1265. La plus grande équation du soleil, ou de l'orbite de la terre est celle que l'on peut déterminer le plus souvent & le plus facilement, elle a été fixée à 1° 55′ 31″ ½ par M. de la Caille, qui a calculé un nombre immense d'observations. Equation du soleil.

Dans les tables de Flamsteed, achevées par M. le Monnier & publiées en 1746 dans ses institutions astronomiques, on la trouve de 1° 56′ 20″; mais dans la derniere page de ce livre M. le Monnier déclare qu'il la réduit à 1° 55′ 30″, ainsi il est en cela bien d'accord avec M. de la Caille. M. Mayer par des observations faites à Gottingen en 1756, & dont il m'envoya le résultat, la trouvoit de 1° 55′ 31″, & dans ses tables publiées à Londres depuis peu, elle est de 1° 55′ 31″ 6. M. Cassini après avoir comparé plusieurs observations des années 1717 & 1718, (*Elém. d'astr.* p. 192) & prenant un milieu entre les différentes déterminations qui en résultent, trouve l'équation du soleil de 1° 55′ 34″. En voyant ainsi quatre témoignages aussi authentiques & aussi bien d'accord, on ne sauroit douter que l'équation du centre du soleil ne soit constamment d'environ 1° 55′ 32″. Enfin M. de la Caille en 1759 & 1760, depuis la publication de ses tables, continua d'observer le soleil, & m'assura qu'il trouvoit encore 1° 55′ 32″ pour la plus grande équation. Elle est très-bien connue. Elle est 1° 55′ ½.

1266. Il est vrai que les perturbations qu'éprouve le mouvement apparent du soleil par l'action des planètes, & qui peuvent aller à 50″, ont fait paroître quelquefois l'équation du centre plus ou moins grande; puisque M. le Monnier qui l'avoit trouvée en 1740 & 1742 d'environ 1° 55′ 20″ qu 25″, la trouvoit en 1746 & 1747 de 1° 56′ 0′ (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 308); mais on peut voir encore ce que M. de la Caille objectoit à

ces différences, (*Mém. acad.* 1757, p. 142) prétendant qu'il suffisoit de corriger la seule observation du 28 Sept. 1746, pour rapprocher de l'égalité tous les résultats de M. le Monnier.

Elle est constante.

Enfin les observations faites, il y a plus de 250 ans par Waltherus, prouvent que la plus grande équation du soleil ne va point en diminuant, puisqu'elles donnent 1^d 55′ 40″ suivant le calcul de M. de la Caille (*Mém. acad.* 1747, p. 144). Celle qu'il a adoptée dans ses tables est de 1° 55′ 31″ 6, ce qui donne pour l'excentricité 0, 01680207, ou pour la double excentricité 0, 003360414 (865). En y employant les observations de M. de la Hire, faites vers l'année 1684, il a trouvé l'excentricité de 0, 01685.

1267. Pour déterminer la plus grande équation des autres planètes, on n'a pas toujours deux longitudes héliocentriques observées dans les moyennes distances; on ne sauroit même les avoir pour Mercure; mais on détermine la plus grande équation, ainsi que le lieu de l'aphélie par les méthodes suivantes. La premiere méthode qui sert également pour Mercure & pour Vénus, consiste à observer la plus grande digression, lorsque la planète est dans ses apsides; on en conclud la distance aphélie ou périhélie; & comme la distance moyenne est connue (1222), on a l'excentricité. Le 25 Septembre 1753 à 22^h 47′ 50″ temps moyen. Mercure passant au méridien à Paris, sa longitude fut observée de 5^s 15° 41′ 14″; Mercure étoit alors fort près de son périhélie, & en même-temps vers sa plus grande digression; le lieu du soleil calculé par les tables étoit à 6^s 3° 27′ 25″, ensorte que l'élongation de Mercure étoit de 17° 46′ 11″, c'est l'angle sous lequel paroissoit alors la distance périhélie de Mercure vue de la terre; on pourroit trouver cette distance absolue par le moyen du triangle formé à la terre, au soleil & à Mercure, où l'on connoît la distance du soleil à la terre, l'angle au soleil qui étoit de 101° 39′, & qui pouvoit se conclure de la distance à la conjonction,

enfin l'angle à la terre ou l'élongation obſervée ; il ſeroit facile de réſoudre ce triangle pour connoître le côté oppoſé qui étoit la diſtance périhélie ; & comparant cette diſtance périhélie avec la diſtance moyenne qui eſt ſuppoſé connue par la loi de Képler (1225), on auroit l'excentricité. Cependant comme dans cette obſervation & dans celles que j'ai pu raſſembler, Mercure n'étoit pas exactement dans ſon périhélie & dans ſa plus grande digreſſion, il eſt plus commode pour ſavoir quelle eſt la diſtance *SP* qui ſatisfait à l'obſervation, de calculer l'élongation pour cet inſtant-là par des tables déja à-peu-près exactes, en employant différentes valeurs pour l'excentricité ; c'eſt ainſi que j'ai reconnu que l'excentricité 7960 eſt la plus propre à ſatisfaire à cette obſervation. La plus grande équation qui lui répond eſt 23° 40′ 49″ (1257). Cette méthode ſuppoſe que le lieu de l'aphélie ait été à-peu-près déterminé par d'autres obſervations (1311), afin que l'erreur qu'on commettroit ſur le lieu de l'aphélie n'affecte pas la diſtance au ſoleil, & l'élongation calculée, que l'on veut comparer à l'obſervation pour juger ſi l'excentricité ſuppoſée dans les tables eſt exacte ; mais dans cette recherche il n'eſt beſoin de connoître l'aphélie qu'à peu-près ; la diſtance de Mercure au ſoleil ne change alors que de $\frac{1}{46680}$ pour un degré d'erreur, ſur le lieu de l'aphélie, or cette erreur eſt beaucoup plus grande que celle que nous pouvons commettre actuellement ſur le lieu de l'aphélie de Mercure. Si l'on obſerve à une minute près la différence de la plus grande à la plus petite digreſſion, on aura auſſi la plus grande équation à une minute près ; mais nous pouvons l'obſerver à un quart de minute.

Fig. 75.

Equation de Mercure.

1268. La ſeconde méthode que j'ai employée pour connoître l'excentricité de Mercure, ſuppoſe qu'on connoiſſe déja le lieu de l'aphélie, & ſon mouvement, par la méthode que j'expliquerai bientôt (1286) : on prend deux longitudes obſervées dans les conjonctions de Mercure, on en retranche l'aphélie qui convient à

chacune pour avoir deux anomalies vraies, on les convertit en anomalies moyennes (1244), en supposant une excentricité déja à peu-près connue; si la différence des anomalies moyennes trouvées est la même que celle que l'on connoît d'avance, on est sûr que l'excentricité supposée est exacte; sinon l'on en prend une autre; & par ces diverses tentatives, on s'assure de la véritable.

Je choisis pour exemple les passages de Mercure observés fort exactement en 1743 & en 1753; voici les temps moyens de ces deux conjonctions, les longitudes de Mercure sur son orbite, les lieux de l'aphélie que je supposois connus d'avance, & les anomalies vraies que j'en avois déduites.

		Longitude.	Aphélie.	Anom. vraie.
1743.4	Nov. 22h 26′ 10″	1s 12° 36′ 21″	8s 13° 25′ 47″	4s 29° 10′ 34″
1753.5	Mai 18 29 50	7 15 48 10	8 13 36 58	11 2 11 12

La différence des anomalies moyennes pour l'intervalle donné est connue d'avance par la durée de la révolution, & par le mouvement de l'aphélie, elle doit être 5s 9° 42′ 8″; or en convertissant les deux anomalies vraies données en anomalies moyennes avec l'excentricité 7960, on trouve en effet 5s 9° 47′ 44″, & 10s 19° 29′ 52″, qui diffèrent autant qu'elles doivent différer, ce qui m'apprend que l'excentricité 7960 satisfait à ces deux observations. On sent bien que si j'avois supposé d'autres quantités pour les lieux de l'aphélie, j'aurois trouvé une autre valeur pour l'excentricité; la différence entre ces deux observations n'est qu'une donnée, & elle ne peut déterminer qu'un élément, c'est-à-dire, l'excentricité si l'aphélie est connu, ou l'aphélie si l'excentricité est donnée.

Aussi la méthode que je viens d'expliquer serviroit à trouver le lieu de l'aphélie de Mercure, si l'on vouloit supposer l'excentricité connue par les digressions aphélie & périhélie (1267); car en convertissant les anomalies vraies en moyennes, avec différentes suppositions pour le lieu de l'aphélie, on trouveroit quel est

l'aphélie qui satisfait aux deux longitudes observées.

1269. M. Cassini en employant les passages de Mercure sur le soleil observés en 1661, 1690 & 1697, avoit trouvé la plus grande équation de Mercure dans l'hypothèse de Képler, de 24° 3′; je fis ensuite une pareille recherche au moyen des passages de 1740, 1743 & 1753, je ne trouvai que 23° 27′ 51″ pour la plus grande équation, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 267): les passages de Mercure ne sont pas propres à ces recherches, à moins que l'on ne connoisse le lieu de l'aphélie; ils ne sont pas disposés sur trois points de l'orbite assez différens les uns des autres. D'ailleurs la théorie de Mercure est extrêmement difficile à établir, parce que les observations en sont rares, que son orbite est fort excentrique, & son mouvement vu de la terre trop lent: les tables Rudolphines qui dans le dernier siècle étoient les meilleures, s'écartoient encore de 14′ du lieu observé, & celles de M. de la Hire de 5′, (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 99 & 101); ce qui fait une très-grande erreur par rapport au soleil (1315).

L'extrême différence qu'on trouvera ci-près (1278) entre les résultats de M. Halley & de M. Cassini, dont l'un fait la plus grande équation de 23° 42′ 36″, & l'autre de 24° 2′ 58″, prouvoit la nécessité qu'il y avoit d'observer encore Mercure avec soin, & d'employer les plus grandes digressions pour déterminer son excentricité (1267). M. de Thury dans les Mém. de l'Acad. pour 1753, *pag.* 321, dit qu'ayant fait plusieurs observations de Mercure dans ses plus grandes digressions, il a trouvé son équation de 23° 50′ environ, mais que cependant il ne s'arrêtoit pas encore à cette détermination: pour moi, qui l'ai déterminé depuis ce temps-là avec le plus grand soin par de nouvelles observations, je l'ai trouvé de 23° 40′ 49″, plus petite de 2′ que par les tables de Halley, & de 22′ que par celles de Cassini; les deux méthodes que j'ai expliquées ci-dessus m'ont donné à peu-près le même résultat. (*Mém. de l'acad.* 1767).

1270. Les conjonctions inférieures de Vénus au Equation de Vénus.

soleil observées à Paris en 1715, 1716 & 1718, qui seront rapportées à la fin de ce livre, ont servi à M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag.* 562), pour déterminer la plus grande équation de Vénus de 49′ 8″, & par les observations de 1715, 1718 & 1719, il trouve 49′ 4″; M. Halley ne l'emploie que de 48′ 0″, la différence est assez légére & fait voir qu'il y a peu d'incertitude sur cet élément: en effet, les conjonctions inférieures de Vénus sont des observations extrêmement propres à une pareille recherche & par leur moyen l'on est venu à bout de connoître les mouvemens de Vénus avec assez de précision; n'ayant pas d'ailleurs d'observations récentes qui soient bien propres à ces recherches, je m'en suis tenu à faire l'équation de Vénus dans mes tables de 48′ 30″.

Elle est de 48 ½ minutes.

Equation de Mars.

1271. Les observations de Ptolomée calculées par M. Cassini, donnent la plus grande équation de Mars 10° 49′ pour l'année 133 avant J. C. (*Elém. d'astron. pag.* 472), & trois observations de Flamsteed faites à Greenwich le 11 Déc. 1691, le 20 Févr. 1696, & le 8 Mai 1700, donnent 10° 39′ 8″; on ne doit pas conclure de cette différence que l'équation de Mars ait diminué réellement, & que son orbite se soit rapprochée de la figure circulaire, parce que les observations de Ptolomée sont trop peu exactes pour les faire entrer en concurrence avec celles de Flamsteed.

Nouvelle détermination.

Pour déterminer cet élément par des observations plus récentes & encore plus exactes, j'avois comparé entre elles les oppositions de Mars observées en 1743, 1751 & 1753, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 222); j'ai refait ces calculs de nouveau, & j'ai trouvé pour l'excentricité 14198,6 (art. 1304). J'ai comparé ensuite les oppositions de 1745, 1747 & 1749, qui m'ont donné l'excentricité 14217,6 (art. 1307). Il y a peu de différence entre ces résultats, & cet élément me paroît assez bien déterminé; le milieu est 14218,1, c'est cette excentricité 14218,1 trouvée par la méthode que j'expliquerai bientôt (1301), qui m'a fait trouver l'équation de 10° 40′ 39″; elle surpasse de 37″ celles des tables de Halley (1278).

Elle est de 10° 40′ 39″.

1272.

1272. Les oppositions de Jupiter observées en 1723, & 1728, donnent pour la différence du mouvement vrai $5^s\ 27^\circ\ 46'\ 40''$; & comme dans l'intervalle de ces observations on a pour le moyen mouvement $5^s\ 16^\circ\ 50'\ 15''$, la différence $10^\circ\ 56'\ 25''$ est le double de la plus grande équation (1259). Aussi M. Cassini en conclut que l'équation du centre est de $5^\circ\ 28'\ 12''\frac{1}{2}$ (*Elém. d'ast. pag.* 423). Par l'opposition de 1716 comparée à celles qui ont suivi jusqu'en 1723, il trouve la plus grande équation $5^\circ\ 26'\ 42''$; par l'opposition de 1657, comparée avec celles de 1676 & 1677, $5^\circ\ 30'\ 43''$. Par les oppositions de 1719, 1721 & 1723, il trouve $5^\circ\ 31'\ 43''$; mais par les observations de Tycho faites vers l'an 1590, cette même équation n'est que de $5^\circ\ 28'\ 56''$ (*Ibid. pag.* 427). Equation de Jupiter.

1273. Les observations de Ptolomée faites vers l'an 136 avant J. C. donnent la plus grande équation, encore plus petite, & suivant le calcul de M. Cassini de $5^\circ\ 12'\ 40''$. Suivant M. Wargentin $4^\circ\ 57'\ 27''$. Ces résultats semblent diminuer proportionnellement à mesure que l'on remonte aux anciennes observations. M. Cassini en avoit déja fait la remarque (*pag.* 429), pour donner lieu d'examiner dans la suite s'il y auroit encore une semblable variation dans l'équation du centre de Jupiter. On a soupçonné qu'elle étoit variable.

M. Jeaurat ayant aussi comparé entre elles la plupart des oppositions de Jupiter, soit en les corrigeant par les équations provenues de l'attraction de Saturne, (*Connoiss. des mouv. cél.* 1763). (a), soit en négligeant cette correction, a trouvé pour l'équation du centre $5^\circ\ 12'$ au temps de Ptolomée, $5^\circ\ 16'$ au temps de Copernic, vers l'an 1525; $5^\circ\ 23'\ 15''$ par les observations de Tycho pour l'an 1590; $5^\circ\ 33'\ 20''$ pour le commencement du siècle; & $5^\circ\ 34'\ 24''$ pour 1750 (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 384). Il a suivi pour ce tra-

(a) Il faut observer que dans les tables de ces équations, on a changé les signes des tables II & III, page 128, & qu'il faut lire + au lieu de — & — au lieu de +.

vail la méthode que j'avois déja donnée, & qui se trouvera ci-après art. 1288. Enfin dans ses dernieres recherches sur cette matiere M. Jeaurat trouve l'équation de l'orbite de Jupiter pour 1762 de 5° 36′ 29″. (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 438, & 1766, *pag.* 105). Dans les tables de Jupiter qu'il a jointes à celles des Satellites, par M. Bailly, & dont les fondemens sont expliqués dans les mémoires de 1766, il n'a pas eu égard aux équations produites par l'attraction de Saturne, & il trouve la plus grande équation pour l'an 135 de 5° 12′ 5″; par les observations de 1520, 1526 & 1529, 5° 13′ 18″; par celles de 1586, 1590 & 1592, 5° 30′ 30″; par celles de 1676, 1678 & 1682, 5° 27′ 22″; par celles de 1700, 1702 & 1704, 5° 36′ 2″; par celles de 1735, 1738 & 1740, 5° 30′ 2″, & par celles de 1759, 1761 & 1765, 5° 36′ 29″ ensorte qu'il juge que cette équation a des augmentations & des diminutions successives. Quoiqu'il en soit, l'équation actuelle sensiblement plus grande que celle des anciennes observations, indique une augmentation successive dans l'équation de Jupiter. Cependant M. Euler dans sa seconde pièce sur les inégalités de Jupiter & de Saturne, qui a remporté le prix de l'académie en 1752, trouve que l'équation de Jupiter doit diminuer de 58″ ½ par siècle, résultat contraire au précédent, mais M. de la Grange, dans le tome IIIe des mémoires de l'académie de Turin, trouve au contraire une augmentation de 1′ 2″ 63 par siècle.

1274. M. Bailly ayant comparé entre elles diverses oppositions de Jupiter, également corrigées par les équations qui viennent de l'attraction de Saturne, a trouvé par un milieu entre divers résultats 5° 12′ 10″ pour l'an 136; 5° 31′ 53″ pour 1590; 5° 31′ 36″ pour 1661; & 5° 33′ 23″ pour 1762, ensorte que l'augmentation de cette équation lui paroît d'environ 1′ 47″ par siècle. Enfin M. Wargentin, dont je suivrai les recherches pour cette partie, a trouvé la plus grande équation de Jupiter de 5° 34′ 1″ pour 1760, avec un accroissement de 2′ 15″ par siècle.

Elle est de 5° 34′.

Mais il faut convenir que parmi les cinq observations de Jupiter, & qui seront rapportées à la fin de ce livre; il en reste toujours une où l'erreur de nos tables est d'un demi-degré, & deux où elle est d'environ un quart de degré; or en supposant que les observations anciennes sont susceptibles de ces erreurs, comme cela me paroît évident, on pourroit s'en tenir à faire l'équation constante, pourvu qu'on fît le mouvement séculaire de $5^s\ 6^\circ\ 19'\ 5''$. Mais si l'on fait usage de l'équation séculaire (1171), on est obligé de rendre l'excentricité plus petite dans les siècles passés, pour ne pas mettre trop de différence entre la premiere & la seconde des observations rapportées par Ptolomée.

1275. L'équation de Saturne a été calculée par M. Cassini, d'après le principe établi ci-dessus (1259), que la différence entre le mouvement vrai observé, & le mouvement moyen calculé pour l'intervalle entre deux oppositions, donne le double de la plus grande équation; quand ces deux oppositions sont exactement dans les points des moyennes distances. M. Cassini compare l'opposition de 1686 avec celle de 1701; l'intervalle de temps lui donne pour le mouvement moyen $6^s\ 9^\circ\ 36'\ 0''$; le mouvement vrai observé est de $5^s\ 26^\circ\ 34'\ 10''$, la différence est de $13^\circ\ 1'\ 50''$, dont la moitié est la plus grande équation de Saturne $6^\circ\ 30'\ 55''$. Equation de Saturne.

M. Cassini a aussi calculé un grand nombre d'oppositions depuis 1685 jusqu'en 1716, prises trois à trois, d'où il a conclu l'équation de Saturne de $6^\circ\ 31'\ 38''$, en employant l'hypothèse de Képler; cette équation qui approche beaucoup de celle qui avoit été trouvée par les oppositions de 1686 & de 1701 est à peu-près celle que M. Cassini emploie dans ses tables, (*Elémens d'astron. pag.* 371), & elle approche également de celle qui est dans les tables de Halley $6^\circ\ 32'\ 4''$.

1276. M. Euler dans la Piéce qui a remporté le prix de l'Académie en 1748, sur les inégalités de Saturne, *pag.* 109, suppose cette équation de $6^\circ\ 32'\ 10''$;

avoir une équation, dont la quantité iroit toujours en croissant, & qui feroit diminuer la plus grande équation de 1′ 50″ tous les cent ans, mais dont la quantité varie suivant la position de Jupiter par rapport à Saturne, dans l'espace de 29 ans.

M. Euler dans la seconde Piéce sur le même sujet, qui a remporté le prix de l'Académie en 1752, trouve encore que l'équation de Saturne doit diminuer de 1′ 48″ $\frac{1}{2}$ tous les cent ans : c'est une chose remarquable, dit-il, que l'excentricité de Jupiter occasionne, à raison de son attraction, une excentricité dans Saturne, qui a un rapport constant avec celle de Jupiter, & qui donne un aphélie commun ; ainsi l'excentricité qu'on observe actuellement dans le mouvement de Saturne, est le résultat de l'excentricité qui lui étoit primitivement naturelle, & de celle qui vient de l'attraction de Jupiter dans une orbite excentrique. J'ai été obligé de prévenir le lecteur sur une partie de ce que j'aurois pu ne dire que dans le livre de l'attraction, mais il convenoit de joindre le suffrage de la théorie avec celui des observations, pour faire voir que l'équation de Saturne est difficile à déterminer, à cause des effets de l'attraction de Jupiter. Cependant elle ne differe pas beaucoup de 6° 32′, quand on veut tenir compte des observations faites dans le dernier siècle.

1277. Les recherches que j'ai faites sur la théorie de Saturne, d'après l'inégalité singuliere dont j'ai parlé (1167), m'ont fait reconnoître que pour satisfaire aux observations faites depuis 30 ou 40 ans, il falloit supposer l'équation de 6° 23′ 19″, & c'est ainsi que je l'employerai dans mes tables ; cette équation ne satisferoit pas aux observations plus anciennes ; mais il est impossible de les concilier avec les plus récentes, du moins en employant la même orbite ; & j'ai préféré des tables qui fussent exactes pour le temps où nous sommes.

1278. Pour mettre sous les yeux du lecteur le résultat des articles précédens sur la plus grande équation

de chaque planète, nous rapporterons les quantités aſtronomiques ; de même que les excentricités que l'on peut conclure, (1258, 1264), & que l'on conclut effectivement de ces plus grandes équations obſervées, quoiqu'on puiſſe les déterminer auſſi ſans le ſecours de la plus grande équation (1218, 1267).

Les excentricités qui ſont dans la table ſuivante, ſuppoſent la diſtance moyenne du ſoleil à la terre 100000, ainſi que les diſtances moyennes (1222) ; mais j'y ai ajouté des décimales, quand le calcul me les a données. Mais les logarithmes des excentricités ſuppoſent la diſtance moyenne de chaque planète égale à l'unité, parce qu'on les emploie ordinairement ſous cette forme (1244). De toutes les excentricités de la derniere colonne, il n'y a que celle de Mercure & celle de Mars qui aient été calculées directement ; les autres ont été déduites de la plus grande équation obſervée, qui ſe trouvera dans la ſeconde table ; j'y ai joint par anticipation l'excentricité de la lune, telle que M. Mayer aſſure l'avoir trouvée par les obſervations. Celle qu'il faut ſuppoſer pour donner la plus grande équation, 6° 18′ 32″, telle qu'elle eſt dans les tables de Mayer, eſt 0,055083 ; mais cette excentricité ne ſuffiroit pas pour retrouver les autres nombres de la table, parce que M. Mayer y a fait entrer une autre inégalité que celle de l'ellipſe ordinaire ou de l'hypothèſe de Képler. L'excentricité 0,05505 que Flamſteed, Halley & M. Clairaut ont employé, donne pour la plus grande équation 6° 18′ 18″ 4, & non pas 6ˢ 18° 32′.

TABLE des excentricités suivant différens Auteurs.

Planetes.	Excentricité suivant Képler.	Suivant M. Halley.	Log. de l'excent. en partie de la distan. moyenne.	Excentricité suiv. nos calculs.
Mercure.	8150	7970	9,3136351	7960
Vénus.	501	504,985	7,8439409	510,2
Le Soleil.	1800	1692,40	8,2285030	1680,207
Mars.	14115,5	14170	8,9684732	14218,1
Jupiter.	25074	25078,6	8,6832183	25277,3
Saturne.	54143,5	54381,5	8,7558994	53210
La Lune.				0,0547218

TABLE des plus grandes Equations des Orbites planétaires suivant différens Auteurs.

	Boulliaud, 1645.	M. de la Hire, 1702.	M. Halley, 1719.	M. Cassini, 1740.	Suivant nos Tables.
Mercure,	24° 17′ 20″	24° 16′ 52″	23° 42′ 36″	24° 2′ 58″	23° 40′ 49″
Vénus,	0 54 36	0 50 0	0 48 0	0 49 6	0 48 30
Le Soleil,	2 2 41	1 55 42	1 56 20	1 55 51	1 55 31,6
Mars,	10 36 12	10 40 40	10 40 2	10 39 19	10 40 39
Jupiter,	5 34 0	5 36 54	5 31 36	5 31 17	5 34 1
Saturne,	6 37 10	6 30 00	6 32 4	6 31 40	6 23 19
La Lune,					6 18 32

MÉTHODES POUR TROUVER le lieu de l'Aphélie d'une Planète.

Premiere méthode.

1279. Il y a trois méthodes pour déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète, la premiere & la plus simple de toutes sert principalement pour le soleil, elle peut servir aussi quelquefois pour les planètes, en

voici l'explication. Lorſqu'on a pluſieurs obſervations d'une planète, faites en différens points de ſon orbite, il faut chercher celles qui donnent deux points diamétralement oppoſés ; & ſi les temps de ces obſervations different exactement d'une demi-révolution, on ſera sûr que ces deux obſervations ſont l'une dans l'aphélie, & l'autre dans le périhélie ; ainſi en comparant deux à deux un grand nombre d'obſervations, on ne pourra manquer de tomber ſur celles qui indiqueront la place des apſides.

Soit l'aphélie d'une planète en *A* (*fig.* 73), & le périhélie en *P*, la partie *ABP* de l'ellipſe eſt égale à la partie *ACP*, elles ſont parcourues l'une & l'autre dans l'eſpace du temps de la demi-révolution, par exemple, en 1821 $15^h\ 7'\ 40''$, s'il s'agit du ſoleil (1312). Nous prenons ici la révolution anomaliſtique, c'eſt-à-dire, par rapport à l'apogée ; mais dans une premiere approximation l'on ſe contenteroit de la révolution tropique (1161), en ſuppoſant l'aphélie immobile pendant une demi-révolution. *Fig.* 73.

Si l'on prend un autre point quelconque *D* avec le point *E* qui lui eſt oppoſé, la partie *DACE* de l'ellipſe exigera plus de temps que la partie *DBPE*, parce que la premiere renferme l'aphélie, c'eſt-à-dire, l'endroit où le mouvement de la planète eſt le plus lent, tandis qu'au contraire la partie *DBE*, dans laquelle ſe trouve le périhélie, doit être parcourue d'un mouvement plus rapide & en moins de temps.

Ainſi les points *A* & *P* des deux apſides ſont les ſeuls qui étant diamétralement oppoſés par rapport au foyer de l'ellipſe, faſſent auſſi deux intervalles de temps égaux ; on ſera donc aſſuré de connoître le lieu des apſides, ſi l'on trouve deux longitudes qui étant diamétralement oppoſées comme *A* & *P*, répondent auſſi à des temps éloignés d'une demi-révolution, c'eſt-à-dire, de la moitié du temps qu'il faut à la planète pour revenir à ſon apſide, & il ſuffira de chercher dans le nombre *Méthode de Képler.*

des obſervations d'une planète, les deux qui ſatisferont à la fois à cette double condition.

1280. Cette maniere de déterminer le lieu de l'aphélie d'une planète fut employée pour la premiere fois par Képler dans le XLIIe. Chapitre de ſon livre *de Stella Martis*, pag. 208, où il s'exprime en ces termes : *Perpende itaque quòd ſi Mars à puncto apogæi eundo dimidium temporis reſtitutorii inſumat, fine hujus temporis, omninò confectis* 180 *gradibus, ſit futurus in puncto perigæi. At ſi jam hoc ſpatium temporis auſpicetur uno die poſtquam in apogæo fuit, incipiet igitur curſum à* 26′ 13″ *ab apogæo, finietque in* 180° 38′ 2″, *itaque dimidio temporis plus dimidio itineris curret per* 11′ 49″ : *contrarium ſi die uno ante apogæum inciperet.* M. l'Abbé de la Caille avoit trouvé cette méthode, & il en fit l'objet d'un mémoire qu'il lut à l'académie le 16 Juin 1742 ; il y appliqua des obſervations qu'il fit enſuite en 1743 (*Mem. acad.* 1742, *pag.* 139). Il a enſuite employé cette méthode dans ſa théorie du ſoleil (*Mem. acad.* 1757, *pag.* 121), en annonçant qu'il l'avoit trouvée très-bien expliquée dans le livre de M. Manfredi *de Gnomone meridiano Bononienſi*, imprimé en 1736 ; enfin je l'ai retrouvée moi-même dans Képler, où l'on rencontre en général une grande partie des belles idées qui ont été miſes en œuvre par ceux qui l'ont ſuivi ; au reſte il faut convenir que cette méthode eſt ſi naturelle, & découle ſi naturellement de la loi du mouvement elliptique, qu'il n'eſt pas ſurprenant que trois perſonnes l'aient imaginée ſéparément.

1281. Pour faire uſage de cette méthode, il eſt bon de connoître la propoſition ſuivante ; elle ſert à trouver une quantité qui ajoutée au temps de l'obſervation, donne celui du paſſage par l'aphélie. *La différence des vîteſſes, aphélie & périhélie, eſt à la vîteſſe périhélie, comme la différence entre l'intervalle de temps des deux obſervations, & la demi-révolution anomaliſtique, eſt au temps que la planète emploîra pour arriver à ſon aphélie.*

Soit *a* le mouvement diurne dans l'aphélie, *p* le mouvement

mouvement diurne dans le périhélie ; c la différence trouvée par observation entre le temps par DPE, (*fig.* 73), & la demi-révolution anomalistique ; t la quantité cherchée, ou le temps qui répond à l'arc AD ; alors on aura cette proportion, $p : a :: t : \frac{ta}{p}$, c'est-à-dire, la vîtesse périhélie est à la vîtesse aphélie, comme le temps par AD est au temps par PE. Si à la demi-révolution anomalistique de A en P, on ajoute le temps par AD, & qu'on ôte le temps par PE, on aura $t - \frac{ta}{p}$ pour la différence entre l'intervalle observé & la demi-révolution anomalistique ; différence que nous avons appellée c ; ainsi $t - \frac{ta}{p} = c$, ou $tp - ta = pc$, ce qui se réduit à cette proportion, $p - a : p :: c : t$, & par conséquent à la règle que nous voulions démontrer.

Démonstration de cette proportion.

Fig. 73.

1282. Exemple. Le lieu du soleil observé au Cap de Bonne-Espérance par M. de la Caille le 30 Juin 1751, à $0^h\ 2'\ 55''$ de temps moyen au Cap, ou le 29 à $22^h\ 58'\ 40''$ de temps moyen réduit au méridien de Paris, étoit de $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 2''\ 3$; & le 29 Décembre à $22^h\ 58'\ 45''$, il étoit de $9^s\ 8^\circ\ 30'\ 5''\ 0$, l'apogée ayant dû avancer dans cet intervalle de $32''\ 7$, il faut les ajouter à la premiere longitude pour la réduire, par rapport à l'apogée, au même état que si l'apogée étoit immobile, & l'on aura $3^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''\ 0$, dont l'opposite devoit être $9^s\ 8^\circ\ 9'\ 35''$, moins avancé de $20'\ 30''$ que le vrai lieu observé : le 30 de Juin il faut au soleil $8^h\ 36'\ 10''$ pour parcourir cette quantité ; ainsi le 30 Juin à $7^h\ 34'\ 50''$, le soleil dut être exactement à l'opposite du lieu qui fut observé ensuite le 29 Décembre ; l'intervalle de temps moyen entre ces deux momens est de 182j $15^h\ 23'\ 55''$, plus long de $16'\ 13''$ que la demi-révolution anomalistique supposée par M. de la Caille de 182j $15^h\ 7'\ 42''$, ce qui prouve que le soleil n'étoit pas encore à son apogée dans la premiere observation. Si l'on fait cette proportion qui vient d'être démontrée (1281) : l'excès de la vîtesse du soleil

périgée sur la vîtesse du soleil apogée, qui est de 4′, est à la vîtesse périgée 61′ 12″, comme 16′ 13″ de temps que nous voulons avoir de moins sur l'intervalle des deux observations, sont à 4^h 8′ 7″, on aura ce qu'il faut au soleil le 30 Juin pour avancer d'une quantité suffisante; on ajoutera cette quantité au 30 Juin 7^h 34′ 50″, & l'on aura le moment du passage du soleil par l'apogée le 30 Juin 1751 à 11^h 42′ 57″ temps moyen à Paris. La longitude du soleil pour cet instant là est aisée à conclure de l'observation, elle se trouve de 3^s 8° 39′ 56″; c'est le lieu de l'apogée du soleil qui résulte de ce calcul; c'est en même temps le vrai lieu & le lieu moyen du soleil le 30 Juin 1751, 11^h 42′ 57″, temps moyen à Paris: d'où l'on tire la longitude moyenne (1325) pour le dernier jour de l'année 1749 à midi moyen à Paris, 9^s 10° 0′ 46″ 5; celle que M. de la Caille a adoptée dans ses tables, est 9^s 10° 0′ 43″ 4; & la longitude de l'apogée 3^s 8° 38′ 4″, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 121). Il a aussi déterminé le lieu de l'apogée pour 1496 de 3^s 3° 58′ (*Mém.* 1749, *pag.* 56, 1757, *pag.* 140), & pour 1684 de 3^s 7° 28′, par les observations de M. de la Hire, ce qui peut en faire connoître le mouvement (1311).

Epoque du Soleil.

1283. Il est bon d'avertir que si les nombres précédens ne sont pas tout-à-fait les mêmes dans la règle donnée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 141. *Leçons d'astron. art.* 706), c'est parce que j'ai employé, conformément à la démonstration de l'art. 1281, la vîtesse périgée, & non pas la vîtesse apogée, dans le second terme de la proportion. Quand on emploie la vîtesse apogée, on trouve pour quatrieme terme le temps qu'il faut ajouter à l'observation faite vers le périgée; ainsi dans l'exemple précédent on dira, 4′ sont à 57′ 12″ vîtesse apogée, comme 16′ 13″ sont à 3^h 51′ 56″; ajoutant cette quantité à la date de l'observation périgée, 29 Décembre, 22^h 58′ 45″, on a le 30 Décembre 2^h 50′ 41″ pour le temps du passage au périgée, donc ôtant le 30 Juin 11^h 42′ 57″,

trouvé ci-dessus pour le temps du passage à l'apogée, il reste 182j 15^h 7′ 44″; cette quantité ne diffère pas sensiblement de la demi-révolution anomalistique établie par M. de la Caille, de 182j 15^h 7′ 42″ dans les *Mém. de l'acad.* pour 1757, *pag.* 141, & de 182j 15^h 7′ 53″ dans ses *Leçons élém. d'ast. p.* 1761, *art.* 708, *pag.* 242; mais qui selon moi est de 182j 15^h 7′ 40″ $\frac{1}{4}$ (1312). Au contraire si l'on suivoit le précepte & l'exemple qu'il donne dans les deux endroits cités, on ajouteroit 3^h 51′ 56″ à l'observation du 30 Juin, & 4^h 8′ 6″ à celle du 29 Décembre, on trouveroit pour le temps de l'apogée, 30 Juin, 11^h 26′ 56″, & pour celui du périgée, 30 Décemb. 3^h 6′ 51″ l'intervalle est de 182j 15^h 40′ 5″, trop grand de 32′ 20″, qui est le double de la différence entre 3^h 51′ 56″ & 4^h 8′ 6″. Cette différence prouve assez l'exactitude de la règle que nous venons de substituer à celle de M. de la Caille.

1284. On peut aussi trouver le lieu de l'aphélie par des observations éloignées seulement d'un quart de cercle : lorsqu'on connoît l'équation du centre, & qu'on s'en est bien assuré par des observations faites dans les moyennes distances, (art. 1257 *& suiv.*). Il suffit de prendre deux observations qui soient faites l'une vers l'aphélie, l'autre dans la moyenne distance ou à peu-près, pour connoître exactement le lieu de l'aphélie. On calculera pour chacune de ces observations l'équation du centre, en supposant le lieu de l'aphélie tel qu'on le connoît, & l'on prendra la différence de ces deux équations, si les deux observations sont du même côté de l'aphélie, ou la somme si l'une étoit avant l'aphélie & l'autre après ; la différence ou la somme de ces deux équations sera la quantité dont le vrai mouvement doit différer du mouvement moyen, qui est toujours supposé connu dans l'intervalle des deux observations ; si ce vrai mouvement calculé diffère trop du mouvement moyen, c'est-à-dire, s'il en diffère plus que le mouvement vrai observé, ce sera une preuve

Seconde méthode pour corriger l'aphélie.

qu'on a ſuppoſé le lieu de l'aphélie trop près de l'obſervation faite dans la moyenne diſtance.

Fig. 73. 1285. En effet, ſoit une planète en *B*, (*fig.* 73.) dans ſa moyenne diſtance, ayant comme Jupiter $5^{\circ}\frac{1}{2}$ d'équation du centre, & en *D* à 6° de ſon aphélie ſuppoſé connu à peu-près, ayant un demi-degré d'équation du centre, la différence de ces deux équations eſt 5°; c'eſt la quantité dont le mouvement moyen doit ſurpaſſer le mouvement vrai dans l'intervalle de deux obſervations. Je ſuppoſe que les deux points *B* & *D* ſoient éloignés l'un de l'autre exactement du quart de la révolution de Jupiter en temps, (environ trois ans), en ſorte que le moyen mouvement ſoit de 90°; le mouvement vrai doit être, ſuivant le calcul précédent, de 85°, c'eſt-à-dire, plus petit de 5° que le mouvement moyen, & je ſuppoſe que par l'obſervation on l'eût trouvé de 86°, plus petit ſeulement de 4° que le mouvement moyen, c'eſt-à-dire, moins différent du moyen mouvement que ſuivant le calcul; alors je raiſonne ainſi : en éloignant dans mon calcul l'aphélie *A* de l'obſervation faite en *B*, l'équation en *D* ſe trouvera plus grande, étant plus loin de l'aphélie; mais l'équation en *B* ne changera pas ſenſiblement, parce que vers les moyennes diſtances l'équation ne varie preſque point; ainſi la différence des deux équations en *D* & en *B*, deviendra moindre qu'elle n'étoit dans la premiere ſuppoſition, & elle approchera davantage de l'obſervation, ſuivant laquelle on vient de ſuppoſer qu'il n'y avoit que 4° de différence entre le vrai & le moyen mouvement, au lieu de 5° qu'on avoit trouvés par le calcul.

Ainſi cette différence entre le vrai & le moyen mouvement, trouvée trop grande par le calcul, m'apprend que le lieu de l'aphélie ſuppoſé dans ce calcul, étoit trop voiſin de l'obſervation *B*; on peut l'en éloigner de quelques minutes pour voir ce qui en réſultera ſur la différence du mouvement vrai au mouvement moyen, & par une ou deux tentatives trouver enfin le lieu de l'apſide *A*, qu'il faut employer pour

que la différence calculée soit d'accord avec la différence observée.

1286. La troisieme méthode pour trouver le lieu de l'aphélie d'une planète, a lieu pour Mercure ou pour Vénus, (1317) c'est celle que j'ai donnée dans les Mémoires de l'acad. pour 1766, à l'occasion de ma théorie de Mercure, & qui m'a fait trouver soit pour les temps les plus anciens, soit pour le temps où nous sommes, le lieu de l'aphélie de Mercure. Je suppose qu'on ait observé la plus grande digression de Mercure dans le temps qu'il est à ses moyennes distances du soleil, & que la distance ou le rayon vecteur change rapidement; si l'on connoît déja la moyenne distance & l'excentricité, l'on calculera facilement à quel endroit il faut placer l'aphélie, pour que le rayon sur lequel se trouve la planète, soit précisément de la longueur convenable à la digression observée. *Troisieme méthode.*

Soit C (*fig.* 73) le lieu de Mercure dans sa moyenne distance, vu de la terre T sur le rayon TC qui touche l'orbite, la plus grande digression étant alors l'angle STC, & la distance à l'aphélie ASC. Si dans les tables dont nous nous servons le lieu de l'aphélie étoit mal indiqué, ensorte que l'aphélie y fut marqué en D, en faisant avancer le point D en A la ligne SC arriveroit en SG, & l'élongation de Mercure seroit égale à l'angle STG, plus grande par conséquent que l'élongation STC; si donc on a trouvé par le calcul des tables une élongation trop petite, il n'y a qu'à rapprocher l'aphélie du lieu de l'observation en laissant toujours Mercure à la même longitude ou sur la même ligne SFG, ou si l'on veut en conservant la même longitude moyenne. Ainsi dans le cas ou l'on veut augmenter l'élongation pour accorder les tables avec l'observation, il faut augmenter le lieu de l'aphélie, si l'anomalie est moindre que 6 signes, le diminuer si Mercure est dans les six derniers signes de son anomalie. Un degré d'erreur dans le lieu de l'aphélie change de $\frac{1}{150}$ la distance au soleil; & comme la plus grande di- *Fig.* 73.

greſſion eſt alors d'environ 21°, il en réſulteroit 5′ d'erreur ſur cette digreſſion ; or certainement on peut l'obſerver à 15 ou 20 ſecondes près, donc alors on doit connoître le lieu de l'aphélie de Mercure à 3 ou 4 minutes près, par le moyen de la plus grande digreſſion obſervée entre 3 & 4 ſignes, ou entre 8 & 9 ſignes d'anomalie moyenne.

Le 24 Mai 1764 à 8^h 7′ 50″ temps moyen, j'obſervai la longitude de Mercure 2^s 26° 50′ 35″, il étoit alors dans ſa plus grande digreſſion à 22° 51′ 12″ du ſoleil, notre rayon viſuel touchoit ſon orbite à la moyenne diſtance vers 9^s 8° d'anomalie ; je calculai cette longitude par les tables de M. Halley, & je la trouvai trop grande de 1′ 14″; mais en augmentant dans ces tables la longitude de l'aphélie de 14′ ½ ſans changer la longitude de Mercure, l'anomalie devenoit plus petite auſſi bien que le rayon vecteur, l'élongation de Mercure devenoit auſſi moindre, & la longitude de Mercure ſe trouvoit d'accord avec l'obſervation (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 458) delà il s'enſuit que la longitude de l'aphélie étoit trop petite dans les tables de M. Halley, auſſi je l'ai augmentée de 10′ dans mes tables, & je l'ai ſuppoſée de 8^s 13° 49′ 30″ pour 1764. Ayant calculé de la même maniere les 16 obſervations anciennes de Mercure qui ſont rapportées dans l'almageſte de Ptolomée, j'ai reconnu qu'il y avoit pluſieurs degrés à ôter du lieu de l'aphélie que les tables donnoient pour ces temps-là ; ainſi le 25 Avril 261 ans avant J. C. à 4^h 31′, temps moyen au méridien de Paris, la longitude de Mercure fut obſervée de 1^s 23° 40′ que je réduis à 1^s 23° 8′, a cauſe de l'erreur des tables & du catalogue de Ptolomée (918); le lieu du ſoleil devoit être alors 0^s 29° 49′, & l'élongation 23° 19′; tandis que par les tables de M. Halley, elle n'auroit été que de 22° 23′, c'eſt-à-dire plus petite de 56′; en augmentant de 18″ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure, & le ſuppoſant à 7^s 4° 8′ de longitude pour ce temps-là, l'erreur n'eſt plus que de 11′, ce qui

eſt peu ſenſible pour ces anciennes obſervations (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 498).

1287. La quatrieme méthode pour déterminer l'aphélie ne ſuppoſe point qu'on ait une des plus grandes digreſſions, ni des longitudes obſervées préciſément dans les apſides ; mais elle exige trois conjonctions ou oppoſitions, c'eſt-à-dire, trois longitudes héliocentriques, & elle donne tout à la fois l'excentricité, l'aphélie, & l'époque de la longitude moyenne, ce ſera l'objet des articles ſuivans ; nous l'expliquerons d'abord pour les cas les plus ſimples, enſuite nous la donnerons d'une maniere plus générale (1293). Quatrieme méthode.

Méthode pour corriger à la fois les trois élémens d'une Orbite.

1288. Nous avons vu ſéparément, (1259, 1279, 1284), les méthodes que l'on peut ſuivre pour trouver l'équation & les apſides d'une planète ; nous allons raſſembler l'eſprit de ces méthodes & en tirer une méthode pour trouver par trois obſervations les trois élémens d'une orbite, ſavoir l'excentricité, le lieu de l'aphélie, & l'époque ou lieu moyen qui en réſulte néceſſairement (1282) ; je ſuppoſe trois obſervations réduites, comme on le verra ci-après (1296), & je ſuppoſe auſſi les élémens à peu-près connus.

Pour bien faire ſentir l'eſprit de cette méthode, je rappellerai ici trois choſes qui doivent être familières à tous ceux qui s'occupent du calcul aſtronomique ; 1°, l'équation de l'orbite eſt la plus grande qui ſoit poſſible vers trois ſignes & quelques degrés d'anomalie moyenne, alors elle eſt à ſon *maximum*, elle augmente à peine en paſſant d'un degré à l'autre (1256), en ſorte que l'anomalie moyenne peut être alors plus ou moins grande, ſans que l'équation en ſoit affectée ; ainſi dans ces cas-là on pourroit ſe tromper ſur le lieu de l'aphélie, ſans qu'il en réſultât aucune erreur ſur

l'équation, ni sur la longitude calculée : 2°, l'équation de l'orbite, ou la différence entre la longitude moyenne & la longitude vraie, est additive depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, c'est-à-dire, dans les six derniers signes d'anomalie; on l'ajoute alors à la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie; elle est soustractive depuis l'aphélie jusqu'au périhélie, c'est-à-dire, qu'on retranche l'équation de la longitude moyenne pour avoir la longitude vraie : 3°, le mouvement moyen d'une planète dans l'espace d'une ou de deux révolutions, est assez bien connu pour qu'on puisse toujours le supposer exact; car les moyens mouvemens se déterminent par la comparaison des observations les plus anciennes; ainsi il ne peut y avoir d'erreur sensible dans l'espace de quelques années; d'où il résulte que si l'erreur de l'époque, ou de la longitude moyenne d'une planète est connue pour un des points de son orbite, elle est également connue, ou plutôt elle est la même dans tous les autres points, elle ne fait que se combiner avec les erreurs qui proviennent des autres élémens, sans que cette erreur de l'époque, prise en elle-même, soit différente.

Si l'on avoit deux observations faites précisément dans les moyennes distances, c'est-à-dire, à trois signes d'anomalie moyenne, & à neuf signes, il seroit aisé de corriger par ces deux observations, 1°, l'époque des moyens mouvemens, 2°, l'équation du centre : en effet, si l'équation du centre est bonne, c'est-à-dire, si celle qu'on a employée dans le calcul des tables est exacte, il n'y aura entre le calcul & l'observation, d'autre différence que celle de l'époque des moyens mouvemens, puisque le lieu de l'aphélie n'influe point dans le calcul des longitudes prises vers les moyennes distances : s'il n'y a d'autre erreur que celle de l'époque, elle sera égale dans les deux observations, car nous supposons le moyen mouvement exactement connu; ainsi l'erreur des tables étant trouvée égale à 3ˢ & à 9ˢ d'anomalie, ce sera une preuve que l'équation du centre est

eſt exacte ; mais que l'erreur des deux calculs vient uniquement de l'époque de la longitude qui eſt mal établie.

Si l'équation du centre eſt auſſi défectueuſe, l'erreur ſera plus ou moins grande, parce qu'à 3^s d'anomalie l'équation du centre ſe retranche de la longitude moyenne pour avoir la véritable, mais à 9^s elle s'ajoute ; ainſi dans l'une des deux obſervations l'erreur de l'équation du centre augmentera celle de l'époque, & dans l'autre obſervation elle la diminuera ; par ce moyen l'erreur totale ſera plus grande dans une obſervation que dans l'autre, & cela du double de l'erreur qu'il y a eu dans l'équation du centre.

Si, par exemple, l'erreur de l'époque eſt — 5′, c'eſt-à-dire, qu'il y ait dans l'époque des tables 5 minutes de trop, & que l'erreur de la plus grande équation ſoit — 2′, alors ces deux erreurs s'accumuleront à 9^s d'anomalie moyenne, parce que l'équation y eſt additive ; en ſorte qu'on aura ajouté 2′ de trop, à raiſon de l'équation qui eſt trop grande, & 5′ de trop, à raiſon de l'époque qui eſt trop avancée ; la longitude calculée aura donc 7′ de trop. Au contraire vers 3^s d'anomalie on n'aura que 3′ de trop, c'eſt-à-dire, que l'erreur des tables ne ſera que de 3′, parce que l'équation qui eſt trop grande de 2′, étant ſouſtractive, dans ce cas-là on aura ôté 2′ de trop ; & l'époque ayant 5′ de plus qu'il ne faut, il ne reſtera que 3′ d'erreur.

La différence entre ces deux erreurs des tables 7′ & 3′ eſt donc 4′, & cette différence partagée en deux parties donnera 2′, erreur de l'équation du centre. En général, ſuppoſons que l'on ait deux longitudes vraies obſervées, vues du ſoleil, c'eſt-à-dire, en conjonction ou en oppoſition dans les moyennes diſtances d'une planète ; qu'on ait calculé pour les mêmes inſtans les deux longitudes héliocentriques par les tables aſtronomiques, & qu'on ait trouvé p & m pour les erreurs des tables.

1289. Soit α l'erreur des tables, quant à l'époque

Correction de l'époque & de l'équation.

seule des moyens mouvemens, & ϵ l'erreur de la plus grande équation seule, on aura, à 9 signes d'anomalie, $p = \alpha + \epsilon$, & à 3 signes, $m = \alpha - \epsilon$; donc $\alpha = \frac{p+m}{2}$ & $\epsilon = \frac{p-m}{2}$.

Ces formules ont lieu pour les erreurs positives comme pour les négatives indifféremment, & elles donnent la correction de l'époque & celle de l'équation du centre, par le moyen de deux observations faites dans les moyennes distances (1260), ou à très-peu-près. Si les observations sont un peu éloignées des moyennes distances, & qu'on sache à peu-près d'avance quelle est la plus grande équation, & quels sont les degrés d'anomalies auxquels est la planète dans chaque observation, il ne sera pas difficile de calculer combien il faut ajouter à l'équation observée pour avoir exactement la plus grande.

1290. Lorsqu'on a rectifié, par les deux observations dont nous venons de parler, soit l'époque, soit l'équation de l'orbite d'une planète, il s'agit de rectifier aussi le lieu de l'aphélie; pour cela on choisit une observation qui tienne le milieu entre les deux autres, & qui soit faite vers le temps où la planète étoit aphélie ou périhélie; on calcule pour le moment de l'observation la longitude par les tables, en rectifiant l'époque & l'équation du centre, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'article précédent, & si l'on trouve quelque différence entre l'observation & le calcul, on est sûr qu'elle dépend toute entiere du lieu de l'aphélie qui sera mal supposé dans les tables.

En effet, puisque par l'hypothèse nous avons trouvé la véritable époque & la véritable équation, il ne doit y avoir d'erreur que dans le degré d'anomalie moyenne, auquel chaque équation appartient; si l'on fait l'anomalie trop grande aux environs de l'aphélie, on aura une trop grande équation dans ce point-là, quoique la quantité totale de la plus grande équation ait été exactement déterminée.

En jettant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite d'une planète, on voit combien elle varie pour chaque degré d'anomalie moyenne aux environs de l'aphélie ; par exemple, il y a 1′ 59″ pour le soleil, car si l'anomalie moyenne augmente d'un degré en partant de l'aphélie, l'équation augmente de 1′ 59″; si l'on trouvoit donc l'erreur des tables vers ce point-là de 1′ 59″ en plus, on jugeroit que l'aphélie est trop avancé d'un degré ; car, puisque la longitude des tables est trop grande, c'est une preuve qu'on n'a pas retranché assez pour l'équation, si elle est soustractive ou que la planète ait déja passé son aphélie ; c'est-à-dire, que l'anomalie moyenne étoit trop petite, & par conséquent le lieu de l'aphélie trop avancé. Si la planète étoit en-deçà de son aphélie, & qu'elle ne l'eût pas atteint, ce seroit la même chose, avec cette différence que l'erreur en plus prouveroit une équation additive trop grande, & une anomalie moyenne trop petite, d'où résulteroit également un lieu de l'aphélie trop avancé.

1291. Soit γ l'erreur sur le lieu de l'aphélie qu'on se propose de déterminer, & n l'erreur des tables dans l'observation faite aux environs de l'aphélie, en supposant, comme je l'ai dit, qu'on ait déja corrigé dans ces tables l'équation du centre & l'époque ; soit e la plus grande équation du centre, je dis que l'erreur n, divisée par e, & multipliée par 57°, qui est l'arc égal au rayon, (dont le logarithme est 5,31442) donnera la correction de l'aphélie, qu'il faudra ajouter à celui des tables, si la longitude calculée est plus petite que la longitude observée, c'est-à-dire, si n est une quantité positive. Correction de l'aphélie.

En effet, l'équation du centre pour un degré quelconque d'anomalie est à peu-près e sin. anom., comme on le verra (liv. XXIe. 3343) ; si cette anomalie est une petite quantité de minutes ou de secondes, exprimée par γ, les petits arcs étant sensiblement égaux à leurs sinus, lorsqu'on les réduit en décimales du rayon en les divisant par l'arc égal au rayon (1242), on

aura $\frac{e\gamma}{57^\circ}$ pour l'équation du centre; on divise par 57°; parce que γ doit être exprimé en décimales du rayon, & pour cet effet il faut le diviser par le rayon lui-même qui soit homogène avec γ, alors $\frac{\gamma}{57^\circ}$ devient une fraction du rayon.

Puisque l'équation du centre est $\frac{e\gamma}{57^\circ}$, cette quantité sera égale à l'erreur n des tables, donc $\gamma = \frac{n\,57^\circ}{e}$. Je suppose ici que la planète soit précisément dans son aphélie, & que l'erreur de l'aphélie γ soit l'anomalie elle-même toute entière, mais il est aisé d'appercevoir que ce seroit la même chose quand il y auroit 2 ou 3° de différence, c'est-à-dire, quoique la planète fût éloignée de quelques degrés de son apside. Par exemple pour le soleil, si au lieu de le supposer exactement dans l'apogée, je suppose l'apogée trop peu avancé, d'un degré, l'anomalie du soleil sera d'un degré, au lieu d'être zéro, l'équation qui devoit être nulle sera 1′ 59″ soustractive, & la longitude trop petite d'autant, l'erreur des tables sera donc + 1′ 59″. Je suppose ensuite que l'anomalie fût réellement de deux degrés, & que par la même erreur on la supposât de trois degrés, en faisant la longitude de l'apogée trop petite d'un degré; il y auroit toujours 1′ 59″ d'erreur dans l'équation & dans la longitude calculée, parce que l'équation augmente de 1′ 59″ pour chaque degré d'anomalie aux environs de l'apogée, soit dans le troisieme degré, soit dans le premier; c'est-à-dire, quoique la planète soit éloignée de son aphélie de plusieurs degrés.

Variation de l'équation près de l'aphélie.

1292. On peut se passer aisément des formules précédentes, en examinant dans la table de l'équation du centre, ainsi que nous l'avons dit, quelle est la quantité dont l'équation varie pour un degré d'anomalie moyenne, on trouve 19′ 38″ pour Mercure, 50″ pour Vénus; 10′ 0″ pour Mars, 5′ 30″ pour Jupiter, 6′ 16″ pour Saturne; d'où il est aisé de conclure, par une simple proportion, quel est le changement qu'on

doit faire au lieu de l'aphélie, quand on connoît l'erreur des tables qu'il s'agit de corriger, & qui dépend toute entière de cette longitude de l'aphélie.

La méthode que je viens d'expliquer pour déterminer les élémens de l'orbite d'une planète, suppose que les trois observations soient faites exactement dans les trois points indiqués, & elle suppose en même temps que les corrections soient très-petites; cependant en supposant même les observations faites à plusieurs degrés de l'aphélie & des moyennes distances, on parviendroit encore, avec quelques essais ou quelques tâtonnemens, à trouver les mêmes corrections.

Mais pour procéder d'une maniere plus lumineuse & plus exacte, je vais expliquer la méthode rigoureuse, quoiqu'indirecte, par laquelle on peut trouver les trois élémens d'une orbite par trois observations, avec toute la précision qu'on voudra, sans être assujetti à des observations faites précisément dans les apsides, ou dans les moyennes distances.

Méthode plus générale pour déterminer exactement par trois observations l'orbite d'une Planète.

1293. Dans les méthodes précédentes, (1257, 1279, 1287), nous avons considéré séparément la plus grande équation & le lieu de l'aphélie, ou nous avons supposé des observations faites exactement dans les points de la plus grande équation, & dans ceux des apsides; nous allons donner une méthode qui est plus générale, par laquelle on peut avec trois longitudes héliocentriques quelconques, déterminer rigoureusement le lieu de l'aphélie, l'excentricité & l'époque de la longitude moyenne; ce sont les trois principaux élémens de l'orbite d'une planète. Les méthodes les plus ingénieuses, les plus géométriques, les plus directes qu'on ait données jusqu'ici, ne sont point comparables pour la facilité à la méthode indirecte, ou de fausse position,

Elémens qu'il faut déterminer.

que nous allons expliquer; ainsi elle nous tiendra lieu de toutes les autres.

Méthodes directes de plusieurs Auteurs.

1294. On peut voir, si l'on en est curieux, plusieurs méthodes pour parvenir au même but, dans les mémoires de 1723, & dans les élémens d'astronomie de M. Cassini, *pag.* 172; la huitieme ressemble un peu à celle que nous allons expliquer; mais elle est encore un peu plus indirecte à cause de l'usage qu'on y fait de l'hypothèse elliptique simple dans quelques-unes des approximations. M. Halley avoit résolu le problême par une construction géométrique, où il employoit l'intersection de deux hyperboles, (*Philos. trans.* n°. 128, 1676). M. de la Hire publia une solution de ce problême dans le Journal des Sav. (*Mars* 1677), par une méthode très-belle dont il donna ensuite la démonstration dans son grand traité des sections coniques : liv. VIIIe. pr. 25. M. Newton en donna depuis une autre solution, au moins aussi belle que la précédente, (*Phil. nat. princ. math. lib. I. prop.* 21.) Voici le problême qu'il se propose : *Trajectoriam circa datum umbilicum describere quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget*, mais il cite la solution de M. de la Hire, en disant qu'elle n'est pas fort différente de la sienne; celle de Newton se trouve dans Keill, & dans les institutions astronomiques de M. le Monnier, *pag.* 545. M. Nicollic dans les mém. de 1746, *pag.* 291, donna une autre méthode fondée sur de nouvelles propriétés des sections coniques, dans laquelle il détermina l'espèce & la position d'une orbite planétaire, connoissant la position & le rapport de trois rayons vecteurs de cette orbite, & il en donna le calcul de deux manieres différentes. Toutes ces méthodes étoient utiles pour le cas où Képler s'étoit trouvé, après avoir fixé trois distances de Mars au Soleil, par une multitude d'observations & de calculs (1219), mais comme dans la pratique ordinaire de l'astronomie, on ne connoît ni la longueur des rayons vecteurs, ni la position de la directrice de l'ellipse; je vais détailler une autre

méthode employée par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1750, *pag.* 20), qui ne suppose que les trois longitudes observées & les temps des observations, elle est beaucoup plus commode & plus facile à employer, & & je vais l'expliquer encore plus clairement & avec des calculs plus exacts que je n'avois fait dans les mémoires de 1755, *pag.* 218 *& suiv.*

1295. La révolution d'une planète est la premiere chose que l'on doit connoître (1153); ainsi le moyen mouvement d'une planète est donné dans l'intervalle de deux observations; le mouvement de l'aphélie doit être aussi connu, par des observations éloignées auxquelles on aura appliqué la méthode expliquée ci-dessus (1279 *& suiv.*) parce que trois observations ne peuvent déterminer qu'une ellipse fixe & immobile; mais dans l'intervalle des trois observations qu'on emploie, il ne peut pas y avoir une erreur considérable sur le mouvement de l'aphélie

Le moyen mouvement supposé connu.

Les trois observations doivent être, autant qu'il est possible, éloignées d'un quart de révolution, c'est-à-dire, deux aux environs des apsides, & l'autre aux environs de la moyenne distance, ou deux aux moyennes distances, & une à l'apside; car quoique la méthode ne soit pas assujettie à cette condition, le résultat n'en sera que plus concluant & plus sûr, si l'on a cette attention. Elles peuvent aussi être éloignées de plusieurs révolutions entieres pourvu que l'on connoisse assez bien le mouvement de la planète, & celui de son aphélie pendant tout l'intervalle qu'on aura pris.

On suppose dans la méthode suivante, que l'on connoît déja, du moins grossiérement, l'excentricité & le lieu de l'aphélie; on ne peut manquer de les connoître quand il s'agit des planètes; d'ailleurs on a vu ci-devant (1259, 1279), la maniere de les trouver, en supposant même qu'on n'en eût aucune idée.

1296. Les trois longitudes héliocentriques dont on fait choix pour déterminer les élémens d'une orbite planétaire, doivent être réduites au plan de l'orbite, &non

Conditions nécessaires dans les observations.

à l'écliptique (1134); je fais cette remarque afin d'avertir que les aſtronomes publient toujours les réſultats des longitudes obſervées réduites à l'écliptique; ainſi il eſt néceſſaire, dans le cas dont nous parlons, d'y faire une réduction pour les rapporter au plan de l'orbite, c'eſt-à-dire, d'y ajouter la réduction ordinaire (1130), ſi c'eſt dans le premier ou le troiſieme quart de l'argument de latitude, & de la ſouſtraire, ſi c'eſt dans le ſecond & le quatrieme quart; au contraire de ce qui a lieu dans les calculs faits avec les tables, où il s'agit de réduire à l'écliptique une longitude qui eſt d'abord comptée ſur l'orbite.

Ces trois longitudes qui ſont deſtinées à déterminer les trois principaux élémens de l'orbite, doivent encore être corrigées des inégalités que peuvent y cauſer les attractions planétaires, ſuivant les calculs de M. Clairaut, *Mém. acad.* 1754, ou ceux que j'ai donnés dans les mémoires de 1758, 1760, 1761, & dont on trouvera la méthode dans le XXIIe livre, de l'attraction; ſi par ces méthodes on a trouvé que Jupiter avance de 30″ le lieu de Mars par ſon action ſur cette planète, il faudra ôter 30″ du lieu de Mars obſervé, pour avoir la longitude, dégagée de cette inégalité étrangere à l'orbite, & n'avoir plus à calculer que les inégalités de l'orbite elliptique dont il s'agit de trouver les élémens.

Ces obſervations doivent être auſſi dégagées de l'aberration, qui augmente toujours les longitudes des planètes dans leurs oppoſitions, (Liv. XVII. 2850).

Quant à la ſituation des trois points où l'on choiſit ces obſervations, la plus convenable eſt d'avoir trois points de l'orbite, qui ſoient à peu-près à 90° l'un de l'autre, & placés de maniere qu'il y ait deux des obſervations faites vers les apſides, ou deux vers les moyennes diſtances; ſi l'on a deux obſervations vers les apſides, le lieu de l'apſide ſera mieux déterminé; ſi l'on a deux obſervations vers les moyennes diſtances, & ſeulement une vers l'apſide, l'équation de l'orbite ſe trouvera avec plus de préciſion, parce qu'elle

ſera

ſera déterminée par le double de ſa valeur ; mais le lieu de l'apſide ſera déterminé dans ce cas-là avec une préciſion moindre de moitié que dans le premier cas.

Je diviſerai le procédé de cette méthode en trois parties ; dans la premiere je ſuppoſerai qu'on connoît l'excentricité, & je chercherai le lieu de l'aphélie ; dans la ſeconde je changerai d'excentricité pour avoir un autre lieu de l'aphélie ; dans la troiſieme je chercherai par le moyen d'une troiſieme obſervation, quelle eſt de ces deux excentricités celle qu'on doit préférer.

1297. Dès que l'on connoît la durée de la révolution d'une planète, on ſait exactement combien il y a de temps, ou combien il y a de degrés d'anomalie moyenne entre deux inſtans quelconques où cette planète aura été obſervée : par exemple, ſi ces deux inſtans ſont éloignés du quart de la durée de cette révolution anomaliſtique, il y aura toujours un quart de cercle pour la différence des anomalies moyennes, car il ne faut pas perdre de vue que les temps & les anomalies moyennes marchent toujours uniformément, & ſont toujours proportionnels, comme nous l'avons dit pluſieurs fois (1234). Pour trouver le lieu de l'aphélie.

Si l'on eſt toujours en état de connoître la différence ou la ſomme de deux anomalies moyennes, il n'en eſt pas ainſi de ces anomalies elles-mêmes ; car pour connoître chacune de ces anomalies moyennes, il faudroit connoître & le lieu de l'aphélie, qui eſt le point d'où elles ſe comptent, & l'excentricité qui ſert à trouver l'anomalie moyenne, par le moyen de l'anomalie vraie, ſuppoſée à peu-près connue (1244). Cette conſidération fournit le moyen de reconnoître par deux obſervations ſi le lieu de l'aphélie d'une planète qui ſe trouve dans les tables, eſt exact, en ſuppoſant qu'on connoiſſe l'excentricité ; car ayant les deux longitudes obſervées on aura (en retranchant le lieu de l'aphélie), deux anomalies vraies ſuppoſées, on cherchera l'anomalie moyenne qui répond à chacune par le moyen des deux proportions connues (1240 & 1241), & de l'excentricité ſuppoſée connue ; ſi ces deux anomalies moyennes diffèrent entre Premiere hypothèſe de l'excentricité.

elles autant que l'exige l'intervalle des deux obſervations, elles ſont exactes l'une & l'autre, & par conſéquent le lieu de l'aphélie eſt bien connu & a été bien ſuppoſé.

Si des deux obſervations que l'on a choiſies, l'une eſt avant l'aphélie & l'autre après, ce ſera la ſomme des deux diſtances à l'aphélie que l'on prendra pour la comparer avec le moyen mouvement calculé pour l'intervalle des deux obſervations; mais pour plus d'exactitude, on doit faire enſorte qu'une de ces obſervations ſoit près de l'apſide, & que l'autre en ſoit éloignée, ou de 90° (1284), ou de 180° (1279).

Diverſes ſuppoſitions de l'aphélie.

1298. Si les deux anomalies vraies ſuppoſées ne donnent pas la différence d'anomalie moyenne, telle qu'elle doit être, c'eſt-à-dire, ſi elles ne donnent pas le même intervalle de temps que l'on a par obſervation, c'eſt une preuve qu'elles ne ſont pas bonnes; c'eſt par cette épreuve qu'on appercevra ſi le lieu de l'aphélie qu'on a ſuppoſé ou d'après les tables, ou par une ſimple conjecture, n'eſt pas exact; dans ce cas on y ſuppoſera quelques minutes de plus ou de moins, on recommencera le même calcul; & l'on verra ainſi par l'événement de différentes ſuppoſitions, quelle eſt celle qu'il faut adopter, & quel eſt le lieu de l'aphélie qu'il faut prendre, pour repréſenter l'intervalle de ces deux premieres obſervations (avec l'excentricité qui eſt connue, ou employée dans cette premiere hypothèſe). Ainſi j'appelle *premiere hypothèſe* une excentricité ſuppoſée, avec le lieu de l'aphélie qui lui correſpond en ſatisfaiſant à l'intervalle des deux obſervations; pour parvenir à cette hypothèſe on eſt obligé de paſſer par diverſes ſuppoſitions pour le lieu de l'aphélie.

1299. Pour que le lieu de l'aphélie trouvé dans la premiere hypothèſe fût bien déterminé, il faudroit néceſſairement que l'excentricité fût exacte; car pour réduire l'anomalie vraie en anomalie moyenne, on fait néceſſairement uſage de l'excentricité, comme on le voit dans les deux analogies ci-deſſus, (1240 & 1241).

Si l'on ſuppoſe une autre excentricité, & qu'on refaſſe les mêmes calculs, on aura pour ſeconde hypothèſe un réſultat différent pour le lieu de l'aphélie, en employant toujours les deux mêmes obſervations; on pourroit faire ainſi une table de différentes excentricités, & à côté de chacune on écriroit le lieu de l'aphélie qui répond à chaque hypothèſe d'excentricité. Seconde hypothèſe d'excentricité.

1300. Pour ſavoir maintenant quelle eſt la véritable excentricité que l'on doit choiſir, ou celle de toutes nos hypothèſes qui eſt la bonne, nous emploîrons une troiſieme obſervation que je ſuppoſe éloignée d'environ 90° d'une des précédentes, ſur laquelle on fera la remarque ſuivante. L'intervalle de temps entre l'obſervation aphélie, & l'obſervation faite 90° avant ou aprés l'aphélie, étant connu, on aura la différence entre les deux anomalies moyennes; mais ſi l'on ſe trompoit ſur l'excentricité, ou ce qui revient au même, ſur l'équation du centre, toute l'erreur tomberoit ſur l'anomalie qui eſt à 90° de l'aphélie, parce que l'équation y eſt fort grande, & cette erreur ſeroit nulle dans l'aphélie où l'équation du centre eſt nulle, ou du moins fort petite; ainſi la différence entre l'anomalie moyenne vers l'aphélie & l'anomalie moyenne à 90° de-là, ſeroit affectée de toute l'erreur commiſe ſur l'équation de l'orbite; c'eſt ainſi que l'équation ſe trouvera déterminée. Pour trouver l'excentricité.

On prendra donc l'excentricité de la premiere hypothèſe avec le lieu de l'aphélie connu, ainſi qu'il a été déterminé pour cette premiere excentricité (1298), on formera deux anomalies vraies avec les deux longitudes vraies, dont une ſoit fort éloignée de l'autre, on les convertira en anomalies moyennes, & ſi la différence de ces deux anomalies moyennes n'eſt pas exactement ce que l'on ſait qu'elle doit être, on choiſira une autre excentricité avec la poſition de l'aphélie qui lui répond, c'eſt-à-dire, la ſeconde hypothèſe, on verra laquelle des deux ſatisfait mieux au ſecond intervalle, & par une ſimple règle de trois on trouvera quelle eſt celle qui ſatisfait à l'intervalle d'anomalie moyenne qui

eſt entre ces deux obſervations; & quelle eſt la longitude de l'aphélie correſpondante; cette excentricité avec le lieu de l'aphélie qui lui répond, ſeront conformes aux trois obſervations, & le problême ſera réſolu.

1301. Exemple. Je ſuppoſe trois oppoſitions de Mars obſervées en 1743, 1751 & 1753, c'eſt-à-dire, les longitudes de Mars ſur ſon orbite, vues du ſoleil pour les temps moyens, comme il ſuit, en appliquant aux trois longitudes ſur l'écliptique les réductions $-17''$, $-50''$, $+13''$. On peut voir le détail de ces obſervations dans les mémoires de 1755.

Temps moyen des Obſerv.	Longit. dans l'orbite.	Différ. d'anom. moy.
1743. 15 Fév. $19^h\ 17'\ 40''$	$4^s\ 27^\circ\ 16'\ 15''$	$6^s\ 21^\circ\ 30'\ 45''$
1751. 14 Sept. 8 28 0	11 21 34 10	1 26 6 50
1753. 16 Nov. 10 28 33	1 24 47 37	

En prenant les lieux de l'aphélie dans les tables de M. Halley, $5^s\ 1^\circ\ 23'\ 37''$, $5^s\ 1^\circ\ 33'\ 37''$, $5^s\ 1^\circ\ 36'\ 9''$, je forme trois anomalies vraies $11^s\ 25^\circ\ 52'\ 38''$, $6^s\ 20^\circ\ 0'\ 33''$, $8^s\ 23^\circ\ 11'\ 28''$, je convertis les deux premières anomalies vraies en anomalies moyennes, après avoir pris ce qui s'en manque pour aller à 360 degrés, & cela en faiſant les deux hypothèſes ſuivantes pour l'excentricité, c'eſt-à-dire, en la ſuppoſant d'abord de 1417 parties, enſuite de 1427, la diſtance moyenne du ſoleil étant toujours de 10000.

Premiere Hypothése : je prends l'excentricité telle qu'elle eſt dans les tables de M. Halley 1417; la moyenne diſtance étant de 15236, 9 ſuivant le même auteur; je la réduis à ce qu'elle ſeroit ſi la moyenne diſtance de Mars étoit l'unité, & ſuppoſant auſſi l'aphélie tel qu'il eſt dans ces tables, les deux anomalies vraies donnent, au moyen des analogies rapportées ci-deſſus, (1240, 1241), deux anomalies moyennes qui ſont $11^s\ 25^\circ\ 3'\ 15''\ 1$ & $6^s\ 16^\circ\ 35'\ 21''$, 6 dont la différence $6^s\ 21^\circ\ 32'\ 6''\ 5$ eſt trop grande de $1'$

21″ 5 ; car suivant les tables, & à raison du temps écoulé entre les deux observations, la différence doit être de 6ˢ 21° 30′ 45″, en prenant dans les tables de M. Halley, soit le moyen mouvement de Mars, soit celui de son aphélie.

En continuant la même hypothèse d'excentricité je fais une autre supposition pour l'aphélie ; j'augmente de dix minutes les lieux de l'aphélie employés dans la premiere supposition, je forme par conséquent deux anomalies vraies moindres de 10′ que les précédentes, je les convertis en anomalies moyennes ; je trouve 11ˢ 24° 51′ 15″ 5, & 6ˢ 16° 27′ 0″ 9, dont la différence est de 6ˢ 21° 35′ 45″, 4, c'est-à-dire, trop grande de 5′ 0″. Ainsi pour avoir changé l'aphélie de 10′ l'erreur qui étoit de 1′ 21″ 5, est devenue 5′ 0″ ; c'est-à-dire, a augmenté de 3′ 38″ 5 ; on dira 3′ 38″ 5 : 10′ 0″ :: 1′ 21″ 5 : 3′ 43″ 8, ainsi pour rendre nulle cette erreur de 1′ 21″ 5 ; il auroit fallu diminuer de 3′ 43″ 8 les lieux de l'aphélie, au lieu de les augmenter de 10′ : par ce calcul nous sommes donc assurés que l'excentricité tirée des tables de M. Halley, & employée dans cette première hypothèse, avec un lieu de l'aphélie diminué de 3′ 43″ 8 ou en nombres ronds 3′ 44″, satisfera à l'intervalle des deux observations. Il faut actuellement faire la même opération avec une autre excentricité, c'est-à-dire, former une seconde hypothèse.

Seconde Hypothése : je prends une excentricité 1427 plus grande que celle de M. Halley de 10 parties, en conservant le grand axe toujours le même, ensorte que les log. constans soient 0, 0407930 & 4,2859524, & supposant l'aphélie tel qu'il est dans ses tables, je convertis les deux anomalies vraies en anomalies moyennes, (1240, 1241), ce qui donne 11ˢ 25° 2′ 52″ 7, & 6ˢ 16° 34′ 0″ 5, dont la différence 6ˢ 21° 31′ 7″ 8, est plus grande de 22″ 8 que celle qui doit avoir lieu suivant les tables, qui sont exactes à cet égard, puisque la révolution est exactement connue. Je forme donc une

seconde supposition en augmentant le lieu de l'aphélie de 10′ ; il en résulte deux autres anomalies vraies, qui doivent aussi se convertir en anomalies moyennes ; le calcul étant fait on aura 11ˢ 24° 50′ 53″, 9 & 6ˢ 16° 25′ 40″, 1 dont la différence est plus grande de 4′ 1″ 2, qu'elle ne doit être suivant les tables.

1302. Ainsi en augmentant de 10′ le lieu de l'aphélie dans cette seconde hypothèse d'excentricité, l'erreur de l'anomalie moyenne qui étoit de 22″ 8 est venue à 4′ 1″ 2, c'est-à-dire, a augmenté de 3′ 38″ 4, donc pour la faire diminuer de 22″, 8 & la réduire à rien, on dira 3′ 38″ 4 : 10′ : : 22″ 8 : 1′ 2″ 6, & l'on aura la quantité qu'il falloit ôter de l'aphélie des tables pour concilier les deux premieres observations avec le moyen mouvement des tables, dans l'hypothèse de 1427 d'excentricité.

Il faut choisir entre les deux hypothèses.

C'est donc l'aphélie des tables de M. Halley diminué de 3′ 43″, 8 avec 1417 d'excentricité, ou diminué de 1′ 2″ 6 avec 1427, qui satisfait aux deux premieres observations ; il faut par le moyen de la troisieme observation choisir entre ces deux hypothèses d'excentricité, ou trouver une excentricité qui soit plus ou moins grande que celles-là ; en y joignant le lieu de l'aphélie corrigé à proportion, elle représentera non-seulement les deux premieres, mais encore la troisieme observation.

Derniere hypothèse.

1303. L'intervalle de temps qu'il y a entre la seconde & la troisieme observation, donne pour différence d'anomalie moyenne 56° 6′ 50″, suivant les tables de M. Halley : l'on convertira en anomalies moyennes les anomalies vraies dans la seconde & dans la troisieme observation avec 1417 d'excentricité, l'aphélie des tables étant diminué de 3′ 43″ 8, & avec 1427, l'aphélie étant diminué de 1′ 2″ 6, on aura pour la premiere hypothèse la demi-anomalie vraie 48° 22′ 24″ 1, & pour la seconde 48° 23′ 44″ 7, les anomalies moyennes sont dans la premiere 107° 13′ 43″ 4, & 163° 21′ 31″ 4 dont la différence est trop grande de 58″, & pour la seconde hypothèse 107° 20′ 42″ 3 & 163° 25′ 7″ 6

dont la différence est plus petite que 56° 6′ 50″ de 2′ 24″ 7; ainsi ajoutant ces deux différences qui sont en sens contraires, on voit que le changement de 10 parties dans l'excentricité, produit 3′ 22″ 7 de variation dans le mouvement d'anomalie moyenne pour cet intervalle de temps; on trouvera par une proportion que 58″, qui est l'erreur de la premiere hypothèse, donnera 2, 86, il faudra donc ajouter 2, 86 à l'excentricité 1417 de la premiere hypothèse (1301), & l'on aura 1419, 86 excentricité qui représentera également la troisieme observation, pourvu qu'on y joigne l'aphélie qui doit lui correspondre; or on trouvera la correction du lieu de l'aphélie en disant 3′ 22″ 7 : 2′ 41″, 2 : : 58″ 0 : 46″ 1; car puisque la premiere hypothèse d'excentricité 1417 avec le lieu de l'aphélie diminué de 3′ 43″ 8 a donné 58″ de trop, & que la seconde hypothèse d'excentricité 1427 avec le lieu de l'aphélie diminué de 1′ 2″ 6, (c'est-à-dire, de 2′ 41″, 2 moins que dans la premiere hypothèse), a donné 2′ 24″, 7 de moins qu'il ne falloit pour la différence d'anomalie moyenne, en sorte que l'erreur a changé de 3′ 22″, 7, il est clair que pour corriger les 58″ de la premiere hypothèse, il faut diminuer l'aphélie de 46″ 1 de moins que dans la premiere hypothèse ou il y avoit 3′ 43″ 8; ainsi l'on corrigera l'aphélie des tables seulement de 2′ 57″ 7.

On peut encore faire cette proportion d'une autre maniere; & chercher quel est le lieu de l'aphélie qui doit convenir à la nouvelle excentricité 1419, 86; car si avec la premiere supposition d'excentricité 1417, il faut ôter 3′ 43″, 8 de l'aphélie des tables, & si avec la seconde supposition d'excentricité 1427, il faut ôter 1′ 2″ 6, c'est-à-dire, 2′ 41″ 2 de moins; on peut dire 10 : 2′ 41″ 2 : : 2, 86 : 46″ 1 correction de l'aphélie qui répond à 2, 86 de variation dans l'excentricité; on a donc 3′ 43″ 8, moins 46″ 1 ou 2′ 57″ 7, comme par l'autre méthode, pour la correction de l'aphélie qui doit répondre à l'excentricité 1419, 86; & qui conjointe-

ment avec cette excentricité représentera le premier intervalle aussi bien que le second; ou la premiere différence d'anomalie moyenne, aussi bien que la seconde.

Démonstration de son exactitude.

1304. Je dis en premier lieu que cette excentricité 1419, 86, avec le lieu de l'aphélie diminué de 2′ 57″ 7 représentera le premier intervalle; en effet, nous avons trouvé que 1417 d'excentricité avec 3′ 43″ 8 de diminution dans l'aphélie, aussi bien que 1427 avec 1′ 2″ 6 de diminution dans l'aphélie, représentoient également l'intervalle connu, ou la différence d'anomalie moyenne des deux premieres observations; ainsi toute autre excentricité entre ces deux-là, avec une diminution de l'aphélie proportionnée, représentera également cet intervalle; donc l'excentricité 1419, 86, avec 2′ 57″ 7 de diminution dans l'aphélie, satisfera à la différence des deux premieres observations.

Je dis en second lieu qu'ils satisferont aussi au second intervalle ou à la différence d'anomalie moyenne entre la seconde & la troisieme observation : car dans la premiere hypothèse 1417, on trouve 58″ de plus pour cette différence, & dans la seconde hypothèse qui est de 1427, on trouve 2′ 20″ 7 de moins que l'on ne doit trouver; donc à proportion on trouvera exactement ce qu'il faut trouver, en employant 1419, 86. Tout cela sera plus sensible encore pour ceux qui liront ce qui précède la plume à la main en faisant les calculs dont nous avons donné la marche & les résultats. Au reste il n'est pas toujours nécessaire de faire tous les calculs avec la précision des dixiemes de secondes, comme nous venons de les indiquer, parce qu'il n'est guère possible d'être assuré des longitudes observées, même à 4 ou 5 secondes près.

On a donc enfin & l'excentricité, & la correction à faire dans le lieu de l'aphélie pour représenter exactement les deux différences d'anomalie moyenne, dans les trois observations données. Si l'on recommence en effet le calcul avec ces élémens, c'est-à-dire, avec l'excentricité 1419, 86, qui donne pour logarithmes constans

tans 00405878 & 42837740, & avec les trois longitudes de l'aphélie $5^s\ 1^\circ\ 30'\ 39'',3$; $5^s\ 1^\circ\ 30'\ 39'',3$; & $5^s\ 1^\circ\ 33'\ 11'',3$; on trouvera pour les anomalies moyennes qui répondent aux trois momens d'observations, $11^s\ 25^\circ\ 6'\ 42''$, $6^s\ 16^\circ\ 37'\ 27''$ & $8^s\ 12^\circ\ 44'\ 17''$; elles diffèrent entr'elles des mêmes quantités que les trois anomalies moyennes qu'on avoit formées, avec les élémens tirés des tables (1301), c'est-à-dire, de $6^s\ 21^\circ\ 30'\ 45''$ & de $1^s\ 26^\circ\ 6'\ 50''$. De ces trois anomalies, il y en a deux qui ne sont pas loin des apsides, & une qui approche plus des moyennes distances; il seroit également bon que des trois observations choisies, celle du milieu fût faite dans une des apsides de l'orbite de la planète, & les deux autres dans les moyennes distances 90° avant & après celle du milieu : nous n'avons pu observer aucune de ces conditions dans l'exemple précédent; car on n'a pas toujours des observations faites dans des positions choisies, & celles de Mars sont des plus rares; mais on verra du moins par cet exemple que la méthode est générale, & ne suppose que trois observations vers les points principaux de l'orbite, c'est-à-dire, près des apsides & des moyennes distances.

1305. On abrégeroit sensiblement les calculs précédens, si l'on avoit une table de l'équation de Mars pour deux excentricités différentes, à chaque degré d'anomalie; car au lieu de convertir les anomalies vraies en moyennes, on y appliqueroit l'équation prise dans la table avec la partie proportionnelle répondante à l'excentricité de l'hypothèse actuelle, & l'on auroit à la fin du calcul la plus grande équation de cette hypothèse, sans faire le calcul de l'art. 1258. C'est ainsi que je me suis fait des tables d'équation pour toutes les planètes; & chacun pourra s'en faire de pareilles, en réunissant mes tables d'équation avec celles qui sont dans M. Halley, & mettant au-dessus de chacune l'excentricité qui lui répond, suivant qu'on les voit à l'article 1278.

1306. Lorsqu'on connoît l'excentricité & le lieu

Longitude moyenne.

de l'aphélie, il ne reste plus à connoître qu'une longitude moyenne ; pour cela on prendra une des trois anomalies moyennes trouvées ci-devant (1304), par exemple $11^s\ 25^\circ\ 6'\ 42''$; on y ajoutera le lieu de l'aphélie des tables diminué de $2'\ 58''$, suivant le dernier résultat, c'est-à-dire, $5^s\ 1^\circ\ 20'\ 39''$, & l'on aura la longitude héliocentrique moyenne de Mars dans son orbite au temps de la premiere observation $4^s\ 26^\circ\ 27'\ 21''$, plus grande de $9''$ que par les tables de Halley, d'où l'on peut conclure toutes les autres longitudes moyennes, (857). Nous parlerons bientôt plus au long des époques des longitudes moyennes (1325).

1307. En employant les oppositions observées en 1745, 1747, 1749, j'ai trouvé qu'il faudroit supposer l'excentricité 14217, 61, la correction de l'aphélie $-3'\ 18''$, la correction de l'époque $+1'\ 26''$; si l'on prend un milieu entre les deux résultats, on aura la correction de l'époque $+47''$ vers l'année 1748, ce qui donne l'époque pour 1750, $0^s\ 21^\circ\ 59'\ 17''$; la correction de l'aphélie $-3'\ 8''$, l'excentricité 14218, 1 à laquelle répond la plus grande équation $10^\circ\ 42'\ 13''$ qui surpasse de $2'\ 11''$ celle des tables de M. Halley.

1308. Telle est la quatrieme méthode que j'avois annoncée (1287), pour déterminer l'aphélie d'une planète ; c'est la plus générale de toutes ; & Mercure est la seule planète à laquelle nous ne puissions pas l'appliquer, parce que nous n'avons pas des conjonctions de cette planète qui soient dans trois points de son orbite assez éloignés les uns des autres : il faut recourir pour Mercure à la méthode de l'art. 1286, ou bien supposer que l'on connoisse l'équation du centre par la méthode de l'art. 1267, & chercher l'aphélie par une méthode analogue à celle que j'ai employée pour trouver l'équation de Mercure (1268), après que je m'étois assuré du lieu de l'aphélie par une autre méthode (1286); car deux passages de Mercure ne peuvent déterminer que l'un des élémens, ou l'équation, ou le lieu de l'aphélie, & tous les passages de Mercure se réduisent à deux points de son orbite.

On trouve cependant dans les mémoires de l'académie pour 1753, un mémoire de M. Caſſini, & dans ceux de 1756, un mémoire de moi, ſur cette matiere : nous avons eſſayé l'un & l'autre de déterminer les élémens de Mercure par le moyen de ſes paſſages ſur le ſoleil ; nous manquions alors d'autres obſervations ; mais j'y ai ſupplée depuis ce temps-là comme on le peut voir dans les mémoires de 1766.

1309. J'ai employé dans tous les calculs précédens l'hypotèſe de Képler, pour déterminer les orbites des planètes ; on trouvera dans les *Elémens de M. Caſſini* une méthode pour les trouver auſſi dans l'hypothèſe elliptique ſimple (1252), c'eſt l'hypothèſe employée par Boulliaud, Wardus & Street ; mais quoique M. Caſſini faſſe un uſage fréquent de l'hypothèſe elliptique ſimple, à cauſe de la facilité qu'elle offre dans les calculs, cependant il avoue, & il démontre même que l'hypothèſe de Képler doit avoir une entiere préférence ſur l'hypothèſe elliptique ſimple. Ayant fait le calcul du lieu de l'aphélie de Mars dans les deux hypothèſes différentes par le moyen de trois obſervations de 1691, 1696 & 1700, dont une étoit voiſine de l'aphélie, M. Caſſini trouve le lieu de l'aphélie dans l'hypothèſe elliptique ſimple $5^s\ 0^\circ\ 39'\ 0''$, & dans l'hypothèſe de Képler $5^s\ 0^\circ\ 31'\ 34''$, avec une différence de $7'\ 26''$ ſeulement ; en effet les deux hypothèſes ne différent point entr'elles quand on prend une obſervation dans l'aphélie & les deux autres dans les moyennes diſtances. Mais ayant enſuite choiſi trois autres obſervations de 1694, 1698 & 1702, en des points différens de l'orbite de Mars, M. Caſſini trouve $5^s\ 1^\circ\ 28'\ 23''$ dans l'hypothèſe elliptique ſimple, & $5^s\ 0^\circ\ 39'\ 2''$ dans l'hypothèſe de Képler ; on voit que l'hypothèſe elliptique ſimple donne un réſultat différent de $49'\ 23''$ de celui de l'aphélie qu'elle avoit donnée dans le premier calcul, & que ceux de l'hypoſe de Képler ne diffèrent que de $7'\frac{1}{2}$; & même de $5'$ ſeulement ſi l'on a égard au mouvement de l'aphélie ; cette derniere différence eſt aſſez petite pour être attribuée

Défaut de l'hypothèſe elliptique ſimple.

au défaut d'accord entre les différentes obſervations ; mais la différence de 49′ qu'il y a entre les deux réſultats de l'hypothèſe elliptique ſimple, ne ſauroit être attribuée qu'à l'imperfection de cette hypothèſe. Il en eſt de même de l'excentricité, M. Caſſini, en ſuppoſant le grand axe de 100000, la trouve dans l'hypothèſe de Képler 9287 & 9292, ſuivant qu'il emploie les trois premières ou les trois dernières obſervations, la différence n'eſt que de 5 parties ; mais dans l'hypothèſe elliptique ſimple il trouve 9246 & 9115, réſultats qui diffèrent de 131 parties ; & prouvent encore la diſcordance de cette derniere hypothèſe quand on l'applique à différens points de l'orbite ; auſſi M. Caſſini conclut formellement que l'hypothèſe de Képler mérite la préférence, (*Elém. d'aſtron. pag.* 475, & nous n'avons parlé de l'hypothèſe elliptique ſimple que pour donner une idée de la facilité qu'elle offre, dans les occaſions où l'on n'a pas beſoin de beaucoup d'exactitude ; ou dans les orbites peu excentriques, comme celles de Vénus & de la terre.

Trouver le mouvement des apsides et la révolution anomalistique d'une Planète, par les obſervations.

1310. La méthode que nous avons donnée pour déterminer l'orbite d'une planète (1293), étant appliquée aux anciennes obſervations, fait trouver le lieu de l'aphélie dans les temps plus reculés ; & quoique les obſervations anciennes ne ſoient pas fort exactes, elles font cependant connoître que les aphélies des planètes ne ſont pas fixes dans le ciel. La théorie de l'attraction, (liv. XXIIe.) nous ſervira de même à prouver le mouvement des apſides ; mais ce mouvement eſt aſſez lent pour qu'on ait pu long-temps le négliger dans l'aſtronomie, & ſuppoſer les apſides immobiles, mais ce mouvement n'eſt pas douteux actuellement, les

observations de Mars le prouvent sur-tout d'une manière incontestable.

1311. La révolution d'une planète par rapport à son apside, le temps qu'elle emploie à y revenir, ou l'intervalle d'un passage par son aphélie au passage suivant, s'appelle la RÉVOLUTION ANOMALISTIQUE, (1279) parce que l'anomalie recommence à chaque passage dans l'apside : cette révolution anomalistique est toujours un peu plus longue que la révolution par rapport aux équinoxes, parce que le mouvement des apsides se fait suivant l'ordre des signes; pour en déterminer la quantité, nous commencerons par la révolution anomalistique du soleil, ou plutôt de la terre, qui est une des plus faciles à déterminer.

Si le lieu de l'apside de la terre étoit exactement fixe dans le ciel, la révolution anomalistique seroit égale à la révolution sidérale, dont on a vu la détermination (1160); mais puisque l'apogée du soleil a un petit mouvement selon l'ordre des signes, comme les observations paroissent le prouver, aussi bien que la théorie de l'attraction, il faut, pour connoître sa révolution anomalistique, comparer deux passages du soleil par son apogée, & non pas deux retours à une même étoile, ni deux passages par l'équinoxe (82, 884).

1312. L'APOGÉE DU SOLEIL, suivant Ptolomée étoit à $2^s\ 5^\circ\ \frac{1}{2}$ (865); par les observations de Waltherus faites à Nuremberg, rapportées & calculées par M. de la Caille (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 60.), il étoit le 1 Janvier 1496 à $3^s\ 3^\circ\ 57'\ 57''$. Mais le 1 Janvier 1750, il étoit à $3^s\ 8^\circ\ 38'$; donc le mouvement de l'apogée du soleil est de $4^\circ\ 40'$ en 254 ans, ce qui fait $1'\ 6''$ par année (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 141).

Suivant ces observations de Waltherus, le soleil avoit passé par son périgée le 16 Décembre 1487 à $6^h\ 5'$ de temps moyen; il y a passé encore le 30 Décembre 1751 à $3^h\ 9'$, suivant les observations de M. de la Caille; l'intervalle est de 96428j $21^h\ 4'$, ce qui donne pour chaque révolution anomalistique 365j $6^h\ 15'\ 42''$ (*Leçons* Mouvement de l'apogée du soleil.

d'astron. art. 708). Ayant comparé ainsi les observations de Waltherus, celles de Tycho-Brahé, & celles de Co-cheou-king faites à la Chine en 1278 & 1279 (418), que le P. Gaubil a rapportées dans son histoire de l'Astronomie Chinoise, tom. II, *pag.* 107, & dont M. de l'Isle avoit une copie manuscrite encore plus détaillée, M. de la Caille a trouvé la révolution anomalistique, ou la différence entre deux passages consécutifs du soleil par son apogée, 365j 6h 15′ 24″, plus grande que la durée de l'année tropique (588), de 26′ 35″; & le mouvement de l'apogée 1° 49′ 10″ par siècle, ou 65″ ½ par année rélativement à l'équinoxe; (*Mém.* 1757, *pag.* 141). Suivant mes calculs, je trouve la révolution anomalistique de 365j 6h 15′ 20″ 5, parce que je suppose le mouvement séculaire du soleil de 46′ 10″ au lieu de 45′ 55″ 6 que suppose M. de la Caille dans ses tables.

Il est 65″ ½ par année.

1313. Pour voir ce qui résulte de la comparaison des autres observations par rapport au mouvement de l'apogée du soleil, on pourra jetter les yeux sur les positions suivantes de l'apogée déterminées par différens Astronomes, à côté desquelles on voit ce qui en résulte pour le mouvement annuel, par comparaison avec le lieu de l'apogée observé en 1738, (M. Cassini, *pag.* 197).

Hipparque, 140 ans avant J. C.	2s	5°	30′....	1′	3″
Ptolomée, 140 ans après J. C,	2	5	30	1	14
Albategnius en 883,	2	22	17	1	7¼
Arzachel en 1076,	2	17	50	1	51½
Alphonse en 1252,	2	28	40	1	10
Waltherus en 1503,	3	4	9	1	4
Copernic en 1515,	3	6	40	0	25
Tycho en 1588,	3	5	30	1	6
Képler en 1588,	3	5	32	1	6½
M. Cassini en 1738,	3	8	19	8″....	

Il ſuppoſe dans ſes tables ce mouvement de 1° 42′ 55″ par ſiecle, ou de 1′ 2″ par année, ſe fondant principalement ſur les obſervations d'Hipparque ; M. le Monnier le ſuppoſe de 63″ dans ſes Inſtitutions aſtronomiques ; & M. Mayer de 66″ dans ſes nouvelles tables ; tout cela diffère peu de la derniere détermination que nous adoptons ici, avec M. de la Caille, & qui eſt de 65″ ½. Le lieu de l'apogée pour 1750 eſt de 3ˢ 8° 38′ 4″, plus avancé de 30″ ſeulement que dans les tables de Mayer.

1314. Les aphélies des autres planètes ont auſſi leur mouvement, mais il n'eſt pas connu avec autant d'exactitude, à cauſe du peu d'obſervations anciennes que nous avons ſur les planètes ; d'ailleurs ce mouvement eſt ſi peu ſenſible, qu'on ne peut le déterminer avec préciſion, ſi ce n'eſt celui de Mars ; on en jugera par la différence qu'il y a entre les tables de M. Caſſini & celles de M. Halley pour cette partie ; différence dont il y a une table ci-après (1331). Aphélies des autres planètes.

Il y a même des Auteurs qui ont totalement négligé ce mouvement des aphélies comme inappréciable, & ont ſuppoſé que les apſides étoient fixes parmi les étoiles fixes, ſans autre changement de longitude que celui de 50″ par an, qui vient de la préceſſion des équinoxes ; Street dans ſes tables Carolines, faiſoit cette ſuppoſition ; on n'étoit point alors aſſez avancé dans l'aſtronomie pour déterminer des quantités auſſi petites.

Pour faire ſentir le degré de certitude qu'il peut y avoir dans de pareilles déterminations, je vais indiquer en peu de mots quelles ſont les obſervations ſur leſquelles M. Caſſini a établi ſes déterminations du mouvement des aphélies, ainſi qu'il les rapporte lui-même dans ſes *Elémens d'aſtronomie*, & j'y ajouterai quelques recherches particulieres que j'ai faites ſur la même matiere.

1315. L'APHÉLIE DE MERCURE eſt déterminé dans M. Caſſini par les paſſages ſur le ſoleil de 1661, 1690 & 1697, ſuivant leſquels il trouve que le 9 Nov. 1690, Aphélie de Mercure.

à 18^h 6′, l'aphélie de Mercure étoit à 8^s 12° 22′ 25″; il trouve qu'en supposant le mouvement de l'aphélie de 1′ 20″ par année, il représente assez bien les passages de 1631, 1672, 1723 & 1736. Mais j'ai déja remarqué que tous ces passages arrivent vers les mêmes points de l'orbite, car celui de 1661 étoit le seul qu'on eût observé dans la partie opposée, c'est-à-dire, dans le nœud descendant qui est vers 10^s 20° d'anomalie moyenne; ainsi l'on ne pouvoit guère s'assurer que ce mouvement de l'aphélie satisferoit également aux observations faites dans d'autres points de l'orbite : M. Cassini observe lui-même, (*pag.* 612), que deux hypothèses qui diffèrent entre elles de 1° 30′ pour le lieu de l'aphélie, & de 52′ pour la plus grande équation, ne laissent pas de représenter toutes les deux avec une égale précision ces sept observations; ce qui prouve qu'elles n'étoient pas faites dans des points de l'orbite de Mercure, assez différens les uns des autres, pour bien déterminer le lieu de l'aphélie; on ne doit donc pas être surpris que M. Halley ait représenté également bien les mêmes observations, en réduisant à 52″ ½ au lieu de 1′ 20″ le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure. Suivant les recherches que j'ai données sur cette matiere dans les mémoires de l'académie pour 1756, *pag.* 266, j'ai trouvé le lieu de l'aphélie de Mercure, le 6 Mai 1753, de 8° 13′ 55″, plus avancé de 9′ seulement que suivant les tables de M. Cassini, ou de 26′ plus avancé que suivant M. Halley, ce qui sembloit prouver que le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure étoit un peu plus grand que dans les tables de Halley; mais pour s'en assurer il falloit discuter des observations faites dans d'autres points de son orbite, & sur-tout dans les apsides & les moyennes distances (1267, 1286).

Son mouvement est de plus de 70 secondes paranpée.

1316. On trouve dans Ptolomée quatorze observations de Mercure, faites dans les plus grandes digressions, & qui seront rapportées à la fin de ce VIe. liv. Je les ai toutes discutées avec le plus grand soin, & quoiqu'il y en ait deux qu'on ne peut absolument concilier

cilier avec les autres, & quatre qui sont trop près des apsides, il me paroît prouvé par les huit autres que le mouvement séculaire de l'aphélie est de 1° 57′ 40″ ou environ 1′ 10″ par an; c'est-à-dire, plus grand de 18 secondes que dans les tables de M. Halley, (1286).

Ce mouvement de l'aphélie de Mercure que j'ai déduit des observations anciennes ne s'accorde pas parfaitement avec les observations du 17e siecle : le 13 Décembre 1683 à 19h 39′ temps moyen réduit au méridien de Paris, M. Halley trouva la distance de Mercure à l'épi de la Vierge 44° 26′ 10″; en y ajoutant 3′ 0″ pour l'effet de la réfraction, on a une distance plus grande de 2′ 13″ que par mes tables, d'où il suit qu'il faudroit ajouter 29′ au lieu de l'aphélie qu'elles donnent pour ce temps-là, ce qui nous rapprocheroit de l'aphélie des tables de Halley. Le 4 Mai 1673 à 7h 53′ 25″ Hevelius mesura la distance de Mercure à β du Taureau 12° 21′ 50″; en y ajoutant 4′ 7″ pour la réfraction l'on a une distance vraie plus grande de 3′ 12″ que par mes tables. Le 21 Mai 1672 à 8h 9′ 18″ Hevelius mesura la distance de Mercure à β du Taureau de 24° 50′ 35″; en y ajoutant 3′ 44″ pour l'effet de la réfraction, on trouve une distance d'ou résulte une longitude plus grande de 1′ 37″ que par mes tables; ces résultats semblent indiquer également que j'ai fait le mouvement de l'aphélie trop considérable; j'ai préféré le résultat des anciennes observations; mais j'ai cru devoir avertir de cette différence, pour qu'on discute à loisir les observations d'Hevelius qui pourront éclaircir encore cette question. En attendant je suppose l'aphélie de Mercure en 1750 à 8s 13° 33′ 3″ avec un mouvement annuel de 1′ 10″.

1317. L'APHÉLIE DE VÉNUS est presque aussi difficile à déterminer par les anciennes observations que celui de Mercure; & dans les différentes déterminations qu'en donne M. Cassini, il s'y trouve des différences de près de 15 deg. Mais il y a une circonstance de Aphélie de Vénus.

plus qui fait paroître les erreurs beaucoup plus importantes qu'elles ne sont, c'est que l'excentricité de Vénus étant fort petite, une erreur d'un degré sur l'aphélie ne produit pas une minute sur la longitude, comme on s'en apperçoit en jettant les yeux sur la table de l'équation de l'orbite de Vénus qui pour un degré d'anomalie n'est que de 50″; ainsi l'erreur peut paroître fort grande sur le lieu de l'aphélie, sans qu'il en résulte sur le lieu observé de la planète une différence sensible.

Les observations de Vénus faites dans les années 136, 138, 140, donnent 8ˢ 21° 27′ ou 8ˢ 21° 29′ pour le lieu de son aphélie, que M. Cassini estime être le résultat le moins défectueux que fournissent les anciennes observations; (*Elém. d'astr. pag.* 544, 564). Il trouve le lieu de cet aphélie par les conjonctions inférieures de 1715, 1716 & 1718, de 10ˢ 6° 50′; ainsi dans l'espace de 1578 années le mouvement de l'aphélie auroit été de 45° 21′ à raison de 1′ 42″ 50‴ par année.

En employant de même le lieu de l'aphélie de Vénus déterminé par les observations des années 1592, 1594 & 1601, à 10ˢ 1° 54′ 12″ comparé avec le précédent, on trouve 40° 25′ 37″ de mouvement pour 1460 ans ou 1′ 39″ $\frac{1}{2}$ par année. M. Cassini compare aussi le lieu de l'aphélie pour 1716 avec celui de 1596, & le mouvement de 4° 56′ en 120 ans donne 2′ 28″ par année. Mais il n'est pas étonnant que sur un intervalle aussi court, dans lequel la différence n'est que de 4° 56′, il y ait une incertitude d'un quart ou d'un tiers de ce mouvement total.

Horoccius, après l'observation du passage de 1639 examinant la théorie de Vénus, fixoit son aphélie à 10ˢ 5° 0′; si l'on compare cette position à celle de 1716, 10ˢ 6° 50′, on trouve par ces 77 années le mouvement annuel de 1′ 26″ (*Elém. d'astr. pag.* 564), & c'est ainsi que M. Cassini l'employe dans ses tables.

1318. J'ai employé pour cette recherche la même méthode que pour l'aphélie de Mercure (1286). Vénus étant dans sa plus grande digression vers le 7 Août

1769, j'ai observé sa longitude plusieurs jours de suite, par exemple, le 7 Août à 20^h 52′ 57″ temps moyen; elle étoit de 3^s 0° 19′ 54″ plus petite de 25″ que par les tables de Halley, qui supposoient l'aphélie de Vénus à 10^s 7° 36′ 57″. Ces 25″ d'erreur exigeroient une augmentation de 1° 15′ dans le lieu de l'aphélie de Vénus, ainsi l'époque de cet aphélie pour 1769 seroit par ces observations de 10^s 8° 51′ 24″, tandis que par les tables de M. Halley, elle est de 10^s 7° 36′ 24″ & par celles de M. Cassini, 10^s 8° 5′ 14″. Cette position de l'aphélie est assez conforme aux observations faites la même année dans le mois d'Avril, aux environs de la plus grande digression, & diminue beaucoup l'erreur des tables.

La digression que j'ai observée à la fin de Juillet 1767, donne à peu-près le même résultat: le 31 Juillet 1767 à 2^h 58′ 51″ de temps moyen la longitude observée étoit 5^s 23° 6′ 45″, & l'anomalie de Vénus de 30°. Les tables de M. Halley qui marquoient l'aphélie à 10^s 7° 35′ pour ce temps-là donnoient une longitude trop grande de 24″; mais en supposant 10^s 9° 5′, c'est-à-dire, 1° 30′ de plus, on trouve les tables d'accord avec l'observation, ainsi cette correction de l'aphélie approche beaucoup de celle de 1° 15′ que je trouve par la digression de 1769. Chacune de ces digressions a été déterminée par un milieu entre plusieurs observations; je supposerai donc l'aphélie de Vénus au commencement de 1768 à 10^s 8° 58′, plus avancé de 54′ que dans M. Cassini, & plus avancé de 1° 22′ $\frac{1}{2}$ que dans M. Halley.

En comparant cette position de l'aphélie avec celle que Képler donne dans ses tables Rudolphines 10^s 1° 4′ pour 1592, je trouve le mouvement de l'aphélie de Vénus 2′ 41″ $\frac{1}{2}$ par année & 2′ 28″ en le comparant avec la longitude que M. Cassini trouvoit pour 1596 par les observations de Tycho, 10^s 1° 54′. Ce mouvement de l'aphélie dans Vénus paroît beaucoup plus grand que dans toutes les autres planètes, & c'est la

Son mouvement.

raiſon pour laquelle il ſemble que M. Caſſini l'ait rejetté (*pag.* 564) ; mais il pourroit arriver que la petiteſſe de ſon excentricité rendît plus conſidérable le mouvement de ſon aphélie. (Voy. cependant la piece de M. Euler qui a remporté le prix de 1756, art. 61 & 99, & celle de 1748, *pag.* 52). Dans les tables de M. Halley ce mouvement n'eſt que de $56'' \frac{1}{2}$, dans celles de M. Caſſini 1′ 26″. Pour moi je le ſuppoſerai de 2′ 30″.

Aphélie de Mars.

1319. L'APHÉLIE DE MARS eſt plus aiſé à déterminer, auſſi nous voyons que ſon mouvement eſt preſque le même dans les tables de M. Caſſini & de M. Halley, 1′ 12″ dans les premieres, 1′ 10″ dans les ſecondes. Les trois oppoſitions de Mars obſervées par Ptolomée, donnent pour le lieu de l'aphélie, 135 ans après J. C. 3ˢ 29° 24′. Par les obſervations faites à Greenwich en 1691, 1696 & 1700, qui ſont très-bien d'accord avec celles qu'on faiſoit dans le même temps à Paris, & dont la premiere & la troiſieme ſont à pareilles diſtances de l'aphélie, M. Caſſini trouve 5ˢ 0° 31′ 34″ pour 1696; ainſi dans l'eſpace de 1561 ans l'aphélie a avancé chaque année de 1′ 11″ 47‴ 20⁗, (*Elém. d'aſtr. pag.* 478).

Son mouvement annuel de 70″.

1320. Dans mes recherches ſur l'orbite de Mars j'ai trouvé le lieu de l'aphélie vers 1748 à 5ˢ 1° 26′ 10″, ou moins avancé de 3′ 8″ ſeulement, que ſuivant les tables de M. Halley (1307), ce qui prouve que le mouvement annuel de l'aphélie de Mars eſt aſſez exactement conforme à ces tables ou de 1′ 10″. Cependant l'époque pour 1748 étant 5ˢ 1° 26′ 10″, & celle de Képler pour 1592, 4ˢ 28° 49′ 50″ la différence 2° 36′ 20″ répartie ſur 156 ans, donne pour le mouvement annuel 60″ ſeulement. Je crois donc qu'en prenant un milieu entre ces trois déterminaiſons, on peut le ſuppoſer de 1′ 7″ par année, ou 1° 51′ 40″ par ſiecle.

Aphélie de Jupiter.

1321. L'APHÉLIE DE JUPITER calculé par les obſervations de Ptolomée, ſe trouve pour l'an 136 de 5ˢ 14° 38′ ſuivant M. Caſſini ; mais par les obſervations de

1588, 1590 & 1592, faites par Tycho, il trouve pour l'année 1590, 6s 6° 31′; & Képler le place pour la même année à 6s 6° 44′. Les déterminations de M. Caſſini, pour 136 & 1590 donnent 54″ par année pour le mouvement de l'aphélie de Jupiter. Par les oppoſitions de 1719, 1721 & 1723, la longitude de l'aphélie pour l'année 1720, eſt 6s 9° 47′; cette longitude comparée avec celles de Ptolomée, donne 57″ 2 par année. Mais les obſervations de Tycho comparées à celles de ce ſiecle, donnent le mouvement annuel de 1′ 30″. (*Elem. d'aſtron. pag.* 429).

Ces différences faiſoient ſoupçonner à M. Caſſini, que peut-être le mouvement de l'aphélie étoit accéléré, ou du moins ſujet à quelques irrégularités, en même temps que ſon excentricité eſt ſujette à augmenter (1273), mais peut-être auſſi ces différences viennent des inégalités périodiques de Jupiter, produites par l'action de Saturne, dont on n'a pu tenir compte dans toutes ces recherches, & qui ſont même encore très-peu connues; au reſte, M. Caſſini adopte dans ſes tables le mouvement annuel de l'aphélie de 57″ 24‴ d'après les anciennes obſervations, & M. Halley le ſuppoſe de 72″.

M. Jeaurat ayant comparé entre elles les obſervations de Tycho, & les dernieres qui ont été faites à Paris en 1750, 1761 & 1765, trouve qu'en 1590 l'aphélie étoit à 6s 7° 49′ 19″, & en 1762, 6s 10° 36′ 41″ d'où il réſulteroit 58″, 4 pour le mouvement annuel de l'aphélie. (*Mém.* 1765, *pag.* 384 & 438); mais dans ſes tables imprimées avec celles de M. Bailly pour les ſatellites de Jupiter, & dont les fondemens ſe trouvent dans les mémoires de 1766, il ſuppoſe le mouvement de l'aphélie de 79″ 27 par année, & le lieu de l'aphélie, comme dans les tables de M. Caſſini, 6s 10° 24′ 7″ pour 1760.

D'un autre côté, M. Euler dans ſa ſeconde piéce ſur les inégalités de Jupiter & de Saturne, couronnée en 1752, trouve que l'aphélie de Jupiter doit avancer de

Son mouvement eſt incertain.

55″ par an, en vertu de l'attraction de Saturne : tous ces différens sentimens font voir la nécessité d'y appliquer encore les observations qu'on pourra faire dans la suite, pour développer mieux les différentes inégalités de Jupiter & le mouvement de son aphélie.

1322. Le mouvement de l'aphélie de Jupiter, suivant M. Cassini est de 57″ 42 par année ; suivant la théorie que M. de la Grange a adoptée dans le troisieme volume de Turin, ce mouvement est de 57″ 20 en vertu de l'attraction de Saturne ; il est sujet encore à une accélération, mais elle est peu sensible. M. Bailly a suivi ces deux déterminations, & dans les calculs qu'il a lus à l'académie le 19 Mars 1769 sur cette matiere, il s'en est tenu à 57″, mais M. Wargentin a préféré 62″, comme le mouvement qui satisfait le mieux aux observations, & c'est celui que j'ai adopté dans les tables qui sont dans cette astronomie ; l'époque pour 1750 est 6ˢ 10° 22′ 31″ plus avancée de 7′ 58″ que par les tables de M. Cassini, mais moins avancé de 11′ 15″ que dans les tables de Halley.

Aphélie de Saturne.

L'APHÉLIE DE SATURNE déterminé par M. Cassini au moyen des trois oppositions des années 127, 133 & 136, se trouve pour l'an 132 à 7ˢ 24° 14′ 29″ : les oppositions de 1686 & de 1694, le donnent en Avril 1694 à 8ˢ 28° 58′, ce qui fait pour le mouvement annuel 1′ 20″. (*Elem. d'astron. pag.* 373.).

Par quatre comparaisons différentes des oppositions de Saturne, observées par Tycho depuis 1582 jusqu'en 1599, M. Cassini trouve l'aphélie de Saturne à 8ˢ 25° 40′ 51″ pour le 19 Décem. 1590, moins avancé seulement de 5′ 23″ que suivant les tables Rudolphines de Képler, ce lieu comparé à celui de 1694, 8ˢ 28° 58′, donne le mouvement de 3° 17′ pour 103 ans, & le mouvement annuel de 1′ 55″. Mais ces observations de Tycho comparées avec celles de Ptolomée, donnent seulement 1′ 18″. (*ibid. pag.* 374).

Les observations de 1701, 1708 & 1716 donnent le

lieu du périhélie $2^s\ 28^\circ\ 25'$ pour le 12 Décembre 1708; cette position comparée à celle de 1590, donne pour le mouvement annuel $1'\ 23''\frac{1}{2}$.

Il suivroit de tout cela, dit M. Cassini, *pag.* 374. que le mouvement de l'aphélie auroit été plus prompt dans le dernier siècle, ou que la situation du périhélie ne seroit pas exactement opposée à celle de l'aphélie, en sorte qu'il y auroit quelque équation à employer pour le vrai lieu de Saturne dans ces deux points opposés de son orbe, ce qui y formeroit une espece de libration: en effet, il trouve le périhélie de 1708 moins avancé d'une degré qu'il ne devroit l'être par rapport à l'aphélie de 1694; mais les irrégularités de Saturne sont si grandes, qu'on ne doit pas être surpris de cette différence, car il suffit de six minutes d'inégalité pour produire un degré sur le lieu de l'aphélie; ainsi l'on ne doit pas espérer une précision plus grande que celle d'un degré pour le lieu de l'aphélie, & de $5''$ sur le mouvement annuel de l'aphélie de Saturne. M. Euler dans sa premiere piece sur Saturne, *pag.* 108. adopte le mouvement de l'aphélie, tel qu'il se trouve dans les tables de M. Cassini; c'est-à-dire, $1'\ 18''$ par an, & se contente d'ajouter 28 minutes aux époques des longitudes de l'aphélie: dans sa seconde pièce il trouve que l'aphélie apparent de Saturne doit avancer chaque année de $1'\ 8''$ seulement; on ne peut rien statuer sur ce mouvement de l'aphélie jusqu'à ce qu'on connoisse la loi & la mesure des nouvelles inégalités, dont j'ai parlé ci-devant (1167).

Son mouvement est incertain.

1324. Dans les nouvelles tables de Saturne qu'on trouvera dans ce livre, où j'ai eu pour objet de satisfaire principalement aux observations faites depuis 30 ou 40 ans, j'ai trouvé que l'aphélie de Saturne devoit être pour 1769, à $9^s\ 0^\circ\ 22'$; à l'égard de son mouvement, je l'ai estimé par la comparaison avec le lieu de l'aphélie qui paroît satisfaire aux observations de Tycho-Brahé, faites vers la fin du XVIe siècle; car s'il étoit au commencement de 1591 à $8^s\ 25^\circ\ 41'$, & en 1769 à $9^s\ 0^\circ\ 22'$ le progrès est de $4^\circ\ 41'$ en 178 ans, & le mouvement an-

nuel de 1′ 34″ 7 ; il feroit un peu moindre en employant l'époque de Képler ; je le fuppoferai de 1′ 30″ par année ou 2° 30′ par fiècle.

Trouver les époques de la longitude moyenne des Planètes.

1325. Ayant déterminé par les méthodes précédentes (1279, 1286, 1293) le lieu de l'aphélie d'une planète, ou en général celui de l'apfide, (car cette méthode convient auffi à l'apogée du foleil & de la lune), on aura par la même une longitude moyenne (1306) ; d'ailleurs le jour où la planète eft dans fon apfide, fa longitude vraie, fa longitude moyenne & la longitude de fon apfide font exactement la même chofe ; on les connoît donc toutes trois lorfqu'on connoît le lieu de l'aphélie.

Epoque déduite de l'obfervation.

Exemple. La premiere des trois obfervations de Mars (1301) fut faite le 15 Février 1743, à 19h 17′ 40″, temps moyen, & la longitude moyenne pour le moment de cette obfervation a été trouvée (1306) de 4s 26° 27′ 21″ ; de ce moment-là jufqu'au premier Janvier 1744 à midi moyen, Mars a dû parcourir 15s 17° 16′ 53″, à raifon du mouvement annuel qu'on a vu ci-devant (1162) ; fi l'on ajoute ce mouvement à la longitude moyenne obfervée, on aura la longitude moyenne pour le commencement de l'année 1744, 10s 13° 44′ 14″ déduite de l'obfervation, c'eft ce que nous appellons l'époque des moyens mouvemens pour 1744.

Epoques des tables pour le 31 Décembre.

1326. Les époques employées dans nos tables aftronomiques font pour le premier Janvier à midi de temps moyen, à Paris, lorfqu'il s'agit des années biffextiles ; mais dans les années communes on choifit le midi du jour précédent qui eft celui du 31 Décembre : par exemple, on trouve l'époque du foleil pour 1750, par le moyen de l'obfervation des équinoxes (884), de

de 9^s 10° $0'$ $43''$ 4, c'eſt la longitude moyenne du ſoleil le 31 Décembre 1749 à midi moyen ; on a introduit cette méthode dans la vue de ſimplifier l'uſage de la table des moyens mouvemens pour les jours du mois ; car dans cette table au moyen de la diſpoſition précédente, il ſuffit de retrancher un jour dans les deux premiers mois des années biſſextilles pour s'en ſervir en tout temps, au lieu qu'il faudroit faire cette correction ſur dix mois, ſi toutes les époques étoient calculées pour le premier Janvier. En effet dans les tables des moyens mouvemens pour chaque jour du mois, on a coutume de mettre au premier Janvier le mouvement d'un jour, par exemple, $59'$ $8''$ ſi c'eſt pour le ſoleil ; cela ſuppoſe que l'époque eſt fixée pour la veille ; ſi elle eſt pour le midi même du premier Janvier, il n'y a rien à ajouter à l'époque pour avoir la longitude moyenne le premier de Janvier, il faudra donc ôter un jour de la date propoſée ou $59'$ $8''$ du mouvement indiqué par la table, & ainſi des autres jours, juſqu'au premier de Mars ; alors le jour intercalaire ajouté au mois de Février, fait que tous les moyens mouvemens des jours ſuivans ſont devenus plus petits de $59'$ $8''$, & il n'y a plus aucune correction à y faire, au lieu qu'il faudroit y ajouter le mouvement d'un jour pendant tout le reſte de l'année, ſi les mouvemens avoient été juſtes pendant les deux premiers mois.

Quand on a l'époque d'une année commune, il faut y ajouter le mouvement moyen pour 365 jours, & l'on a l'époque de l'année commune qui la ſuit : ſi l'on ſuppoſe que l'époque de 1750 étoit de 9^s 10° $0'$ $43''$ 4, & qu'on y ajoute 11^s 29° $45'$ $40''$ 5, mouvement du ſoleil pour 365 jours, on aura 9^s 9° $46'$ $23''$ 9, époque pour 1751 ; mais ſi l'année ſuivante eſt biſſextile, il faut ajouter un jour de plus, c'eſt-à-dire, le mouvement pour 366 jours ; ainſi à l'époque de 1751 on ajoutera 0^s 0° $44'$ $48''$ 8, & l'on aura 9^s 10° $31'$ $12''$ 7 pour l'époque de l'année biſſextille 1752 ; la rai-

son de cette différence vient de ce que cette derniere époque commence un jour plus tard que celle des années communes.

Epoques pour les siècl. éloignés.

1327. On trouveroit aussi par le moyen de la méthode précédente que l'époque des longitudes moyennes du soleil pour l'année commune 1700 est de 9^s 10° $7'$ $19''$ 6, en ôtant de la précédente le mouvement pour 52 années. Si l'on ôte encore le mouvement séculaire, qui est de $45'$ $55''$ 6 au-delà des cent révolutions completes, pour 100 années Juliennes dont 25 sont bissextiles, l'on devroit avoir l'époque de 1600 ; mais comme l'année 1700 étoit commune, & que l'année 1600 étoit bissextile, suivant la règle du calendrier Grégorien que nous expliquerons dans le VIIIe. livre, la longitude ou l'époque de 1700 qui est pour le 31 Décembre précédent, se trouve diminuée d'un jour, & rapprochée de 1600 (1326) ; il faut donc ajouter le mouvement d'un jour à l'époque de 1600 trouvée par la règle précédente, afin d'avoir cette longitude pour le premier de Janvier à midi, (& non pour le 31 de Décembre précédent), on aura par ce moyen l'époque de 1600, 9^s 10° $20'$ $32''$; en général, quand on voudra conclure l'époque d'une année séculaire bissextile plus éloignée, de celle d'une année séculaire commune, il faudra en ôter le mouvement séculaire, & y ajouter le mouvement diurne.

De même pour avoir l'époque de l'année séculaire commune 1800, par le moyen de l'année séculaire commune 1700, il ne suffit pas d'y ajouter le mouvement séculaire $45'$ $55''$ 6, parce que ce mouvement suppose 25 bissextiles, & qu'il n'y en a que 24 dans ces cent ans ; mais il faut retrancher le mouvement d'un jour, ou ce qui revient au même ajouter 11^s 29° $46'$ $47''$ 3 à la premiere longitude ; c'est ainsi qu'on trouvera l'époque du soleil pour 1800 par celle de 1700, en y ajoutant ce mouvement séculaire diminué d'un jour, & l'on aura 9^s 9° $54'$ $6''$ 9 pour l'époque de 1800.

1328. L'époque d'une année séculaire commune, telle que 1700, en y ajoutant le mouvement pour 4 années Juliennes, dont une soit bissextile, c'est-à-dire, 1′ 50″ 2 donne l'époque de 1704. Si vous commencez à compter d'une époque de bissextile, comme 1704, pour trouver celle de 1708, ce sera encore la même chose, parce que dans les deux cas il y a un jour de plus que 4 années communes; mais pour sentir l'égalité de ces deux cas, il faut deux considérations différentes. Dans le premier cas l'époque de 1700 étoit pour le 31 Décembre précédent, celle de 1704 pour le premier Janvier; ainsi quoique les 4 années 1700, 1701, 1702, 1703, aient été communes, il y a cependant un jour de plus entre les époques de 1700 & de 1704, à cause de la différente maniere de les compter (1326). Dans le second cas, l'époque de 1704 & celle de 1708, sont bien toutes deux pour le premier Janvier; mais il y a un jour de plus dans le cours de l'année bissextile 1704; ainsi l'intervalle des époques augmente aussi d'un jour, & il se trouve le même qu'entre celles de 1700 & de 1704.

En général, quand on prend le mouvement pour 4, 8, 12, &c. ou un nombre d'années divisible par 4, soit que l'on commence par une époque commune, 1700, 1701, 1702, 1703, 1800, ou par une époque bissextile, on trouve toujours exactement l'époque demandée; c'est pourquoi nous avons pris le mouvement de 52 années juste pour trouver l'époque de 1700, par le moyen de celle de 1752 (1327), quoique l'une fût commune, & l'autre bissextile; mais s'il arrivoit que le calendrier eût souffert une ou deux interruptions dans l'intervalle, comme si on alloit de 1700 à 1800, ou de 1699 à 1799, il faudroit diminuer le mouvement de la valeur d'un jour. Dans le cas où l'on va de 1700 à 1800, cette derniere étant une année commune, & son époque étant pour le 31 Décembre aussi bien que celle de 1700, tandis que l'année 1700 a été diminuée d'un jour, la différence des deux époques doit être

néceſſairement plus petite d'un jour ; ainſi il faut ôter le mouvement diurne du mouvement ſéculaire. Dans le cas où l'on iroit de 1699 à 1799, il faudroit encore ôter le mouvement d'un jour, parce que l'année 1700 a ſouffert une diminution d'un jour, & que les cent ans compris entre 1699 & 1799, n'ont que 24 biſſextiles. Ainſi quoique l'année 1800 ſoit commune, on aura exactement les longitudes des années ſuivantes en ajoutant à celle de 1800 le mouvement pour un an, deux ans, &c. pris dans la table qui eſt immédiatement après les époques.

Epoques pour le Calendrier Julien.

Pour paſſer de l'époque de 1600 à celle de 1500, il ne ſuffit pas d'ôter le mouvement ſéculaire, il faut enſuite ajouter le mouvement de dix jours, parce qu'en 1500 on ſuivoit le Calendrier Julien, ou vieux ſtyle, & en 1600 l'on avoit pris le nouveau ſtyle. Le Calendrier Grégorien ayant ſupprimé dix jours de l'année 1582, comme nous le dirons dans le VIIIe livre, l'intervalle de 1500 à 1600 eſt moindre de dix jours que celui de cent années Juliennes, ou de 36525 jours auquel répond le mouvement ſéculaire ; on ôte donc dix jours de trop quand on retranche le mouvement ſéculaire ; ainſi il faut ajouter le mouvement qui répond à ces dix jours : par exemple, l'époque du ſoleil pour 1600 eſt $9^s\ 10^\circ\ 20'\ 32''\ 3$; ſi l'on en ôte $45'\ 55''\ 6$, mouvement ſéculaire du ſoleil, & qu'on ajoute enſuite $9^\circ\ 51'\ 23''\ 3$, mouvement pour dix jours, on aura $9^s\ 19^\circ\ 26'\ 0''$, époque de 1500, plus petite de $26''$ ſeulement que dans les tables de M. Caſſini.

Epoques avant 1500.

1329. Lorſqu'on connoît une fois l'époque de 1500, il n'y a plus aucune variété dans le calendrier, il ſuffit d'en ôter le mouvement ſéculaire $45'\ 55''\ 6$, pour avoir l'époque de 1400 ; & continuant toujours la même ſouſtraction, on parvient aux époques des années ſéculaires qui ont précédé. J'ai prolongé les tables qui ſont dans ce livre, en ſuivant le même progrès, juſqu'à l'an 800 avant J. C. parce que les anciennes obſervations Caldéennes vont juſqu'à ce ſiècle-là, & que les

aſtronomes en font encore quelque uſage. Nous n'avons aucun beſoin des temps plus éloignés : au-delà de 800 ans avant J. C., l'aſtronomie ni l'hiſtoire ne fourniſſent rien qui ſoit ſuſceptible d'un calcul aſtronomique.

Le calendrier Julien ſe prolonge ainſi d'une maniere uniforme juſqu'à une époque plus ancienne de 800 ans que l'établiſſement même du calendrier, fait par Jules Céſar ; dans ces temps reculés il n'y avoit aucune forme conſtante de calendrier (278) ; ainſi il a bien fallu convenir d'une échelle commune pour meſurer ſoit les ſiècles qui ont précédé, ſoit ceux qui ont ſuivi l'ere chrétienne. La forme du calendrier Julien eſt ſimple, uniforme, commode ; elle a été ſuivie pendant près de 1000 ans dans l'hiſtoire de l'Europe, elle a été employée par des chronologiſtes & des aſtronomes habiles, elle eſt obſervée dans les tables de M. Caſſini, & je m'en ſervirai, à ſon exemple quand je parlerai des anciennes obſervations, quoiquePtolomée ſe ſoit ſervi des années de Nabonaſſar ou de la mort d'Alexandre, comme nous le dirons dans le VIIIe livre.

1330. En remontant ainſi par une ſouſtraction continuelle du mouvement ſéculaire, on parvient à l'année 100 de J. C., enſuite à l'année 0, & de-là à l'année 100 avant J. C. ; ainſi de l'année 100 de notre ere à l'année 100 avant J. C. il y a 200 ans de diſtance. Suivant la maniere de compter employée par la plupart des chronologiſtes, il faudroit retrancher un an de la ſomme des années avant & après J. C. par exemple, l'équinoxe obſervé par Hipparque l'an 602 de Nabonaſſar, tombe au 24 Mars de l'année 146 avant J. C. ſuivant les chronologiſtes ; ſi on veut le comparer avec celui de 1765, on aura 1911 pour la ſomme des années, & cependant il n'y a réellement que 1910 ans d'intervalle, parce que l'année où eſt né J. C. doit s'appeller *zero*, comme dans M. Caſſini, (*Elém. d'aſtron. pag.* 216.), & non pas l'année 1 avant J. C. ; par ce moyen l'on doit dire que l'équinoxe, dont nous venons de parler, ſe rapporte à l'année 145 avant J. C. & non pas à l'année 146.

M. Caſſini compte une année de moins que les autres.

EPOQUES des moyens Mouvemens des cinq Planètes principales, & de leurs Aphélies pour 1750; avec les Mouvemens séculaires, suivant MM. Cassini & Halley, & suivant les nouvelles Tables de cet Ouvrage.

Époques de 1750.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	Suivant nos Tables.
Mercure,	8s 13° 19′ 5″	8s 13° 7′ 45″	—11′ 20″	8s 13° 9′ 50″
Vénus,	1 16 19 21	1 16 19 23	+ 0 2	1 16 19 4
Mars,	0 21 58 43	0 21 58 30	— 0 13	0 21 59 17
Jupiter,	0 4 0 59	0 4 5 17	+ 4 18	0 4 2 26
Saturne,	7 20 41 56	7 20 26 24	—15 32	7 20 38 53

Mouvement séculaire des Planètes.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	2s 14° 16′ 54″	2s 14° 2 13″	—14′ 41″	2s 14° 12′ 10″
Vénus,	6 19 11 2	6 19 11 52	+ 0 50	6 19 12 12
Mars,	2 1 41 56	2 1 42 20	+ 0 24	2 1 42 10
Jupiter,	5 6 21 30	5 6 28 11	+ 6 41	5 6 27 30
Saturne,	4 23 29 28	4 23 6 0	—23 28	4 23 14 30

Aphélies pour 1750.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	8s 13° 41′ 18″	8s 13° 27′ 12″	—14 6	8s 13° 33′ 3″
Vénus,	10 7 38 0	10 7 18 31	—19 29	10 8 13 0
Mars,	5 1 36 9	5 1 31 38	— 4 31	5 1 28 24
Jupiter,	6 10 14 33	6 10 33 46	+19 13	6 10 22 31
Saturne,	8 29 13 31	8 29 39 58	+26 27	8 29 53 30

Mouvement séculaire des Aphélies.

	M. Cassini.	M. Halley.	Différence.	
Mercure,	0s 2° 13′ 20″	0s 1° 27′ 37″	—45′ 43″	0s 1° 57′ 40″
Vénus,	0 2 23 20	0 1 34 13	—49 7	0 4 10 0
Mars,	0 1 59 38	0 1 56 40	— 2 58	0 1 51 40
Jupiter,	0 1 35 42	0 2 0 0	+24 18	0 1 43 20
Saturne,	0 2 9 44	0 2 13 20	+ 3 36	0 2 23 20

Ainsi nous avons expliqué la maniere de déduire d'une seule époque toutes les autres, & de trouver une époque par observation, avec les autres élémens d'une planète, & nous avons donné les résultats de ces méthodes, tels qu'ils sont consignés dans les tables des divers astronomes, avec la différence qu'il y a entre ces mêmes tables. Voici l'époque du soleil qui manquoit à la table précédente.

Epoque du soleil pour 1750 suiv. M. Cassini.	9	10	0	35
Suivant les tables de Flamsteed.	9	10	0	21
Suivant les dernieres tables de Mayer. . .	9	10	0	34″7
Suivant les tables de M. de la Caille. . . .	9	10	0	43,4

1331. Lorsqu'on connoît les époques de la longitude moyenne par observation (1325), ou par les calculs précédens; on peut avoir la longitude moyenne à tout autre jour de l'année, en y ajoutant le mouvement diurne (1161), autant de fois qu'il y a de jours écoulés depuis l'époque. Supposons qu'on ait trouvé pour 1760 l'époque du soleil ou sa longitude moyenne le premier Janvier à midi moyen $9^s\ 10^\circ\ 34'\ 53''$, & qu'on veuille avoir la longitude moyenne pour le 31 Janvier à midi moyen, on ajoutera le mouvement diurne pris 30 fois, ou $29^\circ\ 34'\ 10''$, avec l'époque de la longitude moyenne, & l'on aura la longitude moyenne le 31 Janvier; tel est le fondement de l'usage que nous ferons des moyens mouvemens, en expliquant nos tables.

On pourroit avec les nombres de la table précédente & les règles du calcul des équations (1244), trouver en tout temps le lieu d'une planète sur son orbite vu du soleil; mais pour abréger les calculs, je joindrai à cet ouvrage de nouvelles tables astronomiques des cinq planètes, aussi étendues, mais plus exactes que celles de M. Halley & de M. Cassini. Je ne les avois point données dans la premiere édition de ce livre n'ayant pas eu le temps pour lors de constater divers élémens dont j'avois montré l'incertitude; mais je les ai presque

tous vérifiés depuis quelques années, comme on l'a vu dans le cours de ce VIe. livre.

NŒUDS ET INCLINAISONS DES PLANÉTES.

1332. On a vu dans le livre précédent ce que c'est que les nœuds des planètes (1122, 1137), aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites, & l'effet qui en résulte par rapport à nous; il s'agit actuellement d'indiquer les méthodes astronomiques de trouver la situation de ces nœuds & la quantité de ces inclinaisons.

Premiere méthode pour trouver le nœud.

Lorsqu'une planète n'a aucune latitude vue de la terre elle n'en sauroit avoir vue du soleil, elle est alors dans son nœud (1122), puisqu'elle est dans le plan de l'écliptique; il suffit donc d'observer la longitude géocentrique de la planète, au temps où elle n'a point de latitude, on en conclura sa longitude vue du soleil (1147), & ce sera le lieu du nœud.

1333. Exemple. Le 14 Mai 1747, à 10^h 50′ 43″, de temps vrai, Mars étant fort près de son nœud descendant, M. de la Caille observa la longitude de cette planète 7^s 6° 15′ 10″ réduite à l'écliptique, & sa latitude boréale de 54″; la longitude du soleil pour le même instant, déduite des observations faites ce jour-là, & qu'on pouvoit se contenter de prendre dans les tables, étoit de 1^s 23° 38′ 10″; ainsi l'angle à la terre, ou l'angle d'élongation *LTS* (*fig.* 56), étoit de 162° 37′ 0″: la parallaxe de l'orbe annuel, ou l'angle à la planète *TLS* étoit alors, suivant les tables de M. Cassini, de 11° 11′ 57″; ainsi ajoutant cette quantité à la longitude géocentrique observée 7^s 6° 15′ 10″, on a la longitude héliocentrique de Mars 7^s 17° 27′ 7″; de-là il suit que l'angle de commutation, qui est la différence entre cette longitude & celle de la terre, ou l'angle *LST* étoit de 6° 11′ 3″; en faisant la proportion de l'art. 1145, on trouvera que 54″ de latitude géocentrique

Fig. 56.

géocentrique répondoient à $19'' \frac{1}{2}$ de latitude héliocentrique. M. de la Caille résout ensuite un triangle *PAL*, (*fig.* 54), rectangle en *L*, dont l'angle *A* est de 1° 51′, égal à l'inclinaison de l'orbite de Mars *AP* sur l'ecliptique *AL* (on la trouvera par l'art. 1357), & le petit côté *PL* de $19'' \frac{1}{2}$ latitude héliocentrique de Mars, il a l'autre côté *AL* (3686) de 604″ ou de 10′ 4″, c'est la distance de Mars à son nœud vue du soleil; donc le nœud descendant de Mars vu du soleil étoit alors à 7ˢ 17° 37′ 11″ (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 146). Fig. 54.

1334. Il faut remarquer dans le calcul précédent qu'en observant plusieurs jours de suite la latitude de Mars, on en pourroit conclure le temps où il avoit été sans latitude, éviter la résolution du dernier triangle, & ne supposer point du tout la connoissance de l'inclinaison.

1335. On peut aussi employer à la recherche du lieu du nœud, des observations faites à égales distances des nœuds, lorsque la latitude héliocentrique d'une planète s'est trouvée de la même quantité, car le milieu entre les longitudes héliocentriques trouvées dans les deux cas, sera le lieu du nœud, en le supposant fixe dans l'intervalle des deux observations. Seconde méthode.

Exemple. Le 13 Mars 1693, à 17ʰ 50′, le vrai lieu de Saturne vu de la terre, étoit à 8ˢ 22° 56′ 30″, & sa latitude boréale 1° 24′ 50″; le 3 Mai 1699, à 15ʰ 50′, la longitude étoit de 11ˢ 1° 0′ 50″, & sa latitude australe 1° 22′ 20″. En réduisant au soleil ces deux latitudes observées (1145), on a pour les latitudes héliocentriques de Saturne 1° 24′ 10″, & 1° 24′ 28″, que M. Cassini suppose égales, parce qu'une différence de 18″ n'étoit pas sensible dans les hauteurs méridiennes prises avec les quarts-de-cercles de ce temps-là, mais nous aurons égard à cette différence (1336): les longitudes héliocentriques de Saturne calculées pour les mêmes temps (1147), étoient de 8ˢ 17° 4′ 37″ & 10ˢ 25° 16′ 49″, dont le milieu est 9ˢ 21° 10′ 43″,

c'eſt la longitude du nœud qui réſulte, ſuivant M. Caſſini, de ces deux obſervations (*Elémens d'aſtron. pag.* 389).

Corrections à employer dans cette méthode.

1336. Dans l'intervalle de ces deux obſervations qui eſt de plus de ſix années, le lieu du nœud avoit changé d'environ 3′ 4″, ce qui fait ſur la latitude une différence de 7″, dont la latitude étoit plus petite qu'elle n'eût été ſi le nœud avoit reſté immobile, & qu'il faut, pour une plus grande préciſion, ajouter à la ſeconde latitude héliocentrique, parce qu'elle eût été plus grande au même point du ciel, ſi le nœud de Saturne eût été moins avancé de 3′ 4″ dans la ſeconde obſervation; au moyen de cette ſeconde correction, la latitude ſe ſeroit trouvée de 1° 24′ 35″ pour le 3 Mai 1699, plus grande de 27″ que la premiere latitude, ces 27″ font 11′ 32″, dont il faut diminuer la longitude héliocentrique de Saturne, qui ſuivant des calculs plus exacts devoit être le 13 Mars 1693, de 10ˢ 25° 22′ 6″; par ce moyen l'on a la longitude où il ſe ſeroit trouvé en 1699, s'il avoit eu la même latitude 1° 24′ 10″ que dans la premiere obſervation; cette longitude ſera donc de 10ˢ 25° 10′ 34″, c'eſt la longitude à laquelle ſe ſeroit trouvé Saturne en 1699 avec une latitude de 1° 24′ 10″ égale à celle de 1693 en ſuppoſant que le nœud eût été immobile; or la premiere longitude devoit être de 8ˢ 17° 16′ 6″, la différence eſt 2ˢ 7° 54′ 28″, dont la moitié 33° 57′ 14″, eſt la diſtance de Saturne à ſon nœud en 1693, qui ajoutée à ſa longitude 8ˢ 17° 16′ 6″, donne celle du nœud 9ˢ 21° 13′ 20″. Nous nous en ſervirons encore pour trouver l'inclinaiſon de l'orbite (1360). Ainſi le lieu du nœud ſera de 9ˢ 21° 13′ 20″ pour le 13 Mars 1693, temps de la premiere obſervation, plus avancé de 2′ ½ que ſuivant le calcul de M. Caſſini.

Après avoir indiqué les méthodes qui ſervent à trouver le lieu du nœud, nous allons expoſer ce que l'on ſait actuellement de plus exact ſur la poſition des nœuds de chaque planète, & ſur le mouvement de ces nœuds;

on verra par la conformité des résultats trouvés dans l'un & l'autre nœud, soit ascendant, soit descendant, que ces nœuds sont en effet directement opposés & situés par conséquent sur une ligne droite qui passe par le centre du soleil, comme nous l'avons supposé (1117).

1337. Le Nœud de Mercure ne sauroit se déterminer par des observations meilleures que celles de ses passages sur le soleil dans lesquels sa latitude est presque nulle, & nous en avons un assez grand nombre pour y parvenir avec quelque précision : je les ai tous discutés, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 259. *& suiv.*), & j'en ai tiré une table des époques de la longitude du nœud, calculée en supposant le mouvement séculaire de 1° 15′, tel que le donne l'observation de 1723, comparée à celle de 1753, ensorte que ce mouvement est moindre de 8′ 20″ que le mouvement des étoiles, ou la précession en longitude (917). Nœud de Mercure.

Années.	Epoques calculées.	Epoques observées.
1697.	1s 14° 41′ 30″	1s 14° 41′ 6″
1723.	1 15 1 0	1 15 1 0
1736.	1 15 10 45	1 15 12 59
1740.	1 15 13 45	1 15 14 45
1743.	1 15 16 0	1 15 16 25
1753.	1 15 23 30	1 15 23 30

On accorderoit encore mieux les différentes observations, si l'on diminuoit le diamètre du soleil dans les passages de Mercure sur son disque, ainsi que nous le dirons dans le livre XIe (2159). Son mouvement annuel de 45″.

Ce mouvement du nœud de Mercure, est donc rétrograde par rapport aux étoiles fixes, d'environ 5″ par an, je l'avois fixé de même par les seules observations, mais il s'est trouvé parfaitement d'accord avec celui que m'a donné la théorie de l'attraction, discutée ensuite avec soin dans les *Mém. de l'acad.* pour 1758 & 1761, par la méthode qui sera expliquée dans le

XXIIe. livre (3523), & dont on trouvera le résultat ci-après (1347).

1338. Ainsi le mouvement séculaire du nœud de Mercure, que M. Halley a fait de 1° 23′, & M. Cassini de 1° 24′ 40″, est certainement beaucoup moindre : M. le Gentil en comparant le lieu du nœud qu'il avoit déterminé en 1753, à 1^s 15° 24′ 14″ avec celui que M. Halley avoit fixé en 1677, à 1^s 14° 21′ 3″, trouvoit le mouvement du nœud de 50″ 21 centièmes (*Mém. acad.* 1753, *pag.* 277). Mais M. de l'Isle a cru qu'on devoit le réduire à 37″, ce qui supposeroit 13″ par an pour la rétrocession des nœuds ; car en calculant avec soin les observations faites par Tycho le 22 & le 23 Janvier 1586, M. de l'Isle a trouvé le nœud de Mercure pour ce temps-là, à 1^s 13° 5′ 8″, moins avancé de 7′ $\frac{1}{4}$, que par les tables de M. Halley ; cela prouve du moins que le mouvement du nœud de Mercure est plus lent que M. Halley & M. Cassini ne le supposent ; & il m'a paru toujours impossible que l'action de Vénus & de la terre n'y produisît pas quelque altération. Il est évident qu'une planète attirée sans cesse vers un plan différent de celui de son orbite, doit s'en rapprocher continuellement, c'est-à-dire, y arriver toujours un peu plutôt à chaque révolution, comme nous l'expliquerons (3516). J'ai supposé dans mes tables ce mouvement de 45″ par an, & l'époque pour 1750, 1^s 15° 21′ 15″.

Nœud de Vénus.

1339. Le Nœud de Vénus, suivant les calculs que j'ai faits du passage de cette planète avec la plus grande exactitude, étoit le 3 Juin 1769, à 2^s 14° 36′ 20″, comme on le verra dans le livre XIe ; il n'y a pas une demi-minute d'erreur à craindre dans cette position ; les tables de M. Halley donnoient 2′ 36″ de moins, & celles de M. Cassini, 2′ 25″ de plus ; la différence est peu considérable. M. Hornsby ayant calculé avec soin le lieu du nœud par l'observation d'Horoccius, faite au mois de Décembre 1639, (2040) le trouve à 2^s 13° 27′ 50″, le mouvement seroit donc en 129 ans $\frac{1}{2}$ de

68′ 30″, ou de 31″ 7 par année, c'est-à-dire, de 18″ $\frac{1}{2}$ par rapport aux étoiles fixes, quantité qui est assez d'accord avec celle de 20″ 4, que j'ai tirée des calculs de l'attraction (1347, 3516), & qui me paroît d'une exactitude décisive. M. Cassini avoit déterminé le lieu du nœud par l'observation de Vénus sur le Soleil, le 24 Novem. 1639, à 2ˢ 13° 28′ 22″, détermination qu'il jugeoit aussi la plus exacte; cette observation comparée avec le lieu du nœud observé en 1761, à 2ˢ 14° 31′ 30″, l'on en tire pour le mouvement du nœud 31″ $\frac{1}{4}$ par année, ou 19″ par rapport aux étoiles.

1340. M. Cassini emploie aussi à cette recherche une ancienne observation, c'est celle de Timocharès, faite le 11 Oct. 271 avant J. C. dans laquelle Vénus éclipsa l'étoile ν de l'aile australe de la Vierge; il trouve le lieu du nœud de Vénus par cette observation, de 1ˢ 24° 2′, comparant cette observation avec le lieu du nœud observé en 1698, à 2ˢ 14° 1′ 45″, on a le mouvement de 36″ $\frac{1}{2}$ par année, ou de 14″ par rapport aux étoiles fixes. L'observation de 1639, par laquelle M. Cassini trouve 2ˢ 13° 28′ 22″, comparée avec la position du nœud observée par M. Cassini le 4 Sept. 1698, à 2ˢ 14° 1′ 45″, donne 2″ $\frac{1}{2}$ de plus pour le mouvement annuel par rapport aux étoiles, ou 34″ par rapport aux équinoxes; celles de 1705, de 1710 & de 1731 en différoient très-peu, ensorte que M. Cassini s'en est tenu dans ses tables à un mouvement annuel de 34″ par rapport aux équinoxes; mais si l'on avoit égard au changement de latitude de l'étoile ν (2741); il pourroit en résulter quelque différence dans le lieu du nœud conclu pour le temps de Timocharès. Son mouvement est de 31″.

M. de la Caille, (*Mém. de l'acad.* 1746, *pag.* 181), rapporte une observation qu'il fit du passage de Vénus par son nœud descendant; le 21 Décembre 1746, à 10ʰ 37′ $\frac{1}{2}$ de temps moyen, Vénus avoit 10ˢ 3° 52′ 17″ de longitude géocentrique, & sa latitude étoit nulle; il trouve le nœud à 2ˢ 14° 23′ 10″; il compare cette observation avec celle de M. de la Hire qui détermina

le passage de Vénus par son nœud le 31 Oct. 1692 à 0^h $12' \frac{1}{4}$ du soir, temps moyen, d'où il conclut que Vénus avoit fait à l'égard de son nœud 88 révolutions complettes en 19773^j 10^h $25'$ $15''$, ce qui donne pour chacune 224^j 16^h $45'$ $17''$, & le mouvement annuel du nœud de $38''$, au lieu de 30 que donne la théorie; ces observations sont moins décisives & moins éloignées entre elles que celles de 1639 & de 1761, qui donnent à peu-près le même mouvement que la théorie de l'attraction, & je m'en tiendrai à $31''$, pour le mouvement annuel du nœud de Vénus; avec l'époque pour 1750, 2^s 14° $26'$ $18''$.

Nœud de Mars.

1341. Le Nœud de Mars peut se déterminer de plusieurs manieres; M. Cassini se sert des observations de Tycho, suivant lesquelles le nœud de Mars étoit le 28. Oct. 1595, à 1^s 16° $24'$ $33''$. Le 13 Novem. 1721 M. Cassini trouve qu'il étoit à 1^s 17° $29'$ $49''$, ce qui donne pour le mouvement séculaire $51'$ $47''$, ainsi le mouvement annuel du nœud de Mars seroit de $31''$ 07. (*Elém. d'astron. pag.* 490).

Par la comparaison de la même observation de Tycho avec celles qui furent faites en 1700 à Paris & à Greenwich, lorsque Mars étoit dans son nœud descendant, on trouve le mouvement annuel de $34\frac{1}{4}$ & de $38''\frac{1}{4}$, suivant qu'on emploie les observations de Flamsteed, ou celles de M. Cassini.

1342. Si l'on compare les observations de 1721 avec la détermination de Ptolomée, (*Almag. liv. XIII. c.* 1.), qui place le terme boréal de l'orbite de Mars à la fin du Cancer ou le nœud ascendant à la fin du Bélier, on voit que dans l'intervalle de 1582 ans le mouvement du nœud a été de 17° $30'$ & de $66'$ $22''$ par siecle, c'est-à-dire, pour chaque année, de $39''$ 8, ce qui seroit parfaitement d'accord avec mes calculs faits d'après la théorie, qui donnent $10''\frac{1}{2}$ pour le mouvement du nœud par rapport aux étoiles, ou $39''$ 8 par rapport aux équinoxes. Mais M. Cassini ayant préféré les observations de Tycho, comparées aux siennes & à celles de Flamsteed,

Son mouvement est de 40''.

s'en est tenu dans ses tables à faire le mouvement annuel du nœud de Mars 34″. M. Halley dans ses tables le fait de 38″. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 146), trouve le nœud de Mars à 1ˢ 17° 37′ 11″, moins avancé de 7′ $\frac{1}{3}$, que suivant les tables de M. Cassini, & de 17′ $\frac{2}{3}$ que suivant celles de M. Halley. Dans les mémoires de 1754, il rapporte des observations faites à l'Isle de France en 1753, par lesquelles il trouva le nœud de Mars à 1ˢ 17° 42′ 5″ le 4 Novembre 1753, cette détermination ne diffère que de 36″ de la précédente, quand on les réduit à une même époque. J'ai aussi observé Mars au mois de Novembre 1768, dans le temps qu'il étoit près de son nœud, & j'en ai conclu l'époque de 1769, 1ˢ 17° 44′ 23″ moins avancée de 24′ que dans les tables de Halley. Les observations que j'ai calculées & discutées avec soin, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 212. *& suiv.*), soient aussi très-propres à vérifier cet élément avec beaucoup d'exactitude : en attendant j'ai pris un milieu entre les déterminations précédentes, & je supposerai le nœud de Mars en 1750 à 1ˢ 17° 36′ $\frac{1}{2}$ & le mouvement annuel de 39″ 8.

1343. Le Nœud de Jupiter est déterminé par M. Cassini pour 1705 à 3ˢ 7° 37′ 50″, par un milieu entre plusieurs observations faites à Paris depuis 1692 jusqu'en 1730 ; mais à l'égard du mouvement de ce nœud nous sommes encore dans une fort grande incertitude à ce sujet. Suivant Ptolomée, le nœud étoit de son temps au commencement du Cancer, cela donne le mouvement annuel de 17″. Képler le supposoit dans ses tables Rudolphines de 4″ seulement : ce même mouvement, lorsqu'on emploie la conjonction de Jupiter avec l'étoile du Cancer appellée l'Ane austral, arrivée le 3 Septembre 240 ans avant J. C., paroît à M. Cassini de 24″ 9‴; mais cette observation calculée d'une autre maniere par M. le Gentil, ne donne que 10″. Par l'observation du 26 Septembre 508, rapportée par Boulliaud, dans laquelle Jupiter se trouva en conjonction avec Régulus, M. Cassini trouve 15″ 30‴; Nœud de Jupiter.

au contraire Boulliaud en calculant d'une autre manière la même obſervation, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que la latitude boréale de Jupiter étoit plus grande d'un doigt, ou de 2′ 30″, trouve ce mouvement 24″ 37‴ : M. Caſſini s'en tient dans ſes tables à 24″, tandis que M. Halley l'emploie de 50″, & que par la théorie de l'attraction, je trouve ce mouvement de 57″ ½.

M. le Gentil, dans les mémoires de l'académie pour 1758, ayant calculé diverſes obſervations propres à déterminer le nœud de Jupiter trouve pour 1633, 3ˢ 6° 4′ 50″; pour 1716, 3ˢ 7° 37′ 30″; pour 1753, 3ˢ 8° 16′ 17″ & 3ˢ 8° 21′ 25″. Ces obſervations ſont de Gaſſendi, de Halley, & de M. le Gentil lui-même; en comparant la dernière obſervation ou la poſition de 1753 avec l'obſervation de M. Halley faite en 1716, il trouve 66″ par année pour le mouvement du nœud; le même réſultat ſe trouve encore en comparant l'obſervation de 1753 avec l'obſervation que Gaſſendi fit en 1633: ce mouvement ne s'éloigne pas beaucoup de celui que la théorie m'a donné de 57″ ½; mais il ſemble qu'on ne ſauroit l'accorder avec les anciennes obſervations; il faudroit ſuppoſer une diſtance de plus d'un degré entre Jupiter & l'étoile pour le moment où, ſuivant l'obſervation Caldéenne, Jupiter cachoit entiérement l'étoile.

Son mouvement paroît d'une minute.

Difficulté ſur cette détermination.

1344. Y a-t-il de la mépriſe dans le paſſage de Ptolomée? y a-t-il une accélération réelle dans le mouvement du nœud, ou bien le changement de latitude des étoiles (2741), & leurs dérangemens particuliers ont-ils été aſſez conſidérables pour influer beaucoup dans le calcul des anciennes obſervations; c'eſt ce que je n'entreprens pas de décider; il ſuffit de voir que ce mouvement eſt certainement d'environ 1′ par an, depuis le dernier ſiecle. Je ſuppoſerai donc ſon mouvement de 60″ par année, & ſa longitude en 1750, 3ˢ 8° 16′ en prenant un milieu entre les deux déterminations dont j'ai parlé.

Nœud de Saturne.

1345. Le Nœud de Saturne vers l'an 136 au rapport

rapport de Ptolomée (*Liv.* 13 *ch.* 1) étoit au commencement du Cancer ; M. Cassini l'a trouvé en 1700 à 3^s 21° $13'$ $30''$, le progrès est de 21° $13'$ $30''$ en 1560 années : ainsi le mouvement annuel seroit de $48'' \frac{1}{2}$ par ces observations. (*Elémens d'astronomie pag.* 397).

Les Caldéens observerent le premier Mars 228 ans avant J. C. que Saturne étoit deux doigts au-dessous de l'étoile qui est dans l'épaule australe de la Vierge appellée γ par Bayer : deux doigts répondent environ à $5'$, ainsi la latitude de l'étoile étant supposée constamment de 2° $48'$ $55''$, celle de Saturne étoit de 2° $43'$ $55''$; d'où M. Cassini conclud que la latitude vue du soleil étoit de 2° $27'$ $1''$, la distance de Saturne à son nœud 77° $21'$, & par conséquent le lieu du nœud à 2^s 21° ; ce qui donne le mouvement pour chaque année $56''$ $26'''$. Il le suppose, en effet de $57''$ dans ses tables ; mais la grande distance de Saturne à son nœud rend le résultat de cette ancienne observation peu concluant. Boulliaud dans son astronomie Philolaïque (*pag.* 253), rapporte une occultation de Saturne par la lune arrivée l'an 503, d'où il conclud que le nœud de Saturne étoit alors à 3^s 12° $36'$ $21''$. Si l'on compare cette position avec celle que j'ai trouvée par des observations exactes pour 1769, 3^s 21° $40'$ $47''$, on a le mouvement annuel de $25''$ 8, & Boulliaud trouvoit lui-même $26''$ pour ce mouvement.

Tycho-Brahé observa Saturne fort près de son nœud le 29 Décemb. 1592. M. Cassini (*Elém. d'ast. pag.* 400) ayant calculé cette observation, trouve le nœud ascendant à 3^s 20° $21'$ $5''$; cette observation étant comparée à celles de la fin du dernier siècle qui donnent le nœud de Saturne pour 1700, à 3^s 21° $13'$ $30''$, il en résulte pour le nœud un mouvement annuel de $29''$ $24'''$ seulement. Sur quoi il faut observer que M. Cassini ayant trouvé $1'$ $5''$ de différence entre les déclinaisons conclues le 29 Déc. 1592 de différentes observations, il en résulte $24'$ d'incertitude pour le lieu du nœud con-

clu des observations de ce jour-là ; ce qui changeroit de 14″ le mouvement annuel. Il faut aussi observer que la position déterminée pour 1700 par M. Cassini est le milieu de cinq observations dont une diffère de l'autre d'un degré & 9 minutes sur la position du nœud, différence qui produiroit 39″ sur le mouvement annuel du nœud. Aussi la position du nœud de Saturne & son mouvement, sont de tous les élémens des planètes ceux sur lesquels M. Halley diffère le plus de M. Cassini ; il y a dans les tables de M. Cassini 41′ de plus pour le lieu du nœud en 1750, & 65′ 11″ de plus pour le mouvement séculaire, que dans celles de M. Halley. Pour moi rejettant la première des cinq déterminations de M. Cassini, & réduisant les quatre autres à l'année 1700, je trouve pour l'époque du nœud 3ˢ 21° 14′ 7″, 3ˢ 21° 3′ 14″, 3ˢ 21° 9′ 34″, 3ˢ 21° 18′ 24″, dont le milieu est 3ˢ 21° 11′ 20″ pour 1700 ; comparant cette position avec celle que j'ai observée en 1769, je trouve pour le mouvement annuel du nœud 25″ 6, à-peu-près comme par l'observation de l'an 503.

Incertitude sur son mouvement.

Dans l'opposition de Saturne observée en 1755, cette planète étoit voisine de son nœud : la latitude héliocentrique de Saturne n'étoit le 18 Juillet 1755 que de 10′ 34″, & sa longitude héliocentrique sur son orbite, étoit alors de 9ˢ 25° 35′ 52″ ; une latitude de 10′ 34″ suppose la distance au nœud de 4° 2′ 17″, comme il est aisé de le trouver par la résolution d'un triangle sphérique rectangle (1333), dont un côté est de 10′ 34″, & l'angle opposé de 2° 30′ 36″ inclinaison de l'orbite de Saturne ; ainsi je trouve le lieu du nœud, suivant cette observation, à 3ˢ 21° 33′ 35″ ; les tables de M. Cassini donnoient 32′ 44″ de plus, & celles de M. Halley 11′ 50″ de moins.

Nœud en 1769.

1346. Ayant observé moi-même avec soin l'opposition de 1769, j'ai trouvé qu'il falloit ajouter 15′ à la longitude qui est dans les tables de M. Halley, & supposer pour 1769 3ˢ 21° 40′ 47″ ; il seroit à souhaiter que nous eussions pour les siècles passés une détermi-

nation aussi exacte. Quoi qu'il en soit, le nœud en 1600, suivant les tables Rudolphines, étoit à 3^s 21° 0′, plus avancé de 34′ que M. Cassini ne le trouve par l'observation de 1592; mais Képler ayant discuté plusieurs observations différentes dans la construction de ses tables, l'on doit avoir quelque confiance à sa détermination; en y comparant mon observation de 1769, je trouve le mouvement annuel de 17″½. En comparant l'observation de 1593 avec la mienne, je trouve 27″ par année; cependant les calculs de l'attraction m'ont donné 41″6, ainsi nous devons avouer qu'il est bien difficile de décider quant à présent cette question; les grandes inégalités que j'ai découvertes dans le mouvement de Saturne (1167), font que je n'ose me fier à la théorie seule, & en me rapprochant des observations, je supposerai 30″ par année; & l'époque du nœud pour 1750, 3^s 21° 31′ 17″.

1347. Pour rassembler sous un seul point de vue toutes les recherches précédentes sur les nœuds des planètes, j'ai mis dans les tables suivantes les longitudes des nœuds, & leur mouvement suivant les tables de M. Cassini & de M. Halley, & suivant la théorie de l'attraction (1347. *Mém. acad.* 1768 & 1761), enfin leur position & leur mouvement suivant moi; le signe — marque un mouvement rétrograde par rapport aux étoiles fixes; la troisième colonne de la seconde table est le mouvement annuel par rapport aux étoiles fixes suivant la théorie; la quatrième contient ce mouvement par rapport aux équinoxes, c'est-à-dire, la somme ou la différence entre 50″3 & les nombres de la colonne précédente.

Ce mouvement paroît de 30″.

TABLE de la longitude du Nœud de chaque Planète pour 1750, & de son Mouvement séculaire suivant les Tables de M. Cassini *& de M.* Halley.

	Suivant M. Cassini.		Suivant M. Halley.		Selon nos Tables.
	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.	Mouv. séculaire.	Nœud en 1750.
Mercure,	1s 15° 25′ 20″	1° 24′ 40″	1s 15° 21′ 58″	1° 23 20″	1 15 21 15
Vénus,	2 14 27 45	0 56 40	2 14 23 42	0 51 40	2 14 26 18
Mars,	1 17 45 45	0 56 40	1 17 56 21	1 3 20	1 17 36 30
Jupiter,	3 7 49 57	0 40 9	3 8 15 49	1 23 20	3 8 16 0
Saturne,	3 22 1 4	1 35 11	3 21 20 5	0 30 0	3 21 31 17

TABLE du mouvement annuel des Nœuds de chaque Planète par rapport aux Etoiles fixes, suivant la théorie de l'Attraction, & suivant les Tables de M. Cassini & de M. Halley; avec le mouvement par rapport aux équinoxes, suivant la théorie (3522).

	Suivant les Tables de M. Cassini.	Suivant les Tables de M. Halley.	Suivant la Théorie.	Mouvement par rapport aux équinoxes.	Suivant nos Tables.
Mercure,	0	0	— 5″0	45″ 3	45″
Vénus,	— 17	— 19	— 20 4	29 9	31
Mars,	— 17	— 12	— 10 5	39 8	39,8
Jupiter,	— 27	0	+ 7 2	57 5	60
Saturne,	+ 6	— 32	— 8 7	41 6	30

Remarques sur la théorie de ce mouvement.

1348. Le calcul du mouvement des nœuds que j'ai déduit du principe de l'attraction, se trouve détaillé dans les mémoires de l'académie pour 1758 & 1761, j'en donnerai un abrégé dans le livre XXIIe. (3525), en parlant de l'attraction. Le mouvement du nœud d'une planète est le résultat du mouvement que toutes les autres y produisent; car il n'est aucune d'elles qui n'influe plus ou moins sur le nœud des autres planètes : mais comme la théorie fait trouver ce mouvement du

nœud, sur l'orbite de la planète qui le produit, il est nécessaire de réduire à l'écliptique tous ces mouvemens qui se font sur des orbites différentes, pour en composer un seul mouvement sur l'écliptique; c'est cette réduction qui rend direct le mouvement de Jupiter; car il est naturellement rétrograde sur l'orbite de Saturne qui en est la cause principale; mais il devient direct, quand on le rapporte à l'écliptique.

1349. Soit *CB* (*fig.* 75) l'écliptique, *CA* l'orbite de Jupiter, *BA* l'orbite de Saturne; la longitude du nœud *C* de Jupiter en 1760 est de 3s 8° 25′, suivant les tables de M. Halley; la longitude du nœud *B* de Saturne, est de 3s 21° 23′, la différence *CB* est de 12° 57′. L'inclinaison *C* de l'orbite de Jupiter est de 1° 19′, & l'inclinaison *B* de l'orbite de Saturne est de 2° 30′. En résolvant le triangle *ABC*, on trouve *AC* de 26° 41′, & l'angle *A* ou l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne 1° 15′. Par l'effet naturel de l'attraction de Saturne sur Jupiter, le point d'intersection *A* de l'orbite de Jupiter sur celle de Saturne, doit rétrograder dans le sens contraire au mouvement de Jupiter, comme on le verra dans la théorie de l'attraction, mais l'angle des deux orbites ne change point par le mouvement du nœud; ainsi le nœud ira de *A* en *a*, & l'orbite de Jupiter *AC* passera dans la situation *ac*, sans que l'angle *A* éprouve aucun changement, les cercles *AC* & *ac* resteront paralleles, dans leurs parties voisines de *A a*, & leur intersection *D* sera éloignée du point *A* de 90°. Ainsi le triangle *ABC* se changera en un triangle *aBc*, les angles *A* & *B* étant constans; & le nœud *C* de l'orbite de Jupiter sur l'écliptique passera en *c*; il aura donc un mouvement direct *Cc*, quoique le mouvement *Aa* ait été rétrograde; ainsi quoique l'action des planètes les unes sur les autres produise dans les nœuds un mouvement *rétrograde* sur l'orbite de la planète troublante ou de la planète qui par son attraction produit ce mouvement, cependant le mouvement des nœuds sur l'écliptique devient quelque-

Fig. 75.

fois direct ou suivant l'ordre des signes, comme dans le cas du nœud de Jupiter dont je viens de parler.

Dans quel cas le mouvement devient direct.

1350. En général lorsque la planète troublante a son angle d'inclinaison B plus grand que l'angle C de la planète troublée, le mouvement du nœud de celle-ci est direct sur l'écliptique; au contraire si l'angle B de la planète troublante sur l'écliptique est plus petit que l'angle C, comme dans la fig. 76, le point A tombe à droite du point C; c'est-à-dire, de l'autre côté de C par rapport au point B, comme on le voit dans la figure; le mouvement du nœud A étant rétrograde, le mouvement Cc sur l'écliptique CB le devient également. *Ainsi quand la planète troublante a son angle d'inclinaison plus petit que celui de la planète troublée, elle ne produit en général dans le nœud de celle-ci qu'un mouvement rétrograde.*

Fig. 76.

Le terme de ce mouvement où la plus grande valeur de BC arrive lorsque $\sin AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang.}\,A^2}{\text{tang.}\,C^2}}$, comme nous le démontrerons dans le livre XVIIIe. à l'occasion des satellites de Jupiter où les mêmes règles nous serviront.

1351. Si l'on range les planètes suivant l'ordre de leurs inclinaisons, en consultant la table de l'art. 1376, & qu'on mette la première, celle qui a le plus petit angle d'inclinaison, on aura l'ordre suivant : Jupiter, Mars, Saturne, Vénus & Mercure; alors on sera sûr que la première fera rétrograder sur l'écliptique les nœuds de toutes les autres; la seconde fera rétrograder le nœud des trois suivantes, mais donnera un mouvement direct au nœud de celle qui la précède; la troisieme produira un mouvement direct sur les deux premières, & rétrograde sur les deux dernières; la quatrieme rendra direct le nœud des trois premières, & rétrograde le nœud de la dernière; la dernière ne pourra produire qu'un mouvement direct sur toutes les autres planètes.

1352. Quand on a trouvé par les règles de l'ar-

traction (3522) le mouvement $A\,a$ (*fig.* 75) du nœud de Jupiter sur l'orbite AB de Saturne, il faut en conclure le mouvement Cc sur l'écliptique. Pour cela on emploîra les formules différentielles du XXIIIe. livre. Dans un triangle ABC dont les deux angles A & B sont constans (1349), la différentielle Cc ou la petite augmentation du côté BC est égale à la différentielle $A\,a$ du côté AB, multipliée par $\frac{\text{sin. } A. \text{ cos. } AC.}{\text{sin. } C.}$ (3842). En employant les valeurs de ces trois quantités (1349) on trouvera que si le mouvement $A\,a$ est de $8''\ 56$ par année, comme le donnent les calculs de l'attraction, le mouvement Cc sur l'écliptique ne sera que de $7''\ 26$. Dans la *fig.* 76, on auroit exactement la même équation $Cc = \frac{A\,a. \text{ sin. } A. \text{ cos. } AC.}{\text{sin. } C}$. C'est ainsi qu'il faut réduire à l'écliptique le mouvement du nœud de chaque planète produit par l'attraction de chacune des autres planètes. Nous avons placé ici ces réflexions, parce qu'elles sont nécessaires aux Astronomes, indépendamment du calcul de l'attraction : elles avoient échappé à M. Bradley lorsqu'il croyoit que le mouvement direct du nœud du 4e. satellite étoit contraire aux loix de l'attraction, comme nous le dirons dans le XVIIIe livre (2967); ce sont ces considérations qui m'ont fait découvrir la cause des changemens singuliers qui ont lieu dans les inclinaisons des satellites, & que personne avant moi n'avoit même soupçonnée (2944).

Fig. 75.

1353. Le mouvement du nœud d'une planète sur l'orbite d'une autre planète produit un mouvement de l'axe de l'orbite troublée autour de l'axe de l'orbite de la planète troublante; par exemple, quand on dit que Saturne par son action sur Jupiter fait rétrogader les nœuds de l'orbite de Jupiter, cela revient au même que si l'on disoit l'axe de l'orbite, ou la ligne qui passe par les poles de l'orbite de Jupiter & qui est perpendiculaire au plan de cette orbite, tourne autour de l'axe de l'orbite de Saturne, & le pole de l'orbite de Jupiter décrit autour du pole de l'orbite de Saturne

Mouvement d'un pole autour d'un axe.

un petit cercle dont le rayon eſt de 1° 15′, c'eſt-à-dire, égal à la quantité de l'inclinaiſon mutuelle de ces deux orbites l'une ſur l'autre.

Pour faire comprendre le rapport ou plutôt l'identité de ces deux choſes ; ſoit *S fig.* 77 le centre commun de deux orbites *ANB*, *CND*, dont les plans ſont inclinés d'un degré l'un ſur l'autre ; *PSO* & *ESL*, les axes de ces mêmes orbites qui leur ſont perpendiculaires ; *P* le pole de l'orbite *ANB*, *E* le pole de l'orbite *CND*, *EP* la diſtance de ces poles, égale à l'inclinaiſon des deux orbites ; ou à la quantité dont le point *B* eſt éloigné du point *D*. Si l'on tire par les deux poles *P* & *E* un cercle *PEBD*, il rencontrera les deux orbites à 90° des nœuds *N*, *M*, de chacune ; l'arc *BD* égal à l'arc *PE* marquera la plus grande diſtance ou l'inclinaiſon des deux orbites, parce que les arcs *PB* & *ED*. ſont chacun de 90°, auſſi bien que les arcs *NB*, *MB*, *ND*, *MD*. Mais ſi le nœud *N* change de poſition, les points *B* & *D* de la plus grande diſtance changeront de la même quantité, parce qu'ils ſont toujours néceſſairement à 90° des nœuds *N* & *M* ; donc le cercle *PEBD* changera également, & le pole *E* avancera de la même quantité dans le petit cercle *ER*. On peut le voir d'une manière plus ſenſible en faiſant un demi-cercle de carton qui ait à ſon centre une aiguille perpendiculaire à ſon plan ; on l'inclinera ſur un autre cercle tracé ſur la table, qui ait auſſi une aiguille à ſon centre ; & en faiſant tourner le premier ſur le ſecond ſans changer leur inclinaiſon & ſans que leurs centres ſe quittent, on verra l'axe du premier décrire un cône autour de l'axe du ſecond, ou le pole du premier décrire un cercle autour du pole du ſecond ; *ainſi le mouvement du nœud d'un cercle ſur un autre cercle ſuppoſe le mouvement circulaire du pole de l'un autour du pole de l'autre.* Nous ferons pluſieurs fois uſage de cette propoſition, dans les livres XVIe. & XVIIe. (2707, 2731, 2862).

Fig. 77.

Inégalité des mouvemens des nœuds.

1354. Le mouvement du nœud d'une planète ſur l'écliptique

l'écliptique se réduit donc au mouvement du pole de l'orbite de cette planète autour du pole de l'écliptique; mais ce mouvement ne sera pas uniforme, parce qu'il est l'assemblage des mouvemens particuliers que chacune des autres planètes produit sur le nœud de celle-ci, lesquels mouvemens ont chacun des modifications différentes parce qu'ils dépendent de la situation des nœuds, & de la quantité des inclinaisons. Aussi les mouvemens des nœuds des planètes déduits de l'attraction (1347) ne sont exacts que pour un petit nombre de siècles.

1355. L'INCLINAISON d'une planète est l'angle que le plan de son orbite fait avec le plan de l'écliptique (1123); la latitude héliocentrique (1138) de cette planète, lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds, est égale à cette inclinaison, parce que la planète est alors aussi éloignée qu'elle puisse être du plan de l'écliptique. Déterminer les inclinaisons.

1356. Ainsi pour trouver l'inclinaison d'une orbite il suffit d'observer la latitude de la planète lorsqu'elle est à 90° des nœuds, & de réduire cette latitude observée ou géocentrique, à la latitude héliocentrique; mais comme cette dernière réduction suppose connue la parallaxe du grand orbe, on cherche à éviter cette condition par la méthode suivante.

1357. On choisit le temps où le soleil est dans le nœud de la planète, c'est-à-dire, nous paroît à la même longitude, que la planète quand elle est dans son nœud, parce qu'alors la terre passe en *T* sur la ligne des nœuds *NST* (*fig.* 78), ce qui rend la détermination de l'inclinaison fort simple. Supposons que la planète se trouve pour lors au point *A* de son orbite, de manière qu'ayant abaissé la perpendiculaire *AB* sur le plan de l'écliptique, ou de l'orbite de la terre prolongé jusques vers la planète, la ligne *TB* qui marque son lieu réduit à l'écliptique soit perpendiculaire à la ligne *TSN* dans laquelle se trouvent le nœud & le soleil; l'angle d'élongation *BTS* étant de 90°; alors les lignes *AT* & *BT* sont perpendiculaires à la commune section *TN*, Première méthode. Fig. 78.

Fig. 78. l'une dans le plan de l'orbite, & l'autre dans le plan de l'écliptique; elles font donc entr'elles le même angle que les deux plans, c'eſt-à-dire, un angle égal à l'inclinaiſon que l'on cherche (1121): or l'angle *ATB* n'eſt autre choſe que la latitude même de la planète vue de la terre (1123); donc *la latitude obſervée ſera elle-même l'inclinaiſon de l'orbite.* Au reſte il eſt rare de rencontrer ces deux circonſtances enſemble, c'eſt-à-dire, le ſoleil dans le nœud, & la planète à 90° du ſoleil; d'ailleurs cette dernière condition ne ſe rencontre que dans les planètes ſupérieures, ainſi nous avons beſoin d'une règle plus générale pour la détermination des inclinaiſons.

Seconde méthode. 1358. Je ſuppoſe qu'on ait obſervé la latitude d'une planète, vue de la terre, quelle qu'elle ſoit, pourvu que le ſoleil ſoit dans le nœud ou à-peu-près; ſoit *P* la planète en un point quelconque *P* de ſon orbite, la terre étant toujours en *T* dans la ligne des nœuds *TSN*; on abaiſſe la perpendiculaire *PL* de l'orbite de la planète ſur le plan de l'écliptique, on tire des points *P* & *L* les perpendiculaires *PR* & *LR* ſur la commune ſection des deux plans; l'angle *PRL* de ces deux perpendiculaires ſera égal à l'angle des deux plans, c'eſt-à-dire, à l'inclinaiſon de l'orbite ſur le plan de l'écliptique (1121); l'angle *LTP* ſera égal à la latitude géocentrique de la planète, l'angle *RTL* égal à l'élongation de la planète (1142); alors la propriété ordinaire des triangles rectilignes tels que *RTL* & *PTL* rectangles en *R* & en *L* donnera les deux proportions ſuivantes.

$$\left.\begin{array}{l} TL : RL :: R : \text{ſin. } RTL \\ TL : PL :: R : \text{tang. } LTP \end{array}\right\} \text{donc } \begin{array}{l} RL : PL :: \text{ſin. } RTL : \text{tang. } LTP. \end{array}$$

Mais dans le triangle *PRL* rectangle en *L* on a cette autre proportion $RL : PL :: R : \text{tang. } PRL$; donc en comparant la 3e. proportion avec cette dernière, on aura ſin. $RTL : \text{tang. } LTP :: R : \text{tang. } PRL$, c'eſt-à-dire, que le *ſinus de l'élongation eſt au rayon comme*

la tangente de la latitude géocentrique observée est à la tangente de l'inclinaison. Règle pour avoir l'inclinaison.

1359. Exemple. Le 12 Janvier 1747 à 6^h 6′ 33″ du matin, M. de la Caille observa la longitude de Saturne, 6^s 26° 12′ 52″, & sa latitude boréale 2° 29′ 18″, le soleil étoit alors à 9^s 21° 47′, c'est-à-dire, dans le nœud de Saturne, ou du moins il n'en étoit éloigné que de 12 minutes selon les tables de M. Cassini, ce qui ne peut produire aucune erreur sensible dans le résultat. En appliquant à cette observation l'analogie précédente, on trouve l'inclinaison de l'orbite de Saturne 2° 29′ 45″, au lieu de 2° 30′ 10″ que donne M. Halley. (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 135).

1360. Lorsqu'on détermine le lieu du nœud d'une planète par le moyen de deux latitudes égales (1335), soit que ces latitudes soient prises avant & après le passage d'une planète par ses limites, ou qu'elles soient prises avant & après le passage par le nœud, les mêmes observations peuvent déterminer à la fois non-seulement le nœud, mais encore l'inclinaison de l'orbite. Troisième méthode.

Exemple. Le 13 Mars 1693 à 17^h 50′ M. Cassini observa la longitude de Saturne 8^s 22° 56′ 30″, & sa latitude géocentrique boréale 1° 24′ 50″ (*Elém. d'astron. pag.* 388 *&* 396); les conclusions qu'il tire de cette observation dans les deux endroits de son ouvrage que je viens de citer n'étant pas les mêmes, j'ai réfait les calculs, & j'ai trouvé le lieu héliocentrique de Saturne 8^s 17° 16′ 6″, en corrigeant les tables par les observations. Le lieu du soleil étoit 11^s 24° 23′ 18″, & par conséquent l'élongation 88° 33′ 12″, & la commutation 82° 52′ 48″, donc en suivant la proportion demontrée (1145), on trouve que la latitude héliocentrique de Saturne étoit de 1° 24′ 12″ 4. Cette observation comparée avec celle du 3 Mai 1699 donne, suivant mon calcul (1336), 9^s 21° 13′ 20″ pour le lieu du nœud: retranchant de ce lieu celui de Saturne vu du soleil 8^s 17° 16′ 6″, on a la distance de Saturne à son nœud

descendant, 33° 57′ 14″ vue du soleil, qui est l'arc *LA* de l'écliptique (*fig.* 54) : ainsi dans le triangle sphérique *PAL* rectangle en *L*, on connoît les côtés *LA* & *PL*, on fera cette proportion : le sinus de la distance au nœud est au sinus total, comme la tangente de la latitude est à la tangente de l'angle *A*, l'on aura l'inclinaison véritable de l'orbite de Saturne 2° 30′ 50″ 6.

Fig. 54.

Inconvénient de cette méthode.

1361. Cette méthode qui détermine à la fois l'inclinaison & le nœud d'une planète par deux observations de latitudes égales, est moins exacte que celle où l'on détermine les deux choses séparément, en employant une observation faite dans le nœud pour déterminer le nœud, & une observation faite dans une des limites pour avoir l'inclinaison de l'orbite. En effet si les deux observations correspondantes sont près du nœud, elles déterminent mal l'inclinaison de l'orbite; puisqu'alors la latitude est petite & qu'on ne doit pas déterminer une quantité plus grande par le moyen de celle qui est moindre; au contraire si ces deux observations sont trop près des limites, elles sont peu propres à déterminer le lieu du nœud; par exemple, à 30° du nœud la latitude d'une planète n'est que la moitié de son inclinaison; si l'on se trompe de 10″ dans la latitude observée, on sera en erreur de 20″ sur l'inclinaison cherchée; ainsi cette observation sera moins favorable de moitié que si l'on avoit observé la planète dans ses limites. D'un autre côté le changement de latitude d'un jour à l'autre n'étant alors que les $\frac{87}{100}$ de celui qu'elle éprouve dans les nœuds, on aura un huitième moins d'exactitude pour le lieu du nœud que si l'on eût observé la planète dans son nœud. Si l'on prend les deux latitudes correspondantes & égales à 45° des nœuds, la latitude n'étant alors que les $\frac{7}{10}$ de l'inclinaison, une erreur de 7″ sur l'observation des latitudes que l'on compare, en produira 10 sur l'inclinaison que l'on veut en conclure, & en même temps l'erreur que l'on com-

mettra sur le lieu du nœud sera plus grande dans le rapport de 10 à 7, que celle qu'on auroit pu commettre en observant la planète dans le nœud.

1362. Pour bien sentir la loi de ces différens avantages il faut considérer que la latitude augmente comme le sinus de la distance au nœud, parce que dans un triangle sphérique tel que *PAL* (*fig.* 54), on a cette proportion sin. *PL* : sin. *PA* : : sin. *A* : 1, or les deux derniers termes étant constans, le sinus de *PL* & celui de *PA* seront toujours dans le même rapport entre eux; ainsi la latitude *PL* qui à cause de sa petitesse est proportionnelle à son sinus croîtra comme le sinus de la distance au nœud *PA*; mais on verra dans le livre XXIe (3307) que la petite variation d'un sinus est à celle de l'arc, comme le cosinus de l'arc est au rayon, c'est-à-dire, qu'à 30 degrés du nœud, le cosinus étant les $\frac{87}{100}$ du rayon, la variation du sinus n'est que les $\frac{87}{100}$ de celle de l'arc, ou de celle que ce même sinus éprouvoit dans sa naissance, (quand l'arc & le sinus étoient l'un & l'autre très-petits & croissoient également); ainsi puisque *PL* croît comme le sinus de la distance au nœud, & que la variation de ce sinus est proportionnelle au cosinus, la petite augmentation qu'éprouve la latitude d'un degré à l'autre sera aussi proportionnelle au cosinus de l'argument de latitude; & comme l'on observe la position du nœud par le moyen de la latitude, avec d'autant plus de précision que la latitude augmente alors plus rapidement, l'avantage ou la précision que l'on trouve à déterminer le lieu du nœud par le moyen de la latitude, est aussi proportionnel au cosinus de l'argument de latitude; ainsi à 60° du nœud l'avantage est réduit à la moitié, tandis qu'à 30° il n'y avoit de perdu que les $\frac{13}{100}$ ou le demi-quart de l'avantage qu'on avoit eu dans le nœud.

Mesure de l'avantage que l'on trouve.

Fig. 54.

1363. A l'égard de l'avantage qu'on trouve à déterminer l'inclinaison par le moyen d'une latitude observée, il est proportionnel au sinus même de la distance au nœud, parce que la latitude observée suit le même rapport; si d'une latitude d'un degré l'on veut conclure une

inclinaiſon qui eſt de deux, comme cela arrive quand on a obſervé à 30 degrés du nœud, on s'expoſe dans le réſultat à une erreur double de celle de l'obſervation même, c'eſt-à-dire, qu'on n'a que la moitié de l'avantage qu'on devroit ſe procurer. Auſſi dans les différentes déterminations que je rapporterai bien-tôt des inclinaiſons planétaires, j'aurai toujours ſoin de marquer quelle étoit la diſtance au nœud, pour faire juger du degré de préciſion dont elles ſeront ſuſceptibles.

1364. J'ai dit que plus la latitude augmentoit rapidement, plus il y avoit de préciſion & d'avantage à déterminer le lieu du nœud par ſon moyen; l'on peut s'en aſſurer par le même raiſonnement qui a ſervi à prouver que l'équinoxe ſe déterminoit avec plus d'exactitude quand la déclinaiſon du ſoleil augmentoit avec vîteſſe (883).

Cas où l'effet de l'inclinaiſon ſe multiplie.

1365. Dans le choix des oppoſitions ou des conjonctions que l'on prend pour déterminer l'inclinaiſon d'une planète ſupérieure, on choiſit celles où la latitude géocentrique eſt la plus grande qui ſoit poſſible, afin que l'erreur commiſe ſur cette inclinaiſon devienne la plus petite; c'eſt ce que l'on fait pour tout autre élément; on choiſit les cas où ſon effet eſt le plus grand, le plus multiplié, le plus ſenſible. L'inclinaiſon de l'orbite de Vénus quoiqu'elle ne ſoit que de 3° 23′, produit dans certains cas pour nous une latitude géocentrique de 8° $\frac{2}{3}$, comme cela arriva dans la conjonction inférieure de Vénus obſervé le 2 Sept. 1700; il eſt évident que ſi l'on a 10″ d'erreur à craindre dans une latitude obſervée, il vaut mieux que ce ſoit dans cette circonſtance où il n'en réſulte que 4″ d'erreur ſur l'inclinaiſon; il faut convenir cependant que ſi l'on s'étoit trompé de 10″ dans cette obſervation, quoiqu'il n'en réſultât que 4″ ſur l'inclinaiſon, il n'en ſeroit pas moins vrai qu'on auroit encore 10″ d'erreur à craindre une autre fois dans une pareille ſituation.

Inclinaiſon de Mercure.

1366. L'INCLINAISON DE MERCURE a été déterminée par M. Caſſini, au moyen de l'obſervation du

21 Mai 1715, faite à 10^h 39′ du matin; M. Maraldi détermina le lieu de Mercure à 1^s 8° 36′ 0″ & sa latitude méridionale à 2° 23′ 55″; cette planète étoit alors à 10^s 29° 14′ 55″, vue du soleil, & par conséquent éloignée de 75° 42′ de son nœud supposé à 1^s 14° 57′; le lieu du soleil étoit à 1^s 29° 38′ 14″, d'où M. Cassini conclut que la latitude héliocentrique étoit de 6° 41′ 40″, & l'inclinaison de l'orbite 6° 54′ 12″. (*Elémens d'astronomie*, *pag.* 616).

1367. Le 16 Juillet 1731 à 10^h 32′ 47″ du matin, M. Cassini détermina le lieu de Mercure à 3^s 3° 2′ 35″ avec 2° 2′ 20″ de latitude méridionale; sa distance au nœud calculée par les tables étoit de 49° 16′; d'où il suit que sa latitude héliocentrique étoit de 5° 15′ 30″ & l'inclinaison de l'orbite 6° 55′ 30″; mais cette observation m'a paru défectueuse par l'examen que j'en ai fait, en travaillant à la théorie de Mercure. Les observations de Mercure étant rares, on ne doit pas être étonné de trouver dans cette détermination quelques minutes d'incertitude.

1368. M. le Gentil observa Mercure dans le méridien le 5 Octobre 1750, & il en conclut sa longitude 217° 18′ 19″ & sa latitude australe 2° 50′ 23″, le lieu du soleil étoit pour lors à 6^s 12° 8′ 52″ $\frac{1}{2}$, l'angle de commutation 78° 31′ 23″ $\frac{1}{2}$ la latitude héliocentrique 6° 31′ 23″, d'où il conclut l'inclinaison de 7° 1′ 0″.

M. de Thury, le 6 Mai 1751, observa Mercure dans le méridien à 1^h 0′ 47″ $\frac{1}{6}$, M. le Gentil observoit en même temps la hauteur méridienne, & il en conclut la longitude de Mercure 2^s 0° 50′ 36″ & la latitude boréale 1° 51′ 15″; le lieu du soleil étoit alors 1^s 15° 33′ 14″ $\frac{1}{4}$ & l'angle de commutation 108° 31′ 23″, d'où il résulte que l'inclinaison de Mercure étoit de 6° 59′ 30″ $\frac{1}{2}$ (*Mém. acad.* 1753, *pag.* 277). M. Halley la suppose de 6° 59′ 20″, & M. Cassini de 7° 0′ 0″, je la supposerai également en nombres ronds de 7° 0″. Elle est de 7° 0′.

1369. L'INCLINAISON DE VÉNUS sur l'écliptique est facile à déterminer exactement, lorsqu'on observe Inclinaison de Vénus.

ses conjonctions inférieures dans le temps de ses plus grandes latitudes, c'est-à-dire, quand elle est à 90° de ses nœuds; car alors on n'a aucun besoin de connoître la position exacte du nœud; & sa distance à la terre étant trois fois plus petite que sa distance au soleil, les erreurs qu'on peut commettre sur sa latitude deviennent trois fois moindres sur l'inclinaison (1365). Le 2 Septembre 1700 la latitude de Vénus fut observée à Paris de 8° 40′ 15″ vers le midi, elle étoit à 11ˢ 10° 20′ 20″ de longitude vue du soleil, & par conséquent à 86° 22′ de son nœud; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique étoit de 3° 22′ 38″, & l'inclinaison de son orbite 3° 23′ 5″. Le 28 Août 1716 à 23ʰ 45′ 37″ & 7ʰ 10′ après sa conjonction qui étoit arrivée à 11ˢ 5° 49′ 2″, la latitude de Vénus fut observée de 8° 35′ 24″, Vénus étant alors à 11ˢ 6° 17′ 45″ de longitude vue du soleil, & à 82° 8′ de son nœud; d'où il résulte que sa latitude héliocentrique étoit de 3° 21′ 16″, & l'inclinaison de son orbite 3° 23′ 10″. (*Elém. d'astron. pag.* 574); ainsi cet élément est connu avec exactitude; M. Cassini & M. Halley sont d'accord à supposer cette inclinaison de 3° 23′ 20″, dans leurs tables, M. de la Hire la supposoit de 3 degrés 23′ 5″.

Elle est de 3°23′ un tiers.

Inclinaison de Mars.

1370. L'INCLINAISON DE MARS a été déterminée par une observation de Flamsteed du 3 Mars 1694, calculée par M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag.* 492); Mars étant à 89° de son nœud, & sa latitude observée 3° 30′ 0″, l'inclinaison fut trouvée 1° 50′ 52″

M. le Gentil ayant calculé cette observation sur d'autres élémens trouve l'inclinaison, 1 51 14

Par une autre observation de Flamsteed du 27 Mars 1694, à 78° 31′ du nœud M. Cassini trouve, 1 50 50

M. le Gentil ayant calculé cette même observation (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 275) trouve cette inclinaison, 1 51 12

Suivant

Suivant une observation faite à Paris le 2 Novembre 1695, à 56° 9′ du nœud, (*Elém. d'astron. pag.* 494),	1° 50′ 50″
Par M. le Gentil, en calculant l'opposition du 8 Août 1687 observée à Paris, à 90° du nœud, la latitude étant de 6° 50′ 40″,	1 50 50
Suivant l'opposition observée le 25 Août 1593 par Tycho-Brahé, l'inclinaison de Mars est de	1 50 33
M. le Gentil par la conjonction de Mars avec ι des Gémeaux au mois de Mars 1756, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 259), Mars étant à 85° de son nœud, trouve par un milieu entre six observations qui ne différoient pas de 9″, que cette inclinaison est de	1 51 20
Par la hauteur méridienne de Mars observée le 11 Février 1756, à 70° 45′ du nœud,	1 51 12½
Par la hauteur méridienne observée le 29 Janvier 1754, à 56° 12′ du nœud, (*Ibid. p.* 200)	1 51 31
Par l'opposition du 14 Septembre 1751, à 56° 52′ du nœud, (*page* 262) 1° 51′ 52″, mais ensuite page 274 elle n'est marquée que	1 50 53

1371. M. le Gentil y a aussi employé les observations de Boulliaud, tirées d'un manuscrit latin dont M. le Monnier étoit dépositaire, & dont il y a une copie au dépôt de la marine; mais ces observations n'étant fondées que sur des distances estimées sans aucun instrument, leur résultat n'ajouteroit rien à la certitude qui naît des observations précédentes; le milieu entre les résultats que donne M. le Gentil (*pag.* 277), comme

Elle est de 1° 51′.

tirés de ses propres observations est 1° 51′ 4″; M. Halley la suppose dans ses tables de 1° 51′ 0″, & M. Cassini 1° 50′ 54″. Les observations paroissent donc prouver assez bien que l'inclinaison de Mars est de 1° 51′ 0″. Nous parlerons bientôt de la diminution qu'elle éprouve (1379).

Inclinaison de Jupiter.

1372. L'INCLINAISON DE JUPITER suivant l'observation faite à Greenwich le 21 Déc. 1690 par Flamsteed, à 86° du nœud, calculée par M. Cassini, (*pag.* 444) est de 1° 19′ 23″

L'observation faite par Hévélius le 28 Mars 1661, à 88° ½ du nœud, donne pour l'inclinaison, 1 20 25

L'observation faite à Paris le 2 Avril 1673, à 84° 0′ du nœud, suivant M. Cassini (*pag.* 445) donne 1 19 52

Celle du 16 Sept. 1690, à 87° du nœud, 1 19 41
Celle du 2 Oct. 1702, à 88° du nœud, 1 19 4
Celle du 8 Oct. 1714, à 83° du nœud, 1 18 53
Celle du 20 Mars 1720, à 83° du nœud, 1 20 14
Celle du 13 Oct. 1726, à 77° ½ du nœud, 1 19 20

Ensorte que par un milieu M. Cassini estime cette inclinaison de 1° 19′ 38″; celle de ses tables est 1° 19′ 30″.

M. le Gentil détermine l'inclinaison de Jupiter (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 44) par une conjonction de Jupiter avec l'étoile θ de la Vierge, observée par Flamsteed & Picard en 1673, à 84° du nœud (*Philos. transact.* 1673, *n°.* 94). 1 18 28

Et par l'opposition de 1750, à 67° ½ du nœud (*pag.* 46). 1 19 2

Elle est de 0 19′ 10″.

1373. J'ai observé avec soin l'opposition de Jupiter le 6 Avril 1768, dans sa plus grande latitude, & j'en ai conclu l'inclinaison de son orbite 1° 19′ 4″, à 6″ près comme dans M. Halley (*Mém. acad.* 1768). L'incli-

naison dans les tables de M. de la Hire est 1° 19′ 20″ dans celles de M. Cassini 1° 19′ 30″, & dans celles de M. Halley 1° 19′ 10″, je la supposerai dans mes tables de cette même quantité.

1374. L'INCLINAISON DE SATURNE est déterminée dans M. Cassini (*pag.* 394) par une observation du 20 Avril 1688, faite à 11h 23′. Saturne fut observé à 6s 20° 57′ 30″ de longitude, avec une latitude boréale de 2° 47′ 50″; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique étoit de 2° 30′ 48″. Saturne étoit presque dans ses limites, & l'inclinaison se trouve par cette observation de 2° 30′ 50″ Inclinaison de Saturne.

L'observation du 14 Avril 1688 donne, 2 30 37

Le 25 Décemb. 1703 à 6h 51′ du soir Saturne fut observé à 0s 15° 52′ 30″ de longitude, avec 2° 34′ 10″ de latitude australe; d'où M. Cassini conclut que sa latitude héliocentrique, égale pour lors à l'inclinaison de son orbite, étoit 2° 30′ 0″.

Le 13 Mars 1693 & le 3 Mai 1699, la latitude de Saturne ayant été observée à 34° du nœud, M. Cassini en conclut l'inclinaison de 2° 30′ 44″, mais suivant mon calcul (1360) 2° 30′ 51″ Elle est de 2° 30′ 20″.

M. de la Caille en 1747 l'a trouvée (1359) de 2 29 45

Le milieu entre ces cinq déterminations est de 2 30 24

M. Halley la suppose de 2° 30′ 10″, & je m'en tiendrai à 2° 30′ 20″ dans mes tables.

1375. Suivant les calculs que M. Euler a faits de l'attraction de Jupiter sur Saturne, dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1748, *pag.* 77, cette attraction peut à peine produire 5″ de variation dans l'inclinaison de Saturne; ainsi cette inégalité périodique est absolument négligeable : j'ai trouvé qu'il en est de même des autres planètes; leurs inclinaisons n'ont presque aucune inégalité périodique, dont nous ayons besoin de tenir compte dans nos calculs. Les Inclinaisons n'ont aucune inégalité périodique.

1376. Pour rassembler sous un même point de vue les résultats précédens, & faire juger de la différence ou de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les inclinaisons des orbites planétaires, nous allons rapporter celles qui sont établies dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, & celles que nous avons adoptées dans nos tables; on verra que la plus grande différence est pour l'inclinaison de Mercure, & cependant elle n'est que de 40″ entre M. Cassini & M. Halley. Nous avons mis dans la même table la plus grande réduction, parce qu'elle est une suite nécessaire de l'inclinaison, étant égale à la moitié du sinus verse de l'inclinaison (1133).

TABLE de l'inclinaison des Orbites & de la plus grande réduction à l'écliptique.

	Képler.	Halley.		Cassini.		Suivant mes Tables.
	Inclinaison.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.	Réduct.	Inclinaison.
Mercure,	6° 54′ 0″	6° 59′ 20″	12′ 49″	7° 00′ 00″	12′ 52″	7 0 0
Vénus,	3 22 0	3 23 20	3 0	3 23 20	3 0	3 23 20
Mars,	1 50 30	1 51 0	0 54	1 50 54	0 54	1 51 0
Jupiter,	1 19 20	1 19 10	0 27	1 19 30	0 29	1 19 10
Saturne,	2 32 0	2 30 10	1 38	2 30 36	1 39	2 30 20

Nouvelle équation pour les inclinaisons.

1377. Les calculs de l'attraction, par lesquels j'ai recherché les mouvemens des nœuds des planètes produits par leurs attractions réciproques, m'ont fait découvrir en 1761 une chose qu'on n'avoit pas encore soupçonnée, c'est que leurs inclinaisons sur l'écliptique ne sauroient être constantes : j'ai trouvé, par exemple, que l'action de Vénus diminue l'angle d'inclinaison de Mercure de 8″ par siècle; de même l'action de Jupiter

diminue de 3″ l'inclinaison de Mercure, augmente de 10″ celle de Vénus, diminue de 25″ celle de Mars, & augmente de 9″ celle de Saturne.

1378. On verra dans le XXIIe. livre (3517) que l'attraction de chaque planète fait rétrograder sur son orbite les nœuds de toutes les autres planètes, comme je l'ai déja dit (1348); l'effet de ce mouvement est de déplacer toutes les orbites, & il ne peut manquer d'en résulter un changement dans leurs inclinaisons sur l'écliptique. Soit *CB* l'écliptique, (*fig.* 75), *AB* l'orbite de Saturne, *AC* celle de Jupiter, *Aa* le mouvement du nœud de Jupiter sur l'orbite de Saturne; ce mouvement du nœud se fait sans aucun changement de l'angle *A*, c'est-à-dire, de l'inclinaison mutuelle des deux orbites; le triangle *ABC* se change en un triangle *aBc*; les angles *A* & *B* demeurent constans, mais l'angle *C* ne l'est pas, & l'angle *c* est plus ou moins grand que l'angle *C*. Suivant les formules différentielles qu'on trouvera dans le XXIIIe. livre (3849), la variation de l'angle *C* est égale à celle du côté *AB* multipliée par le sinus de l'angle *B*, & par le sinus du côté *BC*, c'est-à-dire, que $dC = dAB.\ \text{sin.}\ B.\ \text{sin.}\ BC$: par exemple, le mouvement du nœud de Mars par l'action de Jupiter étant de 14″ 2 par année, sur l'orbite de Jupiter, (*Mém.* 1758, *pag.* 261, 1761, *pag.* 404), l'angle *B* inclinaison de Jupiter 1° 19′, & la distance *BC* de leurs nœuds 50° 22′, on trouvera pour le changement de l'angle *C*, 0″ 248, ou 24″ 8 par siècle. *Fig.* 75.

1379. Les actions de Vénus & de Saturne produisent encore 6″ de diminution dans l'inclinaison de l'orbite de Mars; en sorte que cet angle diminue de 31″ par siècle, & depuis le temps de Tycho-Brahé il doit y avoir 53″ de diminution dans l'inclinaison de l'orbite de Mars; si les observations anciennes étoient assez exactes, on verroit cette différence dans la table que j'ai donnée ci-devant des inclinaisons des planètes (1376); mais une minute de différence est peu sensible dans les observations de Tycho: cet effet qui se

continue de siècle en siècle, apportera dans la suite une grande différence dans les inclinaisons des orbites, & il y a déja plus de 8 minutes depuis le temps de Ptolomée, quantité qu'on ne doit pas négliger dans la comparaison des différentes observations, mais que les calculs de l'attraction pouvoient seuls indiquer, du moins quant à présent.

Distinguer l'augmentation ou la diminution.

1380. Pour savoir si l'inclinaison d'une planète doit augmenter, ou diminuer, c'est la situation des nœuds qu'il faut considérer. Soit *AB* (*fig.* 75), l'orbite de la planète troublante, & *AC* l'orbite de la planète troublée, dont le nœud passe de *A* en *a*; puisque l'inclinaison mutuelle des deux orbites n'est point changée, l'angle *A* & l'angle *a* sont égaux, & vers ce point-là les cercles *AC*, *ac* sont paralleles; de-là il suit qu'ils vont se rencontrer en un point *D*, éloigné de 90° du point *A*; car deux grands cercles de la sphère, pris à 90° de leur intersection commune, deviennent sensiblement paralleles, du moins sur un petit espace : or dans le triangle *DCc* on voit évidemment que l'angle *DcC* est plus petit que l'angle *DCE*, c'est-à-dire, que dans ce cas-là l'inclinaison diminue, d'ou il est aisé de déduire la règle suivante.

Fig. 75.

Règle.

1381. *Toutes les fois que le nœud de la planète troublante est plus avancé que celui de la planète troublée, l'inclinaison de celle-ci est diminuée, pourvu que l'excès ne soit pas de* 180 *degrés.* Cette règle est aisée à appercevoir en figurant les positions de différentes orbites les unes par rapport aux autres. Par conséquent, si l'on dispose les planètes dans l'ordre de la longitude de leurs nœuds ascendans, en commençant par celle dont le nœud est le moins avancé, nous aurons l'ordre suivant; Mercure, Mars, Vénus, Jupiter & Saturne; cela nous indiquera, conformément à la règle, que Mercure contribue à augmenter les inclinaisons de toutes les planètes; & que Saturne les diminue toutes; Mars diminue l'inclinaison de Mercure, mais il augmente celles de Vénus, de Jupiter & de Saturne, dont les

nœuds sont plus avancés, & ainsi des autres. J'espère donner bientôt sur cette matiere des détails plus circonstanciés dans les mémoires de l'académie ; ce sont ces considérations que personne n'avoit encore faites qui m'ont donné l'explication des inégalités observées dans les inclinaisons du second & du troisième satellite, inégalités si singulieres, qu'avant moi l'on n'en soupçonnoit pas même la raison ; M. Bailly a donné un mémoire sur ces inégalités dans le volume de 1766, *pag.* 346, d'après les principes que je viens d'expliquer, mais qui étoient déja consignés dans la premiere édition de ce livre. (voyez l'art. 2944).

1382. Après avoir rapporté les élémens de chaque planète suivant M. Cassini & M. Halley, & d'après de nouvelles déterminations, il ne sera pas inutile de mettre tout à la fois sous les yeux du lecteur la comparaison & la différence de ces trois différens recueils de tables, pour faire juger de l'incertitude qu'il peut y avoir dans les divers élémens des tables astronomiques. Si je veux savoir, par exemple, de combien l'équation du centre de Mercure est différente dans les tables de M. Cassini & de M. Halley, je trouve que dans la colonne de Mercure, & à côté du mot *Equation* il y a — 20′ 22″ ; cela signifie qu'il faut ôter 20′ 22″ de la plus grande équation prise dans les tables de M. Cassini, pour avoir celle des tables de M. Halley. On trouve après cela une autre comparaison des tables de M. Halley avec les miennes, où l'on trouvera ce qu'il faut ôter des élémens pris dans les tables de Halley pour avoir ceux auxquels nous nous sommes arrêtés dans les articles précédens.

TABLE de ce qu'il faut ôter des Nombres contenus dans les Tables de M. Cassini, ou y ajouter pour avoir ceux des Tables de M. Halley.

Élémens des Tables.	Mercure.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	—11′ 20″	+ 0′ 2″	— 0′ 13″	+ 4′ 18″	—15′ 32″
Longitude de l'Aphélie.	—14 6	—19 29	— 4 31	+19 13	+26 27
Longitude du Nœud.	— 3 22	— 4 3	+10 36	+25 51	—41 0
Mouvement séculaire.	—14 41	+ 0 50	+ 0 24	+ 6 41	—23 28
Mouv. de l'Aphélie.	—45 43	—49 7	— 2 58	+24 18	+ 3 36
Mouv. du Nœud.	— 1 20	— 5 0	+ 6 40	+43 11	—65 11
Equation.	—20 22	— 1 6	+ 0 43	+ 0 19	+ 0 24
Inclinaison.	— 0 40	0 0	+ 0 6	— 0 20	— 0 26

TABLE de ce qu'il faut ôter des nombres contenus dans les Tables de M. Halley, ou y ajouter, pour avoir ceux de nos nouvelles Tables.

Élémens des Tables.	Mercure.	Vénus.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Longitude moy. 1750.	+ 2 5	— 0 19	+ 0 47	— 2 1	+12 29
Long. de l'Aphélie 1750.	+ 5 51	+54 29	— 3 14	—11 15	+13 32
Long. du Nœud 1750.	— 0 43	+ 2 36	—19 51	+ 0 11	+11 12
Mouv. sécul. de la Planète.	+ 9 57	+ 0 20	— 0 10	— 0 41	+ 8 30
Mouv. sécul. de l'Aphélie.	+30 3	+155 47	— 5 0	—16 40	+10 0
Mouv. sécul. du Nœud.	— 8 20	0 0	+ 3 0	+16 40	+20 0
Equation.	— 1 47	+ 0 30	+ 0 37	+ 2 25	— 8 45
Inclinaison de l'Orbite.	+ 0 40	0 0	0 0	0 0	+ 0 10

DES DIAMETRES APPARENS DES PLANETES.

1383. Le diamètre apparent d'une planète est l'angle sous lequel il nous paroît, exprimé en minutes & en secondes; c'est l'angle dont il est la corde ou la sous-tendante, en prenant pour rayon la distance de la planète à la terre. Soit *T* la terre, (*fig.* 79), où est situé

Fig. 79.

situé l'obſervateur ; *AB* le diamètre d'une planète, & *TB* les rayons viſuels menés de la terre aux deux bords, ou aux deux limbes oppoſés du diſque de la planète ; l'angle *ATB* eſt le diamètre apparent de la planète.

Les diamètres des planètes ſe déterminent & s'obſervent avec des micromètres (2358); mais on y peut auſſi employer le temps ou la durée de leur paſſage. En effet, ſi l'on obſerve dans une lunette le moment où le premier bord du ſoleil ſe trouve dans le méridien, ou ſur un fil perpendiculaire à la direction de ſon mouvement, & qu'enſuite le ſecond bord y arrive deux minutes plus tard ; ces deux minutes de temps indiqueront que le diamètre du ſoleil eſt de 30′, en ſuppoſant qu'il ſoit dans l'équateur ; on a vu (892) la différence qui a lieu ſi le ſoleil n'eſt pas dans l'équateur, & nous verrons dans le livre ſuivant cette méthode appliquée au diamètre de la lune.

1384. *Les* DIAMÈTRES *apparens d'une planète ſont en raiſon inverſe de ſa diſtance.* Si la planète *AB*, étoit ſituée en *CD*, de maniere que la diſtance *TD* fût la moitié de la premiere diſtance *TB*, l'angle *CTD* ſous lequel elle paroîtroit, ſeroit double de l'angle *ATB* ou *ETD* ſous lequel elle paroiſſoit auparavant ; prenons *AB* ou *CD* pour rayons ; alors, ſuivant les règles de la Trigonométrie ordinaire *TB* ſera la cotangente de l'angle *ATB*, & *TD* ſera la cotangente de l'angle *CTD* : or les cotangentes ſont en raiſon inverſe des tangentes, donc *TB* : *TD* : : tang. *CTD* : tang. *ETD* ; mais les petits angles ſont proportionnels à leurs tangentes ; donc *CTD* : *ETD* : : *TB* : *TD* ; c'eſt-à-dire, que le diamètre apparent dans le ſecond cas, eſt au diamètre apparent dans le premier, comme la premiere diſtance eſt à la ſeconde. Variation des diamètres apparens.

1385. Les diamètres apparens des planètes ſervent à trouver leurs véritables diamètres ou leurs grandeurs réelles, quand on connoît leurs diſtances : dans le triangle *TAB* qui eſt rectangle en *B*, on a cette proportion ; Trouver le vrai diamètre.

R : sin. *ATB* : : *TA* : *AB* ; ainsi l'on trouvera le véritable diamètre *AB* en multipliant la distance *TA* par le sinus de l'angle *ATB*, qui est le diamètre apparent de la planète.

On a vu ci-dessus (1216) la manière de trouver les distances des planètes; on verra encore (1634) la manière de les calculer par le moyen de la parallaxe : nous n'avons à parler ici que des diamètres apparens des différentes planètes, tels qu'on les a trouvés par les observations les plus récentes & les plus exactes.

Diamètre du Soleil

1386. Avant la découverte des lunettes l'éclat de lumière que répandent les planètes faisoit juger leurs diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne sont, & surtout ceux des étoiles fixes; cependant les anciens ne s'étoient pas trompés de beaucoup en supposant le diamètre du soleil d'un demi-degré ; au reste, il ne s'agissoit alors que d'avoir un nombre rond approchant de la vérité. Aristarque & Archimède supposoient déja le diamètre apparent du soleil de 30′ en tout temps. Du temps de Ptolomée, on n'avoit encore remarqué aucune différence entre l'hiver & l'été; cet auteur faisoit le diamètre du soleil & celui de la lune apogée de 31′ 20″ (*Almag. V.* 14). On peut voir dans le P. Riccioli (*Almag. nov. tom. I, pag.* 119, & *Ast. ref. pag.* 38) une table des sentimens de différens auteurs sur cette matière. Il nous suffit de dire que Copernic supposoit les diamètres du soleil de 31′ 48″, & 33′ 54″. Tycho avoit trouvé un peu moins de 30′ dans l'apogée, 32′ & quelques secondes dans le périgée (*Progymn. pag.* 471). Képler regardoit comme une chose certaine que ces diamètres étoient de 30′ & 31′ (*Astron. pars optica.* 1604, *pag.* 343).

Malgré la découverte des lunettes d'approche qui devoit donner une grande facilité pour avoir exactement ces mesures, nous voyons que Képler ne faisoit encore le diamètre du soleil dans l'apogée que de 30′, (*Epit. astr. cop. pag.* 476 & 827); Hévélius dans une dissertation *de Saturni facie* imprimée en 1656, suppo-

ſoit le diamètre du ſoleil dans l'apogée de 31′ 12″, & dans le périgée de 32′ 36″. Le Pere Scheiner en 1625 & quelques autres Aſtronomes crurent avoir le diamètre avec beaucoup d'exactitude en recevant l'image du ſoleil par un trou imperceptible, & la meſurant à une très-grande diſtance; mais ils trouvèrent le diamètre du ſoleil beaucoup trop grand, quelquefois même il parut de 55 à 56′ (*Aſtr. ref. pag.* 39), c'étoit un effet de la *diffraction* ou *inflexion* de la lumière obſervée par le Pere Grimaldi, & enſuite par Newton, (*Opt. part.* 3) qui rendoit dans ces cas-là l'image très-grande & très-mal terminée; le Pere Riccioli fit voir alors qu'on devoit ſe ſervir d'un trou plus large, & retrancher le diamètre du trou de la largeur de l'image ſolaire; c'eſt ainſi qu'il trouva par le gnomon de S. Pétrone, les diamètres du ſoleil de 31′ 0″ 32′ 4″. M. Caſſini dans le même temps les trouvoit de 31′ 8″ & 32′ 10″. (*Aſtr. ref. pag.* 38). Erreur du P. Scheiner.

1387. Depuis la découverte des micromètres (2358) il n'y a eu qu'une incertitude de peu de ſecondes dans la meſure du diamètre ſolaire, comme on le verra dans la table ſuivante; mais ce petit nombre de ſecondes étoit devenu une choſe importante à conſtater.

Diamètre apogée ſuivant divers Auteurs.

Flamſteed en 1673, comme on le voit dans les œuvres d'Horoccius *pag.* 488, faiſoit le diamètre apogée de	31′	40″
M. Caſſini en 1684 à la fin de ſes obſervations aſtronomiques *pag.* 48, faiſoit le diamètre moyen de 32′ 12″, ce qui donne pour le diamètre apogée,	31	40
M. de la Hire dans ſes tables aſtronomiques en 1702.	31	38
M. Halley dans ſes tables aſtron. en 1719,	31	38
M. Auzout & M. Picard, (*Hiſt. cél. pag.* 10)	31	37
M. Caſſini dans ſes tables aſtronomiques 1740,	31	36
M. de la Caille dans ſes tables du ſoleil 1758,	31	34 $\frac{1}{2}$

M. le Gentil dans les Mém. de l'acad. 1752, *pag.* 459,	31′ 34″
M. de Louville, Mém. de l'acad. 1724;	31 33
M. Cassini, Elémens d'astr. 1740, *pag.* 127,	31 32½
M. Mouton, (*Observat. Diametrorum Lugd. an.* 1670, *Mém. acad.* 1752, *pag.* 445).	31 31½
Par mes observations (*Mém. ac.* 1760, *pag.* 48).	31 30½
Suivant M. Short avec un grand télescope,	31 28

Le diamètre périgée surpasse de 64″ 8 le diamètre apogée; & comme il n'y a point d'incertitude là-dessus, je me suis contenté de rapporter dans la table précédente le plus petit des diamètres du soleil, celui qui s'observe le 30 Juin jour de l'apogée du soleil, d'où il est aisé de conclure le diamètre périgée en ajoutant 1′ 5″ au premier.

Le diamètre du soleil étant en raison inverse de sa distance, & sa distance apogée étant de 10168 parties dont la moyenne est 10000, si l'on connoît sa distance ou son rayon vecteur pour un temps quelconque par la méthode des articles 1245 ou 1250, on aura aussi son diamètre en faisant cette proportion : la distance actuelle du soleil est à sa distance apogée 10168, comme le diamètre apogée 31′ 30″ ½, est au diamètre apparent pour un temps quelconque.

Diamètre du Soleil, 31′ 30″ & demie.

1388. Les différences que l'on vient de voir entre les différens auteurs me paroissoient exiger une nouvelle discution, cet élément est un des plus importans de l'astronomie, puisque c'est au diamètre du soleil que nous rapportons sans cesse toutes les mesures des petits arcs célestes; j'y ai donc employé la plus grande lunette qui eût encore servi à cette recherche; un heliomètre de 18 pieds; & j'ai trouvé par des mesures répétées une multitude de fois, que le diamètre du soleil apogée est de 31′ 30″ ½, (2529).

M. Short m'a dit depuis en Angleterre qu'il n'avoit trouvé ce diamètre que de 31′ 28″, avec un micromè-

tre objectif & achromatique d'une très-grande perfection, appliqué à un téleſcope de deux pieds; il pourroit ſe faire que le cercle d'aberration & de couleur qui environne toujours l'image des objets au foyer d'une lunette ſe fût trouvé encore plus grand de 2″. ou 3″ dans mon héliomètre, quoique très-bon; c'étoit le ſentiment de Newton qui ſuppoſoit qu'il y avoit une aberration ſenſible dans les meilleures lunettes, & les paſſages de Vénus en fourniſſent encore un indice, comme on le verra dans le XIe. livre (2159). Cependant je ſuppoſerai toujours le diamètre du ſoleil de 31′ 30″ $\frac{1}{2}$ dans ſon apogée; mais pour réduire des obſervations faites avec de petites lunettes ou des lunettes qui ne ſont pas abſolument parfaites, il ſeroit bon de ſuppoſer le diamètre de 5″ plus grand; c'eſt-à-dire, comme dans les tables de M. Caſſini.

1389. Le diamètre de la Lune varie depuis 29′ 25″ juſqu'à 33′ 34″ environ, ainſi ſon diamètre moyen eſt de 31′ 30″. C'eſt-à-dire, qu'il égale ſeulement le plus petit diamètre du ſoleil, ou celui qu'il paroît avoir dans ſa plus grande diſtance; mais le diamètre moyen de la lune eſt vu à une diſtance 380 fois plus petite que la diſtance moyenne du ſoleil, & il ne ſeroit pas de 5″ s'il étoit vu à la diſtance du ſoleil; nous parlerons plus au long du diamètre de la lune (1503). Diamètre de la Lune.

1390. Avant la découverte des lunettes d'approche trouvées en 1609, on avoit une idée fort défectueuſe des damètres apparens des planètes: la lumière dont elles ſont environnées, faiſoit juger ces diamètres beaucoup plus grands qu'ils ne ſont réellement; Tycho donnoit 3′ $\frac{1}{4}$ au diamètre de Vénus dans ſa moyenne diſtance à la terre, ce qui feroit 12′ $\frac{1}{3}$ dans le temps de ſes conjonctions inférieures; ſuivant les tables de Képler, on auroit 6′ 51″, au lieu de 59″ que nous trouvons actuellement (*Horoc. Venus in ſole, c.* 16). On trouvera la table de tous les ſentimens des anciens aſtronomes à ce ſujet dans le Pere Riccioli, (*Aſtron. reform., pag.* 359).

La découverte des lunettes fut seule suffisante pour donner une plus juste idée des diamètres apparens, même avant l'usage des micromètres : le P. Riccioli avec le P. Grimaldi, trouverent les diamètres des planètes vers 1650 de la manière suivante : Mercure dans ses moyennes distances 13″ 48‴, Vénus 1′ 4″ 12‴, Mars 22″, Jupiter 49″ 46‴, Saturne sans son anneau 26″ 40‴ & l'anneau 57″, (*Astron. reform. pag.* 356) tous ces diamètres sont pour les moyennes distances à la terre.

Le P. Riccioli avoit déterminé les diamètres de Jupiter & de Saturne par leurs appulses aux étoiles fixes, (*Astron. reform. pag.* 355), & il ne trouvoit que 4″ de plus, que M. Huygens ne trouva ensuite par le moyen de son micromètre ; (*Systema saturnium 1659 in fine*) ; mais le P. Riccioli s'étoit trompé sur le diamètre de Vénus, qu'il trouvoit beaucoup trop grand, parce que ses lunettes ne dépouilloient pas assez cette planète de son excès de lumière. Hévélius avoit trouvé le diamètre de Vénus & de Jupiter, à peu-près tels que M. Huygens les trouva ensuite avec son micromètre : il les comparoit avec les taches de la lune, dont il avoit examiné la proportion avec le diamètre entier de cet astre, (*Selenog. pag.* 449, 477, 547) ; ces diamètres étoient encore trop grands ; & il est évident que l'usage des micromètres, (2358) a mis dans cette matière une bien plus grande exactitude ; mais à l'égard de Mercure & de Vénus, ce sont leurs passages sur le soleil qui nous ont fait connoître la véritable quantité de leurs diamètres (2156).

Diamètre de Mercure.

1391. Le diamètre de Mercure dans son passage sur le soleil que j'observai à Meudon en 1753, mesuré plusieurs fois avec un héliomètre de 18 pieds, me parut de 11″ 8, c'est-à-dire, 11 secondes & 8 dixiemes, (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 599) ; la distance de Mercure à la terre étoit alors à la distance moyenne du soleil à la terre, comme 55674 est à 101007 ; ainsi l'on fera cette proportion, 1010 : 557 : : 11″ 8 : 6″ 5,

& l'on aura 6″ 5 pour le diamètre de Mercure au temps où sa distance est égale à la distance moyenne du soleil. En 1723 lorsque Mercure passa sur le soleil, M. Bradley avec une lunette de 120 pieds, trouva que ce diamètre étoit pour lors 10″ $\frac{1}{4}$ ce qui fait 7″ 34 pour la distance moyenne, (*Inst. astron. pag.* 556. *Philos. transf.* 1723, *n°.* 386), ainsi par un milieu je le supposerai de 6″ 9. On verra dans le livre XIe. la manière dont on s'y prend pour le déterminer par la durée de son entrée sur le soleil.

Le diamètre de Vénus sur le soleil observé le 6 Juin 1761, m'a paru être de 57″ 8, (2157) la distance de Vénus à la terre étoit alors à la distance moyenne du soleil, comme 2890 est à 10000; ainsi le diamètre de Vénus à la distance moyenne du soleil paroîtroit de 16″ 7. J'ai conclu exactement le même diamètre de quatre observations de M. Short, faites dans d'autres temps, avec un micromètre objectif, appliqué à un télescope de deux pieds (*Mém acad.* 1762, *pag.* 258). Diamètre de Vénus.

1392. Le diamètre de Mars paroissoit à M. Picard le 29 Septembre 1672 de 25″ environ, c'étoit un mois après l'opposition durant laquelle il avoit paru de 30″; c'est ainsi qu'il le raconte lui-même parmi les observations faites en divers endroits du royaume imprimées à la suite du voyage d'Uranibourg, en 1680, *pag.* 34. M. le Monnier dit cependant que le 5 Sept. 1672 le diamètre de Mars mesuré par M. Picard avec une lunette de 20 pieds garnie d'un micromètre, avoit paru de 26″ tout au plus, (*Instit. astr. pag.* 556); mais parce que Flamsteed avoit mesuré le diamètre de Mars à peu-près dans le même temps, & qu'il lui avoit paru tantôt de 2″, & tantôt de 7″ plus grand, il le suppose de 27″ $\frac{1}{2}$, dont il ôte encore 5″ à cause de la dilatation de la lumière. Pour moi n'ayant pas trouvé que l'effet de la dilatation fût sensible dans Vénus même, & voulant m'en tenir aux propres paroles de M. Picard, je supposerai que le diamètre de Mars paroissoit de 30″ en 1672 le jour de l'opposition, c'est-à-dire, le 8 Sept. Diamètre de Mars.

n. style, la distance de Mars à la terre étoit alors de 0,3815; ainsi le diamètre réduit à la distance du soleil à la terre seroit 11″ 38 ou 11″ 4.

Il y a dans les transactions philosophiques, une occultation de Mars par la lune observée en 1676 qui seroit propre à déterminer le diamètre de Mars, si les observations étoient plus complettes & mieux d'accord; car il n'y auroit guère de meilleur moyen que celui d'observer l'émersion de Mars, quand il sort du disque obscur de la lune, mais ces phénomenes sont fort rares. On trouve une occultation de Saturne par la lune dans l'histoire céleste de M. le Monnier, *pag* 238, qui seroit propre à vérifier aussi le diamètre de Saturne.

Diamètre de Jupiter.

1393. Le diamètre de Jupiter observé par M. Pound avec une lunette de 123 pieds de M. Huygens, en 1719, parut toujours plus petit que 40″, jamais au-dessous de 38, & plus souvent 39″ (*Newton Princip. mathem. l. III, phænom.* 1). Par les durées des passages du premier & du troisieme satellite & par le passage de l'ombre du premier sur le disque de Jupiter, qui furent observés avec la même lunette, Newton conclut ce diamètre de 37″ $\frac{1}{4}$ pour la distance moyenne de Jupiter au soleil ou à la terre. Si nous prenons avec lui 37″ $\frac{1}{4}$, & que nous fassions cette proportion; 1000 : 5201 : : 37 $\frac{1}{4}$: 193″, 74, nous aurons 3′ 13″ $\frac{1}{4}$ pour le diamètre que Jupiter auroit s'il étoit aussi près de nous que le soleil; mais il s'agit ici du diamètre de l'équateur, car on verra que Jupiter est applati vers les poles d'environ une quatorzième partie (3221).

Diamètre de Saturne.

Le diamètre de Saturne observé par M. Pound en 1719 avec la même lunette de 123 pieds Anglois, parut de 18″, & le diamètre de l'anneau (3225) parut de 42″, en les réduisant à la distance moyenne de Saturne au soleil & à la terre (*Newton Princip. l. III, Phænom.* 2). Newton réduisoit à 16″ le diamètre de Saturne à cause de l'irradiation, mais je ne crois pas devoir ici en tenir compte. La distance moyenne de Saturne au soleil est à celle du soleil à la terre, comme 1000 est à 9539, (1222),

(1222) ainsi le diamètre de Saturne est 2′ 51″, 71 à la distance moyenne du soleil, & celui de l'anneau seroit de 6′ 40″ 65, réduit à la moyenne distance du soleil à la terre.

Les diamètres que je viens d'assigner aux planètes, se trouvent un peu différemment dans M. Huygens, (*Systema Saturnium*); mais les observations sur lesquelles il se fondoit, ne sont pas à beaucoup près, aussi exactes que celles dont je viens de parler : il donnoit, par exemple, 9′ 4″ au diamètre de l'anneau de Saturne, 5′ 35″ au diamètre de Jupiter, 21″$\frac{3}{4}$ à celui de Vénus ; ces quantités sont visiblement trop grandes.

1394. Le diamètre de la Terre vu du soleil, égal au double de la parallaxe horisontale de cet astre, est d'environ 18″ : nous en traiterons en particulier dans le IXe. livre de cet ouvrage (1742). A l'égard du diamètre réel de la terre en lieues, il sera déterminé dans le XVe. livre, où nous parlerons de la grandeur & de la figure de la terre, on verra qu'il est de 2865 lieues, chacune de 25 au degré ou de 2283 toises (2652). Diamètre de la Terre.

1395. J'ai dit que suivant Newton, tous ces diamètres observés avec les plus grandes lunettes, sont encore affectés d'une certaine *irradiation*, ou dilatation de lumière qui les environne comme une frange, & les fait paroître trop grands ; en conséquence plusieurs astronomes ont cru que pour avoir les vrais diamètres des planètes, il falloit ôter 2″ de celui de Saturne, 5″ de celui de Mars, tandis qu'il falloit ajouter 1″ ou 2″ aux diamètres de Mercure & de Vénus observés sur le soleil, à cause d'un semblable débordement de la lumière solaire qui devoit faire paroître ces planètes plus petites. M. le Monnier (*Instit. astron. pag.* 154). Le P. Hell dans le recueil d'observations de Vénus qui est à la suite de ses éphémérides pour 1762, *pag.* 24, paroît croire à cette irradiation, dont il donne plusieurs explications ; mais il convient que les obser- L'irradiation est insensible.

vations qui sembloient l'indiquer, n'étoient pas assez concluantes.

Pour moi ayant comparé avec grand soin le diamètre de Vénus observé sur le soleil en 1761, & ce diamètre observé dans sa plus grande lumière avant & après le passage de Vénus sur le soleil, je les ai rapportés tous à une même distance, (*Mém. acad.* 1762) & je n'y ai trouvé aucune différence; l'éclipse annulaire de 1764 a prouvé la même chose par rapport à la lune, je crois donc que le phénomène de l'irradiation est insensible, pour les planètes, que leur lumière n'est pas assez forte pour produire ce phénomène, & que quand on se sert des mêmes lunettes, il est inutile d'en tenir compte.

Différence des lunettes.

On croit cependant avec quelque fondement que le diamètre du soleil avec de grandes lunettes paroît plus petit qu'avec les petites lunettes, ainsi M. de la Caille a toujours pensé que le diamètre du soleil étoit de 31′ 34″ mesuré avec des lunettes de 6 pieds, tandis que je l'ai trouvé de 31′ 30″ $\frac{1}{2}$ avec un héliomètre de 18 pieds (1388); peut-être cette différence provient-elle de la difficulté qu'il y a de mesurer exactement ce diamètre avec un micromètre ordinaire comme celui de M. de la Caille, & avec une lunette qui n'a que 6 pieds; mais si cette différence est réelle il faudra l'attribuer à une couronne lumineuse formée par l'aberration des rayons qui dans les lunettes ne se réunissent pas exactement au même point. (2289) V. aussi M. le Gentil, *Mém. acad.* 1755, *pag.* 437; mais cette différence étant toujours la même pour le soleil, vu dans la même lunette, il est inutile d'y avoir égard; si ce n'est dans les passages de Vénus & Mercure, où son effet disparoît comme je l'expliquerai dans le livre XIe. à l'occasion de ses passages (2159).

On m'objectera peut-être que quand une planète paroît sur le soleil, l'irradiation du soleil qui l'environne de tout côté devroit retrecir en apparence la partie obscure ou le diamètre de la planète; & ce diamètre devroit paroître plus petit de la même quantité que

celui du soleil paroît trop grand ; mais comme j'ai déterminé les diamètres de Vénus & de Mercure par la durée du temps qu'ils employent à sortir de dessus le soleil, j'ai évité l'effet de cette irradiation, comme je le prouverai dans le livre XIe. A l'égard de la lune dont le diamètre a été mesuré sur le soleil en 1748, & n'a pas paru plus petit que quand la lune est éclairée, peut-être quelques secondes auront pu échapper à l'exactitude de cette observation pour laquelle on n'a eu que le peu de minutes que dura l'éclipse annulaire de 1748, & peut-être aussi que ce débordement de lumière n'a lieu qu'à la circonférence extérieure du soleil.

1396. Les diamètres apparens de toutes les planètes réduits à une même distance, nous donnent le moyen de trouver les diamètres absolus & de les comparer tous ou au diamètre du soleil ou à celui de la terre ; il est vrai que pour les comparer au diamètre de la terre, il faut supposer qu'on connoisse la parallaxe du soleil, c'est-à-dire, l'angle sous lequel paroît, vu du soleil, le demi-diamètre de la terre ; mais les observations du passage de Vénus, nous ont fait connoître avec assez de précision que ce diamètre est de 18″ (1742) ; comme ces comparaisons ne sont qu'une pure curiosité & qu'on aime assez à rapporter tout à la terre, nous donnerons les grosseurs totales des planètes par rapport à la terre, en supposant que son demi-diamètre vu du soleil paroît de 9″.

Pour trouver les volumes ou les grosseurs des planètes par rapport à la terre, quand on connoît le rapport de leurs diamètres, il suffit de prendre le cube du diamètre, ou de tripler son logarithme, parce que l'on sait par les élémens de géométrie que les sphères sont comme les cubes de leurs diamètres. Par exemple le diamètre de la terre est de 18″, celui de Mercure est de 6″ 9 à la même distance. Si l'on divise 6″ 9 par 18″ l'on aura 0,3889 ; c'est le diamètre de Mercure, en supposant que celui de la terre est 1. Le cube de cette fraction décimale donnera 0, 05881 qui

vaut à peu-près $\frac{1}{17}$; ce qui nous apprend que la grosseur de Mercure est la dix-septieme partie de celle de la terre.

Différence entre la grosseur & la masse.

1397. Le volume ou la grosseur d'une planète n'est pas la même chose que sa masse ou la quantité de matière qu'elle renferme; celle-ci dépend de la densité dont nous parlerons dans le XXIIe. livre (3403), & qu'en attendant j'ai mise dans la table suivante. La densité multipliée par le volume, donne la masse, le poids, la quantité de matière, ou la force attractive; c'est ce que j'ai renfermé de même dans la table suivante.

On observera au sujet de cette table que les quatre densités marquées par des étoiles, sont les seules qu'on puisse déterminer par un calcul immédiat, les autres sont établies par une espèce de conjecture (3410).

1398. Les distances en lieues ne sont certaines qu'à un trentieme près, parce qu'elles dépendent de la parallaxe du soleil sur laquelle on a peut-être un tiers de seconde d'incertitude; nous discuterons cette matière dans les livres IXe. & XIe. (1742, 2149).

J'ai supposé la masse de la lune $\frac{1}{7}$ de celle de la terre : comme M. Bernoulli l'a déduit de son effet sur le flux & le reflux de la mer. Voy. liv. XXIIe. (3412), au lieu de $\frac{1}{40}$ que Newton avoit trouvé. La masse du soleil est plus grande que celle de Newton, l. 3, pr. 8, qui est 169282, parce que j'ai supposé la parallaxe plus petite que Newton, c'est-à-dire, de 9″ au lieu de 10″ $\frac{1}{2}$; avec d'autres élémens plus exacts que les siens.

Nous parlerons du diamètre de la lune dans le VIIe. livre (1503), & de ceux des étoiles fixes dans le XVIe. livre (2784).

On trouve dans la même table les vîtesses que les corps pesans doivent avoir dans la première seconde, à la surface de chaque planète, en supposant que les corps décrivent sur la terre 15 pieds 1 pouce 2 lignes 95 ou 15 pieds 1038 en une seconde sous l'équateur; c'est la mesure de la pesanteur dans chaque pla-

nète ; elle eſt proportionelle à la maſſe diviſée par le carré du rayon (3411).

Les diſtances des planètes à la terre en lieues qui ſont dans les dernières colones de la table ne ſont autre choſe que la ſomme & la différence de la diſtance moyenne de la terre, & de chaque planète au ſoleil (1222), réduites en lieues à raiſon de 2865, pour le diamètre de la terre, j'ai négligé les valeurs des derniers chiffres qui dans ces ſortes de calculs ſont tout-à-fait inappréciables, exceptés pour la lune (1719).

De ces diſtances il ſeroit facile de conclure la vîteſſe de chaque planète, par exemple, la circonférence de l'orbite terreſtre ſuppoſée circulaire doit avoir 206280000 lieues ; ainſi la vîteſſe de la terre dans ſon orbite eſt de 564754 lieues par jour, 23531 par heure ; 392 par minute & $6\frac{1}{2}$ par ſeconde. A l'égard de la vîteſſe diurne du mouvement de rotation, elle n'eſt que de 238 toiſes par ſeconde ſous l'équateur, à peu-près comme celle d'un boulet de canon de 24 livres, qu'on eſtime de 250 toiſes dans la première ſeconde.

TABLE des diametres apparens des Planètes, vus à la distance moyenne du Soleil à la terre ; & de leurs diametres vrais en supposant la parallaxe du Soleil de 9″ (Voyez Liv. IX.) *avec leurs volumes, leurs densités, leurs masses & leurs distances.*

Planetes.	Diametres en minutes & secondes.	Diametres en lieues.	Diametres par rapport à la terre.
Le Soleil,	32′ 2″,0	305918	Cent & sept diam. de la terre ou 106,778
La Terre,	18,0	2865	 1,000
La Lune,	4,915	782	Un tiers, ou $\frac{11}{35}$ du diam. de la terre 0,3141
Mercure,	7,0	888	Un tiers, ou $\frac{7}{18}$ ou 0,3889
Vénus,	16,7	2658	Treize quatorziemes 0,9278
Mars,	11,4	1814	Cinq huitiemes, ou 0,6333
Jupiter,	3 13,7	30832	Dix diametres & trois quarts, 10,761
Saturne,	2 51,7	27329	Neuf diametres & demi, 9,539
Anneau de ♄.	6 40,6	63771	Vingt-deux diam. de la terre, 22,25

	Grosseur ou volume par rapport à la terre, à peu-près.	Plus exactement & en décimales.	Densité par rapport à la terre.
Le Soleil,	Douze cent mille fois plus gros,	12 17480	0,25285 *
La Lune,	La quarante-neuvieme,	0,02036	0,68706 *
Mercure,	Un dix-septieme,	0,05881	2,0377
Vénus,	Quatre cinquiemes de la terre,	0,7986	1,2749
Mars,	Le quart de la terre,	0,2540	0,7292
Jupiter,	1246 fois plus gros que la terre,	1246	0,23147 *
Saturne,	868 fois plus gros que la terre,	867,95	0,09032 *

	Masse par rapport à la terre.	Vitesse des graves à leur surface pour chaque seconde.	Distances à la terre en lieues.	
			La plus petite.	La plus grande.
Le Soleil,	307831	407pi. 69	32278 900	33382000
La Terre,	1	15 10	.....	.....
La Lune,	0,01399	2 83	77577	91454
Mercure,	0,1198	11 96	20122000	45539000
Vénus,	1,01818	17 82	9083000	56578000
Mars,	0,1852	6 97	17193000	82854000
Jupiter,	288,44	37 66	137920000	203581000
Saturne,	78,39	13 01	280352000	346012000

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES *anciennes & Modernes du Soleil, & des cinq Planètes principales.*

1399. Les observations sont le fondement de toutes les théories, elles en sont la vérification & la preuve; ainsi je ne puis terminer mieux ce VIe. livre qu'en y rassemblant une collection des meilleures observations anciennes & modernes, extraites des auteurs qui en ont fait le calcul & l'application; j'y ai ajouté les observations les plus récentes & les plus décisives pour chaque planète, comme un point fixe d'où l'on pourra partir pour établir des théories, & construire de nouvelles tables.

Les anciennes observations se trouvent rassemblées & discutées dans les ouvrages suivant: Longomontani *Astronomia Danica*, 1640. Bullialdi, *Astronomia Philolaïca*, 1645: Riccioli, *Astronomia Reformata*, 1665. Wing, *Astronomia Britannica*, 1669. *Historia Cœlestis*; *Tychonis Brahe*, 1672. M. Cassini, *Elémens d'Astronomie*, 1740. J'en ai moi-même examiné & calculé un grand nombre; mais il sera toujours bon de remonter aux sources, parce que mon intention n'étoit pas de former ici un recueil complet d'observations astronomiques.

A l'égard des observations modernes, on pourra consulter le grand ouvrage d'Hévélius intitulé, *Machina Cœlestis*, (livre très-rare); celui de Flamsteed, *Historia Cœlestis Britannica*; les mémoires de l'académie, &c. S'il étoit possible de publier toutes celles que M. de l'Isle a rassemblées dans ses manuscrits, & qui sont actuellement au dépôt de la marine à Versailles, on y trouveroit la plus grande collection d'observations astronomiques qui ait jamais existé; mais le plus grand inconvenient, c'est que la plupart de ces observations ne peuvent se réduire que par de longs calculs.

Des observations de Mercure.

Je rassemble ici principalement des observations de Mercure, parce qu'elles sont rares & difficiles à faire sur-tout à Paris. Copernic éprouvoit la même difficulté dans le nord; il ne put jamais faire une seule observation de Mercure, ce qu'il attribuoit aux vapeurs de la Vistule & à la longueur des crépuscules en été. On trouve dans l'astronomie réformée beaucoup d'observations de Riccioli qui n'ont jamais été calculées, & dont on pourroit se servir pour la théorie de cette planète; on en peut dire autant de celles qui sont dans Hévélius, (*Mach. cœlest.*), & Flamsteed, (*Hist. cœlest.*), dont j'ai fait usage pour calculer mes tables de Mercure, de même que de celles de M. Halley (V. *les Mém. de* 1766, *pag.* 450 & 503).

J'ai aussi trouvé dans les manuscrits de M. de l'Isle la notice de beaucoup d'observations de M. de la Hire & de plusieurs autres astronomes, observations qui n'ont point été publiées : telles sont celles que Margraf fit en 1639 & 1640, dans l'Isle de Vaaz au Brésil, qui sont au dépôt; mais l'original est resté à Cadix, avec les manuscrits de M. de Louville & beaucoup d'autres que M. Godin y avoit emportés, & que l'on croit être entre les mains de D. *Antonio de Ulloa.*

On pourroit y ajouter plusieurs observations que M. de l'Isle a faites à Pétersbourg, où pendant 20 ans il s'est occupé des observations astronomiques; j'y ai suppléé par les miennes, qui sont les plus récentes, & qui m'ont donné les élémens actuels de l'orbite de Mercure (1267, 1286). Parmi les observations de Mercure & de Vénus, que j'ai tirées de l'*Astronomia Danica*, il y en a auxquelles Longomontanus a fait des corrections pour la réfraction & la parallaxe, comme il le dit *pag.* 408, & elles sont marqués *vraies*; mais comme il supposoit la parallaxe du soleil de 2′ 40″, & les autres a proportion, il pourroit y avoir près de 2′ d'erreur en certains cas, qu'il faudroit corriger dans ces observations, si l'on se proposoit d'y mettre ce degré de précision.

OBSERVATIONS

OBSERVATIONS DU SOLEIL.

Av. J. C.	Temps moy. à Paris.				
161	27 Sept.	4h			Equinoxes observés par Hipparque.
158	26 Sept.	16			
157	26 Sept.	22			
145	23 Mars	22	10′		
145	26 Sept.	16			Voy. *Ptolomée*, *Almag.*
142	26 Sept.	4			*Mém. Acad.* 1757, *p.* 423.
134	22 Mars	10	15		*M. Cassini*, *El. d'Astr. p.* 211.
127	23 Mars	4	15		
1278	13 Déc.	18h	7′	solst. d'hiv.	*Hist. de l'Ast. Chin.* *pag.* 107.
1279	14 Juin	8	46½	solst. d'été.	
1279	13 Déc.	23	52	solst. d'hiv.	*Mém. Ac.* 1757, *pag.* 140, 141.
1280	12 Déc.	5	50	solst. d'hiv.	
1487	12 Déc.	12	1	solst. d'hiv.	*Mém. Acad.* 1749, *pag.* 53, 1757, *pag.* 139, 140.
1488	11 Juin	20	40½	solst. d'été	
1488	12 Déc.	11	47½	solst. d'hiv.	
1503	12 Juin	12	8	solst. d'été	
1503	12 Déc.	9	45½	solst. d'hiv.	

OBSERVATIONS *de Waltherus calculées par M. de la Caille*, (Mém. Acad. 1749, *p.* 60).

Années.	Temps moy. à Paris.			Longitude du Soleil.			
1475	15 Sept.	23h	17′	6s	1°	51′	24″
1476	15 Mars	23	33	0	5	4	55
1476	12 Sept.	23	18	5	29	40	6
1477	10 Mars	23	33	11	29	54	0
1477	16 Sept.	23	17	6	3	16	48
1478	11 Mars	23	33	0	0	35	37
1478	12 Sept.	23	18	5	29	6	54
1487	17 Sept.	23	17	6	2	54	24
1488	16 Mars	23	31	0	6	7	48
1488	13 Sept.	23	17	6	0	43	31
1488	14 Sept.	23	17	6	1	42	52
1488	17 Sept.	23	16	6	4	38	37
1489	12 Mars	23	32	0	1	58	30

Années.	Temps moyen à Paris.			Longit. du Soleil.			
1489	14 Mars	23h	31′	0s	3°	57′	46″
1489	18 Mars	23	30	0	7	54	20
1491	12 Mars	23	32	0	1	28	26
1491	14 Sept.	23	17	6	0	59	12
1498	17 Sept.	23	16	6	4	13	24
1498	18 Sept.	23	16	6	5	13	
1499	13 Mars	23	32	0	2	32	37
1501	16 Mars	23	31	0	5	58	20
1501	14 Sept.	23	17	6	1	34	15
1501	18 Sept.	23	15	6	5	28	50

Equinoxes observés par Tycho, (Mém. Acad. 1757, *pag.* 424. M. Cassini, *pag.* 228).

		Temps moyen à Paris.						
1584	10 Mars	0h	46′	42″	1587	13 Sept.	5h	37′ 16″
1584	12 Sept.	11	11	16	1588	10 Mars	0	16 42
1585	10 Mars	6	51	42	1588	12 Sept.	10	35 16
1585	12 Sept.	17	3	16	1589	10 Mars	5	5 42
1586	10 Mars	12	41	42	1589	12 Sept.	16	49 16
1586	12 Sept.	23	6	16	1590	10 Mars	11	15 12
1587	10 Mars	17	55	42	1590	12 Sept.	22	52 16

On trouvera dans M. Cassini, *pag.* 209, une suite d'équinoxes observés depuis 1672 jusqu'en 1732, à l'Observatoire Royal de Paris.

TABLE de 144 Longitudes du Soleil observées par M. de la Caille à Paris & au Cap. (Mém. Acad. 1757, *pag.* 125).

Temps vrai à Paris.				Longitude observée.				Temps vrai à Paris.				Longitude observée.			
1746	29 Oct.	0h	0′	7s	5°	56′	5″7	1747	17 Avril	0h	0′	0s	27°	2′	45″5
	7 Nov.	0	0	7	14	58	2,0		1 Mai	0	0	1	10	38	54,3
	8	0	0	7	15	58	25,2		2	0	0	1	11	36	58,9
1747	14 Mars	0	0	11	23	33	30,7		11	0	0	1	20	18	47,8
	15	0	0	11	24	33	11,4		12	0	0	1	21	16	40,6
	16	0	0	11	25	32	49,8		14	0	0	1	23	12	19,0
	23	0	0	0	2	29	14,9		16	0	0	1	25	7	51,4
	13 Avril	0	0	0	23	8	17,9		17	0	0	1	26	5	34,8
	14	0	0	0	24	6	58,0		21 Juin	0	0	2	29	35	10,9
	15	0	0	0	25	5	35,9	1748	15 Févr.	0	0	10	26	15	53,3
	16	0	0	0	26	4	11,7		21	0	0	11	2	18	20,2

Temps vrai à Paris.			Longit. observée.			
1748 7 Mars	0h	0′	11s	17°	20′	22″8
8	0	0	11	18	20	14,8
16 Avril	0	0	0	26	48	27,5
20	0	0	1	0	42	15,7
18 Juin	0	0	2	27	26	44,0
5 Sept.	0	0	5	13	11	1,7
6	0	0	5	14	9	18,5
7 Sept.	0	0	5	15	7	37,2
8	0	0	5	16	5	58,3
9	0	0	5	17	4	20,8
10	0	0	5	18	2	45,7
11	0	0	5	19	1	13,2
1749 5 Mars	0	0	11	15	6	18,0
21	0	0	0	1	1	19,5
24	0	0	0	3	59	30,1
25	0	0	0	4	58	49,0
26	0	0	0	5	58	5,3
27	0	0	0	6	57	19,2
28	0	0	0	7	56	31,2
29	0	0	0	8	55	40,2
12 Avril	0	0	0	22	40	4,4
13	0	0	0	23	38	43,8
23	0	0	1	3	23	45,4
25	0	0	1	5	20	22,9
6 Mai	0	0	1	15	59	20,8
7	0	0	1	16	57	16,8
8	0	0	1	17	55	11,1
9	0	0	1	18	53	3,9
10	0	0	1	19	50	56,0
24	0	0	2	3	18	56,3
25	0	0	2	4	16	29,4
18 Juin	0	0	2	27	13	4,4
19	0	0	2	28	10	19,7
5 Juil.	0	0	3	13	25	21,2
6	0	0	3	14	22	32,5
7	0	0	3	15	19	45,6
9 Juil.	0	0	3	17	14	12,1
13	0	0	3	21	3	11,4
16	0	0	3	23	55	1,2
19	0	0	3	26	46	53,9
20	0	0	3	27	44	11,9

Temps vrai à Paris.			Longit. observée.			
1749 21	0h	0′	3s	28°	41′	30″0
28	0	0	4	5	22	50,5
2 Août	0	0	4	10	9	54,2
6	0	0	4	13	59	56,1
7	0	0	4	14	57	30,4
29	0	0	5	6	9	21,5
30	0	0	5	7	7	26,5
31	0	0	5	8	5	33,3
1 Sept.	0	0	5	9	3	42,2
8	0	0	5	15	51	43,6
9	0	0	5	16	50	9,2
13	0	0	5	20	44	10,7
2 Oct.	0	0	6	9	22	11,1
3	0	0	6	10	21	22,9
4	0	0	6	11	20	37,2
6	0	0	6	13	19	13,4
8	0	0	6	15	17	58,9
10	0	0	6	17	16	53,0
1750 2 Mars	0	0	11	11	51	17,9
3	0	0	11	12	51	21,3
4	0	0	11	13	51	22,5
5	0	0	11	14	51	20,9
8	0	0	11	17	51	9,4
30	0	0	0	9	39	52,7
2 Avr.	0	0	0	12	37	4,2
3	0	0	0	13	36	3,9
18	0	0	0	28	17	17,4
21 Juin	0	0	2	29	50	50,7
28	0	0	3	6	31	15,0
29	0	0	3	7	28	28,7
30	0	0	3	8	25	41,6
1751 27 Mai	22	55′½	2	6	38	14,7
30	22	55	2	9	30	43,7
19 Juin	22	55	2	28	37	4,4
21	22	55	3	0	31	34,6
27	22	55	3	6	15	1,0
29	22	55	3	8	9	26,2
11 Juil.	22	55	3	19	35	47,3
12	22	55	3	20	33	1,1
19	22	55	3	27	13	58,2
3 Août	22	55	4	11	34	57,0

Temps vrai à Paris.	Latitude observée.	Temps vrai à Paris.	Latitude observée.
1751 21 Août 22h 55 3/4	4s 28° 53′ 19″8	1752 21 Fév. 22h 55′3	10s 1° 56′ 20″9
22 22 55	4 29 51 14,8	3 Fév. 22 55	10 15 7 54,0
1 Sep. 22 55	5 9 31 40,3	5 22 55	10 17 9 22,9
12 22 55	5 20 13 23,2	26 22 55	11 8 19 21,7
13 22 55	5 21 11 55,9	2 Mars 22 55	11 13 19 40,2
29 22 55	6 6 53 9,9	3 22 55	11 14 19 38,6
30 Sep. 22 55	6 7 52 14,7	4 22 55	11 15 19 34,6
6 Oct. 22 55	6 13 47 25,6	12 22 55	11 23 18 5,2
7 22 55	6 14 46 45,5	13 22 55	11 24 17 46,7
8 22 55	6 15 46 7,5	20 22 55	0 1 14 40,5
4 Nov. 22 55	7 12 41 46,1	27 22 55	0 8 9 42,3
5 22 55	7 13 42 20,7	4 Avr. 22 55	0 16 1 48,2
3 Déc. 22 55	8 12 1 10,2	10 22 55	2 20 45 25,5
10 22 55	8 19 8 15,0	18 22 55	2 28 23 40,9
19 22 55	8 28 18 30,5	19 22 55	2 29 20 54,8
24 22 55	9 3 24 24,7	21 22 55	3 1 15 20,1
27 22 55	9 6 27 55,7	26 22 55	3 6 1 15,7
29 22 55	9 8 30 15,8	9 Nov. 22 55	7 18 29 33,8
1752 8 Jan. 22 55	9 18 41 50,6	28 Déc. 22 55	9 8 15 5,4
9 22 55	9 19 43 0,2	29 22 55	9 9 16 18,2

OBSERVATIONS DE MERCURE.

Années	Temps moyen à Paris.			Longit. observ.		
264 av. J. C.	14	Nov.	16h 16′	7s	2°	47′
261	11	Févr.	15 38	9	21	48
261	25	Avr.	4 31	1	23	8
261	23	Août	4 42	5	18	58
256	28	Mai	4 56	2	28	49
244	18	Nov.	15 20	7	1	52
236	29	Oct.	15 0	6	13	44
130 apr. J. C.	4	Juil.	6 21	4	7	22
132	2	Févr.	4 6	11	2	2
134	3	Juin	13 55	1	19	48
134	2	Oct.	15 28	5	21	15
135	5	Avr.	5 13	1	5	23
138	4	Juin	6 10	3	8	4
139	17	Mai	5 54	2	18	34
139	4	Juil.	13 57	2	21	9
141	1	Févr.	16 46	9	14	34
491	8	Sept.	16 25	5	13	30

Ces observations ont été réduites & corrigées dans les Mémoires de l'Académie 1766, *pag.* 498, sans cependant tenir compte de la réfraction. Il y en a quelques-unes qu'on ne peut accorder avec les autres.

1 50 B. Walt. Coper. *l.* v. *c.* 30. App.

	Temps vrai à Paris	Longit. observ.	Latitude observée.
1504 apr. J.C.	8 Janv. 17h 55′	9s 3° 20′	0 45 B Schoner, *Ibid.*
1504	18 Mars 6 55	0 26 6	3 0 B Schoner, *Ibid.*
1504	18 Mars 6 40	0 26 29	Suiv. Boull. *Ast. Phil. p.*383. *vr.*

Années N. St.	Temps vrai.	Longit. observ.	Latitude observée.
1585	24 Nov. 18h18′	7s 13° 4′ 0″	2° 18′ 0″ B { *Ast. Dan.* 422. *Ast. Phil.* 378.
1585	3 Déc. 18 38	7 25 3 0	1 25 0 B *Astr. Dan. vr.*
1586	3 Nov. 18 28	6 22 35 0	*Ibid.*
1586	7 Nov. 17 48	6 26 33 0	2 17 0 B *Ibid.*
1587	19 Janv. 4 6	10 17 48 0	0 1 0 B *Tych. Epist. p.*56.
1587	24 Janv. 4 33	10 21 7 0	1 21 0 B *Ibid. vr.*
1587	25 Janv. 4 39	10 21 20 0	1 40 0 B *Ibid. vr.*
1587	19 Janv. 4 8	5 17 48 0	0 1 0 B *Astr. Dan.* 422. *vr.*
1589	12 Avr. 7 23	1 11 28 30	2 23 40 B *Ast. Ref. p.*345. *vr.*
1589	13 Avr. 7 28	1 12 48 0	2 30 30 B *Ibid. p.* 346.
1589	14 Avr. 7 33	1 14 1 0	2 36 50 B *Ibid. vr.*
1589	16 Avr. 7 38	1 16 8 30	2 45 0 B *Ibid. vr.*
1590	16 Mars 6 8	1 13 44 0	1 42 0 B *Astr. Dan. vr.*
1592	13 Fév. 4 58	11 12 20 0	0 47 *dout.* B *Ibid. vr.*
1593	21 Mai 8 48	2 23 16 0	2 0 0 B *Ibid. p.*422. *dout. vr.*
1593	22 Mai 8 48	2 24 19 0	*Ast. Phil.* 358. *app.*
1607	25 Avr. 8 18	1 21 5 0	1 40 B *Ast. Dan. p.*422 *vr.*
1610	15 Déc. 18 18	8 2 42 0	. . . . . *Ibid. vr.*
1625	13 Févr. 6 21	11 13 27 0	Boulliaud, *Astr. Philol.* 358. *vr.*
1630	11 Déc. 19 8	7 29 13 0	Boulliaud, *Ibid.*
1632	30 Juil. 15 0	3 24 25 47	0 33 30 B Gassen. *Ib.* 361. *vr.*
1634	2 Janv. 5 48	10 1 31 0	0 57 0 A *Ibid. p.* 356. *app.*
1634	4 Janv. 5 48	10 3 31 0	0 30 0 A *Ibid. app.*
1634	6 Janv. 5 48	10 5 1 0	0 1 52 B *Ibid. app.*
1634	2 Oct. 17 18	5 22 7 8	1 25 0 B *p.* 356 & 372. *vr.*
1634	3 Oct. 17 18	5 22 59 26	1 29 18 B *Ibid. app.*
1634	4 Oct. 17 18	5 23 59 47	1 19 16 B *Ibid. app.*
1634	12 Oct. 17 33	4 5 6 0	. . . . . *Ibid. p.* 363. *vr.*
1635	16 Janv. 17 18	9 4 24 32	2 1 19 B *p.* 363. *vr.*
1635	22 Janv. 17 18	9 8 21 50	1 39 0 B *Ibid. p.* 356. *app.*
1635	24 Janv. 17 18	9 10 4 55	1 14 8 B *Ibid. app.*
1635	25 Janv. 17 18	9 11 6 36	0 59 48 B *Ibid. app.*
1635	17 Sept. 16 18	5 7 4 0	Gassendi,
1635	1 Déc. 5 11	9 0 26 0	Gassendi,
1636	26 Juin 8 16	3 23 17 47	1 36 55 B *p.* 367. *vr.*

Années	Temps vrai à Paris.	Longit. obſerv.	Latitude obſervée.	
	27 8h 10′	3s 24° 57′ 34″	2° 0′ 0″ B	p. 375. vr
	14 Juil. 8 10	4 19 31 16	1 4 0 A	367. vr.
	15 8 10	4 20 33 15	0 33 0 A	Ibid. vr.
	16 8 10	4 21 26ou46	0 41 A	p. 367 & 374. vr.
	16 8 20	4 21 33 0	. . . . .	p. 368. vr.
	3 Sept. 16 45	4 24 37ou38	. . . . .	p. 373. vr.
1699	21 Oct. 22 58 56	6 12 5 58	2 7 9 B	Mém. Acad. 1706.
	22 Oct. 23 0 20	6 13 31 44	2 5 32 B	Ibid.
	23 Oct. 23 1 54	6 14 59 22	2 4 54 B	Ibid.
	26 Oct. 23 7 10	6 19 34 52	1 56 43 B	Ibid.
1701	11 Sept. 22 54 56	5 1 54 54	0 5 25 B	Ibid.
	19 Sept. 23 2 12	5 10 50 43	1 37 33 B	Ibid.
	20 Sept. 23 4 30	5 12 24 48	1 39 32 B	Voy. ci-après.
	23 Sept. 23 12 18	5 17 20 13	1 51 4 B	Ibid.
	24 Sept. 23 15 2	5 19 2 22	1 52 13 B	Ibid.
	25 Sept. 23 17 56	5 20 47 50	1 53 29 B	Ibid.
1705	17 Juil. 22 47 5	3 8 27 48	0 29 16 A	Ibid.
	24 Juil. 23 16 8	3 21 33 33	0 51 2 B	Ibid.
	26 Juil. 23 25 49	3 25 38 27	1 8 32 B	Ibid.
1707	12 Avr. 1 11 34	1 11 24 30	2 34 47 B	Mém. 1753, p. 320.
	13 Juin 22 37 24	2 2 53 23	1 55 1 A	Mém. Ac. 1707,
	15 Juin 22 39 56	2 4 32 6.	1 44 16 A	p. 199.

Obſervations calculées avec ſoin pour ſervir à ma théorie de Mercure.

Années.	Temps moy. à Paris.	Longit. vraie.	Latitude vraie.	
1672	21 Mai 8h 9′ 18″	2s 24° 9′ 45″	Mémoires de l'Académie, 1766 & 1767.	
1673	4 Mai 7 53 25	2 5 52 5		
1683	13 Déc. 19 39 15	8 3 48 23		
1701	20 Sept. 22 57 28	5 12 23 55		
1731	15 Juil. 22 38 12	3 3 2 35	M. Caſſini.	
1744	29 Mai 8 51 52	3 2 0 0		
1750	16 Avr. 22 49 52	0 6 53 1		
1750	5 Oct. 1 19 42	7 7 18 19	1 50 23 A	Mém. 1753, p. 277.
1751	6 Mai 0 57 7	2 0 50 36	1 51 15 B	
1753	25 Sept. 22 47 51	5 15 41 35		
1758	9 Mai 1 22 54	2 10 1 46		
1759	19 Août 1 41 34	5 22 58 35		
1763	17 Nov. 18 30 8	7 6 13 34		

Années.	Temps moyen à Paris.	Longit. observ.		
1763	3 Juin 9h 28′ 28″	3s 5° 23′ 1″		
1763	13 Nov. 18 0 49	7 2 41 28	2 22 21	B
1764	24 Mai 8 7 50	2 26 50 35	1 51 11	B
1764	17 Juil. 15 58 4	3 6 59 6	1 7 9	A

Table des longitudes de Mercure en conjonction dans ses douze passages sur le Soleil, observés jusqu'à présent.

	Temps moy. à Paris.	Long. réd. à l'écl.	Lat. géoc. vraie.		
1631	6 Nov. 19h 36′ 20″	7s 14° 41′ 35″	3′ 22″	B	*M. Cassini, p. 592. Phil. Transf. n. 386.*
1631	6 Nov. 18 50 0	. . . . .	4 28	B	*Mss. de M. de l'Isle.*
1651	2 Nov. 13 2 30	7 10 26 29	12 0	A	*Astr. Br. p. 312.* dout.
1661	3 Mai 4 48 28	1 13 33 27	4 30	B	*M. Cassini, p. 587, 608.*
1677	7 Nov. 0 23 0	7 15 44 20	4 3	B	*M. Cassini, p. 591.*
1690	9 Nov. 18 6 0	7 18 20 46	12 20	B	*M. Cassini, p. 595, 608.*
1697	2 Nov. 17 42 0	7 11 33 50	10 42	A	*M. Cassini, p. 598.*
1723	9 Nov. 5 16 0	7 16 47 20	6 0	B	*Phil. Transf. n. 386. M. Cassini, p. 601.*
1736	10 Nov. 22 59 23	7 19 23 38	14 7	B	*Mém. Ac. 1736.*
1740	2 Mai 10 36 37	1 12 43 19	14 59	B	*Phil. Transf. n. 471.*
1743	4 Nov. 22 26 8	7 12 37 32	9 7	A	*Mém. Ac. 1736.*
1753	5 Mai 18 29 50	1 15 48 0	2 25	A	*Mém. 1754, p. 599.*
1756	6 Nov. 16 17 28	7 15 13 41	0′ 58,8	A	*Mém. 1758, p. 154.*

OBSERVATIONS DE VÉNUS.

	Temps vrai à Paris.	Long. observ.	
271 av. J. C.	11 Oct. 14h 20′	5s 3° 36′	Dout.
127 de J. C.	11 Oct. 14 50	5 1 18	
129	19 Mai 14 15	0 11 37	D.
132	8 Mars 6 0	1 2 32	
134	17 Fév. 14 30	9 12 58	D.
136	18 Nov. 5 20	9 13 53	D.
136	25 Déc. 5 10	10 20 39	
138	15 Déc. 14 50	7 7 34	
140	18 Fév. 5 40	0 14 54	
140	29 Juil. 13 20	2 19 34	D.

De ces dix observations, il y en a cinq qui diffèrent entre elles de plus d'un degré; & la première s'écarte du calcul de plus de quatre degrés; ainsi il est difficile de pouvoir les faire servir à la théorie de Vénus. Voici une partie de ces observations telles que M. Cassini les a employées, n'ayant pas fait aux observations de Ptolomée les corrections que j'ai indiquées ci-dessus, *pag.* 393.

Années.	Temps vr. à Paris.			Lon. observ.			Latitude.			
117	13 Oct.	16h	16′.	5s	10°	43′½				. . . . *M.Cas. p.*534.
129	18 Mai	16	8	0	10	33	1°	30′	A	*M.Cas. p.* 535.
132	8 Mars	4	8	1	1	55				. . . . *p.* 536.
134	17 Fév.	16	8	9	12	27				. . . . *Ibid.*
136	18 Nov.	4	0	9	12	50				. . . . *p.* 537.
136	25 Déc.	4	0	10	20	14				. . . . *Ibid.*
138	15 Déc.	14	53	7	6	53				. . . . *p.* 538.
140	18 Fév.	4	8	0	14	28½				. . . . *Ibid.*
140	29 Juil.	16	8	2	18	46½				. . . . *p.* 539.
Nouv. Style.										
1585	24 Sept.	17	33	4	15	58	2	8	A	*As.Dan.p.*407.
1587	19 Janv.	4	58	11	13	5	1	38	B	*Tyc.Ep.p.*56.
1587	24 Janv.	4	8	11	16	20	2	29	B	*Ibid.*
1587	25 Janv.	3	58	11	16	55	2	39	B	*Ib.As.Dan.app.*
1587	3 Mars	5	23	11	16	1	8	56	B	*Astr. Dan. app.*
1587	12 Mars	16	48	11	10	7	8	26	B	*Ibid. app.*
1588	24 Déc.	18	58	5	17	10	3	10	B	*Ibid. vr.*
1590	27 Déc.	19	18	8	20	0	0	27	B	*Astr. Dan. vr.*
1592	22 Fév.	17	30	9	27	18				. . . . *Astr. Phil.*
1594	17 Déc.	5	0	10	22	58	1	7	A	
1594	25 Déc.	4	28	10	21	0	1	16	A	*Astr. Dan. vr.*
1600	21 Fév.	20	27	9	38	22				
1601	9 Mai	8	30	1	19	4				
1610	22 Déc.	3	58	10	17	58	1	29	A	*Astr. Dan. vr*
1616	19 Mars	16	18	10	15	24				*Astr. Dan. vr.*

J'ai averti que dans les observations tirées de l'*Astr. Danica*, il paroît que l'on a employé une parallaxe trop forte.

Conjonction

Conjonctions de Vénus au soleil, rapportées par M. Cassini, pag. 561. auxquelles j'ai ajouté celles de 1639, 1691, 1751, 1761 & 1769.

Anneés.	T. vr. de la conjonc.	Longit. de Vénus.	Latit. géocent.
1639	4 Déc. 6 18 $\frac{1}{2}$ inf.	8s 12° 31′ 55″	0h 8′ 50″ ou 9′
1689	25 Juin 13 46 inf.	3 4 53 40	3 1 40 B
1691	15 Nov. 11 4 sup.	*par M. de la Hire.*	*Anc. Mém. T. X. p. 25.*
1692	3 Sept. 19 7 inf.	5 12 33 0	
1693	25 Juin 17 38 sup.	3 5 5 35	17h 30′ $\frac{1}{2}$ *suiv. M. de la H.*
1696	1 Sept. 0 58 sup.	5 9 52 55	1 21 20 B
1698	15 Avr. 22 2 sup.	0 26 50 40	
1699	30 Janv. 7 6 inf.	10 11 14 47	7 36 0 B
1699	13 Nov. 12 0 sup.	7 21 24 0	0 32 20 B
1700	2 Sept. 11 20 inf.	5 10 20 20	8 40 15 A
1705	21 Juin 22 0 inf.	3 0 36 52	2 25 10 A
1706	14 Avr. 9 45 sup.	0 24 26 30	1 3 10 A
1707	28 Janv. 18 20 inf.	10 8 47 5	
1708	31 Août 0 30 inf.	5 8 2 0	
1709	22 Juin 6 0 sup.	3 0 56 30	
1710	10 Avr. 18 7 inf.	0 20 55 0	
1711	27 Janv. 12 52 sup.	10 7 33 51	
1712	28 Août 14 53 sup.	5 5 43 34	
1713	19 Juin 15 15 inf.	2 28 29 35	
1714	12 Avr. 2 0 sup.	0 22 15 38	
1715	26 Janv. 8 19 inf.	10 6 22 58	7 10 33 A
1716	28 Août 16 36 inf.	5 5 49 2	8 34 9 A
1718	8 Avr. 10 13 inf.	0 18 42 13	6 57 22 B
1719	10 Nov. 9 17 inf.	7 17 55 34	4 6 18 B
1729	14 Juin 23 56 inf.	2 24 11 16	1 26 53 A
1737	12 Juin 15 43 inf.	2 22 0 30	1 8 12 A
1751	31 Oct. 11 47 $\frac{2}{3}$ inf.	7 8 13 0	5 23 1 A
1761	5 Juin 17 50 $\frac{1}{3}$ inf.	2 15 36 10	0 9 30 $\frac{1}{2}$ A
1769	3 Juin 10 13 $\frac{1}{3}$ inf.	2 13 27 19	0 10 16,4 B

Digressions de Vénus, rapportées par M. Cassini, p. 570.

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉.
1689	4 Sept. 45°	57′ 20″	2s 24° 16′	72432
1690	21 Nov. 47	13 20	2 14 26	72500
1691	5 Avr. 46	0 50	9 20 30	72432

Années.	Temps.	Digression.	Anom. moy.	Dist. de Vénus au ☉
1692	23 Juin	45° 23′ 30″	9s 13° 30′	72419
1697	13 Avr.	45 36 0	7 5 20	71905
1697	4 Sept.	45 52 0	2 25 48	72382
1698	21 Nov.	47 14 20	2 15 35	72515
1699	10 Sept.	46 15 0	9 28 18	72532
1705	12 Avr.	45 48 50	7 3 16	71927
1705	28 Août	45 48 0	2 14 10	72479
1706	17 Nov.	47 10 40	2 9 8	72540
1707	9 Avr.	46 19 10	9 27 32	72540

	Temps moyen.	Longitude.
1746	21 Déc. 10h 37′ 30″ t. m.	10s 3° 52′ 17″ (1340).
1767	31 Juil. 2 58 51	5 23 6 45 (1318).
1769	7 Août 20 52 57	3 0 19 54 (1318).

OBSERVATIONS DE MARS.

	Temps moyen à Paris.	Long. héliocent	Latitude.
130	13 Déc. 11h 48′	2s 21° 22′ 50″	*M. Cassini, p.* 467.
135	19 Fév. 4 0	4 29 40 0	*Ibid.*
139	26 Mai 9 1	8 2 53 0	*Ibid.*
1580	28 Nov. 0 49	2 6 28 35	1 40 B *Kep. de*
1583	7 Janv. 3 16	3 16 55 30	4 6 B *St. M.*
1585	9 Fév. 18 32	4 21 36 10	4 32 10 B *p.* 90.
1587	16 Mars 6 41	5 25 43 0	3 41 B
1589	24 Avr. 5 41	7 4 23 0	1 12 45 B
1591	18 Juin 7 1	8 26 43 0	4 0 A
1593	4 Sept. 16 45	11 12 16 0	6 2 30 A
Selon mon calcul,	14 32	11 12 17 56	
1595	9 Nov. 23 57	1 17 31 40	0 8 B
Suiv. M. Cassini,	22 8	1 17 32 48	*Elém. d'As. p.* 489.
1597	23 Déc. 15 12	3 2 28 0	3 33 B
1600	28 Janv. 13 20	4 8 38 0	4 30 50 B
1602	2 Mars 13 31	6 12 27 0	4 10 B
1604	7 Avr. 15 41	6 18 37 10	2 26 B *p.* 342
1608	3 Août 1 18	10 11 10 0	*Astr. Dan. p.* 342.
1610	18 Oct. 16 8	0 25 30 0	*Ibid.*

Voyez Képler, *de Stella Martis*, 90. Longomontanus, *Astr. Dan. pag.* 342. Boulliaud, *Astr. Phil. pag.* 287; Riccioli, *Astron. Reform. pag.* 316. On y trouve une observation faite 272 ans avant J. C. mais sur laquelle on n'est pas d'accord.

Oppositions de Mars rapportées dans les tables de Halley.

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Anom. moyenne de Mars.
1659	1 Déc. 11h 42′	2s 9° 51′ 2″	8s 29°
1662	9 Janv. 6 9	3 19 52 14	10 13
1666	18 Mars 12 15	5 28 39 49	1 4
1670	21 Juin 15 47	9 0 46 42	4 10
1672	8 Sept. 11 33	11 16 56 4	6 14
1674	12 Nov. 17 1	1 21 11 32	8 11
1676	25 Déc. 19 14	3 5 29 55	9 26
1679	30 Janv. 14 59	4 11 27 59	11 8
1781	4 Mars 16 27	5 15 16 16	0 18
1683	10 Avr. 23 40	6 21 39 18	2 0
1685	28 Mai 1 9	8 7 38 15	3 18
1687	8 Août 1 9	10 15 56 5	5 18
1689	21 Oct. 17 29	0 29 28 52	7 20
1691	11 Déc. 3 15	2 19 53 50	9 9
1694	17 Janv. 4 56	3 28 11 52	10 22
1696	20 Fév. 9 9	5 2 18 4	0 3
1698	26 Mars 18 29	6 7 4 17	1 13
1700	8 Mai 7 49	7 18 5 16	2 28
1702	8 Juil. 12 59	9 16 10 10	4 23
1704	26 Sept. 10 3	0 3 45 46	6 28
1711	8 Fév. 5 31	4 19 24 6	11 16
1713	13 Mars 13 3	5 23 20 30	0 27
1717	11 Juin 9 29	8 20 38 46	4 0

Années.	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	
1683	11 Avr. 0h 11′	6s 21° 41′ 30″	*M. Cassini, p.* 465.
1687	8 Août 0 0	10 15 54 0	6 50 40A. *p.* 449.
1691	11 Déc. 3 8	2 19 54 28	*Ibid. p.* 472.
1694	17 Janv. 4 31	3 28 12 0	*Ibid. p.* 474.
1696	20 Fév. 9 15	5 2 18 8	*Ibid. p.* 472.
1698	26 Mars 18 0	6 7 4 18	*Ibid. p.* 474.
1700	8 Mai 7 38	7 18 5 0	*Ibid. p.* 472.
1702	8 Juil. 13 2½	9 16 10 23	*Ibid. p.* 474.
1709	4 Janv. 5 54	3 14 18 25	*Ibid. p.* 469.
1713	13 Mars 16 49½	5 23 30 30	*Ibid. p.* 470.
1715	21 Avr. 10 58½	7 1 9 30	*Ibid. p.* 464.
1717	11 Juin 9 10	8 20 37 15	*Ibid. p.* 465.
1730	5 Avr. 7 7	6 15 43 36	*Ibid. p.* 465.

Oppositions observées à Paris depuis quelques années

Années	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latit. de Mars.
1741	12 Janv. 8h 14′ 23″	3s 22° 49′ 16″	
1743	15 Fév. 19 17 40	4 27 16 32	*Mém. Ac.* 1755,
1745	21 Mars 14 19 17	6 1 34 44	*p.* 218.
1747	1 Mai 7 3 0	7 10 55 59	
1749	26 Juin 2 6 12	9 4 55 41	
1751	14 Sept. 8 28 0	11 21 35 0	
1753	16 Nov. 10 28 33	1 24 47 24	
1760	7 Mars 17 44 7	5 18 9 8	3° 58′ 57″ ½ B
1764	1 Juin 1 2 10	8 11 22 24	2 20 8 A
1768	25 Oct. 19 35 44	1 3 25 35	1 27 29 A

Observations de Mars hors de ses oppositions, les trois premières sont de M. de la Caille, Astron. Fund. *pag.* 244.

Temps vrai à Paris.	Long. géoc. réd. à l'écliptique.	Latitude géocen. de Mars.
1747 14 Mai 10h 50′ 43″	7s 6° 15′ 20″	0° 0′ 25½ B
1751 13 Sept. 11 8 38	11 21 48 6	5 33 16 A
1753 3 Nov. 9 31 46	1 29 29 38½	0 0 27½ A
1768 3 Déc. 8 47 24	0 27 11 47	0 33 57 B

OBSERVATIONS DE JUPITER.

Oppositions de Jupiter observées par divers astronomes.

Temps vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocen.
133 15 Mai 23h 3′	7s 23° 22′ 22″	Ces 3 Observations
136 1 Sept. 4 10	11 7 47 35	sont tirées de Ptolomée.
137 8 Oct. 3 18	0 14 19 0	*M. Cassini*, *p.* 416.
1520 28 Avr. 15 56	7 17 59 0	Ces 3 Observations
1526 28 Nov. 1 58	2 15 51 0	sont de Copernic.
1529 30 Janv. 21 0	4 21 15 50	*M. Cassini*, *p.* 416.
1583 V.S. 6 Sept. 17 13	11 23 33 22	1 34 53 A
1584 13 Oct. 7 20	1 0 22 0	
1585 18 Nov. 0 12	2 6 17 30	0 52 25 A

Années.	T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude géocent.
1586	21 Déc. 16h 2′	3s 10° 19′ 4″	0° 8′ 17″ B
1588	22 Janv. 8 8	4 12 18 34	0 58 47 B
1589	21 Fév. 0 36	5 12 57 8	1 14 32 B
1590	23 Mars 12 20	6 12 54 30	1 32 6 B
1591	23 Avr. 19 6	7 13 7 20	1 17 10 B
1592	25 Mai 16 21	8 14 25 1	0 35 56 B
1594	5 Août 5 35	10 22 21 4	1 12 31 A
1595	12 Sept. 1 25	11 28 53 10	1 39 18 A
1596	18 Oct. 8 30	1 5 40 0	1 25 45 A
1607	17 Nov. 11 ½ *dont.*	0 4 10 0	Les 12 premieres obs.
1610	30 Déc. 14 40	3 19 36 0	furent faites par Tycho,
1613	1 Mars 22 0	5 21 45 0	les trois dernieres par Longomont.
1620 N.S.	7 Nov. 10 0	1 15 58 0	Ces 2 obs. sont de Gas. &
1633	17 Déc. 2 0	2 26 3 20	& les 10 suiv. d'Hévélius.
1657	26 Déc. 13 40	3 5 54 37	0 9 30 A
1659	27 Janv. 11 18	4 8 8 56	0 48 43 B
1661	28 Mars 16 52	6 8 57 55	1 38 25 B
1666	15 Sept. 23 50	11 23 43 28	1 37 25 A
1667	23 Oct. 8 25	1 0 33 21	1 33 41 A
1671	31 Janv. 18 4	4 12 35 0	0 59 0 B
1672	2 Mars 12 10	5 13 18 13	1 28 27 B
1674	3 Mai 6 0	7 13 28 43	1 21 17 B
1676	8 Juil. 18 15	9 17 36 18	0 12 21 A
1678	21 Sept. 6 3	11 28 58 41	1 37 10 A

Oppositions de Jupiter observées à Paris.
(Voyez M. Cassini, pag. 418).

	Temps vrai à Paris.	Longitude.	Latitude.
1672	2 Mars 9h 0′	5s 13° 18′ 0″	
1673	2 Avr. 1 0	6 13 19 0	1° 37′ 45″ B
1683	5 Févr. 5 0	4 17 10 0	
1688	13 Juil. 12 ¼ *dont.*	9 22 15 50	
1689	19 Août 19 20	10 27 28 10	
1690	26 Sept. 7 18	0 4 5 40	1 39 40 A
1691	2 Nov. 13 30	1 10 52 0	
1692	6 Déc. 21 36	2 16 24 30	
1694	9 Janv. 3 0	3 20 1 3	
1695	9 Févr. 15 3	4 21 43 30	1 7 54 B
1696	11 Mars 4 28	5 22 8 23	1 34 10 B

Années.	T. vrai à Paris.	Longitude.	Latitude.	
1697	10 Avr. 17h 32′	6s 22° 1′ 15″	1° 35′ 22″	B
1698	12 Mai 5 46	7 22 20 32	1 9 32	B
1699	14 Juin 10 8	8 23 52 42	0 23 7	B
1700	19 Juil. 16 40	9 27 16 22	0 33 36	A
1701	25 Août 20 34	11 2 42 54	1 20 30	A
1702	2 Oct. 17 29	0 9 28 7	1 38 18	A
1703	8 Nov. 17 33	1 16 8 30	1 16 8	A
1704	12 Déc. 18 59	2 21 26 2	0 28 10	A
1706	14 Janv. 16 2	3 24 40 40	0 29 56	B
1707	14 Févr. 23 2	4 26 6 55	1 13 26	B
1708	16 Mars 9 9	5 26 23 51	1 36 52	B
1709	16 Avr. 0 49	6 26 19 0	1 32 58	B
1710	17 Mai 18 24	7 26 47 17	1 4 50	B
1711	20 Juin 6 37	8 28 36 0	0 15 50	B
1712	24 Juil. 21 25	10 2 20 10	0 40 25	A
1713	31 Août 6 9	11 8 2 16	1 25 26	A
1714	8 Oct. 0 26	0 14 53 2	1 38 10	A
1715	13 Nov. 20 19	1 21 23 13	1 11 8	A
1716	17 Déc. 12 31	2 26 20 43	0 19 26	A
1718	19 Janv. 1 55	3 29 17 20	0 35 45	B
1719	19 Févr. 4 3	5 0 31 18	1 17 30	B
1720	20 Mars 15 43	6 0 43 19	1 37 33	B
1721	20 Avr. 9 48	7 0 40 3	1 29 32	B
1722	22 Mai 8 43	8 1 17 41	0 57 15	B
1723	25 Juin 4 0	9 3 21 22	0 7 29	B
1724	30 Juil. 0 28	10 7 19 49	0 50 11	A
1725	5 Sept. 14 44	11 13 18 0	1 31 31	A
1726	13 Oct. 6 0	0 20 4 10	1 37 0	A
1727	18 Nov. 17 39	1 26 4 47	1 5 57	A
1728	22 Déc. 3 9	3 1 8 2	0 12 40	A
1730	23 Janv. 11 5	4 3 49 30	0 41 23	B
1731	23 Févr. 9 56	5 4 53 3	1 21 20	B
1732	24 Mars 22 4	6 5 0 27	1 36 40	B

Dans les tables de M. Halley, il y a de même une suite d'oppositions observées depuis 1658 jusqu'en 1719.

Oppositions calculées par M. le Gentil d'après les registres de l'Observatoire. (Mém. acad. 1754, pag. 327).

Années.	Temps moyen à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude géoc.
1733	24 Avr. 19h 6′ 4″	7s 5° 0′ 27″	1° 26′ 23″ B
1734	26 Mai 23 38 9	8 5 48 31	
1735	30 Juin 1 38 *dout.*	9 8 7 17	0 0 19 A
1736	4 Août 4 26 26	10 12 22 58	0 53 14 A
1738	18 Oct. 9 51 13*	0 25 18 25	1 33 34 A
1739	23 Nov. 16 4 22	2 1 30 6	0 58 59 A
1740	26 Déc. 18 48 49*	3 5 57 13	
1742	27 Janv. 22 2 56*	4 8 25 17	0 49 37 B
1743	27 Févr. 18 23 16*	5 9 18 37	1 25 42 B
1744	29 Mars 5 23 3	6 9 20 44	
1745	29 Avr. 4 52 18*	7 9 22 36	1 22 46 B
1746	31 Mai 13 1 8*	8 10 16 2	0 45 37 B
1747	4 Juil. 20 2 21	9 12 45 18	0 8 12 B
1748	9 Août 4 32 8	10 17 16 42	1 1 46 A
1749	15 Sept. 21 0 55	11 23 32 16	
1750	23 Oct. 11 11 55*	1 0 26 20	1 31 28 A
1751	28 Nov. 11 56 36	2 6 29 2	0 51 6 A
1752	31 Déc. 9 54 30	3 10 45 9	0 4 21 B
1754	1 Fév. 8 18 13	4 13 0 16	0 55 10 B
1755	4 Mars 1 53 22	5 13 42 53	

Les sept oppositions marquées par des étoiles, sont les seules où Jupiter ait été comparé à des étoiles fixes, dans les autres on ne s'est servi que du soleil.

Oppositions de Jupiter observées à Paris depuis quelques années.

	Temps moyen à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude hélioc.
1756	[illegible]r. 12h 52′ 29″	6s 13° 40′ 34″	1° 18′ 2 2″ B
1757	[illegible]y 15 13 33	7 13 45 38	1 3 46 B
1758	5 Juin 4 53 0	8 14 49 13	0 29 34 B
1759	9 Juil. 19 3 40	9 17 35 14	0 13 11 A
1760	14 Août 10 3 23	10 22 24 33	0 55 5 A
1761	21 Sept. 6 9 15	11 28 54 10	1 18 6 A

Années.	T. moyen. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latit. héliöc.
1762	28 Oct. 16h 5′ 17″	1s 5° 44′ 12″	1° 9′ 50″ A
1763	3 Déc. 10 38 0	2 11 34 57	0 34 44 A
1765	4 Janv. 23 25 53	3 15 30 1	0 12 16 B
1766	5 Fév. 15 59 2	4 17 27 48	1 1 32 B
1767	8 Mars 6 39 39	5 18 0 9	1 30 48 B
1768	6 Avr. 18 13 11	6 17 55 29	1 35 37 B
1769	8 Mai 0 50 0	7 18 6 38	1 13 37 B

Parmi les oppositions précédentes les huit premières ont été calculées par M. Jeaurat (*Mém. acad.* 1763, *pag.* 252 & années suivantes); j'ai conclu les quatre autres de mes propres observations.

OBSERVATIONS DE SATURNE.

Temps moyen à Paris.		Long. obser.	Lieu du soleil.	Latit.
228 av. J.C.	1 Mars 4h 23′	5s 9° 6′	11 7 26	2° 45′ B
127 de J.C.	26 Mars 4 14	6 2 14	0 3 53	
133	3 Juin 2 8	8 10 42	2 10 33	
136	7 Juil. 22 9	9 15 17	3 14 5	
138	22 Déc. 6 11	10 10 19	9 0 20	

De ces cinq observations anciennes, il y en a trois d'où M. Cassini a conclu, par des calculs différens le temps de l'opposition, c'est par celles-là que commence la suite des oppositions que nous allons rapporter.

Temps vrai de l'oppos.		Longitude.	Latitude.
127	25 Mars 10h 30′	6s 1° 20′ 58″	*M. Cassini, Elém. d'Astr. p.* 354.
133	4 Juin 1 20	8 9 40 10	
136	9 Juil. 22 51	9 14 9 20	
1582 v. st.	20 Août 23 12	11 7 27 47	2° 1′ 53″ A *Ib.*
1583	4 Sept. 21 40	11 19 49 ½ *dout.*	2 22 36 A
1584	15 Sept. 6 30	0 2 34 0	
1585	28 Sept. 18 0	0 15 44 *dout.*	
1586	12 Oct. 9 0	0 29 6 5	2 [illegible] 2 A
1587	26 Oct. 7 0	1 12 49 44	2 21 38 A
1588	8 Nov. 8 32	1 26 47 30	
1589	22 Nov. 12 18	2 10 54 10	1 52 11 A
1590	6 Déc. 19 40	2 25 14 ½ *dout.*	
1591	20 Déc. 22 14	3 9 23 14	0 20 53 A

1593

Années.	T. vrai de l'oppos.	Longitude.	Latitude.	
1593	3 Janv. 1h 20″	3s 23° 32′ 0″	0° 13′ 16″	B
1594	17 Janv. 3 0	4 7 30 0	0 45 52	B
1595	30 Janv. 23 0	4 21 15 0		
1596	13 Fév. 10 28	5 4 38 12	1 57 23	B
1597	25 Fév. 19 0	5 17 45 30	2 22 35	B
1598	10 Mars 23 0	6 0 33 35		
1599	23 Mars 18 40	6 13 0 0		
1608 n.st.	19 Juil. 3 0	9 26 53 0	Ces observations sont de Longomontanus. *Astron. réform.*	
1609	31 Juil. 13 0	10 8 31 0		
1610	12 Août 12 0	10 20 10 0		
1611	25 Août 16 0	11 2 12 0		
1642	13 Sept. 11 25	11 21 37 27	Ces observations sont du P. Riccioli.	
1642	28 Sept. 8 45	11 22 1 50		
1644	9 Oct. 19 12	0 17 38 0	*Mém. Ac.* 1746. *M. Cassini. p.* 356.	
1647	20 Nov. 6 50	7 28 24 25		
1654	10 Fév. 19 0	4 22 54 0	Ces 2 obs. furent faites par Muti à Majorque.	
1657	21 Mars 23 0	6 2 18 0		
1657	22 Mars 9 29⅓	6 2 11 5	*Mém. Ac.* 1746.	
1658	3 Avr. 17 13	6 14 35 28	2 46 18	B
1659	16 Avr. 10 11	6 26 47 52	2 46 53	B
1660	27 Avr. 22 48	7 8 41 32	2 42 42	B
1661	10 Mai 6 2	7 20 22 24	2 26 30	B
1662	22 Mai 11 0	8 1 52 20	2 7 39	B
1664	14 Juin 13 4	8 24 27 27		
1665	26 Juin 15 23	9 5 43 51	0 47 27	B
1670	27 Août 7 20	10 3 44⅙ *dout.*	1 55 52	A
1671	8 Sept. 8 56	11 16 5 0	2 18 13	A
1672	20 Sept. 12 39	11 28 42 22	2 35 13	A
1673	3 Oct. 21 4	0 11 37 8	2 45 18	A
1674	17 Oct. 12 0	0 24 52 40	2 47 51	A
1675	30 Oct. 7 10	1 8 28 0	2 39 14	A
1676	13 Nov. 7 36	1 22 19 40	2 22 15	A
1683	4 Fév. 23 32	4 16 57 15	1 15 58	B

La seconde observation de 1642 n'est point une opposition.

Les 15 oppositions précédentes furent observées par Hévélius à Dantzic. On trouvera dans les tables de M. Halley une suite d'oppositions de Saturne calculées par cet auteur, avec l'erreur de ses tables, depuis 1657 jusqu'en 1719.

Oppositions de Saturne observées à Paris.

Années	T. vrai de l'opp.	Longitude.	Latitude.	
1685	3 Mars 4h 0′	5s 13° 48′ 40″	2° 13′ 45″	B
1686	16 Mars 10 28	5 26 47 6	2 34 3	B
1687	29 Mars 11 11	6 9 25 26	2 44 35	B
1688	10 Avril 6 26	6 21 44 40	2 48 15	B
1689	22 Avr. 21 34	7 3 48 53	2 45 4	B
1690	5 Mai 7 13	7 15 35 19	2 32 19	B
1691	17 Mai 13 45	7 27 10 30	2 15 35	B
1692	28 Mai 17 15	8 8 35 0	1 54 27	B
1693	9 Juin 19 32	8 19 54 41	1 27 7	B
1694	21 Juin 19 30	9 1 6 40	*douteuse*	
1695	3 Juil. 23 45	9 12 29 52	0 25 14	B
1696	15 Juil. 3 32	9 23 51 26	0 7 16	A
1697	27 Juil. 9 43	10 5 20 15	0 40 56	A
1698	8 Août 19 8	10 16 59 0	1 13 36	A
1699	21 Août 8 54	10 28 50 50	1 39 44	A
1700	3 Sept. 3 14	11 10 57 40	2 7 30	A
1701	16 Sept. 2 0	11 23 21 16	2 27 45	A
1702	29 Sept. 8 51	0 6 9 30	2 41 5	A
1703	12 Oct. 20 12	0 19 14 21	2 48 15	A
1704	25 Oct. 11 48	1 2 36 23	2 45 38	A
1705	8 Nov. 9 40	1 16 18 35	2 32 25	A
1706	22 Nov. 10 37	2 0 16 23	2 10 53	A
1707	6 Déc. 15 3	2 14 24 27	1 40 9	A
1708	19 Déc. 19 26	2 28 37 11	1 4 0	A
1710	2 Janv. 23 47	3 12 50 16	0 25 24	A
1711	17 Janv. 1 4	3 26 54 36	0 16 26	B
1712	31 Janv. 0 6	4 10 51 12	0 56 20	B
1713	12 Fév. 19 4	4 24 33 34	1 32 10	B
1714	26 Fév. 8 15	5 7 56 46	2 3 0	B
1715	11 Mars 16 55	5 21 3 14	2 25 0	B
1716	23 Mars 19 4	6 3 48 1	2 40 34	B
1717	5 Avr. 16 27	6 16 13 56	2 47 40	B
1718	18 Avr. 8 45	6 28 24 13	2 46 36	B
1719	30 Avr. 20 15	7 10 17 42	2 39 15	B
1720	12 Mai 4 39	7 21 59 13	2 24 30	B
1721	24 Mai 9 17	8 3 28 12	2 4 20	B
1722	5 Juin 13 9	8 14 52 3	1 36 30	B

Années.	T. vrai de l'oppos.	Longitude.	Latitude.
1723	17 Juin 15h 53′	8s 26° 12′ 6″	1 12 15 B
1724	28 Juin 17 53	9 7 29 35	0 39 0 B
1725	10 Juil. 21 6	9 18 49 40	0 7 5 B
1726	23 Juil. 1 42	10 0 13 33	0 25 20 A
1727	4 Août 9 54	10 11 48 7	0 58 15 A
1728	15 Août 22 50	10 23 36 50	1 29 32 A
1729	28 Août 14 18	11 5 35 2	1 56 20 A
1730	10 Sept. 12 27	11 17 53 57	2 19 6 A
1731	23 Sept. 15 51	0 0 30 50	2 36 55 A
1732	6 Oct. 0 26	0 13 27 20	2 47 0 A

Les observations précédentes sont tirées des élémens d'astronomie de M. Cassini : les 8 suivantes sont celles dont M. le Monnier a fait usage dans ses recherches sur Saturne, & qu'il a discutées avec le plus grand soin ; quoiqu'elles ne soient pas toutes en opposition, ce sont néanmoins des longitudes réduites au soleil.

Temps moyen à Paris.		Longit. hélioc.	
1686	16 Mars 11h 10′ 30″	5s 26° 46′ 38″	*Mém. Ac.* 1746. *p.* 217.
1672	21 Sept. 8 40 30	11 28 44 0	*Ibid. p.* 215.
1583	4 Sept. 8 33 15	11 19 55 28	*Ibid. p.* 699.
1598	13 Mars 11 9 30	6 0 39 10	*Ibid. p.* 222.
1701	16 Sept. 11 57 0	11 23 24 44	*Ibid. p.* 704.
1702	6 Oct. 11 33 55	0 6 22 51	*Ibid. p.* 709.
1716	17 Mars 12 37 16	6 3 33 33	*Ibid. p.* 219. 695.
1731	23 Sept. 8 40 30	0 0 29 5	*Ibid. p.* 215.

Temps moyen à Paris.		Longitude.	Latitude.
1733	19 Oct. 15h 42′ 39″	0s 26° 45′ 26″	*Mém. Acad.* 1754.
1734	2 Nov. 10 46 0	1 10 18 50	*p.* 330.
1735	16 Nov. 12 6 18	1 24 10 53	
1737	13 Déc. 19 31 15	2 22 27 31	1° 21′ 40″
1738	28 Déc. 1 6 42	3 6 42 55	0 55 21
1740	11 Janv. 4 57 17	3 20 54 9	
1741	24 Janv. 5 33 57	4 4 55 12	0 38 38
1742	7 Fév. 3 3 18	4 18 44 22	1 18 5
1743	20 Fev. 18 23 38	5 2 16 56	1 50 24
1744	5 Mars 4 41 42	5 15 30 4	
1745	18 Mars 10 43 29	5 28 26 58	2 34 16

Années.	Temps moy. à Paris.	Longitude.	Latitude.
1746	31 Mars 10h 50′ 31″	6s 11° 3′ 44″	2 44 43
1747	13 Avr. 5 49 15	6 23 22 33	2 47 0
1748	24 Avr. 20 2 0	7 5 24 42	2 42 21
1749	7 Mai 6 8 17	7 17 12 31	2 30 43
1750	19 Mai 13 8 19	7 28 47 52	2 13 24
1751	31 Mai 17 6 55	8 10 14 46	1 50 15
1752	11 Juin 20 0 32	8 21 35 41	1 23 29
1753	23 Juin 22 17 24	9 2 53 49	0 53 28
1754	6 Juil. 1 10 57	9 14 13 0	
1755	18 Juil. 4 55 37	9 25 35 21	0 10 34 hélioc.

Les observations précédentes sont tirées en partie des calculs de M. le Gentil, (*Mém. acad.* 1754), & en partie de ceux de M. de la Caille.

	Temps moy. à Paris.	Long. hélioc. réd. à l'écliptique.	Latitude. hélioc.
1756	29 Juil. 11h 16′ 59″	10s 7° 5′ 59″	0 40 8 A
1757	10 Août 22 17 14	10 18 46 51	1 8 38
1758	23 Août 12 25 30	11 0 40 44	1 35 47
1759	5 Sept. 7 30 8	11 12 50 24	1 56 48
1760	17 Sept. 8 10 42	11 25 18 7	2 30 16 géoc. 2 14 15 hélioc.
1761	30 Sept. 14 7 7	0 8 4 21	2 42 58 géoc. 2 25 0 hélioc.
1762	14 Oct. 1 25 5	0 21 9 53	2 29 40
1763	27 Oct. 18 14 20	1 4 34 49	2 43 20 géoc.
1764	9 Nov. 15 46	1 18 17 37	2 30 40
1765	23 Nov. 17 6	2 2 14 44	2 7 36 A
1766	7 Déc. 20 19	2 16 21 12	1 37 10 A
1767	22 Déc. 0 52	3 0 32 45	1 0 32 A
1769	4 Janv. 4 34	3 14 43 39	0 20 26 A
1770	18 Janv. 6 1	3 28 48 26	0 20 38 B

Les oppositions de 1760 & 1761 sont tirées des observations de M. de la Caille qui s'étoit contenté de donner la latitude géocentrique observée; cinq autres ont été calculées par M. Jeaurat, qui en a déduit seulement la latitude héliocentrique; & j'ai observé les dernières avec un très-grand soin, pour servir de vérification à ce que j'ai dit des dérangemens singuliers de Saturne, (art. 1168).

LIVRE SEPTIEME.

DE LA LUNE.

1400. LA LUNE est après le soleil le plus remarquable de tous les astres; nous n'avons parlé dans le premier livre que des apparences les plus générales de son mouvement (55), nous allons en suivre les circonstances, & en donner l'explication détaillée.

Les premiers phénomènes que les hommes apperçurent dans le mouvement de la lune, furent les changemens de figure que nous appellons ses *phases*, & dont nous avons déja donné quelque idée. Après avoir disparu pendant quelques jours, la lune commence à se montrer le soir du côté de l'occident, peu après le coucher du soleil sous la forme d'un filet de lumière, ou d'un croissant dont la lumière est foible, parce qu'elle est diminuée par l'éclat du crépuscule. Hévélius n'a jamais observé la lune plutôt que 40 heures après sa conjonction, ou 27 heures avant, (*Selenog. pag.* 276 & 408). Il ajoute que si la lune dans le premier cas avoit eu une déclinaison plus septentrionale, étant au nord de l'écliptique, & qu'elle eût été en même temps périgée & dans les signes ascendans, on auroit pu la voir 24 heures après la conjonction; mais l'assemblage de ces trois circonstances est rare; on n'apperçoit guère la lune que le troisième jour après sa conjonction; quoique Képler ait dit qu'on pouvoit voir la lune, même en conjonction, lorsque sa latitude est de 5 degrés (*Astr. Pars Opt. Cap.* 6, *pag.* 257). Ce croissant paroît donc au plus tard le 3e. jour du côté du couchant, & le soir à l'entrée de la nuit; ses pointes sont élevées & tournées à l'opposite du soleil; il devient un peu plus fort le lendemain, & dans l'espace de cinq à six jours il prend la forme d'un demi-cercle : la partie

Phases de la Lune.

lumineuse est alors terminée par une ligne droite, & nous disons que la lune est *dichotome*, ([a]) ou qu'elle est en quadrature, c'est son PREMIER QUARTIER.

Premier Quartier.

Après avoir paru sous la forme d'un demi-cercle lumineux, la lune continue de s'éloigner du soleil & d'augmenter en lumière pendant 8 jours; elle paroît alors tout-à-fait circulaire; son disque entier & lumineux brille pendant toute la nuit & c'est le jour de la PLEINE LUNE, ou de l'opposition: on la voit passer au méridien à minuit & se coucher dès que le soleil se leve, tout annonce alors qu'elle est directement opposée au soleil par rapport à nous, & qu'elle brille parce que le soleil l'éclaire en face & non pas de côté.

Pleine Lune.

Après la pleine lune, arrive le décours, qui donne les mêmes phases & les mêmes figures que nous venons d'indiquer en parlant de l'accroissement de la lune; elle est d'abord ovale, puis *dichotome* ou sous la forme d'un demi-cercle, & c'est le DERNIER QUARTIER.

Dernier Quartier.

Bientôt le demi-cercle de lumière diminue & prend la forme d'un croissant qui devient chaque jour plus étroit, & dont les cornes sont toujours du côté le plus éloigné du soleil; la lune alors se trouve avoir fait le tour du ciel, & se rapproche du soleil; on la voit se lever le matin un peu avant le soleil, dans la même forme qu'elle avoit le premier jour de l'observation elle se rapproche du soleil & se perd enfin dans ses rayons, c'est ce qu'on appelle la NOUVELLE LUNE, ou la conjonction, autrefois la néoménie ([b]).

Nouvelle Lune.

1401. La mesure la plus naturelle du temps fut celle que présentoient ces phases de la lune; cet astre en changeant tous les jours d'une manière sensible le lieu de son lever & de son coucher, en variant sans cesse de figure, & recommençant ensuite un nouvel ordre de changemens tous semblables, offroit une règle publique & des nombres faciles, sans le secours

([a]) Διχότομος, *dimidiatus*, Δίχα *bis*, Τέμνω *seco*. Copernic se sert du mot *Luna dividua*.

([b]) Νέος *novus*, Μήνη *Luna*.

de l'écriture, des calculs, des dates, des almanacs; les peuples trouvoient dans le ciel un avertissement perpétuel de ce qu'ils avoient à faire; les familles nouvellement formées, & dispersées dans les pleines de Sennaar, se réunissoient sans méprise au terme convenu de quelque phase de la lune.

Fête de la Néoménie.

La Néoménie servit à régler les assemblées, les sacrifices, les exercices publics; ce culte & ces fêtes n'avoient pas la lune pour objet, mais pour indication. On comptoit la lune du jour qu'on commençoit à l'appercevoir. Pour la découvrir aisément on s'assembloit le soir sur les hauteurs; quand le croissant avoit été vu, on célébroit la néoménie ou le sacrifice du nouveau mois qui étoit suivi de fêtes ou de repas. Les nouvelles lunes qui concouroient avec le renouvellement des quatre saisons, étoient les plus solemnelles; il semble qu'on y trouve l'origine de nos quatre temps, comme on trouve celles de la plupart de nos fêtes dans les cérémonies des anciens, (*Casali de comparatione rituum Christ. & Pagan*).

1402. On retrouve dans les histoires de tous les peuples du monde cette coutume de se réunir sur les hauts lieux ou dans les déserts, d'observer la nouvelle phase, de célébrer la néoménie par des sacrifices ou des prières; la solemnité particulière de la nouvelle lune qui concouroit avec les semailles, ou celle qui suivoit l'entière récolte des productions de la terre se trouve dans toutes les histoires; les fêtes & les sacrifices de la nouvelle lune & du commencement de chaque mois sont rappellés en plusieurs endroits de l'écriture, comme un ancien usage: *Isaiæ I*, 13. *Num. X*, 10. XXVIII, 11. *Reg.* I, *9. v.* 12 & 20. *v.* 5. Spencer a fait une dissertation toute entière pour prouver que les Juifs avoient reçu des Payens cet ancien usage, Spencer cite à ce sujet un grand nombre d'auteurs, & répond à toutes les objections. Jo. Spencer *de legibus Hebræorum ritualibus. Lipsiæ* 1605, *in*-4°. *l. III*, *c.* 1. *Dissert.* 4. *pag.* 1043.

La nouvelle lune étoit annoncée par le bruit des trompettes, Judith VIII, 6. *Psalm.* 80. *v.* 4. Scaliger *de emendatione temporum*, *l.* 3. *pag.* 223, édit de 1629 Horace fait mention de ces fêtes sous le nom de *Tricesimâ sabbata*, *l.* I, *sat.* 9, *v.* 69. *Cœlo supinas si tuleris manus nascente lunâ*, *l.* III, *od.* 23. Les Juifs observent encore la lune quand elle est nouvelle, & ils en font l'objet d'une cérémonie religieuse. *Buxtorfi synagoga judaïca*, *Basileæ in*-8° 1641, *c.* 17, *pag.* 336. De-là l'usage de sacrifier sur les montagnes où on alloit pour observer la nouvelle lune. Cet usage étoit déja dans l'Egypte, *Maimonid ou Mossei dux dubitantium*, *l.* III, *c.* 46. aussi-bien que celui de sacrifier dans les nouvelles lunes, *ibid. c.* 47.

La fête de la nouvelle lune avoit lieu chez les Ethiopiens d'Afrique, *Itinerarium Alexandri Geraldini*, *Romæ* 1631, *l.* IX, *pag.* 150. Chez les Sabéens de l'Arabie heureuse, *Hottinger*, *historia orientalis*, *l.* I, *c.* 8. *pag.* 279. *ed. in*-4°. 1660. Chez les Perses, *Halcuit's*, *voyages tom.* II, *pag.* 399. Chez les Grecs, comme le prouve fort au long Jean Meursius, *Græcia feriata*, *Lugd. Batav.* 1619, *in*-4°. *pag.* 210, au mot Νεμένια. Les Olympiades établies par Iphitus commençoient à la nouvelle lune, Samuel Petit, *Leges Atticæ*, *in-fol.* 1635, *pag.* 59. Les Romains avoient aussi cette fête, Macrobe *Saturn.* I, 15. *pag.* 181, *ed. de* 1694. La cérémonie du Guy chez les Gaulois se faisoit à la nouvelle lune, & le Druïde portoit un croissant comme on le voit dans les figures anciennes. M. Pelloutier, hist. des Celtes à Berlin, 2 *vol. in*-12. On a trouvé cet usage chez les Chinois, Scaliger *pag.* 118; parmi les Caraïbes de l'Amérique, *Huetii Demonstratio evangelica* 1679, *in-fol. pag.* 84. Chez les Péruviens, Garcilaso de la Vega, *Comentarios réales de los Incas VII.* 5 *&* 7. M. Goguet, I. 219, *in*-4°. Il étoit également chez les Turcs, *Geuffraus de Turcarum religione*, *l.* 2, *pag.* 53.

1403. Il se passe à peu-près 29 jours & demi d'une nouvelle lune à l'autre, c'est une observation facile,

&

& les premiers pasteurs ne manquerent pas de la faire; c'est ce qu'on appelle *mois lunaire*, LUNAISON, ou révolution synodique de la lune : nous en verrons bientôt une détermination rigoureuse (1422). Cette lunaison fut la plus ancienne mesure du temps (58, 277).

1404. En observant avec tant d'exactitude les phases de la lune on dut remarquer naturellement que les éclipses de soleil qui paroissent au moins tous les 4 à 5 ans, arrivent entre le dernier croissant d'un cours de lune fini & la première phase d'une nouvelle lune, c'est-à-dire, entre le temps où la lune s'approche le plus du soleil & celui où elle commence à s'en éloigner par le côté opposé : on apperçoit alors sur le soleil un corps rond & parfaitement noir, on le voit se glisser peu à peu devant le disque du soleil & en intercepter la lumière, du moins en partie; quelquefois se placer dans le milieu de son disque, & y paroître environné d'une couronne de lumière; d'autres fois enfin le couvrir en entier & nous plonger dans les ténèbres, comme en 1724. (art. 1791). Eclipses de Soleil causées par la Lune.

Les premiers observateurs comprirent bientôt que ce corps obscur ne pouvoit être autre chose que celui de la lune qu'on avoit vu les jours précédens s'avancer de plus en plus vers le soleil, & qu'on voyoit ensuite un ou deux jours après se placer de l'autre côté ou à l'orient du soleil, & s'en éloigner avec la même vîtesse.

La lune après avoir intercepté la lumière du soleil en plein jour paroissoit absolument noire & opaque; on comprit par-là qu'elle ne brilloit qu'autant qu'elle étoit éclairée, & que le côté qu'elle tournoit vers nous dans le temps d'une éclipse de soleil ne pouvant recevoir aucune lumière du soleil, ne nous en rendoit aucune. C'est ainsi que les premiers observateurs dûrent comprendre que la lune étoit un globe opaque & massif qui n'avoit pas de lumière par lui-même, & qui n'étoit lumineux que dans la partie éclairée par le soleil; on voyoit d'ailleurs que la lune n'étoit jamais plus lu- Opacité de la Lune.

mineuſe & plus reſplendiſſante que quand elle étoit oppoſée au ſoleil, de manière à être vue de face, & à nous réfléchir toute la lumière que le ſoleil envoyoit ſur ſa ſurface ou ſur ſon diſque; preuve qu'elle ne renvoyoit vers nous qu'une lumière empruntée.

Eclipſes de Lune.

1405. Quatorze ou quinze jours après une éclipſe de ſoleil, il arrive quelquefois une éclipſe de lune. Avant qu'elle commence on voit la lune pleine, ronde, lumineuſe & oppoſée au ſoleil; elle ſe lève le ſoir au coucher même du ſoleil, elle paſſe toute la nuit ſur l'horiſon; c'eſt le temps de l'OPPOSITION ou de la PLEINE LUNE, (1400); mais en peu de temps la lune perd cette grande lumière & diſparoît même pour quelque temps à nos yeux, on voit que la terre placée entre la lune & le ſoleil eſt l'obſtacle qui empêche la lune d'être alors éclairée par le ſoleil.

Explication des Phaſes.

La lune eſt donc un corps opaque & qui n'a point de lumière par lui-même, cela eſt démontré par les éclipſes de ſoleil & même par celles de la lune; elle nous cache le ſoleil lorſqu'elle paſſe devant lui, & le cache de manière à nous jetter dans les plus profondes ténebres, comme cela eſt arrivé à Paris en 1724: voyons donc de quelle manière elle eſt éclairée par le ſoleil.

Le ſoleil éclairant toujours la moitié du globe lunaire, nous ne pouvons voir la lune pleine que quand nous appercevons cette moitié qui eſt éclairée, & que nous l'appercevons toute entière; ſi nous ſommes placés de côté, enſorte que nous ne puiſſions voir que la moitié de la partie éclairée, c'eſt-à-dire, de l'hémiſphère expoſé au ſoleil, nous ne verrons que la moitié de ce qui paroiſſoit dans la pleine lune, c'eſt-à-dire, que nous ne verrons qu'un demi-cercle de lumiére; la lune paroîtra en quartier, & ainſi des autres ſituations; telle eſt la cauſe des phaſes de la lune, que nous allons tâcher de rendre plus ſenſible.

Hémiſphère éclairé & hémiſphère viſible.

Fig. 80.

1406. Soit *S* le ſoleil, (*fig.* 80) *T* la terre autour de laquelle tourne la lune dans ſon orbite; *EO* le

globe de la lune placé entre la terre & le soleil, c'est-à-dire, en CONJONCTION, ou au temps de la nouvelle lune; alors la partie *E* est seule éclairée du soleil; au contraire la partie *O* est la seule visible pour nous qui sommes en *T* : ainsi *l'hémisphère éclairé* est précisément celui que nous ne voyons point, & *l'hémisphère visible* est celui qui n'est point éclairé du soleil, telle est la cause qui rend alors la lune invisible pour nous, vers le temps de la nouvelle lune (1400). *Fig. 80.*

Au contraire, quand la lune est opposée au soleil, l'hémisphère éclairé *L* est précisément celui que nous voyons, parce que nous sommes placés du même côté que le flambeau dont elle est éclairée, & il n'y a rien de perdu pour nous de la lumière que la lune répand; son disque visible *L* est le même que son disque éclairé; c'est pourquoi la lune nous paroît pleine, c'est-à-dire, ronde & lumineuse, quand elle est en OPPOSITION.

Quand la lune est éloignée de 90 degrés du soleil ou environ, c'est-à-dire à peu-près à moitié chemin de *O* en *L* ou de la *conjonction* à *l'opposition*, l'hémisphère visible est *AQZ*; l'hémisphère éclairé par le soleil est *MZQ*; ainsi nous ne voyons que la moitié de cet hémisphère éclairé, qui paroissoit tout entier & comme un cercle complet dans le temps de l'opposition; nous ne voyons donc qu'un demi-cercle de lumière, tel qu'il est représenté séparément en *N*; la rondeur lumineuse étant toujours du côté du soleil.

1407. Lorsque la lune est à 45° du soleil, nous disons qu'elle est dans son PREMIER OCTANT, alors la partie éclairée ou qui regarde le soleil est *CDF*, la partie visible est *BCD*; ainsi nous n'appercevons que la partie *CD* de l'hémisphère éclairé : alors la lune paroît sous la forme d'un croissant, tel qu'on le voit en *G*, nous ne voyons alors que la huitième partie du globe lunaire, & la lune est éloignée du soleil de la huitième partie d'un cercle : c'est ce qui a fait appeller cette phase un *octant*; mais la partie éclairée n'est *Des Octans.*

Fig. 80. qu'à peu-près la septième partie de la surface de son disque visible.

Dans le SECOND OCTANT, qui arrive après la quadrature, l'hémisphère visible est *HIK*, l'hémisphère éclairé par le soleil est *IKP*; ainsi il ne manque à notre vue que la petite portion *IH*, pour que nous puissions voir la partie éclairée toute entière; nous verrons alors plus de la moitié du disque lunaire, & la lune paroîtra sous la forme *R*; ce qui manque à son cercle est de la même grandeur que la partie éclairée dans le premier octant, quand la lune étoit en *C*.

Le troisième octant *V* qui arrive 45° au-delà de l'opposition, est semblable au second octant; & le quatrième octant *X* est pareil au premier octant *G*.

Calcul de la portion éclairée.

1408. Pour calculer exactement la portion lumineuse & visible du disque lunaire, soit *S* le soleil (*fig.* 81), *T* le centre de la terre, *C* le centre de la lune, *AE* le diamètre de la lune, perpendiculaire au rayon du soleil, & qui sépare la portion éclairée *ANE*, de la portion obscure *ADE*; le diamètre lunaire *ND* perpendiculaire au rayon *TC* de la terre, sépare la partie visible *DAN* de la partie invisible *DEN*; on abaissera de l'extrémité *A* du demi-cercle lumineux *ENA* une perpendiculaire *AB* sur le diamètre *ND* de la lune, & la ligne *NB* sera la largeur apparente de la partie visible de l'hémisphère lumineux; en effet, de tout l'hémisphère lumineux *ANE* il n'y a que la partie *AN* qui soit comprise dans l'hémisphère visible *DAN*, & l'arc *AN* ne peut paroître à nos yeux que de la largeur *BN*, par la même raison que le demi-cercle entier *NAD* ne paroît que comme un simple diamètre *NBD*, & qu'un hémisphère entier ne paroît que comme un cercle ou un plan dont il est la projection (1827). La portion *NB* du diamètre visible *NBCD*, est le sinus verse de l'arc *NA*; cet arc *NA*, ou l'angle *NCA*, est égal à l'angle *CTF*, en supposant *TF* parallele à *CS*; car l'angle *NCA* est le complément

Fig. 81.

de l'angle *FCT*, à cause de l'angle droit *NCT*; mais l'angle *FCT* est le complément de l'angle *FTC* à cause du triangle rectangle *CFT*; donc l'angle *NCA* est du même nombre de degrés que l'angle *FTC*; cet angle *FTC* est égal à l'élongation de la lune ou à la distance de la lune au soleil, parce que le soleil est supposé sur la ligne *TF* de même que sur la ligne *CS*, à cause de la distance qui est prodigieuse en comparaison de *CF*, donc l'arc *NA* est égal à l'élongation de la lune; donc dans les différentes phases de la lune *la largeur du segment lumineux de la lune, est égale au sinus verse de l'angle d'élongation*, en prenant pour rayon le rayon même du disque de la lune, ou la demi-distance des cornes du croissant. Par exemple, quand la lune quatre à cinq jours après sa conjonction, est à 60° du soleil, sa partie lumineuse *NB* paroît la moitié du rayon *NC* ou le quart du diamètre entier *ND* de la lune, parce que le sinus verse de 60° dans un cercle quelconque est la moitié du rayon de ce cercle. Si le disque lunaire est exprimé par un cercle *GNH* (*fig.* 83), dont *C* soit le centre, *NB* égal à la moitié du rayon *CN*, on aura *NB* pour la largeur du croissant de la lune, à 60 degrés d'élongation.

Mesure de la partie lumineuse.

Planche VII. Fig. 83.

1409. Les réflexions précédentes font voir que ce n'est pas exactement le sinus verse de l'élongation, mais plutôt le sinus verse de l'angle extérieur du triangle formé au centre de la lune par les rayons qui vont au soleil & à la terre. En effet, nous avons supposé dans la démonstration précédente, que les lignes *CS* & *TF* menées au soleil, soit de la terre, soit de la lune, étoient sensiblement paralleles; cela n'est vrai qu'à peu-près, & à cause de la grande distance du soleil qui est 360 fois plus loin de nous que la lune. (*Voyez livre IX*); mais si les rayons *ST* & *SV* (*fig.* 82) qui vont du soleil à la terre & à la planète ne sont pas paralleles, on aura l'angle extérieur *TVO* du triangle *SVT* égal à l'angle *NVA* : l'un & l'autre étant le complément de l'angle *AVT*; or la partie

Fig. 82.

Règle plus générale.

éclairée & visible *NB* est égale au sinus verse de l'angle *NVA*, donc le diamètre entier est à la largeur de la partie éclairée & visible d'une planète, comme le diamètre du cercle est au sinus verse de l'angle au centre de la planète, extérieur au triangle formé au soleil à la terre & à la planète.

Planche VII. Fig. 83. 1410. La courbure *GBH* (*fig.* 83) qui forme l'intérieur du croissant est une *ellipse*, dont le grand axe *GH* est égal au diamètre même du disque lunaire : pour le prouver nous nous contenterons d'observer que *GBH* est la circonférence du cercle *terminateur* de la lumière & de l'ombre, ou du cercle qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère obscur de la lune ; ce demi-cercle est vu de côté, sous une inclinaison qui est le complément de l'angle d'élongation, c'étoit l'angle *ACT* (*fig.* 81) : or un cercle vu obliquement paroît toujours sous la forme d'une ellipse (1828), comme on le verra dans le Xe. livre ; donc *GBH* étant une circonférence vue obliquement doit paroître le contour d'une ellipse.

Je dis encore que son grand axe est le diamètre même *GH* du disque lunaire ; car tous les grands cercles d'un globe se coupent en deux parties égales, ainsi le cercle visible *GNH* & le cercle terminateur *GBH* sur le globe de la lune se coupent en deux parties égales, & en deux points diamétralement opposés, donc le diamètre *GCH* est la commune section de ces deux cercles. C'est pourquoi les cornes *G* & *H* du croissant sont toujours éloignées entre elles d'un demi-cercle, & l'on peut en tout temps mesurer le diamètre de la lune en mesurant la distance des cornes.

Quantités négligées. 1411. J'ai négligé dans l'article 1408 la petite erreur qui peut provenir de ce que les rayons menés du soleil à la lune & à la terre, ne sont pas exactement paralleles entr'eux ; mais la différence ou l'angle que ses rayons font en divergeant n'est que d'environ un sixième de degré, il est insensible dans ces sortes de calculs. J'ai négligé de même la différence entre les grosseurs du soleil & de la lune, qui fait que le soleil

éclaire toujours un peu plus de la moitié du globe lunaire, mais la différence ne va qu'à un degré de la circonférence de la lune de chaque côté. On pourroit remarquer aussi que nous ne voyons pas la moitié de la lune ; mais la différence qui en résulte sur le diamètre apparent de la lune, ne va pas à un quinzième de seconde : car le sinus verse d'un arc de 15 minutes, 0, 0000096 n'est pas la cent millieme partie du rayon ; ainsi nous n'insisterons point là-dessus.

1412. On voit distinctement après la nouvelle lune que le croissant qui en fait la partie la plus lumineuse, est accompagné d'une lumière foible répandue sur le reste du disque, qui nous fait entrevoir toute la rondeur de la lune ; & qu'on appelle LA LUMIÈRE CENDRÉE. Lumière cendrée.

La terre réfléchit la lumière du soleil vers la lune, comme la lune la réfléchit vers la terre : quand la lune est en conjonction pour nous avec le soleil, la terre est pour elle en opposition ; c'est proprement pleine terre pour l'observateur qui seroit dans la lune, comme dit Hévélius, & la clarté que la terre y répand est telle que la lune en est illuminée beaucoup plus que nous ne le sommes par un beau clair de lune qui nous fait appercevoir tous les objets. La lune étant bien plus petite que la terre, la lumière que la terre y répand doit être bien plus grande que celle qu'elle en reçoit, il n'est donc pas étonnant que la lune puisse la réfléchir jusqu'à nous, & que cette lumière nous fasse voir la lune. Nous l'appercevrions toute entière lorsqu'elle est en conjonction, si le soleil que nous voyons en même temps n'absorboit entiérement cette lueur terrestre réfléchie sur le globe lunaire, & n'empêchoit alors de voir la lune ; mais quand le soleil est couché & le crépuscule presque fini, nous appercevons très-distinctement la lumière cendrée.

Les anciens eurent beaucoup de peine à expliquer la cause de cette lumière secondaire ; les uns l'attribuoient à la lune même, ou transparente, ou phosphorique. Les

autres aux étoiles fixes (*Riccioli Almag. novum I.* 199). Képler assure que Tycho l'attribuoit à la lumière de Vénus ; & que Mœstlinus son maître fut le premier qui expliqua en 1596 la véritable cause de cette lumière cendrée. (Képler, *Astr. pars optica*, *pag.* 254) ; il y a des Italiens qui attribuent cette remarque à *Leonardo del Vinci* célébre peintre Toscan mort en 1518, & le P. Frisi m'a assuré qu'elle se trouve dans un de ses manuscrits sur les Rivieres, que l'on conserve à Londres. Galilée en donna la même explication (*Sidereus nuncius* 1610, *pag.* 26), comme l'ayant trouvée depuis plusieurs années ; quoi qu'il en soit, la cause est depuis long-temps de la dernière évidence. (Hevel. *Selenog.* 288, 400).

Cette lumière paroît beaucoup plus vive quand on se place près d'un mur, de manière à ne point voir la partie lumineuse de la lune, qui efface un peu la lumière cendrée ; celle-ci est suffisante alors pour nous faire distinguer les grandes taches de la lune, telles que la mer des crises, sur-tout vers le troisième jour de la lune, & le matin aux environs de l'équinoxe du printemps.

Quoique la lumière cendrée doive aller en diminuant, du jour même de la nouvelle lune, c'est cependant vers le troisième jour qu'elle est la plus sensible pour nous, parce que la lune est alors plus dégagée des rayons du soleil ; c'est aussi aux environs de l'équinoxe du printemps, quand la lune ayant une grande latitude septentrionale se couche long-temps après le soleil, que cette lumière est la plus sensible. Elle disparoît presque entiérement quand la lune est en quadrature, 1°. Parce que la terre envoye alors quatre fois moins de rayons vers la lune, 2°. Parce que la phase de la lune devenue 4 à 5 fois plus grande nous empêche de la distinguer. Par la même raison cette lumière cendrée paroît un peu plus vive suivant le témoignage d'Hévélius, quand la lune est dans son décours, & qu'elle paroît le matin, quoiqu'à même distance du soleil &

à

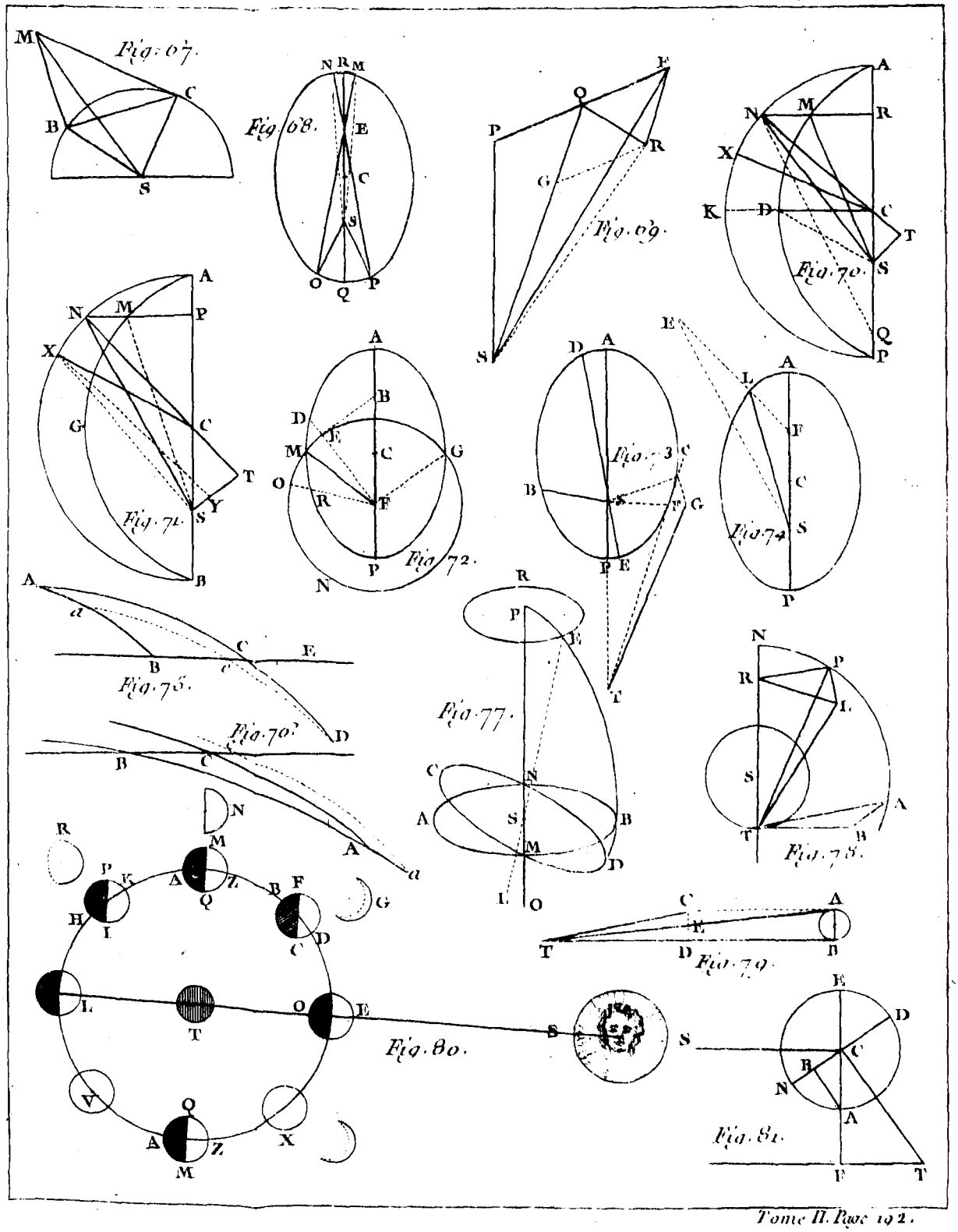


Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.

à pareille phase, parce que la lumière de la partie orientale de la terre est plus vive, tandis que celle de la partie orientale de la lune est un peu plus foible à cause des taches obscures qui s'y trouvent; d'ailleurs la prunelle est plus dilatée après les ténèbres de la nuit qu'après l'éclat du grand jour. (Hevel. *Senelog. pag.* 307, 399).

La lumière cendrée est cause d'un autre phénomène optique, fort sensible, & qu'Hévélius explique assez mal par la compression de la lumière (*pag.* 287), c'est la dilatation apparente du croissant lumineux, qui paroît être d'un diamètre beaucoup plus grand que le disque obscur de la lune; cela vient de la force d'une grande lumière placée à côté d'une petite, l'une efface l'autre, & la tue comme disent les peintres à l'occasion des couleurs, le croissant paroît enflé par un débordement de lumière qui s'éparpille dans la rétine de l'œil, & élargit le disque de la lune; l'air ambiant éclairé par la lune augmente encore cette illusion.

1413. La lumière de la lune n'est accompagné d'aucune chaleur, M. Tschirnausen avec ses verres brûlans ne put la rendre sensible (*Hist. acad.* 1699, *pag.* 94). M. de la Hire le fils exposa le miroir concave de l'observatoire qui a 35 pouces de diamètre aux rayons de la pleine lune, lorsqu'elle passoit au méridien dans le mois d'Octobre 1705, & il rassembla ces rayons dans un espace 306 fois plus petit que dans l'état naturel: cependant cette lumiere concentrée ne produisit pas le moindre effet sur le thermométre de M. Amontons, qui étoit très-sensible; (*Mém. Acad.* 1705 *pag.* 346). Lumière de la Lune.

1414. M. Bouguer a trouvé par expérience que la lumiere de la lune est 300 mille fois moindre que celle du soleil, & cela en les comparant l'une & l'autre avec la lumiere d'une bougie placée dans l'obscurité. (*Tr. Opt. sur la gradat. de la lumiere*, *in*-4°, 1760, *pag.* 89).

DE LA RÉVOLUTION DE LA LUNE.

1415 Les plus anciens Philosophes comprirent d'abord que la lune tournoit chaque mois tout autour de la terre, qu'elle en étoit la compagne; &, comme nous disons actuellement, *le Satellite;* Aristote, au rapport d'Averroës, disoit que la lune lui paroissoit comme une terre éthérienne; on peut voir dans Macrobe & dans Plutarque, tout ce que les Philosophes avoient dit à ce sujet.

Toutes les raisons qu'on a eu de changer l'ancienne opinion par rapport au mouvement des planètes cessent par rapport à la lune; on voit évidemment qu'elle paroit tourner autour de la terre, & on ne voit aucune objection qui puisse nous faire abandonner cet idée; ainsi il ne s'agit plus que de connoître la durée de sa révolution; nous allons la rechercher à peu-près: mais pour la connoître bien exactement, il faudra dans la suite faire usage de la connoissance que nous aurons acquise de ses inégalités.

Les premiers Observateurs dûrent reconnoître bien facilement que dans l'espace de 59 jours la nouvelle lune arrivoit deux fois, en sorte que la durée d'une lunaison étoit de 29 jours & demi; mais cette règle à peu-près vraie, étoit sujette à plusieurs exceptions & à plusieurs inégalités qu'on ne développa que bien longtemps après.

Cycle de Méton.

1416. La première connoissance exacte que l'on ait eue dans la Grèce du mouvement de la lune, ou de la durée exacte de sa révolution, fut celle que donna Méton, qui vivoit environ 430 ans avant J. C. Il avoit reconnu ou plutôt il avoit appris des Orientaux qu'en 19 années solaires il se passoit 235 mois lunaires complets; & cette détermination n'est en défaut que d'un jour sur 309 ans

(1559); ainsi la règle de Méton étoit assez exacte pour les usages de la société.

Cette découverte parut si belle à Athènes & dans plusieurs villes de la Grèce qu'on en exposa le calcul en lettres d'or dans des endroits publics, pour l'usage des citoyens, & qu'on appella *nombre d'or* cet espace de 19 ans qui ramenoit exactement la lune en conjonction avec le soleil au même point du ciel, ou au même jour de l'année solaire; c'est encore aujourd'hui le cycle lunaire (1556).

1417. Calippus remarqua 330 ans avant J. C. que le cycle de Méton avoit un quart de jour de trop, il y substitua une période quadruple, ou de 76 ans, dans laquelle il ne mettoit que 27759 jours au lieu de 27760 qu'il y avoit dans quatre cycles de Méton, (*Doctrina temporum l. II, c.* 16).

Hipparque apperçut ensuite que dans 4 périodes calippiques ou 304 ans, le retour étoit plus exact, & de 3760 mois lunaires; c'est ce que Censorinus appelle l'année d'Hipparque (*Doct. tempor. II*, 33. *Censorinus, c.* 18, *pag.* 95); mais Hipparque y substitua lui-même dans la suite la période plus exacte de 126007 jours, & une heure, pour 4267 lunaisons, ce qui donnoit pour chacune $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 26222$ (Ptolomée IV, 2).

1418. Ce mois synodique (a) de $29^j\ 12^h$, qu'on appelle aussi lunaison, ne finit que quand la lune après avoir fait le tour du ciel est revenue en conjonction avec le soleil; mais dans cet intervalle de temps le soleil a fait lui-même 29° par son mouvement propre d'Occident en Orient; ainsi la lune a fait 29° de plus que le tour entier du ciel; d'où il est aisé de voir qu'elle n'auroit employé que 27 jours & un tiers à faire les 360°, c'est-à-dire, à revenir à un même point du ciel; c'est cette révolution de 27^j & un tiers qu'on appelle MOIS PÉRIODIQUE (b), & c'est celui que nous

Mois synodique & Mois périodique.

(a) Σὺν, *cum* ὁδὸς, *via*; parce que c'est le retour de la Lune au Soleil (1173).

(b) Περὶ, *circum*, ὁδὸς, *via*; parce que c'est la révolution complette autour de la Terre.

allons déterminer par les anciennes observations.

1419. La plus ancienne observation que nous avons est une éclipse de lune observée à Babylone par les Caldéens, la première année de la captivité des Juifs sous Salmanazar, au temps d'Ezéchias & de Tobie, elle se rapporte au 19 Mars 720 avant J. C. $6^h\ 48'$ au méridien de Paris, suivant le calcul de M. Cassini; car je ne trouve que $6^h\ 0'$, de même que M. Dunthorn (*Philos. transf. vol.* 46); le lieu de la lune opposé à celui du soleil étoit, suivant M. Cassini, $5^s\ 21^\circ\ 27'$. Il compare cette éclipse à celle du mois de Septembre 1717, dans laquelle le lieu de la lune s'est trouvé de $11^s\ 27^\circ\ 34'$ le 9 Septembre (*v. style*) à $6^h\ 2'$ du soir; l'intervalle est de 2437 années, dont 609 sont bissextiles, plus 174 jours; ou de 890288 jours, moins 46 minutes: pendant ce temps il y a eu 32585 révolutions de la lune, plus $6^s\ 6^\circ\ 7'$; ce qui donne la révolution moyenne de la lune à l'égard des équinoxes de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$. (M. Cassini, *Elém. d'astron. pag.* 293).

1420. Cette détermination est la plus exacte que l'on puisse trouver par des observations éloignées; il n'y auroit d'autre correction à y faire que celle qui provient des différentes inégalités de la lune dans ces deux observations; mais la lune étoit dans les deux cas à peu-près à la même distance de ses apsides, comme l'on pourra s'en assurer quand nous aurons parlé du mouvement de l'apogée; il nous suffira de dire qu'après beaucoup de recherches semblables, cette révolution périodique s'est trouvée de $27^j\ 7^h\ 43'\ 4''\ 6480$, par rapport aux équinoxes pour le commencement de ce siècle-ci, on en conclut le mouvement diurne de la lune $13^\circ\ 10'\ 35''$, 02847 le mouvement séculaire $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$. Le mouvement séculaire par rapport aux étoiles $1732559381''$ en comptant les 1336 révolutions completes de la lune qu'il y a dans un siècle.

Révolution de la Lune par rapport aux équinoxes.

1421. Il faut ajouter environ $7''$ à la révolution de la lune que nous venons de trouver, quand on veut avoir la révolution moyenne de la lune par rap-

port aux étoiles fixes, parce que dans l'espace d'un mois lunaire les équinoxes rétrogradent d'environ 4″ de degré, en sorte que la lune rencontre plutôt l'équinoxe qu'elle n'eût rencontré une étoile fixe située au même point du ciel (1160), & la différence est pour la lune de 7″ de temps. La révolution moyenne sidérale de la lune est de $27^j\ 7^h\ 43'\ 11''\frac{1}{2}$ de temps moyen. Par rapport aux étoiles.

Connoissant la révolution périodique avec exactitude, il est aisé de trouver la révolution synodique, c'est-à-dire, par rapport au soleil, ou la durée d'une lunaison moyenne, en disant : *la différence des mouvemens de la lune & du soleil, est au mouvement de la lune seule, comme la révolution périodique est à la révolution synodique.* En effet, le mouvement de la lune par rapport au soleil ou la différence des mouvemens du soleil & de la lune est ce qui détermine la longueur du mois synodique, tandis que le mouvement de la lune seule détermine le mois périodique ; ces deux mois sont donc entr'eux dans la raison inverse de ces mouvemens, c'est-à-dire, comme le mouvement absolu de la lune est à son mouvement relatif ou par rapport au soleil. Révolution synodique.

Ptolomée supposoit la révolution synodique ou le mois lunaire de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 26222$, Boulliaud de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 9'''\ 37^{IV}\ 9^V\ 59^{VI}\ 15^{VII}\frac{1}{4}$. M. Mayer suppose cette révolution pour l'an 300 avant J. C. de $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 9494$, & pour le commencement de ce siècle ou vers l'année 1700 de $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 8921$, parce qu'à cause de l'accélération de la lune (1483), la longueur du mois lunaire ou de la révolution synodique a diminué de 0″ 0573 ou $3'''\ 26^{IV}$ de temps, dans l'espace de 2000 ans.

1422. En partant du mouvement séculaire qui est employé dans les dernières tables, on peut avoir ces révolutions avec toute la précision qu'on voudra, en divisant le nombre 40898649600000000 qui est le produit d'un siècle & de 360° réduits en secondes, 1°. par le mouvement séculaire de la lune par rapport aux équinoxes 1732564415″, 2°. par le mouvement séculaire

relativement aux étoiles 1732559381″; 3°. par le mouvement séculaire relativement au soleil 1602961591 9″. Par ce moyen l'on trouve la révolution périodique par rapport aux équinoxes 27j 7h 43′ 4″ 6480; la révolution sidérale 27j 7h 43′ 11″ 5069, & la révolution synodique 29j 12h 44′ 2″ 8921.

DES QUATRE GRANDES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1423. Les révolutions moyennes de la lune que nous venons de déterminer supposent dans la lune un mouvement toujours égal & uniforme; cependant il n'est aucun astre dont les mouvemens soient aussi compliqués & aussi irréguliers; comme l'observoit déja Pline le naturaliste : *Multiformi hæc ambage torsit ingenia contemplantium, & proximum ignorari maximè sydus indignantium* (*Hist. nat. L.* 2, *cap.* 9). C'est ce que disoit encore M. Halley dans ces vers sur la théorie de la lune.

Quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur, cur subdita nulli
Hactenus astronomo, numerorum frœna recuset;
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.

Ce sont ces inégalités dont nous allons traiter, en nous réduisant à ce que les observations seules ont fait connoître immédiatement, sans le secours des calculs de l'attraction; nous parlerons ensuite des petites inégalités que l'attraction a indiquées, & qu'on connoît à peu près depuis qu'on a combiné de cent manières différentes, les observations avec les différentes situations du soleil.

Quatre inégalités principales.

Ces inégalités que l'observation seule fit découvrir sont au nombre de quatre principales, sans compter le mouvement de l'apogée de la lune, & le mouvement du nœud : la première est l'équation de l'orbite, la

ſeconde eſt l'évection, la troiſième eſt la variation, la quatrième eſt l'équation annuelle. A l'égard des petites inégalités que la théorie de l'attraction a indiquées, du moins à peu-près, je tâcherai auſſi d'en donner une idée; mais on les a reconnues, ſoit par le calcul, ſoit par l'obſervation, à force d'eſſais, de tentatives & de combinaiſons; il eſt encore fort douteux qu'on les connoiſſe bien, & perſonne n'a donné le détail prodigieux de ces calculs. Ainſi je n'entreprendrai pas d'en donner une explication, qui ne les feroit connoître même que d'une manière imparfaite & peu sûre : il ne faut regarder les 10 petites équations dont nous parlerons ci-après (1454 *& ſuiv.*), que comme une hypothèſe qui explique & qui repréſente à peu-près les obſervations qu'on a faites juſqu'ici du mouvement de la lune.

1424. Pour ſuivre le progrès des Aſtronomes dans cette partie, nous ſommes obligés de recourir au livre de Ptolomée, (*Almag. L.* IV. *c.* 1) où l'on trouve toujours l'hiſtoire de l'ancienne Aſtronomie. Ptolomée nous avertit d'abord qu'il faut choiſir les éclipſes de lune pour établir la théorie de la lune, parce que ces éclipſes nous paroiſſent de la même maniere que ſi nous étions au centre même de la terre, auquel ces mouvemens doivent néceſſairement ſe rapporter; au lieu que dans toute autre ſituation la diverſité d'aſpect, ou la parallaxe, ajoute à ces recherches une nouvelle difficulté, (1620).

Les inégalités de la lune ſont ſi grandes & ſi variées, qu'il parut d'abord aux anciens aſtronomes fort difficile de déterminer ſeulement la durée d'une révolution *moyenne* de la lune, c'eſt-à-dire, d'une révolution qui ne fut point augmentée ni diminuée par les inégalités périodiques de la lune.

1425. Pour parvenir à connoître cette révolution moyenne, en ſe ſervant toujours des éclipſes de lune, les anciens cherchèrent combien il falloit prendre de mois ou de jours pour avoir un mouvement de la lune qui fût toujours de la même quantité dans le

même intervalle de temps ; ils trouvèrent 6585 jours & 8 heures, qui font 223 mois lunaires ou 18 ans & 10 jours, c'eſt-à-dire, qu'ils reconnurent que quand deux éclipſes de lune avoient été éloignées de 18 ans & 10 jours, il en revenoit toujours une ſemblable au bout d'un pareil eſpace de temps, lorſque le ſoleil avoit fait 18 révolutions avec 10° & 40′. Dans cet intervalle, toutes les inégalités de la lune avoient eu leur cours & recommençoient toutes enſemble ſoit en longitude ſoit en latitude. (*Almag.* IV. 2, *pag.* 77). Hipparque reconnut que cette période de 223 lunaiſons n'étoit pas rigoureuſement exacte ; mais nous la prendrons ſeulement pour exemple.

Période de 18 ans.

1426. Dans cet eſpace de 223 lunaiſons ou retours de la lune au ſoleil, les anciens remarquerent que le retour de l'équation, ou de l'inégalité de la lune qui étoit d'environ 5 degrés, avoit recommencé 239 fois ; la révolution de la latitude 242 fois, & celle de la longitude 241 fois avec 10° 40′ de plus ; ainſi la lune avoit été 241 fois au même degré de longitude, 239 fois à ſa diſtance moyenne ou au point de ſa plus grande inégalité, & 242 fois à ſon nœud, à quelque choſe près : il n'en falloit pas davantage pour reconnoître les trois principales circonſtances du mouvement de la lune, c'eſt-à-dire, ſon moyen mouvement ; le mouvement de ſon apogée, & celui de ſon nœud ; circonſtances néceſſaires pour trouver les quatre inégalités dont nous avons à parler ; car les méthodes que nous avons employées dans le VIe. livre pour les planètes ne ſauroient s'appliquer à la lune à cauſe du mouvement rapide de ſon apogée & de ſon nœud.

Cette période de 223 lunaiſons que les anciens avoien employée pour calculer les retours égaux des éclipſes, ramenoit la lune à une même latitude, auſſi bien qu'à une même longitude, ou à un même degré du Zodiaque ; Ptolomée ajoute que ſi l'on ne s'attache pas aux éclipſes & qu'on veuille ſeulement conſidérer l'inégalité de la lune dans ſon mouvement en longitude le long

du

du Zodiaque, en allant d'une pleine lune à l'autre, on aura des retours égaux de la lune en 251 mois, pendant lesquels il y aura eu 269 restitutions des inégalités de la lune ; mais alors la latitude aura été différente.

Tel est donc l'aspect sous lequel les plus anciens astronomes commencèrent à considérer la lune, quand ils voulurent parvenir à déterminer ses inégalités ; ils virent que des éclipses de lune arrivées dans le même point du ciel, & dans la même saison de l'année ne se trouvoient point à des distances égales pour le temps ; ils firent une table des intervalles de temps observés entre plusieurs éclipses de lune, & ils chercherent s'il n'y auroit pas entr'elles deux intervalles de temps qui fussent exactement égaux, cela ne se rencontra que sur 223 lunaisons ou 18 ans ; on reconnut ainsi que la lune ne revenoit pas toujours au même degré d'anomalie ou d'inégalité, quoiqu'elle revînt au même point du ciel, & en opposition avec le soleil.

1427. En examinant la lune dans l'espace d'un mois, il n'étoit pas difficile de voir que tous les 7 jours elle avoit cinq à six degrés d'inégalité ; qu'au bout de 14 jours cette inégalité disparoissoit, & ainsi de suite ; qu'il y avoit toujours dans le mois deux points éloignés tout à la fois d'une demi-révolution en temps, & d'un demi-cercle en longitude ; c'est-à-dire, deux moitiés égales parcourues en temps égaux : ensorte que les inégalités recommençoient toujours au bout de 27 jours & demi environ. Mais en faisant la même recherche en différens mois ou en différentes années, on remarqua bientôt que le point de la plus grande inégalité ne se trouvoit pas au même point du ciel ; mais toujours un peu plus avancé dans le Zodiaque, & cela d'environ 3 degrés à chaque révolution, ensorte que le mouvement de la lune par rapport à son apogée, ou son mouvement d'anomalie étoit plus petit de $\frac{1}{11}$ que le mouvement absolu.

Premiere inégalité, ou équation de l'orbite.

Pour expliquer cette première inégalité, on supposa que la lune décrivoit un cercle excentrique, comme

nous l'avons expliqué pour le soleil (865); ou bien un épicycle placé sur un cercle concentrique (868), & en même temps que la ligne des apsides (864), c'est-à-dire, la ligne qui va de l'apogée au périgée changeoit de position & s'avançoit vers l'Orient d'environ 3 degrés par mois.

1428. Ptolomée employa, pour déterminer cette premiere inégalité, 3 éclipses de lune observées à Babylone dans les années 719 & 720 avant J. C. & il la trouva de 5° 1′ (*Almag. IV*, 6 & 11). C'est cette première inégalité que nous appellons *équation de l'orbite*, ou *équation du centre* (a), & qui est appellée dans Képler *inæqualitas soluta*. Nous donnerons ci-après sa véritable quantité avec plus d'exactitude (1434).

Trouver l'apogée de la Lune.

1429. Pour déterminer le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, à la manière des anciens, je suppose qu'on ait rassemblé plusieurs lieux de la lune déterminés par observation, dans l'intervalle d'une même révolution, l'on prendra l'intervalle du temps moyen entre une de ces observations prise pour époque, & chacune des autres observations; on calculera le mouvement moyen de la lune en longitude pour cet intervalle de temps, au moyen du mouvement diurne (1420); on les ajoutera au vrai lieu de la lune pour le temps de l'époque; on aura pour le temps de chacune des autres observations une longitude, différente de celle qui aura été observée. Ayant fait la même opération sur un grand nombre de longitudes, on choisira celles où la différence entre le lieu calculé & le lieu observé, aura été la plus grande, en plus & en moins, la somme des deux différences sera le double de l'équation de l'orbite. S'il se trouvoit deux observations où cette différence fût égale entre le lieu moyen & le lieu vrai, mais en sens contraire, en plus & en moins, ce seroit une preuve que la lune au temps de l'époque

(a) Elle est dans Ptolomée sous le nom de πρώτης καὶ ἁπλῆς ἀνωμαλίας, ou de premiere & simple inégalité.

choisie, étoit dans son apogée ou dans son périgée, & que son lieu moyen étoit le même que son lieu vrai : ainsi l'on connoîtra le lieu de l'apogée de la lune. S'il ne se trouve pas deux observations où les différences soient égales, & en sens contraires on cherchera celles où les différences seroient égales & dans le même sens, elles indiqueront des observations voisines de l'apogée & du périgée, puisque l'erreur étant la même, c'est une preuve que le mouvement vrai a été égal au mouvement moyen dans cet intervalle de temps, & cela indique les apsides (1279).

1430. Depuis la découverte des lunettes on a un moyen encore plus simple de trouver l'apogée de la lune, en observant les diamètres apparens de la lune; car ce diamètre varie depuis $29' \frac{1}{2}$ jusqu'à $33' \frac{1}{2}$, (1505); l'on est donc assuré que la lune est apogée toutes les fois que son diamètre apparent n'est que de $29' \frac{1}{2}$, & qu'elle est périgée lorsque ce diamètre est de $33' \frac{1}{2}$; cette méthode seroit suffisante pour trouver le lieu de l'apogée de la lune à très-peu près, si l'on ignoroit son mouvement. Autre méthode.

1431. Mais il y a une manière encore plus exacte de trouver le lieu de l'apogée de la lune par le moyen de ses diamètres, c'est d'en observer la quantité vers les moyennes distances, lorsque le diamètre est environ de $31' \frac{1}{2}$. Si on l'a trouvé deux fois de la même quantité, c'est une preuve que dans ces deux observations la lune étoit à des distances égales de ses apsides; ainsi prenant un milieu entre les deux temps où l'on a observé, on aura le temps où la lune a été apogée.

Exemple. Le 15 Septembre 1762 à midi le diamètre de la lune étoit de $33' 14''$, réduit à l'horizon (1509), le lendemain il étoit plus grand; mais le 18 à midi il étoit revenu à la même grandeur que trois jours auparavant, & il étoit de $33' 14''$; cela prouve que dans le milieu de l'intervalle ou à minuit du 16 au 17 la lune avoit été dans son périgée.

C'est en observant ainsi les diamètres de la lune que

Horoccius vers l'an 1638, trouva qu'il falloit admettre un balancement de l'apogée & un changement d'excentricité pour expliquer la seconde équation trouvée par Ptolomée, dont nous parlerons ci-après (1434).

Mouvement de l'apogée.

1432. Après avoir ainsi déterminé plusieurs fois le lieu de l'apogée de la lune en différens temps, on a trouvé qu'il faisoit le tour du ciel par rapport aux étoiles dans l'espace de 8 années communes & 311 jours ou 3232j 11h 14′ 31″, 0, & par rapport aux équinoxes en 3231j 8h 34′ 57″, 6, ainsi son mouvement considéré par rapport aux équinoxes est de 6′ 41″ 069815 par jour. De-là il suit que le mouvement moyen de la lune (1420) par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de son apogée 6′ 40″, 931992 est égal à la fraction décimale 0,0084522595, dont le logarithme est 7,9269211; & que la révolution anomalistique de la lune est de 27j 13h 18′ 34″, 022 : on la trouvera en disant la différence des mouvemens séculaires de la lune & de son apogée 1717915265 est à un siècle ou 3155760000″, comme 360 degrés ou 1296000″ sont à 2380714″.

1433. Jusqu'au temps de Ptolomée on s'étoit borné principalement à observer des éclipses de lune; & la première inégalité de 5° (1428) étoit la seule qui pût s'y manifester. Ptolomée reconnut qu'il y en avoit une autre qui étoit fort sensible dans les quadratures (*Almag. liv. V. ch.* 1), & qu'on appercevoit par les distances de la lune au soleil. En observant avec soin l'ordre de cette inégalité », nous avons reconnu, dit-il, qu'il n'y avoit » que la première & simple inégalité dans les conjonc- » tions & les oppositions, & même dans les quadratu- » res, quand la lune est apogée & périgée; mais on » s'assurera facilement qu'elle ne suffit pas pour calculer » les mouvemens particuliers de la lune observés dans » les autres aspects. La seconde inégalité se rapporte » aux distances de la lune au soleil; elle se rétablit & » disparoît dans les conjonctions & dans les oppositions; » elle est la plus grande dans certaines quadratures;

» nous avons découvert cette différence par les obser-
» vations de la lune que nous avons d'Hipparque, &
» par celles que nous avons faites au moyen d'un inf-
» trument construit exprès pour mesurer les différences
» de longitude le long du Zodiaque entre le soleil &
» la lune ».

Ces distances de la lune au soleil observées par Hipparque & par Ptolomée, s'accordoient quelquefois avec le calcul de la première inégalité ou de la première supposition, (1427); quelquefois aussi elles en étoient plus ou moins éloignées. Ayant examiné avec soin la marche de cette inégalité, Ptolomée reconnut qu'il n'y avoit aucune erreur ou différence dans les quadratures lorsque la lune étoit apogée ou périgée ([a]); mais qu'il y avoit une différence de $2^{\circ}\frac{2}{3}$ quand la lune en quadrature, se trouvoit être à 3 signes de son apside. (*Almag. V.* 3. *in fine*). Alors en effet l'inégalité qui seroit de 5°, suivant les règles établies ci-dessus (1428), se trouve être de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, plus grande de $2^{\circ}\frac{2}{3}$ en vertu de la seconde inégalité. Ptolomée suppose en conséquence que l'épicycle de la lune est porté dans un cercle excentrique, & qu'il est plus près de nous dans les quadratures que dans les conjonctions & dans les oppositions, ensorte que pour expliquer ces deux inégalités ensemble il se sert d'un excentrique & d'un épicycle (*L. V. c.* 2 & 4).

Seconde inégalité, ou évection.

Ptolomée suppose que dans un jour le centre de l'épicycle allant suivant l'ordre des signes fait $13^{\circ}\ 14'$, & que l'apogée ou la ligne des apsides de l'excentrique fait $11^{\circ}\ 9'$ contre l'ordre des signes, ainsi tous les 14 jours l'apogée de l'excentrique rencontrera l'épicycle, & tous les 7 jours ils seront opposés entre eux. La petite équation de 5° aura donc lieu dans toutes les conjonctions & oppositions, parce qu'alors l'épicycle sera toujours dans l'apogée de l'excentrique, & l'équation

([a]) *In quadraturis verò utrisque, in minimo vel in nullo erratur, cùm Luna vel in maximâ, vel minimâ epicycli longitudine sit.* Ptol. L. V. cap. 2.

de $7^{\circ}\frac{2}{3}$ aura lieu quand l'épicycle sera plus près de la terre, ce qui arrive dans les quadratures; le diamètre de l'épicycle paroissant alors plus grand produira une inégalité plus considérable. (*Almag.* V. 2, *pag.* 102); mais il faut supposer d'ailleurs toutes choses égales, & la lune au point de la plus grande équation.

Mais dans l'explication que donne Copernic de cette inégalité, (*de Revol. lib. IV, cap.* 8), en suivant les mêmes données que Ptolomée, il employe deux épicycles. Le petit épicycle parcourt dans l'espace d'une révolution anomalistique, & contre l'ordre des signes, la circonférence du grand épicycle, & la lune elle-même parcourt, contre l'ordre des signes, le petit épicycle en $14^{j}\ 18^{h}$, c'est-à-dire, dans l'espace de temps nécessaire pour aller de la conjonction à l'opposition, ou d'une syzygie (a) à l'autre; son mouvement dans le petit épicycle est double du mouvement de la lune au soleil, ensorte que dans toutes les syzygies la lune se trouve en dedans du grand épicycle pour former la plus grande équation de 5°, & que dans les quadratures elle est au dehors pour former une équation de $7^{\circ}\frac{2}{3}$. C'est ainsi que la seconde inégalité découverte par Ptolomée, & que l'on appelle aujourd'hui *Evection*, s'expliquoit encore du temps de Tycho, c'est-à-dire, jusques vers l'an 1600. Ptolomée l'appelloit πρόσνευσιν, *epicycli quasi annutum*; Copernic l'appelloit *prostaphæresim secundi vel minoris epicycli*; Tycho l'appelloit *prostaphæresim excentricitatis*, nous l'appellons *évection*, à l'exemple de Boulliaud, parce qu'elle porte le calcul à une plus grande précision.

1434. Puisque l'inégalité de la lune alloit depuis 5° jusqu'à $7^{\circ}\ 40'$, sa quantité moyenne étoit suivant les anciens de $6^{\circ}\ 20'$, on l'employe actuellement de $6^{\circ}\ 18'\ 32''$ (1480), ainsi Hipparque par le seul secours des éclipses de lune, & Ptolomée en y employant les qua-

(a) Συζυγία, *conjugatio*, *unio*, ce mot comprend indifféremment les nouvelles Lunes & pleines Lunes, les conjonctions & les oppositions.

dratures, avoient déterminé avec une exactitude assez singulière ces deux premières inégalités.

1435. Cette seconde inégalité que les anciens avoient expliquée par le moyen d'un épicycle sur un excentrique, ou d'un épicycle sur un épicycle, fut expliquée d'une manière différente par Horoccius vers l'an 1640; mais sa théorie ne fut connue qu'en 1673; alors Flamsteed calcula de nouvelles tables de la lune sur les principes & sur les nombres donnés par Horoccius; & ces tables furent publiées par Wallis dans les œuvres posthumes d'Horoccius en 1678, (505). La théorie d'Horoccius a quelque rapport avec l'hypothèse d'Arzachel (392). Cet astronome Arabe qui observoit en Espagne vers l'an 1080 avoit cru appercevoir par les observations de Ptolomée & celles d'Albategnius, comparées avec les siennes, que l'apogée du soleil avançoit & reculoit alternativement, en même temps que l'excentricité paroissoit avoir diminué considérablement; cela lui fit imaginer l'hypothèse suivante, que Copernic imita dans la suite (*Liv. III, chap.* 20).

Soit *T* le centre de la terre (*fig.* 84), *C* le centre de l'orbite ou du cercle qu'une planète est supposée décrire, ensorte que *TCA* soit la ligne des apsides, & *TC* l'excentricité de la planète; si l'on suppose que le centre de l'orbite au lieu d'être fixe en *C* décrive la circonférence d'un petit cercle *AGB*, il en résultera un double effet. 1°, La ligne des apsides *TA* changera de position, & au lieu d'être constamment sur la direction *TCA*, elle passera par exemple en *TG*, & fera avec la première situation un angle *ATG*. 2°, L'excentricité au lieu d'être égale à *TC* deviendra *TG*, *TB*, &c. Telle fut l'hypothèse dont Horoccius fit usage pour la lune, afin de représenter la seconde inégalité (1433). *Fig.* 84.

1436. Il est vrai que Képler dans sa préface des éphémérides pour 1618 avoit déja annoncé qu'il employoit une excentricité de l'orbite lunaire, variable à chaque année, & l'on verra que la manière dont Tycho

expliquoit cette inégalité (1443) par le moyen d'un cercle *CETD* (*fig.* 86), conduisoit aussi à imaginer un changement d'excentricité; ainsi il n'est pas étonnant qu'Horroccius ait fait usage pour le mouvement de la lune de l'hypothèse d'Arzachel, sur-tout en reconnoissant par les observations que non-seulement il falloit changer l'équation de l'orbite lunaire ou son excentricité tous les six mois; mais encore avancer ou reculer l'apogée.

Fig. 86.

1437. Horoccius dut en effet être conduit à cette hypothèse, par l'observation des diamètres de la lune, qui pouvoient servir à faire connoître le lieu de l'apogée, comme nous l'avons expliqué (1431); il dut s'appercevoir par leur moyen que l'apogée de la lune se trouvoit dans un lieu du ciel plus avancé de 25 degrés lorsque la distance du soleil à l'apogée de la lune étoit de 45° ou de 225°, que lorsqu'elle étoit de 135° & de 315°; de sorte que le mouvement de l'apogée n'étoit point uniforme, mais sujet à un balancement annuel de plus de 12°; ce changement de l'apogée étant une fois reconnu, sa liaison avec le changement de l'excentricité étoit aisée à appercevoir.

Les tables de Flamsteed où cette théorie d'Horoccius étoit employée avec des augmentations considérables parurent dans le cours de mathématiques de Jonas Moore, qui a pour titre: *A new systeme of the mathematics*, 2 *vol. in*-4° 1681. Enfin, les tables de Flamsteed refaites, augmentées & perfectionnées sur la théorie de Newton, mais dans la même forme que celles d'Horoccius, ont été insérées en 1746 par M. le Monnier, avec des additions, dans ses institutions astronomiques. Newton & Halley se servirent de la même hypothèse ne voyant pas qu'on pouvoit représenter les deux effets par une seule opération (1440).

1438. Suivant la théorie de Newton (*Liv. III*, *prop.* 35), le centre *A* de l'orbite de la lune (*fig.* 84) décrit un cercle *AGB*, la terre étant en *T*, ensorte que *TC* exprime l'excentricité moyenne de la lune 55050, *TA*

Fig. 84.

TA la plus grande excentricité, & TB la plus petite, TC étant à CB comme l'excentricité moyenne est sa différence à la plus petite, ou comme le sinus total est au sinus de $12^{\circ}\ 18'$ qui est la plus grande équation de l'apogée, l'on aura $CB = 11727,\ 31$. Il suppose que si l'on fait l'angle ACG égal au double de l'argument annuel, ou de la distance entre le soleil & l'apogée de la lune, l'angle CTG sera l'équation de l'apogée, & TG l'excentricité actuelle de l'orbite lunaire, ainsi dans le triangle TCG dont on connoît deux côtés & l'angle compris, l'on dira la somme de TC & CG est à leur différence, comme la tang. de la moitié du supplément de ACG, c'est-à-dire, la tangente de l'argument annuel, dont le double est l'angle ACG, est à la tangente de la demi-différence des angles inconnus.

La somme des côtés TC & CD $66777,\ 31$ & leur différence $43322,\ 69$ étant des termes constans, la différence de leurs logarithmes ou plutôt le complément arithmétique de cette différence est le logarithme constant que l'on ajoutera toujours au logarithme de la tangente de l'argument annuel pour avoir celui de la tangente de l'argument corrigé; en effet, la demi-somme des angles inconnus, G & T est l'argument annuel moyen, & leur demi-différence est l'argument corrigé, c'est-à-dire, la moitié de l'angle ACG moins l'angle T; car la moitié de l'angle C en ôtant l'angle T est la même chose que la moitié de la différence entre les angles G & T, puisque $C = G + T$, $\frac{1}{2}C = \frac{G}{2} + \frac{T}{2}$, & $\frac{1}{2}C - T = \frac{G}{2} - \frac{T}{2}$, donc la demi-différence trouvée est l'argument annuel, moins l'angle T qui est son inégalité, ou l'équation de l'apogée.

Dans cette hypothèse où l'on suppose l'excentricité moyenne $TC = 55050$, $CB = 11727,\ 31$, le complément arithmétique du logarithme de la différence entre TA & TB, ou 98120864 est le logarithme constant qu'il faut ajouter à la tangente de la moitié de l'argu-

ment annuel moyen, pour avoir l'argument annuel corrigé, qui ajouté avec le lieu du soleil donne le vrai lieu de l'apogée de la lune ; c'est la forme que M. Halley avoit employée dans ses tables, sans en donner la démonstration.

1439. Cette hypothèse d'Horocciuś produit le même effet que celle de Ptolomée ou de Copernic (1433) ; en effet, on conçoit facilement que si l'apogée de la lune concourt avec la ligne des syzygies l'excentricité *TA* est assez grande, pour produire une équation de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, la lune étant dans sa moyenne distance, & en quadrature tout à la fois, il y aura donc $7^{\circ}\frac{2}{3}$ d'équation, dans cette hypothèse, ainsi que l'exigeoient les observations de Ptolomée, mais si l'apogée de la lune concourt avec la ligne des quadratures l'excentricité sera plus petite ou égale à *TB*, & la plus grande équation ne sera jamais que de 5 degrés.

En faisant varier ainsi l'excentricité de la lune, il falloit avoir différentes tables d'équations pour les différentes excentricités, ou bien calculer à chaque fois directement l'équation de l'orbite pour l'excentricité actuelle ; ce calcul étoit facile & exact par le moyen d'un artifice que M. Halley avoit employé dans ses tables, pour éviter l'inégalité des parties proportionnelles, l'embarras des tables à double entrée, ou leur trop grande étendue.

L'hypothèse elliptique simple, (1252), contient en effet une méthode aisée pour trouver l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie moyenne, & M. Halley dans ses tables de la lune en fit usage ; mais comme elle s'écarte un peu de l'hypothèse de Képler qui est la seule exacte, il fallut y apporter une petite correction, je vais en donner ici l'explication, parce que l'auteur lui-même ne l'a jamais donnée. M. Halley prit la peine de calculer pour les différentes excentricités, & les différentes anomalies vraies de la lune, quelle étoit l'anomalie moyenne qui y répondoit dans l'hypothèse exacte de Képler, & dans l'hypothèse elliptique simple ; la

différence de ces deux anomalies moyennes qui donneroient le même résultat par rapport à l'anomalie vraie, forme la petite quantité d'une table qu'il appelle, *Tabula pro expediendo calculo æquationis centri lunæ.* Ainsi M. Halley, sans avoir des tables d'équation pour chaque excentricité donnoit un moyen de la calculer par une seule opération; l'hypothèse elliptique simple lui auroit suffit; mais comme elle ne donne pas le même résultat que l'hypothèse de Képler, il en avoit cherché la différence; non pas celle des équations qui répondroient à la même anomalie moyenne, mais ce qui revient au même celle des anomalies moyennes qui produiroient la même anomalie vraie.

Exemple. Je suppose que l'on ait pour la moitié de l'anomalie moyenne 74° 3′ 30″ avec l'excentricité 53662, & que l'on veuille trouver l'anomalie vraie correspondante; cette anomalie calculée rigoureusement est de 4ˢ 24° 40′ 30″; mais dans la règle que nous avons donnée (1253), l'équation seroit plus petite de 2′ 10″ 6, & il faudroit qu'il y eût 74° 2′ 24″ 7 pour la moitié de l'anomalie moyenne, afin de trouver 72° 20′ 15″ pour la moitié de l'anomalie vraie, c'est donc 1′ 5″ 3 qu'il faut ôter de la moitié de l'anomalie moyenne pour qu'elle nous fasse trouver l'anomalie vraie 144° 40′ 30″, c'est-à-dire, pour lui faire produire le résultat convenable; or la table construite par M. Halley indique cette quantité-là, qui dépend de l'anomalie moyenne de la lune, & de son excentricité; c'est pourquoi il avoit mis en tête les premiers chiffres du *Logarithme pour l'équation de la lune.*

Ce logarithme employé par M. Halley est le complément arithmétique du logarithme de la distance apogée divisée par la distance périgée de la lune, pour chaque excentricité ou pour chaque distance du soleil à l'apogée de la lune. Dans l'exemple précédent, c'est 9,9533449.

1440. C'est ainsi qu'on a employé long-temps une double opération en corrigeant le lieu de l'apogée, &

en cherchant l'excentricité de la lune pour chaque instant donné afin d'en conclure le vrai lieu de la lune, ou le lieu corrigé par les deux premières équations. Flamsteed, Newton ni Halley ne remarquèrent pas qu'il y avoit une méthode facile, pour calculer cette équation, sans supposer une excentricité variable, & un balancement dans l'apogée; c'est celle qu'a employée M. Euler, & dont on n'a point encore donné de démonstration, en voici une assez simple. Soit *L* la lune (*fig.* 84), *T* la terre, *C* le centre moyen de l'orbite lunaire, *G* le centre pour un moment donné; *CT* l'excentricité moyenne de la lune, *CLT* la moitié de la moyenne équation de l'orbite, *GLT* la moitié de l'équation pour le temps donné, représentée comme dans la méthode de Newton (1438); *CLG* est la différence de ces deux équations, ou l'effet que produit sur la demi-équation le changement de l'excentricité & la libration de l'apogée. Pour trouver, par une simple opération cet angle *CLG* qui est la moitié de l'évection, je considère que quand cet angle est le plus grand, ou lorsque *LC* est perpendiculaire sur *CG*, l'angle *CLG* est de 40′, c'est-à-dire, que le rapport entre *CL* & *CG* est tel qu'il n'en peut résulter que 40′ pour l'angle *L*, ou 1° 20′ environ pour l'évection toute entière. Lorsque l'angle *LCG* sera oblique, l'angle *CLG* diminuera, & cela dans le rapport de la perpendiculaire *GD*, à la ligne *CG* ou de sin. *DCG* au rayon; donc l'évection sera 80′ sin. *DCG*; mais l'angle *DCG*=*ACL*—*ACG* est l'anomalie moyenne de la lune, moins deux fois la distance du soleil à l'apogée de la lune, ou, ce qui revient au même (a), deux fois la distance de la lune

Méthode plus simple pour l'évection.

Fig. 84.

(a) L'anomalie de la lune est égale à la longitude de la lune moins celle de l'apogée, ou à 2 ☾ — ☾ — ap. ☾; si l'on en ôte le double de l'argument annuel ou 2 ☉ — 2 ap. ☾, on aura 2 ☾ — 2 ☉ — ☾ + ap. ☾, ou 2 (☾ — ☉) — (☾ — ap. ☾), c'est-à-dire, deux fois le lieu de la lune moins celui du soleil, dont on aura ôté le lieu de la lune moins celui de son apogée, ou l'anomalie moyenne de la lune; donc l'anomalie de la lune moins le double de l'argument annuel équivaut à l'argument de l'évection.

au soleil moins l'anomalie moyenne de la lune, qui forme l'argument de l'évection : donc la demi-évection, ou l'angle *GLC* est égale à 80′ sin. (2 dif. ☾☉ — an. ☾); c'est la forme sous laquelle elle se trouve actuellement dans toutes les tables de la lune ; mais il faut remarquer qu'elle est ordinairement jointe avec une autre équation, comme dans la table de la cinquième équation de la lune où elle est jointe à une équation de 36″ qui a pour argument le double de celui de l'évection.

Quantité de l'évection.

1441. Cette seconde équation de la lune, qui suivant Ptolomée, étoit de 1°19′½, & suivant Tycho, 1° 15′, est dans les tables de Flamsteed 1° 18′ 50″; dans les premieres tables de M. Mayer 1° 20′ 42″, & dans les nouvelles 1° 20′ 34″; dans celles de M. Euler, 1° 18′ 49″ dans celles de M. d'Alembert 1° 18′ 18″, & dans celles de M. Clairaut 1° 16′ 18″; mais M. d'Alembert observe que cette équation de M. Clairaut ne répond qu'à une partie équivalente, à 1° 16′ 12″ dans les anciennes tables de Mayer, parce que la forme des équations étant différente, il faut les décomposer pour pouvoir les comparer ensemble. (*Recherches sur différens points du Syst. du Monde III.* 27). Nous donnerons dans le XXIIe livre une idée de la maniere dont l'attraction du soleil produit cette inégalité (3479).

Recherches de Tycho-Brahé.

1442. La troisième inégalité de la lune étant une découverte de Tycho-Brahé ; il est nécessaire de remonter à l'origine de ses recherches sur la théorie de la lune ; elle étoit entrée pour beaucoup dans le projet que Tycho avoit conçu de réformer toute l'astronomie, & de lui donner une nouvelle face ; cependant comme les mouvemens de la lune lui parurent les plus compliqués & les plus difficiles à démêler, il fut long-temps sans oser se décider, & il ne comptoit pas en parler dans son livre des *Progymnasmes*, où il traita des autres parties fondamentales de l'astronomie : néanmoins ce livre qu'il avoit fait imprimer chez lui à différentes reprises, n'ayant vu le jour qu'après sa mort par les soins de ses héritiers, qui le firent achever en 1610, on y

ajouta pour lors un appendix de 28 pages pour la théorie de la lune, qui eſt à la ſuite de la théorie du ſoleil, & qui interrompt l'ordre des chiffres entre les pages 112 & 113. Ce petit abrégé de la théorie de la lune avoit été achevé en 1601 par Tycho, aidé de Longomontanus, (comme les éditeurs en avertiſſent à la page 819 du même livre), & on le trouva dans ſes papiers. Je vais en donner l'extrait comme d'une pièce originale qui contient la découverte de la VARIATION ou de la troiſième inégalité de la lune ; mais comme je ne puis ſéparer celle-ci des deux autres, il eſt néceſſaire de rappeller la maniere dont il enviſage les deux premieres inégalités

Fig. 86. 1443. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 86.) *TF* le rayon de l'*excentrique*, ou du cercle principal, par lequel on repréſente les mouvemens de la lune; nous le ſuppoſons diviſé en cent mille parties : on prendra *TB* de 2174 parties, & l'on décrira un cercle *TECD*, ſur lequel on fera mouvoir le centre de l'excentrique, de maniere que dans les ſyzygies, c'eſt-à-dire, les conjonctions & les oppoſitions, le centre ſoit en *T* au centre même de la terre, que dans toutes les quadratures il ſoit au contraire en *C*, à la plus grande diſtance de la terre, & que dans les octans il ſoit en *D* & en *E*. L'équation qui en réſultera ou l'angle *BRT*, eſt de 1° 15′; car 2174 eſt à peu-près le ſinus de 1° 15′ pour un rayon de cent mille; cette équation eſt proportionnelle au ſinus du double de l'élongation de la lune au ſoleil, puiſque le cercle eſt décrit tout entier dans une demi-révolution, & elle eſt ſouſtractive dans la premiere quadrature, parce que le mouvement de la lune ſe fait de *F* en *R*; enſorte que l'angle *FTR* vû de la terre eſt plus petit que l'angle formé en *C* autour du vrai centre de l'orbite lunaire : cette hypothèſe ſert à expliquer à l'évection (1441).

1444. Le grand épicycle dont le rayon *FG* eſt de 5800, exprime une partie de l'équation du centre, & produit 3° 19′ d'inégalité; le centre du petit cercle

MNL est supposé en *G* lorsque la lune est apogée, il descend vers *H* & se trouve en *I* lorsqu'elle est périgée, ce qui arrive, suivant Tycho, à la moitié des $27^j\ 13^h\ 18'\ 35''$, qui forment la durée de sa révolution anomalistique.

Le troisième épicycle *MLKN* est celui sur lequel la lune même est placée; son rayon *GM* est de 2900, c'est-à-dire, la moitié du grand épicycle, & il produit par conséquent une inégalité de $1^\circ\ 40'$. La lune se meut sur cet épicycle, de maniere que quand le centre du petit cercle est apogée en *G*, la lune soit en *K* dans la partie inférieure de ce petit cercle *MNK*; mais quand le centre du petit cercle sera en *H* ou en *O*, & que l'équation de l'orbite sera la plus grande, la lune sera en *M*, & à la plus grande distance possible du centre *F* du grand épicycle; parce que la lune parcourt ce troisième épicycle en $13^j\ 18^h\ 39'\ 17''\frac{1}{2}$, moitié de sa révolution anomalistique; la somme de ces deux équations, qui répondent à la distance *FM*, est de $4^\circ\ 58\frac{1}{2}$; c'étoit, suivant Tycho, la plus grande équation, qui par l'évection devenoit quelquefois de $7^\circ\ 28'$, moindre de $12'$ que dans Ptolomée & Copernic.

1445. Mais, ajoute l'auteur, j'ai éprouvé par un grand nombre d'observations exactes, que ces trois cercles ne satisfont pas encore aux observations, & que dans les octans, c'est-à-dire, à 45° des syzygies & des quadratures, il y a une autre différence sensible; j'ai donc été obligé d'ajouter un petit cercle en *F* pour expliquer cette VARIATION, & je suppose que le centre *F* du grand épicycle en parcourt non pas la circonférence, mais le diamètre *VX* perpendiculaire au rayon *BF*, par un mouvement de libration qui soit réglé cependant de même que s'il se faisoit sur la circonférence, comme fait Copernic dans d'autres occasions, c'est-à-dire, proportionnellement aux sinus des arcs parcourus; il en résulte une équation qui depuis les syzygies jusqu'aux quadratures, doit toujours s'ajouter à la longitude moyenne de la lune par rapport au soleil, pour avoir la véritable

Troisième inégalité ou variation.

ſituation du centre de l'épicycle, mais qui eſt ſouſtractive dans le ſecond & le quatrième octant. Cette libration dépend donc du double de la vraie diſtance de la lune au ſoleil, & produit la *Variation*, inégalité qui va à 37′ 4″ dans les octans. On remarquera que Tycho avoit encore déterminé cette inégalité avec bien de la préciſion, puiſque les dernieres tables ſuppoſent actuellement la variation de 37 à 40′; elle eſt dans M. Clairaut de 39′ 54″, dans les anciennes tables de Mayer 40′ 43″; dans celles de Flamſteed 40′ 34″, ſuivant la théorie de M. d'Alembert 37′ 50″. (*Recherches, &c. III.* 28), & dans les nouvelles tables de Mayer 37′ 4″, en y comprenant les petites équations que la même table renferme.

Tycho ſe propoſoit de donner l'explication & les preuves de toute ſa théorie, dans un ouvrage particulier, mais il n'en eut pas le temps, & il ne nous en laiſſa que le réſultat renfermé dans les hypothèſes que je viens d'expliquer.

1446. Dans les tables de la lune qui ſont jointes à cet ouvrage, on trouvera les trois inégalités, dont je viens de raconter la découverte, ſous le nom d'*Equation de l'orbite, évection & variation*, (Equat. V, XI & XII); mais les quantités en ſont déterminées par les recherches & les obſervations nouvelles. Les deux dernieres ſont appellées dans Képler *Inæqualitates menſtruæ*; l'évection en particulier y eſt nommée *Æquatio temporanea*, & la variation *Æquatio perpetua* ou *variatio*, (Képler, *Epitome, pag.* 790, 793), parce que celle-ci revient perpétuellement à chaque mois, & que l'autre ne revient que de temps en temps; Boulliaud appella la premiere *Evection* & ce nom lui eſt reſté. Quand à la ſeconde, Képler lui donnoit le nom de *Variation* avec Tycho qui en étoit l'inventeur, (Képler, *Epit. pag.* 811.): Boulliaud l'appelle *Variation* ou *Réflexion*. La variation ſe détermine aſſez bien par la théorie, c'eſt-à-dire, par le principe de l'attraction (3469); elle dépend uniquement de la maſſe du ſoleil & de ſa diſtance

à

à la terre, & subsisteroit quand même les orbites du soleil & de la lune seroient circulaires & concentriques. Pour la déterminer, M. Mayer avoit supposé dans ses premieres tables la parallaxe du soleil de $11'' \frac{1}{2}$, au lieu de $9''$ qu'elle paroît devoir être ; mais dans ses nouvelles tables, il emploie la parallaxe de $7''$ 8 d'après la valeur de l'équation $1' 55''$ dif. ☾ ☉ déterminée par les observations, & comparée, dit-il, avec la théorie.

1447. On remarque comme une chose assez singulière que cette quantité moyenne de la variation dans certaines tables est exactement la moitié de l'évection ; je dis cette quantité moyenne, parce que la variation change suivant la distance du soleil & de la lune à la terre, ce qui produira d'autres inégalités (1467) : ce rapport si simple entre deux des plus fortes inégalités de la lune, ne paroît pas une suite nécessaire de la théorie de l'attraction, mais c'est un fait qui méritoit d'être remarqué, quoique dans nos nouvelles tables il y ait une petite différence.

1448. L'ÉQUATION ANNUELLE de la lune, qui est d'environ $11' 16''$ est la dernière de celles que les observations seules avoient fait découvrir ; elle est indiquée par Tycho, à la sixième page de la théorie de la lune qui est insérée dans ses progymnasmes, où il dit qu'une expérience répétée de plusieurs façons lui a fait connoître que les mouvemens moyens de la lune exigent, pour être uniformes, une équation des jours, différente de celle que donnent les mouvemens du soleil. Tycho donne, en effet, une table de l'équation du temps qu'il faut employer pour calculer le lieu de la lune ; mais cette équation ne s'accorde pas avec l'équation annuelle que nous employons actuellement.

1449. Képler chercha comme Tycho une équation du temps pour la lune ; il écrivoit à Bernegger en 1625, *in lunâ post omnem apparatum Tychonis & meum transigi de eclipsibus non posse puto nisi introductâ insuper æquatione annua, sive in motus lunæ sive in temporis æquationem usitatam*, (*Epist. Kep. & Bern. pag.* 72).

1450. Enfin Horoccius dans sa théorie de la lune en fit également usage, Flamsteed en publia les résultats en 1673, avec des tables construites d'après les nombres qu'Horoccius avoit laissés manuscrits (*Horoccii op. posth.*). Il est vrai que Horoccius n'employoit expressément que les deux équations données par les anciens, avec la variation de Tycho; mais il corrigeoit le temps vrai pour lequel il vouloit calculer le lieu de la lune par une équation du temps, additive dans les six premiers signes de l'anomalie moyenne du soleil, & qui alloit à 13′ 24″ de temps dans les moyennes distances, ce qui revenoit au même que s'il eût ajouté 7′ 21″ aux longitudes de la lune, tandis qu'il négligeoit une partie de la véritable équation qui auroit dû être de 7′ 42″ de temps soustractive, de sorte que par-là il ajoutoit 4′ 14″ au lieu moyen de la lune; le total revenoit à 11′ 34″ pour la plus grande équation annuelle; or M. Mayer ajoute en effet dans ses nouvelles tables 11′ 16″ pour l'équation annuelle, ainsi l'on peut dire qu'elle étoit véritablement & exactement employée dans les tables d'Horoccius, quoique sous un nom différent. Flamsteed remarqua ensuite avec raison que l'équation employée par Horoccius, n'est pas proprement l'équation du temps dans le systême solaire, suivant les démonstrations que Flamsteed avoit données à ce sujet, depuis la mort d'Horoccius (972); cependant, ajoute-t-il, cette équation physique doit être employée dans les calculs de la lune, & elle lui est particulière; c'est un satellite qui est affecté par le mouvement de la terre; & il se meut un peu plus lentement autour d'elle quand elle est aphélie, ou fort éloignée du soleil, que quand elle en est plus proche; il avoit eu envie d'exprimer aussi en degrés cette équation particulière de la lune; mais il la conserva en temps par respect pour l'usage qu'en avoit fait Horoccius, & pour ne pas paroître surcharger encore le systême lunaire d'une nouvelle équation (*Hor. op. pag.* 492, 496).

Quelques années après Halley donnant à la suite de

ſon catalogue des étoiles auſtrales, publié en 1679, quelques réflexions ſur la théorie de la lune, remarqua qu'elle paroiſſoit aller plus vîte quand le ſoleil étoit plus éloigné, que lorſqu'il étoit plus proche de la terre; il fixa pour lors cette équation à la neuvième partie de celle du ſoleil, c'eſt-à-dire, à treize minutes environ.

1451. Newton reconnut auſſi que cette équation ſuivoit de ſa théorie; en effet la peſanteur de la lune vers la terre étant diminuée par l'attraction du ſoleil, le ſera encore plus quand le ſoleil ſera plus proche de la terre; or la lune étant retenue dans ſon orbite par une moindre force s'éloignera du ſoleil; l'orbite ſe dilatera davantage, & le temps de la révolution ſera plus long. (1224). Cette équation annuelle qui ſe trouve de 11′ 49″ dans les tables de Flamſteed & de Halley eſt accompagnée de deux équations analogues, de 20′ pour l'apogée, & de 9′ $\frac{1}{2}$ pour le nœud, que Newton a introduites. Elles ſont également employées dans les nouvelles tables de Mayer, l'une de 8′ 50″, l'autre de 23′ 12″.

1452. Cette équation annuelle eſt de 11′ 49″ dans les tables de Flamſteed; de 11′ 20″ dans celles de M. Euler. (*Alman. de Berlin* 1750); de 12′ 57″ dans celles de M. d'Alembert. (*Recherches, &c. pag.* 230); M. Mayer l'a faite comme M. Euler de 11′ 20″, & dans ſes dernieres tables de 11′ 16″, ſans doute d'après les obſervations; car la théorie de l'attraction ne la détermine pas d'une manière aſſez exacte, M. Clairaut ne la faiſoit que de 10′ 36″ dans ſes premières tables. Valeur de l'Équation annuelle.

1453. On comprend aſſez, ſans que j'en donne ici d'exemple, comment il a été poſſible à Tycho, Képler, Horoccius & Halley de découvrir l'équation annuelle; il ne s'agiſſoit que de calculer pluſieurs lieux de la lune ou pluſieurs obſervations d'éclipſes en différens temps de l'année, ſur les tables où l'on employoit déja l'équation de l'orbite, l'évection & la variation; tous ces calculs s'accordoient avec les obſervations au

mois de Janvier & au mois de Juillet; ils s'en écartoient constamment d'abord au mois de Mars, ensuite au mois de Septembre en sens contraire; cela suffisoit pour faire voir qu'il y avoit une inégalité attachée à l'équation de l'orbite solaire, & qui étoit à son *maximum* toutes les fois que le soleil étoit dans ses moyennes distances. Cette équation annuelle est la plus grande dans les distances moyennes du soleil, quoiqu'elle dépende du plus grand & du plus petit éloignement, par la même raison que l'équation de l'orbite est nulle dans les deux apsides, & la plus grande dans les moyennes distances (1256). Aussi-tôt que la vîtesse actuelle cesse d'excéder la vîtesse moyenne, la somme des excès accumulés jusqu'alors, c'est-à-dire, l'équation totale se trouve la plus forte & elle est à son *maximum*; cette équation provenant de l'excès de la vîtesse doit augmenter sans cesse, tant que cette vîtesse surpasse la moyenne, quelque petite que soit la différence.

DES PETITES INÉGALITÉS DE LA LUNE.

1454. Jusqu'alors la théorie de la lune n'étoit composée que des quatre équations dont nous avons parlé; Horoccius les avoit employées de la manière la plus exacte. M. Halley en 1679 lui rendoit cette justice en disant : *Unica vero* (theoria) *Horoccii nostratis ad veritatem naturalem accedere videtur*; en même temps il assure que l'évection & la variation peuvent se calculer à la fois par une seule hypothèse, en supposant que dans la ligne des syzygies l'orbite de la lune est comprimée au-dedans & vers la terre d'environ la 90e. partie de la distance moyenne, & qu'elle est alongée d'autant dans la ligne des quadratures; M. Halley n'accompagne son idée d'aucune espèce de calcul, il se contente de dire que cela est très-d'accord avec les lieux de la lune observés par M. Cassini. Paris étoit

alors presque le seul endroit de la terre, où l'on faisoit & en très-grand nombre d'excellentes observations.

1455. Des trois inégalités de la lune découvertes avant le temps de Képler, les deux dernières avoient un rapport trop visible avec le soleil pour que ce génie actif & pénétrant n'en cherchât pas la cause physique. La lune, disoit-il, est mise en mouvement par deux forces : savoir une qualité qui émane de la terre & qui entraîne la lune autour d'elle, & une autre force qui provient des rayons solaires, ensorte que quand la lune a fait 90° depuis sa conjonction jusqu'à sa quadrature, il y en a 88 qui proviennent de la force de la terre, & deux qui viennent de la lumière du soleil, (*Epit. astr. Cop. pag.* 552, 564, 780). Les idées physiques de ce grand homme firent naître dans la suite l'explication encore plus satisfaisante que l'attraction nous donna enfin de toutes ces inégalités, (*v. Liv. XXII*), & cette même attraction a fait reconnoître une multitude d'autres inégalités dont nous avons à parler.

Képler entrevoit la cause de ces inégalités.

On a écrit sans fondement que M. Halley avoit proposé une autre correction pour la théorie d'Horoccius, c'est-à-dire, celle qui a été fixée depuis par M. Newton à 2′ 25″ (1463). Halley n'en avoit aucune idée, il indiquoit seulement une cause des changemens de latitude que Tycho avoit découverts, en disant que le soleil qui envoyoit obliquement ses rayons à la lune, l'obligeoit par une certaine puissance de s'approcher de lui; *efficit potentia quadam insita ut propius ad se accedat*, (*Halley catal. st. austr.* 1679); mais Newton plusieurs années auparavant avoit déja eu des idées de l'attraction universelle (3381).

1456. Les observations seules n'avoient pu faire découvrir aux astronomes que des inégalités qui alloient à plusieurs minutes; peut-être l'équation annuelle n'eût pas même été reconnue par les observations, si elle n'avoit eu un retour constant dans les mêmes saisons de l'année, ce qui la rendoit remarquable (1453). Aussi toutes les autres petites inégalités dont il nous reste

à parler, n'ont été d'abord soupçonnées que par l'idée de l'attraction, & n'ont été déterminées qu'en comparant avec cette théorie un grand nombre de bonnes observations ; il étoit réservé à Newton de faire le plus grand pas dans la théorie de la lune, comme dans tout le reste ; guidé par le principe de la gravitation universelle, & aidé des observations de Flamsteed, il détermina la quantité de plusieurs nouvelles équations, avec les époques, & les moyens mouvemens. Cette belle théorie parut en 1702. Voy. *Davidis Gregorii astronomiæ physicæ & geometricæ elementa*, *Oxonii* 1702, *folio. Postea Genevæ* 1726, 2 *vol. in*-4°.

Théorie de Newton.

C'étoit la partie la plus précieuse de cet ouvrage de Gregori qui contient d'ailleurs la plupart des grandes découvertes qu'on a faites dans la physique céleste. La théorie de Newton, reparut de nouveau cinq ans après avec des explications & des tables, (*Prælectiones astronomicæ Cantabrigiæ habitæ à Guillelmo Whiston*, 1707, 8°). Newton la publia aussi dans la seconde édition de son fameux ouvrage intitulé : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1713, 4°. Ce fut alors que l'on commença de construire des tables conformes à ces nombres.

1457. M. de l'Isle fut le premier qui vers 1715 ou 1716 calcula des tables de la lune d'après les nombres de Newton. M. Horrebow, professeur à Copenhague, publia dans un journal littéraire de Hall, (*Bibliotheca novissima*), quelques tables de la lune qu'il assujettit autant qu'il put à la théorie de Newton, il les compara avec plus de 30 observations qui s'y accordoient assez bien. Le P. Grammatici, Jésuite, publia en 1726 de petites tables de la lune, V. *Tabulæ lunares ex theoria Newtonis, a quodam Uranophilo e Soc. Jesu, Ingolstadii*, 1726, & calcula plus de 60 observations choisies sur ces tables, sans y trouver d'erreurs sensibles. Leadbetter publia en 1728 de nouvelles tables de tous les mouvemens célestes, tirées de différens auteurs, & l'année suivante des tables particulières de la lune faites sur la théorie de Newton, qui ont été réimpri-

mées depuis, (*Uranoſcopia or the contemplation of the Heavens, By Charles Leadbetter*, London, 1735, 2 *vol.* 8°).

1458. ROBERT WRIGHT publia la même année une adreſſe aux Lords prépoſés pour examiner les mémoires ſur la découverte des longitudes, où il fit voir par le calcul de pluſieurs obſervations comparées avec les tables, que la théorie de la lune étoit ſuffiſante pour remplir cet objet, il publia enſuite ſes tables avec le détail du calcul de 30 obſervations, dont la plupart ſont des éclipſes de lune, (*New and correct tables of the lunar motions, according to the Newton theory by Robert Wright*, 1732, 4°).

ANGE CAPELLI, chanoine de Parme, donna en 1733 des tables de la même nature. V. *Aſtroſcopia numerica in*-4°. *Venetiis*, & il calcula le lieu de la lune pour tous les jours de l'année 1736; afin que les aſtronomes puſſent y comparer leurs obſervations. V. *Commercium litterarium ad aſtronomiæ incrementum*, Tomus I, *autore Michaele Adelbulnero*, *Norimbergæ*, 1735, 4°. Ce journal ceſſa au mois de Mai 1736, 1739. Il parut encore d'autres tables calculées ſur le même principe. V. *The practical aſtronomy of the moon, or new tables of the moon's motions, exactly conſtructed from ſir Iſaac Newton's theory by Richard* DUNTHORNE, *Cambridge*, 1739, 8°.

1459. Flamſteed qui depuis ſes dernières tables publiées en 1681, n'avoit pas ceſſé de travailler à la même théorie, calcula auſſi des tables que M. le Monnier a publiées depuis, avec des augmentations conſidérables. V. *Inſtitutions aſtronomiques*, à Paris 1746, 4°. *pag.* 145. Ces tables ne diffèrent pas beaucoup de celles de M. Halley.

Enfin celles de M. Halley qui étoient imprimées depuis 1719, ont été rendues publiques en 1749; M. Halley y a négligé de petites équations, dont il ne croyoit pas la détermination aſſez sûre, & M. Newton diſoit à M. de l'Iſle en 1724, que ſi M. Halley eût employé toutes ces petites équations, & qu'il eût ajouté

une minute & demie à la longitude de la lune pour son accélération physique dans notre siècle (1483), il n'auroit trouvé presque aucune différence entre l'observation & le calcul. V. *les lettres de M. de l'Isle sur les tables astron. de Halley*, dans les mémoires de Trévoux pour les mois de Janvier & Février 1750.

D'un autre côté Halley négligea deux des équations de Newton, parce qu'il trouva qu'il n'étoit pas possible de les déterminer par les observations que l'on avoit; il disoit que si les erreurs de ses tables alloient quelquefois à 5′, c'étoit dans la partie de l'orbite lunaire, où Flamsteed l'avoit rarement observée, & où par conséquent la théorie de Newton avoit manqué de secours; ajoutons que les observations de Flamsteed n'avoient pas toujours le degré d'exactitude nécessaire pour un objet si délicat. Halley lui-même reconnut l'imperfection de ses tables, & il l'exposa aux yeux du Public avec le moyen qu'il croyoit propre à y remédier ou la table des erreurs pendant 18 ans (1501).

1460. Jusqu'alors c'étoit la théorie de Newton, & même les nombres qu'il avoit calculés, qui avoient produit toutes les tables de la lune; mais un géomètre aussi laborieux que profond, commençoit vers 1745 à attaquer le problême des trois corps dans toutes ses branches, c'étoit M. Euler; il vit bientôt que Newton n'avoit pas tiré des calculs de l'attraction, tout ce qu'on pouvoit en conclure, & il donna dans ses opuscules en 1746 de nouvelles tables de la lune, où il avoit fait usage de la théorie autant qu'il lui avoit été possible jusqu'alors, mais il les donna beaucoup mieux encore trois ans après dans l'Almanach astronomique de Berlin pour 1750.

M. d'Alembert & M. Clairaut qui s'occupoient à peu-près vers le même temps des mêmes questions donnèrent aussi des tables de la lune en 1754. Mais M. Mayer, astronome de Gottingue, ayant comparé les tables de M. Euler avec les observations, trouva moyen de les corriger avec tant de succès qu'il publia en 1753, dans le

le ſecond volume des mémoires de l'académie de Gottingen, des tables qui ne s'écartoient jamais de l'obſervation de 2′ (1471), tandis que dans les tables même de Halley il y avoit quelquefois des erreurs de 7 à 8′.

Le ſuccès de Mayer dans ſes premieres tables l'encourageoit à les perfectionner encore; il s'occupa lui-même de la théorie, il chercha l'équation générale de l'orbite d'après les calculs de l'attraction, il en rectifia tous les coefficiens par un grand nombre d'obſervations, & en 1755 il envoya de nouvelles tables à Londres, comme étant dignes de concourir au prix des longitudes. Après ſa mort, arrivée en 1762 (594), ſa veuve envoya à Londres une copie de ces tables encore perfectionnées, que M. Bradley vérifia par ordre des Commiſſaires de la longitude, & qui furent trouvées ſi exactes & ſi précieuſes pour la navigation, qu'on donna à ſa veuve une récompenſe de 3000 livres ſterling, (ou 68500 liv. de France). On a fait imprimer ces tables aux dépens de l'Etat en 1770; ce ſont celles que je publie de nouveau dans cet ouvrage, & dont je vais donner une idée. Nouvelles tables de Mayer.

J'ai déja dit qu'a l'équation annuelle de la lune, fixée par Horoccius, Newton avoit joint une équation annuelle pour l'apogée & une pour le nœud: ces trois équations ſont proportionnelles à l'équation de l'orbite du ſoleil, parce qu'elles ne dépendent, comme nous l'avons dit (1451), que de la diſtance du ſoleil, qui lorſqu'il eſt plus près de la terre dilate l'orbite de la lune & retarde par conſéquent ſon mouvement: il augmente au contraire le mouvement de l'apogée & des nœuds, qui n'ayant pas d'autre cauſe que l'action du ſoleil devient plus fort lorſque la cauſe augmente. La plus grande équation annuelle de la lune eſt dans Newton de 11′ 51″ pour la lune, 20′ 0″ pour l'apogée, & 9′ 30″ ſeulement pour le nœud, dont le mouvement eſt plus lent que celui de l'apogée; elles ſont dans les nouvelles tables de 11′ 16″, 23′ 12″ & 8′ 50″.

1461. L'équation ſemeſtre de 3′ 45″ ou la ſeconde Équation ſemeſtre.

équation, qui dans Newton dépend du double de l'*argument annuel*, fait partie de la Xe équation des tables de Mayer, qu'on trouvera dans cet Ouvrage; elle vient de ce que la force perturbatrice du soleil est plus grande lorsque le grand axe de l'orbite de la lune est dirigé vers le soleil, & doit produire une inégalité que Newton trouva, en effet, par les observations d'environ 3′ 45″ dans les moyennes distances du soleil, lorsque la ligne des apsides est éloignée de 45° du soleil; elle n'est que de 58″ dans les tables de Mayer; M. Clairaut la faisoit de 2′ 13″, & M. d'Alembert la fait de 2′ 28″ (III. 28); cette équation, au lieu d'être 3′ 45″, suivant Newton, ne devroit être que de 3′ 34″ quand le soleil est dans son aphélie, & devenir de 3′ 56″ lorsqu'il est le plus proche de la terre; mais M. Halley négligea cette petite correction qu'il jugeoit de peu de conséquence. Il négligeoit aussi la septième équation de Newton qui dépendoit de la simple distance de la lune au soleil, & qui étoit de 2′$\frac{1}{3}$ dans les quadratures, suivant la théorie de Newton (1465); celle-ci est de 1′ 57″ dans les tables de Mayer; de 2′ 5″ dans M. d'Alembert, & de 3′ 40″ dans M. Clairaut; elle fait partie de la XIIe équation dans les tables de cet ouvrage.

1462. L'équation de 58″ qui dépend de la double distance du soleil au nœud, ou l'équation semestre de Halley, & la neuvième dans M. Mayer, (V. les tables de la lune), vient de ce que l'action du soleil sur la lune est un peu plus grande quand la ligne des nœuds passe par le soleil; elle étoit de 47″ dans Newton où elle formoit la troisième équation. M. Clairaut la fait de 1′ 21″, M. d'Alembert de 1′ 9″ (*Recherches, &c. pag.* 28). M. Mayer l'a faite de 58″.

1463. L'équation de la lune que M. Halley appelle la quatrième équation, & qu'il ne faisoit que de 2′ 25″, est appellée par M. Newton la sixième équation, ou *la seconde équation du centre*; son argument ou la quantité dont elle dépend & qui en règle la mesure & les retours (3603), est la somme de la distance de la lune

au soleil & de la distance de leurs apogées ; ou le double de la distance de la lune au soleil moins l'anomalie moyenne de la lune, plus l'anomalie moyenne du soleil. On voit en général que si la lune étoit en conjonction & qu'elle fût apogée, le soleil étant périgée elle seroit le plus près du soleil qu'il soit possible, & par conséquent plus exposée à l'effet de la gravitation du ☉, qui diminue sa pesanteur vers la terre. Newton qui faisoit sa sixième équation de 2′ 10″ l'employoit après l'équation de l'orbite, de sorte qu'il employoit le vrai lieu de la lune pour la trouver ; mais Halley employoit celle-ci avant l'équation de l'orbite, afin que le lieu de la lune étant plus rapproché du vrai, il pût faire trouver l'excentricité & l'équation de l'orbite avec plus de précision ; cette équation est de 2′ 9″ dans nos tables où elle est la sixième.

1464. M. Halley n'employoit dans ses tables que ces trois petites équations avec l'équation annuelle ; ce n'étoit pas assez pour parvenir à la précision d'une minute : M. Mayer en a ajouté six autres ; M. Clairaut en employe 18 indépendamment des quatre grandes équations, & de celles de la latitude.

1465. La septième équation de la lune dans Newton & dans les tables de Flamsteed est de 2′ 20″, dans les quadratures ; elle dépend de la distance de la lune au soleil ; & elle est soustractive dans les six premiers signes de la distance ; M. Mayer la fait de 1′ 57″, elle est comprise dans la douzième table (1461).

1466. L'inégalité que nous avons appellée avec M. Boulliaud *évection*, (1441) ; est variable à raison des distances du soleil à la terre ou de celles de la lune à la terre : car quand le soleil ou la lune s'éloignent de la terre, l'évection diminue : on trouvera dans la table Ve. la quantité moyenne de l'évection ; mais ses accessoires ou ses variations sont contenues dans les tables Ve. VIe. VIIe. & dans la Xe. qui dépend de l'argument annuel. Dans la table Xe de la variation, qui est la douzième équation, M. Mayer a encore ajouté une

autre petite équation qui a le même argument & qui tient à l'évection (1465). M. d'Alembert a décomposé ces équations pour examiner la manière dont sa théorie s'accordoit avec les équations supposées dans les premières tables de Mayer; il faut voir la table qu'il en donne dans ses *Recherches*, &c. Tom. III, *pag.* 28.

1467. La variation que nous avons expliquée ci-devant (1445), & qui est un effet de la force du soleil qui accélère ou retarde le mouvement de la lune dans son orbite (3469, 3481), se trouvera dans la table XIIe. quant à sa partie moyenne; mais elle devient plus grande quand le soleil s'approche de la terre ou que la lune s'en éloigne; les changemens qu'elle éprouve par la distance du soleil à la terre & qui dépendent de l'anomalie moyenne du soleil sont renfermés dans les tables II. & III.; & ceux qui proviennent du changement de distance de la lune à la terre, par l'équation IV. & une partie de la Ve. Newton admettoit un changement de 2′ 10″ en plus & en moins dans la variation; il faisoit la plus grande variation de 37′ 25″, le soleil étant périgée, & de 33′ 4″ le soleil étant apogée; les équations précédentes produisent à peu-près le même résultat.

1468. L'équation VIII. de 34″ est un supplément nécessaire de l'équation annuelle (1448); car cette inégalité vient de la force du soleil sur la lune, en tant que l'orbite du soleil est excentrique, & que sa distance à la terre est variable; mais cette équation annuelle étant considérable, elle ne peut manquer de changer lorsque la distance de la lune à la terre varie; car alors non-seulement la lune est plus ou moins près du soleil; mais sa vîtesse devenue différente, donne aussi plus ou moins de prise à l'action du soleil: pour cet effet, M. Mayer y a ajouté l'équation qui sera marquée la huitième dans nos tables, dont l'argument est l'anomalie moyenne de la lune moins celle du soleil; & comme cette table ne suffit pas encore pour représenter toute l'inégalité, il a renfermé le reste d'une façon

particulière dans l'équation de 23′ 12″ qu'on applique à l'anomalie moyenne, & qui suit les petites équations du moyen mouvement; elle renferme aussi l'inégalité annuelle du mouvement de l'apogée (1451).

1469. Les équations renfermées dans les tables IX. & XIII. dépendent de l'inclinaison de l'orbite lunaire, parce que la force du soleil agit plus ou moins obliquement sur la lune, suivant qu'ils sont l'un & l'autre plus ou moins éloignés des nœuds, & situés dans des plans plus ou moins différens; dès-lors le mouvement de la lune en est diversement affecté; à cela se joint l'excentricité qui rend cette force plus grande dans l'apogée de la lune. Voila pourquoi l'équation de la table XIII. dépend du double de l'argument de latitude moins l'anomalie de la lune.

1470. Indépendamment des trois grandes équations, & des 9 petites dont j'ai tâché de donner une idée générale, il y en a encore quelques-unes que M. Mayer dit avoir réunies aux précédentes (quand il a pu les assujettir à un même argument) sur-tout à l'équation de l'anomalie moyenne; il y en a d'autres enfin qu'il a regardées comme négligeables par leur petitesse, ou dont il n'a pu détermier assez exactement la véritable quantité par les observations; M. Clairaut emploie plus de vingt équations, mais il y en a plusieurs qui reviennent à une partie de celles qui sont dans les tables de Mayer.

1471. M. Mayer au moyen de ces 10 petites équations, combinées & ajustées sur 200 observations de la lune, tant de ce siècle-ci que du précédent, étoit venu à bout dès 1753 de représenter ces observations avec la précision la plus grande qu'on eût encore obtenue: à peine sur ce grand nombre s'en trouvoit-il dix dont le calcul s'écarta d'une minute & demie; aucune des erreurs ne montoit à deux minutes, & le nombre de celles qui n'alloient qu'à quelques secondes étoit considérablement le plus grand; M. de Chaligny ayant pris la peine de calculer pour moi sur ces tables 104 obser- Exactitude des tables de Mayer.

vations, faites depuis le 15 Septembre 1760 jusqu'au 31 Décembre 1761, n'en trouva que 6 où l'erreur fût au-delà d'une minute, il n'y en avoit qu'une dont l'erreur étoit de 1′ 52″, & une de 1′ 19″. Si l'on considère ensuite la simplicité & la commodité de ces tables, on ne sera pas surpris que je les aie préférées jusqu'ici aux autres tables de la lune, pour mes calculs annuels de la connoissance des temps ; c'est par la même raison que je les avois insérées dans la connoissance des temps de 1761, & dans la première édition de cette astronomie ; le P. Hell, M. Maskelyne, M. de Charniere & M. l'Abbé de Rochon les firent encore imprimer dans d'autres ouvrages ; mais celles qui se trouvent dans cette nouvelle édition & qui viennent d'être imprimées à Londres sont encore plus parfaites (1460).

1472. Ces nouvelles tables ne sont pas exactement conformes aux équations que M. Mayer avoit données dans sa théorie, qui vient d'être imprimée à Londres avec les mêmes tables, parce qu'il avoit corrigé les équations, même après avoir envoyé sa théorie à Londres. Voici les équations telles qu'elles résultent des tables, que j'ai décomposées pour donner séparément celles qui sont réunies ensemble dans une même table.

Pour former les argumens de ces équations, on commence par chercher le vrai lieu du soleil, par les élémens qui ont été donnés ci-devant (1278, 1312, 1330), ensuite le lieu moyen de la lune de son apogée & de son nœud (1480) pour le moment donné ; le lieu de l'apogée retranché du lieu moyen de la lune donne son anomalie moyenne ; on applique ensuite à cette anomalie moyenne de la lune l'équation annuelle qui vient des inégalités de l'apogée = 23′ 12″ sin. anom. moy. ☉, & au supplément du nœud son équation annuelle — 8′ 50″ sin. anom. ☉ ; mais on n'emploie l'anomalie de la lune corrigée aussi bien que le nœud corrigé, que pour la onzième équation pour laquelle on corrige encore l'anomalie avec toutes les dix pre-

mières équations ; pour la douzième, on applique à la distance de la lune au soleil même la onzième équation ; pour la treizième on employe la longitude corrigée par la douzième, & pour la quatorzième on employe la longitude vraie de la lune dans son orbite.

TABLE I. Equat. ann.	+	11′ 16″	sin. anomalie moyenne du ☉
	−	0 3	sin. 2 anomalie moy. ☉
II.	−0	0 54	sin. 2 distance moy. ☾☉ + anomalie moy. ☉
III.	−0	1 9	sin. 2 dist. moy. ☾☉ − anomalie moy. ☉
IV.	+0	0 57	sin. 2 dist. moy. ☾☉ + anom. moy. ☾
V. Evection.	−1	20 33	sin. 2 dist. moy. ☾☉ − anom. moy. ☾
	+	0 36	sin. 4 dist. moy. ☾☉ − 2 anom. moy. ☾
VI.	+	2 9	sin. arg. évection + anom. moy. ☉
VII.	+	0 49	sin. arg. évection − anom. moy. ☉
VIII.	+	0 34	sin. anom. moy. ☾ − anom. moy. ☉
IX.	+	0 58	sin. 2 dist. moy. ☾☉ − 2 arg. moy. de latit. ou sin. 2(☊ − ☉)
X.	+	0 16	sin. dist. moy. ☾☉ − anom. moy. ☾, ou sin. (apog. ☾ − ☉)
	−	0 58	sin. 2 dist. moy. ☾☉ − 2 anom. ☾, ou sin. 2 (ap. ☾ − ☉)
XI. Equation de l'orb.	−6	18 15	sin. anom. ☾ corrigée par les équ. précéd. & par son éq. A.
	+	12 58	sin. 2 anom. ☾
	−	37	sin. 3 anom. ☾
XII. Variat.	−	1 57	sin. dist. ☾☉ corrigée par les équations précédentes.
	+	35 43	sin. 2 dist. ☾☉
	+	2	sin. 3 dist. ☾☉
	+	10	sin. 4 dist. ☾☉
XIII.	+	1 23	sin. 2 arg. latit. corrigée − anomal. corrigée.
XIV. Réduct.	−	6 43	sin. 2 argum. latit. (1130)
XV. Nutation.	−	0 18	sin. longit. moy. ☊ (2863)

1473. On pourra voir dans la seconde édition des tables de M. Clairaut, faite en 1765, une semblable formule, dans laquelle on n'emploie que les longitudes moyennes du soleil & de la lune, ce qui en rend l'usage plus

facile, mais le nombre des équations eſt un peu plus conſidérable, & j'ignore ſi l'exactitude de ces tables approche de celle que donne la formule précédente.

Réflexions générales.

1474. J'aurois bien ſouhaité de pouvoir donner ici une notion plus diſtincte de toutes ces inégalités de la lune, leur quantité, la maniere dont on les a découvert & dont on peut les conſtater; mais dans tout ce qui s'eſt fait juſqu'ici ſur cette matiere, il y a encore trop d'incertitude & d'obſcurité, M. Clairaut emploie 22 équations, mais les géomètres qui s'en ſont occupés depuis 25 ans, n'ont point donné les détails de leurs procédés, & ne ſont point d'accord ſur les quantités des équations, ſur leur utilité, ſur leur exactitude; il ſe paſſera plus de 50 ans avant qu'on puiſſe donner de pareils détails dans un traité d'aſtronomie, avec de la briéveté & de l'exactitude.

Des tables faites ſur la ſeule théorie.

1475. Les tables de la lune données par Képler, Horoccius, Flamſteed, Caſſini & Mayer, ont pour fondement les obſervations mêmes; car quoique Newton eût trouvé à peu-près la forme de ſes équations par le principe de l'attraction, il en avoit déterminé la quantité par les obſervations de Flamſteed; Mayer chercha de même dans la théorie & les calculs de M. Euler la forme de ſes tables, mais il paroît qu'il les ajuſta ſur les obſervations de M. Bradley, à force de tentatives, d'eſſais & de calculs.

Cependant le ſeul principe de l'attraction en raiſon inverſe du carré de la diſtance, devroit ſuffire, ce ſemble, pour calculer, ſans le ſecours de l'obſervation, toutes les petites inégalités de la lune; c'eſt ce qu'ont entrepris les plus fameux géomètres de ce ſiècle, M. Euler, M. Clairaut, M. d'Alembert, & pluſieurs autres après eux; mais ils conviennent tous qu'il eſt douteux qu'on puiſſe parvenir à fixer par la ſeule théorie toutes ces petites inégalités. M. d'Alembert, (dans le mercure de Sept. 1757, *pag.* 109), dit que la valeur des coëfficiens des équations lunaires, trouvés par la théorie, eſt encore fort incertaine; il me paroît très-douteux, (ajoute-t-il),

(ajoute-t-il), qu'on puiſſe parvenir à les fixer par la théorie ſeule ; il ne faut pas ſe preſſer d'aſſurer aux tables de M. Mayer l'exactitude aſtronomique ; d'ailleurs il y a employé un tâtonnement fait ſur les ſeules obſervations. M. d'Alembert dit à peu-près la même choſe en pluſieurs endroits de ſes *Recherches*, ſur la néceſſité d'avoir recours aux obſervations pour déterminer ces coëfficiens, (III, 31).

1476. M. Clairaut, dans le journal des ſavans (Déc. 1757), répondit que M. Mayer n'avoit omis dans ſes tables aucune des équations qui ſont eſſentielles pour la longitude de la lune, & qui ne demandent pas une extrême attention dans les calculs de la théorie ; mais cette réponſe même n'indique-t-elle pas que dans les autres équations qu'on peut ajouter à celles de M. Mayer, il reſte quelque doute du côté de la théorie ; je ſais d'ailleurs que M. Clairaut a fait un grand uſage des obſervations pour rectifier les coëfficiens de ſes équations, & qu'il a varié beaucoup ſur la valeur de quelques-unes, ſur-tout de celles qui dépendent de t, $2t - 2y$, z, $y+z$, $2s-y$; t eſt la diſtance de la lune au ſoleil ; y eſt l'anomalie ; s l'argument de latitude ; & z l'anomalie du ſoleil.

On trouvera dans le XXIIe livre la forme & les principes de ces recherches (3468) ; nous n'en ſuivrons pas le détail pour chacune des inégalités de la lune, parce que ce détail eſt prodigieux, & qu'il exigeroit des volumes : d'ailleurs ceux qui ont eu la conſtance de les faire, n'ont pas encore pû ſe déterminer à les publier ; on trouvera tout ce qui s'eſt fait là-deſſus dans trois ouvrages que nous allons indiquer, qui ſont de MM. d'Alembert, Clairaut & Euler.

1477. L'ouvrage de M. Euler a pour titre : *Theoria motûs lunæ exhibens omnes ejus inæqualitates, authore L. Eulero, Petropoli*, 1753, *in*-4°. 347 *pag.* La pièce du même auteur qui a remporté le prix de l'académie en 1770, contient ſur la même matiere beaucoup de nouvelles recherches.

1478. L'ouvrage de M. Clairaut est la *pièce qui a remporté le prix de l'académie Impériale des sciences de S. Pétersbourg, proposé en* 1750, *sur la théorie de la lune*, elle fut imprimée à Pétersbourg dès l'année 1752, en 92 *pag. in*-4°. & M. Clairaut en a fait imprimer une nouvelle édition, à Paris chez Desaint & Saillant 1765, avec des tables de la lune.

1479. L'ouvrage où M. d'Alembert a approfondi cette matiere, est intitulé : *Recherches sur différens points importans du Système du Monde*, Ire partie, 1754, *in*-4°. 260 *p.* On y trouve des tables de la lune de M. d'Alembert ; elles ont été publiées de nouveau avec des corrections dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques* en 1762, avec plusieurs nouvelles considérations sur la théorie de la lune. Les volumes suivans de ses recherches & de ses opuscules, contiennent beaucoup de supplémens à ce travail. On peut ajouter à ces trois ouvrages primitifs ceux de Mayer, de Simpson, du P. Walmsley, du P. Frisi, &c. sur la même matiere.

ÉLÉMENS PRINCIPAUX DE LA THÉORIE de la Lune tirés de l'observation selon divers Auteurs.

1480. Mouvement séculaire pour cent années Juliennes, dont 25 sont bissextiles, ou 36525 jours moyens.	Képler & Horoc.	10s	7°	48′	51″
	Newton, Flamsteed & Halley,	10	7	50	25
	la Hire,	10	7	50	1
	Cassini,	10	7	49	52
	Mayer, *an. tab.*	10	7	52	20
	Nouv. tab.	10	7	53	35
Mouvement de l'apogée pour cent années Juliennes.	Képler & la Hire,	3	19	14	16
	Horoccius,	3	19	4	16
	Flamsteed, Halley, & Mayer, *dans les deux éditions*,	3	19	11	15
	Cassini,	3	19	14	16
	Bailly, (*mém. ac.* 1763)	3	19	5	0

Mouvement séculaire du Nœud.	Képler, Horoccius & la Hire,	4s	14°	11°	7″
	Flamst. & Halley,	4	14	11	15
	Cassini,	4	14	11	5
	Mayer, *An. & nouv. tables*,	4	14	11	15
Epoque de la longitude moyenne de la Lune pour 1750.	Képler,	6	8	13	49
	Horoccius,	6	8	12	49
	la Hire,	6	8	18	5
	Flamsteed,	6	8	16	19
	Halley,	6	8	15	19
	Cassini,	6	8	14	55
	Mayer, *Anc. tab.*	6	8	16	53
	Nouv. tab.	6	8	17	19
Epoque ou longitude de l'apogée pour 1750.	Képler,	5	21	30	33
	Horox,	5	20	30	33
	La Hire,	5	20	40	54
	Flamsteed,	5	20	58	52
	Halley,	5	20	58	52
	Cassini,	5	21	1	21
	Mayer, *Anc. tab.*	5	20	56	47
	Nouv. tab.	5	20	55	51
Epoque ou longit. du Nœud pour 1750.	Képler,	9	10	33	14
	Horox,	9	10	15	14
	La Hire,	9	10	21	0
	Flamsteed,	9	10	15	0
	Halley,	9	10	13	59
	Cassini,	9	10	18	8
	Mayer, *An. & nouv. tables*,	9	10	19	9
Equation du centre.	Flamsteed, *moyen.*	6	18	43	
	Euler,	6	18	18	
	D'Alembert, III, 29,	6	18	43	
	Clairaut,	6	18	1	
	Mayer, *Anc. tab.*	6	18	44	
	Nouv. tab.	6	18	32	

Je ne compare pas avec ces tables celles de M. de la Hire, de M. Caſſini, de M. Halley, quant à l'équation de l'orbite & à l'évection, parce que ces deux équations y étoient combinées d'une façon particulière.

L'excentricité moyenne, employée par M. Clairaut, eſt comme dans M. Halley 0,05505, ou 5505 parties, dont la diſtance moyenne contient 100000. Enſuite il la diminuée de $\frac{1}{171}$ pour rapprocher ſa formule des obſervations auxquelles il l'avoit comparée, mais il a conſervé la première dans ſa ſeconde édition *pag.* 59. Cette excentricité donne pour équation 6° 18′ 18″ 4; mais pour trouver celle de Mayer 6° 18′ 32″, il faut ſuppoſer l'excentricité 0,055083, parce que ſa table de l'équation de l'orbite renferme encore quelque partie des perturbations du ſoleil (V. M. d'Alembert, III. 29). L'excentricité, ſuivant. M. Mayer, étoit de 5454, enſuite il l'augmenta de $\frac{1}{300}$ ce qui donne 5472 (Théor. *pag.* 50). Cette excentricité dans une orbite elliptique donneroit pour équation 6° 16′ 3″.

Sur les autres équations de la lune, voyez les articles précédens; ſur la parallaxe de la lune & ſon diamètre, voyez le Livre IXe.

Révolutions. 1481. Les révolutions de la lune, de ſon apogée & de ſon nœud peuvent ſe déduire de leurs mouvemens ſéculaires : en ſuppoſant la préceſſion de 1° 23′ 54″ par ſiècle, & les moyens mouvemens tels qu'ils ſont dans les nouvelles tables (1480), je trouve les révolutions de la manière ſuivante.

Révolution tropique de la lune,	27^j	7^h	43′	4″,65
Révolution ſidérale de la lune,	27	7	43	11,51
Révolution ſynodique,	29	12	44	2,89
Année lunaire de 12 révolutions ſynodiques,	354	8	48	35
Révolution anomaliſtique,	27	13	18	33,92
Révolution par rapport au nœud,	27	5	5	49,17
Révolution tropique de l'apogée 8 ans 311^j ou	3231,	8	34	57, 6
Suivant M. Caſſini, *pag.* 312	3231	8	0	

Révolution sidérale de l'apogée,	$3232^j\ 11^h\ 14'\ 31'',\ 0$
Révolution tropique du nœud 18 années communes & 228^j ou	6798 4 52 52, 3
Suivant M. Cassini, *pag.* 288,	6798 7 0
Révolution sidérale du nœud	6803 2 55 18, 4
Mouvement diurne de la lune par rapport à l'équinoxe,	$13^\circ\ 10'\ 35'',\ 02847365$
Mouvement diurne de l'apogée,	0 6 41, 06981520
Mouvement diurne du nœud,	0 3 16, 38603696

Le mouvement de la lune par rapport aux étoiles fixes étant pris pour unité, celui de l'apogée est 0, 0084522592, & celui du nœud 0, 0040160476, aussi par rapport aux étoiles; c'est celui dont on a besoin dans la théorie de l'attraction.

1482. La distance moyenne de la lune à la terre est de 85393 lieues, (chacune de 2283 toises, ou de 25 au degré) (1718). Distance.

Le diamètre vrai de la lune (1717) nous apprendra que son volume est la 49e. partie de celui de la terre. La masse ou la quantité de la matière de la lune est $\frac{1}{70}$ de celle de la terre, comme nous le dirons en parlant de sa densité dans le livre XXII. (3414). Grosseur.

Accélération du moyen mouvement de la Lune.

1483. L'ÉQUATION SÉCULAIRE qu'on trouvera dans les tables de la lune exprime une accélération qu'on a remarquée depuis long-temps dans les moyens mouvemens de la lune; la durée de sa révolution en mettant à part toutes ces inégalités, est plus courte actuellement de 22 tierces de temps qu'elle n'étoit il y a 2000 ans; ce qui produit un degré d'erreur sur le lieu de la lune quand on le calcule pour l'année 300 avant J. C. en employant le mouvement de la lune qui convient aux observations modernes, c'est-à-dire, $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$ par siècle.

Auteurs qui en ont parlé.

M. Halley sur la fin du dernier siècle fut le premier qui remarqua cette accélération physique dans le mouvement de la lune, (*Philos. transf.* n°. 204 & 218 : il en parla en 1693 & 1695 à l'occasion des observations d'Albategnius & des ruines de Palmyre; Newton dans la seconde édition de ses principes, *pag.* 481, cite M. Halley comme ayant reconnu le premier cette accélération; M. Dunthorn a examiné ensuite cette matière (*Philos. transf.* 1749 & 1750, n°. 491 *pag.* 162); M. Mayer en parle dans le second volume des mémoires de Gottingen, (*Comment. soc. Gotting.* 1752, *pag.* 383); enfin j'ai discuté cette matière avec encore plus de soin & de détails dans les mémoires de l'académie pour 1757, *pag.* 426. Voici en peu de mots le résultat de mes recherches à ce sujet.

1484. Pour connoître l'inégalité du moyen mouvement de la lune entre les anciennes observations de l'an 720 avant J. C. & celles de notre siècle; il faut nécessairement en avoir qui ayent été faites dans un siècle intermédiaire, & l'on en trouve très-peu. Les observations les plus remarquables que l'on puisse y employer sont deux éclipses de soleil observées à Geffa qui étoit à 6 ou 7 milles du Caire, l'an 977 & 978, par les astronomes du Roi Abu-Haly-Almanzor le Sage, qui commandoit en Egypte; ces observations sont dans un manuscrit d'Ibn Junis. Pour représenter ces éclipses j'ai trouvé qu'il falloit supposer le moyen mouvement séculaire de la lune $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 21''$ dans ce siècle-ci, plus grand de $3'\frac{1}{2}$ que dans M. Cassini, & y appliquer une équation séculaire de $9''\ 886$ pour le premier siècle. Mayer qui ne la faisoit que de $7''$ dans ses premières tables la fait de $9''$ actuellement. Cette équation de $9''$ augmente ensuite comme le carré des temps (1166), & devient de $1^\circ\ 26'\ 24''$ pour l'année 700 avant J. C. Cette équation séculaire fait que la durée de la révolution de la lune n'est dans ce siècle ici que de $27^j\ 7^h\ 43'\ 4'',648$, tandis qu'elle étoit de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5'',1386$ il y a 2000 ans.

1485. Je dois cependant avertir que M. Grischow étant à Leyde en 1749, engagea M. Schultens, professeur en langue Arabe à faire la recherche & la traduction du Mss. Arabe, dont ces observations sont tirées ; M. Bevis m'a communiqué cette traduction ; on y trouve des obscurités, & M. Bevis pense même qu'on y a mêlé le calcul avec de véritables observations ; il seroit à souhaiter qu'on s'assurât mieux d'un fait aussi intéressant ; les personnes instruites dans les langues Orientales, & qui n'ont encore presque rien fait pour nos sciences, n'auroient pas de meilleures occasions de rendre leurs études utiles. Il y a dans le même manuscrit une éclipse de lune du 14 Mai 979, qui étoit mal rendue dans la traduction de Skikardus, mais qui s'accorde avec le calcul quand on rectifie la traduction. Incertitude à ce sujet.

Au reste la nécessité de cette équation séculaire paroît être prouvée encore par les observations faites depuis 60 ans ; en effet, M. Mayer a trouvé le mouvement pour 60 ans de $1^s\ 10^\circ\ 44'\ 9''$, plus grand de deux minutes que ne le donnent les anciennes observations. Toutes les éclipses du dernier siècle s'accordent à la minute avec cette accélération, tandis que les erreurs vont à 2 ou 3 minutes quand on employe le mouvement moyen des autres tables. Enfin 42 observations de M. de la Hire calculées avec soin par M. de la Caille & par M. Bailly indiquent qu'il faut ajouter environ $38''$ au mouvement pour 60 ans établi par M. Mayer dans ses premières tables (*Mém. acad.* 1763, *pag.* 24), & dans les nouvelles tables Mayer a effectivement ajouté $45''$. Ainsi l'équation séculaire est de $9''$ pour le premier siècle ou de 1° pour 2000 ans, & le mouvement moyen pour le commencement du 18e siècle est de $4^s\ 9^\circ\ 23'\ 5''$ par année, ce qui feroit $10^s\ 7^\circ\ 53'\ 35''$ par siècle s'il étoit uniforme pendant cent ans.

DES NŒUDS ET DE L'INCLINAISON DE L'ORBITE LUNAIRE.

1486. L'ORBITE de la lune est inclinée sur l'écliptique, de même que celles de toutes les autres planètes (1116); ainsi la lune traverse l'écliptique deux fois dans chaque révolution, & sept jours après avoir traversé l'écliptique dans un de ses nœuds elle s'en éloigne de 5 degrés : sans cette inclinaison nous aurions tous les mois une éclipse de soleil le jour de la conjonction, & une éclipse de lune le jour de l'opposition; mais au contraire il y a des années entières où il n'arrive aucune éclipse de lune (par exemple, en 1763); parce qu'au moment de chaque opposition la lune est trop éloignée de son nœud, & se trouve par conséquent au-dessus ou au-dessous de l'écliptique où restent toujours le centre du soleil, & l'ombre de la terre.

LE NŒUD ASCENDANT de la lune où celui par lequel elle traverse l'écliptique en s'avançant vers le nord s'appelle quelquefois *la tête du dragon*, & se désigne par ce caractère ☊ : le nœud descendant ou queue du Dragon par celui-ci ☋.

1487. Ce qu'il y a de plus remarquable dans les nœuds de la lune c'est la promptitude de leur mouvement; si la lune traverse l'écliptique dans le premier point du Bélier ou dans le point équinoxial (comme cela arrivoit au mois de Juin 1764) dix-huit mois après c'est dans le commencement des poissons qu'elle coupe l'écliptique, c'est-à-dire, que son nœud a rétrogradé de 30 degrés ou d'un signe entier; & il fera de même tout le tour du ciel dans l'espace de 18 années communes 228 jours $4^h\ 52'\ 52''$. Ce mouvement des nœuds fut aisé à reconnoître en voyant la lune éclipser par exemple la belle étoile du cœur du Lion ou *Regulus* qui est sur l'écliptique même : quand la lune éclipse *Regulus* (comme cela arrivoit au mois de Juin, 1757) elle

Révolution des Nœuds.

elle est évidemment dans son nœud ; mais quelques années après ; on voit qu'au lieu d'éclipser *Regulus* elle passe 5° plus haut ou plus bas, au nord ou au midi de l'étoile : donc le nœud de l'orbite lunaire n'est plus alors au point de l'écliptique où se trouve *Regulus* ; mais à 90° degrés de-là ; il en est de même des autres étoiles. Toutes les fois que la lune a été en conjonction avec une étoile, de manière à en passer fort près ; elle se trouve le mois suivant plus éloignée de l'étoile, & toujours de plus en plus. Au bout de 19 ans on la voit revenir par les mêmes points du ciel & couvrir les mêmes étoiles, ce qui prouve assez que le nœud de la lune fait le tour du ciel dans cet espace de temps.

1488. Les éclipses de lune sont de la même grandeur quand la lune est à la même distance de l'écliptique ou à la même distance de son nœud (1786). *Hipparque* ayant comparé entr'elles des éclipses de lune observées depuis les Chaldéens jusqu'à lui, trouva que dans l'espace de 5458 mois lunaires la lune avoit passé 5923 fois par son nœud. Cela lui servit à trouver le mouvement diurne de la lune par rapport à son nœud de 13° 13′ 45″ 39‴ $\frac{2}{3}$, (Riccioli, *Almag. tom. I, pag.* 252), & ce résultat s'est trouvé fort exact : car, suivant Boulliaud (*Astron. philol. pag.* 154), il est de 13° 13′ 45″ 39‴ 38^{IV}, & suivant Riccioli 13° 13′ 45″ 29‴ 28⁗ en y employant deux observations bien choisies. Cet élément est si facile à déterminer par les éclipses de lune observées (1419) & comparées avec les nôtres, qu'il n'y a là-dessus aucune incertitude. J'ai donné ci-dessus les résultats de différentes tables pour le mouvement séculaire du nœud (1480), dans celles de Mayer, il est de 4^{s} 14° 11′ 15″ pour cent années Juliennes, outre les cinq révolutions completes, par rapport aux équinoxes. Mouvement par rapport au Nœud.

1489. Le mouvement total du nœud en 100 ans par rapport aux équinoxes est de 6963075″ & de 6958041″, par rapport aux étoiles fixes, celui de la lune est de 1732559381″ ; d'où il est aisé de conclure

que le mouvement moyen de la lune par rapport aux étoiles étant pris pour unité, celui de son nœud est égal à la fraction décimale 0, 0040160476 dont le logarithme est 7, 6037988; le mouvement de la lune par rapport à son nœud est donc 1, 0040160476. La révolution de la lune par rapport au nœud se trouveroit en divisant par ce dernier nombre la révolution sydérale 27j 7h 43′ 11″ 51; car la révolution par rapport aux étoiles est à la révolution par rapport au nœud, comme le mouvement par rapport au nœud est au mouvement par rapport aux étoiles. On la trouvera aussi en disant : la somme des mouvemens séculaires de la ☾ & du nœud 1739517422″, est à un siècle comme 360° sont à un quatrième terme 2351149″ 1709, ainsi cette révolution de la lune par rapport au nœud qui étoit de 27j 5h 5′ 36″ suivant Riccioli, est selon nous de 27j 5h 5′ 49″ 1709.

Révolution par rapport au Nœud.

1490. L'orbite de la lune fait avec l'écliptique un angle d'environ cinq degrés, c'est-à-dire, que la lune lorsqu'elle est à 90° de ses nœuds a environ 5° de latitude; mais cette plus grande latitude qui n'est que de 5° dans les nouvelles lunes ou les pleines lunes qui arrivent à 90° des nœuds, se trouve de 5° 18′ dans les quadratures, lorsquelles sont observées de même à 90° des nœuds, c'est-à-dire, que l'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus petite dans les syzygies, & la plus grande dans les quadratures; Ptolomée ne connoissoit pas cette différence : il supposoit l'inclinaison constante & toujours de 5°. Copernic lui-même (*Lib. IV. cap.* 4), n'avoit pas examiné la chose de plus près. Tycho-Brahé fut le premier qui fit cette remarque importante pour la théorie de la lune; & après avoir découvert la troisième inégalité de la lune par ses observations (1445), il découvrit aussi le changement de l'inclinaison, & l'inégalité du mouvement des nœuds de la lune, comme il le dit à la 26e. page du petit appendix que j'ai déja cité (1442).

1491. On s'est persuadé mal à propos, dit Tycho,

que les limites de la plus grande latitude de la lune étoient toujours les mêmes & alloient constamment à 5°. Ptolomée, Albategnius, Alphonse, ont été suivis en cela par Copernic avec trop de confiance, comme dans plusieurs autres occasions : on a eu tort de croire aussi que les nœuds de la lune avoient un mouvement uniforme & régulier. Des observations faites depuis quelques années avec le plus grand soin, nous ont forcé d'abandonner les anciennes traditions sur lesquelles nous avions compté jusqu'alors ; nous avons trouvé que dans les nouvelles & pleines lunes la latitude de la lune est de 4° 58′½, à peu-près comme l'établissoit Ptolomée ; mais dans les quadratures elle va jusqu'à 5° 17′½, & nous nous en sommes assurés par des observations exactes & multipliées faites dans les limites australes & boréales, & dans les deux tropiques, en tenant compte des réfractions & des parallaxes. Inégalité découverte par Tycho.

1492. Tycho reconnut aussi dans les nœuds de la lune une inégalité qui dans les nouvelles & pleines lunes n'étoit pas sensible, aussi elle n'avoit pas été remarquée par les anciens qui n'observoient presque jamais la lune, si ce n'est dans les éclipses ; mais dans les autres situations il trouvoit 1° 46′ de différence sur le lieu du nœud, ce qui faisoit environ 12 minutes de plus ou de moins sur la latitude de la lune aux environs des nœuds. Inégalité du Nœud.

1493. Enfin Tycho vit que ces deux inégalités de l'inclinaison & du nœud pouvoient se représenter à la fois par le mouvement du pole de l'orbite lunaire dans un petit cercle tel que *ECFG* (*fig.* 85), dont le diamètre *GC* étoit de 19′ ; le centre *D* de ce petit cercle étant supposé à une distance *DA* du pole *A* de l'écliptique égale à 5° 8′ qui est la moyenne inclinaison ou la moyenne distance des poles de l'écliptique & de l'orbite de la lune ; c'est-à-dire, que suivant Tycho l'arc *AD* est de 5° 8′. L'exactitude de cette détermination est remarquable, car l'inclinaison a été reconnue de 5° 8′ 52″ par les plus récentes observations, & la Maniere de représenter ces deux effets. *Fig.* 85.

Fig. 85. valeur de GD 8′ 49″; ce qui diffère à peine des quantités trouvées par Tycho-Brahé. Le pole de l'orbite lunaire est supposé se mouvoir sur la circonférence GEC, de manière qu'il soit en G dans les syzygies, en C dans les quadratures, en F dans les octans; son mouvement étant proportionnel au double de la vraie distance de la lune au soleil; cela supposé en calculant le triangle sphérique ADF, on trouve que l'angle DAF est de 1° 46′; c'est la plus grande équation du lieu du pole D, & par conséquent du lieu du nœud de la lune sur l'écliptique, éloigné toujours de 90° du lieu du pole (1353). Dans un autre point comme H, l'angle HAG sera aussi l'équation du nœud, & AH la distance actuelle des poles de l'écliptique & de l'orbite lunaire ou l'inclinaison de l'orbite de la lune pour le temps donné, l'angle ADH étant toujours égal au double de l'élongation de la lune ou de ce qui lui manque pour aller à 180°, c'est-à-dire, au double de la distance de la lune à sa conjonction ou à son opposition.

1494. Tycho-Brahé n'apperçut pas qu'il résultoit de cette hypothèse & de cette construction une manière très-simple de corriger la latitude de la lune par une seule équation; Képler, Newton, Halley, & M. Euler même continuèrent d'employer une équation pour l'inclinaison & une pour le nœud, d'où ils tiroient ensuite la latitude de la lune par la résolution d'un triangle sphérique; c'est T. Mayer qui dans ses premières tables de la lune sut prendre une voie plus simple : je vais la démontrer ici, car l'auteur ne nous en a point laissé de démonstration.

Equation de la latitude. 1495. Soit L la lune, E le pole de son orbite dans un temps quelconque; ensorte que LE soit de 90°, parce que le pole d'un cercle est toujours éloigné de sa circonférence de 90°; l'arc LD ou la distance de la lune au pole moyen est plus ou moins grande que la distance au pole vrai, de toute la quantité de l'équation de la latitude que nous cherchons. Si du pole moyen D on abaisse le petit arc perpendiculaire DM sur le

cercle LE prolongé en M; on aura $LM = LD$, & par conséquent EM sera la différence cherchée entre ou entre la latitude vraie & la distance au pole moyen; que AD est le cercle de latitude qui passe par les poles de l'orbite de la lune, & qui lui est perpendiculaire aux points de la plus grande digression; l'arc de cercle DB perpendiculaire au premier sera celui qui passe par les nœuds de la lune, & l'angle LDB sera la distance de la lune à son nœud ou l'argument de latitude mesuré au pole de son orbite; ce qui revient au même que s'il étoit compté sur l'orbite même de la lune. L'angle ADM est égal à l'angle LDB; car si des angles droits ADB & LDM on ôte la partie commune MDB, on aura les restes égaux ADM & LDB : ainsi ADM est aussi égal à l'argument de latitude; mais ADE, suivant l'hypothèse & les observations de Tycho (1493) est égal au double de la distance de la lune au soleil, donc MDE est égal au double de cette distance moins l'argument de latitude. Le petit triangle rectangle DME sensiblement rectiligne, donne, suivant la règle ordinaire de la trigonométrie rectiligne, $ME = ED$ sin. MDE; Règle. donc *l'équation de la latitude de la lune est égale à* $8' 49''$ *multipliées par le sinus de la double distance de la lune au soleil moins l'argument de latitude.*

1496. Il résulte aussi de ce changement dans les nœuds & l'inclinaison de l'orbite lunaire une inégalité dans la réduction à l'écliptique; mais M. Mayer l'a renfermée dans la table de la *variation*, parce qu'on a reconnu qu'en diminuant de quelques secondes la variation, on produisoit le même effet; M. d'Alembert remarque dans sa théorie de la lune, *pag.* 97, que les quantités qui proviennent de l'équation du nœud & de celle de l'inclinaison, se détruisent mutuellement, à l'exception d'une équation de 23 secondes qui a le même *argument* que la variation de la lune.

1497. Puisque l'hypothèse que je viens d'expliquer est la seule employée dans les tables que je publie, je

ne dirai qu'un mot de la manière dont M. Newton, & après lui Flamsteed, Halley & tous les auteurs qui ont suivi, ont considéré ces variations de l'orbite de la lune étoit sujette à un balancement alternatif de 9°, & le nœud à une inégalité de 1° 29′ 39″, il considéroit ces deux choses séparément. Dans cette hypothèse, on trouve que lorsque le soleil est dans le nœud de la lune, ce nœud a moins de mouvement, car son équation augmente en plus, jusqu'à ce que le soleil se trouve à trois signes du nœud, alors l'équation additive est de 1° 29′ 39″, elle cesse alors d'augmenter, & le mouvement du nœud est le même que s'il n'y avoit point d'inégalité, c'est-à-dire, égal au mouvement moyen.

1498. L'inclinaison de l'orbite lunaire est la plus grande quand le soleil est dans le nœud, alors Newton la suppose de 5° 17′ 30″, elle est au contraire la plus petite ou de 4° 59′ 30″, lorsque le soleil répond aux limites de la plus grande latitude, & qu'il est à 90° des nœuds de la lune. C'est ainsi que Newton changeoit l'angle d'inclinaison & le lieu du nœud de la lune; après quoi connoissant la distance de la lune à son nœud, & l'angle d'inclinaison, il cherchoit la réduction à l'écliptique & la latitude. On verra dans le XXIIe. livre (3515) le principe de ces singularités par le moyen de la loi de l'attraction, il ne s'agit ici que de l'hypothèse astronomique trouvée par le moyen des observations de Tycho, & adoptée par Newton à cause de sa conformité avec les loix qu'il avoit reconnues.

1499. J'ai dit que Newton avoit aussi introduit une équation annuelle (1451), de 9′ 27″ pour le nœud; elle est plus petite que celle de l'apogée, dans le même rapport que le moyen mouvement du nœud est plus petit que celui de l'apogée; mais l'équation du nœud est soustractive quand les autres sont additives, parce que le mouvement du nœud se fait en sens contraire du mouvement de la lune & de celui de son apogée; ces équations sont

aussi employées dans les tables de M. Mayer que l'on trouvera dans ce livre.

1500. Enfin le calcul rigoureux de l'attraction du soleil a fait voir que cette grande inégalité de la latitude ne pouvoit représenter qu'à une ou deux minutes les latitudes observées, & que les différentes manieres dont s'exerce l'attraction du soleil sur la lune, donnoient lieu à neuf autres équations qui méritoient d'entrer dans le calcul. Voici les nombres sur lesquels sont faites les onze tables que nous publions d'après lui ; ils ne sont pas conformes à la théorie imprimée, parce ce qu'il paroît que Mayer corrigeoit encore ses tables en 1762, même après avoir envoyé à Londres sa théorie. On suppose dans ces tables que l'argument de latitude a été formé en ôtant du vrai lieu de la lune dans son orbite, le lieu du nœud corrigé, & la distance de la lune au soleil en ôtant du vrai lieu de la lune dans son orbite, le vrai lieu du soleil.

Ces inégalités dans les latitudes de la lune sont assez petites pour qu'on puisse souvent les négliger, sans faire sur la latitude de la lune des erreurs de plus d'une minute & demie ; nous allons cependant rapporter ici la formule qui exprime toutes les équations contenues dans les nouvelles tables.

TABLE I. Latitude.	5° 8′ 46″	sin.	Argument de latitude.
	— 6	sin.	3 Argumens de latitude.
II.	+ 8 49	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Argument de latitude.
III.	+ 2	sin.	Argument latitude — anom. ☉
IV.	— 17,4	sin.	Argument latit. — anom. moy. ☾
V.	— 24,1	sin.	Argum. latit. — 2 anom. moy. ☾
VI.	+ 2,7	sin.	Argum. latit. — 3 anom. moy. ☾
VII.	— 8,3	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Argum. latit. + anom. ☉
VIII.	— 3,7	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Argum. latit. — anom. ☉
IX.	— 2,2	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Arg. latit. + anom. moy. ☾
X.	+ 15,0	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Arg. latit. — anom. moy. ☾
XI.	— 6,0	sin.	2 dist. ☾ ☉ — Arg. latit. — 2 anom. moy. ☾

Parmi les autres équations que donne la théorie, il n'y en a aucune qui passe 2″, & l'auteur les a négligées dans ses tables ; il paroît même que dans les XI précédentes, on en pourroit négliger 5 ou 6, quant à présent.

DE LA PERIODE CALDEENNE de deux cents vingt-trois Lunaisons.

1501. Nous avons dit, (330, 1425) que les anciens astronomes, long-temps avant Hipparque, avoient apperçu le retour constant des éclipses au bout de 223 mois lunaires, ou de 18 ans & dix jours, (*Almag.* IV. 2). Pline le Naturaliste dit aussi qu'il est certain que les éclipses retournent dans le même ordre dans l'espace de 223 mois, (*L. II. cap.* 13). C'est pourquoi M. Halley appelle cette période *la Période de Pline*, (*Philos. Trans.* 1692. *n°.* 194. *Acta Erudit.* 1692. *pag.* 529).

Les éclipses ne pouvoient revenir dans le même ordre, malgré les inégalités de la lune, à moins que ces inégalités n'eussent aussi la même période, d'où M. Halley conclut que les inégalités & les erreurs des tables, quoiqu'imparfaitement connues, devoient cependant revenir les mêmes au bout de 223 lunaisons, ensorte qu'une erreur observée devoit suffire pour annoncer celle qui auroit lieu 18 ans après, malgré l'imperfection des tables de la lune. C'est cette période que M. Halley appelle aussi *Saros*, ou *Période Caldaïque* ; mais au sujet du Saros, voyez l'art. 1566.

M. Halley dès l'année 1684 avoit fait usage des 18 ans pour prédire les éclipses : on avoit observé le 22 Juin 1666, V. Style, une éclipse de soleil, à Londres & à Dantzick ; il s'en servit pour prédire celle du 2 Juillet 1684, en y employant la même erreur qu'il avoit reconnue dans les tables pour le 22 Juin 1666, & sa prédiction se trouva vérifiée à la minute ; enfin, il trouva que même hors des syzygies, les erreurs des tables se retrouvoient presque les mêmes ; il en conclut que les défauts

défauts de la théorie avoient une régularité, & pour le reconnoître parfaitement, il forma dès-lors le dessein d'observer la lune sans interruption pendant une période entiere de 18 ans (588).

1502. On trouve dans les tables de M. Halley un catalogue des éclipses de lune & de soleil, arrivées depuis 1701 jusqu'en 1718; il donna pour chacune le temps moyen du milieu de l'éclipse, l'anomalie moyenne de du soleil, l'argument annuel, & la latitude de la lune. Pour que cette table pût servir à trouver les éclipses dans d'autres périodes, il y joignit deux autres tables pour corriger la période; parce qu'en effet le retour n'est pas assez exact pour qu'on puisse en tirer des conclusions certaines. Boulliaud en avoit fait la remarque long-temps avant Halley; l'éclipse de lune du 31 Janvier 1580 avoit été totale, celle du 10 Février 1598, ne fût que de $11\frac{1}{2}$ doigts; celle du 14 Mars 1634 ne fut que de 11 doigts; celle du 27 Avril 1706 de $5\frac{1}{2}$; celle du 29 Mai 1760 de trois cinquièmes de doigt: enfin le 10 Juin 1778, après dix périodes accomplies, il n'y aura plus d'éclipse, parce que la période ne ramene pas la lune à même distance du nœud. (M. le Gentil, *Mém. Acad.* 1756, *pag.* 58). Par la même raison, les erreurs des tables doivent devenir différentes après quelques périodes: le 18 Octobre 1641, celle des tables de Flamsteed étoit, suivant M. le Gentil, de 2′ 6″ en excès, mais le 23 Décembre 1749, elle étoit de 1′ 11″ en défaut; l'erreur des tables a donc varié de 3′ 17″ dans l'espace de 6 périodes, ce qui fait 33″ de changement pour chacune. De même l'éclipse du 20 Janvier 1647, comparée avec celle du 27 Mars 1755, donne 45″ pour la différence de l'erreur des tables de Flamsteed à la fin de chaque période. Ainsi quoique cette maniere de connoître & de prédire l'erreur des tables, fût bonne dans le temps où l'on craignoit de la part des tables plusieurs minutes d'erreur, elle est peu nécessaire actuellement, que nous avons des tables dont l'erreur ne passe pas une minute.

Retour des éclipses.

Conclusion.

Du Diamétre de la Lune.

1503. Les anciens qui comme Ptolomée ne pouvoient mesurer le diamètre apparent de la lune qu'avec des pinules, ne pouvoient guère s'en assurer avec précision; Hipparque & Ptolomée se contenterent de dire que le diamètre de la lune dans son apogée étoit égal à celui du soleil, c'est-à-dire, de 30′; mais que dans le périgée il paroissoit plus grand que celui du soleil.

Albategnius dit que le diamètre moyen de la lune est de 32′ 25″, & qu'il varie depuis 29′ 30″ jusqu'à 35′ 20″, Copernic le trouve de 27′ 34″ à 35′ 38″. (*L.* 4. *ch.* 22). Ensorte que le diamètre moyen est de 31′ 36″, nous le trouvons aujourd'hui de 31′ 29″.

Tycho-Brahé voyant que la lune dans les éclipses perdoit cette lumière étrangère qui dans les pleines lunes la fait paroître plus large, établissoit le diamètre moyen de la lune de 26′ 50″ dans les conjonctions, & de 34′ 0″ dans les oppositions (*Progymn. pag.* 134).

Képler, avant la découverte des lunettes, le trouvoit de 32′; mais il étoit dans l'incertitude de 20″ environ (*Astron. pars opt. pag.* 349); quoiqu'il eût discuté cet article fort en détail avec des observations & des méthodes propres à trouver les diamètres du soleil & de la lune, dans cet ouvrage qui a pour titre: *Ad vitellionem paralipomena, quibus astronomiæ pars optica traditur*, 1604, *in*-4°. Mais dans la suite & après l'invention des lunettes d'approche, Képler trouva les diamètres de la lune de 30′ 0″ à 32′ 44″, c'est-à-dire, le diamètre moyen 31′ 22″ (*Epit. astron. Coper. pag.* 861). Horoccius dans sa théorie de la lune le supposoit de 31′ 0″.

1504. Nous voyons dans l'histoire de l'académie des sciences par M. Duhamel que dans l'éclipse de soleil du 2 Juillet 1666, dont les différentes phases furent observées avec soin, dans la maison de M. Colbert, par MM. Huygens, Roberval, Auzout, Frénicle &

Buot ; on reconnut que le diamètre de la lune étoit plus petit que celui du soleil, & que les tables astronomiques le faisoient plus grand, en même-temps qu'elles faisoient le diamètre du soleil plus petit qu'il n'étoit réellement ; ainsi le diamètre de la lune étoit trop grand dans les tables de Képler.

Le 8 Juillet 1666 à $8^h \frac{1}{2}$, la lune étant périgée & en quadrature, son diamètre fut mesuré & trouvé de 33′, & le 22 à 3^h du matin la lune étant apogée, elle avoit 29′ 50″. Ces mesures qui n'avoient plus que quelques secondes d'incertitude étoient beaucoup plus exactes que toutes celles qu'on avoit prises jusques-là, elles furent faites avec des fils placés au foyer d'une lunette suivant la description rapportée en 1667 par M. Galloys dans les éphémérides de la même année, c'est-à-dire, après l'invention du micromètre (2348).

Depuis ce temps-là M. de la Hire, dans ses tables supposa les diamètres de la lune 29′ 30″ & 33′ 30″ ; M. Cassini dans ses tables, 29′ 30″ & 33′ 38″ ; M. le Monnier dans ses institutions astronomiques (*pag.* 184) donne pour les diamètres de la lune 29′ 28″ & 33′ 42″.

1505. Suivant les observations exactes que j'en ai faites avec un héliomètre de 18 pieds, le diamètre moyen de la lune est de 31′ 29″, les extrêmes sont à peu-près 29′ 25″, lorsque la lune est apogée & en conjonction, & 33′ 34″, lorsqu'elle est périgée & en opposition ; mais les différentes inégalités de la lune mettent dans ces diamètres beaucoup de diversités. Il faut bien observer que ce que j'appelle ici *diamètre moyen de la lune*, est un milieu arithmétique entre le plus grand & le plus petit diamètre. L'on ne trouveroit que 31′ 9″, si l'on vouloit prendre la quantité constante à laquelle s'ajoutent toutes les équations, ou les inégalités du diamètre, pour avoir le diamètre actuel dans un temps donné (1712). Diamètre par les dernieres observations.

1506. Les variations observées dans le diamètre de la lune, indiquent celles de sa distance ; aussi la découverte des lunettes d'approche a donné le moyen

de reconnoître exactement les augmentations & les diminutions de la distance de la lune. Non-seulement le diamètre de la lune diminue quand la lune avance vers l'apogée, mais Horroccius trouva vers l'an 1638 que la lune étant apogée, n'étoit pas toujours à même distance de la terre, & qu'elle en étoit plus éloignée lorsqu'elle se trouvoit alors en conjonction ou en opposition; cela lui fit établir cette augmentation d'excentricité dans l'orbite de la lune, qui a lieu, selon lui, toutes les fois que la ligne des apsides concourt avec la ligne des syzygies (1435).

M. Picard fit avec soin ces mêmes observations du diamètre de la lune, pour en conclure ce changement des distances de la lune à la terre; il reconnut que la lune périgée & en quadrature, paroissoit sous un angle plus petit que la lune périgée & en syzygie. Cette augmentation du diamètre de la lune dans les syzygies, vient de deux inégalités dans les distances de la lune, dont nous parlerons à l'occasion de la parallaxe de la lune (1710).

Changement du diamètre.

Elles ont été observées depuis que les micromètres nous ont donné le moyen de mesurer exactement les diamètres de la lune dans ses diverses positions; on a observé que quand l'argument de l'évection étoit de 0 signes, le diamètre étoit diminué de 18″ ou 20″, & que l'argument de l'évection étant de 6 signes, il étoit au contraire augmenté de 18″, quoique la ☾ fût à la même distance de son apogée. On a vu de même par rapport à l'argument de la variation, que lorsqu'il étoit nul, ou égal à 6 signes, le diamètre de la lune augmentoit de 14 ou 15″, & diminuoit d'autant vers 3 ou 9 signes, c'est-à-dire, dans les octans à même distance de l'apogée.

1507. Ces observations faites dans le dernier siècle en Angleterre & en France, étant conformes à la théorie de Newton, c'est-à-dire, à l'effet que doit produire l'attraction du soleil; Newton s'en servit pour

corriger la parallaxe de la lune, par les deux argumens de l'évection & de la variation. Suivant la théorie de M. Mayer, le diamètre de la lune pour un temps quelconque est exprimé par la formule suivante : $31' 9'' - 1' 42'' 3$ cos. anomal. $+ 5'' 4$ cos. 2 anomal. $+ 13'' 7$ cos. 2 dist. ☾ ☉ $- 20'' 2$ cos. (2 dist. ☾ ☉ — anomal. ☾) ; les autres équations sont insensibles ; on peut les trouver en prenant les équations de la parallaxe (1714), car toutes ces équations étant multipliées par $\frac{6}{11}$, donneront les équations correspondantes du diamètre. D'ailleurs lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale de la lune pour Paris, on en conclut le diamètre par le rapport constant de $54' 56''$ à $30'$ (1711).

1508. M. de la Hire crut reconnoître dans le dernier siècle que le diamètre de la lune paroissant sur le soleil, dans les éclipses, paroissoit plus petit de $30''$ que quand sa circonférence étoit lumineuse (*Tabulæ astron. pag.* 41) ; mais M. le Monnier assure que c'étoit par des fautes de calcul (*Mém. acad.* 1748, *pag.* 209). M. le Monnier ayant mesuré le diamètre de la lune sur le soleil le 25 Juillet 1748 à $10^h 18'$ le trouva de $29' 47'' \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, plus grand qu'il ne s'y étoit attendu ; & il reconnut que la diminution proposée par M. de la Hire n'avoit pas lieu. La même chose a été reconnue dans l'éclipse du 1 Avril 1764 : la plus grande phase arriva à $10^h 30' 43''$ à Londres, la distance du bord de la lune à celui du soleil étoit de $2' 26''$, suivant l'observation de M. Short, le diamètre de la lune mesuré horizontalement sur le soleil étoit de $29' 49'' \frac{1}{2}$, & celui du soleil de $31' 59''$; la différence $2' 9'' \frac{1}{2}$ est conforme à celle que j'avois annoncée dans mes calculs de la connoissance des mouvemens célestes ; car le diamètre du soleil, selon moi, devoit être de $32' 1''$, le diamètre horizontal de la lune $29' 34''$, & le diamètre augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon $29' 52''$, la différence est $2' 9''$. Ainsi cette diminution que M. de la Hire croyoit avoir lieu dans les éclipses de soleil ; n'existe point ; l'inflexion de $4'' \frac{1}{2}$ qui a lieu dans

Diminution dans les éclipses.

dans les rayons qui passent sur le bord de la lune ne change rien à son diamètre (1992).

Augmentation par la hauteur.

1509. Lorsque la lune est plus près du zénit, elle est aussi plus près de nous; ainsi son diamètre apparent paroît plus grand dans la même proportion. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 87), *O* un observateur situé à la surface de la terre, *Z* la lune située au zénit de l'observateur; si la distance *ZO* de la lune à l'observateur est plus petite d'un soixantième, que la distance *ZT* de la lune au centre de la terre, le diamètre apparent vu du point *O*, sera plus grand d'un soixantième que le diamètre vu du centre *T* de la terre.

Fig. 87.

De même si la lune est située en *L*, de manière que sa hauteur au-dessus de l'horizon soit égale à l'angle *LOH*, sa distance au zénit étant égale à l'angle *LOZ*, on voit que la distance *LO* sera plus petite que la distance *LT* au centre de la terre; le seul cas où cette augmentation sera nulle, est celui où la lune sera dans l'horizon même en *H*, car alors elle sera presque également éloignée du point *O* & du point *T*; voilà pourquoi l'on appelle DIAMÈTRE HORIZONTAL de la lune, celui qui est vu du centre de la terre, parce qu'il est aussi égal au diamètre que nous observons quand la lune est à l'horizon.

Diamètre horizontal.

Lorsqu'on connoît le diamètre horizontal de la lune, il est aisé de trouver le *diamètre augmenté* à raison de la hauteur sur l'horizon, puisqu'ils sont entre eux comme le côté *LO* est au côté *LT*. Dans le triangle *LOT*, l'angle *OLT* est ce qu'on appelle la *parallaxe de hauteur* (1627); l'angle *LOZ*, ou son supplément *LOT*, qui a le même sinus, est la distance apparente au zénit, l'angle *LTO* est la distance vraie de la lune au zénit, vue du centre de la terre, ou le complément de la hauteur vraie. Dans tout triangle rectiligne les sinus des côtés sont comme les sinus des angles opposés; ainsi le côté *LO* est au côté *TL*, comme le sinus de l'angle *OTL* est au sinus de l'angle *LOT*; donc le diamètre horizontal est au diamètre apparent, comme le

ſinus de la diſtance vraie de la lune au zénit, vue du centre de la terre, eſt au ſinus de la diſtance apparente de la lune au zénit, vue du point *O*.

1510. Ainſi pour trouver le diamètre de la lune augmenté à raiſon de ſa hauteur au-deſſus de l'horizon, on fera cette proportion : *Le coſinus de la hauteur vraie eſt au coſinus de la hauteur apparente, comme le diamètre horizontal eſt au diamètre apparent.* C'eſt la différence entre celui-ci & le diamètre horizontal qu'on appelle *Augmentation du diamètre*, & dont j'ai donné une table fort ample dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, *pag.* 259. On en trouvera une parmi les tables de cet ouvrage. Règle de cette augmentation.

1511. M. de la Caille dit dans ſes leçons d'aſtronomie, que cette augmentation du diamètre de la lune eſt la différence de parallaxe entre le bord ſupérieur & le bord inférieur de la lune; mais cette notion eſt défectueuſe, car elle ne ſauroit s'appliquer au diamètre de la lune meſuré horizontalement, qui cependant eſt augmenté auſſi bien que le diamètre vertical, ſuivant les différentes hauteurs de la lune.

1512. Suivant la démonſtration précédente le diamètre de la lune doit paroître plus petit quand la lune ſe lève, que quand elle eſt parvenue à une certaine hauteur; la lune en s'élevant doit paroître plus grande à nos yeux, & l'obſervation faite avec un inſtrument quelconque prouve ſans ceſſe aux aſtronomes que la lune paroît ſous un angle plus petit quand elle eſt à l'horizon. Cependant un fait généralement reconnu c'eſt que la lune, à la vue ſimple, paroît d'une grandeur extraordinaire lorſqu'on la voit ſe lever à la fin du jour derrière des bâtimens ou des montagnes; il n'y a preſque perſonne qui ne s'imagine la voir alors deux ou trois fois auſſi large que quand elle arrive enſuite à une grande hauteur. C'eſt-là certainement une illuſion optique, & elle a lieu de même pour les autres aſtres; mais il ſuffit de regarder la lune dans une lunette quelconque, dans un tube de papier, & même ſi l'on veut, au travers d'une carte où l'on a fait un trou d'épingle, Grandeur de la Lune à l'horizon.

pour se convaincre que l'augmentation n'est point réelle & que le diamètre de la lune est vu au contraire alors sous un plus petit angle, que lorsque la lune est à une plus grande hauteur.

Regis dans son systême de philosophie (Tom. IV, l. 8), soutenoit que c'étoit un effet de la réfraction; mais au lieu d'étendre les objets, la réfraction les accourcit, & fait paroître les distances plus petites (2246).

Jugement involontaire.

Il est difficile de se former une idée claire de la cause de cette illusion, si ce n'est en admettant avec tous les opticiens ce jugement tacite, commun & involontaire, par lequel nous estimons fort grands les objets que nous jugeons être fort éloignés, en même temps que nous jugeons les objets fort éloignés lorsque nous voyons à la fois beaucoup de corps interposés entre nous & ces objets. Roger Bacon en citant l'optique de Ptolomée, (ouvrage qui s'est perdu pendant les siècles d'ignorance), nous apprend que cet auteur en avoit jugé ainsi; Descartes & le P. Mallebranche (*Recherche de la vér. liv. I.*) l'expliquent de la même manière. Voici donc, ce me semble, le nœud de la difficulté.

1513. La lune se levant à l'horizon derrière une montagne ou à l'extrémité d'une plaine, paroît nécessairement à la suite de plusieurs objets sensibles & variés; au lieu que dans une certaine hauteur on élève la vue pour apperçevoir la lune, & l'on ne voit rien entr'elle & nous qui puisse nous faire juger de sa distance. Dans le premier cas, notre imagination accoutumée à juger de l'éloignement d'un corps par la multitude des objets qui paroissent entre lui & nous, estime la lune fort loin de nous, & cela par habitude, par instinct & par une suite de sa manière d'estimer & de juger des distances. Or un même objet que nous jugerons fort éloigné, sera jugé plus grand que si on le croyoit fort près: ainsi la lune dans l'horizon, estimée à une plus grande distance est jugée plus grande par cette première perception; la réflexion ne suffit pas pour

pour empêcher la liaison de ces deux jugemens, parce que l'habitude continuelle y a mis une dépendance si forte qu'on ne peut plus les séparer : on trouvera d'autres preuves de la vérité de ce jugement habituel & involontaire sur la grandeur des objets, dans le premier volume du grand traité d'optique de Smith, *art.* 160 *& suiv.* Tom. I, *pag.* 111, de l'édition du P. Pezenas, Avignon 1767.

1514. Le Pere Gouye substituoit, ou ajoutoit une autre considération à celle-ci, & je crois qu'elles peuvent aller ensemble & se fortifier mutuellement. Une colonne qui paroît au-devant d'une muraille, ou qui est environnée de plusieurs objets différens, & même une colonne cannelée, semble en général être plus grande que si elle étoit simple & isolée ; les vapeurs de l'horizon & le voisinage de la terre, des montagnes, des arbres, font cet effet sur la lune : & en la faisant paroître plus accompagnée, elles la présentent à notre perception comme si elle étoit d'un plus grand volume. (Histoire de l'acad. 1700, *pag.* 8). Remarque du P. Gouye.

1515. Le diamètre de la lune en ascension droite est la quantité dont diffèrent entr'elles les ascensions droites du bord & du centre de la lune, soit *P* le pole du monde (*fig.* 88), *EQ* l'équateur, *PLA* le cercle de déclinaison qui passe par le centre de la lune & qui marque en *A* l'ascension droite de la lune sur l'équateur ; *PMB* le cercle de déclinaison qui passe par le bord de la lune *M*, & qui touchant le limbe de la lune va déterminer en *B* l'ascension droite du bord de la lune ; *AB* est donc le demi-diamètre de la lune en ascension droite, & suivant ce qu'on a vu pour le soleil (894), il faut *diviser le demi-diamètre horizontal par le cosinus de la déclinaison vraie de la lune, pour avoir le demi-diamètre en ascension droite.* Diamètre en ascension droite. *Fig.* 88.

1516. Lorsqu'on veut savoir le temps que le diamètre de la lune emploie à traverser le méridien, *on convertit en temps lunaire le diamètre de la lune en ascension droite.* Je suppose que le retardement diurne de la Temps que la Lune met à passer le méridien.

lune par rapport au soleil soit d'une heure, c'est-à-dire, qu'elle emploie 25 heures de temps moyen à parcourir 360 degrés & à revenir au méridien, le jour pour lequel on calcule; je suppose aussi que son diamètre en ascension droite soit de 30 minutes, il ne s'agit que de savoir combien la lune emploîra de temps à parcourir 30′ par son mouvement diurne à raison de 25 heures pour 360 degrés; on fera donc cette proportion: 360° sont à la révolution diurne, 25 heures, comme le diamètre en ascension droite 30′, est au temps cherché qu'on trouvera de 2′ 5″, c'est ce que la lune emploie à traverser le méridien. Les astronomes en font un usage fréquent dans les observations de la lune, lorsqu'après avoir observé le passage du premier bord de la lune au méridien ils veulent savoir à quelle heure le centre de la lune y a passé: (art. 3944); car alors il faut ajouter au temps où le premier bord aura passé celui que le demi-diamètre aura dû employer à traverser le méridien, pour avoir le passage du centre de la lune par le méridien. On trouve aussi le temps qui répond au demi-diamètre de la lune, par le moyen de deux tables, qui seront parmi celles de la lune, à la fin de cet ouvrage. L'une contient la réduction du demi-diamètre horizontal en temps lunaire, suivant les divers retardemens de la lune d'un jour à l'autre, & les diverses grandeurs du demi-diamètre de la lune; l'autre est une table de ce qu'il faut y ajouter à raison de la déclinaison de la lune, en conséquence de la règle que nous avons donnée (1515), de diviser le diamètre par le cosinus de la déclinaison, pour avoir l'espace qui lui répond sur l'équateur, & en conclure le temps qu'il emploie à passer; on y voit, par exemple, que si le diamètre de la lune est de 33′ 36″, & le retardement diurne de 62′ ou d'une heure 2′, il faudra 70″ ou 1′ 10″ au demi-diamètre de la lune pour passer le méridien; il suffit pour construire cette table de faire la règle de trois que nous venons d'indiquer. La seconde table contient la quantité qu'il faudroit ajouter à ce même temps, si la

lune au lieu d'être dans l'équateur se trouvoit à une certaine déclinaison : ainsi la déclinaison de la lune étant supposée de 29°, & le temps calculé ci-dessus de 1′ 10″, on trouve dans la table 10″ qu'il faut encore y ajouter, & l'on aura 1′ 20″ pour le temps qu'a employé le demi-diamètre de la lune à passer le méridien. La partie que renferme cette seconde table est la différence entre le diamètre *LM* de la lune (*fig.* 88), & la quantité *AB* qui lui répond dans l'équateur, cette différence étant convertie en temps. Fig. 88.

1517. Quelques astronomes ont cru que pour trouver ainsi le temps du diamètre, il falloit auparavant augmenter le diamètre de la lune, à raison de sa hauteur au-dessus de l'horizon (1510), au lieu qu'il faut prendre le diamètre horizontal, ou vu du centre de la terre : en effet, lorsque le bord de la lune paroît toucher le méridien, l'observateur qui seroit au centre de la terre ou celui qui seroit à la surface, étant tous deux dans le même plan & dans le même méridien, que le bord de la lune, voient tous deux à la fois & sans aucune différence, le bord de la lune dans le méridien ; je puis dire la même chose du bord suivant ; ainsi le temps que la lune emploie à traverser le méridien, seroit absolument le même, vu du centre ou vu d'un point quelconque de la surface de la terre, situé sous le même méridien, & il ne dépend en aucune façon de la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon.

Un savant, qui même dans un livre imprimé en 1769 avoit fait cette méprise, me faisoit, par lettres, cette objection ; quand j'observe le bord de la lune dans le méridien, « je veux savoir combien le centre de la lune » en est éloigné, mais cette distance dépend du demi-» diamètre de la lune, tel qu'il paroît alors, il faut » donc employer dans le calcul le demi-diamètre ap-» parent, ou augmenté à raison de sa hauteur sur » l'horizon ».

Je réponds en prouvant que la distance du centre de la lune au méridien en temps, ne dépend que de la

grandeur apparente du demi-diamètre, vu du centre autour duquel se fait le mouvement : un arc de 15′, vu du centre de la terre, traverse le méridien en une minute de temps ; si je m'approche de l'objet assez pour qu'il me paroisse de 30′ au lieu de 15, il n'en traversera pas moins le méridien en une minute, parce qu'en même temps que l'objet me paroîtra doublé par sa proximité, la vîtesse de son mouvement sera aussi doublée, & les 30′ traverseront le méridien dans le même temps que les 15′ employoient à le traverser auparavant.

Applatissement de la Lune.

1518. Cette méprise occasionna celle de M. Godin qui crut trouver la lune sensiblement applatie, c'est-à-dire, le diamètre vertical du nord au sud, plus petit que le diamètre mesuré horizontalement d'orient en occident. Dans le commerce astronomique que M. le Docteur Adelbulner faisoit imprimer à Nuremberg, (*tom.* II, *pag.* 81), on trouve l'extrait d'une lettre de M. Celsius, astronome Suédois, où il étoit dit que MM. Cassini & Godin avoient trouvé par leurs observations que le diamètre vertical de la ☾ étoit plus grand de 30″ que le diamètre horizontal. M. Celsius entreprenoit d'en rendre raison par la parallaxe, mais il se trompoit ; cela provenoit uniquement de ce que M. Godin faisoit au diamètre horizontal de la lune, trouvé par la mesure du temps une correction qu'il ne devoit point faire, & cela rendoit ce diamètre horizontal plus petit que le diamètre vertical.

Suivant les loix de la force centrifuge, le globe de la lune doit être applati, en effet, du nord au sud, à cause de la rotation de la lune sur son axe ; il est probable aussi que la lune est alongée vers le centre de terre (3183). Nous parlerons du diamètre absolu de la la lune après que nous aurons déterminé sa parallaxe (1717).

MOUVEMENT HORAIRE DE LA LUNE.

1519. Le mouvement horaire eſt le nombre de minutes & de ſecondes que la lune paroît décrire en une heure dans ſon orbite, vue du centre de la terre; on en fait uſage dans le calcul des éclipſes, & il eſt important de le connoître avec préciſion.

La quantité moyenne du mouvement horaire eſt de 32′ 56″, 4; on le trouve en diviſant en 24 parties ſon mouvement diurne, ou en faiſant cette proportion: la durée de la révolution périodique eſt à 360 degrés comme une heure eſt au mouvement horaire.

L'excentricité ſeule de l'orbite lunaire fait que le mouvement horaire de la lune varie de 3′ 45″; l'évection produit une inégalité de 42″, la variation en produit une de 38″; toutes les autres équations de la lune (1472) influent auſſi pour quelque choſe dans l'inégalité du mouvement horaire; enſorte qu'on ne peut trouver exactement le mouvement horaire qu'en y faiſant entrer toutes les équations de la lune.

1520. Les aſtronomes pour avoir exactement le mouvement horaire, calculoient le lieu de la lune avec toutes ſes équations pour deux inſtans éloignés d'une heure l'un de l'autre, la différence des deux longitudes de la lune ſur ſon orbite étoit le mouvement horaire. Mais cette méthode ne donne le mouvement horaire qu'à 3 ou 4 ſecondes près, parce que les tables d'équation n'étant calculées qu'en ſecondes, il peut ſe gliſſer une erreur d'une demi-ſeconde à chaque équation, ſans compter celle des parties proportionnelles où l'on néglige auſſi les demi-ſecondes. C'eſt pourquoi M. Clairaut, M. d'Alembert & M. Mayer ont donné des formules pour le mouvement horaire de la lune, en y employant les dixièmes de ſecondes, ce qui donne une préciſion auſſi grande que celle dont la théorie de chaque équation

peut-être susceptible ; la formule de M. Clairaut est démontrée dans les mémoires de 1752, *pag.* 600, & se trouve avec les tables dans la connoissance des mouvemens célestes pour 1765, *pag.* 109.

En nommant y l'anomalie moyenne de la lune, & t sa distance moyenne au soleil, les premiers termes sont $32' \, 56''4 - 3' \, 45''4 \cos. y + 14''8 \cos. 2y + 42''5 \cos. 2t - 37''7 \cos. (2t - y)$. On trouvera parmi nos tables de la lune celles que M. Mayer a calculées pour avoir aussi le mouvement horaire.

1521. Quand on a des longitudes calculées de 12 en 12 heures dans des éphémérides comme la connoissance des temps, ou le nautical almanach, on peut en conclure le mouvement horaire avec une très-grande précision : en effet lorsque l'on prend la douzième partie du mouvement de la lune entre midi & le minuit suivant, l'on a le mouvement horaire qui avoit lieu à six heures, c'est-à-dire, vers le milieu de l'intervalle qu'il y a eu entre les deux longitudes employées ; j'ai reconnu par l'examen des interpolations (3928), que malgré toutes les inégalités de la lune, les secondes différences sont sensiblement uniformes dans l'espace de 24 heures, ainsi le mouvement horaire croît ou décroît d'une manière qui est sensiblement uniforme depuis midi jusqu'à minuit ; il est plus petit si l'on veut à midi, il est plus grand à minuit que ne seroit le mouvement supposé uniforme dans les 12 heures ; mais dans le milieu de l'intervalle, c'est-à-dire, à six heures, il a dû se trouver exactement de cette quantité moyenne entre le plus petit mouvement qui avoit lieu à midi, & le plus grand qui a lieu à minuit ; donc en prenant le milieu entre le premier & le dernier, ou ce qui revient au même, prenant la douzième partie du mouvement total, on aura le mouvement à six heures.

Par la même raison si l'on prend la douzième partie du mouvement entre le minuit & le midi du lendemain, on aura le mouvement horaire pour 18 heures, comme dans l'opération précédente on l'a eu pour 6 heures :

ayant ainsi le mouvement horaire à 6 heures & à 18, il ne sera pas difficile de le trouver aussi à toute autre heure : voici un exemple dans lequel je suppose qu'on ait les longitudes de la lune de 12 en 12 heures, avec les différences écrites à côté qui sont les mouvemens sémi-diurnes ou pour 12 heures. On multiplie ces mouvemens par 5, on prend les minutes pour des secondes, & les degrés pour des minutes, & l'on a ainsi les mouvemens horaires qui répondent aux temps intermédiaires.

1757	Longit. de la ☾	Mouv. pour douze heures.	Quintuple ou mouv. hor.	
1 Janv.	1s 27° 57′ 0″	6° 0′ 10″	30′ 1″	le 1 à 6h
Minuit	2 3 57 10	5 58 41	29 53	le 1 à 18
2 Midi	2 9 55 51	5 57 30	29 47	le 2 à 6
Minuit	2 15 53 21	5 56 35	29 43	le 2 à 18
3 Midi	2 21 49 56			

Si je veux maintenant connoître le mouvement horaire pour le 1 Janvier à 9h du soir ; j'observe que le mouvement horaire a diminué de 8″ entre le 1 Janvier à 6h & le 1 à 18h, & que l'heure proposée est trois heures plus tard que 6h. Je ferai donc cette proportion : 12h : 8″ : : 3h : 2″, & ayant retranché 2″ de 30′ 1″, j'aurai 29′ 59″ pour le mouvement horaire à 9h du soir.

1522. La même méthode sert pour trouver le mouvement horaire en ascension droite, & en temps ; car connoissant le retardement diurne & inégal de la lune pour 24 heures, on peut trouver le retardement horaire pour une heure quelconque. Je suppose que le 1 du mois la ☾ ait passé au méridien à 4h 0′, le 2 à 4h 50′, le 3 à 5h 45′, ensorte que du 1 au 2 le retardement soit de 50′, & du 2 au 3 de 55′, & que l'on veuille chercher le retardement horaire pour le 2 à

l'heure du paſſage au méridien, c'eſt-à-dire, à 4 heures 50 minutes.

On prendra le milieu entre les deux retardemens, & ce milieu ſera $52' 30''$; l'on dira $24^h 52' \frac{1}{2} : 52' 30'' :: 1^h 0' : 2' 6'' \frac{1}{2}$ de temps retardement de la lune en une heure de temps qui eſt exact pour le 2 à $4^h 50'$. On pourroit le trouver par ce moyen pour toute autre heure.

On peut avoir auſſi ce retardement pour un autre intervalle quelconque, par exemple, pour le temps que le diamètre de la lune employe a paſſer par le méridien (1516), & ajoutant le retardement trouvé avec la durée du paſſage, calculée d'abord indépendamment de cette circonſtance, on auroit la véritable durée du temps que le diamètre de la lune employe à paſſer par le méridien; mais pour plus d'exactitude il faudroit connoître auparavant à peu-près la quantité de ce retardement, ou du moins le ſuppoſer d'avance de $4''$ de temps, pour pouvoir trouver avec la dernière préciſion combien la lune retarde pendant la durée de ce paſſage.

Ce que je viens de dire au ſujet du mouvement horaire de la lune, ſoit en longitude, ſoit en aſcenſion droite eſt ſouvent utile, ſur-tout pour trouver la longitude en mer par le moyen de la lune, comme on le peut voir dans l'état du ciel de M. Pingré, pour 1757, *pag.* 189.

DES OBSERVATIONS DE LA LUNE.

1523. Pour établir & confirmer les théories précédentes, on a eu beſoin d'un grand nombre d'obſervations, & ce ſeroit ici le lieu d'en rapporter une ſuite conſidérable pour l'utilité de ceux qui voudroient examiner encore les tables & les perfectionner; mais cet ouvrage étant déja trop volumineux, je me contenterai d'indiquer les ſources où l'on pourra les trouver. Les obſervations anciennes ſont d'abord néceſſaires pour trouver les moyens mouvemens de la lune de ſon apogée

gée & de son nœud : telles sont d'abord trois éclipses de lune observées à Babylone par les Caldéens, (1419) qui sont les plus anciennes des dix éclipses Caldéennes que Ptolomée nous a conservées dans son almageste : celles de Ptolomée lui-même, & celles de Tycho-Brahé, qui ont été calculées par Longomontanus, mais qu'il seroit peut-être utile de vérifier par les nouvelles tables. On trouveroit dans l'histoire céleste de Tycho, un bien plus grand nombre de bonnes observations, précieuses par leur ancienneté ; mais elles auroient besoin d'être calculées & réduites en y employant les tables que nous avons aujourd'hui ; & faute de ce travail, qui exigeroit un grand nombre de calculateurs exercés, nous ne pouvons, quant à présent, en tirer que peu de fruit ; il en est de même de celles d'Hévélius & même de Flamsteed qui sont en très-grand nombre. (V. *Machina cælestis* & *Historia cælestis*).

1524. Nous avons pour le dernier siècle une suite de 42 observations de M. de la Hire faites dans les années 1683, 1684 & 1685, à l'observatoire royal avec un quart de cercle mural solidement établi dans le plan du méridien, dont il a donné la description dans ses tables, & avec un autre quart de cercle mobile de trois pieds de rayon. Ces observations ont été calculées par M. Bailly, de l'académie des sciences, (*Mém.* 1763, *pag.* 28), d'après les recherches que M. de la Caille avoit faites sur les observations de M. de la Hire, pour s'assurer de l'état des instrumens pendant le cours de ces observations, en conclure les élémens de la théorie du soleil pour ce temps-là, & les positions des principales étoiles fixes. Ces observations sont rapportées dans l'*histoire céleste*, publiée par M. le Monnier en 1741. Mais elles n'avoient jamais été discutées, appréciées, corrigées, réduites & employées, comme elles l'ont été par ce travail ; l'on peut donc regarder ces 42 observations comme les plus anciennes qui aient été faites avec la précision qu'on exige aujourd'hui, & les plus

exactes qu'on puisse avoir du dernier siècle ; elles seront très-propres à vérifier la théorie & les tables de la lune pour ce temps-là, voici le résultat de ce travail.

Epoque de la longitude moyenne du soleil pour 1684,	$9^s\ 10^\circ\ 58'\ 58''$
Longitude de l'apogée du soleil,	3 7 28 0
Excentricité du soleil,	0,1685
Ascension droite moyenne de Sirius pour 1684,	97 48 29,7
Déclinaison moyenne de Sirius	16 19 20,0

M. de la Caille a reconnu par ces calculs l'accélération de la lune (1485) ; il trouvoit aussi qu'il faudroit augmenter de 5′ la longitude de l'apogée employée dans les tables de Mayer, cependant cette dernière correction n'est pas aussi évidente à cause des inégalités de la lune, dans lesquelles elle se trouve compliquée.

Erreur du Mural de M. de la Hire.

1525. M. de la Caille qui faisoit ces recherches en 1759 sur les observations de M. de la Hire, avec toute l'exactitude qu'il mettoit dans ses ouvrages, découvrit par l'examen des hauteurs solstitiales du soleil que l'erreur du quart de cercle de M. de la Hire, étoit de 6″ au solstice d'hiver, & de 34″ au solstice d'été ; il trouva aussi que l'erreur du mural de M. de la Hire en 1685 étoit de 15″, soustractive des temps du passage à 19 & à 29° de hauteur, de 6″ à 46 degrés ; mais qu'elle étoit de 15″ 7 additive à 65° de hauteur, nulle à 52° de hauteur, & il en dressa une table par le moyen de 34 comparaisons des temps vrais déterminés par des hauteurs correspondantes du soleil, avec les temps des passages du soleil au mural observés par M. de la Hire les mêmes jours.

Observations de Halley.

1526. Dans le même temps, c'est-à-dire, en 1682, 83, 84, M. Halley observoit la lune à Islington près de Londres, dans le dessein de faire servir ces obser-

vations à corriger les tables de la lune par la période de 18 ans, (1501) ces obſervations ſont rapportées à la fin de l'aſtronomie Caroline, édition de 1710. Dans la ſuite M. Halley fit dans la même vue la plus nombreuſe collection qu'on ait vu d'obſervations de la lune; elle commence à 1722, & finit au commencement de 1740. Elle renferme plus de 2000 obſervations, calculées & comparées avec ſes tables, & toutes ces obſervations ont été imprimées à la ſuite de ces mêmes tables in-4° à Londres, & in-8° à Paris; mais comme ces obſervations ſuppoſent les lieux des étoiles fixes tirés du catalogue de Flamſteed & réduits à ce ſiècle-ci, elles ſont expoſées à des erreurs peut-être d'une minute, & il ſeroit important de recourir aux manuſcrits originaux de M. Halley pour rectifier ſes concluſions & vérifier ſes calculs; avec cette précaution on pourroit tirer un grand avantage du travail immenſe de ce célèbre aſtronome.

Parmi les obſervations modernes les plus exactes, nous avons 31 obſervations de la lune faites en 1751 & 1752 à l'occaſion des recherches de la parallaxe de la lune & de ſa diſtance à la terre (1650), le ſoin qu'on apporta à les faire, & celui que M. de la Caille a mis à les calculer aſſure l'exactitude de ces obſervations, & je crois qu'on n'en ſauroit guères trouver de meilleures. Il y a auſſi 104 obſervations de M. de la Caille faites au college Mazarin en 1760 & 1761, les aſcenſions droites ont été obſervées avec un inſtrument des paſſages dont la lunette a 50 pouces de longueur, & les déclinaiſons avec un ſextant de ſix pieds de rayon, & un quart de cercle de trois pieds de rayon qui n'a ſervi que lorſque la lune étoit fort méridionale, parce qu'alors la lunette du ſextant ne pouvoit ſervir commodément dans l'obſervatoire du college Mazarin. Cette lunette méridienne étoit à l'abri des variations de la chaleur & du froid, & placée dans le méridien avec une ſi grande exactitude qu'il n'y avoit en aucun point

2″ d'erreur. C'eſt l'inſtrument dont je me ſers encore actuellement : il eſt ſcellé dans une pierre aſſiſſe ſur le maſſif des murs de l'égliſe, enſorte qu'il ne manque rien à l'obſervateur pour opérer avec la plus grande exactitude : j'ai fait avec les mêmes inſtrumens un grand nombre d'obſervations que je donnerai dans une autre occaſion.

Je dois faire mention auſſi d'une des plus belles collections qui exiſte, quoiqu'elle ne ſoit pas encore publique, c'eſt celle d'environ 1200 obſervations de M. Bradley calculées & réduites par lui & par M. Gaël Morris, excellent calculateur, qui m'en a fait voir le manuſcrit à Londres au mois de Mars 1763. Elles ont ſervi à vérifier les nouvelles tables de M. Mayer (1460), & l'on ſe propoſe de les faire imprimer à Londres, aux dépens de l'Etat. M. Bradley avoit déjà envoyé il y a plus de dix ans à M. Euler 130 obſervations faites en 1743, 1744 & 1745 ; celui-ci les communiqua à M. Mayer, qui en a fait uſage pour ſes tables, & les a données dans les mémoires de Gottingen, (*T.* III, *p.* 393). Il y a encore une ſuite intéreſſante dans la nouvelle édition des tables de la lune de M. Clairaut. Toutes les obſervations de M. Bradley paſſerent entre les mains de M. Bliſſ ſon ſucceſſeur à Greenwich, je fus témoin le 9 Juin 1763 d'une délibération de la ſociété royale de Londres qui en ordonna la publication, mais cette déciſion n'a encore eu depuis ſept ans aucune exécution.

1527. Les obſervations de la lune que M. le Monnier fait depuis 1733 avec la plus grande aſſiduité, & dont l'impreſſion eſt déjà commencée au Louvre, in-folio, formeront une ſuite très-importante & également propre à donner à la théorie de la lune le dernier degré d'exactitude ; il y en a déja trois cahiers in-folio de publiés, le quatrième eſt ſous preſſe (Mai 1770).

1528. M. Darquier, correſpondant de l'académie à Toulouſe, a fait auſſi un grand nombre d'obſervations depuis pluſieurs années, elles ſeront imprimées ſucceſſi-

vement dans les volumes des mémoires préſentés à l'académie par les Savans étrangers.

1529. On peut conſulter encore la collection d'obſervations de la lune, faites depuis 1737 juſqu'en 1755, à l'obſervatoire royal, & que M. Caſſini de Thury a donnée en 1756, dans les additions aux tables aſtronomiques de M. Caſſini ſon pere. Enfin, on trouveroit dans les manuſcrits du dépôt de la marine, une quantité prodigieuſe d'obſervations de la lune, faites ſucceſſivement par M. de l'Iſle à Péterſbourg, & enſuite à Paris par lui, par moi, & par M. Meſſier qui m'a remplacé dans l'obſervatoire de la marine, où il les continue journellement. Ces obſervations n'ont point encore été calculées.

LIVRE HUITIEME.

DU CALENDRIER.

1530. La Chronologie ancienne, & l'usage ordinaire que l'on fait du calendrier, appartiennent trop à l'astronomie pour ne pas les traiter ici séparément. Le fondement de la chronologie consiste dans la mesure des années & des jours, & par conséquent dans les mouvemens du soleil & de la lune, comparés entre eux, & avec les divers événemens de l'histoire; ainsi après avoir parlé des moindres parties du temps qui sont les heures, & les semaines, nous parlerons des années, de leurs différentes divisions, des cycles qui en sont composés, du calendrier, des périodes anciennes, enfin, des époques les plus célèbres : nous dirons aussi quelque chose des levers & couchers héliaques des étoiles qui sont assez célèbres parmi les anciens, & que les commentateurs ont souvent très-mal interprétés.

Heures Planétaires.

1531. Les heures planétaires usitées autrefois chez les Juifs & les Romains, commençoient au lever du soleil, & recevoient leur nom d'une des sept planètes. Cet usage étoit venu des Egyptiens, suivant Hérodote, *L.* II, n°. 82, & Dion Cassius, *L.* 37, *pag.* 42, édition de 1592, ou des Caldéens (*Salmas. de an. climat. pag* 595, M. Goguet, II, 437, M. Sallier, *Mém. des inscrip. IV*, 65). On croit que l'ordre des planètes dans les jours de la semaine venoit de l'influence qu'on leur supposoit sur les différentes heures du jour; le Dimanche, au lever du soleil, la première heure étoit pour le soleil, ensuite venoient Vénus, Mercure, la lune qui étoient supposées au-dessous de lui, puis Saturne, Jupiter & Mars qui étoient au-dessus; par-là il arrivoit que le lendemain commençoit par la lune, & voilà pourquoi le jour de la lune,

c'eſt-à-dire, le lundi fut placé à la ſuite du jour conſacré au ſoleil. (*Clavius in ſphæram, pag.* 45); M. l'Abbé Rouſſier dans un ſavant ouvrage ſur la muſique des anciens, croit que cet arrangement vient des intervalles de la muſique, comme l'inſinue Xiphilin d'après Dion (*L.* 36, *in Pompeio*), & Scaliger l'explique par des triangles faits ſur les côtés d'un eptagone, (*Emend. temp. l. I, de diebus*). Plutarque en avoit fait la matière d'une diſſertation, dont il ne nous reſte que le titre, dans ſes queſtions de tables, *Sympoſium*, *l. IV*, *q.* 7. Ces heures étoient *inégales*, parce qu'on diviſoit le jour naturel en douze parties, & la nuit en douze autres parties.

1532. LES HEURES BABYLONIQUES commençoient à ſe compter au lever du ſoleil, (Macrobe, *Saturn. l. I, c.* 3) cela ſe pratique encore à Majorque & à Nuremberg. Celles des Egyptiens & des Romains commençoient à minuit; & cet uſage eſt encore celui de la plupart des nations de l'Europe. Heures Babyloniques.

Tous les aſtronomes commencent le jour à midi, comme faiſoient autrefois les Umbres ſuivant Macrobe, & comme font auſſi les Arabes; les aſtronomes vont auſſi juſqu'à 24 heures; ainſi lorſqu'on compte dans la ſociété le 2 Janvier 8 heures du matin, les aſtronomes diſent le premier Janvier à 20 heures, & c'eſt ce que nous appellons *temps aſtronomique*. Heures Aſtronomiques.

Les Juifs & les Romains diſtinguoient dans le jour artificiel, pris du lever au coucher du ſoleil, quatre parties principales, *Prime*, *Tierce*, *Sexte* & *None*. Prime commençoit au lever du ſoleil; Tierce, trois heures après; Sexte commençoit à midi; & None, trois heures avant le coucher du ſoleil; mais ces heures étoient plus ou moins grandes, ſuivant que le ſoleil étoit plus ou moins long-temps ſur l'horizon; l'on employe encore dans le bréviaire de l'Egliſe Romaine les mêmes dénominations. Ce ſont-là les heures Judaïques, planétaires ou inégales. Heures Judaïques.

1533. Les Athéniens commençoient à compter les heures depuis le coucher du soleil; on en fait de même en Italie, on le faisoit même autrefois en Pologne, en Autriche, en Bohême; mais il n'y a plus à Prague que deux horloges de cette espèce. Les Italiens commencent leurs 24 heures une demi-heure après le coucher du soleil; j'ai expliqué leur usage à cet égard dans la préface du livre intitulé : *Voyage d'un François en Italie, fait dans les années* 1765 & 1766, à Paris, chez Desaint, 1769.

Semaines de sept jours.

1534. L'usage de diviser les temps en semaines de sept jours est de la plus haute antiquité: il paroît que les plus anciens peuples de l'Orient s'en sont servis, c'est le sentiment du Syncelle, cité par M. Sallier, (*Mém. de l'acad. des Inscript. tom.* IV, *pag.* 65). Cet usage étoit même chez les Péruviens, *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los Incas, tom.* I. *L.* II. *c.* 23. Scaliger *de emend. Temp. pag.* 9. Spectacle de la Nature, *tom.* IV, *pag.* 47.

M. Goguet pense que les Grecs furent presque les seuls peuples, qui d'abord ne se servirent pas des semaines de sept jours. (*T.* I, *pag.* 217 *in*-4°.). Cependant il y a des savans qui doutent que cette maniere de diviser le temps ait été employée ailleurs que chez les Juifs. (Voyez Costard, *The history of astronomy, pag.* 150. Spencer, *De legibus Hebræorum, L.* 1. *c.* 4). Quoi qu'il en soit, on ne peut disconvenir que le nombre sept n'ait été fort remarquable & fort distingué parmi les anciens, (S. Clément d'Alex. *Stromatum*, VI. 16. *pag.* 813, édition de 1715. Macrobe, *Somn. Scip.* I. 6. *pag.* 35. Selden, *de jure nat. & gent, L.* III, *c.* 17).

Plusieurs auteurs ont cru même que la fête du septième jour n'étoit point particulière aux Juifs, mais qu'elle avoit lieu chez les payens. M. Sallier cite un grand nombre de témoignages à ce sujet, (*Mém de l'acad. des Inscrip.* IV. 50), sur-tout Philon & Joseph; il les réfute, à la vérité, & se détermine pour le sentiment

timent contraire. (*Ibid. pag.* 64). Mais cela n'empêche pas que l'usage des semaines de sept jours n'ait eu lieu chez les anciens.

M. Goguet pense qu'inutilement on a voulu proposer plusieurs conjectures sur les motifs qui ont pu déterminer les différens peuples à s'accorder sur cette maniere primitive de partager le temps, & qu'il faut la raporter à une tradition générale des sept jours qu'avoit duré la création du monde. Il est singulier que cet auteur n'ait pas vu que cet usage venoit des phases de la lune qui ne se montre que pendant quatre semaines ou 28 jours, ce qui a servi à régler le temps chez toutes les Nations (1401): ces phases changent à peu-près tous les sept jours, & si l'on avoit voulu faire des semaines de huit jours, on eût trouvé un excès de trois jours au bout du mois. D'ailleurs les années solaires de 365 jours se partagent, à un jour près, en semaines de 7 jours, au lieu qu'il y auroit eu cinq jours de reste, si l'on eût fait les semaines de huit jours; ainsi l'usage des mois & des années paroît avoir dû entraîner celui d'une semaine de sept jours.

Années des Anciens.

1535. Nous avons parlé des années qui servirent aux premiers peuples du monde (277), & qui furent d'abord de 30 jours; nous parlerons plus bas des années lunaires, dont se servent encore les Turcs & les Arabes, & qui sont de 354 & de 355 jours (1602), mais la premiere règle constante qu'il y ait eu pour les années, fut celle des années de 365 jours, qui étoient toutes égales; c'est ce qu'on appelle les années Egyptiennes; le soleil retardoit chaque année de six heures sur une année Egyptienne, & tous les quatre ans l'équinoxe arrivoit un jour plus tard dans l'année civile; ce retardement formoit une année entiere au bout de 1461 années civiles, ou d'une période caniculaire (1605). Nous en donnerons une table ci-après (1598). Les années

Différentes sortes d'années.

Années Egyptiennes.

Egyptiennes ſont encore employées dans la Perſe ; mais au ſujet de la forme ancienne & nouvelle de l'année des Perſes, on peut voir les notes de Golius ſur Alfergan, Scaliger, *de Emendatione Temporum*, & le P. Pétau, *Doctrina Temporum.*

Temps où commençoit l'année.

1536. Parmi nous l'année civile eſt tantôt de 365 jours & tantôt de 366 (1539); elle commence au premier Janvier depuis l'année 1567. (Voyez l'édit de Rouſſillon donné en 1564, par Charles IX. art. 9); les anciens Romains la commençoient avec le mois de Mars ſous le règne de Romulus ; les Grecs au mois de Septembre : Numa Pompilius la fixa au mois de Janvier. Sous la ſeconde race de nos Rois elle commençoit à Pâques après la bénédiction du cierge paſcal ; & dans certains endroits elle commençoit à l'Annonciation, c'eſt-à-dire, le 25 de Mars, à peu-près comme chez les Hébreux, dont l'année eccléſiaſtique & civile commençoit à Pâques, *Exod.* 12, quoiqu'ils euſſent une année naturelle qui commençoit au mois de Septembre. *Ezech. c.* 40. Voyez auſſi l'*Art de vérifier les dates*, par D. Clémencet & D. Durand, *in*-4°, 1752. chez *Cavelier*, & la nouvelle édition in-folio 1770. Le P. Petau, *Doct. Temp. Liv.* IX, *c.* 3. *Caſali de veteribus ſacris chriſtianorum ritibus. Romæ*, 1647, fol. *c.* 62.

1537. Le printemps étoit, ce me ſemble, le temps où l'année devoit naturellement commencer :

> Dic age, frigoribus quare novus incipit annus,
> Qui melius per Ver incipiendus erat? *Faſt. I.* 149.

Mais la raiſon qui détermina les anciens pour le mois de Janvier fut ſans doute qu'au ſolſtice d'hiver le ſoleil recommence à monter vers notre hémiſphère boréal ; ce commencement d'élévation & d'acroiſſement dans les jours leur parut devoir être le commencement de l'année :

> Bruma novi prima eſt, veteriſque noviſſima Solis ;
> Principium capiunt Phœbus & annus idem. *Faſt. I.* 163.

1538. L'année qui se divise actuellement en 12 mois solaires de 30 ou 31 jours avoit été divisée par Romulus en dix mois seulement, & elle n'avoit que 304 jours. Macrobe, *Saturn.* l. I, c. 12, donne un assez long détail du calendrier de Romulus, de même que Solinus, *Memorabilium pars 1, c.* 2. On y voit que Mars étoit le premier mois de l'année, & portoit le nom du Dieu dont Romulus vouloit descendre; les mois de Juillet & Août se nommoient quintile & sextile, le mois de Décembre étoit, comme son nom l'indique, le dixième & le dernier mois de l'année. Numa ajouta 50 jours à l'année lunaire des Romains, & la fit de 354 jours (*Macr. I*, 13). Solinus dit deux fois qu'il la fit de 355 jours, cependant l'année lunaire ne devoit être que de 354; il avoit peut-être de l'inclination pour les nombres impairs, comme ensuite les Pythagoriciens. Les mois des Romains étoient alors de 29 & de 30 jours alternativement, pour répondre aux mois lunaires qui sont de $29\frac{1}{2}$: Numa composa l'année de 12 mois, changea les six mois qui avoient 30 jours pour les rendre impairs; ces six jours joints avec 51 jours qu'il avoit ajoutés, en firent 57; il en composa deux mois, l'un de 29 jours, l'autre de 28.

Division de l'année Romaine.

Primus oliviferis Romam deductus ab arvis
Pompilius menses sensit abesse duos. *Fast. III*, 151.

Il plaça ces deux mois au commencement de l'année, suivant l'opinion de plusieurs Savans, en faisant commencer l'année avec l'hiver, parce que c'étoit le temps où les jours commençoient à augmenter : quelques Savans sont d'une opinion contraire. Ces mois de 29 & de 30 jours formoient une année lunaire de 355 jours, plus petite de 10 jours que l'année solaire, en sorte qu'au bout de trois ans l'hiver n'arrivoit plus au commencement de Janvier, mais de Février. Numa employa donc, aussi bien que les Grecs, une intercalation, par laquelle l'hiver devoit toujours commencer

avec le mois de Janvier, mais il diſtribua les jours intercalaires d'une façon particulière; lorſqu'il y eut deux années de paſſées, on ajouta 22 jours; lorſqu'il y en eut quatre, 23 jours; à la ſixième, 22 jours; à la huitième, 23; de ſorte qu'en huit ans il y avoit 90 jours intercalaires. (Gaſſendi, *Op. tom. V, pag.* 550).

Les Romains ne remarquèrent pas d'abord qu'il y avoit 8 jours de trop dans cette manière d'intercaler; parce que leur année lunaire avoit un jour de plus que celle des Grecs; il ſe trouva au bout de 30 ans que l'hiver ne commençoit plus avec le mois de Janvier, mais avec celui de Décembre, il fallut donc enſuite reformer cette méthode, & après deux huitaines d'années, on ſe contentoit d'ajouter 66 au lieu de 90 jours à la troiſième huitaine; les Prêtres étoient chargés de ce ſoin; les jours intercalaires s'ajoutoient chez les Grecs à la fin de l'année, pluſieurs auteurs croyent que les Romains à leur exemple choiſirent auſſi la fin de l'année, parce que le mois de Février étoit comme la fin de l'ancienne année qui commençoit au mois de Mars; c'étoit même, diſent-ils, le dernier mois de l'année de Numa, juſqu'au temps des Decemvirs, 450 ans avant J. C.; il ſemble que cette opinion ſoit autoriſée par le témoignage d'Ovide.

> Qui ſequitur janum veteris fuit ultimus anni,
> Tu quoque ſacrorum, Termine, finis eras. *Faſt. II*, 49.

On voit auſſi par ces vers pourquoi les jours intercalaires ſe plaçoient non à la fin de Février, mais après le 24 de Février appellé VI°. Calend. Martii, c'étoit à cauſe de la fête du Dieu, *Terme* qui ſe célébroit le 23 de Février (VII°. Cal. Martii). Ces jours intercalaires au nombre de 22 ou de 23 formoient tous les deux ans, comme un troiſième mois qui s'appelloit, ſuivant Putarque, *Merkedonius*, ou plus communément intercalaire.

Mais ces intercalations qui étoient confiées aux Prêtres

furent quelquefois altérées, il y eut des temps où par superstition l'on omit des intercalations; il arriva même, selon Censorinus & Macrobe, que les Prêtres pour contrarier ou favoriser des Magistrats ou des Traitans firent des années plus ou moins longues (Macrobe I, 14. *Solinus memorabilium pars I, cap.* 4).

Jules César entreprit de corriger le désordre de ce calendrier, & d'en éclaircir l'obscurité, 46 ans avant J. C. Il voulut faire correspondre les années civiles aux années astronomiques, en sorte qu'à la même saison l'on comptât toujours les mêmes mois, & qu'on pût dire que le printemps arrivoit toujours au même temps de l'année. Voyez Censorinus, *ch.* 10. Suétone, dans la *vie de César.* Dion Cassius, *liv. XLIII.* Solinus, *ch.* 3. Macrobe, *Saturn. liv. I, ch.* 14. Jules César étoit curieux d'astronomie, il avoit même composé divers ouvrages.

Media inter prælia semper
Stellarum cœlique plagis superisque vacavi,
Nec meus Eudoxi vincetur fastibus annus. *Pharsal. X*, 185.

1539. Il étoit devenu essentiel au temps de Jules César de faire dans le Calendrier une entière réformation : César étoit tout à la fois Dictateur & Pontife, & ce soin le regardoit principalement. Pour s'en acquitter avec plus d'exactitude, César fit venir *Sosigenes*, mathématicien d'Egypte, qui s'occupa sérieusement de ce travail, (Pline XVIII, 25). Cet auteur fait l'éloge de son application, en disant : *Ipse ternis commentationibus, quamquam diligentior esset cæteris, non cessavit tamen addubitare, ipse semet corrigendo.* Il fit sentir à César qu'on ne pouvoit établir une forme constante dans les années, à moins qu'on n'abandonnât la lune, pour s'en tenir aux mouvemens du soleil; mais comme l'année solaire étoit de 365 jours & un quart, il falloit, pour suivre ce quart d'excédent, donner un jour de plus à l'année, dans laquelle on rassembleroit les quatre quarts de jour.

Sosigenes imagina donc de faire trois années de 365 jours, & la quatrième de 366 : on laissa le commencement de l'année d'accord avec le commencement de l'hiver, & du mois de Janvier, ou plutôt de la nouvelle lune qui cette année-là suivit le solstice d'hiver, afin de ne pas s'écarter d'une manière trop marquée de l'usage des Romains. Ce fut dans l'année 45 avant J. C. que se fit la réforme, & l'année 44 avant J. C. fut la première année Julienne, l'équinoxe arriva le 25 Septembre : on prolongea l'année de 90 jours jusqu'à la nouvelle lune qui suivit le solstice d'hiver, de façon que l'année eut 444 jours pour cette fois seulement, elle fut appellée l'*Année de confusion.* (*Scaliger, de Emend. temporum, l. II, pag.* 187, *l. IV, pag.* 228) ou plutôt 445 suivant le P. Petau (*L. IV, c.* 1. *l. X, c.* 61), & *Censorinus, c.* 20. Macrobe (*Saturn. I*, 14) dit 443 jours; & Solinus dit qu'il y eut une année de 244 jours (*Memorabilia mundi pars II, c.* 2); mais il paroît que c'est par erreur.

Année de 445 jours.

1540. L'année de Numa n'avoit que 355 jours, il fallut donc en ajouter dix; César, à l'exemple de Numa, répartit ces dix jours de manière à ne point toucher aux mois de Mars, Mai, Quintile, (ou Juillet) & Octobre, parce qu'ils avoient été établis de 31 jours par Romulus; il ajouta deux jours à chacun des mois de Janvier, Sextile, (ou Août) & Décembre qui étoient de 29, & devinrent par-là de 31; il ajouta un jour aux mois d'Avril, Juin, Septembre & Novembre qui en avoient 29, pour les faire de 30 jours; il n'ajouta rien au mois de Février (dit Macrobe, *Saturn. I*, 14) : *Ne Deûm inferûm religio immutaretur*, par respect pour les morts à qui le mois de Février étoit consacré, car le mot de Février venoit de *Februus*, Dieu des lustrations, ou des sacrifices qu'on célébroit à l'honneur des Dieux mânes.

1541. Jusqu'alors le mois intercalaire avoit été le mois de Février, César plaça de même en Février le jour intercalaire qu'il ajoutoit tous les 4 ans, & cela

après le 23 Février ou le 7e des Calendes de Mars, & avant le régifuge ou la fête institueée en mémoire de l'expulsion de Tarquin, qui se célèbroit le VI des Calendes; ce jour au lieu d'être le 24 se trouvoit alors le 25, & le 24 qui étoit le jour intercalaire, s'appelloit *bis Sexto Calendas Martias*, parce que le jour du régifuge conservoit son nom de *Sexto Calendas*, & se trouvoit le 25, delà vint le nom d'années bissextiles pour celles où le mois de Février avoit 29 jours, & où le 24 Février s'appelloit *Bis Sexto Calendas*. Toutes les années de l'ere vulgaire, tant avant qu'avant J. C. dont le nombre est divisible par quatre sont bissextiles.

Origine du terme de bissextiles.

1542. Jules César étoit né le 4 des ides du mois *Quintile*; après sa mort, Antoine qui étoit son collegue dans le consulat, fit ordonner par une loi que ce mois porteroit le nom de Jules César, & il fut toujours appellé le mois de *Juillet*, depuis la seconde année de la réformation Julienne (1539). Le mois Sextile fut ensuite appellé *Augustus*, Août, en vertu d'un Senatus consulte rendu après la bataille d'Actium; non que cet Empereur fût né dans le mois *Sextile*, car le jour de sa naissance étoit le IX Cal. Octob. ou le 23 Septembre; mais dans ce mois, dit Macrobe, il étoit parvenu au consulat, il avoit triomphé trois fois, il avoit conquis l'Egypte, il avoit terminé les guerres civiles, ce qui fut cause que le Sénat regardant ce mois comme le plus heureux de l'Empire d'Auguste, ordonna qu'à l'avenir on l'appelleroit du nom de ce Prince.

Noms de Juil. & Août.

Plusieurs Empereurs voulurent dans la suite, à l'exemple d'Auguste, donner leurs noms à des mois de l'année; Néron voulut donner son nom au mois d'Avril, Commode voulut donner le sien au mois d'Août, & celui d'Hercule au mois de Septembre, Domitien voulut appeller Germanicus le mois de Septembre, & celui d'Octobre Domitien; mais comme l'observe Macrobe après la mort de ce tyran, non-seulement on arrachoit les inscriptions qu'il avoit usurpées, mais en haine de

ſa mémoire, on changea juſques aux noms qu'il avoit établis pour les mois de l'année.

1543. Après la mort de Jules Céſar, il y eut un petit dérangement dans les intercalations, les Pontifes ne comprenant pas le ſens de la règle qu'il avoit établie, ajoutoient un jour au commencement de l'année au lieu de l'ajouter à la fin; ils rendoient biſſextile celle qui étoit la quatrième en y comprenant la biſſextile précédente, enſorte qu'il n'y avoit que deux années communes, au lieu de trois qu'il doit y avoir entre deux biſſextiles; on s'apperçut de cette erreur au bout de 36 ans, alors il y avoit eu 12 biſſextiles au lieu de 9 qu'il auroit dû y avoir. Pour y remédier Auguſte ordonna que dans les douze années ſuivantes, il n'y auroit aucune intercalation, pour retrancher par-là trois jours de la ſuite & de l'ordre des années établies par Jules Céſar (Solinus I, *pars* 2). Depuis ce temps-là, il n'y a eu dans le calendrier Julien aucune interruption, du moins ſuivant l'opinion commune. M. Euler a penſé qu'il pouvoit y avoir eu un jour d'erreur, ce qui lui ſervoit à expliquer la diſcordance des équinoxes obſervés par Ptolomée; mais j'ai prouvé par les lieux de la lune qu'il n'y avoit point erreur de date, & il paroît que ces obſervations étoient ſuppoſées, ou qu'elles étoient extrêmement défectueuſes (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 420). On verra auſſi dans le XIIIe. livre le ſoupçon que Flamſteed a eu ſur la ſituation des armilles de Ptolomée pour expliquer une partie de cette imperfection des équinoxes de Ptolomée (2275).

1544. Malgré l'avantage que le calendrier Julien avoit ſur celui des années Egyptiennes, il étoit encore imparfait, puiſqu'en ſuppoſant l'année de 365 jours 6^h, on ſe trompoit de 11′ chaque année (886); & les 11′ avoient produit une différence de dix jours; c'eſt ce qui occaſionna la réformation Grégorienne de 1582, dont nous allons parler; & c'eſt ce qui a produit longtemps une différence de calendrier entre les différens peuples de l'Europe (1548).

De

De la Réformation Grégorienne pour les Années solaires.

1545. La réformation du calendrier avoit été proposée bien des fois depuis qu'on s'étoit apperçu que les équinoxes anticipoient de plusieurs jours (1544) : un Evêque de Cambrai que les auteurs appellent *Petrum ab Alliaco*, Chancelier de l'Université & Précepteur de Jean Gerson, présenta son projet au concile de Constance, & au Pape Jean XXIII, en 1414, & l'on regarde son ouvrage comme ayant été une des premières occasions de la réforme Grégorienne ; (*Weidler*, *pag.* 295). Le cardinal *Cusa* écrivit aussi vers le même temps sur la réformation du calendrier & sur la correction des tables Alphonsines ; cet auteur dont nous avons les Œuvres en trois volumes in-folio, mourut en 1464. Le Pape Sixte IV. forma décidément le projet d'exécuter cette réformation du calendrier ; il attira près de lui Régiomontanus dont la réputation & le savoir méritoient la plus grande confiance en pareille matière (434) ; mais ce célèbre astronome mourut à Rome en 1476, avant que d'avoir pu exécuter cette entreprise. Voyez Gassendi dans la vie de Régiomontanus, & dans son histoire du calendrier, *Op.* tom. V, *pag.* 584. Le Concile de Trente terminant ses sessions en 1563, laissa au Pape le soin de travailler à la réformation du calendrier. Enfin le Pape Grégoire XIII. parvint en 1582 à terminer ce grand ouvrage ; & le calendrier qu'il a établi a pris le nom de Calendrier Grégorien. (Voy. Clavius, *Calendar. Gregorianum*, in-fol. Blondel, *Histoire du calendrier Romain* ; Riccioli, *Chronologia reformata* ; Gassendi, *Romanum calendarium*, *in-folio*, *Op. t. V*, *pag.* 545). Il envoya en 1577 à tous les Princes Chrétiens un abrégé des raisons qu'il avoit d'entreprendre la réformation du calendrier, en les priant de consulter tous les mathématiciens qu'ils croiroient capables

Les Astronomes sont consultés.

de lui ſuggérer des idées nouvelles ou des expédiens commodes. Après avoir reçu différens mémoires à ce ſujet, le Pape aſſembla à Rome les gens les plus habiles pour achever ce grand ouvrage. Ce calendrier Grégorien devenu aujourd'hui le calendrier civil dans tous les pays de l'Europe, conſiſte dans une manière de compter les années, telle que les ſaiſons commenceront toujours aux mêmes temps de l'année.

Décret du Concile de Nicée.

1546. Le point fixe d'ou l'on partit dans la réformation du calendrier fut la déciſion du Concile de Nicée tenu l'an 325, qui établit l'équinoxe au 21 de Mars, & ordonne que la fête de Pâque ſera célébrée le Dimanche *après* le XIVe de la lune du premier mois, c'eſt-à-dire, de la lune dont le 14e arrive *ou le jour même ou après le jour de l'équinoxe* (1571).

On croyoit au temps du Concile de Nicée que l'année étoit à peu-près de 365j. 5^h. 55′ ſuivant le ſentiment de Ptolomée (885): on ſuppoſa donc que l'équinoxe qui arrivoit alors le 21 de Mars arriveroit toujours de même, ou qu'on y remédieroit dans la ſuite; mais comme il y a ſix minutes de moins dans la véritable durée de l'année ſolaire (886), l'équinoxe arrivoit chaque année ſix minutes plutôt qu'on ne croyoit; & du temps de Grégoire XIII. en 1577, il ſe trouvoit arriver le 11 de Mars; il auroit fallu omettre trois jours de l'année tous les 400 ans pour que le 21 de Mars fût toujours près du véritable équinoxe.

Règle du Calendrier Grégorien.

Ce fut le 24 Février 1581 que parut le Bref par lequel Grégoire XIII. ordonna l'obſervation des trois articles qui devoient remplir pour toujours l'intention du Concile de Nicée; les voici en abrégé.

1547. Il eſt dit 1°. qu'après le 4 Octobre 1582, on retranchera 10 jours du mois, enſorte que le jour qui ſuivra la fête de S. François, qu'on a coutume de célèbrer le 4 Octobre, ſera appellé non le 5, mais le 15 d'Octobre, & que la lettre Dominicale G ſera changée en C.

2°. Pour qu'à l'avenir l'équinoxe du printemps ne

puiſſe pas s'éloigner du 21 de Mars, il eſt dit que les années biſſextiles qui avoient lieu de quatre ans en quatre ans n'auront plus lieu dans les années ſéculaires 1700, 1800, 1900, mais ſeulement l'an 2000, & ainſi de ſuite à perpétuité; de ſorte que trois années ſéculaires ſoient toujours communes, & la quatrième biſſextile dans l'ordre ſuivant.

1600, biſſ.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3.00, biſſ.
1800, com.	2300, com.	2800, biſſ.	3300, com.
1900, com.	2400, biſſ.	2900, com.	3400, com.
2000, biſſ.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

3°. Pour trouver d'une manière plus sûre le quatorzième de la lune paſchale, & les jours de la lune dans tout le cours de l'année, on ſuprime du calendrier le nombre d'or, & l'on y ſubſtitue le cycle des épactes par lequel la nouvelle lune conſervera toujours ſa véritable place dans le calendrier, nous en parlerons bientôt en détail (1573).

Le Pape ordonne enſuite à tous les Eccléſiaſtiques d'embraſſer la nouvelle forme du calendrier; il exhorte & il prie l'Empereur & tous les Princes chrétiens de le faire recevoir également dans leurs Etats.

1548. La ſuppreſſion de dix jours faite en 1582 dans les Etats ſeulement des Princes catholiques fut cauſe d'une différence qui a ſubſiſté long-temps en Europe dans la manière de compter les jours; toutes les fois, par exemple, que l'on comptoit en Angleterre le 2 Janvier, on comptoit le 12 en France, c'eſt-à-dire, 10 jours de plus; les perſonnes qui craignoient l'équivoque datoient ainſi, $\frac{2}{12}$ Janvier, c'eſt-à-dire, le deux vieux ſtyle ou ſtyle Julien, & le 12 nouveau ſtyle ou ſtyle Grégorien. Lorſqu'en 1700 on eut ſupprimé une biſſextile ſuivant la règle du calendrier Grégorien, la différence ſe trouva de 11 jours; parce que dans le calendrier Julien on avoit fait l'année 1700 plus lon- Différence du vieux Style & du nouveau.

gue d'un jour ; ce qui faisoit compter ensuite un jour de moins.

1549. Cette différence du vieux & du nouveau style a subsisté long-temps entre les pays Protestans & les pays Catholiques. On voit dans les transactions philosophiques, n°. 203, 239, 257, 260, ce que l'on pensoit en Angleterre de la réformation ; mais elle y a été adoptée enfin, & le nouveau style a commencé en Angleterre au mois de Septembre 1752 ; on a retranché alors 11 jours, & l'on s'est trouvé d'accord avec le calendrier Grégorien. L'uniformité du calendrier Grégorien est reçue actuellement dans tous les Etats policés de l'Europe ; la Russie est le seul pays où l'on compte encore 11 jours de moins, que dans les autres pays de l'Europe.

Du Cycle solaire & des Lettres Dominicales.

1550. On employe dans certaines occasions le cycle solaire qui est un intervalle de 28 ans, après lequel les jours de la semaine reviennent aux mêmes jours du mois & dans le même ordre, tant que les années sont bissextiles de 4 ans en 4 ans. Suivant la manière dont nous comptons actuellement les années de ce cycle, elles commencent 9 ans avant l'ere chrétienne.

Ainsi pour trouver à quelle année du cycle solaire on étoit en 1763, on ajoute 9 avec 1763, l'on divise la somme 1772 par 28, on trouve pour quotient 63 qui nous apprend que le cycle solaire a recommencé 63 fois depuis l'ere chrétienne ; mais le reste de la division se trouve de 8, ainsi il y a huit années de plus que les 63 cycles complets, nous sommes donc à la huitième année, c'est-à-dire, que l'on a huit de cycle solaire en 1763.

Calendrier perpétuel.

1551. On trouve dans tous nos livres d'églises une forme de calendrier perpétuel, où les 12 mois de l'année sont marqués avec des lettres à côté de chaque jour ; ces lettres servent à marquer les jours de la se-

maine qui répondent aux quantiemes de mois, suivant un ordre qui revient tous les 28 ans. On met un A vis-à-vis le premier jour de Janvier, B vis-à-vis du 2, & ainsi de suite; si l'année commence par un Dimanche comme cela est arrivé en 1758, la lettre A sera la lettre dominicale, & tous les Dimanches de l'année se trouveront indiqués par un A, dans chaque mois du calendrier perpétuel. Après avoir rencontré 52 fois les sept lettres A, B, &c. dans le calendrier, c'est-à dire, après 52 semaines qui font 364 jours, le 365e jour de l'année recommencera par un A, & sera encore un Dimanche, car l'année commune commence & finit par le même jour du mois, parce que 52 fois 7 font 364. Ainsi l'année suivante commencera par un lundi, & aura son premier Dimanche le 7 du mois; or dans le calendrier perpétuel, c'est un G qui répond au 7 du mois, ainsi la lettre dominicale de cette seconde année sera le G, celle de la troisième année seroit une F, & ainsi de suite dans un ordre rétrograde. *Lettres Dominicales.*

Mais quand il arrive une année bissextile, le mois de Février a 29 jours, la lettre D qui commence le mois de Mars doit dénoter alors un jour de plus: si elle a été dominicale pendant les deux premiers mois de l'année, elle se trouve indiquer ensuite le lundi, & c'est la lettre précédente qui devient dominicale. Ainsi dans les années bissextiles, il y a toujours deux lettres dominicales, une qui sert pour les mois de Janvier & de Février, jusqu'au jour de S. Mathias exclusivement, l'autre qui sert pour les dix autres mois. *Deux Lettres dans les années bissextiles.*

En 1756 le cycle solaire étoit 1, & les lettres dominicales D & C; dans les 27 années suivantes on a B, A, G, F (& E), D, C, B, A (& G); F, E, D, C (& B); A, G, F, E (& D); C, B, A, G (& F); E, D, C, B (& A); G, F, E, après quoi on recommence D & C dans le même ordre pour 28 autres années qui forment un nouveau cycle solaire.

1552. On peut trouver la lettre dominicale de deux façons dans ce siècle-ci; on ajoutera, par exem- *Trouver la Lettre Dominicale.*

ple, cinq au nombre des années de ce siècle-ci, & de plus autant d'unités qu'il y a de bissextiles dans cet intervalle ; la somme étant divisée par 7, le reste désignera la lettre dominicale de l'année, en appellant G la première, F la secônde, &c. Pour en sentir la raison, on remarquera que les lettres dominicales de 1696 étoient A & G, ainsi l'on avoit 1 pour la lettre dominicale de 1696, & il y en a eu cinq avant 1701. Depuis ce temps-là toutes les années ont eu une lettre, il faut donc prendre autant de lettres que d'années depuis 1700, & cinq de plus; & comme les années bissextiles ont deux lettres, il faut encore ajouter autant de nombres qu'il y a eu de bissextiles ; par exemple, en 1763 on ajoutera 63 avec 5 & 15, on divisera 83 par 7, on aura 6 de reste, c'est-à-dire, que la sixième lettre B sera la lettre dominicale de 1763.

Seconde Méthode.

La seconde manière de trouver la lettre dominicale est celle-ci : divisez le nombre de l'année depuis 1700, plus sa quatrième partie par 4, retranchez le reste de 3 ou de 10, vous aurez le chiffre qui indique la lettre dominicale dans la table suivante ; je suppose, par exemple, qu'il soit question de l'année 1757, ajoutez à 57 son quart 14, la somme 71 étant divisée par 7, le reste sera 1, qu'on ôtera de 3, & l'on aura 2 qui dans l'ordre ci-joint fait voir que B sera la lettre cherchée pour 1757.

A	B	C	D	E	F	G
1	2	3	4	5	6	7

Ces deux règles ne serviront que jusqu'en 1799 inclusivement, parce que les années 1800 & 1900 ne seront point bissextiles, comme le sont les autres années de 4 en 4, ce qui formera une interruption dans le cours ordinaire des lettres dominicales ; car l'année 1800 n'aura que la lettre E au lieu des deux lettres E & D qu'elle auroit dû avoir suivant la règle précédente. Les nom-

bres que nous venons de placer ſous chaque lettre ſervent auſſi à trouver quel ſera le premier Dimanche de l'année ; par exemple, quand la lettre dominicale eſt A, le premier Dimanche tombe au 1 Janvier, quand elle eſt B, il arrive le 2, &c.

1553. Pour trouver la lettre qui convient à chaque jour du mois dans une année quelconque, il ſuffit de diviſer par 7 le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année ; le reſte de la diviſion ſera le nombre répondant à cette lettre, parce que les lettres ſe ſuivent ſans interruption tout le long de l'année ; ſi ce nombre eſt 1, on aura A, s'il eſt 2, on aura B, & ainſi de ſuite, comme dans la petite table précédente. Pour connoître plus aiſément le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année, nous allons en donner une table pour les premiers jours, & pour les dixième & vingtième de chaque mois, dans laquelle il faut obſerver ſi c'eſt une année biſſextile d'ajouter toujours l'unité après le mois de Février, puiſque ces années-là ont un jour de plus, & qu'il ſe place au mois de Février pour y former un 29e jour.

Mois de l'année.	Jours écoulés depuis le commencement de l'Année.			
	Le premier.	Le dix.	Le vingt.	
Janvier.	1	10	20	
Février.	32	41	51	
Mars.	60	69	79	Ajoutez 1 dans les années Biſſ.
Avril.	91	100	110	
Mai.	121	130	140	
Juin.	152	161	171	
Juillet.	182	191	201	
Août.	213	222	232	
Septembre.	244	253	263	
Octobre.	274	283	293	
Novembre.	305	314	324	
Décembre.	335	344	354	

1554. Pour connoître à quel jour de la ſemaine répond un quantieme de mois; par exemple, le 20 Février 1762, à 1761 complet ajoutez le nombre de biſſextiles qui y ſont renfermées, ſavoir 440, ôtez-en 12 jours, & ajoutez-y 51, c'eſt-à-dire, les jours écoulés depuis le commencement de l'année, la ſomme 2240 étant diviſée par 7, il ne reſte rien; ce qui prouve que c'eſt un ſamedi, s'il reſtoit 1 ce ſeroit un Dimanche, & ainſi des autres.

Si l'on vouloit trouver la même choſe en ſuivant l'ancien calendrier, il ne faudroit ôter que 1 au lieu de 12, puiſqu'il y a 11 jours à compter de moins, quand on ſuit le vieux ſtyle.

1555. Voici une autre table qui ſert à trouver quel eſt le jour de la ſemaine qui répond à chaque jour du mois, quand on connoît l'année du cycle ſolaire, ou la lettre dominicale; on trouve ſouvent cette table gravée ſur le revers des cadrans ſolaires, à Bouſſole, que l'on faiſoit communément autrefois. Les chiffres qui ſont au haut de la table indiquent l'ordre des mois en ſuppoſant que le mois de Mars s'appelle 1; les autres chiffres de la table indiquent les jours du mois qui répondent à un des jours de la ſemaine, indiqué par la lettre dominicale qui eſt au bas de la table. Ainſi quand la lettre dominicale eſt G, comme en 1770 le dimanche arrive dans les mois d'Avril & de Juillet, le 1, le 8, le 15, le 22 & le 29; dans les mois de Septembre & de Décembre le 2, le 9, &c. Dans le mois de Juin le 3, le 10, &c. Quand la lettre dominicale eſt *F* comme en 1771, tous les nombres de la table marquent le lundi; car le nombre 1 qui répond aux mois 5 & 2, c'eſt-à-dire aux mois de Juillet & d'Avril, ſe trouve, en effet, indiquer que ces deux mois commencent par le lundi; le nombre 2 qui eſt au-deſſous de 7 & 10, c'eſt-à-dire, de Sept. & Déc. annonce que dans ces deux mois, le 2 eſt un lundi, &c. Lorſque les noms des mois ne ſe trouvent pas gravés dans les deux premieres lignes, & qu'il y a ſeulement 5, 7, &c. 2, 10, &c. Il faut ſe rappeller que 2 eſt le mois d'Avril, que 3 eſt le mois de Mai, & ainſi des autres.

TABLE

Table pour trouver le quantième du mois qui répond à chaque jour de la ſemaine, quand on connoît la Lettre Dominicale.

Juil.	Sept.	Juin.	Fév.	Août	Mai	Janv.
5	7	4	12	6	3	11
Avril	Déc.		Mars			Oct.
2	10		1			8
			Nov.			
			9			
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				
G	F	E	D	C	B	A
Dim.	Lun.	Mar.	Mer.	Jeudi	Ven.	Sam.

Il arrive ſouvent que la table précédente eſt gravée ſur de petits cadrans ſans que les noms des mois, les lettres dominicales, ni les jours de la ſemaine y ſoient marqués ; elle devient alors une enigme dont j'ai cru devoir donner ici l'explication, qui m'a été demandée plus d'une fois; elle ne ſe trouve, en effet, ni dans Clavius, ni dans le traité des inſtrumens de mathématiques de Bion, où l'on cherche quelquefois auſſi inutilement l'explication de pluſieurs eſpèces de cadrans ou de cercles, gravés en Allemagne ou en France, dans le 16e & le 17e ſiècle.

Du Cycle lunaire & du Nombre d'Or.

1556. Le Cycle lunaire eſt un eſpace de 19 années ſolaires, ou de 6939 jours dans lequel il arrive 235 lunaiſons, enſorte qu'au bout des 19 ans les nouvelles lunes arrivent au même degré du zodiaque, & par conſéquent au même jour de l'année que 19 ans auparavant. On appelle la première année d'un cycle lunaire, celle où la nouvelle lune arrive le 1 de Janvier, du moins, ſuivant le calendrier Grégorien; de ces 235 lunaiſons, on en donne 12 à chaque année, ce qui fait 228 lunaiſons, alternativement de 29 & de 30 jours; il en reſte 7 qu'on appelle lunaiſons emboliſmiques ou intercalaires, il y en a ſix de 30 jours chacune; mais la ſeptième eſt de 29 jours ſeulement, on la place à la fin du cycle ou de la 19e année, où elle forme une irrégularité. Ce cycle fut trouvé par Méton environ 430 ans avant J. C., & fut regardé dans la Grèce comme une découverte ſi belle qu'on en gravoit le calcul en lettres d'or; l'on appelle encore Nombre d'or, l'année du cycle lunaire, dans laquelle on ſe trouve.

Règle pour trouver le nomb. d'Or.

Toutes les fois que la nouvelle lune arrive le 1 jour de Janvier, on recommence un cycle lunaire, & l'on a 1 pour le nombre d'or. Voici la règle générale pour trouver le nombre d'or en tout temps; on ajoute 1 à l'année de notre ere, parce que dans l'année 1 de J. C. le nombre d'or a dû être 2, on diviſe la ſomme par 19; le reſte, s'il y en a un, marque l'année du cycle lunaire où l'on ſe trouve, c'eſt-à-dire, le nombre d'or qui convient à l'année propoſée : ainſi en 1764 après avoir ajouté 1, l'on diviſera 1765 par 19, le quotient ſera 92, parce que le cycle lunaire a recommencé 92 fois depuis J. C.; mais il reſtera 17, & cela nous apprend que le nombre d'or en 1764 eſt 17; ſi l'on ne trouve aucun reſte dans la diviſion, c'eſt une preuve qu'on eſt à la derniere année du cycle & que le nombre d'or eſt 19.

1557. Il eſt bon d'obſerver qu'il y a eu autrefois deux cycles de 19 ans, dont l'un commençoit trois ans plus tard que l'autre ; (Voyez l'art de vérifier les dates, par D. Clémencet & D. Durand, premiere édition, *pag.* XXXIV).

Dans la table chronologique de l'ouvrage que je cite, l'année 1. de notre ere répond à 18 du cycle lunaire, & à 2 du cycle de 19 ans, mais le premier n'y eſt pas continué au-delà de l'an 1580 ; le cycle de 19 ans eſt le ſeul qui aille juſqu'à la fin de la table, c'eſt celui qui a prévalu, & à qui nous avons tranſporté le nom de cycle lunaire, pour nous conformer à l'uſage actuel de tous les aſtronomes.

1558. Pour ſavoir exactement combien le cycle lunaire, dont nous nous ſervons, diffère de 19 années Juliennes de 365j $\frac{1}{4}$ chacune, ou de 6939j 18^h ; il ne s'agit que de multiplier par 235 la révolution ſynodique de la lune qui eſt 29j 12^h $44'$ $3''$ $10'''$ $48''''$ ſuivant les tables de Reinhold, ou tables Pruſſiennes qui furent employées dans le calendrier, on trouvera, ſuivant Clavius, (*cap.* 8. *n°.* 4. *pag.* 86), 6939j 16^h $32'$ $27''$ $18'''$: ainſi il y a un excès de 1^h $27'$ $32''$ $42'''$; donc à la fin des 19 ans les nouvelles lunes arriveront $1^h \frac{1}{2}$ plutôt, puiſque le cycle finira à peu-près $1^h \frac{1}{2}$ avant la fin des 19 ans, ce qui formera après 312 ans $\frac{1}{2}$, la valeur de 23^h $59'$ $52''$ $49'''$, c'eſt-à-dire, un jour moins $7''$ $11'''$; car 1^h $27'$: 19 : : 24^h : 312. En calculant plus rigoureuſement, on aura l'anticipation exacte d'un jour ſur 312 $\frac{1}{2}$ ans plus 23j 17^h : les 312 ans $\frac{1}{2}$ font, 1°, une équation d'un jour tous les 300 ans ; 2°, tous les 2400 ans, il y a 100 ans de retard, & l'équation d'un jour, eſt reculée d'un ſiècle, parce que les 12 $\frac{1}{2}$ ans omis tous les 300 ans, font un ſiècle après 2400 ans. C'eſt ſur ce dernier réſultat de 312 $\frac{1}{2}$ ans qu'on a réglé l'équation lunaire d'un jour entier pour chaque eſpace de 300 ans, moins un tiers de jour, après 2400 ans, à cauſe des 12 $\frac{1}{2}$ ans de plus ; on pourroit dire encore moins un tiers de jour, après 481436 ans, à cauſe des 23j 17^h, qui font alors à peu-près cent

Erreur du Cycle Lunaire.

ans ; mais parce que dans l'usage civil l'équation ne peut se faire que d'un jour, il a été statué qu'après chaque espace de 2400 ans, on en laisseroit passer 100, sans tenir aucun compte de l'équation lunaire. On néglige la différence qui avoit lieu après 481436 ans, parce que cette période excédoit celle de 300000 ans, pour laquelle principalement le calendrier avoit été dressé. (Clavius, *pag.* 133).

1559. Il y avoit du temps de la Réformation Grégorienne (1545), plusieurs astronomes qui, en suivant le calcul d'Hipparque, assuroient que c'étoit en 304 ans, & non en 312 ans $\frac{1}{2}$, qu'il devoit y avoir un jour à ajouter au cycle lunaire. Si l'on admet avec M. Mayer le mois lunaire vers 1700 de 29j 12^h 44′ 2″ 8921, on trouve pour 235 lunaisons 6939j 16^h 31′ 19″ 6435, c'est-dire, par rapport aux 19 années ou 6939j & 18^h, un défaut de 1^h 28′ 40″ 3565 ; or cette quantité est à 6939j 18^h, comme 24^h sont à 308 années 278j 3^h ; ainsi l'erreur du cycle lunaire seroit d'un jour en 308 ans & 278j 3^h, & non pas 312 ans & demi ; mais comme nous n'avons à expliquer ici que le Calendrier Grégorien, tel qu'il a été établi, nous supposerons, avec les auteurs de ce Calendrier, que la révolution de la lune est exactement telle qu'on la trouve dans les tables Prussiennes d'*Erasme Reinhold* (450) : il avoit comparé les observations de Copernic avec celles de Ptolomée & d'Hipparque ; il avoit dressé des tables calculées avec encore plus de soin que celles de Copernic, & elles passoient pour être les meilleures de toutes avant la publication des tables Rudolphines de Képler.

Tables de Reinhold employées dans le Calendrier.

Le cycle lunaire a été long-temps la seule manière que l'on eût de trouver les nouvelles lunes de chaque mois ; mais l'imperfection que nous venons de faire voir dans le cycle lunaire, lui a fait substituer celui des épactes, que nous expliquerons bientôt (1570).

Période Dyonisienne.

1560. Les combinaisons du cycle solaire & du cycle lunaire, forment une période qui doit ramener les nouvelles lunes aux mêmes jours de la semaine, & aux

mêmes jours du mois, puisque, à la fin de chaque cycle solaire, les jours du mois reviennent aux mêmes jours de la semaine, & qu'au bout de chaque cycle lunaire, les nouvelles lunes reviennent aux même jours du mois. Si l'on multiplie 19 par 28, ou le cycle lunaire par le cycle solaire, on aura 532 ans; c'est une période qui fut employée par *Denis le Petit*, l'an 527, (*Janus, hist. cycli Dionysiani*), ce fut lui qui, en réformant le calendrier, établit pour époque la naissance de J. C., ce qui fut adopté bientôt dans toute la chrétienté; cette période s'appelle aussi période Victorienne, & *grand cycle Paschal*, parce qu'après cet espace de 532 ans, les nouvelles lunes reviennent aux mêmes jours de la semaine & du mois ainsi que les lettres dominicales, Pâques & les fêtes mobiles se retrouvent dans le même ordre. Pour trouver l'année de cette période, où l'on est actuellement, il faut ajouter 457 à l'année courante, & diviser la somme par 532, le reste est l'année de la période Dionysienne; mais depuis la réformation du calendrier, cette période n'est plus d'aucun usage.

Du Cycle d'indiction, de la Période Julienne, & autres Périodes.

1561. Les indictions ou espèces d'ajournemens qu'on employoit dans les tribunaux sous Constantin, & les Empereurs suivans, formèrent une période ou un cycle de 15 ans qui s'est perpetué sans cause, & comme une forme arbitraire de numération; les indictions commencèrent au 25 Septembre 312. Les Empereurs Grecs, & l'église de Constantinople commençoient du 1 Septembre; les Papes qui s'en servent aussi, commencent au 1 Janvier 313; cette période n'a rien de plus remarquable que d'être citée dans les actes de la Cour de Rome.

Si l'on prolonge cette période en remontant, on trouve qu'elle commenceroit 3 ans avant l'ere chrétienne;

il suffit donc d'ajouter 3 au nombre de l'année, & de diviser la somme par 15, le reste de la division sera le nombre du cycle d'indiction qui convient à l'année proposée. Ainsi pour 1763, on divisera 1766 par 15, le quotient 117 nous apprend qu'il y a eu 117 révolutions de ce cycle depuis le commencement de notre ere, & le reste 11 de la division est le nombre d'indiction qui convient à 1763.

1562. La Période Julienne est le produit des trois cycles, solaire, lunaire & d'indiction, ou de 28, 19 & 15; c'est-à-dire, un espace de 7980 ans, dans lequel il ne peut y avoir deux années qui aient les mêmes nombres pour les trois cycles; mais au bout duquel les trois cycles reviennent ensemble dans le même ordre. Pour savoir combien de temps il y a que cette période a commencé, il ne faut qu'ajouter 4713 à l'année de l'ere chrétienne, & l'on a l'année de la période Julienne qui répond à l'année courante où l'on est.

La période Julienne a été proposée par Joseph Scaliger comme une mesure universelle en chronologie; & nous y réduirons ci-après toutes les époques (1595). Képler & Boulliaud en ont fait usage dans leurs tables astronomiques, & sur-tout *Mercator* dans son astronomie imprimée en 1676.

Les époques des mouvemens célestes sont rapportées à la première année de la période Julienne, dans Muller, & celles de la chronologie dans le grand ouvrage du P. Petau, *de Doctrina temporum*. Par exemple, la création du soleil, suivant le calcul de Scaliger, répond au 22 Octobre 764 de cette période, ou a l'an 730, suivant le calcul du P. Petau (1595).

1563. Lorsque pour une année dont on connoît le cycle solaire, le nombre d'or & l'indiction on cherche la période Julienne, c'est la matière d'un problême indéterminé arithmétiquement, mais déterminé chronologiquement, dont on trouve la solution dans presque tous les livres d'algèbre; il se réduit à chercher un nombre qui, divisé par trois nombres donnés, produise trois

restes donnés (*Instit. astr. pag.* 620). En voici une solution différente.

PROBLÈME. *Trouver un nombre qui divisé par 28 donne pour reste un nombre a, divisé par 19 donne un reste b, & divisé par 15 donne un reste c.*

SOLUTION. Nommons les trois restes de la division x, y, z, on aura pour le nombre cherché $28x + a = 19y + b = 15z + c$. Pour résoudre en nombres entiers l'équation $28x + a = 19y + b$ ou $y = x + \frac{9x + a - b}{19}$, je suppose $m = \frac{9x + a - b}{19}$, $x = 2m + \frac{m - a + b}{9}$; j'égale encore cette fraction à n, & j'ai $m = 9n + a - b$, donc $x = 2m + \frac{m - a + b}{9} = 19n + 2a - 2b$; $28x + a = 532n + 57a - 56b = 15z + c$. Pour résoudre de même en nombres entiers cette équation, je la mets sous cette forme $z = 35n + 3a - 3b + \frac{7n + 12a - 11b - c}{15}$ & j'égale la fraction à p, j'en tire $n = 2p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7}$, & faisant cette fraction $= q$, on a $p = 7q \quad 5a - 4b - c$, donc $n = 2p - a + b + q = 15q + 9a - 7b - 2c$; & $532n + 57a - 56b$ qui est la valeur de $15z + c$ sera $= 7980q + 4845a - 3780b - 1064c$; c'est aussi la valeur du nombre cherché qui est l'année de la période Julienne. Delà suit une règle générale : les produits du nombre d'or par 3780 & de l'indiction par 1064 étant ôtés du produit de 4845 par le cycle solaire, (augmenté s'il le faut de 7980), on divisera la différence par 7980, si cela se peut, & le reste de la division sera le nombre cherché, ou l'année de la période Julienne.

EXEMPLE. En 1770 les cycles sont 15, 4 & 3, les produits 72675, 15120 & 3192, le quotient 6, & le reste de la division 6483; c'est l'année de la période Julienne qui répond à 1770.

1564. Quoique le cycle lunaire soit la période la plus simple de celles qui expriment avec quelque exactitude le retour de la lune au soleil, il y a cependant *Autres périodes lunaires.*

plusieurs autres périodes qui ont eu de la célébrité, celle de 8 ans employée par Cléostrate & Harpalus, la période Caldéenne de 18 ans & dix jours dont nous avons parlé assez au long (1501). Celle de 59 ans proposée par Philolaus & Œnopides, & celle de Calippus.

Période Calippique.

Calippus Cyzicenus, astronome Grec, vivoit 330 ans avant J. C., il proposa le premier la période de 76 ans quadruple du cycle lunaire de Méton, parce qu'en ôtant un jour de 4 cycles il le rendoit plus exact. Voyez Censorinus, c. 18. Ptolomée, V. 3. On prétend qu'il reconnut l'erreur du cycle de Méton, dans une éclipse de lune arrivée 6 ans avant la mort d'Alexandre. Ce cycle ou cette période de Calippus commence à l'automne de l'année de la période Julienne 4383, ou 330 ans avant J. C., il en est parlé quelquefois dans l'almageste de Ptolomée, & dans plusieurs auteurs tels que Scaliger, *de emend. temp. pag.* 84, 421. Pétau, *de Doctrina temporum II*, 16, & suiv. Ptolomée, *Almag.* III, 2. VII, 2 & 3.

Les anciens parlent encore de la période de 82 ans proposée par Démocrite, de celle de 247 ans par Gamaliel, de celle de 304 ans employée par Hipparque pour les années civiles (Riccioli, *Almag. I*, 243).

Grande année des patriarches.

1565. On trouve aussi dans les anciens quelques vestiges d'une période de 600 ans que M. Cassini a fait valoir comme la plus exacte de toutes les périodes lunisolaires. Josephe, dans ses Antiquités Judaïques (*Liv.* 1, *ch.* 4, *art.* 15), dit que les Patriarches n'auroient pu perfectionner l'astronomie s'ils avoient vécu moins de 600 ans, *parce que ce n'est qu'après la révolution de six siècles que s'accomplit la grande année.* M. Cassini observe aussi que 600 années solaires qui seroient de $365^j\ 5^h\ 51'\ 37''\frac{1}{2}$ chacune, & 7421 mois lunaires (supposés de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''$ chacun) font de part & d'autre la même somme, savoir, 219146 jours $12^h\ 15'$ ou $18934258500''$; il n'y a pour la lune que $3''$ de plus; or ces périodes sont peu différentes de celles que nous avons trouvées, savoir, pour l'année, $365^j\ 5^h\ 48'\ 45''\frac{1}{2}$,

$45'' \frac{1}{2}$, & pour le mois lunaire, il y a 2000 ans, $29^j\ 12^h\ 44'\ 2''\ 95$. Ainsi dans l'espace de 600 ans la lune doit revenir en conjonction avec le soleil dans le même point du ciel; & cette période *lunisolaire* parut à M. Cassini si intéressante qu'il l'appella PÉRIODE DE LOUIS LE GRAND, (*Anciens mém. de l'acad.* tom VIII, *pag.* 5, Dissertation de M. de Mairan sur la période de 600 ans, à la suite de ses lettres au P. Parennin). Période de de Louis-le-Grand.

J'observerai seulement que si l'on employe la durée de l'année que nous connoissons, & le mois synodique tel que nous l'avons indiqué ci-devant, l'on aura $28^h\ 33'\ 51''$ de trop dans les 7421 mois lunaires, & la lune retarderoit de plus d'un jour au bout des 600 ans; mais dans ces temps reculés on ne pouvoit connoître l'année solaire avec une si grande précision.

1566. Le Néros des Caldéens n'étoit suivant M. Goguet que cette période de 600 ans; mais on dispute beaucoup sur la valeur de trois périodes anciennes appellées Sossos, NÉROS, & SAROS. Bérose, Prêtre de Babylone en parloit dans son histoire des Caldéens composée 300 ans avant J. C. Cette histoire qui ne subsiste plus, fut citée par *Jule Africain*, auteur du deuxieme siècle, qui composa une chronique Grecque, mais elle est également perdue; George surnomné le *Syncelle* qui dans le huitième siècle a écrit une chronographie en Grec, cite un passage de Bérose qui avoit été rapporté par Jule Africain, où il s'agit du Sossos, du Néros & du Saros, & c'est-là le seul passage ancien où il en soit parlé. Le Syncelle cite Annianus & Panodorus qui avoient prouvé que le Sossos étoit de 60 jours, le Néros 600 jours, & le Saros de 3600 jours, ou 9 ans & dix mois; M. Fréret a cru que le Saros étoit de 19 ans & demi, (*Mém. de l'acad. des inscr.* tom. VI). Le R. P. Giraud de l'Oratoire pense qu'il est de 3600 mois lunisolaires de 30 & de 31 jours qui font 3711 lunaisons (Mém. de Trévoux Févr. 1760). Des Saros, Neros & Sossos.

M. Goguet (Tom. III, *pag.* 261) & M. Gibert, (Mém. de Trévoux, Avril 1760) estiment le Saros de

600 ans, M. de Mairan a réfuté M. Goguet à la suite de ses lettres au P. Parennin. Cette discution me meneroit trop loin; mais je dois remarquer avec M. le Gentil (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 64), que Suidas & après lui M. Halley ont attribué le nom de *Saros* à la période Caldaïque de 18 ans & onze jours ou de 223 lunaisons (1501), mais sans aucune espèce de preuve.

Période lunaire des Egyptiens.

1567. L'année lunaire est de 354 jours 9^h; car on peut négliger ici 11 minutes qu'il y a de moins que les 9 heures (1481), ainsi le temps que le commencement de l'année lunaire doit mettre à revenir d'accord avec le commencement de l'année solaire est de 2835 années solaires tropiques, qui font exactement 2922 années lunaires.

Cette période lunaire sert à M. Gibert (*Mém. de Trévoux*, 1762, *pag.* 197) pour expliquer un passage célèbre, mais très-obscur, d'Hérodote (*L.* 2, *c.* 42).

Passage singulier d'Hérodote.

Hérodote voyageant en Egypte 450 ans avant J. C. entendit dire aux Prêtres Egyptiens que pendant la durée de 341 regnes qu'ils comptoient dans leur histoire, jusqu'au temps de Séthon, qui étoit sur le trône quand Sennachérib vint fondre sur l'Egypte, *le soleil s'étoit levé quatre fois des points où il a coutume de se lever; & que deux fois il avoit recommencé son cours du côté où il se couchoit au temps d'Hérodote, deux fois il l'avoit fini du côté où il se levoit au même temps.*

1568. M. Gibert pense que le mot de *soleil* doit se prendre au figuré; en effet, suivant le témoignage de *Phavorinus*, au mot Ἥλιος, on disoit très-bien un soleil pour dire un jour, ou pour dire une année. M. G. évalue les 341 regnes à 11340 ans, à raison de 33 ans pour chacun, & il observe que dans cet espace de temps la période lunaire s'est accomplie 4 fois; les 4 renouvellemens de cette période donneront pour ainsi dire quatre levers du soleil, ou quatre commencemens d'année Egyptienne aux commencemens de l'année lunaire; mais dans ces 11340 ans l'année avoit commencé

deux fois dans la saison où elle finissoit au temps d'Hérodote, & fini deux fois dans la saison où commençoit l'année; voila peut-être le sens emblématique du passage. Cette conjecture paroît plus soutenable que les applications forcées qu'on a voulu faire des hypothèses astronomiques à ce passage d'Hérodote. V. M. *Fréret* sur la chronologie de Newton; M. *Goguet sur l'origine des sciences*, & différens volumes des mémoires de l'académie des belles lettres, où ce passage d'Hérodote est discuté.

1569. La précession des équinoxes formoit une grande période appellée chez les anciens Αποκατάστασις, ou *restitutio*, à cause du rétablissement des étoiles aux mêmes positions par rapport aux cercles de la sphère; elle est de 25972 ans, comme on le verra dans le XVIe. livre (2745). Les peuples superstitieux firent de ce retour purement astronomique, un retour moral & civil des choses humaines, auquel on croit que Virgile fait allusion :

> Alter erit tum Tiphys, & altera quæ vehat Argo
> Delectos heroas : erunt etiam altera bella,
> Atque iterum ad Trojam magnus mittetur Achilles.
>
> Eclogue IV, v. 34.

DES ÉPACTES OU DE LA RÉFORMATION GRÉGORIENNE *pour les années lunaires.*

1570. Le calendrier établi par Grégoire XIII. en 1582, avoit pour premier objet de règler les années civiles de manière que l'équinoxe du printemps arrivât toujours aux environs du 21 de Mars, pour faire ensorte que les mêmes saisons revinssent perpétuellement aux mêmes jours du mois : cet objet a été rempli par l'ordre des intercalations que nous avons expliqué (*art.* 1547).

Mais la réformation avoit encore une autre branche;

importante dans les vues du souverain Pontife, c'étoit de remettre les nouvelles lunes & sur-tout le quatorzième de la lune Paschale au même état où elles avoient été en 325 au temps du Concile de Nicée, & dont elles étoient éloignées de plus de quatre jours.

Règle du Concile de Nicée.

1571. Suivant le Concile de Nicée, on doit célèbrer la fête de Pâque le 1 Dimanche *après* le 14e. de la lune, si ce 14e. arrive le 21 de Mars ou après le 21 de Mars; ainsi la fête de Pâque ne doit jamais arriver plutôt que le 22 de Mars, car la règle dit que ce sera le premier Dimanche *après* le quatorzième; de même elle ne doit jamais arriver plus tard que le 25 Avril; car si la pleine lune tombe au 20 Mars, ce ne sera pas la pleine lune Paschale, on attendra celle qui suit le 21 Mars ou celle du 18 Avril; & si le 18 Avril se trouve un Dimanche, ce ne sera encore que le Dimanche suivant, 25 Avril, qui sera le jour de Pâque.

Limites Paschales.

Le P. Alexandre, (Hist. ecclésiast. tom. III, *pag.* 378, chap. V. dissert. V), fait voir combien l'église a pris de soin depuis le Concile de Nicée pour empêcher qu'il ne se glissât quelque erreur dans la célébration de la Pâque; on s'en est occupé dans divers siècles; mais ce fut sous Grégoire XIII. en 1582, que la réformation du calendrier fut consommée à cet égard. Un des premiers qui s'en occupèrent fut S. Hyppolite, Evêque & Martyr qui vivoit l'an 228.

1572. Le cycle Paschal de S. Hyppolite étoit de 112 ans, il étoit composé de 7 cycles de 16 ans; les auteurs ne nous en avoient donné aucune idée; mais en 1551 en fouillant dans les champs, qui sont aux environs de Rome sur le chemin de Tivoli, on trouva dans les mazures d'une ancienne église de S. Hyppolite une statue assise, ayant à ses côtés ce cycle en lettres Grecques depuis l'an 222 jusqu'à l'an 333. V. la dissertation de M. Bianchini sur ce cycle imprimée à Rome en 1703 in-folio, où il parle aussi d'un cycle lunaire de César trouvé à Rome sur un marbre antique. Il en est aussi fait mention dans le supplément

qui eſt à la fin du XVIIe. volume de l'Encyclopédie.

Il y a eu d'autres cycles relatifs à la fête de Pâques : on trouvera des détails conſidérables ſur toutes les périodes qui ont ſervi à cet uſage dans l'ouvrage intitulé : *Diſſertationes de cyclis Paſchalibus qui Enneadecaëteride Alexandrina nituntur, Dyonyſii ſcilicet & Bedæ, Ravennatenſi Iſidori felicis, Cyrilli, Theophili, Aniani, Panodori Metrodori, Anatolii, Euſebii, Synodi Nicænæ & Athanaſii, ut & de Enneadecaëteridis Alexandrinæ natura & conſtitutione, initio ſeu primo anno, ratione emboliſmi, initio ſingulorum annorum & hujus initii tranſlatione, ut & de computo lunari Alexandrinorum necnon de computo ſolari in genere, & Pauli Alexandrini atque Alexandrinorum in ſpecie. Amſtelædami apud Joannem Boom*, 1736, *petit in-4°.* Cycles pour la Pâque.

Les ſouverains Pontifes s'occupèrent plus d'une fois du projet de cette réformation (1545). Grégoire XIII, raſſembla à Rome des ſavans de divers pays dès l'année 1576 ; un médecin nommé *Aloiſius Lilius* lui préſenta pour lors un projet de calendrier intitulé : *Compendium novæ rationis reſtituendi calendarii*, qui parut très-bien fait, que le Pape adreſſa en 1577, à tous les Princes chrétiens & à toutes les univerſités célèbres pour le faire examiner, & qui fut enfin adopté dans le bref de la réformation (1546).

1573. L'ÉPACTE (a) dans ſon principe eſt ce qu'il faut ajouter à l'année lunaire (1481) pour former l'année ſolaire (886) ; la ſuite des épactes eſt la ſuite des différences qui ſe trouvent entre ces deux ſortes d'années. Il y a des épactes aſtronomiques deſtinées à trouver exactement les ſyzygies aſtronomiques moyennes en heures, minutes & ſecondes (art. 1752). Les épactes du calendrier ſont deſtinées ſeulement à trouver, ſuivant l'intention de l'égliſe, & la règle établie en 1582, les jours des nouvelles lunes eccléſiaſtiques ; je dis ſuivant l'intention & la règle de l'égliſe, parce que les nouvelles lunes eccléſiaſtiques ne ſont pas tout-à-fait d'ac- Epactes du Calendrier.

(a) ἐπάγω, adjicio, j'ajoute.

cord avec les N. L. moyennes de l'aſtronomie (1589).

L'épacte qu'on aſſigne à chaque année dans le calendrier eſt le nombre qui indique l'âge de la lune, au commencement de cette année, ſuivant le calendrier eccléſiaſtique ; delà il ſuit que ſi la nouvelle lune arrive le 1 Janvier l'épacte eſt zéro pour cette année-là; mais l'année ſuivante elle ſera de 11^{j}, parce que l'année lunaire n'eſt que de 354^{j}, & l'année ſolaire eſt de 365 ; ce qui fait que la nouvelle lune étant tombée au 20 Décembre, la lune aura 11 jours le 1 Janvier de l'année ſuivante ; de même l'année d'après l'épacte eſt de 22 ; la troiſième année elle ſeroit de 33 ſi l'on n'en ôtoit 30 pour former un mois complet, elle ſe réduit donc à 3. Par ce moyen les épactes d'années ſuivent l'ordre naturel des multiples de onze en retranchant toujours 30; ſavoir, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29. Tel eſt l'ordre naturel & primitif des épactes, quand on ſuppoſe les mois lunaires de 29 & de 30 jours, & les années civiles de 365 jours, avec une biſſextile tous les quatre ans.

Calendrier perpétuel.

1574. Pour que l'épacte de l'année ſerve à indiquer la nouvelle lune, tous les mois, on place dans le calendrier perpétuel (1551), c'eſt-à-dire, le calendrier des lettres dominicales, qui eſt joint à tous nos livres d'égliſes, les 30 épactes à côté des jours du mois, en rétrogradant, ſuivant cet ordre, 30, 29, 28, &c. Si la nouvelle lune arrive le 2 Janvier, elle ſera marquée par l'épacte 29, qui ſe trouvera également vers le 1 de Février, le 2 de Mars, & vers tous les autres jours de l'année où il devra y avoir nouvelle lune : on dira que l'épacte de cette année-là eſt 29. L'année d'après, l'épacte ſera plus forte de 11 jours, parce que les nouvelles lunes arriveront onze jours plutôt ; ainſi ôtant 30 de la ſomme, on aura 11 pour l'épacte ſuivante, & toutes les fois que la lune avancera d'un jour, il faudra augmenter l'épacte d'une unité, pour que la nouvelle lune ſoit marquée un jour plutôt dans le calendrier perpétuel. Ainſi au bout de 19 ans, on ajoute 12 au lieu de 11,

& cette addition se fait toutes les fois que le nombre d'or passe de 19 à 1, parce que la derniere lunaison de chaque cycle lunaire n'est que de 29 jours, au lieu de 30, (1556), ce qui fait avancer les nouvelles lunes d'un jour.

1575. Cet ordre primitif & régulier est celui qu'on suppose à l'époque du concile de Nicée; mais en s'en éloignant, on observe deux défauts dans cette règle; ou deux interruptions, on les appelle *équation lunaire*, & *équation solaire*; la premiere vient de ce que le cycle lunaire, de 19 ans, est défectueux d'environ $1^h\frac{1}{2}$ (1558), les 235 lunaisons ne faisant pas tout-à-fait 19 ans, de sorte qu'au bout de 312 ans les nouvelles lunes arrivent un jour plutôt, & l'on est obligé de prendre l'épacte plus forte d'une unité. La seconde équation a lieu à cause du retranchement de trois bissextiles sur l'espace de 400 ans (1547), qui fait que la nouvelle lune arrive plus tard, & qu'il faut diminuer l'épacte. De cette double inégalité, il résulte que chaque siècle exige un nouvel ordre d'épactes; il y en a 30 suites différentes qui forment ce qu'on appelle *la table étendue des épactes*, (*Planche VIII*); ces 30 suites tiennent lieu de 30 calendriers qu'il auroit fallu avoir, & elles composent un total aussi parfait, que les règles de l'église & de la société civile pouvoient l'exiger.

Table des Epactes. *Planche VIII.*

Ces 30 lignes sont désignées par 30 lettres de l'alphabet qui descendent dans un ordre rétrograde; mais dans lesquelles on a seulement évité d'employer certaines lettres qui pouvoient occasionner de la confusion dans les caractères.

1576. En tête de la table on trouve les 19 nombres du cycle lunaire, en commençant par 3, qui au temps du concile de Nicée se plaçoit vis-à-vis le 1 Janvier. La premier ligne horizontale de la table, marquée *P*, n'est autre chose que la suite des nombres que nous avons indiqués ci-dessus (1573), en commençant par 0 ou * sans autre interruption que celle d'un jour de plus, quand le nombre d'or devient 1. (1574); la seconde ligne mar-

quée *N* est la suite des nombres qui ont une unité de moins que la précédente, c'est-à-dire, 29, 10, 21, &c. La troisième ligne *M*, commence par 28, & ainsi des autres jusqu'à la dernière ligne qui commence par 1, 12, &c.

Le progrès des nombres de chaque ligne est toujours par XI comme celui de la premiere ligne; il y a dans chacune 19 chiffres qui répondent également aux 19 nombres d'or, qui croissent continuellement de XI, en retranchant 30 à chaque fois qu'ils s'y trouvent, exceptés sous le nombre d'or 1, qui est l'avant-dernier de tous, car alors l'épacte augmente de 12, parce que la dernière lune de l'année n'a que 29 jours, quoiqu'elle soit une des 7 lunaisons intercalaires, elle est la seule exceptée (1574).

TABLE de l'équation des Epactes où l'on voit quelle ligne on doit prendre pour chaque siècle dans la table étendue des Epactes.

	Années.	Ligne d'Ep.		Années.	Ligne d'Ep.		Années.	Ligne d'Ep.
	1582	D		2500	u		3500	p
Biss.	1600	D		2600	t	Biss.☾	3600	q
	1700	C	☾	2700	t		3700	p
☾☾	1800	C	Biss.	2800	t		3800	n
	1900	B		2900	s	☾	3900	n
Biss.	2000	B	☾	3000	s	Biss.	4000	n
☾	2100	B		3100	r		4100	m
	2200	A	Biss.	3200	r		4200	l
	2300	u	☾	3300	r	☾☾	4300	l
Biss.☾	2400	A		3400	q	Biss.	4400	l

Cette table a été continuée par Lilius & par Clavius jusqu'à l'an 301700, & même quelques siècles au-delà, pour faire voir qu'alors elle recommencera dans le même ordre qu'en 1700, *C*, *C*, *B*, *B*, &c. ensorte qu'ils n'avoient

voient besoin que de 3000 nombres pour exprimer tous les changemens possibles des épactes à perpétuité, en supposant que les moyens mouvemens du soleil & de la lune fussent dans les siècles à venir, tels que les tables Pruténiques les supposoient; & que les variations du calendrier revinssent toutes au bout de trois cent mille ans.

Il y a 8 colonnes dans la Planche VIII, depuis le nombre d'or 12, jusqu'au nombre d'or 19, où l'on a mis l'épacte en chiffres Arabes, 25, au lieu de mettre XXV en chiffre romain, ce sont les 8 suites d'épactes qui contiennent vingt-cinq & ving-six, & dans lesquelles la nouvelle lune auroit pu être indiquée deux fois en 19 ans pour le même quantième, sans cette diversité de caractère, comme nous l'expliquerons à l'occasion du calendrier perpétuel (1586).

1577. Il ne s'agit plus que d'apprendre à distinguer laquelle des 30 lignes doit s'employer à chaque siècle, puisque c'est à la fin de chaque siècle qu'il se fait une interruption, en vertu de l'équation solaire & de l'équation lunaire (1575). La premiere ligne marquée *P* fut attribuée dans la réformation du calendrier au sixième siècle; on supposa que les nombres d'or indiquoient exactement pour ce siècle-là les nouvelles lunes; l'on prit pour époque du calendrier l'année 550, temps postérieur à celui du concile, parce qu'on voulut que les nouvelles lunes du calendrier fussent en retard sur les nouvelles lunes astronomiques moyennes, de peur que la fête de Pâques ne vînt à être célébrée avant le XIV de la lune paschale, contre l'intention de l'église (1589; or les nouvelles lunes moyennes arrivent quelquefois un peu avant la nouvelle lune vraie, sur laquelle les Juifs se régloient; l'église a donc voulu avoir dans son calendrier des nouvelles lunes moyennes qui ne pussent jamais devancer les vraies, mais qui les suivissent toujours.

1578. On a pris pour racine l'année 550 (a), sous

(a) C'est pourtant à l'année 500 qu'on a attribué la premiere ligne des épactes *P*, mais on verra la raison de ces 50 ans d'anticipation (1580).

le règne de l'Empereur Justinien; alors les nombres d'or indiquoient les nouvelles lunes environ 16 heures plus tard qu'au temps du concile de Nicée, comme on le voit par les tables astronomiques, & il n'y avoit plus de danger qu'elles pussent être indiquées plutôt que les nouvelles lunes vraies. L'on attribue à l'année 500 & au sixième siècle entier, la première ligne de la table générale des epactes, qui est marquée *P* dans Clavius, *pag.* 110, & dans la table que nous avons expliquée; mais comme au bout de 300 ans, c'est-à-dire, l'an 800, il y a une équation lunaire & que la lune anticipe d'un jour dans le calendrier, les nouvelles lunes arrivant un jour plutôt, c'est le nombre précédent qui indique les nouvelles lunes, & il faut prendre la dernière ligne a, dont les épactes sont plus fortes d'un jour; après un autre intervalle de 300 ans, c'est-à-dire, l'an 1100, il y a encore une équation lunaire, la lune anticipe encore d'un jour, il faut donc pour le douzième siècle remonter d'une ligne, & l'on aura la ligne b qui commence par 11, XIII, &c. De même en 1400, on aura la ligne marquée c.

En 1582 l'on retrancha dix jours de l'année (1548); les nouvelles lunes arrivèrent donc dix jours plus tard, ainsi il faut descendre de dix lignes dans la table générale, & venir à la ligne *D* pour 1583; je dis que cela s'appelle descendre, parce que de la ligne c à la ligne a, on descend d'abord de deux lignes, & si l'on diminue encore l'épacte de l'unité, on trouve les nombres de la première ligne *P* qui est censée descendre encore davantage; car la table générale des épactes est comme un cercle dans lequel on recommence dans le même ordre & sans interruption, lorsqu'on l'a parcouru tout entier.

En 1600, il n'y a eu, ni équation lunaire, ni équation solaire, puisque la première avoit été employée en 1400, & que la seconde ne devoit arriver qu'en 1700, 1800 & 1900 (1547), ainsi l'on a conservé la même ligne *D*, qui commence par XXIII.

1579. En 1700, il y a eu une équation solaire, parce qu'on a omis une bissextile (1547), & que l'année a été plus courte d'un jour; les nouvelles lunes ont dû arriver par cette raison un jour plus tard, & pour les indiquer un jour plus tard, il faut avoir l'épacte plus petite d'une unité (1574), ainsi en 1700, il a fallu descendre d'une ligne dans la table & prendre la suite des épactes qui répond à la lettre *C*, & qui commence par XXII. Cela doit arriver ainsi toutes les fois que l'on omet un jour, ou qu'on passe une bissextile, ce que nous appellons équation solaire. Il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700, nous dirons bientôt pourquoi elle fut remise à 1800 (1580, 1589).

1580. L'équation lunaire ayant été employée pour l'année 1400, en 1700 il y avoit 300 années d'écoulées, & il auroit fallu encore une équation lunaire (1589), cependant comme la lune anticipe d'un jour sur le cycle lunaire, non pas en 300 ans, mais seulement en 312 $\frac{1}{2}$ ans, ces 12 $\frac{1}{2}$ ans avoient été omis 4 fois depuis l'an 500; savoir en 800, 1100, 1400, 1700, ainsi il y avoit 50 ans, dont on avoit anticipé l'équation lunaire, d'ailleurs en partant de l'année 550, c'étoit en 850, 1150, 1450, 1750, qu'on devoit employer l'équation lunaire, ainsi ajoutant encore à 1750 les 50 ans dont on étoit resté en retard, on trouve qu'en 1800 il faudra employer l'équation lunaire, ce qui feroit une augmentation dans l'épacte (1574); mais en 1800, il y aura un jour intercalaire omis, de même qu'en 1700, & par conséquent, on devroit de même retrancher un de l'ordre des épactes, & descendre d'une ligne dans la table générale; ces deux effets se détruiront, les nouvelles lunes ne monteront ni ne descendront, elles demeureront aux mêmes jours, la même ligne *C* dans la table générale servira pour tout le 19e. siècle qui commence en 1800, comme elle avoit servi pour le siècle précédent.

En 1900, on omettra encore un jour intercalaire, les nouvelles lunes descendront d'un jour, & il faudra

descendre à la ligne *B* de la table générale. L'année 2000 ne changera point de ligne, parce qu'il n'y a cette année-là, ni intercalaire omise, ni équation lunaire. En 2100 l'on omet une intercalaire, & l'on employe l'équation lunaire, parce qu'il y a 300 ans d'écoulés depuis 1800, où l'on a fait la dernière équation, ainsi le 22e. siècle qui commence à 2100 conservera la même lettre *B* que le siècle précédent, de même que je l'ai remarqué pour l'année 1800.

En 2200, on omettra une intercalaire, & il n'y aura point d'équation lunaire, ainsi on descendra à la ligne *A* de la table générale, & par la même raison en 2300 on descendra à la ligne marquée u.

En 2400, on aura eu 300 ans depuis la dernière équation lunaire de 2100, il y aura donc une équation lunaire; mais il n'y aura point d'équation solaire, ainsi les nouvelles lunes monteront d'un jour (1574), & l'on reviendra à la ligne *A* de la table générale.

2500, Equation solaire, on descendra à la ligne u.
2600, Equation solaire, on descendra à la ligne t.
2700, Equat. sol. & lun. on conservera la ligne t.
2800, Aucune équation, on conservera la ligne t.

Ainsi dans les principes de Lilius, il est aisé de continuer à l'infini la table de l'équation des épactes, si l'on a égard à l'intercalaire qu'on doit retrancher trois fois en 400 ans, & à l'équation lunaire qui doit arriver tous les 300 ans, d'abord sept fois de suite, & après cela au bout de 400 ans seulement; cette différence vient de ce que les 12 ans & demi qu'on néglige tous les 300 ans, se trouvent avoir fait 100 ans au bout de 8 fois 300 ou de 2400 ans, il faut renvoyer alors l'équation lunaire à l'année séculaire qui suivra, comme nous l'avons indiqué, lorsque parvenus à 1700 nous avons rejetté l'équation lunaire à 1800; il arrivera donc toujours que l'équation lunaire sera différée au bout de 2400 ans à compter de 1800, c'est-à-dire, dans les années 4300, 6800, 9300, 11800, & ainsi de

ſuite en allant toujours par 2500 ; alors au lieu d'être employée tous les 300 ans, elle ne le ſera qu'au bout de 400 ans pour cette fois-là ; par ce moyen la lune ne remonte dans le calendrier que de 8 jours en 2500 ans, au lieu qu'elle remonteroit de 8 jours en 2400 ans. Nous avons marqué ces années de retard d'un double caractère ☾☾ dans la table de la page 304.

1581. Cependant Clavius obſerve qu'après l'an 8100, il doit y avoir une erreur dans la méthode de Lilius pour trouver l'équation, en ſorte qu'à l'an 8200 il faudra deſcendre de la ligne *F* à la ligne *D*, c'eſt-à-dire, de deux lignes, & non pas d'une ſeule comme cela arriveroit ſuivant la règle précédente, & il donne une méthode pour conſtruire d'une autre manière la table des épactes après l'an 8100, je ne la rapporterai pas ici, l'auteur convient lui-même que c'eſt aſſez pour nous d'avoir une règle conſtante pour un ſi long eſpace de temps ; d'ailleurs il ſera aiſé, en conſervant même toute la diſpoſition du calendrier, de monter ou de deſcendre d'une ligne dans la table générale, ſi dans la ſuite des temps on vient à s'appercevoir que les nouvelles lunes ont monté ou deſcendu dans le calendrier, ainſi il ſeroit très-inutile de s'occuper ici de la méthode que Clavius a donnée, c'eſt une pure curioſité (*Cap.* 12, *n°.* 10, *pag.* 150). On ne l'a point ſuivie dans le calendrier Grégorien. Petite erreur du calendrier Grégorien.

Si l'on vouloit pouſſer la préciſion encore plus loin, il faudroit ajouter une nouvelle équation lunaire au bout de 481436 ans, parce qu'il y avoit outre les $312\frac{1}{2}$ ans 23^h & $17'$ (1558), qui font alors 100 ans ; mais comme cet eſpace de temps alloit au-delà du cycle de trois cent mille ans qu'on a regardé comme le grand cycle qui renouvelle le calendrier, Lilius a négligé cette dernière équation lunaire, bien perſuadé qu'il n'y avoit aucun calcul aſtronomique qui pût ſe trouver encore exact après une ſi longue période. Autre équation que l'on néglige.

1582. On ſera curieux peut-être de voir ici la raiſon du grand cycle de 300 mille ans qui ramène les Cycle de trois cent mille ans.

épactes aux mêmes lettres & dans le même ordre : je considère d'abord qu'après dix mille ans, c'est-à-dire, après 100 siècles, on retrouve la même variété dans les lettres de la table générale, mais non pas les mêmes lettres ; après 1600 les deux années séculaires suivantes 1700 & 1800 ont la même lettre *C*, les trois années suivantes 1900, 2000 & 2100 ont la même lettre *B* ; l'année 2200 a la lettre *A*, l'année 2300 la lettre u, l'année 2400 la lettre *A*, l'année 2500 la lettre u, les 3 années 2600, 2700 & 2800 ont la même lettre t, &c. Et ce sera la même chose après 10 mille ans ou cent années séculaires ; par exemple, commençons à l'an 11600, & nous aurons les lettres suivantes.

Après 11600 les deux années 11700 & 11800 auront la même lettre i

Les 3 années 11900, 12000, 12100 auront la même lettre . . . . . h

L'année 12200 aura la lettre . . . . . g
L'année 12300 aura la lettre . . . . . f
L'année 12400 aura la lettre . . . . . g
L'année 12500 aura la lettre . . . . . f
Les 3 années 12600, 12700, 12800 auront la même lettre . . . . . e

Si l'on commençoit dix mille ans plus tard, ou à l'année 21700, on retrouveroit un ordre semblable dans la variété des épactes ; en voici la raison : dans l'espace de 100 années séculaires, il arrive 32 équations lunaires, puisqu'on a vu que la lune en 25 séculaires rémonte dans le calendrier de 8 jours, ainsi les dix mille ans qui précèdent une époque, & les dix mille qui la suivent ont le même nombre d'équations lunaires, ils ont aussi le même nombre de bissextiles omises, c'est-à-dire, 25, ainsi un même espace de dix mille ans voit toujours une même interruption d'épactes ; si l'on choisissoit un espace moindre, on ne trouveroit pas tout à la fois un nombre d'années séculaires divisible par

25 & par 4, par 25 pour former un nombre complet d'équations lunaires, & par 4 pour former un nombre complet de biſſextiles omiſes.

Dans l'eſpace de 300 mille ans, il y aura non-ſeulement une variété pareille, mais le retour des mêmes lettres dans le même ordre. Pour le prouver, commençons à l'an 1700, où ſe trouve la ligne *C* de la table générale. Dans l'eſpace de dix mille ans, il y aura un changement de 43 lettres juſqu'à k, comme on peut s'en aſſurer en continuant le calcul précédent, pour 100 ſiècles; ſi des 43 l'on retranche les 30 qui font la table entière, on aura changé de 13 lettres; après le ſecond eſpace de dix mille ans, on aura changé de 26. En procédant toujours ainſi de 13 en 13, & retranchant toujours 30, quand ils ſeront de trop, on parviendra enfin à trouver un changement de 30 lettres, mais ce ne ſera qu'après avoir fait cette addition 30 fois, car il n'y a pas de nombre plus petit qui multipliant 13 puiſſe faire un multiple de 30. Ainſi ce n'eſt qu'après 30 intervalles de dix mille ans chacun que la même lettre peut revenir, & en même temps être ſuivie du même ordre & des mêmes variétés dans les lettres de la table générale.

1583. Il nous reſte à parler de quelques artifices qu'on apperçoit dans les calendriers, pour l'ordre des épactes. Nous avons dit que dans le calendrier perpétuel des épactes & des lettres dominicales (1574), on trouve à côté des jours du mois les épactes 30, 29, 28, &c. & les 7 lettres *G*, *F*, *E*, *D*, *C*, *B*, *A*, en commençant par le premier jour de Janvier. Dans ce calendrier tous les jours auxquels répond l'épacte de l'année, ſont ceux des nouvelles lunes cette année-là; mais il y a trois obſervations à faire ſur trois articles particuliers de ce calendrier perpétuel.

Au lieu du nombre 30, on met une étoile * qui tient lieu de 30 & de zéro; en effet, dans les années où il y a nouvelle lune le premier Décembre & le 31, l'é- Signe ambigu.

pacte qui marque l'âge de la lune quand l'année finit; devroit être 30, parce que la lune a 30 jours quand l'année finit; mais elle devroit être zéro, si l'on considéroit la nouvelle lune du 31, ainsi l'on met un signe ambigu qui tient lieu de l'une & de l'autre, & qui s'applique à ces deux cas.

Epactes doublées.

Dans le calendrier perpétuel on a pratiqué six interruptions, où l'on a mis ensemble les épactes XXIV & XXV; sans cela les 12 suites d'épactes qui sont de 30 chacune, formeroient 360 jours, au lieu de 354 qu'elles doivent former pour s'accorder avec l'année lunaire, qui a 11 jours de moins que l'année solaire (1481); cette suppression de 6 jours a été répartie sur la seconde trentaine, sur la 4e, la 6e, la 8e, la 10e & la 12e, & les jours où elle tombe sont le 5 Février, le 5 Avril, le 3 Juin, le 1 Août, le 29 Septembre & le 27 Novembre; ces six jours, qui par la disposition précédente, devroient avoir XXV d'épacte ont tout à la fois XXV & XXIV; par-là on gagne un nombre à chaque fois, & il se trouve qu'à la fin de Décembre il reste 11 jours, comme cela doit être, puisque l'année lunaire n'a que 354 jours (1481).

Les 12 lunaisons de chaque année sont alternativement de 30 & de 29 jours (1556), aussi l'on met alternativement 30 épactes & 29, d'abord les 30 dans le mois de Janvier, ensuite 29, seulement en en réunissant deux au même jour, puis 30, & ainsi de suite; l'épacte XXIV dans Février, & toutes celles qui la suivent se trouve remontée d'un rang au-dessus de sa place naturelle vers le commencement du mois, à cause des deux épactes XXV & XXIV qui sont réunies au 5 de Février; ainsi les lunaisons qui commencent par les 30 épactes qui précèdent les deux épactes accumulées au 5 de Février, c'est-à-dire, par les épactes XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, *, I, II, &c. jusqu'à l'épacte XXIV inclusivement, contiennent seulement 29 jours. Il faut dire la même chose des lunaisons qui répondent aux 30 épactes

épactes semblables qui précèdent dans cinq autres endroits du calendrier la réunion de XXIV & XXV (*Clavius, pag.* 101).

1585. Dans les mois qui ont deux épactes au même jour, XXV & XXIV, on pourroit craindre qu'il n'y eût deux nouvelles lunes indiquées au même jour, dans l'espace de 19 ans, savoir l'une quand l'épacte de l'année seroit XXV, & l'autre quand elle seroit XXIV, or il ne peut pas y avoir deux nouvelles lunes dans les 19 ans, qui tombent au même jour du mois, puisqu'elles n'y reviennnent qu'après les 19 ans révolus (1556); pour obvier à cet inconvénient dans la disposition des épactes de la table étendue, on a mis 25 au lieu de XXV dans toutes les suites d'épactes, ou dans toutes les lignes où les deux nombres 24 & 25 se trouvent ensemble & peuvent revenir dans l'espace de 19 ans; ce nombre 25 est mis dans le calendrier à côté de XXVI, parce que dans ces mêmes lignes d'épactes les nombres 25 & XXVI ne peuvent pas se trouver ensemble dans l'espace des 19 ans, dès-lors que 24 & 25 s'y trouvent.

Dans les mois qui ont 25 & XXVI d'épacte au même rang ou au même jour, il ne peut pas arriver, non plus, que la nouvelle lune soit indiquée deux fois au même jour en 19 ans, parce que 25 ne se trouve point dans les huit suites d'épactes qui contiennent vingt-cinq & vingt-six, on n'a mis dans celles-ci que le nombre romain XXV, qui, dans le calendrier est à coté de XXIV, mais XXV & XXIV ne sont point ensemble dans ces huit suites-là; ainsi l'on a toujours eu soin de faire ensorte que les deux figures qui sont ensemble dans le calendrier à un même jour, ne fussent pas dans une même suite d'épactes; il est bien vrai que les mêmes nombres y sont; mais l'un est en chiffres Romains, & en petites capitales, l'autre en chiffres Arabes, & cette différence de forme les distingue assez; quelquefois on met le 25 en rouge, comme dans les Bréviaires, ou dans les livres imprimés en deux couleurs.

1586. Toutes les fois que dans un cycle de 19 ans,

l'épacte XXV concourt avec un nombre d'or plus grand qu'onze, c'est-à-dire, avec les nombres d'or 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, il y a toujours dans ce même cycle une épacte XXIV; mais si pour lors on prend l'épacte 25 qui est d'un caractère ou d'une couleur différente, qui dans six endroits du calendrier est placée à côté de l'épacte XXVI, il ne pourra jamais y avoir deux nombres d'or ou deux nouvelles lunes au même jour, parce que cette épacte 25 marquée d'un autre caractère ou d'une autre couleur répond par-tout à un jour différent de celui qui a l'épacte XXIV.

Quand dans un cycle de 19 ans l'épacte XXV se rencontre avec un nombre d'or plus petit que 12 ou avec les nombres d'or 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 & 11, il ne peut pas arriver que dans le même cycle l'épacte XXIV se trouve employée avec l'épacte XXV; pour lors on prendra l'épacte XXV, qui dans six endroits est marquée au même jour que l'épacte XXIV, & puisque l'épacte XXIV n'aura pas lieu dans ce cycle-là, on ne risquera point de trouver dans le même cycle deux nouvelles lunes au même jour.

De même, quoique l'épacte 25 qui est différente en caractère ou en couleur, se trouve dans six jours de l'année à côté de l'épacte XXVI, on ne craindra pas, cependant, de trouver deux nouvelles lunes au même jour dans les 19 ans, parce que quand l'épacte XXV se trouve avec un nombre d'or, plus grand que 11, (& ce sont les seuls cas où l'on se serve du caractère 25), l'épacte XXVI n'a jamais lieu dans le même cycle, pour indiquer les nouvelles lunes.

C'est ce que l'on peut voir aisément dans la table étendue des épactes, *Planche VIII*; car dans les 8 lignes marquées *N*, *E*, *B*, r, n, k, e, b, qui chacune répondent à un cycle lunaire, entier de 19 ans (1576), on voit l'épacte 25 distinguée par les chiffres Arabes sous les 8 nombres d'or, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; l'épacte XXIV sous les onze autres, & jamais l'épacte XXVI. Mais dans les 22 autres lignes horizontales de

la table où l'épacte XXV se trouve sous les 11 petits nombres d'or, depuis 1 jusqu'à 12, on trouve quelquefois l'épacte XXVI, mais on n'y trouve pas XXIV. Si donc on prend tantôt l'épacte XXV, qui est dans le calendrier à côté de XXIV, & tantôt l'épacte 25 qui est d'un autre caractère ou d'une autre couleur, & placée dans le calendrier à côté de XXVI, ayant égard aux nombres d'or, petits ou grands, avec lesquels elle concourt, il n'arivera jamais que dans le même cycle de 19 ans, il y ait deux nouvelles lunes au même quantième du mois, quoique dans les six endroits ci-dessus marqués, il y ait au même jour XXV avec XXIV, & XXVI avec l'épacte 25 du caractère différent.

Ainsi l'épacte XXIV ne peut pas avoir lieu quand l'épacte XXV concourt avec un des onze premiers nombres d'or, mais seulement quand elle concourt, avec un nombre d'or plus grand que 11, & l'épacte XXVI n'a jamais lieu lorsque l'épacte 25 de caractère différent concourt avec un nombre d'or plus grand que 11.

1587. On a choisi les épactes XXV & XXIV, pour les accumuler ensemble, quoiqu'on eût pu choisir deux autres épactes quelconques; mais c'étoit à peu-près vers ces mêmes jours que l'on employoit l'équation de la lune dans l'ancien calendrier des nombres d'or, du concile de Nicée, & l'on a cherché à s'en rapprocher le plus qu'il étoit possible, dans la disposition du nouveau calendrier. (Clavius, *pag.* 103). Ces nombres XXV & XXIV que l'on met ensemble, ont même été choisis, d'ailleurs avec dessein, pour faire ensorte que presque toutes les lunaisons paschales fussent de 29 jours, comme le vouloient les Peres du concile de Nicée, & qu'elles commencassent toujours entre le 8 de Mars, & le 5 Avril. Il n'y a dans le nouveau calendrier que deux exceptions à la premiere règle, c'est lorsqu'on a pour épacte 25 & XXIV, & que 25 concourt avec un nombre d'or plus grand que 11, ce qui arrive bien rarement, il n'y a que ces deux lunes paschales qui soient de 30 jours. Lorsque les PP. de Nicée assignèrent 29

jours aux nouvelles lunes paſchales, depuis le 8 Mars jusqu'au 5 Avril, il étoit facile d'y arranger 19 nombres d'or, de façon que tous donnaſſent des lunaiſons de 29 jours, mais comme il y a 30 épactes, on ne ſauroit les arranger toutes dans 29 jours, à moins qu'on n'en mette deux à la fois au même jour, comme cela arrive au 5 Avril; c'eſt ce qui fait que la lunaiſon de l'épacte XXIV a 30 jours, & par conſéquent auſſi celle de l'épacte 25 placée au-deſſus de XXIV. (Clavius, *pag.* 103).

Si l'équation de la lune, au lieu de ſe faire au 5 Avril, ſe faiſoit à la fin de Janvier & de Mars, comme *Aloyſius Lilius*, premier auteur de ce calendrier, l'avoit pratiqué dans le *Compendium* que Grégoire XIII adreſſa en 1577 aux Princes chrétiens (1572), il y auroit ſept lunaiſons paſchales de 30 jours au lieu de 2, enſorte qu'on ſeroit beaucoup plus éloigné de cette partie de l'ancien uſage de l'égliſe, qu'on a voulu reſpecter autant qu'il étoit poſſible; l'on trouve même dans le calendrier Grégorien les nouvelles lunes, ſur-tout celles de Pâque, rapportées pour le temps du concile de Nicée aux mêmes jours où elles ont été ſuppoſées dans ce temps-là, d'après les nombres d'or de l'ancien calendrier. C'eſt ce qui réſulte de pluſieurs longs chapitres qu'on pourra voir dans le grand traité de *Clavius*, dont il n'eſt poſſible de donner ici que les principes & les principaux réſultats.

Autre réunion de deux épactes.

1588. Le troiſième artifice employé dans la diſpoſition des épactes du calendrier perpétuel, conſiſte à avoir mis à la fin de Décembre à côté de l'épacte XX, une épacte extraordinaire 19, qui eſt auſſi différente ou par le caractère, ou par la couleur; elle ſert uniquement à marquer la nouvelle lune le dernier de Décembre, lorſque l'épacte XIX concourt avec le nombre d'or 19, ce qui n'arrivera plus juſqu'après l'an 8200, & lorſque des trente cycles de la table, celui qui a la lettre *D*, ſera en uſage, comme il l'a été depuis la correction Grégorienne, juſqu'à l'année 1700 excluſive-

ment ; c'eſt dans cette ligne *D* ſeulement que l'épacte XIX ſe trouve ſous le nombre d'or 19. L'épacte 19 placée au 31 de Décembre, doit alors indiquer une nouvelle lune, comme cela eſt arrivé en 1595, 1614, 1633, 1652, 1671, 1690. En effet, dès que le nombre d'or eſt 19, on doit ajouter 12 à l'épacte de l'année pour former celle de l'année ſuivante (1574) ; au lieu qu'on n'ajoutoit que 11 dans les autres cas ; ainſi à l'épacte XIX, lorſqu'elle a lieu avec le nombre d'or 19, il faut ajouter 12, & l'on à 1 d'épacte pour l'année ſuivante ; mais l'uſage de l'épacte 1 ne ſe trouve dans le calendrier qu'au 30 de Janvier, donc ſi l'épacte 19 n'étoit pas placée dans le calendrier au 31 de Décembre pour y indiquer une nouvelle lune, la lunaiſon de Décembre ne contenant alors que 29 jours (1556), il n'y auroit point de lunaiſon indiquée dans le calendrier depuis le 2 Décembre juſqu'au 29 de Janvier ; car dans le mois de Décembre, il n'y a pas d'autre épacte XIX que celle du 2 de Décembre, & dans le mois de Janvier, il n'y a pas d'épacte XIX avant le 30. Cependant il y a dans le cas dont il s'agit, une lune de 29 jours qui commence le 2 Décembre, & une autre qui commence le 31 de Décembre ; le calcul prouve même qu'il y a en effet une nouvelle lune moyenne ce jour-là, quand le nombre d'or 19 concourt avec l'épacte XIX. (*Clavius pag.* 104).

Mais l'exception dont il s'agit ou l'addition de l'épacte 19 extraordinairement cumulée avec l'épacte XX, au 31 de Décembre, ne fait dans le calendrier aucune confuſion, parce qu'elle eſt à côté de l'épacte XX qui n'a jamais lieu dans le cycle où l'épacte XIX concourt avec le nombre d'or 19 ; en effet, on peut voir dans la table étendue des épactes que la ligne *D* qui a lieu dans le cas prévu ne renferme pas l'épacte XX. Ce nombre ne ſe trouve point dans les 19 épactes de ce cycle, il ne peut donc pas y avoir double emploi, ni deux nouvelles lunes indiquées au même jour dans l'eſpace des 19 ans, quoiqu'il y ait deux épactes au même jour,

Défaut dans les épactes.

1589. Les épactes ne peuvent indiquer que les nouvelles lunes moyennes, c'eſt-à-dire, les nouvelles lunes qui auroient lieu, ſi la lune & le ſoleil alloient toujours d'un mouvement uniforme, & que leur longitude moyenne fût toujours égale à leur longitude vraie; ce ſeroit aſſez pour l'uſage du calendrier civil, car l'on eſt toujours sûr de ne pas ſe tromper de plus d'un jour, même en ſe reſtreignant aux moyens mouvemens; mais nous devons obſerver encore que non-ſeulement les nouvelles lunes déſignées dans le calendrier par les épactes, ne ſont point les nouvelles lunes aſtronomiques vraies qu'on obſerve, & qu'on trouve dans nos éphémérides, mais elles ne ſont pas même exactement d'accord avec les nouvelles lunes moyennes; il y a ſouvent des différences qui deviennent ſenſibles; par exemple, en 1700 la pleine lune moyenne arriva le ſamedi 3 Avril vers les 11^h du ſoir, à Rome; Pâque devoit donc ſe célébrer le lendemain, ſuivant la règle (1571); mais dans le calendrier la pleine lune étoit indiquée pour le 4, la fête ſe trouva donc renvoyée au 11 du même mois. (V. *l'Hiſt. de l'acad.* 1701, *pag.* 107). Lors de la correction Grégorienne, on voulut remettre les nouvelles lunes aux mêmes lieux où elles étoient au temps du concile de Nicée, par le moyen du cycle de 19 ans; mais comme en 625 ans le cycle ramene la nouvelle lune deux jours plutôt (1558), il y avoit alors quatre jours de différence entre les nouvelles lunes aſtronomiques & celles du cycle : dans l'exécution on n'a tenu compte que de 3 jours au lieu de 4, delà vient que la pleine lune aſtronomique vient ſouvent un jour avant la pleine lune Paſchale, & que le calendrier n'a point à cet égard la juſteſſe qu'on avoit eu intention de lui donner, delà vient auſſi la contradicton apparente que l'on trouvera quelquefois entre les calculs rigoureux de l'aſtronomie, & les calculs beaucoup moins exacts du comput eccléſiaſtique.

Ainſi dans l'exécution du projet de la réformation l'on n'a pas exactement ſuivi l'intention de la bulle de

Grégoire XIII, il auroit dû y avoir une équation lunaire en 1700 (1579); depuis 1700 l'épacte répondant au nombre d'or 1, auroit dû être 1 au lieu qu'on ne lui attribue que 0 ou *, ensorte qu'on n'a augmenté que de 3 jours les épactes lunaires depuis le Concile jusqu'à présent, au lieu de 4 jours; cette erreur d'un jour a fait tomber la fête de Pâque en 1704 au 23 Mars, au lieu qu'elle auroit dû être le 20 Avril, parce que dans cette année la pleine lune devoit être marquée au 20 Mars, & qu'elle ne le fut qu'au 21; or le 20 Mars n'est point du mois Paschal, mais le 21 en est, (*Hist. acad.* 1701). La raison de ce défaut est que l'objet des réformateurs étoit de demeurer plutôt au-dessous qu'au-dessus des véritables nouvelles lunes, pour empêcher que les épactes n'indiquassent la nouvelle lune plutôt qu'elle n'arrive réellement, & que la fête de Pâque ne fût célébrée le XIV de la lune ou même plutôt, c'est-à-dire, en même temps que chez les Hérétiques quarto-decimans; pour cet effet, on a eu plus d'égard à la pleine lune qu'à la nouvelle lune, on n'a pas craint qu'il arrivât que la fête de Pâque fût célébrée plus tard que le XXI de la lune, mais on redoutoit la célébration qui auroit pû tomber le XIV de la lune, quand il se trouve un Dimanche, parce que c'est le jour que choisissent les Juifs pour la célébration de la Pâque.

Cette remarque déja faite par Clavius auroit dû prévenir le reproche astronomique fait par M. Cassini, au calendrier Grégorien, si ce n'est que M. Cassini ne trouvât pas cette raison suffisante pour avoir fait mettre entre le calendrier & l'astronomie une semblable différence; elle nuit à l'exactitude du calendrier, relativement à l'usage qu'on en peut faire pour trouver les nouvelles lunes.

Méthode pour trouver l'Epacte & les Fêtes mobiles pour une année quelconque.

1590. Si l'on veut y employer les tables, dont j'ai indiqué ci-dessus la construction, on commencera par chercher le nombre d'or (1556), parce que l'on a pris les nombres d'or qui suivent toujours un progrès uniforme pour servir à régler les irrégularités des épactes; ce nombre d'or pris au haut de la table étendue (Pl. VIII.), marquera la colonne dans laquelle doit se trouver l'épacte que l'on cherche.

Pour savoir dans quelle ligne de la table, & vis-à-vis de quelle lettre il faut chercher l'épacte, on prendra dans la table d'équation (1576), la lettre qui convient au siècle où l'on se trouve, & ce sera dans cette ligne qu'il faudra prendre l'épacte répondante au nombre d'or.

Trouver l'épacte d'une année.

1591. Pour avoir une règle particulière dans ce siècle-ci & le suivant; on multipliera par 11 le nombre d'or de l'année courante, parce que chaque année l'épacte augmente de 11, on ajoutera 19, parce que l'épacte est 18 à chaque dernière année du cycle lunaire; on divisera cette somme par 30, & l'on aura pour reste l'épacte de l'année.

Ainsi pour avoir l'épacte de 1762, on multiplie le nombre d'or 15 par 11, on a 165, on y ajoute 19, & l'on divise la somme 184 par 30, le reste de la division est 4 qui est l'épacte cherchée. On peut la trouver encore autrement : on multiplie par 11 le nombre 62, le produit est 694; on ajoute 9 au produit (c'est l'épacte de 1700), & de plus autant d'unités que le nombre d'or 1 est revenu de fois depuis 1700, ce qui est arrivé en 1710, 1729 & 1748, la somme 694 étant divisée par 30, le quotient est 23, & le reste 4 est l'épacte de 1762, Cette règle ne sert que pour le 18e siècle,

1592.

1592. Le calendrier perpétuel dont nous avons déja parlé (1551, 1574), où l'on marque les épactes vis-à-vis de chaque jour, en diminuant toujours d'une unité, & les lettres dominicales A, B, C, &c. suffit, quand on a l'épacte de l'année actuelle (1590), pour trouver la fête de Pâque & toutes les autres fêtes mobiles. L'épacte de l'année indique tous les jours de pleine lune dans le calendrier perpétuel : ainsi pour avoir la nouvelle lune Paschale qui ne peut arriver qu'après le 7 de Mars, il faut voir à quel jour répond l'épacte de l'année, à compter du 8 de Mars inclusivement, & ce sera celui de la nouvelle lune Paschale ; le quatorzième jour, à compter de la nouvelle lune inclusivement, sera le jour de la pleine lune Paschale, & le premier Dimanche après cette pleine lune exclusivement, c'est-à-dire, le premier jour où l'on trouvera la lettre dominicale de l'année (1552), sera le jour de Pâque. Fêtes mobiles.

1593. Les limites Paschales sont le 22 Mars & le 25 Avril (1571), ainsi en 1598, 1693 & 1761, la fête de Pâque est arrivée le 22 Mars ; elle s'y trouvera encore en 1818, 2285, 2437, 2505, &c. Au contraire cette fête n'est tombée qu'au 25 Avril en 1546, en 1666 & en 1734, & cela arrivera encore en 1886, 1943, 2038, 2190, &c.

La Septuagésime est toujours neuf semaines avant Pâque, ou le 64e jour y compris celui de Pâque. Le mercredi des Cendres le 47e jour avant le jour de Pâque, en comptant l'un & l'autre.

On trouve la fête de l'Ascension en comptant 40 jours après Pâque ; la Pentecôte en comptant 50 ; la Trinité 57 jours, & la Fête-Dieu 61 jours après Pâque ; celle-ci arrive toujours le même quantième du mois que le Samedi-Saint.

Le premier Dimanche de l'Avent ne peut arriver que depuis le 27 Novembre inclusivement, jusqu'au 3 Décembre inclusivement ; ainsi ce sera toujours le Dimanche compris dans cet intervalle.

1594. Les astronomes qui calculent des éphémè-

rides ont encore besoin de connoître les règles du calendrier pour d'autres usages ecclésiastiques ; voici les principales. Les jeûnes des Quatre-Temps, qu'on peut regarder comme des fêtes mobiles, ont été fixés par Grégoire VII, aux quatre époques suivantes, 1°. La première semaine de Carême ; 2°. La semaine de la Pentecôte, 3°. Le mercredi avant la fête de S. Mathieu ou après l'exaltation de Ste Croix qui se célèbre le 14 Septembre ; 4°. La troisième semaine de l'Avent. Si Noël arrive le lundi, le mardi ou le mercredi, c'est 2 mercredis avant Noël, sinon ce sera le mercredi d'auparavant. Il paroît que les jeûnes des Quatre-Temps ont été institués à l'imitation de ceux qui étoient en usage chez les Juifs. (*Casali de veteribus sacris christianorum ritibus*, *Romæ*, 1647 *fol. pag.* 252. cap. 63); mais plusieurs de nos fêtes paroissent avoir été tirées aussi des usages du Paganisme : *Addimus prædictis, licuisse ecclesiæ, quæ apud ethnicos impiè superstitioso cultu agebantur feriæ, easdem sacro ritu expiatas ad pietatem christianam transferre, ut majori id esset diaboli contumeliæ, & quibus ipse coli voluerit, Christus & Sancti ejus ab omnibus honorarentur. Casali, c. 60, pag.* 239. Il cite Baronius *in An.* 44 & 58, & *Spondanus, n°.* 36 & 29.

Les Rogations sont le lundi avant l'Ascension. La fête des cinq Plaies de N. S. est le vendredi avant la Quadragésime. La *Compassion*, ou N. D. de pitié le vendredi de la Passion, exceptés quand l'Annonciation se trouve ce jour-là ; alors la petite fête fait place à la grande. Les jeûnes de Vigiles qui se trouvent tomber au Dimanche se transportent au samedi précédent, quand même ce seroit une fête.

Les fêtes doubles de S. Mathias, S. André & S. Thomas, qui dans le Carême & l'Avent se remettent du Dimanche au lundi ne sont point chomées par le peuple, & on ne les met pas en italiques ; l'Annonciation & la Conception qui sont fêtes solemnelles se fêtent seules dans ce cas-là. Quand l'Annonciation tombe depuis le Dimanche des Rameaux, inclusivement, jus-

qu'au Dimanche de Quasimodo inclusivement, on la renvoye au lendemain de Quasimodo, comme cela est arrivée en 1758 1766 & 1769. Quand la Conception tombe au second Dimanche de l'Avent, elle se renvoye au lendemain. Quand la fête de S. André concourt avec le premier Dimanche de l'Avent, on la célèbre le lendemain ; dans tout autre cas, elle se fait le Dimanche. Dans les années bissextiles, la fête de S. Mathias se célèbre le 25 Février au lieu du 24, & Ste Honorine le 28. J'observerai à cette occasion que, quoique l'usage ancien soit de mettre le nom d'un Saint à tous les jours du mois, dans la connoissance des temps, il y en a un grand nombre qui ne sont fêtés, ni à Rome, ni à Paris, mais dont les noms se trouvent seulement dans le Martyrologe Romain : l'édition de Paris par M. l'Abbé Chatelain est la meilleure. On peut consulter sur tous ces objets le livre intitulé : *Ordo perpetuus divini officii juxta ritum Breviarii ac missalis sanctæ Romanæ ecclesiæ. Ordinabat monachus Benedictinus e congregatione S. Mauri. Divione apud Fr. Desventes*, 1759, *in*-12. Et pour le Diocèse de Paris les *Rubriques générales* qui sont en tête du Bréviaire, sur lesquelles M. l'Abbé Joannot compose chaque année le *Breve Parisiense*, à l'imitation de l'*Ordo divini officii* qui s'imprime pour l'usage du Bréviaire Romain.

Des Epoques les plus célèbres, & de la manière d'en compter les années.

1595. Je ne parlerai point ici des époques incertaines sur lesquelles les chronologistes ne sont point d'accord ; le P. Pétau place l'époque de la création du monde, suivant les calculs de la Genèse, à l'an 730, de la période Julienne, 3984 ans avant J. C. ce qui fait 3983, suivant notre manière de compter (*Doctrina temporum tom. II, pag.* 282, *édit. de* 1705), mais il y a des Grecs, comme S. Clément d'Alexandrie, qui comp-

tent 5624 ans, depuis la création du monde jusqu'à J. C., ou plutôt jusqu'au commencement de l'ere vulgaire, qui ne commence pas exactement à l'année de la naissance de J. C.

Epoques des Olympiades.

L'Ere des Olympiades commence à l'année 3938 de la période Julienne, 776 ans avant J. C.; ou 775 suivant notre maniere de compter (1330). Le cycle solaire étoit 18, le cycle lunaire 5, l'indiction 8. Les Athéniens comptoient ces années de la nouvelle lune la plus voisine du solstice d'été, c'est-à-dire, d'un des jours des mois de Juin ou de Juillet; il y a sur cet article quelques différences d'opinions parmi les chronologistes; mais il n'y en a point sur l'année de cette date. Voyez le Pere Pétau, liv. IX, chapitre 40 & suiv.

Fondation de Rome.

1596. La Fondation de Rome, selon Varron, se rapporte au 21 Avril 3961 de la période Julienne, 753 ans avant J. C. ou 752 suivant nous. Censorinus & la plupart des Savans, les Empereurs même dans les jeux séculaires, ont adopté cette manière de compter, qui forme les années Varroniennes de la fondation de Rome, quoique Rome ait été fondée l'année précédente, suivant Tarrutius, & l'année suivante selon les fastes du Capitole; cette année 752 avant J. C. avoit 13 de cycle solaire, 9 de cycle lunaire & 1 d'indiction, (Riccioli, *Astron. reform. tab. XXII*).

Epoque de Nabonassar.

1597. L'Ere de Nabonassar célèbre par les calculs d'Hipparque & de Ptolomée, est celle de la fondation du royaume de Babylone, ou de la quatrième & dernière Monarchie de l'Empire des Assyriens, Nabonassar s'étant emparé de la ville de Babylone qui appartenoit aux Assyriens ou aux Medes; cet événement ne fut pas d'abord extrêmement remarquable, mais un siècle après, au temps de Nabopolassar & de Nabuchodosor, ce royaume devint célèbre. L'ere de Nabonassar commence à l'an 3967 de la période Julienne; 747 ans avant J. C. suivant la manière de compter des chronologistes, ou 746 suivant notre méthode (1330).

Le commencement du mois Thoth tombe au 26 Février à midi, au méridien d'Alexandrie ou une heure 52′ avant midi, au méridien de Paris. Cette année-là le cycle ſolaire étoit 19, le cycle lunaire 15, le cycle d'indiction 7. De cette époque ſe comptent les années Egyptiennes de 365 jours; & après 1460 ans complets, la 1461e. année ſe retrouve commencer au 26 Février.

1598. La ſeconde année de Nabonaſſar commença de même le 26 Février 745, & la troiſième le 26 Février 744, parce que les deux premières années étoient de 365 jours dans le calendrier Julien, comme dans le calendrier Egyptien; mais l'année Julienne 744 avant J. C. étant biſſextile & contenant un jour de plus que l'année 3 de Nabonaſſar, la quatrième commence un jour plutôt, ou le 25 Février 743 avant J. C. Les trois années ſuivantes commencent encore le 25 Février; mais la huitième commence le 24 Février 739, la douzième le 23 Février 735; & ainſi de ſuite.

Par cette progreſſion qui eſt fort ſimple, j'ai conſtruit une table de huit cent quatre-vingt-huit années, qui ſe trouvent juſqu'à l'année 140 de J. C., où tombe la dernière obſervation de Ptolomée; en voici un extrait, pour l'uſage des aſtronomes qui veulent réduire les obſervations de l'Almageſte. J'y ai joint une table des mois Egyptiens, & du nombre de jours qu'ils contiennent. On trouve une table pareille des années de Nabonaſſar, mais moins commode que la mienne, dans le P. Riccioli (*Aſtronomia reformata*). On peut voir auſſi M. de la Nauze, (*Mem. de l'acad. des inſcrip. XIV*, 334).

Table du commencement des années de Nabonassar, réduites au Calendrier Julien, & des mois Egyptiens.

Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	Années de Nabon.	Ann. Jul. avant J. C.	Mois Egyptiens.		Jours.
1	26 Fév. 746	468	1 Nov. 280	θὼθ.	Thoth. . .	30
2	26 Fév. 745	484	28 Oct. 264	φαωφὶ.	Paophi ou Phaophi. .	60
3	26 Fév. 744	508	22 Oct. 240			
4	25 Fév. 743	592	1 Oct. 156	αθὺρ.	Athyr ou Athir.	90
8	24 Fév. 739	596	30 Sept. 152	χοιὰκ.	Chœac, Kiak, ou Chiach.	120
12	23 Fév. 735	600	29 Sept. 148			
16	22 Fév. 731	712	1 Sept. 36	τυβὶ.	Tybi. . . .	150
26	20 Fév. 723	716	31 Août 32	μεχὶρ.	Mechir ou Mekir. . .	180
100	1 Fév. 647	744	24 Août 4			
104	31 Janv. 643	748	23 Août 0	φαμενὼθ.	Phamenoth.	210
224	1 Janv. 523			φαρμουθὶ.	Pharmuthi, ou Pharmouthi.	240
227	1 Janv. 520					
228	31 Déc. 520		Après J. C.	παχὼν.	Pachon ou Pakon. . . .	270
232	30 Déc. 516					
348	1 Déc. 400	752	22 Août 4	παῦνι.	Payni ou Pauni.	300
		840	31 Juil. 92	ἐπὶφι.	Epéphi ou Epiphi. . . .	330
		864	25 Juil. 116			
		872	23 Juil. 124	μεσορὶ.	Mesori ou Messori. . . .	360
		888	19 Juil. 140			
				Cinq jours intercalaires.		365

1599. Par le moyen de cette table, on réduit facilement au calendrier Julien les observations qui sont dans Ptolomée. La plus ancienne est une éclipse de lune qui commença à Babylone, la première année de *Mardocempade*, où la 27e de Nabonassar, le 29 du mois Thoth une heure entière après le lever de la lune; (*Almag. IV*, 6). L'année 27 de Nabonassar commençoit le 20 Février, ainsi le 29 du mois Thoth seroit le 48e. de Février; il en faut ôter 29 jours que contient le mois de Février, parce que cette année 720 étoit bissextile (1541); il reste le 19 Mars de l'année 720, suivant notre manière de compter, & celle de M. Cassini, (1330); car la plupart des chronologistes l'appellent année 721.

Je ſuppoſe qu'on demande à quel jour répond le 17 du mois Kiak de la 86e année de Nabonaſſar, jour où fut faite la ſeconde obſervation de Mercure; on voit par la table précédente que l'année 486 commençoit le 28 Octobre, 262 ans avant J. C., & par la table des mois que le 17 du mois Kiak étoit le cent ſeptième jour à compter du 28 Octobre incluſivement; car le 28 étoit déja de l'année 486; on prendra donc quatre jours qui reſtent du mois d'Octobre, ſavoir, 28, 29, 30, 31, trente du mois de Novembre, 31 du mois de Décembre, 31 du mois de Janvier, 261 avant J. C. La ſomme eſt 96, il en reſte onze pour aller à 107, donc le cent ſeptième étoit le 11 Février 261; c'eſt le jour qui répond au 17 du mois Kiak de l'an 486 de Nabonaſſar, (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 465, 480). On remarque que dans cette obſervation faite le 18 au matin pour ceux qui comptent depuis minuit; Ptolomée a ſoin de dire que c'eſt entre le 17 & le 18, c'eſt-à-dire, le 17 en comptant depuis midi, ou le 18 ſi c'étoit vers le lever du ſoleil, parce que du temps de Ptolomée le jour civil commençoit au lever du ſoleil. On trouve cette attention en pluſieurs endroits de l'Almageſte, (*pag.* 59, 225, 226, 233, &c. *édit. de* 1551).

1600. La mort d'Alexandre le Grand, arriva le 19 Juillet, l'an 4390 de la période Julienne, 324 ans avant J. C. ou 323 ſuivant nous; & la ſeptième année de la première période Calippique. Cette époque ſert à réduire les obſervations d'Hipparque, rapportées par Ptolomée aux années de la mort d'Alexandre; par exemple, Hipparque obſerva un équinoxe (*Almag. III*, 2), le 27 du mois Méchir au matin, la trente-deuxième année de la troiſième période Calippique; la 178e depuis la mort d'Alexandre, ou la 602e depuis Nabonaſſar (1330), & les chronologiſtes la rapportent au 24 Mars, 146 avant J. C., ou 145 ſuivant notre manière de compter.

1601. La première année de l'ere chrétienne ou Ere vulgaire.

ere vulgaire est la 4714e de la période Julienne ; l'an du monde 3984, suivant le calcul du P. Pétau ; cette année on avoit 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire, 4 d'indiction romaine, c'est la 46e des années Juliennes, c'est-à-dire, la 46e année à compter depuis la réformation du calendrier par Jules César ; elle concourt depuis le 1 Janvier jusqu'au 21 Avril avec l'année de Rome 753, & ensuite avec l'année 754. Ayant la nouvelle lune, la plus proche du solstice d'été, elle concourut avec la quatrième année de la 194e. Olympiade, & le reste de l'année fut dans la première de la 195e. Olympiade. Jusqu'au 23 Août à midi, elle concourut avec l'année 748 de Nabonassar, & avec l'année 324 de la mort d'Alexandre ; mais dans le reste de cette année-là, on compta 749 & 325 (*Astr. ref. tab. XXII*). La naissance effective de J. C. tombe à la fin de l'année 2 avant l'ere chrétienne, ou 471e de la période Julienne, suivant Baronius & Scaliger ; & même deux ans plutôt suivant quelques auteurs ; mais le P. Pétau prouve assez qu'il y a là dedans beaucoup d'incertitude (*Liv. XII, c.* 4, 5 & 6). Le P. Alexandre, dans sa grande histoire ecclésiastique, la fixe à la fin de l'année 4709, ou 4 avant J. C. *Dissert. I, tom. III, pag.* 65 & 66.

Hégire. 1602. L'époque des Turcs, appellée *Hégire*, commence à la fuite de Mahomet qui sortit de la Mecque ; elle tombe au vendredi 16 Juillet 622, ou 5335 de la période Julienne. Il y a une autre Secte d'Arabes, (suivie dans les tables Alphonsines) qui place le commencement de l'hégire au jeudi 15 Juillet. Les années Arabes sont de 354j 8h 48′, & les années civiles sont des années lunaires de 354 & ensuite de 355 jours ; ainsi 12 années Juliennes font 12 ans 130 jours & 14 heures. Ils partagent leurs années en cycles de 30 ans, dans lesquels ils font 19 années communes de 354 jours, & onze de 355, savoir, les années 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 & 29, de chaque cycle ; leur cycle a commencé en 1757 le 14 Septembre, avec l'année 1171 de l'hégire.

Années Arabes.

1603.

1603. On trouve des tables détaillées de la correspondance des années Arabes avec les années Juliennes, dans le P. Petau, liv. VII, c. 22, dans Riccioli, dans le livre *d'Ulug-Beg* intitulé : *Epochæ celebriores*, que Gravius publia à Londres en 1650, & dans le catalogue d'étoiles d'Ulug-Beg, qui fut publié avec des commentaires, par Th. Hyde à Oxfort en 1665, & qu'on y a réimprimé en 1767. En voici un extrait pour le temps où nous sommes.

Un Savant m'ayant assuré qu'il falloit ajouter deux jours à ceux de cette table de Gravius, pour se conformer à l'usage actuel des Turcs, j'ai consulté M. Cardone, savant dans les langues Orientales qui m'a fait voir sur un almanach perpétuel, dressé à Constantinople, la même correspondance que dans la table de Gravius.

Années Grégor.			Hégire
1770	26	Avr.	1184
1771	15	Avr.	1185
1772	4	Avr.	1186
1773	24	Mars	1187
1774	13	Mars	1188
1775	2	Mars	1189
1776	20	Févr.	1190
1777	8	Févr.	1191
1778	29	Janv.	1192
1779	18	Janv.	1193
1780	7	Janv.	1194
1780	27	Déc.	1195

On peut voir la comparaison détaillée des calendriers & des époques, usités chez les Romains, les Egyptiens, les Arabes, les Perses, les Syriens & les Hébreux, dans le Commentaire sur le premier chapitre d'Alfragan, ajouté par *Christman* à l'édition de 1590 *in*-8°. dans le P. Riccioli, (*Chronol. reformata*), dans le P. Pétau, &c.

Du lever héliaque Cosmique ou Acronique de différentes Etoiles.

1604. Les Poetes & les Auteurs anciens qui ont écrit sur l'Astronomie, l'agriculture & l'histoire, parlent souvent du lever & du coucher des étoiles, & sur-tout du lever héliaque (218). Ces passages sont souvent

obscurs & même pleins de contradictions ; c'est ce qui m'engage à donner ici les principes de cette matière, afin qu'avec un peu d'astronomie on puisse entendre ces auteurs, & même les éclaircir.

Chaque année le soleil par son mouvement propre d'Occident vers l'Orient rencontre les différentes constellations de l'écliptique, & les rend invisibles pour nous par l'éclat de sa lumière. Lorsque le soleil après avoir traversé une constellation est assez éloigné d'elle pour se lever une heure plus tard, la constellation commence à paroître le matin en se levant un peu avant que la lumière du soleil soit assez considérable pour la faire disparoître ; c'est ce qu'on appelle *lever héliaque* ou solaire des étoiles. De même le *coucher héliaque* arrive lorsque le soleil approche d'une constellation : car avant qu'il l'ait atteint elle cesse de paroître le soir après le coucher du soleil, parce qu'elle se couche trop peu de temps après lui. Il est sur-tout nécessaire, pour l'intelligence de la chronologie & des Poëtes, d'avoir une idée de ce lever héliaque : commençons par celui de Sirius qui étoit si célèbre parmi les Egyptiens. Nous avons sur cette matière un petit ouvrage de Bainbrigius intitulé : *Canicularia*, augmenté par *Gravius*, & publié à Oxfort en 1648, ce livre est fort rare actuellement ; le P. Pétau en a aussi traité, *Variar. dissertat.* livre VII, c. 1.

Lever héliaque des étoiles.

Lever héliaque de Sirius.

1605. Le lever héliaque de Sirius il y a 2000 ans arrivoit en Egypte vers le milieu de l'été, lorsque après une longue disparition cette étoile commençoit à reparoître le matin, un peu avant le lever du soleil ; la saison qui régnoit alors, ou la situation du soleil, étoit à peu-près la même que celle du 12 Juillet parmi nous ; & c'étoit le temps où le vent Etésien soufflant du Nord sur l'éthiopie y accumuloit les vapeurs, les nuages & les pluies, & causoit les débordemens du Nil ; aussi le lever de Sirius s'observoit avec le plus grand soin, c'étoit une des cérémonies religieuses de ce temps-là,

Spectacle de la nature, tom. IV, *pag.* 307. Hist. du Ciel, tom. I, *pag.* 42, 277.

L'année cynique des Egyptiens commençoit au lever héliaque de Sirius; mais pour ce qui est de leur année civile qui étoit continuellement de 365 jours (1597), elle ne pouvoit pas s'accorder avec l'année naturelle, & tous les 4 ans le lever de Sirius devoit arriver un jour plus tard dans l'année civile. Après un espace de 1460 ans, que Censorinus appelle la grande année des Egyptiens, l'année naturelle se retrouvoit commencer au même point de l'année civile; ainsi l'an 1322 avant J. C. & l'an 138 après J. C. le lever de Sirius se trouva arriver le premier jour du mois *Thoth*, ou le premier jour de l'année civile, qui répondoit au 20 Juillet; c'est cette période *Caniculaire* ou *Sothiaque* de 1460 ans dont on trouve des vestiges dans quelques anciens auteurs. (*Censorinus*, *c.* 18. *Plato in timæo*, *Clem. Alexand. Stromatum*, *lib. I. Riccioli*, *Alm. I*, 129. *Petav. var. dissert. lib. II*, *c.* 4). Les anciens étoient en erreur dans ce calcul de plus de 36 ans, parce qu'ils ne connoissoient point l'année sydérale ou astrale qui devoit régler le cycle sothiaque, ils croyoient que 1460 années solaires étoient égales à 1461 années vagues ou civiles; mais comme il y a quelque chose de moins pour l'année tropique, & quelque chose de plus pour l'année sydérale, la période n'étoit point exactement de 1460 ans; au bout de ces 1460 ans l'année civile ou vague ne concouroit réellement, ni avec l'année tropique, ni avec l'année sydérale. En supposant l'année sydérale de $365^j\ 6^h\ 9'\ 11'',2$ (888), il ne faut que 1424 années sydérales pour faire 1425 années Egyptiennes, vagues ou communes, l'une & l'autre formant le nombre de 520135 jours. En supposant l'année tropique; de $365^j\ 5^h\ 48'\ 45'',5$ (886), il falloit 1507 années tropiques ou 1508 années communes pour ramener les saisons au même jour de l'année, après un intervalle de 550420 jours; ainsi la période de 1460 ans ne ramenoit point au mê-

Année cynique.

Période Caniculaire.

me jour les levers des étoiles, qui n'exigeoient que 1425 ans, ni les saisons qui en exigeoient 1508. On peut voir encore sur cette matière M. Dupuis, *Mém. de l'acad. des Inscriptions & Belles Lettres, tom. XXIX, pag. 116 & suiv.*

Arc d'émersion de Sirius.

1606. Pour trouver exactement le temps de l'année où devoit arriver en Egypte le lever héliaque de Sirius, nous supposerons que cette étoile pouvoit être apperçue à son lever par des yeux attentifs pourvu que le soleil fût encore abaissé de 10° sous l'horizon, quoique Ptolomée donne en général 12° pour *l'arc d'émersion* des étoiles de la première grandeur (2261). Soit *P* le pole (*fig.* 89) ♈ *C* l'équateur, ♈ *D* l'écliptique, *S* l'étoile dont il s'agit. Sous une latitude de 30° telle qu'on l'observe dans la basse Egypte, on aura $PZ = 60°$, l'angle $ACS = 60°$, *AS* de 16° 22′; c'est la déclinaison de Sirius vers l'an 138 où commence la période Sothiacale. En résolvant le triangle *CAS* on trouvera *CA* de 9° 44′; c'est la *différence ascensionnelle* qui étant ajoutée à l'ascension droite ♈ *A* de Sirius pour ce temps-là 80° 16′, donne l'ascension oblique ♈ *C* 90° 0′; ainsi le point *C* de l'équateur qui se levoit en même temps que l'étoile, avoit 90° d'ascension droite. Dans le triangle ♈ *BC* on trouvera l'arc de l'écliptique ♈ *B* qui répond à l'arc ♈ *C* de l'équateur, l'angle *B* (qui dans le cas présent se trouve être un angle droit), & la déclinaison *BC* qui dans notre cas étoit égale à l'obliquité de l'écliptique; nous la supposerons de 23 degrés 40 min.

Fig. 89.

Dans le triangle *BCD* connoissant *BC*, l'angle *B*, & l'angle *BCD*, égal à la hauteur du pole, on trouvera $BD = 13° 3'$; cet arc ajouté à la longitude du point *B* donnera celle du point coascendant *D*; on cherchera aussi l'angle *D*. Si l'on suppose enfin le soleil au point *M* de l'écliptique, 10° au-dessous de l'horizon; il faudra chercher la longitude du point *M*, & ce sera le lieu du soleil au premier instant où Sirius doit s'appercevoir à l'horizon, le soleil étant encore assez bas

Dans le triangle *MND* l'on connoît l'angle *D* par l'opération précédente, aussi bien que $MN = 10°$: on trouvera $DM = 11°\ 16'$ qui ajouté à la longitude du point *D*, donnera celle du point *M* de $3^s\ 24°\ 19'$. Telle étoit la longitude du soleil le jour du lever héliaque de Sirius, le premier jour où Sirius paroissant à l'horizon le matin se trouvoit assez dégagé du soleil pour pouvoir être apperçu : c'est la longitude que le soleil a maintenant le 16 de Juillet. On trouve cette longitude plus petite de $12° \frac{1}{4}$ en remontant 1460 ans plutôt, ou au commencement de la période précédente, suivant le calcul de *Bainbrigius*. Au reste ces résultats ne sont pas susceptibles d'une grande précision, non plus que l'observation du lever héliaque d'une étoile ; l'état de l'atmosphère, la situation de l'observateur, la latitude des différentes Provinces d'Egypte y devoient apporter des différences considérables. Il y a des pays où l'on voit Sirius lors même que le soleil est élevé sur l'horizon. On trouveroit de la même manière le temps du lever héliaque des autres étoiles pour une époque donnée ; mais il nous suffit d'avoir fourni un exemple de la méthode ; tout ceci appartient plus à l'intelligence des anciens qu'à l'histoire de la véritable astronomie. (V. le P. Pétau, l. III, diss. l. I, c. 2, &c).

Fig. 89.

Longitude du Soleil au lever de Sirius.

1607. Quoique le lever héliaque des étoiles fût le plus remarquable parmi les anciens, ils distinguoient encore plusieurs autres espèces de levers & de couchers (*Gemini elementa*) ; les modernes à leur imitation ont distingué le lever *cosmique* qu'on peut appeller le lever du matin ; & le coucher *cosmique* ou coucher du matin, aussi bien que le lever & le coucher *acroniques* (a) qu'il vaudroit mieux appeller le lever & coucher du soir. Le moment du lever du soleil règle le lever ou le coucher cosmique : lorsque des étoiles se lèvent avec le soleil ou se couchent au soleil levant, on dit qu'elles se lèvent ou se couchent cosmiquement ; mais quand les étoiles se lèvent ou se couchent le soir au mo-

Lever cosmique & acronique.

(a) Ἀκρονύχιος, *vespertinus*.

ment où se couche le soleil, on dit que c'est le lever ou le *coucher acronique*; d'où il suit que le coucher acronique suit à 12 ou 15 jours près le coucher héliaque, du moins pour les étoiles voisines de l'écliptique, & que le lever cosmique précède de la même quantité le lever héliaque.

1608. Le P. Pétau a calculé une table fort ample de ces différentes sortes de levers & de couchers des différentes étoiles pour le temps de Jules César: en voici un extrait. Pour s'en servir, il faut observer que les quatre saisons de l'année qui commencent en 1772, les 20 Mars, 21 Juin, 22 Septembre & 21 Décembre, arrivoient du temps de César, les 23 Mars, 25 Juin, 25 Septembre & 23 Décembre, c'est-à-dire, deux ou trois jours plus tard, suivant le calendrier Julien qui fut établi à Rome, 44 ans avant J. C.

TABLE qui marque le lieu du Soleil en signes & degrés, pour le temps du lever & du coucher des 12 principales étoiles à Rome, la premiere année de la correction Julienne, 44 ans avant J. C.

	Lever Cosmique.	Lever Héliaque.	Lever Acronique.	Coucher Cosmique.	Coucher Héliaque.	Coucher Acronique.
Antarès.	7s 14d	7s 27d	1s 14d	1s 2d	6s 3d	7s 2d
L'aigle.	8 9	8 27	2 9	3 26	9 10	9 26
Arcturus.	5 14	5 26	11 14	2 3	7 11	8 3
La Chèvre. . . .	11 17	0 17	5 17	8 14	1 28	2 14
Luis. de la couron.	5 26	6 10	11 26	3 4	7 15	9 4
Queue du Cygne. .	7 21	8 6	1 21	5 14	11 0	11 14
Queue du Dauphin.	8 17	9 6	2 17	4 5	9 14	10 5
Prem. tête des Gém.	2 14	3 0	8 14	8 28	2 13	2 27
Aldébaran. . . .	1 21	2 11	7 21	7 9	0 26	1 9
Cœur de l'Hydre. .	4 11	4 25	10 11	9 4	2 16	3 4
α de la Balance. . .	6 17	7 11	0 17	0 17	5 24	6 17
Regulus. . . .	4 1	4 18	10 1	10 3	2 27	4 3
Sirius.	3 23	4 8	9 23	7 19	1 6	1 19
η des Pleïades. . .	0 23	1 28	6 23	7 3	0 18	1 3

1609. On trouve dans les élémens d'astronomie de *Geminus*, & dans les dissertations du P. Pétau, *Doctrina temporum*, *tom. III*, plusieurs circonstances des différentes sortes de lever & de coucher, avec plusieurs dissertations & plusieurs tables pour trouver à différens jours de l'année le lever & le coucher de différentes étoiles; ces détails me conduiroient trop loin, je me contenterai de rapporter quelques passages des Poëtes latins pour servir d'exemple.

Hippocrate même parle de ces circonstances, il dit qu'on doit observer les levers & les couchers héliaques des étoiles, spécialement du grand Chien & d'Arcturus, de même que le coucher cosmique des Pléiades, (*Hipp. de Ære*); mais cela doit s'entendre de l'influence des différentes saisons de l'année, de la chaleur, de l'humidité, & des autres qualités de l'atmosphère dans chaque mois.

Polybe racontant la perte de la flotte Romaine dans la première guerre Punique, attribue ce malheur à l'obstination des consuls qui avoient voulu, malgré les pilotes, se mettre en-mer entre le lever d'Orion & celui du grand Chien, saison toujours orageuse. Le lever héliaque d'Orion arrivoit le 26 Juin, suivant Pline & Ovide; mais celui du grand Chien arrivoit le 26 Juillet, suivant Columele, c'est donc dans le mois de Juillet qu'ils naviguoient.

1610. C'est sur-tout dans ses fastes qu'Ovide parle souvent des étoiles; ce Poëte annonce d'abord qu'il va chanter les principes sur lesquels étoit fondée la division de l'année Romaine, le lever & le coucher des constellations :

> Tempora cum causis Latium digesta per annum,
> Lapsaque sub terras, ortaque signa canam. *Fast. I.* 1.

1611. Après avoir parlé des 12 mois de l'année & des divinités qui y présidoient, il entre dans la partie astronomique de son ouvrage, en faisant un éloge pom-

peux des anciens aſtronomes, *Felices animæ*, &c. vers 297. Le lever héliaque de la Lyre eſt le premier dont il parle & il le fixe au jour des Nones, c'eſt-à-dire, au cinq de Janvier :

Signa dabunt imbres exoriente Lyrâ. *I.* 306.

Il faut convenir que la détermination de ce jour n'eſt point exacte; le lever héliaque arrivoit dès le 6 Novembre, mais les Poëtes ne ſe piquent pas d'une bien grande préciſion; on peut voir dans le P. Pétau, *Diſſertationum, lib. II, c.* 8, beaucoup d'inexactitudes & d'erreurs dans différens paſſages des anciens.

1612. Ovide eſt plus exact lorſqu'arrivé au 9 de Janvier, il parle du lever héliaque de la conſtellation du Dauphin,

Interea Delphin clarum ſuper æquora ſidus
Tollitur, & patriis exerit ora vadis. *I.* 457.

Car la conſtellation du Dauphin ſe levoit vers les 6 heures du matin dans cette ſaiſon-là, c'eſt-à-dire, aſſez long-temps avant le ſoleil pour pouvoir être obſervée le matin, & c'étoit le commencement de ſon apparition, ou ſon lever héliaque; au contraire il place au 10 de Juin le lever acronique, en diſant :

Navita puppe, ſedens Delphina videbimus inquit,
Humida cum pulſo nox erit orta die. *VI.* 470.

Quand les Pléiades (*Atlantides*) ſe couchoient coſmiquement ou au lever du ſoleil, la Couronne ſe levoit héliaquement, paroiſſant avant le ſoleil. *Georg. I.* 222.

1613. Le coucher coſmique paroît indiqué pour le premier Avril au matin.

Dum loquor, elatæ metuendus acumine caudæ
Scorpios, in virides præcipitatur aquas. *IV.* 163.

C'eſt cependant au 15 Avril qu'on le trouve par le calcul, au temps de Céſar, pour l'étoile *Antarès*,

Le

Le lever héliaque des pléïades & le commencement de l'été sont annoncés pour le 13 de Mai; ce seroit le 21, suivant le calcul du Pere Pétau.

Pleiadas aspicies omnes, totumque fororum
Agmen, ubi ante idus nox erit una super;
Tum mihi, non dubiis autoribus, incipit æstas. *L. V.* 599.

1614. Puisque nous en sommes à des faits astronomiques propres à éclaircir les ouvrages des anciens Poëtes; nous dirons un mot du rapport qu'il y avoit entre les constellations, & les points Cardinaux de l'écliptique où commençoient les saisons. En 1770, le soleil entre dans le signe du Bélier, & dans l'équinoxe, en commençant le printemps le 20 de Mars; mais il n'entre dans la *constellation*, c'est-à-dire, dans les étoiles qui portent le nom de Bélier que le 29 Avril; car la première étoile γ est à 29° 58′ de l'équinoxe, parce que les points Cardinaux de l'écliptique, c'est-à-dire, les équinoxes & les solstices ont rétrogradé de 30 degrés, depuis le temps où ils étoient d'accord avec les constellations. Cette rétrocession ou précession des équinoxes est fort lente (915), il faut 2145 ans pour qu'elle soit d'un signe entier, ou de 30 degrés; mais lorsqu'on remonte au siècle d'Auguste, on trouve 25 $\frac{1}{4}$ degrés, & au temps de l'ancienne Grèce 1450 ans avant J. C. on trouve 43 degrés dont les équinoxes étoient plus avancés qu'ils ne le sont aujourd'hui; le printemps n'arrivoit que lorsque le soleil étoit dans le milieu de la constellation du Bélier. Il est probable, en effet, que les premiers astronomes placèrent les saisons, par exemple, le printemps dans le milieu du grouppe d'étoiles qu'ils prirent pour la première constellation, c'est-à-dire, dans le milieu du Bélier, & l'été dans le milieu de la 4e constellation ou de l'Ecrevisse; c'est-à-dire, qu'ils appellèrent l'Ecrevisse l'assemblage des étoiles au milieu desquelles se trouvoit le soleil au temps du solstice.

Différence des signes & des constellations.

Les anciens prennent le milieu des constellations.

1615. La position des points cardinaux a du être

Situations des équinoxes.

ensuite fort différente, suivant les temps où on l'a observée & décrite; aussi trouve-t-on des auteurs anciens qui placent les équinoxes & les solstices au commencement de chaque signe, cela vouloit dire alors, de chaque constellation; d'autres qui les mettent au 2e, au 4e, au 6e, au 10e, au 15e degré des mêmes signes. Voyez M. Fréret, Défense de la chronologie 1758, *pag.* 460, 467 : en voici des exemples.

Au temps d'Hipparque, la premiere étoile du Bélier étoit dans le colure même de l'équinoxe, & le soleil entroit dans la constellation du Bélier, en même temps que dans l'équinoxe.

1616. Au temps d'Hésiode, 950 ans avant J. C., les points cardinaux étoient au 8e degré des constellations, & le soleil entroit dans les astérismes ou constellations, 8 jours avant que d'entrer dans les points de la dodécatémorie (a), qui portoient les mêmes noms; ainsi le soleil entroit dans la constellation du Bélier, 8 jours avant l'équinoxe, c'est-à-dire, avant le temps où les jours étoient égaux aux nuits; Columelle (*Liv. IX. chap.* 13) nous dit que les calendriers rustiques de Méton, d'Eudoxe (b), & des anciens astronomes suivoient cette méthode, & que les jours de fêtes qui dépendoient du commencement des saisons étoient réglés sur ce pied-là; il s'y conforme lui-même, on la trouve dans Varron, Ovide, Vitruve, Pline, Hygin, dans le Scholiaste d'Aratus, dans Martianus Capella, & même dans les calendriers du vénérable Bede, (né en Angleterre en 672), comme l'observe le P. Pétau, *Dissert. liv. II. c.* 4. *pag.* 43.

Contradictions de Manilius.

Le poëte Manilius, qui n'étoit qu'un compilateur, dit dans un endroit de son poëme, que le solstice est au premier degré du cancer, (*Liv. I*, vers 605), & dans l'autre que c'est au 15e degré, *Livre III.* Il avoit

(a) Δωδεκάτημορια, la douzième partie, c'est-à-dire, 30 degrés du cercle de l'écliptique.

(b) A l'égard d'Eudoxe, voyez l'art. 1619.

trouvé cette derniere méthode dans l'ancienne aſtrologie grecque, & il l'explique aſſez clairement, en parlant du Cancer,

> Extenditque diem ſummum, parvoque receſſu,
> Deſtruit, ut quanto fraudavit tempore luces
> In tantum noctes augeſcat. *III.* 622.

c'eſt-à-dire, que le Cancer augmente la durée des jours & la diminue enſuite; mais de ſorte qu'il rende à la longueur des nuits, ce qu'il ôte à celle des jours, tour-à-tour elle leur ôte & leur rend leur durée,

> Inque vicem nunc damna facit, nunc tempore ſupplet. *III.* 636.

& le P. Pétau a fait voir aſſez en détail, qu'Hipparque avoit ſuppoſé les ſolſtices dans la ſphère d'Eudoxe, au moins à 15° vers l'orient, du lieu où ils étoient 162 ans avant J. C.

1617. A l'égard de l'ancienne ſphère grecque, attribuée à Chiron (255), elle ſe rapporte environ à 1350 ans avant J. C. Il y a grande apparence qu'elle avoit été réglée par quelques aſtronomes Egyptiens, (Fréret, *pag.* 459). La diviſion du Zodiaque eſt peut-être encore plus ancienne que Chiron; car il eſt naturel de penſer qu'elle fut faite dans le temps auquel les levers ſenſibles du commencement de chaque conſtellations précédoient de 15 jours les points cardinaux, c'eſt-à-dire, les équinoxes & les ſolſtices (1614). Sphère de Chiron.

1618. Mais au temps d'Héſiode (321), c'eſt-à-dire, 950 ans avant J. C. on avoit fait, ce ſemble, quelque changement à la ſphère ancienne de Chiron, (M. Fréret, *pag.* 460), il paroît qu'on dreſſa de nouveaux calendriers, dans leſquels les levers & les couchers des étoiles étoient marqués d'une maniere plus conforme aux apparences, que dans la ſphère de Chiron. Les idées aſtronomiques commençoient à devenir plus communes dans la Grece, par le commerce des Orientaux; le calendrier fait du temps d'Héſiode fut reçu Sphère d'Héſiode.

par les Grecs, & ensuite par les Romains (1616), qui l'employerent sans examen, comme s'il eût été fait pour le temps & le climat où ils vivoient. Ainsi il faut ôter environ 38° des longitudes qu'ont les étoiles en 1770, si l'on veut faire des calculs qui soient d'accord avec les passages d'Ovide, de Pline, &c. sans cependant qu'on puisse dire qu'ils ayent suivi constamment la même règle.

Sphère d'Eudoxe.

1619. Cependant Eudoxe qui écrivit environ 370 ans avant J. C. (337), paroît avoir décrit la sphère d'après une tradition plus ancienne que le temps d'Hésiode; Newton dans sa chronologie pense que c'étoit sur la sphère de Chiron, & il en fixe l'époque à 936 ans avant J. C., mais Whiston dans la réfutation qu'il a faite de la chronologie de Newton, & M. Fréret, après lui, prouvent que la sphère décrite par Eudoxe, & par le poëte Aratus (346), se rapporte à l'an 1353 avant J. C. ou environ. M. Maraldi la fait aussi remonter à plus de 1200 ans avant J. C. (*Mém. acad.* 1733, *pag.* 438); delà M. Fréret conclut, (*pag.* 459), que ces connoissances étoient cultivées depuis long-temps dans l'orient; probablement cette sphère avoit été réglée par quelques astronomes Egyptiens ou Phéniciens qui étoient venus avec les fondateurs des colonies Orientales, & qui avoient abandonné l'Orient avec les Pasteurs chassés d'Egypte par Sésostris. Mais il est surprenant qu'on ne fût pas plus avancé au temps d'Eudoxe.

C'est ici que je terminerai ce que j'avois à dire du calendrier & de la chronologie, j'ai été trop court pour ceux que la curiosité porte spécialement à l'histoire, mais trop long pour ceux qui ne cherchent qu'à pénétrer dans les branches essentielles de l'astronomie; je reprens donc le fil des théories astronomiques, & je commence par les parallaxes qui en sont une branche essentielle, & qui nous conduiront ensuite au calcul des éclipses.

LIVRE NEUVIEME.

DES PARALLAXES.

1620. La Parallaxe (a), est la différence entre le lieu où un astre paroît, vu de la surface de la terre, & celui où il nous paroîtroit, si nous étions au centre ; on l'appelle quelquefois *Parallaxe diurne*, pour la distinguer de la parallaxe annuelle (1141). Définition de la Parallaxe.

Tous les mouvemens célestes doivent se rapporter au centre de la terre pour paroître réguliers, car les différens points de la surface de la terre étant situés fort différemment les uns des autres, un astre doit leur paroître dans des aspects fort différens ; c'est au centre qu'il faut se transporter, afin de voir tout à sa véritable place, & de trouver la véritable loi des mouvemens célestes ; ainsi nous sommes obligés de calculer sans cesse la parallaxe, pour réduire le lieu d'une planète observé à celui que nous eussions vu du centre de la terre.

1621. Soit *T* le centre de la terre, (*fig.* 87), *O* le point de la surface où est placé l'observateur ; *TOZ* la ligne verticale, ou la ligne qui passe par le zénit *Z*, par le point *O* de l'observateur, par le centre *T* de la terre, & par le nadir. Une planète *P* située dans la ligne du zénit, répond toujours au même point du ciel, soit qu'on la regarde du centre *T*, soit qu'on l'observe du point *O* ; le point du ciel qui paroît à notre zénit marque également le lieu de l'astre dans les deux cas ; ainsi *un astre qui paroît au zénit n'a point de parallaxe* : c'est le premier principe qu'il faut considérer dans cette théorie des parallaxes. La parallaxe est nulle au zénit. *Fig.* 87.

(a) Παράλλαξις, *differentia*, *à* παραλλάσσω, *transmuto* ; la parallaxe vient en effet d'un changement de situation de la part de l'observateur, & produit un changement dans la situation apparente de l'astre.

Fig. 87. 1622. Si la planète, au lieu d'être sur la ligne du zénit *TOPZ*, paroît sur la ligne horizontale *OH*, perpendiculaire à la première, sa distance *TH* au centre de la terre étant la même que la distance *TP*, le lieu de la planète *H* vu du centre de la terre, est sur la ligne *TH*, le lieu de la planète, vu du point *O*, est sur la ligne *OH* : ces deux lignes *TH* & *OH* ne répondent pas au même point du ciel; car au-delà du point *H*, où elles se croisent, elles iront en s'éloignant l'une de l'autre; & dans la sphère des étoiles fixes, elles rencontreront deux points différens, & indiqueront pour l'astre situé en *H* deux situations différentes, cette différence est ce que nous appellons parallaxe.

1623. Comparons ces deux différentes situations, ou ces deux différens points, avec le point du zénit ou le point du ciel qui est sur la ligne *COZ* menée par le centre & par le point *O* de la surface : l'angle *ZOH* formé par la ligne verticale *OZ*, & par la ligne *OH*, sur laquelle paroît la planète, est la distance apparente de l'astre au zénit : si nous étions au centre *T*, l'angle *ZTH* seroit la vraie distance de l'astre au zénit, ou la quantité de degrés dont la ligne *TH*, menée à l'astre, différeroit de la ligne *TZ* menée au zénit.

1624. La distance apparente *ZOH* est plus grande que la distance vraie *ZTH*; car dans le triangle rectiligne *HTO*, dont le côté *TO* est prolongé en *Z*, l'angle extérieur *ZOH* est égal aux deux intérieurs *T* & *H*; donc il est plus grand que l'angle *T* de la quantité de l'angle *H* : ainsi la distance apparente de l'astre *H* au zénit est plus grande que la distance vraie *ZTH*. La différence de ces deux distances est l'angle *OHT*, qui s'appelle la *Parallaxe horizontale*, si la ligne *OH* est horizontale, comme nous l'avons supposée, c'est-à-dire, si le lieu apparent de l'astre qu'on observe, est sur l'*horizon apparent OH*, c'est-à-dire, sur la tangente menée par le point *O* de la surface terrestre. Dans le triangle *TOH* rectangle en *O*, on a cette proportion

Parallaxe horizontale.

en prenant l'unité pour rayon ou ſinus total ; 1 : ſin. *OHT* : : *TH* : *OT* : donc le ſinus de la parallaxe horizontale eſt égal à $\frac{OT}{TH}$, c'eſt-à-dire, que le rayon de la terre diviſé par la diſtance de l'aſtre, donne une fraction (3608) qui dans les tables des Sinus indique la parallaxe. *Fig. 87.*

1625. La parallaxe d'un aſtre eſt donc l'angle formé au centre de l'aſtre par deux rayons, dont l'un va au centre de la terre, & l'autre au point de la ſurface où eſt l'obſervateur ; c'eſt l'inclinaiſon des deux lignes qui partent du centre & de la ſurface, pour aller ſe réunir au centre de la planète ; enfin, c'eſt auſſi l'angle ſous lequel paroît le rayon de la terre, ou la diſtance de l'obſervateur au centre de la terre, lorſque cette diſtance ou ce rayon ſont ſuppoſés vus du centre de la planète, & c'eſt ainſi que nous l'avons déja conſidérée, (1396). Définition de la parallaxe.

1626. Le triangle *TOH* s'appelle *Triangle parallactique* ; il eſt toujours ſitué verticalement, puiſque le côté *OT* étant une ligne verticale, le plan du triangle fait ſur *OT*, ne ſauroit être incliné ; ainſi, tout l'effet de la parallaxe ſe fait de haut en bas, dans le plan d'un cercle vertical : d'ailleurs il eſt aiſé de comprendre que le centre de la terre étant perpendiculairement ſous nos pieds (a), c'eſt-à-dire, dans le plan de tous les cercles *verticaux*, l'effet de la parallaxe ne peut pas s'écarter de ces cercles ; ainſi la parallaxe eſt toute en hauteur, c'eſt-à-dire, qu'elle abaiſſe les aſtres du haut en bas, & dans un vertical, ſans faire paroître l'aſtre à droite ni à gauche du vertical. Delà il ſuit que la parallaxe ne change point l'azimut d'une planète ; de même dans le méridien la parallaxe ne change point l'aſcenſion droite d'un aſtre, parce que le vertical eſt alors perpendiculaire à l'équateur, & que tous les points Triangle parallactique. L'effet des parallaxes eſt en hauteur.

(a) On conſidere ici la terre comme une ſphère, ſon applatiſſement changera peu de choſe à la ſituation du centre par rapport au vertical (1684).

Fig. 87. du vertical répondent au même point de l'équateur.

1627. Jusqu'ici nous n'avons parlé de parallaxe que pour le cas où l'astre est à l'horizon, c'est-à-dire, où l'angle *ZOH* est un angle droit, & nous avons appellé *parallaxe horizontale* celle qui a lieu dans ce cas-là (1624) : si la planète *L* se trouve plus près du zénit, ensorte que l'angle *ZOL*, distance de la planète au zénit, soit un angle aigu, l'angle de la parallaxe *OLT* deviendra plus petit; on l'appelle alors *parallaxe de hauteur.*

Parallaxe de hauteur.

1628. Théoreme. *Le sinus total est au sinus de la parallaxe horizontale, comme le sinus de la distance au zénit est au sinus de la parallaxe de hauteur*; en supposant que la distance de la planète au centre de la terre soit la même dans les deux cas, & que la terre soit sphérique.

Démonstration. Dans le triangle rectangle *HOT* on a cette proportion : *HT* est à *TO*, comme le sinus de l'angle droit *O* est au sinus de l'angle *THO*; parce que dans tout triangle rectiligne des côtés sont comme les sinus des angles opposés. Dans le triangle *TOL* on a de même cette proportion : *TL* est à *TO* comme le sinus de l'angle *LOT* est au sinus de l'angle *TLO*; dans cette dernière proportion on peut mettre au lieu de *TL*, son égale *HT*, puisque la planète est supposée toujours à même distance du centre de la terre; ainsi l'on a ces deux proportions, en nommant *R* le sinus de l'angle droit :

$$\left.\begin{array}{l} HT : TO :: R : \text{sin. } H. \\ HT : TO :: \text{sin. } LOT : \text{sin. } L. \end{array}\right\} \text{donc } R : \text{sin. } LOT :: \text{sin. } H : \text{sin. } L;$$

mais le sinus de l'angle obtus *LOT* est le même que celui de l'angle *LOZ*, ou de la distance de la planète au zénit; donc le rayon est au sinus de la distance au zénit, comme le sinus de la parallaxe horizontale *H* est au sinus de la parallaxe de hauteur *L*.

Le sinus de la distance apparente au zénit est la même chose que le cosinus de la hauteur apparente,

&

& le rayon eſt toujours ſuppoſé être l'unité ; ainſi, 1 : coſin. haut. : : ſin. par. horiz. : ſin. parall. de hauteur ; donc *le ſinus de la parallaxe de hauteur eſt égal au ſinus de la parallaxe horizontale multipliée par le coſinus de la hauteur apparente.* Fig. 87.

1629. La parallaxe horizontale de la lune, qui eſt la plus grande de toutes les parallaxes des planètes, ne va qu'à un degré environ ; or entre le ſinus d'un degré, & l'arc d'un degré la différence eſt à peine de la valeur d'un quart de ſeconde ; ainſi l'on peut prendre l'un pour l'autre, & dire en général que *la parallaxe de hauteur eſt égale à la parallaxe horizontale multipliée par le coſinus de la hauteur apparente.* C'eſt ainſi que j'énoncerai toujours à l'avenir le théorême général de la parallaxe de hauteur, dont je ferai un uſage fréquent ; & nommant p la parallaxe horizontale, & h la hauteur apparente, je ſuppoſerai qu'on a toujours la parallaxe de hauteur $= p.$ coſ. h. Règle de la parallaxe de hauteur.

1630. La parallaxe eſt nulle quand l'aſtre paroît au zénit ; nous l'avons déja obſervé (1621), & cela ſe déduit encore de la valeur que nous venons de trouver ; car ſi la diſtance au zénit eſt nulle, ſon ſinus eſt égal à zéro, & la parallaxe de hauteur étant le produit de zéro par la parallaxe horizontale ſera auſſi égale à zéro. Au contraire la parallaxe eſt plus grande à l'horizon, que dans tout autre cas, ou à toute autre élévation ; car le coſinus de la hauteur ne ſauroit être plus grand que le ſinus de 90°, ou le coſinus de zéro ; donc le produit de la parallaxe horizontale par le coſinus de la hauteur apparente, qui forme la parallaxe de hauteur, ne ſauroit être plus grand que lorſque la planète paroît à l'horizon. Dans le cas même où elle ſeroit à l'horizon réel, c'eſt-à-dire, où l'angle OTH ſeroit droit, l'angle TOH étant aigu, le coſinus de TOH ſeroit plus petit que le rayon, & la parallaxe ſeroit plus petite que lorſque l'angle TOH étoit droit, c'eſt-à-dire, lorſque la ligne OH du lieu apparent vu de la ſurface de la terre étoit dans l'horizon. D'ailleurs on voit

Fig. 87. que la perpendiculaire qui feroit égale à HT, dans le dernier cas étant plus longue que HO, le rayon TO paroîtroit fous un plus petit angle que quand l'angle O eft droit, & que la diftance perpendiculaire eft plus petite. On trouveroit de même que quand le triangle HOT eft ifocelle, l'angle H eft toujours plus petit que la parallaxe horizontale, parce que la perpendiculaire eft plus longue que HO; il y a dans ce cas-là un feptième de feconde, dont la parallaxe eft moindre que la parallaxe horizontale H.

Changement de la parallaxe de hauteur.

1631. Le changement de la parallaxe de hauteur pour un petit efpace de temps eft aifé à calculer par les formules différentielles, car la parallaxe de hauteur eft p cof. h, (1629) la différentielle de cof. h eft dh fin. h, (3308) donc le changement de p cof. h fera pdh fin. h; mais p eft ordinairement exprimé en fecondes; ainfi pour que pdh fin. h foit auffi exprimé en fecondes, il faut que dh ne foit qu'une fraction, de même que fin. h, c'eft-à-dire, qu'il faut l'exprimer en décimales du rayon, en le divifant par l'arc de 57°, (3359); donc pour un degré de changement fur la hauteur le changement de la parallaxe fera $\frac{p \text{ fin. } h \,.\, 1^\circ}{57^\circ}$.

Suppofons que la parallaxe foit de $60'$, la hauteur de 30°; on trouvera le changement de parallaxe pour un degré de changement en hauteur $= \frac{3600'' \text{ fin. } 30^\circ \,.\, 3600''}{57^\circ\, 17'\, 44''\, 8.}$ $= 31''\ 4$; nous ferons ufage de cette formule, quand il s'agira des obfervations de la lune (2540).

La parallaxe eft en raifon inverfe de la diftance.

1632. La parallaxe horizontale d'un aftre eft d'autant plus petite que fa diftance eft plus grande; car plus le point H fe rapprochera du point O, plus l'angle THO augmentera. Dans le triangle THO on a cette proportion, $TH : TO :: R :$ fin. THO; fi l'aftre eft en N on aura dans le triangle TNO cette proportion $TN : TO :: R :$ fin. TNO; la première proportion donne cette équation, TH fin. $THO = R.\, TO$; la feconde proportion donne celle-ci, TN. fin. $TNO = R.$

TO; donc *TH*. sin. *THO* = *TN*. sin. *TNO*; donc *TH*: *TN* :: sin. *TNO* : sin. *THO*; car en réduisant cette dernière proportion en équation on a l'équation *TH*. sin. *THO* = *TN* sin. *TNO*; donc la distance *TH* dans le premier cas, est à la distance *TN* dans le second cas, comme le sinus de la parallaxe dans le second cas est au sinus de la parallaxe dans le premier.

La même démonstration auroit lieu, quelque fut l'angle *TOH*, pourvu que les points *N* & *H* fussent sur une même ligne *ONH*; ainsi lorsque la hauteur apparente est supposée la même, les sinus des parallaxes de hauteur sont en raison inverse des distances.

1633. La parallaxe d'un astre augmente dans le même rapport que son diamètre apparent; en effet, lorsqu'un astre s'éloigne il diminue de grandeur apparente dans la proportion inverse de sa distance (1384); mais sa parallaxe horizontale diminue de la même manière & dans le même rapport (1632); ainsi la parallaxe d'un astre est toujours comme son diamètre : si ce diamètre apparent diminue de moitié par l'éloignement de la planète, la parallaxe diminuera aussi de moitié, & le même rapport subsistera toujours entre le diamètre apparent & la parallaxe horizontale d'un astre, quelle que soit sa distance. Elle est comme le diamètre apparent.

Exemple. La parallaxe de Vénus a été observée le 6 Juin 1761 d'environ 30″, & son diamètre paroissoit alors de 60, on sera donc toujours assuré que le diamètre de Vénus est double de sa parallaxe; ainsi quand le diamètre paroîtra de 40″, la parallaxe sera de 20″, & il suffira en tout temps d'observer le diamètre pour pouvoir en conclure la parallaxe.

1634. Lorsqu'on connoît la parallaxe horizontale d'un astre il est aisé de connoître sa distance : en effet, dans le triangle rectangle *THO*, l'on connoît le demi-diamètre de la terre *TO* qui est de 1432 lieues (chacune de 2283 toises), & l'angle *HOT* qui est de 90°, puisqu'on suppose la planète dans l'horizon; si donc on connoît de plus l'angle *THO* qui est la pa- Elle sert à trouver la distance.

rallaxe horizontale, il sera aisé de résoudre le triangle *TOH*, & de connoître la distance *TH*; c'est ainsi qu'on a trouvé les distances en lieues rapportées ci-devant (*pag.* 158).

Méthodes pour trouver la Parallaxe horizontale d'une Planète.

1635. Les astronomes ont travaillé dans tous les temps à connoître les distances des planètes par le moyen de leurs parallaxes, & sur-tout la parallaxe de la lune qui est la plus sensible. Les éclipses de lune fournissent une méthode qui pouvoit être assez bonne autrefois pour trouver à peu-près la parallaxe de la lune. On observera à un instant précis la hauteur apparente du centre de la lune, pendant qu'elle est en partie éclipsée; on calculera pour le même-temps la dépression du soleil au-dessous de l'horizon, ou sa distance au zénit (1034), l'on aura la hauteur du centre de l'ombre, qui est toujours égale à la dépression du centre du soleil; par le moyen de cette hauteur du centre de l'ombre & de la latitude de la lune au temps du milieu de l'éclipse, que je suppose connue, on trouvera la hauteur vraie du centre de la lune, & cette hauteur vraie comparée avec la hauteur apparente que l'on a d'abord observée, donnera la parallaxe de hauteur. On la trouveroit indépendamment de la latitude, en observant une éclipse qui seroit centrale, ou à peu-près, car la durée de l'éclipse donneroit la somme des diamètres de la lune & de l'ombre, d'où il seroit aisé de conclure la parallaxe (1772).

Par les éclipses de lunes.

1636. Halley, dans son catalogue des étoiles australes, publié en 1679, employoit d'une autre manière les éclipses de lune, il cherchoit le diamètre de l'ombre par le moyen de la grandeur de l'éclipse & de sa durée, & il étoit persuadé qu'en faisant ces observations avec beaucoup d'exactitude, on trouveroit aussi exac-

tement que par toute autre méthode la parallaxe de la lune ; mais ces méthodes ſont inſuffiſantes actuellement.

1637. Il n'y a guère que trois méthodes ſuffiſamment exactes pour trouver la parallaxe ; la méthode des plus grandes latitudes, celle des parallaxes d'aſcenſion droite ; & celle des différences de déclinaiſon déterminées en même temps par des obſervateurs fort éloignés ; elles ont chacune leur avantage & nous les expliquerons ſéparément.

Par les plus grandes latitudes.

PREMIERE MÉTHODE. Ptolomée employa autrefois les plus grandes latitudes de la lune obſervées au nord & au midi de l'écliptique, pour reconnoître la quantité de la parallaxe, (*Alm. liv. V, c.* II, *pag.* 113. *édit.* 1551) ; Tycho-Brahé s'en ſervit également, (*Progym.* 463), M. Halley la propoſoit en 1679, comme s'il eût cru en être l'inventeur ; enfin elle a été employée par M. le Monnier, qui ſe fondoit ſur les plus grandes latitudes de la lune qu'il avoit obſervées, pour diminuer de 28″ la parallaxe de la lune employée par Newton, (*Inſt. Aſtr. pag.* 185).

1638. Suppoſons qu'un obſervateur ſoit ſitué vers $28^\circ \frac{1}{2}$ de latitude terreſtre ſeptentrionale, & qu'il obſerve la lune paſſer à ſon zénit lorſqu'elle a $28^\circ \frac{1}{2}$ de déclinaiſon boréale, & qu'elle eſt dans ſa plus grande latitude à 5° au nord de l'écliptique : quinze jours après, la lune étant dans la partie oppoſée du ciel & dans ſa plus grande latitude auſtrale à 5° au-deſſous de l'écliptique, elle doit être éloignée du zénit de 57°, puiſqu'elle eſt à $28^\circ\ 28' \frac{1}{2}$ de l'équateur vers le midi ; comme dans le premier cas elle étoit à $28^\circ \frac{1}{2}$ vers le nord ; la parallaxe ne changeoit rien à la premiere diſtance de la lune à l'équateur, parce que la lune étoit alors au zénit, mais la ſeconde diſtance doit paroître augmentée ſenſiblement par l'effet de la parallaxe, qui eſt conſidérable à 57° du zénit ; ainſi tout l'effet de la parallaxe conſpire à augmenter la latitude méridionale de la lune, & à la faire paroître plus grande que la latitude ſeptentrionale. Au lieu de

5° elle paroîtra de 5° 50′ au moins ; car si la parallaxe horizontale est d'un degré, elle doit être de 50′ à 57° du zénit (1629); si l'on trouve plus de 50′ d'excès dans cette latitude australe, ce sera une preuve que la parallaxe horizontale est plus grande qu'un degré.

Ainsi les plus grandes latitudes de la lune, qui doivent être égales par rapport au centre de la terre, paroissent différentes quand on les voit de la surface, la latitude méridionale étant toujours plus grande que l'autre, parce que la lune est abaissée vers le midi par l'effet de la parallaxe quand elle est dans sa plus grande latitude méridionale, & cette différence des deux latitudes observées nous fait connoître la parallaxe entiere qui auroit lieu à l'horizon.

1639. On peut employer cette méthode, même dans les lieux où la lune n'est jamais au zénit ; car ayant la différence des latitudes apparentes, qui est la somme des deux parallaxes de latitude, ou bien ayant la différence des parallaxes, à deux hauteurs connues, il sera aisé d'avoir la parallaxe horizontale. Soit P la plus grande parallaxe de hauteur, p la plus petite, Z la plus grande distance au zénit, z la plus petite, $P : p :: \sin. Z : \sin. z$ donc $P - p : p :: \sin. Z - \sin. z : \sin z$ & $p = \frac{(P-p) \sin. z}{\sin. Z - \sin. z}$. Ainsi connoissant la différence de deux parallaxes ou leur somme, il est aisé de trouver chacune séparément.

Quand on a observé la lune dans deux temps aussi différens, on trouve ordinairement que la lune est plus éloignée de la terre, ou à une latitude un peu plus grande dans une des deux observations que dans l'autre ; on a soin dans ce cas-là de tenir compte de la différence, en corrigeant une des deux observations, pour réduire la latitude à celle qu'on auroit observée, si la distance au nœud & la parallaxe horizontale eussent été précisément les mêmes dans les deux observations.

Pour tenir compte de l'applatissement de la terre dans cette méthode, il ne faut que corriger la parallaxe de hauteur de la maniere qui sera indiquée ci-après, (1682).

1640. Quoique nous ayons commencé par expliquer la méthode des plus grandes latitudes, celle des ascensions droites dont nous allons parler n'est ni moins belle ni moins utile ; nous verrons qu'elle a servi à déterminer la parallaxe de Mars & par conséquent celle du soleil avec beaucoup de précision (1736) ; & M. Maskelyne l'avoit employée avec succès en 1761 à l'Isle de Sainte Hélène, même pour la lune, malgré l'irrégularité & la vîtesse de son mouvement : (*Philos. trans.* 1764, *pag.* 371). Méthode des ascensions droites.

1641. La méthode qui détermine les parallaxes par les ascensions droites à sa premiere origine, ce me semble, dans l'ouvrage de Regiomontanus intitulé : *De Cometæ magnitudine longitudineque ac de loco ejus verò, problemata XVI ;* je crois ce livre imprimé en 1544, quoique l'auteur fût mort dès l'an 1476. Sa méthode est un peu compliquée ; mais elle se réduit néanmoins à trouver la parallaxe de hauteur, par le moyen de la différence des temps écoulés entre deux observations.

Cette méthode fut donnée ensuite par Diggeseus, auteur Anglois, qui publia en 1573, un ouvrage intitulé : *Ala seu Scala Mathematica*, à l'occasion de la nouvelle étoile de Cassiopée qui parut en 1572. On trouve encore cette méthode dans la science des longitudes de Morin ; dans les éphémérides de Képler pour l'année 1619 ; dans Hévélius qui en fait un usage fréquent ; dans M. Cassini, Traité de la comète de 1681 ; & dans l'Histoire céleste de Flamsteed, à l'occasion de Mars, qui fut observé par tous les astronomes dans son opposition & son périgée, en 1672. Auteurs qui l'ont employée.

Pour expliquer cette méthode, je commencerai par le cas le plus simple, ce qui rendra la méthode plus claire & les démonstrations plus sûres. Je suppose un observateur situé sous la ligne équinoxiale, observant une planète située aussi dans l'équateur ; il la verra passer à son zénit & ensuite descendre perpendiculairement à l'horizon ; la parallaxe de hauteur sera toute entière dans l'équateur, puisque l'équateur & le vertical de la

planète sont alors confondus perpétuellement l'un avec l'autre. Il suffiroit alors d'observer l'ascension droite d'une planète à son lever & à son coucher; on auroit la première trop grande, & la seconde trop petite, de la valeur de la parallaxe horizontale, ainsi la moitié de la différence observée seroit la parallaxe que l'on cherche. Dans d'autres situations de la planète & de l'observateur, la parallaxe d'ascension droite est moindre que la parallaxe horizontale, & que la parallaxe de hauteur; mais on peut les conclure l'une de l'autre, comme nous allons l'expliquer.

Fig. 90. 1642. Soit Z le zénit (*fig.* 90); P le pole du monde, EQ l'équateur, LMN le parallele de l'astre, M le lieu vrai, & m le lieu apparent qui est plus bas que le vrai lieu M, dans le vertical $ZMmT$; si du pole P l'on tire deux cercles de déclinaisons PMV & Pmu, l'un par le lieu vrai de l'astre M, l'autre par son lieu apparent m, la différence de ces deux cercles de déclinaisons, l'angle MPm qu'ils font entr'eux au pole du monde, ou l'arc de l'équateur Vu qui en est la mesure, sera la parallaxe d'ascension droite; or dans le triangle PMm si l'on connoît l'angle P, il ne sera pas difficile de trouver le côté opposé Mm, c'est-à-dire, que de la parallaxe d'ascension droite observée dans un temps ou dans un lieu quelconque on déduira facilement la parallaxe de hauteur.

La question se réduit donc à observer la parallaxe d'ascension droite, ce qui se fait de la manière suivante: lorsqu'une planète passe dans le méridien & que la parallaxe est nulle en ascension droite (1626), on observe la différence entre le temps du passage de la planète & celui d'une étoile fixe au fil d'une lunette; cet intervalle de temps, converti en degrés à raison de 15 degrés par heure ou de 15″ de degré pour 1″ d'heure, donne la différence d'ascension droite entre l'étoile & la planète (88, 2505).

Six heures après le passage au méridien on observe encore la même différence de passage, & l'on en conclud

clud la différence d'aſcenſion droite ; mais la parallaxe diminue l'aſcenſion droite de la planète lorſqu'elle eſt vers le couchant, en l'abaiſſant & la faiſant paroître plus à l'occident, tandis que la parallaxe ne change rien à l'aſcenſion droite de l'étoile ; ainſi la différence des aſcenſions droites ne ſera plus la même que celle qu'on avoit obſervée dans le méridien, elle ſera plus ou moins grande de toute la parallaxe d'aſcenſion droite.

1643. Nous ſuppoſons à la vérité que le lieu vrai de la planète ſoit exactement à la même diſtance de l'étoile dans chacune des deux obſervations, c'eſt-à-dire, que la parallaxe ſoit la ſeule cauſe de la différence qu'on aura trouvée entre la première & la ſeconde obſervation, & que la planète n'ait eu aucun mouvement propre ; mais il eſt aiſé de corriger cette ſuppoſition : on obſervera deux jours de ſuite au paſſage de la planète par le méridien ; la différence vraie d'aſcenſion droite entre la planète & l'étoile, on trouvera de combien elle varie d'un jour à l'autre, & par conſéquent de combien elle avoit dû augmenter en ſix heures par le mouvement propre de la planète, & indépendamment des apparences de la parallaxe ; ſi l'obſervation a donné une différence plus grande que celle qu'on trouve par le calcul, elle ſera l'effet de la parallaxe d'aſcenſion droite ; & l'on ſéparera cet effet d'avec celui du vrai mouvement de la planète.

1644. Pour conclure facilement la parallaxe horizontale de la parallaxe d'aſcenſion droite obſervée à une certaine diſtance du méridien, on peut ſe ſervir de cette expreſſion générale, parallaxe horizontale = $\frac{\text{Par. aſc. droite coſ. déclin.}}{\text{ſin. angle hor. coſ. haut. du pole}}$. Formule de la parallaxe d'aſcenſion droite.

DÉMONSTRATION. Suivant la trigonométrie ſphérique l'on a dans le triangle ZPm la proportion ſuivante : ſin. Zm : ſin. ZPm :: ſin. ZP : ſin. ZmP ; mais $Mm = p$ ſin. Zm (1629) ; donc $\frac{Mm}{p} =$ ſin. Zm, & $\frac{Mm}{p}$ ſin. ZmP

$=$ sin. ZPm sin. ZP; mais $MA = Mm$ sin. $Zm P$; donc $\frac{MA}{p} =$ sin. ZPm . sin. ZP, ou $MA = p$ sin. angle horaire cosin. latit. On a encore $MA = Vu$ cos. déclin. (892) = parall. asc. dr. cos. décli., donc parallaxe asc. dr. cos déclin. $= p$ sin. angle hor. cos. latit. donc la parallaxe d'ascension droite mesurée sur l'équateur est égale à $\frac{p \text{ sinus angle horaire . cosinus latitude}}{\text{cosin. déclin.}}$; donc $p = \frac{\text{par. asc. dr. cos. déclin.}}{\text{sin. angle hor. cos. lat.}}$, c'est la formule qu'il falloit démontrer, & qui sert à trouver aussi la parallaxe d'ascension droite à un moment donné (1648); mais il faut bien remarquer dans l'expression précédente que c'est la déclinaison apparente & l'angle horaire apparent que l'on doit employer. Cette formule revient au même que la proportion donnée par M. Cassini, dans ses élémens d'astronomie (*pag.* 27 à la fin).

1645. On a besoin de la parallaxe d'ascension droite aux environs du méridien pour corriger des différences de passages entre la lune & les étoiles, qui ne sont pas observés précisément dans le fil du milieu de la lunette méridienne (2387). Soit P le pole (*fig.* 215), Z le zénit, C le lieu vrai de la lune, F son lieu apparent dans le vertical; l'arc EF est sensiblement égal est à la parallaxe d'ascension droite cherchée, puisque c'est la différence entre l'ascension droite vraie qui est marquée par le cercle horaire PCE, & l'ascension droite apparente qui répond au point F, à la distance EF du même cercle horaire. Or dans le triangle sphérique PCZ, on a sin. $C = \frac{\text{sin. } P \text{ . sin. } PZ}{\text{sin. } ZC}$, la parallaxe de hauteur $CF = p$. sin. ZC, $EF = CF$ sin. $C = p$. sin. P sin. PZ, & cette quantité réduite à l'équateur (892) $= \frac{p \text{ . sin. } P \text{ . sin. } PZ}{\text{sin. } PC}$, c'est la quantité qu'il faut ôter du passage de la lune observé au fil vertical CF, s'il est après le vrai méridien; ce qui revient au même que la formule précédente : on en trouve des tables dans les

Fig. 215.

éphémérides du P. Hell & du P. Pilgram, pour 1770, imprimées à Vienne en Autriche.

1646. Lorsque la planète a été observée à égales distances avant & après le méridien, on a une différence double de la parallaxe horaire; & si les distances ne sont pas égales, on a une différence qui est la somme de deux parallaxes d'ascension droite, chacune proportionnelle au sinus de son angle horaire; comme on le voit par la formule précédente; pour lors il faut diviser cette différence, trouvée entre les observations, par la somme des sinus des angles horaires, pour avoir la parallaxe horizontale, ou, ce qui revient au même, l'on peut diviser la différence observée, ou l'argument de la parallaxe, en deux parties qui soient entr'elles comme les sinus des angles horaires ou des distances au méridien dans les deux observations, & n'employer dans la formule précédente qu'une de ces parties avec son angle horaire, pour trouver la parallaxe horizontale.

1647. Il suffit d'observer un astre deux heures avant & 2 heures après le passage au méridien, pour trouver dans l'ascension droite d'une planète une différence égale à sa plus grande parallaxe d'ascension droite; car les distances au méridien sont pour cette espèce de parallaxe ce que sont les distances au zénit pour les parallaxes de hauteur; or le sinus de la distance au méridien qui répond à deux heures de temps étant la moitié du rayon, on a de chaque côté du méridien une parallaxe qui est la moitié de la plus grande parallaxe d'ascension droite. *Il suffit de quatre heures d'intervalle.*

Si cette méthode étoit employée sous l'équateur même elle donneroit immédiatement & sans aucune hypothèse, la parallaxe horizontale de la lune qui répond au rayon de l'équateur, malgré l'applatissement de la terre; c'est un avantage particulier à cette méthode, nous verrons bien-tôt quelle correction il faut y faire dans les autres cas, (1691). *Cette méthode est indépendante de la figure de la terre.*

1648. Je prendrai pour exemple de cette méthode

les observations de M. Maraldi, (*Mém. de l'acad.* 1722). Le 15 Août 1719, Mars étant fort près d'une étoile de 5e grandeur qui est à la jambe orientale du verseau, M. Maraldi dirigea le fil d'une lunette de 12 pieds suivant le parallèle de l'étoile : à 9^h 18′ du soir Mars suivoit l'étoile de 10′ 17″ de temps, & 7 heures après, ou le 16 à 4^h 21′ du matin, il la suivoit seulement de 10′ 1″. Mais, suivant les observations faites au méridien plusieurs jours de suite, Mars devoit se rapprocher réellement de l'étoile de 14″ de temps, c'est-à-dire, qu'après l'avoir suivie de 10′ 17″ de temps il auroit dû, 7^h après, en être éloigné de 10′ 3″, au lieu de 10′ 1″ qu'observa M. Maraldi ; donc il y avoit 2″ de temps pour l'effet & pour l'argument de la parallaxe ; ces 2″ doivent être réduites en temps, multipliées par le cosinus de la déclinaison qui étoit de 15°, divisées par le cosinus de la latitude de Paris ou par le sinus de 41° 10′, & par la somme des sinus des angles horaires ou des distances au méridien qui étoient de 49° 15′ & de 56° 39′, & l'on trouve enfin $27'' \frac{1}{2}$ pour la parallaxe horizontale de Mars, d'où il résulte $10'' \frac{1}{5}$ pour celle du soleil ; la distance de Mars à la terre étant alors $\frac{37}{100}$ de celle du soleil.

Pour déterminer plus exactement la parallaxe d'ascension droite, il faudroit mesurer la distance de la planète à une étoile, avec plus de précision que par les temps & les passages, comme l'observe M. le Monnier, (*Inst. astr. pag.* 434) ; il proposoit de placer la lunette avec son micromètre, sur un instrument semblable à celui de M. Graham, décrit dans l'optique de Smith, & qu'une horloge feroit mouvoir avec l'astre ; ce genre d'instrument qu'on peut appeller *Héliostate*, a été exécuté par Passemant pour le cabinet du Roi à la Muete.

La difficulté qu'on trouvoit autrefois à mesurer la distance d'une planète à une étoile fixe, & leur différence d'ascension droite, à cause du mouvement diurne est aussi levée aujourd'hui par l'usage des héliomètres (2433) ou micromètres objectifs, qui font le même effet que

l'Héliostate ; on a l'avantage dans un héliomètre de mesurer la distance de la planète & de l'étoile, avec la même facilité que si l'une & l'autre étoit immobile ; mais pour en faire l'application à cette méthode des parallaxes d'ascension droite, il faudroit que la planète & l'étoile fussent à très-peu-près sur le même parallele, sans quoi la distance mesurée à une seule étoile, ne donneroit pas la différence d'ascension droite avec assez d'exactitude.

Au reste, quoiqu'il soit difficile par la méthode ordinaire de s'assurer d'une seconde de temps, sur la différence d'ascension droite qu'on aura observée une fois, il est probable que si l'on répete dix fois dans une nuit la même observation, l'on pourra s'assurer d'une demi-seconde, & même d'un tiers de seconde, qui répond à 5″ de degré ; on a soin ensuite de doubler l'effet de la parallaxe, en observant la différence d'ascension droite à l'orient & à l'occident du méridien (1647), & l'on se trouve parvenu à une exactitude de 2″ ou 3″ sur la parallaxe de la planète qu'on observe ; aussi voyons-nous que par cette méthode on étoit parvenu à connoître la parallaxe horizontale du soleil, à une seconde près, puisque M. Cassini & M. Maraldi l'ont trouvée de 9″½ ou 10″, & qu'on l'a trouvée enfin de 9″ depuis l'observation du passage de Vénus sur le soleil, qui étoit la plus concluante de toutes.

1649. La troisieme méthode pour déterminer la parallaxe est celle qui suppose deux observateurs très-éloignés l'un de l'autre, observant tout à la fois la hauteur d'un astre dans le méridien ; c'est la plus naturelle & la plus exacte ; c'est celle que j'ai employée en 1751 lorsque M. l'Abbé de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance, & que j'observois en même temps la lune à Berlin, pour trouver la parallaxe de la lune, qui n'avoit jamais été déterminée par une méthode aussi exacte. (*Mém. de l'acad.* 1751, *pag.* 457).

1650. Le cas le plus simple de cette méthode est celui où l'on auroit un observateur en *O* (*fig.* 87) ; & *Fig.* 87.

Fig. 87. un autre en *D*, qui ſeroit éloigné du premier de la quantité *OD* égale à peu-près à un quart de la terre, le premier étant en *O* obſervreoit un aſtre *H* à l'horizon; le ſecond étant en *D* l'obſerveroit à ſon zénit : dans ce cas l'angle *OHT*, qui eſt parallaxe horizontale, ſeroit égal à l'angle *HTE*, ou au complément de l'arc *O D* qui eſt la diſtance des deux obſervateurs, ou la différence de leurs latitudes; car je les ſuppoſe placés ſous le même méridien.

Il eſt impoſſible que les circonſtances locales nous donnent dans la pratique un cas auſſi ſimple que celui-là; ainſi nous allons voir ce qui arrive quand les deux obſervateurs ſont à une diſtance quelconque, & que l'aſtre leur paroît à des hauteurs quelconques.

1651. Suppoſons, comme en 1751, un obſervateur
Fig. 91. *B*, (*fig.* 91) ſitué à Berlin, & un autre en *C* ou au Cap de Bonne-Eſpérance; *L* la lune que nous obſervions tous deux en même temps dans le méridien; (il n'importe que ce ſoit préciſément au même inſtant pourvu qu'on ſache de combien a dû varier la hauteur méridienne dans l'intervalle des deux paſſages); *CLT* eſt la parallaxe de hauteur pour le Cap, *B L T* eſt la parallaxe de hauteur à Berlin (1627), la ſomme de ces deux parallaxes eſt l'angle *C L B*, argument total de la parallaxe horizontale; ce ſeroit leur différence ſi les obſervateurs voyoient tous deux l'aſtre au midi, ou tous les deux au nord. De ces deux parallaxes de hauteur, la première *B L T* eſt égale à la parallaxe horizontale multipliée par le coſinus de la hauteur apparente à Berlin, ou par le ſinus de la diſtance apparente au zénit qui eſt l'angle *L B A* (1628); la ſeconde parallaxe *C L T* eſt égale à la parallaxe horizontale multipliée par le ſinus de la diſtance *L C D* au zénit du Cap; donc la ſomme *B L C* qui eſt la parallaxe totale des deux obſervateurs eſt égale à la parallaxe horizontale multipliée par la ſomme des deux ſinus des diſtances obſervées; donc on aura la parallaxe horizontale en diviſant l'angle obſervé *B L C*, ou l'ar-

Argument de la parallaxe.

On en déduit la parallaxe horizontale.

gument de la parallaxe, par la somme des sinus des distances au zénit.

1652. Cette méthode fut aussi employée pour déterminer la parallaxe du soleil, ou plutôt celle de Mars & de Vénus. Le 5 Octobre 1751 le bord boréal de Mars paroissoit à 1′ 25″ 8 au dessous du parallele de l'étoile λ du verseau au Cap de Bonne-Espérance, 33° 55′ au midi de l'équateur, Mars étant à 25° 0′ du zénit; le même jour à Stockholm qui est à 59° 21′ de latitude septentrionale, la même différence de déclinaison entre le bord boréal de Mars & l'étoile λ du verseau paroissoit de 1′ 57″ 7, & Mars étoit à 68° 14′ du zénit; ces deux différences de déclinaison qui devroient être égales, diffèrent l'une de l'autre de 31″ 9. Si l'on divise cette différence par la somme des sinus des distances au zénit, 0, 4226; 0, 9287, ou par 1, 3513 l'on aura 23″ 6 parallaxe horizontale de Mars (M. de la Caille, *Leçons d'astr. pag.* 216).

1653. L'opération précédente suppose la terre parfaitement sphérique; mais lorsqu'il s'agit de la parallaxe de la lune on ne sauroit négliger l'applatissement de la terre; il faut alors diminuer de quelques minutes les deux distances au zénit, observées, (en supposant que le zénit de l'observateur soit entre la lune & le pole élevé); & les multiplier chacune par le rayon correspondant de la terre avant que d'employer la règle précédente. Il faut considérer l'applatissement de la terre.

L'ellipse *BECP* (*fig.* 92) représente une moitié du sphéroïde terrestre, *T* est le centre, *TP* est l'axe de la terre, *E* l'équateur, *B* & *C* sont les deux observateurs que je suppose placés sous le même méridien & observant à la fois la lune en *L*; *ZBM*, *zCN* sont les perpendiculaires à la surface de l'ellipse en *B* & en *C*, l'angle *LBZ* est la distance apparente de la lune au zénit, pour l'observateur *B*, *LCz* est la distance apparente pour l'observateur *C*. On calculera les angles *MBT*, *NCT* formés par les perpendiculaires à la surface de la terre, en *B* & en *C*, & par les rayons *BT* Fig. 92.

Fig. 91. & CT menés au centre de la terre (2679); on les retranchera des distances au zénit, & l'on aura les angles LCD, LBA ou les distances corrigées, dont on fera à peu-près le même usage que nous avons fait ci-devant des distances au zénit dans la terre sphérique (1651). Puisque $TB : TL ::$ sin. TLB : sin. TBL ou ABL, on aura lorsque l'angle B sera droit, $\frac{TB}{TL}$ égal au sinus de la parallaxe horizontale à Berlin (1624); de même $\frac{CT}{TL}$ est le sinus de la parallaxe horizontale au Cap de Bonne-Espérance, ou au point C; ainsi le sinus de la somme, ou de l'angle $BLC = \frac{CT}{TL}$ sin. $LCD + \frac{TB}{TL}$ sin. LBA, (3617) en supposant le cosinus de chaque parallaxe égal à l'unité; donc la distance $TL = \frac{CT \text{ sin. } LCD + TB \text{ sin. } LBA}{\text{sin. } BLC}$; & le sinus de la parallaxe horizontale à Paris, ou dans un autre lieu quelconque dont on connoîtra la distance au centre de la terre sera égal à cette distance ou au rayon de la terre multiplié par $\frac{\text{sin. } BLC}{CT \text{ sin. } LCD + TB \text{ sin. } LBA}$. Dans cette formule on fait usage des deux rayons de la terre TC & TB dont on trouvera la valeur dans le XVe. livre, (2680, 2690), & ci-après (1705).

1654. Nous remarquerons ici que quand la lune est au méridien, la parallaxe de hauteur, même dans le sphéroïde applati est exactement proportionnelle au sinus de la distance au zénit LBZ, diminuée de la valeur de l'angle MBT ou ABZ, c'est-à-dire, au sinus de l'angle LBA, ou de l'angle LBT, cela est évident par la considération seule du triangle (1628). Nous ferons usage de cette considération, (3942).

Ces trois méthodes qui servent à trouver en général la parallaxe d'un astre, sont applicables à tous les astres & en particulier au soleil & à la lune; mais il y a des méthodes particulières à ces deux astres, telles sont pour

pour la lune la méthode des éclipses (1635); pour le soleil la méthode des quadratures de la lune (1722), & celle des passages de Vénus sur le soleil qui est la meilleure de toutes. L'importance des parallaxes du soleil & de la lune, la multitude des tentatives qu'on a faites pour les bien connoître, & l'usage que nous en ferons dans le cours de cet ouvrage, exige que nous en traitions séparément avec un certain détail.

PARALLAXE DE LA LUNE.

1655. Les anciens avoient une idée bien imparfaite des distances des planètes & de leurs parallaxes; quoique la lune fût celle dont il étoit le plus facile de connoître l'éloignement, on la croyoit beaucoup plus près de nous qu'elle n'est réellement.

La distance de la Lune inconnue 600 ans av. J. C.

Pythagore jugeoit la distance de la lune à la terre de 126 mille stades, (*Plin. hist. nat. II*, 21); & comme le stade étoit d'environ 95 toises (2640), cette distance ne va pas à 6 mille lieues, au lieu de 80 mille que nous trouvons actuellement, d'où l'on peut juger qu'au temps de Pythagore 612 ans avant J. C., l'on n'avoit encore fait aucune observation propre à déterminer cette distance.

Hipparque, au rapport de Ptolomée (*Alm. V*, 11), avoit entrepris par de certaines conjectures tirées des éclipses de trouver les distances de la lune à la terre; mais par la difficulté & l'incertitude de sa méthode, il avoit trouvé des différences considérables dans ses résultats. Cependant on voit qu'il jugeoit la plus grande distance de la lune entre $72\frac{1}{2}$ & 83 demi-diamètres de la terre, & la plus petite entre 62 & 71. Ces limites sont établies aujourd'hui de 56 à 64; Hipparque avoit donc de la parallaxe une idée beaucoup plus exacte qu'on ne l'avoit eue avant lui.

1656. La distance de la lune, suivant Posidonius, étoit de deux millions de stades, *Vicies centum millia*

ſtadiorum, Pline II, 23 ; cette diſtance revient à 87165 lieues, & elle approche beaucoup de celle que nous trouvons aujourd'hui ; on lit de même dans la grande édition du P. Hardouin ; mais ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que le P. Hardouin dans ſa note ſur ces mots-là, ſuppoſe qu'il n'y ait point *Millia*, mais ſeulement *Vicies centum*, c'eſt-à-dire, 2000 ſtades, puiſqu'il l'évalue à 250 mille pas, (le ſtade étoit de 125 pas Romains, ou 95 toiſes de Paris), tandis que *Vicies centum millia ſtad.* ſignifie 250000000 pas, mais il eſt clair qu'il faut rejetter la note du P. Hardouin, & s'en tenir au texte, *Vicies centum millia*, parce que Poſidonius ne pouvoit pas ſuppoſer la lune 1000 fois plus près de nous qu'elle n'eſt réellement, ſur-tout les obſervations d'Hipparque ayant été faites avant lui ; d'ailleurs les anciens ne ſe ſervoient jamais de l'expreſſion, *Vicies centum*, pour ſignifier ſimplement deux mille ; mais *Vicies centum millia*, eſt la maniere de parler des anciens auteurs. Voy. ce que j'en ai dit dans les mém. de 1752, *pag.* 84.

1657. Ptolomée obſerva la lune par le moyen de ſes règles parallactiques, lorſqu'elle étoit dans le tropique d'été à $2^\circ \frac{1}{8}$ du zénit d'Alexandrie, & lorſqu'elle étoit dans le tropique d'hiver à $50^\circ\ 55'$, il trouva, par le moyen de ſes tables, que dans le temps de cette derniere obſervation la lune n'étoit véritablement qu'a $49^\circ\ 48'$ du zénit, d'où il conclut une parallaxe de 67 minutes ; enfin il détermina la plus grande diſtance de la lune de 64 demi-diamètres & la plus petite de 34, c'eſt-à-dire la parallaxe entre $54'$ & $1^\circ\ 41'$.

1658. Les Arabes ne corrigèrent point les erreurs de Ptolomée en cette partie ; mais Alphonſe, Roi de Caſtille, diminua beaucoup cette parallaxe. Copernic détermina enſuite par des obſervations faites en 1522, les diſtances de la lune de 68 & 52 demi-diamètres terreſtres ou la parallaxe entre $50'$ & $66'$! On ne ſauroit faire un plus bel éloge de ſon travail, qu'en diſant que Tycho, après un grand nombre de bonnes obſervations faites 60 ans après, avec une prodigieuſe collection d'inſtru-

mens ne trouvoit rien à changer à la plus grande parallaxe de Copernic; il se contenta d'augmenter la plus petite parallaxe jusqu'à $56' \frac{3}{4}$.

On verra dans l'Almageste de Riccioli, & dans un mémoire que j'ai donné sur la parallaxe de la lune. (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 87), les sentimens de différens auteurs sur la parallaxe : voici une table où ces diverses opinions sont rapprochées.

TABLE des Parallaxes selon différens Astronomes.

NOMS DES AUTEURS.	La plus grande parallaxe.	La plus petite parallaxe.
Hipparque, 120 ans avant J. C.	48′ 30″	41′ 30″
Le même, par d'autres observations.	55 30	47 30
Ptolomée, 147 ans après J. C.	103 0	53 34
Alphonse, Roi de Castille, en 1284.	63 17	53 19
Copernic, mort en 1543.	65 48	50 19
Tycho, mort en 1601.	65 36	56 44
Képler, dans ses éphémérides, 1616.	60 58	54 41
Dans ses Tables Rudolphines, 1627.	63 41	58 22
Boulliaud, en 1645.	63 43	53 30
Riccioli, en 1651.	66 56	51 32
M. de la Hire, en 1702.	61 25	52 17
M. Halley, en 1719.	61 7	53 29
M. Cassini, en 1740.	62 11	54 33
M. le Monnier, *Inst. astr.* 1746.	61 8	53 29
M. Euler, dans ses Tables, en 1760.	61 15	52 42
Suivant les Tables de M. Mayer.	61 32	53 57
Suivant mes observations (1713).	61 29	53 51

Quantité de la parallaxe de la lune.

1659. Comme la méthode des plus grandes latitudes de la lune est une des plus avantageuses pour observer la parallaxe de la lune, les astronomes ont continué d'en faire usage aussi bien que Ptolomée; M. le Monnier, en publiant les tables de la lune de Flamsteed en 1746, observa que cet auteur dans ses premieres tables publiées en 1680, avoit fait la parallaxe horizontale de la lune au temps de ses moyennes distances & dans les syzygies, de $58' 2'' \frac{1}{2}$, M. Newton de $57' 30''$; mais par les plus grandes latitudes de la lune observées depuis 7 à 8 ans, il l'avoit trouvée de $57' 2'' \frac{1}{2}$. (*Instit. astr. pag.* 185). Pour moi je l'ai trouvée de $57' 26''$, beaucoup plus approchante de celle de Newton, & cela par la meilleure de toutes les méthodes, c'est-à-dire, par les observations simultanées faites en 1752 au Cap de Bonne-Espérance & à Berlin, dont je donnerai le résultat ci-après (1711): on verra que la plus grande parallaxe de la lune qui a lieu pour Paris quand la lune est pleine & périgée, est de $61' 29''$, & la plus petite parallaxe de $53' 51'$, la lune étant nouvelle & apogée (a).

De la parallaxe de la Lune en longitude.

1660. Il ne suffit pas dans les calculs astronomiques de connoître la parallaxe horizontale, il faut souvent en connoître l'effet en longitude; la plupart des auteurs qui ont écrit sur le calcul des éclipses de soleil, ont employé la parallaxe en longitude pour trouver le lieu apparent de la lune. Quoiqu'on puisse s'en passer, comme je le ferai voir dans le livre suivant, je donnerai cependant ici la méthode la plus sûre de trouver la parallaxe en longitude & en latitude avec un exemple détaillé.

Nonagésime.

La méthode employée par Képler est celle du Nonagésime; on appelle NONAGÉSIME le point de l'écliptique éloigné de 90 degrés des deux sections de l'horizon & de l'écliptique, ou des points qui se levent

(a) Nous indiquerons (dans le livre XXII), une méthode qui a été employée pour trouver la parallaxe de la lune, par la longueur du pendule à secondes, ou par le nombre de pieds que les corps graves parcourent sous l'équateur (3483).

& qui se couchent; ainsi la longitude du Nonagésime est moindre de trois signes que celle du point *ascendant*, *de l'horoscope*, (1055) ou du point orient de l'écliptique, c'est-à-dire, du point situé à l'horizon du côté de l'orient.

Soit le méridien *HZEC* (*fig.* 93), l'horizon *HOBC*; l'écliptique *ENRTO* prise dans l'hémisphère oriental; *E* le point culminant de l'écliptique, c'est-à-dire, le point qui passe dans le méridien, & dont l'ascension droite est celle du milieu du ciel (1011). Le point *O* de l'écliptique qui se leve au même instant, est le point orient, ou l'horoscope (1055); l'arc *ON* étant pris de 90 degrés, le point *N* est le nonagésime. Si par le pole *P* de l'écliptique & par le zénit *Z* on tire un cercle *PZNB*, ce cercle sera tout à la fois un cercle de latitude, puisqu'il passe par le pole de l'écliptique; & un vertical, puisqu'il passe par le zénit: il sera perpendiculaire à l'écliptique en *N* & à l'horizon en *B*; l'arc *NB* sera la hauteur du nonagésime; mais parce que *NO* est un quart de cercle & que l'angle *B* est droit, le point *O* est le pole de l'arc *NB*, & l'angle *NOB* qui a pour mesure l'arc *NB* est aussi égal à la hauteur du nonagésime. Enfin l'arc *PZ* compris entre le pole & le zénit est encore égal à la hauteur du nonagésime; car si des arcs *PN* & *ZB* qui sont chacun de 90 degrés l'on ôte la partie commune *ZN*, il restera *PZ* égal à *NB*, qui est la hauteur du nonagésime.

Si l'angle *OEC* est obtus, l'arc *EO* de l'écliptique sera aussi plus grand que 90°; c'est ce qui arrive quand le point *E* est dans les signes ascendans 9, 10, &c. ou que l'ascension droite du milieu du ciel est depuis 18 heures jusques à 24 heures ou 0^h, & depuis 0^h jusqu'à 6 heures, alors le nonagésime *N* est dans l'hémisphère oriental, comme dans la *figure* 93; mais quand l'ascension droite du milieu du ciel est plus grande que 6 heures & moindre que 18, l'angle *OEC* est aigu, & l'arc *EO* moindre que 90 degrés, le nonagésime se

Fig. 93. trouve en *M* dans la partie occidentale du ciel & de l'autre côté du méridien. Tout cela doit s'entendre des pays qui, comme le nôtre, sont dans l'hémisphère boréal de la terre. Si l'on veut une règle plus universelle, on remarquera que le triangle *OEC* situé dans la partie orientale de l'hémisphère doit être pris de manière que son côté *EC* qui est la hauteur du point culminant n'excède jamais 90 degrés, moyennant cette précaution, on aura toujours l'angle *OEC* obtus, l'arc *OE* plus grand que 90 degrés, & le nonagésime à l'orient dans les signes ascendans *en général* (1662), c'est-à-dire, dans ceux où est le soleil quand il va en montant ou qu'il se rapproche du zénit d'un jour à l'autre. Ce sera tout le contraire dans les signes descendans en général.

1661. Lorsqu'à un instant donné l'on veut connoître la longitude du nonagésime, on cherche l'ascension droite du milieu du ciel (1011), ou le point de l'équateur qui est dans le méridien; ensuite la longitude du point *E* de l'écliptique qui y répond, avec sa déclinaison & l'angle de l'écliptique avec le méridien (898). Cela fait, on a la hauteur du point culminant *E* de l'écliptique, égale à la hauteur connue de l'équateur, plus ou moins la déclinaison trouvée.

Ainsi dans le triangle *EOC* rectangle en *C*, connoissant la hauteur *CE* du point culminant, & l'angle *CEO* du méridien avec l'écliptique dans ce point-là; on cherchera l'angle *EOC* en disant, *R* : cos. *CE* : : sin. *E* : cos. *O* (3669); c'est-à-dire, *le rayon est au cosinus de la hauteur du point culminant, comme le sinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est au cosinus de la hauteur du nonagésime.*

Règle pour la hauteur du Nonagésime.

1662. On a ensuite dans le triangle *OEC* cette autre proportion, *R* : cotang. *CE* : : cos. *E* : cotang. *OE*, (3668); mais l'arc *NE* de l'écliptique compris entre le point culminant & le nonagésime est le complément de *OE*; ainsi l'on aura *R* : cot. *CE* : : cos. *E* : tang. *NE*, ou tang. *CE* : *R* : : cos. *E* : tang. *NE*, c'est-à-dire, *la tan-*

gente de la hauteur du point culminant est au rayon, comme le cosinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien est à la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à la longitude du point culminant *E*, si ce point est dans les signes ascendans pris en général, & retranchier dans les signes descendans, pour avoir la longitude du nonagésime *N*. (Voyez *l'Exemple art.* 1675). Les signes ascendans pris en général sont ceux dans lesquels le soleil se trouve quand il se rapproche du zénit, ou que sa hauteur méridienne augmente d'un jour à l'autre; ainsi un pays de la terre situé même dans l'hémisphère boréal à 10 degrés, aura les signes ascendans depuis le Capricorne jusqu'à 26 degrés du Bélier; & depuis le Cancer jusqu'à 4 degrés de la Vierge. Règle pour la longit. du Nonagésime.

Ce sont ces signes ascendans pris en général qu'il faut employer dans la règle précédente; & il faut rectifier ainsi le passage de M. de la Caille, (*pag* 389 *lig.* 21), où il dit qu'on ajoute au point culminant *lorsque ce point est dans le premier & dans le dernier quart de l'écliptique*. Cela n'est vrai que pour les pays situés hors de la Zone torride.

1663. Quand on a la longitude du nonagésime & la longitude de la lune, on prend leur différence, qui est la distance de la lune au nonagésime (1676); cette différence jointe avec la hauteur du nonagésime & la latitude de la lune, suffit pour trouver la parallaxe de la lune en longitude & en latitude : voici des formules assez commodes pour cet effet. Expression de la Parallaxe en longit.

Soit *L* le lieu vrai de la lune (*fig.* 93), *S* son lieu apparent dans le vertical *ZLS*, *PLR* le cercle de latitude qui passe par le lieu vrai de la lune, *PST* celui qui passe par le lieu apparent; *LR* est la latitude vraie; *ST* la latitude apparente, & ayant pris *PI* égal à *PL*, l'arc *IS* est la parallaxe de latitude; l'arc *RT* de l'écliptique est la parallaxe de longitude. *Fig.* 93.

Si l'on nomme *p* la parallaxe horizontale de la lune, on aura la parallaxe de hauteur *LS* égale à *p* sin. *ZS*, (1629); dans le triangle rectiligne rectangle *ISL* on a *IL* =

Fig. 93. SL sin. S; donc la parallaxe de longitude $TR = \frac{p.\ \text{sin.}\ ZS\ \text{sin.}\ S}{\text{sin.}\ PS}$, en calculant suivant l'article 891, & prenant PS pour PI, parce que ces arcs étant toujours forts grands, les différences des sinus d'un degré à l'autre sont fort petites. On a aussi dans le même triangle $IS = IL$ cot. S (3611) $= p.$ sin. ZS. sin. S cotang. S. C'est la parallaxe de latitude; il faut faire évanouir l'angle S des deux expressions précédentes.

Dans le triangle PZS l'on suppose connus deux côtés & l'angle compris, savoir, PZ, PS & l'angle P, c'est-à-dire, la hauteur du nonagésime, les distances apparentes de la lune au pole de l'écliptique & au nonagésime; on a donc (3722) la tangente de l'angle $S = \frac{\text{sin.}\ ZPS}{\text{cot.}\ PZ.\ \text{sin.}\ PS - \text{cos.}\ P.\ \text{cos.}\ PS.}$ ou bien la cotangente de $S = \frac{\text{cot.}\ PZ.\ \text{sin.}\ PS. - \text{cos.}\ P.\ \text{cos.}\ PS.}{\text{sin.}\ P.}$, & multipliant le numérateur & le dénominateur par tangente PZ, cotang. $S = \frac{\text{sin.}\ PS. - \text{cos.}\ P.\ \text{cos.}\ PS.\ \text{tang.}\ PZ.}{\text{sin.}\ P.\ \text{tang.}\ PZ.}$; cette valeur multipliée par $p.$ sin. ZS. sin. S, donnera celle de IS, paral. de latit. $= \frac{p.\ \text{sin.}\ PS.\ \text{sin.}\ ZS.\ \text{sin.}\ S. - p.\ \text{cos.}\ P.\ \text{cos.}\ PS.\ \text{sin.}\ ZS.\ \text{sin.}\ S\ \text{tang.}\ PZ}{\text{sin.}\ P\ \text{tang.}\ PZ}$; mais sin. $ZS = \frac{\text{sin.}\ PZ.\ \text{sin.}\ P}{\text{sin.}\ S}$, (3710) substituant cette valeur dans l'expression de la parall. en latitude IS, on aura $\frac{p.\ \text{sin.}\ PS.\ \text{sin.}\ S.\ \text{sin.}\ PZ.\ \text{sin.}\ P.}{\text{sin.}\ P.\ \text{tang.}\ PZ.\ \text{sin.}\ S} - \frac{p.\ \text{cos.}\ P.\ \text{cos.}\ PS.\ \text{sin.}\ S.\ \text{tang.}\ PZ.\ \text{sin.}\ PZ.\ \text{sin.}\ P.}{\text{sin.}\ P.\ \text{tang.}\ PZ.\ \text{sin.}\ S}$; effaçant tous les termes qui se détruisent, la formule se réduit à $\frac{p.\ \text{sin.}\ PS.\ \text{sin.}\ PZ}{\text{tang.}\ PZ} - p.$ cos. P. cos. PS. sin. PZ; & mettant cos. PZ à la place de $\frac{\text{sin.}\ PZ}{\text{tang.}\ PZ}$, elle devient $= p.$ sin. PS. cos. PZ. $- p.$ cos. P cos. PS. sin. PZ; mais on a cos. $PZ = \frac{\text{sin.}\ PZ}{\text{tang.}\ PZ}$, & sin. $PS =$ tang. PS. cos. PS; ainsi l'on pourra la mettre sous cette forme: la parallaxe de latitude $= p.$ cos. PS. sin. $PZ \left(\frac{\text{tang.}\ PS}{\text{tang.}\ PZ} - \text{cos.}\ P\right)$.

1664.

1664. Pour trouver la parallaxe de longitude TR, on reprendra sa valeur donnée ci-dessus, $TR = \frac{p.\,\text{sin.}\,ZS.\,\text{sin.}\,S}{\text{sin.}\,PS}$ & substituant pour sin. ZS sa valeur $\frac{\text{sin.}\,PZ.\,\text{sin.}\,P}{\text{sin.}\,S}$, (3690) on a la parallaxe de longitude $\frac{p.\,\text{sin.}\,PZ\,\text{sin.}\,P}{\text{sin.}\,PS.}$. Fig. 63.

1665. A la place des lettres nous pouvons mettre les choses qu'elles expriment; par exemple, cos. PS est la même chose que le sinus de la latitude apparente ST; sin. PZ est le sinus de la hauteur du nonagésime (1660); l'angle P, ou NPT, est la distance apparente de la lune au nonagésime, puisque cet angle est mesuré par l'arc TN de l'écliptique compris entre la lune & le nonagésime; ainsi les expressions précédentes de TR & de IS, se changeront en celles-ci : par. longit. $= \frac{\text{par. hor. sin. dist. au non. sin. haut. du non.}}{\text{cos. latit.}}$, & par. latit. $= \left(\frac{\text{cotang. lat.}}{\text{tang. haut. du non.}} - \text{cos. dist. au non.}\right)$ (par. horiz. sin. haut. du non. sin. latit.).

1666. Si l'on nomme p la parallaxe horizontale, l la latitude apparente, d la distance apparente de la lune au nonagésime, h la hauteur du nonagésime; on aura la parallaxe de longitude $= \frac{p\,\text{sin.}\,d\,\text{sin.}\,h}{\text{cos.}\,l}$ & la parallaxe de latitude $= p\,\text{sin.}\,h\,\text{sin.}\,l\left(\frac{\text{cot.}\,l}{\text{tang.}\,h} - \text{cos.}\,d\right)$. Parallaxe de longit.

1667. Cette expression se réduit à celle-ci encore plus commode pour l'usage $p.\,\text{cos.}\,h\,\text{cos.}\,l - p\,\text{sin.}\,l\,\text{sin.}\,h\,\text{cos.}\,d$, parce que sin. l cot. l = cos. l & $\frac{\text{sin.}\,h}{\text{tang.}\,h} = \text{cos.}\,h$; je dis qu'elle est plus commode, parce que dans le calcul (1677), on se contente d'abord, si l'on veut, de la première partie p cos. h cos. l, & même de p cos. h, car en supposant l de $5^\circ\frac{1}{4}$, il n'y a jamais plus de $19''$ d'erreur à craindre dans cette supposition, lors même que la parallaxe est de $61'\frac{1}{2}$.

1668. Ainsi la formule qui exprime la parallaxe de latitude (1667), est composée de deux parties; la

première qui est p cos. h cos. l, ne dépend point de la distance de la lune au nonagésime, & c'est la partie principale de la parallaxe en latitude ; dans le calcul des éclipses de soleil la latitude de la lune étant extrêmement petite, son cosinus est sensiblement égal au rayon ou à l'unité : ainsi l'on a pour la première partie de la parallaxe en latitude p cos. h. Pour avoir exactement cette première partie de la parallaxe en latitude, dans tous les cas, il faut *multiplier la parallaxe horizontale de la lune par le cosinus de la hauteur du nonagésime, & par le cosinus de la latitude.*

Premiere partie de la Parallaxe en latitude.

1669. La seconde partie de la parallaxe en latitude est p sin. l sin. h cosin. d ; on la trouve en *multipliant la parallaxe horizontale par le sinus de la latitude de la lune, le sinus de la hauteur du nonagésime, & le cosinus de la distance apparente de la lune au nonagésime.* Cette seconde partie est toujours très-petite, parce que le sinus de la latitude de la lune qui est un des facteurs, est à peine un dixième de l'unité, lors même que la latitude de la lune est la plus grande ; cette seconde partie devient comme nulle dans les éclipses de soleil où la latitude n'est jamais que d'un demi-degré, & sin. l environ un centième : dans des éclipses d'étoilles où la latitude de la lune seroit de 6 degrés, & la lune située dans le nonagésime à 58 $\frac{1}{2}$ degrés de hauteur, la parallaxe horizontale étant de 1°, cette seconde partie seroit de 5′ 21″, & ne pourroit se négliger.

1670. On peut encore simplifier cette seconde partie de la parallaxe en latitude, en considérant qu'elle est égale à la parallaxe en longitude trouvée ci-dessus (1666), multipliée par le sinus de la latitude de la lune, & divisée par la tangente de la distance au nonagésime ; en effet, si la parallaxe de longitude est égale à $\frac{p \text{ sin. } d \text{ sin. } h}{\text{cos. } l}$, ou simplément p sin. d sin. h dans les éclipses, on a $p = \frac{\text{par. long.}}{\text{sin. } d \text{ sin. } h}$, substituant cette valeur de p dans

l'expreſſion, p ſin. h ſin. l coſ. d, elle deviendra $=$ $\frac{\text{par. long. ſin. } l \text{ coſ. } d}{\text{ſin. } d.}$; mais $\frac{\text{coſ. } d}{\text{ſin. } d} =$ cotang. d, donc on a par. long. ſin. l cot. d, pour la ſeconde partie de la parallaxe en latitude dans les éclipſes de ſoleil.

Seconde partie de la parallaxe en latitude.

1671. Hors des éclipſes on a $p = \frac{\text{par. longit. coſ. } l}{\text{ſin. } d \text{ ſin. } h}$, donc la ſeconde partie p de la par. $=$ ſin. h ſin. l coſ $d =$ $\frac{\text{par. long. coſ. } l. \text{ ſin. } l. \text{ coſ. } d}{\text{ſin. } d.} =$ par. long. ſin. l. cot. d coſ. l. deuxième partie de la parallaxe en latitude hors des éclipſes. On doit retrancher cette quantité de la première partie, p coſ. h. coſ. l, trouvée ci-deſſus (1668); ſi ce n'eſt dans le cas où la diſtance apparente de la lune au nonagéſime & ſa diſtance apparente au pole élevé de l'écliptique ſont de différente eſpèce, c'eſt-à-dire, l'une aiguë & l'autre obtuſe; car alors la ſeconde partie de la formule eſt additive, parce que ſin. l change de ſigne dès lors que la latitude de la lune eſt méridionale, (en ſuppoſant l'obſervateur dans nos régions ſeptentrionales); & coſ. d change quand la diſtance au nonagéſime ſurpaſſe 90 degrés. Il ne peut y avoir de difficulté pour le cas où la lune ſeroit ſituée entre le pole & le zénit; car le calcul de la formule donneroit une quantité à ſouſtraire d'une autre plus petite, c'eſt-à-dire, une parallaxe négative, & cela même avertiroit que la lune eſt entre le zénit & le pole élevé ou que la parallaxe diminue la diſtance au pole élevé, au lieu de l'augmenter, comme on le ſuppoſoit dans l'article 1663. On ſent bien que cette ſeconde partie doit être en général ôtée de la première, quand la lune eſt du côté du pole élevé, car la latitude boréale de la lune dans nos régions boréales rapproche la lune du zénit, & par conſéquent diminue ſa parallaxe, ainſi le terme qui marque preſque tout l'effet de la latitude doit ſe retrancher dans ce cas-là. S'il y a une exception pour le cas ou la diſtance au nonagéſime ſurpaſſe 90 degrés, c'eſt parce que dans ce cas-là le vertical fait un angle plus grand avec l'écliptique, & que

la lune est si basse, que la diminution de parallaxe provenant de la latitude n'égale pas l'augmentation qui vient de l'angle. Dans le point même qui est à 90 degrés du nonagésime, la latitude ne change presque rien à la parallaxe en latitude, parce que si elle augmente la hauteur, elle diminue l'angle du vertical avec l'écliptique.

1672. Cette seconde partie de la parallaxe en latitude renferme *cos. l.*, c'est-à-dire, qu'elle est multipliée par le cosinus de la latitude apparente; & il est nécessaire d'y avoir égard dans les éclipses d'étoiles fixes par la lune, car la latitude pouvant aller à 6 degrés, on pourroit commetttre une erreur de 20″ dans certains cas sur la parallaxe, en supposant le cosinus de la latitude égal au rayon.

1673. Pour trouver la parallaxe de longitude & de latitude, par le moyen du nonagésime, le P. Riccioli, (*Astr. réfor. præcep. pag.* 21), emploie une table qu'il appelle *Parallaxis mecoplatica* : en tête de la table est la parallaxe horizontale; dans la colonne latérale la hauteur du nonagésime, & dans la table on a une parallaxe de longitude qui auroit lieu, si la lune étoit à l'horizon même, c'est-à-dire, *p* sin. *h*, car les nombres croissent comme les sinus; dans la même table avec cette parallaxe horizontale de longitude, & la distance de la lune au nonagésime, on trouve la parallaxe *p* sin. *d* sin. *h*, qui n'a besoin d'aucune correction, si la lune est près de l'écliptique, comme dans les éclipses de soleil, mais à laquelle il faut ajouter une petite correction, à cause de cos. *l*, si la lune a une latitude. Cette correction ne va qu'à 8″ pour $5^{\circ}\frac{1}{4}$ de latitude, & 32′ de parallaxe de longitude. J'ai donné une petite table où l'on peut prendre cette correction, & autres semblables, dans la connoissance des mouvemens célestes de 1764, *pag.* 118.

Le P. Riccioli, pour trouver la parallaxe de latitude, cherche d'abord la hauteur du nonagésime dans l'orbite de la lune, en ajoutant à la hauteur du nonag. une lati-

tude de l'orbite lunaire, prise avec la distance du nonag. au nœud ; & dans la même table avec la parallaxe horizontale de la lune & le complément de cette hauteur du nonagésime, il trouve la parallaxe de la lune en latitude p cos. h, qui est plus exacte que si l'on avoit employé la hauteur simple du nonagésime, mais qui ne l'est pas autant que la formule que j'ai donnée ci-dessus. Je passe à l'application de ces formules.

1674. Exemple. Le 7 Avril 1749 j'observai l'immersion d'*Antarès* à 1^h $1'$ $20''$ du matin, temps vrai, à l'hôtel de Clugny ; on demande pour ce moment la parallaxe de longitude & de latitude. Je suppose qu'on a déjà calculé pour le même temps le lieu du soleil, & celui de la lune par les tables ; & qu'on connoisse la hauteur du pole avec l'obliquité de l'écliptique : voici les nombres que j'avois employés dans mes premiers calculs, & qui pourront servir d'exemple, quoique les résultats soient plus exacts ci-après (1978).

Lieu du soleil par les tables de Halley,	0^s	17°	$19'$	$10''$
Lieu de la lune par les tables de Halley,	8	5	26	2
Latitude australe de la lune,		3	47	20
Obliq. de l'écl. supposée pour ce temps-là,		23	28	23
Hauteur du pole du lieu de l'observateur,		48	50	10
Hauteur de l'équateur,		41	9	50
Ascens. droite du soleil calculée (908),		15	57	44
Le temps vrai 13^h $1'$ $20''$ réduit en degrés,		195	20	0
L'ascension du milieu du ciel (1011),		211	17	44
Ou en en retranchant 180 degrés,		31	17	44
La déclinaison méridionale qui répond à cette ascension droite (898),		12	42	42
L'angle de l'éclipt. avec le méridien qui répond à la même ascension droite 31° $17'$ $44''$ (898),		70	6	4
La long. qui répond à la même asc. droite (898), ou la long. du point de l'éclipt. qui est dans le méridien, (diminuée de 180°),		33	32	$3\frac{1}{2}$

Ou en y ajoutant 180°, parce qu'on les avoit ôtés de l'ascension droite, $7^s\ 3^\circ\ 32'\ 3''\frac{1}{2}$

La hauteur de ce point culminant de l'écliptique, ou la différence entre sa déclinaison 12° 42′ 42″ & la haut. de l'équat. 41° 9′ 50″ 28 27 8

On prendroit leur somme si la déclin. du point *E* étoit du côté du pole élevée.

1675. Le rayon est au sinus de 70° 6′ 4″ qui est l'angle *CEO* (*fig.* 93), comme le cosinus de la hauteur du point culminant 28° 27′ 8″ est au cosinus de la hauteur du nonagésime ou de l'angle *NOB* (1661), qui se trouve de 34° 14′ 11″. On cherchera aussi le logarithme de la tangente de *CE*. On fera ensuite cette proportion: la tangente de la hauteur *CE* 28° 27′ 8″ est au rayon, comme le cosinus de l'angle *E* = 70° 6′ 4″ est à la tangente de l'arc *NE* de l'écliptique, compris entre le nonagésime & le méridien, cet arc se trouvera de 32° 8′ 1″; étant ôté de la longitude du point culminant $7^s\ 3^\circ\ 32'\ 3''$, puisque la lune est dans les signes descendans (1662), il donnera la longitude du nonagésime 6^s 1° 24′ 2″. Voici l'ordre & la disposition du calcul.

Fig. 93.

T. longit.	17° 19′ 10″	9,4939285		Cotang. Asc.	31° 17′ 44″	10,2161655
Cos. obl. écl.	23 28 23	9,9624865		cos. obl. écl.		9,9624865
Tang. asc. dr.	15 57 44	9,4564150		cot. long. *E*	33 32 3	10,1786520
T. vr. en deg.	195 20 0					
Somme,	211 17 44	ôtez 180°				
Sinus asc. d.	31 17 44	9,7155461		sin. *E*	70 6 4	9,9732640
Tang. obliq.	23 28 23	9,6377431		cos. haut. *CE*	28 27 8	9,9440950
Tang. décl.	12 42 42	9,3532892		cos. h. non.	34 14 11	9,9173590
Haut. équat.	41 9 50					
Haut. *CE*	28 27 8,	ou du point culmin.				
Cosin.	31 17 44	9,9317116		cosin. *E*	70 6 4	9,5319412
Sin.	23 28 23	9,6002296		ôtez tang. *CE*	28 27 8	9,7339002
Cos. ang. *E*	70 6 4	9,5319412		tang. *NE*	32 8 1	9,7980410
				ou	1s 2° 8′ 1″	

Otez de la longitude du point culminant *E*. . . 7 3 32 3

Reste la longitude du Nonagésime *N*. 6 1 24 2

1676. Pour avoir avoir la diſtance de la lune au nonagéſime, il faut prendre la différence entre la longitude de la lune & celle du nonagéſime, en ôtant la plus petite de la plus grande ; mais ſi la différence ſurpaſſe 6 ſignes, il faut ôter la plus grande de la plus petite en ajoutant 12 ſignes à celle-ci, par ce moyen la différence cherchée ſera toujours moindre que 6 ſignes, & la lune ſera à l'orient du nonagéſime, ſi c'eſt le nonagéſime que l'on a retranché; la lune ſera occidentale, ſi c'eſt ſa longitude qu'on a ôtée de celle du nonagéſime, ſoit qu'on ait employé ces longitudes toutes ſeules, ſoit qu'on en ait augmenté une de 12 ſignes. Dans notre exemp. on ôte 6^s 1° 24′ 2″, de 8^s 5° 26′ 2″, il reſte 64° 2′ pour la diſtance de la lune au nonagéſime, la lune eſt orientale. On verra l'uſage de cette conſidération, (1876).

1677. Connoiſſant la hauteur du nonagéſime & ſa diſtance à la lune, nous allons chercher les parallaxes de longitude & de latitude par les formules précédentes (1668 *& ſuiv.*).

Log. paral. horiz. *p*, 57′ 16″ ou 3436″	3,5360532	Premier calcul ou approximation.
Log. ſin. de la hauteur du nonag. *h*,	9,7502063	
Log. ſin. diſt. de la lune au nonag. 64° 2′	9,9537833	
Log. de *p*. ſin. *h* ſin. *d*.	3,2400428	
Otez le log. du coſ. de la lat. vr. 3° 47′20″	9,9990497	
Reſte le log. de 29′ 2″ paral. de long. à peu-près,	3,2409931	

On ajoutera cette parallaxe avec la diſtance vraie de la lune au nonagéſime 64° 2′, & l'on aura la diſtance apparente 64° 31′ 2″ qu'il faudra employer dans le calcul de l'article 1678.

Logarit. de la parallaxe horiz. *p*. 57′ 16″	3,5360532
Log. coſ. de la hauteur du nonagéſime,	9,9173603
Log. de 47′ 21″, paral. de latit. à peu-près.	3,4534135

On ajoutera cette parallaxe avec la latitude vraie 3° 47′ 20″, parce que la latitude de la lune est opposée au pole élevé de l'écliptique, & l'on aura la latitude apparente 4° 34′ 41″, qu'il faudra employer dans le calcul suivant pour plus d'exactitude.

Second calcul plus exact.

1678. Logarit. de la parall. horiz. ou de *p*, 3436″ — 3,5360532
Log. sin. *h* haut du nonag. 34° 14′ 11″ — 9,7502063
Log. sin. *d* ou dist. apparente de la lune au nonagésime, 64° 31′ 2″ — 9,9555505
Log. *p*. sin. *h* sin. *d*. — 3,2418100
Otez le log. cos. latit. app. *l*. 4° 34′ 41″. — 9,9986121
Reste le log. de la parallaxe de longitude plus exacte 1750″ 4, ou 29′ 10″ 4 — 3,2431979

On employera les mêmes nombres pour la parallaxe en latitude.

Log. *p*. . . .	3,5360532	Log. *p*.	3,5360532
Log. cos. *h*. .	9,9173603	Log. sin. latit. ap.	8,9020962
Log. cos. lat. ap.	9,9986121	Log. sin. *h*. . .	9,7502063
Log. 2831″, 6.	3,4520256	Log. cos. dis. ap. *d*.	9,6337106
C'est la premiere partie de la parallaxe en latit. (1668).		Log. 66″, 4. . .	1,8220663
		Seconde Partie.	

Ces deux parties de la formule étant ajoutées ensemble parce que sin. *l*. & cos. *d*. sont de même espèce (1671), on aura exactement la parallaxe totale en latitude 2898″ ou 48′ 18″.

1679. Pour avoir la longitude apparente de la lune, on ajoute la parallaxe de longitude à la longitude vraie, si la lune est orientale, ou si c'est le nonagésime que l'on a retranché; la parallaxe est soustractive, si c'est le lieu de la lune qu'on a retranché de la longitude du nonagésime.

L'on verra l'usage de ces parallaxes de longitude & de latitude, dans le calcul des éclipses, & des longitudes des pays de la terre, (1876, 1970).

1680.

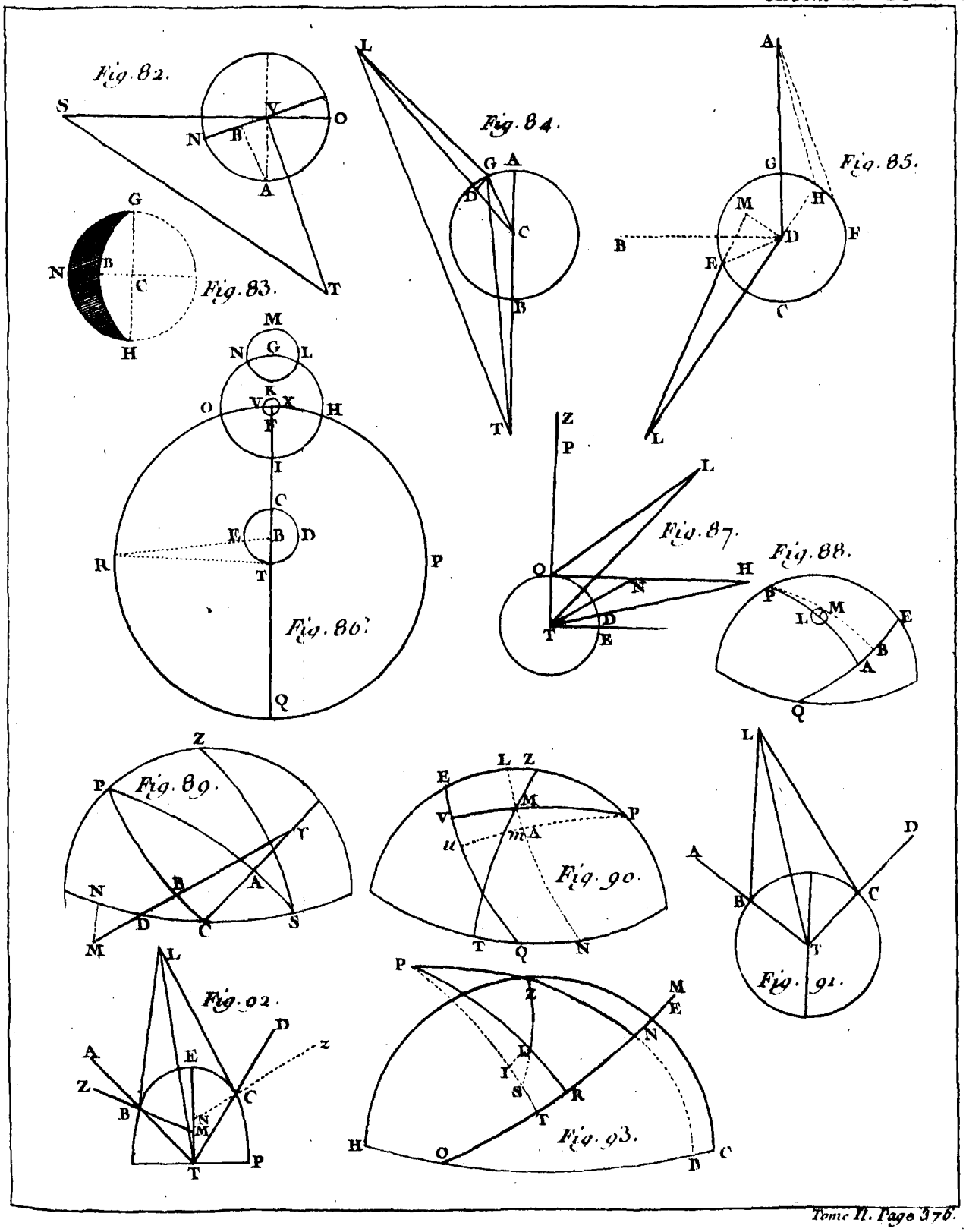


Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.

TABLE ÉTENDUE DES ÉPACTES.

Contenant les trente suites d'Epactes qui peuvent avoir lieu dans differens siecles, suivant le calendrier Gregorien, Art. 275. pag. 308.

REMARQUES. *Les Nombres d'Or sont dans la premiere ligne de la table, en tête de chaque colonne. La 9.e Ligne marquée C. est celle qui a Lieu depuis 1700. jusqu'a 1900. et qui recommence tous les 19. ans. Par exemple l'Epacte est XXII. en 1769. 1788, 1807. &c.*

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1	2
P	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VIII	XIX
N	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VII	XVIII
M	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	VI	XVII
H	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	V	XVI
G	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	IV	XV
F	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	III	XIV
E	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	II	XIII
D	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	I	XII
C	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	*	XI
B	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXIX	X
A	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVIII	IX
u	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVII	VIII
t	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXVI	VII
s	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXV	VI
r	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIV	V
q	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXIII	IV
p	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXII	III
n	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XXI	II
m	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XX	I
l	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XIX	*
k	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVIII	XXIX
i	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVII	XXVIII
h	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XVI	XXVII
g	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XV	XXVI
f	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIV	XXV
e	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XIII	XXIV
d	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XII	XXIII
c	III	XIV	XXV	VI	XVII	XXVIII	IX	XX	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	XI	XXII
b	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	VIII	XIX	*	XI	XXII	III	XIV	25	VI	XVII	XXVIII	X	XXI
a	I	XII	XXIII	IV	XV	XXVI	VII	XVIII	XXIX	X	XXI	II	XIII	XXIV	V	XVI	XXVII	IX	XX

de la Gardette Sculp.

1680. On abrege toutes les opérations des articles 1674 & 1675, par le moyen de la table du nonagésime & de sa hauteur, pour la latitude de Paris, que j'ai publiée dans la connoissance des temps de 1767 & de 1768; sa forme est encore plus commode que celle des tables qui se trouvent dans Ptolomée, Copernic, Magini, Muler, Képler, Rénérius, Boulliaud & Riccioli; elle ne suppose que l'ascension droite du milieu du ciel (1011). Par exemple, le 6 Avril 1749 à 13^h $1'$ $20''$ de temps vrai, la somme du temps vrai réduit en degrés & de l'ascension droite du soleil, est de 211° $17' \frac{3}{4}$ (1674): on regarde la table vis-à-vis de 210° ou de 14^h $0'$, & ayant pris les parties proportionnelles, on trouve 6^s 1° $24'$ pour la longitude du nonagésime, & 34° $14'$ pour la hauteur du nonagésime à Paris, à peu-près comme dans les calculs précédens (1675). Cette table sera d'une grande commodité dans tous les calculs, où l'on voudra savoir promptement & à peu-près la parallaxe de longitude & de latitude. L'ascension droite du soleil en temps est toute calculée dans la connoissance des temps que je publie chaque année, car elle est le complément à 24^h de la distance de l'équinoxe au soleil (991).

1681. On trouveroit aussi la longitude du nonagésime par les tables des Maisons (1057), & par celles des ascensions obliques, insérées dans tous les vieux livres d'astrologie. (Voyez la *Connoiss. des mouv. cél.* 1767, *pag.* 227).

Equations de la Parallaxe dans le sphéroïde applati.

1682. La terre ayant la figure d'un sphéroïde applati vers les poles (2672), les différens points de la terre ne sont pas à la même distance du centre, & la parallaxe horizontale de la lune, qui dépend de la distance qu'il y a du centre de la terre à la surface, ne

ſauroit être la même dans ces différens points.

Auteurs qui ont parlé de ces équations.

Depuis long-temps, les aſtronomes ont vu que l'applatiſſement de la terre qui eſt de $\frac{1}{250}$ environ, pouvoit produire ſur la parallaxe de la lune une erreur de 16″, qui ſeroit encore plus grande, ſi l'on admettoit avec M. Bouguer un applatiſſement de $\frac{1}{178}$; il étoit donc important de faire entrer la figure de la terre dans le calcul des parallaxes. Newton conſidéra le premier cette différence des parallaxes de la lune (*Princ. liv. III. prop.* 38. *cor.* 10). Depuis ce temps-là M. Manfredi, le P. Grammatici, M. de Maupertuis dans ſon traité de la parallaxe de la lune, M. Euler, dans les mémoires de Berlin pour 1749, & M. de l'Iſle (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 490), donnèrent des méthodes pour tenir compte de l'applatiſſement dans les calculs aſtronomiques.

1683. Toutes ces méthodes étoient ſujettes à l'inconvénient d'une extrême longueur; elles exigeoient une préciſion ſcrupuleuſe & fatiguante dans le calcul trigonométrique; enſorte que les aſtronomes n'avoient point encore admis cette conſidération de l'applatiſſement de la terre dans le calcul des éclipſes, juſqu'au temps où je donnai dans les mémoires de l'académie pout 1756, & dans la connoiſſance des temps pour 1762, une méthode & des tables d'un uſage extrêmement commode, dont je vais expliquer la conſtruction & les principes. Toutes les autres méthodes étoient bonnes pour être appliquées à un exemple; mais elles étoient de nature à ne pas être employées deux fois. L'objet que je me propoſai dans ces recherches fut de renfermer l'effet de l'applatiſſement de la terre dans une petite équation, qui ne changeroit rien à la méthode ordinaire de calculer les parallaxes, & qui pourroit ſe prendre ſans aucune partie proportionnelle, ou ſe négliger ſuivant les cas. M. du Séjour a donné enſuite une méthode analytique pour les éclipſes, dans laquelle il fait entrer la figure de la terre ſans alonger ſenſiblement le calcul (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 215); mais

il est nécessaire de donner ici des formules qui soient relatives à nos méthodes astronomiques.

1684. L'ellipse *POE* (*fig.* 94), représente un méridien de la terre, *P* le pole élevé, *O* le lieu de l'observateur, *ON* la verticale ou la perpendiculaire à l'horizon & à la surface de la terre en *O*; *CNH* la méridienne horizontale, ou la commune section du méridien avec l'horizon; *CON* l'angle de la verticale avec le rayon *CO*, qui est à Paris d'environ 15′ à 19′ suivant les diverses hypothèses (1708), & que j'appelle *a*. La perpendiculaire *ON* est sensiblement égale au rayon *CO*, à cause de la petitesse de l'angle *CON*; la parallaxe qui auroit pour base *ON* seroit plus petite d'un cent millieme que la parallaxe horizontale, qui a pour base *CO*; mais on peut négliger ici cette différence, qui ne va qu'à un trentième de seconde (a). Si l'observateur *O* étoit situé en *N*, il verroit encore la lune dans le même vertical où il la voit du point *O*, & au même point d'azimut sur l'horizon; mais cet azimut ou la lune paroît, vue du point *O* ou du point *N*, quand la lune n'est pas au méridien, est différent de celui où elle paroîtroit, si on l'observoit du centre *C* de la terre; les rayons menés du point *C* & du point *N* jusqu'à la lune, font alors un angle que j'appelle la PARALLAXE D'AZIMUT. Si le rayon dirigé vers la lune est perpendiculaire à *CN*, cette ligne *CN* sera la sous-tendante ou la mesure de la parallaxe d'azimut; puisque dans les arcs très-petits les sinus & les tangentes ne diffèrent pas sensiblement des arcs, & si l'on appelle *p* la parallaxe horizontale qui répond au rayon *CO* ou *ON*, l'on aura 1 ou *CO* : sin. *a* ou *CN* : : *p* : parallaxe d'azimut; ainsi cette parallaxe qui répond à *CN* sera = *p* sin. *a*, la lune étant à l'horizon & ayant 90 degrés d'azimut, c'est-à-dire, étant dans le premier vertical.

Planche IX. Fig. 94.

Parallaxe d'azimut.

(a) Car le cosinus d'un angle de 15′, ne diffère du rayon que de 0,0000096, qui sur 1° ne fait que un trentième de seconde.

1685. Si la lune s'éloigne vers le nord & que son azimut compté depuis le midi soit plus grand que 90 degrés, l'angle dont CN est la base, deviendra plus petit. Soit CN (*fig.* 95), la même ligne que dans la fig. 94, tracée séparément, & qui s'étend horizontalement du midi au nord depuis le centre de la terre jusqu'à la verticale; que le rayon CMR soit dirigé vers le point de l'horizon où la lune répond & qui marque l'azimut de la lune, égal à l'angle NCM, que j'appellerai z; la perpendiculaire NM abaissée du point N sur CR sera la mesure de la parallaxe d'azimut, au lieu de CN; en effet, c'est la même chose, quant à cette parallaxe, que la lune soit vue du point C ou du point M, l'un & l'autre point étant dans un même vertical, & d'ailleurs il vaut mieux quant à la mesure de cette parallaxe considérer la lune comme vue du point M. Or $MN = CN$ sin. NCM, ou CN sin. z; la parallaxe qui répond à CN est p sin. a, donc celle qui répond à MN est p sin. a. sin. z : c'est la valeur générale de la parallaxe d'azimut, la lune étant à l'horizon, avec un azimut égal à z.

Fig. 95.

1686. On verra dans la suite que la parallaxe d'azimut employée dans le calcul des éclipses, (1892) doit être mesurée sur un arc de grand cercle, tiré par le centre de la lune, parallèlement à l'horizon ou perpendiculairement au vertical; ce petit arc ne change point, quelle que soit la hauteur de la lune, parce qu'il est formé dans tous les cas par la rencontre des lignes qui sont toutes deux menées des points M & N à la lune, ou dans le plan de l'horizon, ou dans un même plan dont la partie NM est horizontale, & qui vont se réunir à la lune; ainsi la parallaxe d'azimut pour une hauteur quelconque de la lune sera encore p sin. a sin. z: on en verra l'usage dans le calcul des éclipses, où je me servirai de la différence d'azimut pour trouver la distance apparente des centres (1892).

Son expression dans le calcul des éclipses.

Pour épargner aux astronomes le calcul de l'azimut, j'ai dressé pour la latitude de Paris deux tables, (*Con-*

noiss. des temps, 1760, 1761, *Mém. acad.* 1756), qui se rapportent à la déclinaison de la lune & à sa distance au méridien, elles contiennent la parallaxe d'azimut, & la correction de la parallaxe de hauteur, dont je vais bientôt parler, & peuvent servir dans presque toute l'Europe, sans qu'il y ait d'erreur sensible. Au reste, comme il suffit de prendre l'azimut sur un globe à 2 ou 3 degrés près, le calcul de ces deux petites équations n'ajouteroit que peu de chose à celui des parallaxes.

1687. Cette parallaxe d'azimut entraîne un petit changement dans la parallaxe de hauteur. En effet, si l'observateur étoit situé en N (*fig.* 94), la parallaxe de hauteur seroit mesurée par ON, & seroit p cos. h, suivant la règle ordinaire; mais la hauteur vraie vue du centre C de la terre est un peu moindre, si la lune est au midi du premier vertical; & un peu plus grande si la lune est au nord ou du côté du pole élevé, puisque le rayon tiré du point C, & celui qui est tiré du point N n'ont pas la même inclinaison; il faut donc faire une correction à la parallaxe de hauteur trouvée par la règle ordinaire. Correction de la parallaxe de hauteur. *Fig.* 94.

Soit L (*fig.* 95), la lune hors du méridien; CML le plan du vertical dans lequel se trouve la lune, ensorte que l'angle LCM soit la hauteur de la lune vue du centre de la terre, la ligne CM étant à la fois & dans le plan de l'horizon, & dans le plan du vertical de la lune; soit aussi le petit arc NM perpendiculaire sur CM. La hauteur de la lune vue du centre C de la terre est plus petite que la hauteur vue du point N ou du point M, de la quantité de l'angle CLM; en effet, puisque le petit arc NM est perpendiculaire sur CM, il l'est aussi sur LM, parce qu'il est nécessairement perpendiculaire au plan du vertical LMC, & à toutes les lignes tirées au point M de ce plan: ainsi la ligne NM étant comme infiniment petite par rapport à la grande distance LM, les lignes LM & LN sont sensiblement égales; le point M est donc pla- *Fig.* 95.

Fig. 95. cé de la même façon & à la même distance de la lune L, que le point N, donc la hauteur de la lune vue du point N du vue du point M est sensiblement la même. Mais la hauteur de la lune vue du point M, qui est l'angle LMR, est plus grande que la hauteur vue du point C, c'est-à-dire, que l'angle LCM, de la quantité de l'angle CLM, parce que dans le triangle CLM, on a l'angle extérieur LMR égal aux deux intérieurs pris ensemble LCM, CLM; donc la hauteur de la lune vue du point C est plus petite que la hauteur vue du point N, de la quantité CLM.

1688. Lorsque la lune est hors du méridien, cet angle CLM est plus petit que lorsque la lune est dans le méridien, & cela dans le rapport du cosinus de l'azimut au rayon. En effet, lorsque la lune est dans le méridien, (supposant que sa hauteur & sa distance soient les mêmes que dans le cas précédent), le point M tombe en N, l'angle LCN est la hauteur de la lune; car il faut concevoir le sommet L du triangle CLM relevé en l'air perpendiculairement au-dessus du plan de la figure. Si l'on examine dans ces deux cas la valeur de l'angle CLM, on verra que l'angle CLM a pour base la ligne CM, quand la lune est hors du méridien, & que dans le méridien il a pour base la ligne CN; comme tout est égal d'ailleurs, soit la distance CL, soit l'inclinaison du rayon CL sur la base CN ou CM, & que les lignes CM & CN sont extrêmement petites, les petits angles seront entre eux comme leurs bases CN & CM; mais dans le triangle CMN rectangle en N, CN est à CM comme le rayon est au cosinus de l'angle NCM qui est l'azimut de la lune; donc la différence CLM entre les hauteurs de la lune vues du point N & du point C, quand la lune est hors du méridien, est à cette même différence quand la lune est dans le méridien, à hauteur égale, comme le cosinus de l'azimut est au rayon.

1689. L'angle MLC, dans le cas où il seroit le plus grand & où il auroit pour base la ligne entière

CN seroit égal à p sin. a (1684); car il seroit alors la parallaxe d'azimut : si donc il avoit pour base & pour mesure le petit arc CM, nommant z l'azimut NCM, on auroit cette proportion; 1 : cosin. z : : p sin. a : CLM; donc l'angle CLM seroit égal à p. sin. a. cosin. z, dans le cas ou CL seroit perpendiculaire à CM; mais à cause de l'obliquité de la ligne CL & de l'angle LCR sur la base CM, qui diminue l'angle CLM, il n'a plus pour mesure que MS qui est à CM, comme le sinus de la hauteur MCS est au rayon, ou comme sin. h : 1, donc l'angle CLM est égal à p. sin. a cos. z. sin. h. équation de la parallaxe de hauteur dans le sphéroïde applati. Valeur de cette correction.

Cette correction est additive à la parallaxe calculée pour le point N, lorsque la lune est entre le premier vertical & le pole élevé; dans tous les autres cas, on la retranche de la parallaxe calculée par la méthode ordinaire, & l'on a la véritable parallaxe de hauteur dans le sphéroïde applati. Je donnerai dans le livre suivant (1881) une méthode pour calculer les éclipses par les seules parallaxes de hauteur & d'azimut; c'est ce qui m'a déterminé à expliquer ici tout ce qui concerne ces parallaxes.

1690. Quand on calcule la parallaxe de hauteur par la formule p cosin. h (1629), on suppose le centre de la terre en N (*fig.* 94) sur la verticale ON, & l'on trouve la différence entre le lieu vu du point O & le lieu vu du point N, avec la même parallaxe horizontale, qui a pour base ON égale à OC, soit sur la terre sphérique, soit dans le sphéroïde; mais comme c'est au centre C qu'il est nécessaire de réduire le lieu de la lune, on est obligé d'ôter de la parallaxe p cos. h la correction p. sin. a. sin. h. cos. z, qui devient additive quand l'azimut compté du point du midi ou du point opposé au pole élevé est plus grand que 90 degrés : on trouvera une table de cette équation dans les endroits cités (1686). *Fig.* 94.

Ainsi nous sommes parvenus sur la terre applatie,

comme sur la terre sphérique, à réduire au centre C de la terre le lieu vu du point O, par un petit changement de hauteur & d'azimut; voyons la manière de faire cette même réduction par un petit changement dans la déclinaison seule, ou bien dans la longitude & la latitude.

Application à la méthode du nonagésime.

1691. La Méthode où l'on employe les parallaxes de longitude & de latitude (1663), par le moyen du nonagésime, exigeoit une correction pour l'applatissement de la terre, & c'est ce que M. de la Caille a donné dans la dernière édition de ses leçons d'astronomie (*pag.* 223), & M. Pingré, dans les mémoires de 1764 (*pag.* 362), en suivant les principes de la méthode précédente que j'avois donnée quelques années auparavant; mais M. de la Caille n'ayant point démontré ses formules, & ayant emprunté de M. de Maupertuis des choses qui n'y sont pas suffisamment démontrées, je vais reprendre cette matière.

Fig. 94. La normale ZON (*fig.* 94), perpendiculaire à la surface de la terre au point O, où se trouve l'observateur, étant prolongée au-dessous de l'horizon, va couper en K l'axe de la terre $PCKM$; ainsi un observateur placé en K verroit la lune sur le même cercle horaire, à la même distance du méridien, & à la même ascension droite que s'il étoit en C, parce que les points C & K sont placés sur l'axe de la terre & sur le plan de tous les cercles de déclinaison qui se coupent dans la commune section PCM; ainsi la lune ne paroîtra point changer le plan de son cercle horaire, ni son ascension droite, quand on transportera l'observateur de C en K.

On commence donc par employer la parallaxe qui répond à la ligne OK, pour réduire au point K le lieu vu de la surface de la terre, & comme les points O & K sont dans le même vertical & dans la ligne même du zénit, il ne faut pour cela que la règle employée pour la terre sphérique ou la formule p cosin. h (1629), en prenant seulement une parallaxe qui réponde au rayon

rayon OK, au lieu de celle qui répondoit à ON, on sera sûr qu'il n'y a aucune erreur dans la parallaxe d'ascension droite calculée par ce moyen; toute la différence produite par l'applatissement consistera dans la parallaxe de déclinaison, dont nous allons parler, en supposant toujours que la parallaxe horizontale qu'on employera convienne à l'intervalle OK, & non pas au rayon OC ou ON, dont nous avons fait usage dans la méthode précédente.

Fig. 94. Il faut augmenter la parallaxe horizontale.

1692. L'observateur supposé en K, & celui qui seroit au centre C de la terre, ne voyent pas la lune à une même distance de l'équateur & du pole : la distance au pole vue du centre C est l'angle LCP, mais vue du point hypothétique K, c'est l'angle LKP, moindre que LCP; la différence de ces deux distances au pole est l'angle CLK; cet angle, dont nous donnerons la valeur ci-après (1696), est donc le changement qu'exige l'applatissement de la terre, & puisque l'angle extérieur PCL est égal aux deux intérieurs PKL & CLK, il faut ajouter cette petite équation CLK à la distance de la lune au pole P trouvée pour le point K, si l'on veut la réduire au centre C & avoir la vraie distance de la lune au pole, qui est l'angle LCP.

De la il suit que lorsque la lune sera du côté du pole élevé, c'est-à-dire, que sa déclinaison sera septentrionale, l'observateur étant dans les pays septentrionaux, ou méridionale, & observée dans les pays méridionaux, l'équation de l'applatissement sera soustractive de la déclinaison vue du point K, pour avoir la déclinaison vue du centre C de la terre. Lorsque la lune sera par rapport à l'équateur, du côté du pole abaissé, on ajoutera à la déclinaison réduite au point K l'équation de l'applatissement, pour avoir la vraie déclinaison vue du centre de la terre; mais dans les deux cas, il faudra toujours retrancher de la parallaxe de déclinaison la même équation CLK, pour avoir la parallaxe de déclinaison par rapport au centre de la terre, à

Equation de la déclinaison.

Fig. 94. moins que la lune ne soit entre le zénit & le pole élevé.

1693. Ainsi pour trouver dans le sphéroïde la situation de la lune pour le centre *C* de la terre, on fait deux réductions, l'une de *O* en *K*, & l'autre de *K* en *C*. La première de *O* en *K* nous fournit l'avantage de ne supposer que les règles ordinaires; savoir, que la parallaxe de hauteur est comme le cosinus de la hauteur apparente. La seconde a l'avantage d'être assez petite, & de se réduire aussi à une règle fort simple (1696), ce qui en rend l'usage facile.

La première & la plus grande de ces parallaxes réduit le lieu vu du point *O* à celui qu'on observe du point *K*, situé perpendiculairement au-dessous de *O*; cette réduction ne suppose rien de plus que la parallaxe dans la sphère, car l'angle *OLK* est proportionnel au sinus de la distance au zénit comptée de la ligne *ZOK*: ainsi prenant le point *K* pour centre, & employant la parallaxe horizontale qui répond à la longueur *OK*, on aura par la règle ordinaire (1629), la parallaxe de hauteur *OLK*, qui donnera la hauteur vue du point *K*, aussi-tôt qu'on aura la hauteur vue du point *O*. On auroit de même la longitude & la latitude vues du point *K* au moyen de celles qu'on auroit observées à la surface de la terre, & cela par les formules ordinaires (1666).

Il faut ensuite en conclure ces mêmes quantités vues du point *C*, parce que c'est le centre de la terre auquel nous devons rapporter tous les mouvemens célestes, si nous voulons les dégager de leurs inégalités; le point *K* étant un point différent, suivant les différentes latitudes, la quantité *CK* sera différente, aussi bien que la quantité *OK*. Nous allons les déterminer.

1694. La parallaxe qui convient à *OK*, sera toujours plus grande que la parallaxe horizontale qui est mesurée par *OC*; à Paris la différence est d'environ 17″, qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale de

Paris pour avoir celle qui convient au centre K, ou à la distance OK, & pour pouvoir opérer par les règles ordinaires des parallaxes sphériques. On trouvera parmi les tables de la lune celle des quantités répondantes à NK; nous donnerons aussi dans le XVe. livre une table du rayon CO de la terre pour chaque latitude, & de l'angle $COK = a$; d'où il est aisé de conclure les petits côtés CN & NK, & l'on en trouvera encore une table ci-après (1705).

1695. On peut calculer cet excès NK de la nouvelle parallaxe, pourvu qu'on connoisse l'angle COK du rayon avec la verticale (1708). Dans le triangle NCK, on a cette proportion : le rayon est à la tangente de l'angle NCK, comme CN est à NK; donc $NK = CN$ tangente NCK; mais $CN = p$ sin. a (1684), & NCK est égale à la latitude du lieu O, car il est opposé par la pointe à l'angle de la hauteur du pole P, & il est le complément de l'angle OKP formé par la ligne verticale & par l'axe de la terre, donc $NK = p$ sin. a tang. lat. A Paris où la valeur moyenne de p. est de $57' 40''$, on aura la quantité p. sin. $15'$ tang. $48° 50'$ $= 17'' 3$ qu'il faut ajouter à la parallaxe moyenne pour Paris, si l'on veut avoir la parallaxe sur OK (1691). Augmentation de la parallaxe. *Fig.* 94. Elle est de $17''$ pour Paris.

1696. Pour connoître l'équation de la déclinaison ou l'angle CLK, il faut abaisser sur le rayon de la lune LK la perpendiculaire CV qui, à raison de sa petitesse sera la mesure de l'angle CLK; cet angle marque la différence entre les distances au pole LCP LKC, ou entre les déclinaisons vues des points C & K. La perpendiculaire CV sera égale à CK cosinus déclin.; car dans le triangle rectiligne CKV, rectangle en V, on a cette proportion : CV est à CK, comme le sinus de CKV est au rayon; mais CKV ou PKL est la vraie distance de la lune au pole, & son sinus est le cosinus de la vraie déclinaison, donc $CV = CK$ cosinus déclinaison. A l'égard de CK, on en trouvera la valeur au moyen de $CN = p$ sin. a (1684); car dans le triangle CKN on a cette proportion : CK est à CN, comme le rayon est au

ſinus de l'angle CKN, qui eſt le complément de la latitude du point O, donc $CK = \frac{CN}{\text{coſ. latit.}}$; mais $CN =$ p ſin. a, donc $CK = \frac{p \text{ ſin. } a}{\text{coſ. lat.}}$, ſubſtituant donc cette valeur de CK dans celle de $CV = CK$ coſ. déclin., l'on aura la valeur de CV & de l'angle CLK, $\frac{p \text{ ſin. } a \text{ coſ. déclin.}}{\text{coſ. haut. du pole.}}$ C'eſt l'équation de la déclinaiſon.

Equation de la déclinaiſon.

1697. Suppoſons comme à Paris l'angle a de 15′; & la latitude géographique 48° 50′; ſuppoſons auſſi la parallaxe horizontale moyenne de 57′ 40″, on aura CV = 23″ coſ. déclin. Si la déclinaiſon de la lune eſt de 28°, l'équation de la déclinaiſon, produite par l'applatiſſement de la terre, ſera de 20″ 2, ſouſtractive du côté du pole élevé, & additive à la déclinaiſon de la lune, ſi la lune eſt du côté du pole abaiſſé, pour avoir la vraie déclinaiſon vue du centre C de la terre, au lieu de celle qu'on avoit trouvée pour le point K par les opérations précédentes. Il eſt facile de voir que la correction CLK de la déclinaiſon doit toujours s'ajouter à la diſtance de la lune au pole élevé qui eſt l'angle PLK, pour avoir la vraie diſtance PCL, lors même que la lune eſt entre le pole & le zénit, parce que l'angle extérieur PCL eſt toujours plus grand que l'angle intérieur CKL.

Toujours additive.

La table ci-jointe fait voir qu'au lieu de 23″, on auroit 30″ 4, ſi l'on ſuppoſoit l'applatiſſement de $\frac{1}{178}$, comme M. de Maupertuis, dans ſon *Diſcours ſur la parallaxe*, je ſuppoſe auſſi dans cette table que la parallaxe horizontale ſoit de 60′, ce qui rend plus faciles les réductions pour d'autres cas.

Déclinaiſon de la Lune.	Equation de la parall. en déclin.
0°	30″, 4
5	30, 3
10	30, 0
15	29, 4
20	28, 6
25	27, 6
30	26, 4

Si l'on cherche la parallaxe de déclinaiſon ou de hauteur, pour le cas où la lune eſt dans le méridien, on n'a beſoin d'aucune équation : il ſuffit de corriger la diſ-

tance au zénit par l'angle de la verticale avec le rayon, (1654, 3942).

1698. En réduisant le lieu apparent de la lune au point K, on n'a pour l'ascension droite aucune correction (1691), & l'équation de la déclinaison est égale à $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. décl.}}{\text{cos. haut. du pole}}$ (1696) $= 23''$ pour la latitude de Paris; il reste à savoir combien ce petit changement dans la déclinaison peut influer sur la longitude & sur la latitude de la lune, ou, ce qui revient au même, quel est le rapport qu'il y a entre le changement de la déclinaison & ceux de la latitude & de la longitude. Soit A (*fig.* 96), le pole de l'équateur ou le pole du monde, C le pole de l'écliptique, B le lieu vrai de la lune, AB sa distance au pole du monde, BC sa distance au pole de l'écliptique, & BL le petit changement fait à la déclinaison de la lune (1696) sans changer l'angle A; il faut chercher quel sera le changement arrivé dans la latitude de la lune. Pour cela ayant tiré le cercle de latitude CL, & le petit arc perpendiculaire LN, on aura BN pour le changement de latitude; or BL est à BN, ou d (AB) a d (BC) :: sin. AB. sin. BC : cos. AC — cos. AB. cos. BC (3748), donc $BN = BL\left(\frac{\text{cos. } AC - \text{cos. } AB. \text{ cos. } BC}{\text{sin. } AB. \text{ sin. } BC}\right)$; mais au lieu de BL, on doit mettre $23''$ cos. déclin. ou $23''$ sin. $AB = \frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. déclin.}}{\text{cos. haut. du pole.}}$ qui étoit la valeur de CV (1696), alors on aura l'applatissement en latitude $BN = 23''\left(\frac{\text{cos. } AC}{\text{sin. } BC} - \frac{\text{cos. } AB. \text{ cos. } BC}{\text{sin. } BC}\right) = \frac{p \text{ sin. } a}{\text{cos. h. du pole.}}$ $\left(\frac{\text{cos. } 23^\circ}{\text{cos. latit. } ☾} - \text{sin.décl.tan.lat.}\right)$, c'est-à-dire, $23'' \frac{\text{cos. } 23^\circ\ 28'}{\text{cos. lat. } ☾}$, $- 23''$ sin. déclin. tang. lat. ☾. Le signe — se changeroit en + si la déclinaison & la latitude de la lune étoient de signes différens. C'est la latitude vraie, ou vue du centre de la terre qu'il faut employer dans ces calculs.

Equation de la parallaxe en latitude. *Fig.* 96.

1699. La seconde partie de cette formule $23''$ sin. décl. tang. latit. ne peut aller au-delà de $1''$, 3 pour Paris; ainsi il y a bien des cas où l'on peut la négliger

Fig. 96. totalement, & s'en tenir pour la correction de la latitude de la lune, au terme $23'' \frac{\text{cos. } 23^\circ.}{\text{cos. lat. } ☾}$; ce terme lui-même varie très-peu, puisque le cosinus de la latitude de la lune diffère à peine de l'unité ; ainsi sans craindre l'erreur d'une seconde entiere, on peut s'en tenir à une correction constante de 26″, 6 pour Paris lorsque la parallaxe horizontale est de 57′ 40″ ; sous les autres latitudes elle sera de $\frac{p \text{ sin. } a \text{ cos. } 23^\circ\frac{1}{2}}{\text{cos. haut. pole}}$, comme on le voit par la formule. A l'égard des signes ils sont les mêmes que pour la déclinaison (1692), c'est-à-dire, que dans les pays septentrionaux, si la latitude de la lune est septrionale, on retranchera cette correction de la latitude de la lune rapportée au point K, pour avoir sa vraie latitude vue du centre C de la terre. Dans nos régions septentrionales, on la retranchera de la parallaxe en latitude (a) (1667), trouvée par les règles ordinaires ; si cependant la lune étoit entre le pole & le zénit, il faudroit l'ajouter. Je suppose qu'on ait employé dans le calcul de la parallaxe ordinaire, une parallaxe horizontale augmentée de p sin. a, *tang. haut. du pole*, qui est la valeur de NK (1695).

Elle est presque constante.

Equation de la parallaxe en longitude.

1700. La correction de la longitude qui dépend du changement de déclinaison, est égale au petit angle sphérique LCN; or $NL = LCN.$ sin. CL (891), donc $LCN = \frac{NL}{\text{sin. } CL}$; mais dans le triangle rectiligne rectangle BLN, on a $NL = BL.$ sin. B (3611); donc $LCN = \frac{BL. \text{ sin. } B}{\text{sin. } CL}$. Par la propriété ordinaire des triangles sphériques on a sin. B : sin. AC : : sin. C : sin. AB (3690); donc sin. $B = \frac{\text{sin. } AC. \text{ sin. } C}{\text{sin. } AB}$ substituant cette va-

(a) M. de la Caille, (*pag.* 225 *lig.* 14), dit que cette correction doit être *ôtée* de la latitude australe de la lune quand l'observateur est placé dans la partie boréale de la terre ; mais il faut lire *ajoutée*. Il y a aussi erreur, en ce qu'il dit que la même correction est additive à la latitude boréale, tandis qu'elle est certainement soustractive dans le cas dont il s'agit.

leur de sin. B on a $LCN = \frac{BL.\,\text{sin.}\,AC\,\text{sin.}\,C}{\text{sin.}\,CL.\,\text{sin.}\,AB}$, c'est-à-dire, = $\frac{BL.\,\text{sin.}\,23^\circ\,\text{cos.}\,\text{longit.}}{\text{cos.}\,\text{lat.}\,☾\,\text{cos.}\,\text{déclin.}}$; mais BL est égale à $\frac{p.\,\text{sin.}\,a.\,\text{cos.}\,\text{déclin.}}{\text{cos.}\,\text{haut.}\,\text{du pole}}$; (1696) donc LCN, ou la correction de la longitude est égale à $\frac{p.\,\text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,23^\circ\,28'\,\text{cos.}\,\text{long.}\,☾}{\text{cos.}\,\text{haut.}\,\text{du pole}\,\text{cos.}\,\text{latit.}\,☾}$, & comme le cosinus de la latitude de la lune est toujours à peu-près égal à l'unité, on aura sans craindre l'erreur d'une seconde pour la longitude, $\frac{p.\,\text{sin.}\,a.\,\text{sin.}\,23^\circ}{\text{cos.}\,\text{haut.}\,\text{du pole}}$ cosin. longit. ☾ ; ce sera pour Paris environ $9''$ 1 cos. longit. *Fig. 96.* Elle est de $9''$ cos. long.

1701. Cette correction de la longitude s'ôte de la longitude vraie vue du centre C calculée par les tables, pour avoir la longitude vue du point K, tant que la lune s'éloigne du pole élevé : en effet, nous avons vu qu'il faut ajouter l'équation de la déclinaison pour avoir la vraie distance au pole, réduite au centre de la terre (1697), ou l'ôter de la vraie pour avoir celle qui est vue du point K toutes les fois que la lune est du côté du pole élevé ; or si vous rapprochez la lune du pole élevé dans le temps qu'elle s'en éloigne par son mouvement propre, vous diminuez sa longitude ; donc cette correction est soustractive de la longitude vraie de la lune vue du point C, pour la réduire au point K, toutes les fois que la lune s'éloigne du pole élevé ; ou ce qui revient au même, cette portion de la parallaxe doit s'oter de la longitude vraie vue du centre C, qui est donnée par les tables, pour avoir celle qui est vue du point K, à laquelle on applique ensuite les formules ordinaires qui dépendent du nonagésime. *Fig. 94.*

1702. Ainsi pour tous les pays dont la hauteur du pole est septentrionale, cette correction de la longitude est soustractive, ou a le signe — quand la déclinaison boréale de la lune diminue, ou que la déclinaison méridionale augmente ; ce qui arrive, quand la lune est dans les signes descendans, c'est-à-dire, qu'elle a 3, 4, 5, 6, 7 & 8s de longitude ; & elle a le signe + dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, & Signes descendans.

Fig. 94. cela eſt vrai en conſidérant le point de l'écliptique où répond la lune, quand même le mouvement de la lune dans ſon orbite auroit une autre direction; ce qui pourroit arriver, ſi la lune étoit fort proche du ſolſtice & du nœud; ainſi la règle générale eſt d'ôter la correction de la longitude vraie, toutes les fois que la lune ſera dans les ſignes deſcendans 3, 4, &c. & de la ſouſtraire dans les ſix autres, pour les pays qui ſont au nord de l'équateur.

C'eſt le contraire pour les pays ſitués au midi de l'équateur; mais il n'y auroit rien à changer à cette règle, quand même la lune ſeroit entre le zénit & le pole.

1703. Si le lieu de la lune eſt plus avancé que celui du nonagéſime, la parallaxe de longitude eſt additive, c'eſt-à-dire, qu'elle a le ſigne +, ſinon elle a le ſigne —, donc en combinant ce ſigne avec celui de l'applatiſſement que nous venons d'indiquer, on aura exactement la longitude apparente dans la terre applatie, vue de la ſurface de la terre ou du point *O*.

1704. On pourroit auſſi déduire de l'équation de la déclinaiſon (1696) celle de la hauteur; mais la méthode que j'ai donnée (1687), eſt bien plus commode. Je dois ſeulement avertir que M. de la Caille, (*pag.* 225), a fait cette correction, *ſouſtractive dans tous les cas*; mais il eſt évident qu'elle devient quelquefois additive: en effet, quand le rayon dirigé vers la lune eſt entre *CO* & *CP*, ſi l'on tranſporte l'œil de *K* en *C*, l'on a une plus grande hauteur, & l'équation de la hauteur eſt additive, comme je l'avois démontré dans les mémoires de 1756, avant que M. de la Caille écrivît ſur cette matière (1689).

Explication de la Table. 1705. J'ai renfermé dans la table ſuivante toutes les quantités qui doivent ſervir aux calculs précédens pour différentes latitudes, en employant la valeur des rayons de la terre, tels que *CO*, dont on trouvera le calcul dans le livre XVe. d'après les hypothèſes de M. Bouguer (2690), & de M. Maupertuis (*Diſcours ſur la*

la parallaxe de la lune, 1742, *pages* 34 & 36), l'applatissement de la terre étant supposé de $\frac{1}{178}$; je suppose aussi la parallaxe de la lune de 60′ sous l'équateur; l'on augmentera ou l'on diminuera tous ces nombres de la table, lorsque l'on supposera une parallaxe horizontale plus ou moins grande que 60′, ou un applatissement plus ou moins considérable que $\frac{1}{178}$. Fig. 94.

La première colonne contient les degrés de latitudes géographiques, ou les hauteurs du pole. La seconde & la troisième présentent la différence entre le rayon de l'équateur & le rayon CO qui répond à chaque latitude, en supposant celui de l'équateur de 1°; c'est-à-dire, que l'on trouve dans ces deux colonnes ce qu'il faut ôter de la parallaxe horizontale sous l'équateur, pour avoir la parallaxe sous une latitude donnée dans les deux hypothèses. Si l'on vouloit supposer l'applatissement de la terre moindre que $\frac{1}{178}$, on diminueroit ces nombres dans la même proportion.

La quatrième & la cinquième colonne contiennent la valeur de NK en secondes; c'est-à-dire, la quantité qu'il faut ajouter à la parallaxe horizontale déjà trouvée par une des colonnes précédentes pour chaque latitude, afin d'avoir la parallaxe qui répond à OK, & dont nous avons fait usage ci-devant (1694 & suiv.). Cette valeur de NK aussi bien que celle de CK est encore de 48″ sous le pole, ou du moins infiniment près du pole, parce que le rayon du cercle osculateur se termine en K à cette distance-là, quelque près qu'on soit du pole.

La sixième & la septième colonne contiennent le segment CK en secondes; c'est la quantité, qui multipliée par le cosinus de la déclinaison, donne l'équation de la déclinaison (1696), & par conséquent celles de la longitude & de la latitude (1699, 1700).

La huitième & la neuvième colonne contiennent l'équation de la latitude, ou l'effet de l'applatissement en latitude pour chaque hauteur du pole, dans les mêmes

hypothèses ; cette équation est constante pour chaque latitude géographique (1699).

La dixième colonne contient les 90 premiers degrés de la longitude de la lune, & la dernière la correction de la longitude pour la latitude de Paris seulement (1700). Cette équation est la même pour les trois autres quarts (1701), aux signes près ; en prenant le supplément, l'excès sur 180 degrés, ou le complément à 360 degrés, suivant les cas, comme pour chercher le sinus d'une longitude, ou pour calculer la déclinaison du soleil (855).

Equations de la Parallaxe pour des Sphéroïdes applatis, en supposant $\frac{1}{178}$ d'applatissement & 60′ de Parallaxe.

Haut. du Pole.	Otez de la par. sous l'équateur.		N K (Fig. 94.)		C K (Fig. 94.)		Parallaxe en Latitude.		Long. de la Lune.	Parall. de longit. à Paris.
Deg.	Bouguer.	Maupertuis.	Bouguer.	Maupertuis.	Bouguer.	Maupertuis.	Bouguer.	Maupertuis.		
0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0°	12″,0
10	0,5	0,6	1,0	1,2	5,7	7,0	5,2	6,4	10	11,8
20	1,9	2,4	4,0	4,7	11,7	13,8	10,7	12,7	20	11,3
30	4,2	5,1	9,0	10,1	18,1	20,2	16,6	18,6	30	10,4
40	7,2	8,3	11,4	16,7	25,0	26,0	22,9	23,9	40	9,3
50	10,8	11,9	2,45	23,8	32,0	31,0	29,2	28,5	50	7,7
60	14,4	15,2	3,33	30,3	38,5	35,0	35,3	32,3	60	6,0
70	17,4	17,9	4,11	35,7	43,8	38,0	40,1	35,0	70	4,1
80	19,5	19,6	4,65	39,3	47,3	39,9	43,3	36,8	80	2,1
90	20,2	20,2	48,2	40,5	48,2	40,5	44,2	37,1	90	0,0

1706. On trouvera parmi les tables de la lune celle de la parallaxe pour différentes latitudes, avec la correction tant en longitude qu'en latitude, & les angles de la verticale avec le rayon de la terre dans l'hypothèse que l'applatissement soit $\frac{1}{230}$ seulement, hypothèse qui paroît favorisée par diverses mesures des degrés, dont les excès par rapport au degré de l'équateur ne sont pas si considérables que ceux des degrés de France & de Laponie (2691).

1707. On sera peut-être surpris de l'extrême différence qu'il y a entre les deux hypothèses de M. Bouguer & de M. de Maupertuis employées dans la table précédente, quoique le degré d'applatissement soit le même; cette différence va à $7''$ & $\frac{7}{10}$ pour la valeur de CK sous le pole, parce que les rayons de courbure sont fort différens dans ces deux hypothèses, quoique le degré d'applatissement soit le même. Cependant, il n'en résulte pas grande différence sur la parallaxe, parce que l'équation CK de la déclinaison augmente avec l'équation NK de la parallaxe, & l'une compense l'autre, de sorte que le résultat est toujours le même à une seconde près, ou environ, dans les deux hypothèses.

1708. L'angle de la verticale avec le rayon mené de Paris au centre de la terre, est de $19' 30''$, suivant la table que j'ai calculée dans l'hypothèse de M. Bouguer; mais il ne seroit pas de $15'$, si l'on suivoit l'hypothèse dans laquelle je corrigeois les degrés de Laponie, de France & du Pérou dans les mémoires de l'académie, 1752, *pag.* 111, ou celle d'une ellipse ordinaire avec un applatissement de $\frac{1}{230}$, dont je ferai usage dans les tables de la lune. Ce même angle est de $18' 28''$, quand on employe pour déterminer la figure de la terre, les seuls degrés du nord & du Pérou, en supposant sa figure elliptique, (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 103). Enfin, il est de $19' \frac{1}{4}$ dans l'hypothèse de M. de Maupertuis; je l'ai pris de $15'$ en nombres ronds. Angle de la verticale.

dans les calculs précédens, & dans les tables de la lune on verra qu'il est de 14′ 49″.

1709. M. du Séjour en commençant son grand travail sur le calcul analytique des éclipses (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 221), a donné des formules très-élégantes & très-simples pour calculer les rayons de la terre, & les angles des verticales avec les rayons, il y a joint des tables détaillées, construites dans les deux hypothèses d'applatissement, $\frac{1}{230}$ & $\frac{1}{178}$, auxquelles on peut avoir recours. J'ai employé une de ces tables pour calculer les équations de la longitude & de la latitude qu'on trouvera dans les tables de la lune.

Des inégalités de la Parallaxe, & de sa quantité absolue.

1710. La parallaxe horizontale & le diamètre de la lune sont dans un rapport constant, (1633); quand la lune s'éloigne de nous, son diamètre diminue, (1384), & sa parallaxe horizontale diminue aussi dans le même rapport, (1632): ainsi les trois inégalités dont j'ai parlé à l'occasion du diamètre de la lune, (1507), ont lieu de même dans la parallaxe; mais elles sont plus grandes dans le rapport de 11 à 6, (1717).

Après qu'on eut observé les changemens du diamètre de la lune, il fut aisé de reconnoître ceux de la parallaxe; mais Ptolomée & les anciens qui faisoient tourner la lune dans un excentrique ou dans un épicycle, avoient déja pensé qu'elle devoit être plus ou moins éloignée de nous, & avoient établi une inégalité dans la parallaxe, quoiqu'ils ne connussent pas celle des diamètres. Tous les auteurs qui ont suivi, ont distingué la parallaxe de l'apogée de celle du périgée.

Ce ne fut que vers 1666, que M. Picard commença à reconnoître qu'il y avoit deux autres inégalités sensibles dans le diamètre apparent de la lune, & par

conséquent dans sa parallaxe. Ces inégalités répondent à l'évection (1435), & à la variation (1445); & l'on sent assez que l'attraction du soleil, en changeant la vîtesse de la lune autour de la terre, ne peut manquer de changer aussi sa distance, comme le calcul de l'attraction l'a fait voir : ainsi la valeur de ces inégalités a été déterminée & par l'observation & par la théorie.

1711. M. Clairaut employe dans ses tables de la parallaxe 10 équations, (*Mém. acad.* 1752, *Connoiss. des mouv. céleſt.* 1765) : les principales sont contenues dans la formule suivante, où y exprime l'anomalie moyenne de la lune, & t la distance moyenne de la lune au soleil, $57' 3'' - 3' 5'', 5 \cos. y + 10'', 3 \cos. 2y + 28'', 1 \cos. 2t - 34'', \cos. (2t - y)$. La constante $57' 3''$ est celle que j'avois déjà déterminée pour la latitude de Paris, en appliquant aux parallaxes que j'avois observées à Berlin les équations précédentes; ce qui me donnoit à chaque fois la constante qu'il s'agissoit de trouver, (*Mém. acad.* 1756). J'ai reconnu en même-temps que le diamètre horizontal de la lune est à sa parallaxe pour Paris, comme $30'$ sont à $54' 56''$, en comparant avec ces parallaxes les diamètres de la lune que j'ai observés fréquemment, avec un héliomètre de 18 pieds.

Constante pour Paris.

Rapport du diamètre à la parallaxe.

1712. Cette parallaxe $57' 3''$, n'est pas la parallaxe moyenne qui tient un milieu entre la plus grande & la plus petite (car celle-ci est de $57' 39''$); mais c'est celle qui répond à la distance moyenne de la lune à la terre, & qui en diffère pour deux raisons qu'il est utile de faire sentir à nos Lecteurs. Premiérement, si l'on ne considère que l'orbite elliptique de la lune, dont l'excentricité est environ 0,05505; on trouvera que si la parallaxe est de $57' 3''$ dans les moyennes distances, elle sera de $60' 22''$ dans le périgée, & de $54' 5''$ dans l'apogée; la première diffère de la constante $57' 3''$, de $3' 19''$, la seconde n'en diffère que de $2' 59''$, parce que le même changement sur la distance

produit ſur l'angle de la parallaxe un plus grand effet, quand la lune s'approche de nous que quand elle s'en éloigne. La diſtance moyenne eſt un milieu arithmétique entre la diſtance apogée & la diſtance périgée, mais la parallaxe eſt en raiſon inverſe de la diſtance, ainſi la parallaxe 57′ 3″, qui répond à la diſtance moyenne, eſt une moyenne harmonique entre celles qui répondent aux diſtances apogée & périgée ; or le milieu harmonique diffère beaucoup du milieu arithmétique. Par exemple, les premiers nombres qui expriment les nombres de vibrations des accords de la muſique, 2, 4, 6, ſont en proportion arithmétique, d'où l'on conclud que les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ qui expriment les longueurs des cordes ſont en proportion harmonique, ces dernières quantités qui peuvent ſe repréſenter par les fractions décimales 0, 50 ; 0, 25 ; 0, 17 ſont bien loin de la progreſſion arithmétique, puiſqu'il faudroit que la moyenne fut 0, 33 & non pas 0, 25. Voila une première raiſon pour laquelle la conſtante 57′ 3″ diffère de 10″ de la moyenne priſe entre la parallaxe apogée & la parallaxe périgée.

La ſeconde raiſon, c'eſt que l'attraction du ſoleil peut augmenter la parallaxe périgée de 1′ 5″, & qu'elle ne peut diminuer la parallaxe apogée que de 12″, parce que ſon effet eſt plus conſidérable quand la lune eſt près de la terre, & que les attractions du ſoleil & de la terre conſpirent à rapprocher la lune de nous, que quand la lune eſt fort éloignée, & que le ſoleil tend à l'éloigner encore. Cette ſeconde raiſon fait que la parallaxe moyenne entre la plus grande & la plus petite eſt encore plus forte de 26″$\frac{1}{2}$, que ſi les équations de la parallaxe faiſoient autant pour la diminution de la parallaxe conſtante 57′ 3″ que pour ſon augmentation ; ainſi ſuivant nos tables la parallaxe moyenne doit être plus grande de 36″$\frac{1}{2}$ que la conſtante, c'eſt-à-dire, 57′ 39″$\frac{1}{2}$. Il faut dire à peu-près la même choſe du diamètre de la lune (1507).

1713. Suivant les nouvelles tables de Mayer, la

plus grande parallaxe de la lune, (lorsqu'elle est dans son périgée & en opposition), est de 61′ 25″, la plus petite parallaxe qui a lieu dans l'apogée en conjonction, est de 53′ 53″, sous la latitude de Paris; il y avoit environ 3″ de moins dans la première édition de ses tables, faite en 1753, peu après que j'eus donné le résultat de nos observations de 1751 & 1752. Dans l'article précédent comme dans celui-ci, j'ai fait abstraction des petites inégalités que M. Clairaut & M. Mayer ont ajoutées aux deux grandes inégalités qui dépendent de l'évection & de la variation, mais je vais en donner la formule, quoiqu'on ait rarement besoin d'une si grande précision. La plus grande & la plus petite parallaxe.

1714. Suivant la formule de Mayer, la parallaxe équatoriale est 57′ 11″, avec toutes les équations suivantes; elles sont placées dans l'ordre de leurs quantités; mais nous avons marqué à côté l'ordre des tables, qui est le même que celui des équations de la lune, & qu'on a choisi pour la facilité du calcul.

TABLE XI.	57′ 11″	—	3′ 7″, 5	cos. anomal. ☾.
		+	10	cos. 2 anomal.
		—	0, 5	cos. 3 anomal.
IV.		—	37	cos. Arg. évection.
		+	0, 3	cos. 2 Arg. évection.
XII.		+	25, 2	cos. 2 dist. ☾ ☉
		—	1	cos. dist. ☾ ☉
X.		+	2, 0	cos. 2 (apog. ☾ — ☉)
		—	0, 2	cos. 3 (apog. ☾ — ☉)
VI.		+	1, 0	cos. Arg. évect. + anom. ☉
XIII.		+	0, 8	cos. 2 Arg. lat. — anom. ☾ corrig.
III.		—	0, 8	cos. 2 dist. ☾ ☉ + anom. ☉
II.		—	0, 7	cos. dist. ☾ ☉ + anom. ☉
VII.		+	0, 6	cos Arg. évect. — anom. moy. ☾
IX.		+	0, 4	cos. 2 (☊ — ☉)
I.		+	0, 3	cos. anom. moyen. ☉
VIII.		+	0, 2	cos. anom. moy. ☾ - anom. moy. ☉
IV.		+	0, 1	cos. 2 dist. ☉ ☾ + anom. moy. ☾

Au lieu de 57′ 11″ qui eſt la parallaxe ſous l'équateur, on a, ſuivant M. Mayer, 57′ 2″ $\frac{1}{2}$ pour la latitude de Paris, c'eſt la parallaxe que j'avois déterminée par mes obſervations de Berlin, comparées à celles du Cap (*Mém. acad.* 1752, 1753 & 1756, *pag.* 378), & que M. Clairaut avoit adoptée dans la dernière édition de ſes tables, *pag.* 117; elle étoit en nombres entiers 57′ 3″, (1711). C'eſt auſſi cette parallaxe pour Paris que j'ai employée dans les tables que je publie dans ce livre.

1715. M. de la Caille pluſieurs années après ſon retour du Cap, voulut auſſi examiner le réſultat de toutes les obſervations qui avoient été faites pendant ſon ſéjour au Cap; il conclud de 40 obſervations faites à Berlin, à Paris, à Greenwich, à Stockholm, à Bologne, que la plus grande parallaxe horizontale de la lune périgée & en ſyzygie, eſt de 61′ 23″ 1 à l'égard d'un obſervateur placé ſous le pole, & de 61′ 41″ 7 ſous l'équateur; en ſuppoſant l'applatiſſement de la terre $\frac{1}{200}$ du diamètre de l'équateur. (Voyez *les Ephémérides de* 1765 — 74, & *les Mémoires de* 1761, *pag.* 51).

Réſultat de M. de la Caille.

1716. Dans l'hypothèſe de M. Bouguer (2683), M. de la Caille trouve la plus grande parallaxe de 61′ 22″ 7 ſous le pole, de 61′ 45″ 6 ſous l'équateur; la conſtante dont nous avons parlé (1711) de 56′ 56″ ſous le pole, de 57′ 14″ 8 ſous l'équateur; le rapport du diamètre horizontal de la lune à la parallaxe horizontale ſous le pole, égal à celui de 30′ à 54′ 41″ $\frac{1}{2}$ en ſuppoſant le diamètre de la lune tel qu'il paroît avec une lunette ordinaire de ſix à ſept pieds; ces réſultats ſont d'accord avec ceux que j'avois donnés; ce qui fait voir la préciſion & la certitude de nos recherches. Il n'y a que deux légères différences: la première conſiſte en ce que j'avois ſuppoſé l'applatiſſement de la terre plus conſidérable que M. de la Caille, ce qui peut produire dans certains cas 1 ou 2″ de différence ſur la parallaxe; la ſeconde, que j'ai employé les diamètres

mètres de la lune mesurés avec une lunette de 18 pieds, qui sont plus petits de 2″ ou 3″ que ceux de M. de la Caille, mesurés avec des lunettes de six pieds; soit que la différence vienne réellement de l'effet des lunettes, soit qu'il y ait moins d'exactitude & plus de difficulté à observer avec une petite lunette telle qu'il l'a employée (1388, 1395).

1717. Le rapport entre la parallaxe de la lune à 45 degrés de latitude & son diamètre horizontal est celui de 30′ à 54′ 57″, ou de 30′ à 54′ 59″, suivant l'hypothèse qu'a embrassée M. de la Caille; ce rapport est sensiblement & en nombres ronds celui de 6 à 11 : ainsi le rayon de la lune est $\frac{3}{11}$ du rayon moyen de la terre. Le cube de cette fraction est $\frac{1}{49}$; ainsi le volume ou la grosseur de la lune est la 49e. partie du volume ou de la grosseur de la terre. Cependant comme la densité de la lune est moindre que celle de la terre (3414), il se trouve que la masse, la quantité de matière, le poids, ou la puissance attractive dans la lune est environ 70 fois moindre que dans la terre, comme on l'a reconnu par son action sur les marées (3595). Grandeur réelle de la Lune.

1718. La parallaxe de la lune pour Paris, par un milieu entre la plus grande & la plus petite est de 57′ 39″; si l'on divise le rayon moyen de la terre qui est de 3271850 toises par le sinus de 57′ 39″, on aura la distance de la lune en toises; & divisant par 2283, parce que nos lieues communes de 25 au degré sont de 2283 toises, on trouvera la distance moyenne de la lune 85464 lieues. Si l'on supposoit la parallaxe moyenne de 57′ 43″, comme dans la première édition de ce livre, on trouveroit 85393 lieues. Elle est $\frac{1}{70}$ de la terre. Distance absolue.

1719. Pour faire sentir à tout le monde le degré de certitude que comporte ce résultat, il suffira de remarquer que la parallaxe de la lune est connue à 2″ près, (1716); chaque seconde de parallaxe produit à peine 25 lieues sur la distance; ainsi nous sommes assurés de ne pas nous tromper de 50 lieues sur 85 mille, que contient la distance de la lune à la terre. Erreur possible sur cette distance.

De la parallaxe du Soleil, & de sa distance à la terre.

Incertitude des Anciens.

1720. Après avoir vu combien les anciens s'étoient trompés sur la distance de la lune à la terre, (1655) quoique facile à déterminer; on ne sera pas étonné de voir qu'ils n'eussent aucune idée de celle du soleil, du moins avant le temps d'Hipparque. C'est sur-tout ici que les anciens devoient dire comme Pline. *Incomperta hæc & inextricabilia, sed tam prodenda quam sunt prodita.... Nec ut mensura, id enim velle pene dementis otii est, sed ut tantùm æstimatio conjectandi constet animo.* (*Lib. II, c.* 23).

Les opinions anciennes sur la distance du soleil à la terre sont rapportées dans Plutarque, (*De placitis Phil.* III, 31); & dans Pline (*Lib. II, c.* 21), on voit que Pythagore supposoit le soleil trois fois aussi loin que la lune, c'est-à-dire, 16 ou 18 mille lieues, au lieu de 32 millions qu'on a trouvé de nos jours.

1721. Posidonius, contemporain de Pompée, donnoit au demi-diamètre de la terre 38182 stades, suivant le calcul du P. Riccioli, & à la distance du soleil 502000040, c'est-à-dire, 13141 demi-diamètres de la terre, au lieu de 22918 que nous trouvons actuellement; cette opinion étoit assez approchante du vrai, mais on ne peut l'attribuer qu'au hazard d'une heureuse conjecture. Il faut même supposer une interprétation favorable du texte de Pline, pour trouver cette distance si exacte, je vais rapporter le passage en entier. *Posidonius non minus 40 stadiorum a terra altitudinem esse in quâ nubila ac venti nubesque proveniant.... sed a turbido ad lunam* VICIES CENTUM MILLIA *stadiorum, inde ad solem quinquies millies. Eo spatio fieri ut tam immensa ejus magnitudo non exurat terras.* L'expression *quinquies millies* qui exprime la distance de la lune au soleil signifie 5000 stades, suivant quelques commentateurs; mais

le P. Riccioli observe que, suivant la coutume des auteurs latins, il faut sous-entendre *centena millia*, ce qui fait 500 millions de stades depuis la lune jusqu'au soleil, à quoi ajoutant la distance de la lune aux nuages 2 millions de stades, & celle des nuages à la terre 40 stades, on trouve 502 millions & 40 stades pour la distance du soleil selon l'hypothèse de Posidonius. Il y a des éditions où on lit 400 stades pour la hauteur des nuages, mais le texte est visiblement altéré; car les anciens ne pouvoient pas supposer 20 lieues pour la distance des nuages, que l'on voit si souvent toucher le sommet de nos montagnes. Cependant le P. Riccioli a fait cette espèce de faute, & l'Imprimeur en a ajouté une autre en mettant un chiffre de trop dans la somme (Pline II, 23. Riccioli I, 111).

Pline pensoit que la distance du soleil devoit être 12 fois aussi grande que celle de la lune, parce que la durée de sa révolution est 12 fois aussi longue; mais cette conséquence n'avoit aucun fondement; enfin il conclut son 23e chapitre par l'opinion de Pétosiris & de Nécepsos, Rois d'Egypte, qui croyoient la distance du soleil de 2970 stades seulement; mais Pline la rejette avec raison comme une idée puérile.

1722. On ne connoissoit donc point la distance & la parallaxe du soleil, avant Aristarque de Samos, qui vers l'an 264 avant J. C., démontra que la parallaxe n'alloit pas au-delà de 3′, ensorte que la distance du soleil surpassoit 1146 demi-diamètres terrestres, c'étoit avoir beaucoup fait, parce qu'il y avoit eu des Pythagoriciens qui d'après certaines proportions harmoniques avoient cru que le soleil étoit seulement 3 fois plus loin de nous que la lune; d'ailleurs on a été 1800 ans avant que de trouver rien de mieux. Aristarque de Samos voyant que le rayon de la terre étoit une base presque insensible, par rapport à la distance qu'on vouloit mesurer, parce que la terre vue du soleil paroissoit sous un trop petit angle, imagina d'employer la distance de la lune à la terre, qu'il étoit plus facile de

Méthode d'Aristarque.

connoître par la parallaxe, & de chercher l'angle sous lequel cette distance devoit paroître vue du soleil; sa méthode est ingénieuse & ne suppose que l'observation exacte de la quadrature de la lune.

Lorsque la lune est à moitié éclairée, où lorsque la ligne qui sépare la lumière de l'ombre sur le disque lunaire est parfaitement droite, ensorte qu'on voie sur le disque de la lune un demi-cercle parfait, alors le rayon qui va du soleil à la lune *SV* (*fig.* 82), est nécessairement perpendiculaire au rayon *TV*, par lequel nous appercevons la lune; car toutes les fois que cet angle devient différent de l'angle droit, son sinus verse diffère du rayon, & la partie éclairée ne sauroit être égale au rayon du disque lunaire (1409); si dans le même instant on mesure l'angle *STV* entre la lune & le soleil, ou l'angle d'élongation (1142), on connoîtra deux angles du triangle *STV*, & par conséquent le troisième angle *S* qui doit être le complément de l'angle *T*, puisque l'angle *V* est de 90 degrés. Or le côté *TL* distance de la lune à la terre étoit supposé connu (1655), ainsi il étoit facile de trouver la distance *TS* du soleil à la terre, qui étoit l'objet de cette méthode d'Aristarque.

Fig. 82.

La méthode d'Aristarque parut à Képler, en 1618, très-digne d'être employée par Galilée & Marius qui se servoient alors des lunettes d'approche; & dans ses éphémérides pour 1619, il exhorte les philosophes à faire leurs efforts pour déterminer par cette méthode la parallaxe du soleil, qui jusqu'alors avoit été conclue de la grandeur des éclipses de lune, & de celle de l'ombre de la terre dans ces éclipses, avec des incertitudes & des variétés prodigieuses.

1723. Ce qui rend cette méthode insuffisante, c'est la difficulté de déterminer exactement le temps ou l'angle *V* est droit, de même que la petitesse de l'angle *S*; la lune peut faire dans son orbite un arc de 15′ sans que la grandeur apparente de sa partie éclairée augmente de 4″, par rapport à nous; or l'angle *TSV* n'est pas

de 10′, par conséquent on ne sauroit l'appercevoir ni le mesurer en observant la partie éclairée de la lune.

Pour faire bien sentir la vérité de cette objection, rappellons nous que la partie visible de l'hémisphère éclairé de la lune est égale au sinus verse de l'angle *V* (1409); & supposons que l'angle *V* soit plus grand de 10 minutes que l'angle droit, comme si l'angle à la terre *STV* étoit lui-même un angle droit; le sinus verse de 10 minutes est de 29 parties, le diamètre étant de 20 mille, ce qui ne fait que $2''\frac{1}{2}$; ainsi la partie lumineuse que nous voyons, n'aura augmenté que de $2''\frac{1}{2}$, nous ne verrons sur le disque lunaire aucune différence sensible, la lune paroîtra aussi bien dichotome que lorsqu'elle étoit exactement en quadrature, cependant alors l'élongation *T* sera de 90°, & l'angle *V* étant supposé de 90°, puisque la lune sera dichotome, on trouvera zéro au lieu de 10 minutes pour la valeur de l'angle *S*. Il seroit également possible de trouver une quantité négative, c'est-à-dire, moins que rien, pour la parallaxe du soleil.

1724. Cependant Vendelinus ayant observé souvent à Majorque, en 1650, ces quadratures de la lune le matin & le soir, trouva que la dichotomie de la lune arrivoit lorsque l'angle étoit de 89° 45′ & même un peu plus grand, d'où il tira cette conséquence très-vraie que l'angle *LST* n'étoit pas de 15′, ni la parallaxe du soleil de 15″ (*Ricc. Almag. I*, 109 & 731). D'un autre côté le P. Riccioli, après beaucoup de pareilles observations assuroit que l'angle au soleil étoit de 30′ ou différent de très-peu de minutes; il supposoit la parallaxe de 28″ à 30″, il ne pouvoit pas encore se résoudre à la faire aussi petite que l'avoient fait Posidonius & Vendelinus (*Almag. I*, 734). De là il résulte que la méthode d'Aristarque pouvoit bien nous apprendre que la parallaxe du soleil n'étoit pas au-dessus d'une demi-minute; mais il étoit difficile de s'assurer d'une plus grande précision.

1725. Ptolomée employa pour déterminer la dis-

tance du soleil, la méthode d'Hipparque, fondée sur l'observation des éclipses de lune, & cette méthode lui auroit fait découvrir la distance du soleil, si elle n'eût pas été prodigieusement grande par rapport à celle de la lune qu'il employoit dans cette recherche; (*Alm. V*). Soit *AO* le diamètre du soleil, (*fig.* 99), *GB* celui de la terre, *APO* le cône d'ombre que produit la terre dans les éclipses de lune. La durée des éclipses avoit fait connoître à Ptolomée que *CE*, c'est-à-dire, la largeur du cône d'ombre traversé par la lune étoit d'environ $1^{\circ}\frac{1}{3}$ ou deux fois le demi-diamètre du soleil, & trois cinquièmes de plus, c'est-à-dire, $\frac{13}{5}$ du diamètre du soleil. Il supposoit le diamètre *AO* du soleil de $31'\frac{1}{3}$, aussi bien que celui de la lune pleine & apogée, la distance *TL* de la lune à la terre de $64\frac{1}{8}$ demi-diamètres terrestres, il n'étoit pas difficile d'en conclure par la trigonométrie rectiligne que la distance *TS* du soleil devoit être de 1210 fois le demi-diamètre *TB* de la terre; & il s'en suivoit que la parallaxe du soleil devoit être de $2'\ 50''$, ainsi Ptolomée croyoit le soleil 17 ou 18 fois plus près de nous qu'il ne l'est réellement, & Copernic le rapprocha encore.

Fig. 99.

Pour trouver le rapport de *TB* à *TS*, Ptolomée fait $TM = TL$, & dans le triangle *TMQ* il trouve *MQ*; parce que $MQ : CL :: 5 : 13$ par observation, il trouve *CL*; mais puisque $TM = TL$, $LC + MR = 2TB$, d'où ôtant *LC* & *MQ* il reste *QR*. Ptolomée considère ensuite qu'à cause des triangles semblables on a $TS : SM :: TA : AQ :: BA : RA :: TB : QR$. Mais *TB* & *QR* sont déja connus par les deux opérations précédentes; ainsi l'on a le rapport de *TS* à *SM*, & celui de la distance de la lune à celle du soleil; d'où Ptolomée conclut que *TB* est à *TS* comme 1210 est à 1, ou que la distance du soleil est de 1210 demi-diamètres de la terre. Le P. Riccioli (*Alm. I*, 107), réduit cette méthode aux règles ordinaires de la trigonométrie rectiligne; mais j'ai mieux aimé indiquer ici la manière dont les anciens procédoient pour dé-

duire le rapport des inconnues aux quantités données, par les rapports de celles-ci entre elles.

Cette méthode passe pour être de l'invention d'Hipparque, elle a été suivie & employée par Ptolomée, (*Alm. lib. V.* Albatégnius, *cap.* 30. Régiomontanus, *Epit. Alm. lib. V.* Copernic, *Lib. IV*, *cap.* 19. Longomontanus, *Astr. dan. lib. I. Theoricor*, *cap.* 9. Boulliaud, *Astr. phil. lib. IV*). Mais Lansbergius fait voir que Albategnius, Copernic & Tycho s'étoient trompés dans leurs données, & avoient admis des choses incompatibles & incohérentes, (*Riccioli*, *Alm. I*, 107).

1726. Tycho employoit la distance du soleil de 1142 demi-diamètres de la terre, (*Progymn. pag.* 97). Il dit ensuite que les éclipses de lune prouvent suffisamment que la parallaxe horizontale du soleil est de trois minutes; mais en convenant que cette détermination n'étoit pas sans incertitude (*pag.* 415 & 463). En effet, il dit ailleurs (*Progymn. pag.* 414) qu'il a mesuré quelquefois, avec soin, la parallaxe de Mars en opposition, pour savoir s'il étoit plus près de nous que le soleil, (comme cela devoit être, suivant l'hypothèse de Copernic & la sienne), & il ajoute qu'il parlera, dans un temps plus convenable, de ce qu'il a trouvé à ce sujet; mais ce qui me persuade que ses efforts avoient été inutiles, c'est qu'il réfute ensuite (*pag.* 661), *Th. Digges* qui, en 1573, avoit donné en Angleterre une méthode pour trouver les parallaxes des astres, (*Digges Ala seu scala mathematica*), il lui oppose la difficulté qui naît des réfractions, & du mouvement propre de Mars; il ajoute seulement qu'il croit y être parvenu par un autre moyen, dont il parlera dans une occasion plus favorable. Tout cela indique assez que Tycho n'avoit point, sur la parallaxe du soleil ou de Mars, de résultat dont il fût bien assuré, & qu'il avoit seulement adopté le résultat de Copernic.

1727. Képler apperçut avec la sagacité, qui lui étoit ordinaire, que la parallaxe de Mars étoit absolument insensible, à plus forte raison celle du soleil,

(*Epit. astr. Cop. pag.* 479); il supposoit la distance du soleil 3469 demi-diamètres de la terre, c'est-à-dire, 1′ pour la parallaxe du soleil. Dans son ouvrage (*De Stella Martis, pag.* 71.), il dit qu'entre 700 & 2000 demi-diamètres de la terre, il est difficile de statuer démonstrativement sur la distance du soleil à la terre; c'est-à-dire, qu'il supposoit la parallaxe du soleil entre 4′ 55″ & 1′ 44″. Dans ses éphémérides de 1617 & 1618, il l'employoit de 2′, (*Ricc. Almag. I.* 108), la distance du soleil étoit donc, selon lui, de 1719 demi-diamètres; mais ensuite il réduisit cette parallaxe à une minute.

1728. Nous avons dit que Vendelinus, plusieurs années après la mort de Képler, établissoit la parallaxe du soleil de 15″, & le P. Riccioli, en 1665, de 28″ (1724). Cependant en 1677, on ne regardoit pas cette quantité comme bien sûre; nous voyons que M. Halley en rendant compte de l'observation du passage de Mercure sur le soleil, qu'il avoit faite à l'Isle de Sainte Hélene, en 1677, la jugeoit plus grande. Il compara le mouvement de Mercure en longitude, observé dans l'espace de 5^h 14′ 20″, (il l'avoit trouvé de 31′ 14″$\frac{1}{2}$), avec le mouvement calculé par les tables de Street, qu'il trouvoit de 30′ 50″ seulement; il jugea que cette différence de 24″$\frac{1}{2}$, ne pouvoit être que l'effet de la parallaxe de Mercure, d'où il conclut que la parallaxe horizontale du soleil étoit de 45″; mais il convient que les élémens qu'on emploie dans cette recherche y jettent beaucoup d'incertitude.

« Je sais bien, ajoute M. Halley, que la parallaxe de » Mars acronique, étant deux fois plus grande, servi- » roit à faire connoître celle du soleil, mais cette mé- » thode est fort sujette à caution, parce qu'elle suppose » les observations de la distance de Mars aux étoiles » fixes, faites avec le plus grand soin, & les meilleurs » micromètres, encore n'est-on pas assuré d'y parvenir. » Il ne reste qu'une observation, par laquelle on puisse » résoudre le problême de la distance du soleil à la terre, c'est

Il propose le passage de Vénus.

» c'eſt celle de Vénus qui paroîtra en 1761 dans le diſque » du ſoleil ; car ſi l'on obſerve alors la parallaxe de Vénus » au ſoleil par la méthode que je viens d'expliquer, elle » ſera preſque trois fois auſſi grande que celle du ſoleil, » & cette obſervation ſera la plus facile de toutes, en- » ſorte que par ce phénomène, on apprendra tout ce qu'il » eſt poſſible aux hommes de ſavoir là-deſſus. (Voyez » l'art. 2041)».

1729. M. Halley convient enſuite que les plus habiles aſtronomes de ſon temps ne croient pas que la parallaxe du ſoleil ſoit ſi grande qu'il la trouve ; mais il penſe qu'ils n'ont que des probabilités ſur cette matiere. La raiſon que M. Halley trouvoit la plus plauſible étoit celle de Street, qui ſuppoſoit la parallaxe du ſoleil entre 10″ & 20″, parce que, diſoit-il, ſi elle étoit ſeulement de 10″, pour lors Vénus ſeroit plus grande que la terre, ce qui n'eſt pas probable, la terre ayant la lune qui tourne autour d'elle, & ce ſatellite étant la marque d'une prééminence & d'une grandeur au-deſſus de Vénus. Si la parallaxe du ſoleil alloit à 20 ſecondes, alors mercure ſeroit plus petit que la lune, cependant il n'y a pas d'apparence qu'une planète principale ou du premier ordre, ſoit moindre qu'une planète du ſecond ordre ; toutes ces raiſons étoient bien peu concluantes.

La parallaxe de Mars en oppoſition n'avoit pas paru ſenſible avec les plus grands inſtrumens de Tycho-Brahé, cela perſuadoit à M. Halley qu'elle n'étoit pas d'une minute, d'où il s'enſuivoit que celle du ſoleil ne paſſoit pas 25″, & il conclut par dire qu'après avoir bien examiné toutes les circonſtances, il eſt très-perſuadé que la parallaxe du ſoleil eſt environ de 25″. Il ſuivoit à peu-près en cela le P. Riccioli, qui dans ſon aſtronomie réformée, l'avoit employée de 28″ $\frac{1}{3}$ pour les moyennes diſtances du ſoleil. Telles étoient les incertitudes des aſtronomes ſur la parallaxe du ſoleil avant que les obſervations faites par les aſtronomes de l'académie des Sciences, euſſent prouvé que cette parallaxe n'alloit pas à plus de 10″.

M. Halley eſtime la parall. de 25″.

1730. M. Caſſini, dans une lettre écrite au marquis Malvaſia, en 1662, & dans un mémoire qui a pour titre : *Les élémens de l'aſtr. vérifiés*, (publié en 1684), dit qu'on avoit propoſé deux hypothèſes, qui ſur les hauteurs méridiennes du ſoleil faiſoient à peu-près le même effet dans les climats d'Europe, de ſorte qu'il n'y avoit pas de moyen aſſez certain de diſtinguer évidemment, par obſervation, quelle étoit la véritable hypothèſe. La premiere ſuppoſoit la parallaxe du ſoleil inſenſible ou au-deſſous de 12″, & dans cette hypothèſe les réfractions étoient invariables pendant toute l'année; dans l'autre on ſuppoſoit la parallaxe horizontale du ſoleil d'une minute, comme Képler, mais cette ſuppoſition obligeoit de varier la réfraction dans tout le cours de l'année, à proportion de la déclinaiſon du ſoleil. Les obſervations des phaſes de la lune & de la parallaxe de Mars dans ſes oppoſitions favoriſoient la premiere hypothèſe, que nous ſavons actuellement être la véritable; mais la diſtance du ſoleil à la terre qui en réſultoit étoit prodigieuſe. M. Caſſini s'étoit arrêté à la derniere hypothèſe dans les obſervations de l'équinoxe du printemps, qu'il publia à Bologne en 1656, après avoir tracé la méridienne de S. Pétrone, cependant il balançoit encore entre ces deux hypothèſes, en 1662, comme on le voit dans les éphémérides de Malvaſia, (*pag.* 155), & il ſouhaita, en 1671, que cette incertitude fût levée par le voyage de Cayenne : ce fut un des objets de l'inſtruction, dont on chargea M. Richer.

1731. Les premieres tentatives qui furent faites en France pour trouver la parallaxe de Mars, ſont dans un ouvrage de M. Caſſini, qui fait partie du *Recueil d'obſervations* publié à Paris en 1693. Il compare les obſervations que M. Richer avoit faites à Cayenne, le premier Octobre 1672, avec celles que M. Picard & M. Romer faiſoient en même temps à Paris; mais il trouve la même différence en déclinaiſon de Mars à l'étoile ψ du Verſeau, ſoit par l'obſervation de Paris, ſoit par celle de Cayenne, enſorte que la parallaxe de

Mars lui paroiſſoit nulle pour ce jour-là, ſans qu'il pût en ſavoir préciſément la raiſon. Nous ne voyons pas, dit M. Caſſini, qu'il puiſſe y avoir d'erreur ſenſible dans l'obſervation de Paris, & il ne peut y avoir erreur que de 15″ au plus ſur la hauteur de Mars obſervée en Cayenne; or la parallaxe de Mars, dans ce cas-là, étoit tout au plus de 25″; celle du ſoleil ne pouvoit donc être de plus de 9″, ſuivant ces obſervations.

Quelques années après, c'eſt-à-dire, en 1684, M. Caſſini donna un mémoire qui a pour titre: *Les élémens de l'aſtronomie vérifiés par le rapport des tables aux obſervations de M. Richer, faites en l'Iſle de Cayenne.* Il compara entr'elles les obſervations du 5 Septembre 1672, du 9 & du 24, faites en même temps à Cayenne & à Paris, & il trouva que Mars avoit été pour Paris plus abaiſſé par rapport à l'étoile de 15″ qu'en Cayenne, ce qui donnoit la parallaxe horizontale de Mars 25″ $\frac{1}{2}$, & celle du ſoleil de 9″ $\frac{1}{2}$, ou ſa diſtance à la terre de 21600 demi-diamètres de la terre. M. Caſſini juge la parall. de 9″ $\frac{1}{2}$.

1732. La même année M. Caſſini, aidé de MM. Romer & Sédileau, employa pour chercher la parallaxe de Mars, la méthode des aſcenſions droites (1648), qu'il publia enſuite à l'occaſion de la comète de 1680. Entre les obſervations faites quatre heures avant le paſſage au méridien, & quatre heures après, on trouvoit le plus ſouvent deux ſecondes de temps de différence entre la variation apparente & celle qui devoit avoir lieu réellement, d'où M. Caſſini tiroit la parallaxe de Mars de 24 ou 27″; la diſtance de Mars à la terre étoit à la moyenne diſtance du ſoleil à la terre, comme 1 eſt à 2 $\frac{2}{3}$, ou comme 1 eſt à 2 $\frac{3}{4}$.

Le 9 Septembre 1672, la nuit même de l'oppoſition de Mars, il étoit près de deux petites étoiles diſpoſées ſelon ſon parallèle, qui ſervirent pour les obſervations de pluſieurs jours; ces obſervations donnerent la variation journaliere de l'aſcenſion droite de Mars, entre le 8 & le 9 Septembre de 67″ $\frac{1}{2}$ de temps, entre le 9 & le 10 de 66″ $\frac{3}{4}$. Le 9, entre 8^h 36′ du ſoir & 15^h

56′, la variation apparente de l'ascension droite de Mars fut observée de $21'' \frac{1}{2}$; le changement véritable déduit des mouvemens journaliers, ne devoit être que de $19'' \frac{3}{4}$; la différence de $1'' \frac{3}{4}$ étoit l'accélération apparente, causée par l'effet de la parallaxe de Mars; Mars passoit au méridien à 12^h 8′, sa déclinaison étant de 10° 34′, il est aisé de conclure de tout cela (1648), avec M. Cassini, que la parallaxe horizontale de Mars étoit de $24'' \frac{3}{4}$.

Les mêmes recherches furent continuées jusqu'à la fin de Septembre; car comme les différences cherchées étoient extrêmement petites, il falloit un très-grand nombre d'observations, qui donnassent le plus souvent à peu-près la même chose, pour être persuadé que ces différences venoient de la parallaxe, & non de quelque défaut des observations, qui sont d'ailleurs sujettes à de semblables différences, ou même à de plus grandes: M. Cassini convient qu'il est arrivé quelquefois qu'on n'a pas trouvé de différence entre les mouvemens horaires apparens & les véritables, & quelquefois un peu de différence contraire à l'effet de la parallaxe: on s'arrêtoit, dit-il, à ce qu'on trouvoit plus souvent, & & par des observations plus choisies.

1733. On manqua en 1672 l'observation la plus avantageuse & la plus décisive pour cette détermination: le premier Octobre Mars passa par la moyenne des trois étoiles appellées ψ dans l'eau d'Aquarius, & il la cacha par son disque à 10 heures du soir, comme on le trouve par la comparaison des observations faites le même jour; mais les nuages dérobèrent cette importante observation. On mesura cependant la même nuit plusieurs distances de Mars à cette étoile, qui servent à trouver à peu-près le temps de cette conjonction; mais en les comparant ensemble on y trouve de petites différences irrégulières dont quelques-unes ne donnent point de parallaxe; d'autres en donnent trop, & d'autres sont en sens contraire à l'effet de la parallaxe.

Cela donnoit lieu à M. Cassini de douter si l'irré-

gularité de ces différences entre les observations faites si près de la conjonction, n'étoit pas causée par quelque réfraction extraordinaire, & si Mars n'avoit point une atmosphère par laquelle les rayons de l'étoile étoient rompus diversement à diverses distances, jusqu'à un certain terme. C'étoit à la diffraction ou inflexion de la lumière que ces différences devoient se rapporter, (*Newton*, *Opt. part.* 3). Irrégularité observée.

1734. M. Picard, à Brion en Anjou, observa les mêmes différences d'ascension droite le premier Octobre 1672; il trouva la parallaxe de Mars absolument nulle en comparant son observation avec celle de Cayenne; mais en comparant ses observations entr'elles par la méthode des angles horaires (1647), il la trouva double de celle de M. Cassini; tout cela prouve combien ces observations sont délicates, & provient peut-être aussi de la cause indiquée dans l'article précédent.

1735. M. de la Hire observa aussi Mars à Paris avec assiduité depuis le 22 Septembre 1672 jusqu'au 29 Octobre suivant; pendant ce temps-là il le vit passer vers un grand nombre de petites étoiles qui sont dans l'eau d'*Aquarius*, & il trouva de si grandes variétés dans les résultats, qu'il jugea la parallaxe insensible, comme on le voit dans ses tables, *pag.* 6: « A peine avons-nous trouvé, dit-il, une parallaxe » sensible dans le soleil; ainsi l'on peut en sûreté la » négliger si on le juge à propos. Si cependant on veut » employer pour le soleil une parallaxe de 6″, on aura » la distance moyenne du soleil à la terre, de 34377 » demi-diamètres terrestres ». On peut juger par-là que si M. de la Hire n'a jamais employé la parallaxe du soleil que de 6″, c'étoit parce qu'il la croyoit absolument insensible. M. de la Hire la juge de 6″.

1736. Flamsteed qui avoit fait les mêmes observations à Derby, écrivoit le 16 Novembre 1672, qu'ayant mesuré la distance de Mars à deux étoiles, il avoit reconnu que sa parallaxe n'étoit certainement pas de 30 secondes, & que la parallaxe du soleil n'étoit

pas de plus de 10 secondes, (*Philos. transf.* n°. 89, *pag.* 5118), & quelques mois après, il étoit persuadé que la parallaxe de Mars ne passoit pas 25 secondes, & que celle du soleil étoit tout au plus de 10 secondes (*Ib. pag.* 6100).

Diverses observations qui donnent 10″.

1737. En 1704 M. Maraldi profita de la situation de Mars périgée pour observer sa parallaxe, il la trouva de 23″, d'où résultoit la parallaxe du soleil de 10 secondes. (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 74).

M. Pound & M. Bradley firent aussi en 1719 de semblables observations avec une lunette de 15 pieds : M. Halley rapporte qu'il les vit observer souvent & que dans toutes leurs observations, ils ne trouvèrent jamais la parallaxe du soleil plus grande que 12″, & jamais moindre que 9″.

1738. M. Maraldi qui observa aussi Mars en opposition la même année, trouva la parallaxe horizontale du soleil de 10 secondes, (*Mém. acad.* 1722, *pag.* 216).

1739. M. Cassini en 1736 observa pendant plusieurs jours, à Thury, Mars qui étoit en opposition & fort près de l'étoile μ des Poissons; il trouva la parallaxe du soleil entre 11″ & 15″.

1740. M. l'Abbé de la Caille ayant obtenu la permission de faire un voyage au Cap de Bonne-Espérance pour y travailler au catalogue des étoiles (728), en profita pour faire sur la parallaxe de la lune & sur celle du soleil un grand nombre d'observations. Il a comparé à ses observations celles qui avoient été faites à Greenwich, par M. Bradley; à Bologne, par M. Zanotti; à Paris, par M. Cassini de Thury & M. le Gentil; à Stockolm & à Upsal, par M. Wargentin & M. Strommer; à Hernosand, par M. Schemmark, avec des quarts de cercles de six pieds, ou des lunettes de 7 à 8 pieds garnies de micromètres; ces observations faites depuis la fin du mois d'Août jusqu'au 6 Octobre 1751, étant toutes réduites au 14 Septembre 1751, jour de l'opposition de Mars au soleil, donnent des

résultats qui sont tous compris entre 24 & 34 secondes, mais par un milieu pris entre 27 résultats M. de la Caille trouve 26″ 8 pour la parallaxe horizontale de Mars ce jour-là. La distance de Mars à la terre étoit alors à celle du soleil, comme 3841 à 10047, d'où il résulte que la parallaxe horizontale du soleil étoit alors de 10″ $\frac{1}{4}$, & que dans la moyenne distance du soleil elle seroit de 10″, 2 ou 10″ $\frac{1}{5}$.

1741. M. de la Caille a encore recherché la parallaxe de Mars par 41 observations faites à Thury par M. Cassini & M. Maraldi; à l'Hôtel de Clugny, par M. Messier; à Lyon, par le Pere Béraud Jésuite; à Toulouse, par M. d'Arquier & M. Garipuy; à Naples, par M. Sabatelli & le P. Carcani; & à Wittemberg en Saxe, par M. Bose, le milieu entre ces 41 résultats est de 26″ $\frac{1}{5}$ pour la parallaxe de Mars; ce qui diffère à peine des autres observations.

Dans le temps où M. de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance, Vénus se trouva aussi dans sa conjonction inférieure, le 31 Octobre 1751, & elle fut observée au Cap & en Europe; il est vrai que le temps fut très-peu favorable aux observations, mais M. de la Caille en a calculé quatre qui donnent la parallaxe du soleil de 9″ 8, 10″ 4 à 10″ 5 & 11″ 4; ainsi prenant un milieu on a 10″ 38 pour la parallaxe horizontale du soleil dans sa moyenne distance par les observations de Vénus; & toutes compensations faites, M. de la Caille termine ses recherches là-dessus (*Introd. aux éphémérides de* 1765—1774, *pag.* L), en disant qu'on peut établir comme une quantité certaine à moins d'un quart de seconde près que la parallaxe horizontale du soleil dans sa distance moyenne à la terre, est de dix secondes & un quart.

1742. Tel étoit l'état actuel de nos connoissances sur la distance du soleil, quand les passages de Vénus sur le soleil sont arrivés en 1761 & 1769. Si l'on a toujours mis au nombre des époques mémorables, celles des progrès de l'esprit, tout ce qui nous procure

des connoissances nouvelles est pour nous un événement célèbre : le passage de Vénus étoit un de ces phénomenes rares & singuliers, prédit & attendu depuis plus d'un siècle, il n'avoit jamais été observé, depuis qu'on en connoissoit l'importance. C'étoit cependant de tous les phénomènes célestes, celui dont on devoit espérer la plus exacte détermination de la parallaxe du soleil, & par conséquent de toutes les distances des planètes à la terre, comme nous le dirons dans le XIe. livre. Ces passages nous ont fait connoître que la parallaxe du soleil est à peu-près de 9 secondes, car l'observation faite au Cap en 1761, a donné la parallaxe de 8″ 6 pour le jour de l'observation, suivant M. Short, (*Phil. transf.* 1763, *pag.* 340); & suivant M. Pingré, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 479). Ce qui fait presque 8″ 8 pour les moyennes distances; & par l'observation faite à la Baye d'Hudson en 1769, je trouve 9″ 2 (2149), le milieu est exactement 9″, parallaxe moyenne du soleil, & nous pourrons supposer en nombres ronds la parallaxe du soleil de 9 secondes, dans le reste de cet ouvrage.

Par les passages de Vénus 9″.

1743. L'extrême petitesse de la parallaxe du soleil fait qu'on peut dans un grand nombre d'occasions la négliger, & supposer que les rayons qui vont du soleil à tous les points de la terre sont paralleles entr'eux, de la même manière que si le soleil étoit à une distance infinie de nous; puisque des lignes qui font entre elles un angle si petit ne diffèrent pas de celles qui seroient exactement paralleles, ou qui ne feroient point d'angle, c'est la supposition que nous ferons dans les préliminaires du calcul des éclipses.

1744. La distance du soleil à la terre est plus petite au mois de Décembre qu'au mois de Juin d'une trentième partie, parce que l'excentricité de l'orbite terrestre est de 0, 0168 (1217, 1278). Ainsi la parallaxe horizontale du soleil doit être d'un tiers de seconde plus grande au mois de Janvier qu'au mois de Juillet.

La parallaxe du Soleil change d'un tiers de sec.

1745.

1745. Lorſqu'on a une table des logarithmes des diſtances du ſoleil à la terre faite ſuivant les principes de l'art. 1245, il ſuffit de diviſer la parallaxe moyenne par la diſtance actuelle du ſoleil pour avoir la parallaxe du ſoleil dans un temps donné; ſi elle eſt de 9″ au commencement d'Avril & d'Octobre, elle n'eſt que de 8 ſecondes $\frac{83}{100}$ au commencement de Juillet, & elle eſt de 9 ſecondes $\frac{17}{100}$ au commencement de Décembre.

1746. La parallaxe du ſoleil étant connue, ſa diſtance abſolue eſt aiſée à trouver (1634) : car le ſinus de 9 ſecondes eſt au rayon, comme le demi-diamètre de la terre eſt à la diſtance du ſoleil; & comme le rayon d'un cercle eſt 22918 fois plus grand que le ſinus de 9 ſecondes ; il s'enſuit que la diſtance du ſoleil eſt de 22918 fois le rayon de la terre, ou environ 32830478 lieues communes de France, de 2283 toiſes chacune. Les diſtances des autres planètes ſont aiſées à conclure de celles-ci, puiſqu'on connoît leur rapport (1224), & nous avons déjà rapporté ces diſtances, (1222). Diſtances abſolues des Planètes.

1747. J'ai annoncé (1093) que même ſuivant Tycho, le ſoleil étoit plus gros que la terre, cela ſuit évidemment de la quantité qu'il ſuppoſoit pour la parallaxe du ſoleil, qui étoit de 3′ (1726); le demi-diamètre du ſoleil étant ſuppoſé de 15′ vu de la terre; & celui de la terre de 3′ vu du ſoleil, il s'enſuit que le ſoleil eſt cinq fois plus large que la terre, ou 125 fois plus gros & plus peſant, même dans les principes de Tycho; enſorte qu'il faiſoit tourner autour de la terre un corps bien plus gros qu'elle, (1093).

1748. On peut actuellement comparer entre elles les diſtances du ſoleil & de la lune, & reconnoître que la diſtance moyenne de la lune eſt 384 fois plus petite que celle du ſoleil, à peu-près comme nous l'avons ſuppoſé (1409); les parallaxes ſeules ſuffiſent pour reconnoître ce rapport; celle de la lune eſt de 57′ 39″:

(1712); ainſi elle contient 384 fois la parallaxe du ſoleil ſuppoſée de 9 ſecondes, & 380 fois ſi l'on employe la parallaxe de la lune dans les moyennes diſtances qui eſt 57′ 3″. Donc la diſtance du ſoleil eſt dans le même rapport, c'eſt-à-dire, 380 fois plus grande que la diſtance moyenne de la lune.

1749. Les principes que nous venons d'établir ſur les parallaxes, nous conduiront maintenant aux calculs des éclipſes de lune & de ſoleil, qui feront l'objet du livre ſuivant, & qui n'ont preſque aucune difficulté, quand on entend bien le calcul des parallaxes.

LIVRE DIXIEME.

DU CALCUL DES ÉCLIPSES.

1750. LES ÉCLIPSES (a) ont toujours formé pour les hommes un ſpectacle frappant ; la manière de les prédire leur paroît être l'objet le plus important des recherches de l'aſtronomie ; c'eſt du moins la preuve ſur laquelle on juge ſouvent des progrès de cette ſcience & de l'exactitude des aſtronomes.

Il eſt vrai que les éclipſes ne ſont importantes pour nous que parce qu'elles ſont un moyen de déterminer les inégalités de la lune, & les longitudes des différens lieux de la terre ; mais cet objet eſt aſſez conſidérable pour mériter des détails ; ajoutons à cela l'intérêt que le Public y prend, l'uſage où ſont les aſtronomes de les calculer toutes avec le plus de ſoin qu'il eſt poſſible, & l'emploi que les Hiſtoriens en ont fait ; tout cela exige qu'on apprenne dans un livre d'aſtronomie toutes les méthodes les plus exactes & les plus sûres de calculer les éclipſes, avec toutes les choſes remarquables qui peuvent y avoir rapport.

1751. Le premier calcul préliminaire dans une éclipſe eſt celui de la conjonction moyenne : lorſqu'on ignore le temps où il y aura des éclipſes & qu'on veut s'en inſtruire, on eſt obligé de calculer toutes les conjonctions & toutes les oppoſitions qui arriveront dans l'année, & de choiſir celles qui peuvent être écliptiques ; c'eſt-à-dire, où la lune ſera aſſez près de l'écliptique, & à une latitude aſſez petite pour qu'il puiſſe y avoir éclipſe. On a calculé diverſes tables propres à trouver aiſément chaque conjonction moyenne : nous

Conjonctions moyennes.

(a) Ἐκλείπω, *deſicio*, parce que dans les éclipſes le ſoleil ou la lune paroiſſent nous manquer.

avons vu que le Saros de M. Halley, ou la période Caldéenne de Pline ramene ordinairement les éclipses dans le même ordre au bout de 18 ans (1501); ainsi cette période fournit déjà un moyen pour prévoir à peu-près les jours où il peut y avoir une éclipse de lune ou de soleil, quand on connoît celles qui ont eu lieu 18 ans auparavant; mais l'usage de cette méthode est borné (1502).

Epactes astronomiq.

1752. On peut aussi reconnoître les syzygies écliptiques par la méthode des épactes, & c'est la voie la plus naturelle & la plus générale. On en trouve la table dans le P. Riccioli, (*Astron. reform. pag.* 60); dans M. de la Hire, dans M. Cassini, (*Tables astron. pag.* 58), dans les éphémérides du P. Hell, pour 1764, & dans nos tables de la lune. Les épactes astronomiques dont nous nous servons pour trouver les nouvelles lunes moyennes, ne sont autre chose que l'âge de la lune au commencement de l'année, ou le nombre de jours qui restoit depuis la dernière conjonction moyenne de l'année précédente jusqu'au commencement de l'année actuelle, si elle est bissextile, ou à la veille si c'est une année commune (1326); par exemple, il y a eu conjonction moyenne le 26 Décembre 1761, à 1^h $14'$ $14''$, la longitude moyenne du soleil étant égale à la longitude moyenne de la lune; depuis ce moment-là jusqu'au 31 de Décembre à midi, pour lequel sont calculées les époques des années communes, il y a quatre jours 22^h $45'$ $46''$; c'est-là ce qu'on appelle épacte astronomique de 1762. Cette épacte étant retranchée de 29 jours 12^h $44'$ $3''$, nous apprend que la première conjonction moyenne de 1762 arrivera le 24 Janvier à 13^h $58'$ $17''$ de temps moyen, puisque 4 jours 22^h qui restent de l'année précédente avec 24 jours 13^h du mois de Janvier, font l'intervalle de 29 jours 12^h qu'il doit y avoir d'une conjonction à l'autre.

1753. Pour calculer l'épacte d'une année, il suffit de retrancher la longitude moyenne du soleil de celle de la lune, & de convertir le reste en temps lunaire,

à raison de 12° 11′ 27″ par jour, qui est la différence des mouvemens diurnes du soleil & de la lune. Ainsi l'époque du soleil pour 1762 est 9 signes 10° 6′ 14″; & celle de la lune 11 signes 10° 25′ 45″, suivant les premières tables de Mayer; celle du soleil étant retranchée de cette dernière, il reste 2 signes 0° 19′ 31″ qui répondent à quatre jours 22ʰ 45′ 46″ de temps, ces 4 jours font l'épacte de 1762, parce qu'il a fallu 4 jours à la lune pour s'éloigner du soleil de deux jours, & qu'au moment de l'époque de 1762, il y avoit quatre jours que la conjonction étoit passée; il est aisé de trouver le temps qui répond à une différence quelconque de longitude, dès que l'on sait que pour 360° il faut 29 jours 12ʰ 44′ 3″ (1422).

1754. On trouvera parmi nos tables de la lune celle des épactes, qui avoit été calculée par M. L'émery, sur la première édition des tables de Mayer; après les épactes des années qui restent de ce siècle-ci, on y trouve celles d'un nombre quelconque d'années, jusqu'à 2000; vis-à-vis des années & des centaines d'années, il y a des nombres qu'on peut appeller le *changement des épactes*, & qui s'ajoutent à l'épacte d'une année pour avoir celle d'une autre année; ainsi vis-à-vis d'une année on trouve 10 jours 15 heures qui est l'âge de la lune à la fin de l'année, quand la conjonction est arrivée au commencement; de même vis-à-vis de 60 on trouve 3 jours 7ʰ 16′ 9″, c'est le temps qui répond à la différence entre le mouvement du soleil en 60 ans, c'est-à-dire, entre 27′ 33″, & celui de la lune 40° 43′ 24″; cette différence 40° 15′ 51″ répond à 3 jours 7 heures, c'est la quantité dont la lune est plus éloignée de sa conjonction à la fin de 60 ans qu'elle ne l'étoit auparavant; ensorte que l'on ajoute ces 3 jours 7 heures à l'épacte de l'époque proposée pour avoir l'épacte à la fin des 60 ans. Il en est de même des changemens de chaque mois.

L'épacte du mois de Janvier est zéro, car puisque l'épacte de l'année marque l'âge de la lune le 31 Dé- Epactes de mois.

cembre, & que nous appellons zéro le 31 Décembre, il n'y a rien a y ajouter pour le mois de Janvier. L'épacte de Février sera l'âge de la lune au commencement de Février, en supposant que la lune ait commencé le 31 Décembre, c'est donc l'excès de 31 jours sur une lunaison entière, ou un jour $11^h\ 15'\ 58''$. Pour comprendre la raison de cette épacte du mois de Février, on considérera que si l'épacte de l'année étoit nulle ou $0^j\ 0^h\ 0'$ la conjonction seroit arrivée le 31 Décembre précédent à midi, (art. 1756); & celle du mois de Janvier qui arrive 29 jours 13 heures plus tard tomberoit au 29 Janvier à 13^h, il resteroit du mois de Janvier un jour & 11^h, & c'est l'épacte du mois suivant. Cette épacte ôtée de $29^j\ 13^h$ fait voir que la conjonction suivante arrivera le 28 Février à deux heures; il s'en faut deux heures qu'il ne reste quelque chose de ce mois-là; ainsi l'épacte du mois de Mars seroit *moins* deux heures; ou ce qui revient au même 29 jours 11 heures.

L'épacte de Mars est l'âge de la lune, le premier de Mars, en supposant que la lune ait commencé le 9 de Décembre; c'est donc l'excès de 59 jours que contiennent les deux premiers mois sur la durée d'une lunaison, ou $29^j\ 11^h\ 15'\ 58''$. On trouvera de même les changemens des autres mois, tels qu'ils sont dans la table.

1755. Delà suit aisément la règle générale pour trouver une nouvelle lune, par la table des épactes. Ajoutez ensemble l'épacte des années & celle du mois, retranchez la somme d'une révolution ou de plusieurs, ensorte que le reste soit moindre que 29^j, & ce reste marquera le jour, l'heure & la minute de la conjonction moyenne pour ce mois-là. Si l'année est bissextile, il faut, dans les deux premiers mois, retrancher un jour de la somme des épactes avant de faire la soustraction; parce que les époques des années bissextilles étant pour le premier Janvier à midi, sont trop avancées d'un jour, jusqu'à ce que le jour intercalaire, placé vers la fin de

Règle pour trouver une conjonction.

Février, ait rétabli les choses dans leur ordre naturel.

On demande la conjonction moyenne du mois d'Avril 1764; en supposant qu'on n'ait pas une table aussi détaillée que la nôtre, on ajoutera ensemble les nombres suivans, tirés de la table des épactes astronomiques.

Epacte de l'année 1700.	9^j	21^h	$50'$	$53''$
Changement pour 60 ans.	3	7	16	9
Pour 4 ans.	14	0	1	38
Pour le mois d'Avril.	1	9	47	51
Somme à ôter	28	14	56	31
Révolution entière	29	12	44	3
Conjonction moyenne	0	21	47	32

C'est-à-dire, le 31 Mars à 21 heures.

1756. Lorsque le jour de la conjonction moyenne se trouve zéro, comme dans l'exemple précédent, il faut prendre le dernier jour du mois précédent; ainsi la conjonction que nous venons de trouver, est celle du 31 Mars à 21^h $47'$ $32''$, quoique nous ayons employé l'épacte du mois d'Avril; on sent assez qu'il faudroit avoir un jour dans la somme des épactes, pour pouvoir dire que c'est le premier d'Avril; tant qu'il n'y a que zéro de jours pour le mois d'Avril, on ne peut pas dire que nous soyons en Avril, car on compte 1 aussi-tôt que le mois commence.

1757. Pour trouver les pleines lunes ou oppositions moyennes, il faut considérer qu'elles arrivent plus tard que les conjonctions moyennes, d'une demi-révolution ou de 14^j 18^h $22'$ $1''\frac{1}{2}$, ainsi il suffira d'ajouter ces 14 jours au temps d'une conjonction moyenne, pour trouver l'opposition qui la suit, ou d'en ôter 14 jours pour avoir l'opposition qui précède: on peut aussi trouver le temps d'une opposition, en retranchant de 14^j 18^h $22'$ $1''$, la somme des épactes; car si l'épacte, où ce qui reste du mois précédent, à compter de la nouvelle lune, est de 5 jours, il est évident que la pleine lune arrivera

Pour les pleines lunes.

le 9 du mois suivant, puisqu'il doit y avoir 14 jours d'intervalle; il suffit donc d'ôter de 14 jours, les 5 jours d'épactes, & le reste 9 annonce que la pleine lune arrivera le 9e jour du mois.

Si la somme des épactes est trop grande pour pouvoir être ôtée de 14j, on ajoutera à 14j une ou plusieurs révolutions; ainsi pour trouver la pleine lune du mois d'Avril 1764, on ajoutera la

demi-révolution, ...	14j	18h	22′	1″
Avec une révolution entière. . . .	29	12	44	3
Somme.	44	7	6	4
Otez la somme des épactes Avr. 1764.	28	14	56	31
Pleine lune du mois d'Avril.	15	16	9	33

1758. M. Halley avoit donné une suite d'éclipses, depuis 1701 jusqu'à 1718, pour servir à trouver les autres éclipses par la période de 18 ans (1502); mais les éditeurs y ajoutèrent une table des conjonctions moyennes que M. Pound avoit construite, & que l'on peut voir dans le premier volume des tables de Halley, (à Paris chez Bailly, *in*-8°. 1754), elle revient à peu-près au même que celle des épactes; mais on y a joint des tables d'équations pour trouver à peu-près les conjonctions vraies. Il y en a de semblables dans le *Calendarium*, imprimé à Berlin pour 1749.

Trouver s'il y aura éclipse.

1759. Quoiqu'on ne connoisse encore que le temps moyen d'une conjonction moyenne, ou d'une opposition moyenne, par la méthode des épactes on peut savoir, à peu-près, s'il y aura éclipse de soleil ou de lune; on prendra dans les tables la longitude moyenne du soleil & celle du nœud de la lune pour le temps moyen trouvé; on retranchera le lieu d'un des nœuds, de la longitude moyenne du soleil, & l'on aura la distance moyenne du soleil au nœud de la lune.

Lorsque le soleil est éloigné de plus de 21° d'un des nœuds de la lune, il ne sauroit y avoir éclipse de soleil, en aucun lieu de la terre; si cette distance est moindre

moindre que 15°, il eſt ſûr qu'il y aura éclipſe de ſoleil en quelque lieu de la terre; l'incertitude roule entre 15 & 21°, c'eſt-à-dire, que ſi la diſtance moyenne du ſoleil au nœud le plus voiſin, dans le temps de la conjonction moyenne, eſt entre 15 & 21°; il faudra faire un calcul plus exact que celui dont je viens de parler, pour être ſûr qu'il y aura éclipſe. (M. Caſſini, *Tables aſtr. pag.* 25).

Il ne peut y avoir éclipſe de lune, ſi dans le temps de la conjonction moyenne il y a plus de 14° $\frac{1}{2}$ de diſtance moyenne entre le ſoleil & le nœud de la lune; mais on eſt ſûr qu'il y en aura une, ſi cette diſtance eſt moindre que 7° $\frac{1}{2}$; entre 14° $\frac{1}{2}$ & 7° $\frac{1}{2}$, l'on ſera obligé de recourir à un autre calcul, mais il eſt toujours très-commode d'avoir promptement l'excluſion de preſque toutes les ſyzygies qui ne ſauroient être écliptiques, & de n'avoir à en calculer rigoureuſement qu'un très-petit nombre, pour connoître toutes les éclipſes qui doivent arriver dans une année quelconque.

1760. Il y a des années dans leſquelles il n'arrive aucune éclipſe de lune, telle eſt l'année 1767; le nœud de la lune s'étant trouvé à 10ˢ 11° au commencement de Janvier; mais communément il y en a pluſieurs à chaque année.

1761. Lorſqu'on a trouvé qu'il doit y avoir éclipſe dans une nouvelle ou pleine lune, & qu'on veut en calculer les circonſtances, il faut commencer par trouver l'heure & la minute en temps vrai de la conjonction ou de l'oppoſition vraie en longitude; la latitude de la lune pour ce moment; le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, la parallaxe & le diamètre; c'eſt un préliminaire eſſentiel dans le calcul de toutes les éclipſes. Calculs néceſſaires pour toutes les éclipſes.

Pour cela, on calcule d'abord le lieu du ſoleil & celui de la lune, comme nous le dirons en parlant de l'uſage des tables, pour deux inſtans différens; & l'on a par ce moyen le mouvement horaire de la lune & celui du ſoleil, avec la différence de leur longitude

pour un instant connu ; on peut aussi se servir des tables du mouvement horaire qui sont à la suite des tables de la lune.

Temps de la conjonction.

Je suppose qu'on ait trouvé pour le premier Avril 1764 à 8 heures 32′ du matin que le lieu de la lune étoit moins avancé que celui du soleil de 54′, & que le mouvement horaire de la lune, moins celui du soleil, étoit de 27′; il est évident que puisque la lune se rapproche du soleil de 27′ par heure, elle atteindra le soleil deux heures après; car 27′ sont à une heure comme 54′ sont à deux heures. Ainsi la conjonction vraie, arrivera à 10^h 32′.

Lorsqu'on connoît le temps de la conjonction on trouve dans les tables pour le même instant, la latitude de la lune, sa parallaxe, son diamètre & le diamètre du soleil; il faut aussi connoître le mouvement horaire de la lune en latitude, & pour cet effet on calcule la latitude de la lune pour deux instans différens.

1762. Quand on a l'heure de la conjonction & le mouvement horaire de la lune, il faut trouver l'inclinaison de son orbite par rapport à l'écliptique; d'abord l'inclinaison de l'orbite vraie, ensuite celle de l'orbite relative; cela est nécessaire pour les éclipses de lune, & même pour les éclipses de soleil quand on veut en avoir les phases pour différens pays de la terre (1806); voilà pourquoi je place cet article au nombre des préliminaires généraux du calcul des éclipses.

Orbite relative.

1763. Lorsqu'on calcule une conjonction de deux planètes, ou d'une planète à une étoile, c'est-à-dire, un appulse, ou même une éclipse, on n'a besoin que de connoître la quantité dont un des astres se rapproche de l'autre, ou le mouvement relatif; par exemple, dans une éclipse de soleil on demande avec quelle vîtesse & dans quelle direction la lune s'approche du soleil. Il suffit pour cet effet de chercher combien la longitude d'une planète surpasse celle de l'autre dans l'espace d'une heure, & combien une latitude excède l'autre dans le même espace de temps : ce n'est pas le

mouvement réel, total & absolu, de chacune des deux planètes, mais l'excès d'un des mouvemens sur l'autre qui produit une conjonction ou une éclipse.

On peut donc ne faire aucune attention au mouvement d'une des deux planètes, pourvu qu'on donne à l'autre la différence des deux mouvemens, c'est-à-dire, qu'en faisant mouvoir seulement l'une des deux on lui fasse changer de longitude & de latitude par rapport à l'autre, autant qu'elle en change réellement par la combinaison des deux mouvemens pris ensemble; on aura par ce moyen la conjonction apparente des deux astres, tout de même que si l'on considéroit les deux mouvemens à la fois.

Ainsi pour calculer une conjonction de deux planètes, on ne considère que le mouvement relatif, c'est-à-dire, le mouvement de l'une par rapport à l'autre, & on suppose fixe l'une des deux; cette supposition ne fait que simplifier le calcul & ne change rien à l'état réel des choses; car si une planète avance par heure de 36 minutes, & l'autre de 2 minutes, il est évident qu'elles ne changeront que de 34 minutes l'une par rapport à l'autre, & elles seront à la même distance que si l'une étant fixe, l'autre n'avoit eu que 34′ de mouvement.

Soit P & A (*fig.* 97) les deux planètes en conjonction, $PR = AB$ le mouvement horaire d'une des deux planètes en longitude, c'est-à-dire, parallèlement à l'écliptique, AC le mouvement horaire de l'autre planète; la différence BC des deux mouvemens est le mouvement horaire relatif, puisque la première planète ayant avancé de la quantité PR égale AB, & la seconde planète de la quantité AC, elles ne diffèrent l'une de l'autre que de la quantité BC en longitude, c'est-à-dire, autant que si l'une étoit restée en P, & que l'autre eût parcouru seulement un arc AG égal à BC, en partant du point A. *Fig.* 97.

1764. Il en est de même du mouvement en latitude; supposons que la planète qui a eu le mouvement

Fig. 97. *PR* en longitude ait eu le mouvement *RD* en latitude, en sorte que son vrai mouvement soit *PD*; supposons que l'autre planète ait eu de même un mouvement en latitude *CE*, en même temps que le mouvement en longitude *AC*; c'est-à-dire, que son mouvement propre ait été réellement *AE*, la différence des deux mouvemens horaires en latitude *RD* & *CE*, ou la quantité *FE* sera le mouvement horaire relatif en latitude, ou la quantité dont une planète s'éloignera de l'autre en latitude; on pourra donc supposer fixe la planète *P*, prendre *AG* & *GH* à la place de *BC* & *FE*, & supposer que la planète *A* a parcouru l'orbite relative *AH*.

Fig. 98. On pourra faire aussi un triangle *MNO* (*fig.* 98), dont les côtés *MN* & *NO* soient égaux aux mouvemens horaires relatifs *BC* & *FE* ou *AG* & *GH* en longitude & en latitude, l'angle *OMN* sera l'inclinaison de l'orbite relative, & *MO* le mouvement horaire sur cette orbite relative; on pourra supposer qu'une planète étant restée fixe en *M*, l'autre a decrit *MO*: par le moyen de cette supposition on voit que les deux planètes différeront, soit en longitude, soit en latitude autant que lorsqu'on laissoit à chacune son mouvement particulier; tout se passera donc entr'elles, & toutes les apparences seront les mêmes qu'auparavant; la supposition de l'orbite relative *MO* ne fera que simplifier le calcul, en réduisant deux mouvemens à un seul.

1765. L'orbite relative est donc celle que l'on peut supposer à la place de l'orbite réelle, & dans laquelle pourroit se mouvoir une des deux planètes sans que ses distances réelles par rapport à l'autre parussent être changées. Dans le triangle *MNO* on a ces proportions: *MN* est à *NO*, comme le rayon est à la tangente de l'angle *OMN*, & le cosinus de l'angle *OMN* est au rayon, comme *MN* est à *MO*; ainsi pour trouver l'inclinaison de l'orbite relative & le mouvement horaire relatif, on fera ces deux proportions: *La différence des deux mouvemens horaires en longitude, est à la*

Inclinaison de l'orbite relative.

différence des mouvemens en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison relative. Ensuite, *le cosinus de l'inclinaison relative est au rayon comme la différence des mouvemens horaires en longitude est au mouvement horaire* MO *sur l'orbite relative.* C'est celui dont nous ferons usage (1777, 1807), & nous en donnerons un exemple à l'art. 1778 (a). Mouvement relatif.

1766. On suppose dans ces deux proportions que les planètes vont du même sens tant en longitude qu'en latitude; mais si l'une étoit directe & l'autre rétrograde, c'est-à-dire, si l'une des longitudes étoit croissante & l'autre décroissante, il faudroit prendre la *somme* des mouvemens horaires en longitude, au lieu de leur différence. De même si l'une des latitudes étoit croissante & l'autre décroissante, du même côté de l'écliptique, c'est-à-dire, si l'une alloit au nord & l'autre au midi par le mouvement horaire en latitude, il faudroit prendre la *somme* des mouvemens en latitude au lieu de leur différence; tout cela peut avoir lieu quand on calcule les éclipses des planètes par la lune (1995).

Dans les éclipses de lune ce n'est pas le soleil; mais le point opposé au soleil que l'on considère comme l'une des deux planètes; ce point opposé au soleil, qui est le centre de l'ombre de la terre, a le même mouvement horaire en longitude que le soleil lui-même, & par conséquent doit se traiter comme le soleil. Le soleil n'ayant aucun mouvement horaire en latitude, c'est celui de la lune que l'on emploie dans les deux proportions de l'article 1765.

1767. Dans le calcul des éclipses de lune on peut se contenter d'ajouter 8 secondes à la différence des mouvemens horaires en longitude, pour avoir le mouvement relatif ou composé, de la lune au soleil, & éviter la seconde analogie, parce que dans un triangle dont un angle est de $5^{\circ}\frac{1}{4}$, & l'hypothénuse d'un demi-degré, le grand côté a environ $8''$ de moins que l'hypothénuse.

(a) Il faut bien distinguer l'orbite relative de l'orbite apparente (1879).

Différence des inclinaisons.

1768. On trouve dans les tables de M. Cassini, (*pag.* 57), une réduction qui est toujours entre 22 & 28 minutes ; que l'on ajoute avec 5° 15′ qui est à peu-près l'inclinaison vraie de l'orbite de la lune dans toutes les éclipses, pour avoir l'inclinaison relative ou celle de l'orbite composée ; cet angle est la différence entre *EAC* & *HAG* (*fig.* 97).

1769. Dans les éclipses de soleil ou d'étoiles que l'on ne veut calculer que par une opération graphique (1850), on n'a besoin de savoir qu'à 5 minutes près, l'inclinaison de l'orbite lunaire, on peut alors supposer toujours que l'inclinaison est de 5° 40′ ; pour les éclipses de soleil, & 5° 9′ pour les éclipses d'étoiles ; mais si l'on veut calculer l'éclipse rigoureusement (1868), ou s'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune (1860), il faut chercher le mouvement horaire de la lune en longitude & en latitude, & faire la proportion de l'article 1765.

DES ÉCLIPSES DE LUNE.

1770. L'ÉCLIPSE DE LUNE est l'obscurité produite sur le disque de la lune, par l'ombre de la terre. L'éclipse totale est celle où la lune entière est obscurcie ; l'éclipse partiale est celle où une partie du disque de la lune conserve sa lumière. L'éclipse *centrale* est celle qui a lieu quand l'opposition arrive dans le point même du nœud ; la lune traverse alors par le centre même le cône d'ombre, c'est pourquoi l'on appelle centrale cette sorte d'éclipse.

Eclipse centrale.

Si la lune au moment de son opposition vraie est assez loin de ses nœuds pour que sa latitude surpasse 30 minutes, l'éclipse de lune ne sauroit être totale, & si la latitude est plus grande que 64 minutes, il ne sauroit y avoir éclipse, parce que l'ombre de la terre n'occupe jamais dans l'orbite de la lune plus de 47 minutes, & le demi-diamètre 17′ : ainsi pour que le bord de la lune puisse toucher l'ombre de la terre, il faut

Limites écliptiques.

que la distance de leurs centres ou la latitude de la lune ne surpasse pas 64′.

1771. Nous mesurons les mouvemens de la lune par les arcs célestes qu'elle paroît décrire; il est donc nécessaire de mesurer de la même manière l'ombre qu'elle traverse dans les éclipses, c'est-à-dire, la largeur de ce cône ténébreux que la terre répand derrière elle, en interceptant la lumière du soleil, comme font tous les corps opaques.

Soit *S* le centre du soleil (*fig.* 99), *T* le centre de la terre, *L* celui de la lune en opposition, *SA* le demi-diamètre du soleil, *TB* le demi-diamètre de la terre, *LC* le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans l'endroit où la lune doit la traverser; cette ligne *LC* est le rayon du cercle qui forme la section, perpendiculaire à l'axe, du cône de l'ombre dans la région de la lune. *Fig.* 99.

L'angle *CTL* formé au centre de la terre & qui a pour base le côté *CL*, est ce qu'on appellera le demi-diamètre de l'ombre; c'est l'angle sous lequel nous paroît le mouvement de la lune, ou l'arc de son orbite qu'elle décrit pendant la demi-durée de l'éclipse centrale, c'est-à-dire, en traversant l'ombre de *C* en *L*. Demi-diamètre de l'ombre.

1772. Le triangle rectiligne *CAT* dont le côté *AT* est prolongé jusqu'en *D* a son angle externe *CTD*, égal aux deux angles internes opposés pris ensemble, c'est-à-dire, aux angles *BAT* & *BCT*, dont l'un est la parallaxe du soleil, l'autre celle de la lune (1625); ainsi l'angle *CTD* est égal à la somme des parallaxes; si l'on en ôte l'angle *LTD* il restera l'angle *CTL* ou le demi-diamètre de l'ombre; mais l'angle *LTD* est égal à l'angle opposé *ATS*, qui mesure le demi-diamètre apparent du soleil, donc si l'on ôte *de la somme des parallaxes le demi-diamètre apparent du soleil, le reste sera le demi-diamètre de l'ombre.* La figure 100 représente la section du cône ou le cercle d'ombre, dont le rayon est *LC* dans la figure 99. Règle pour le connoître.

Exemple. La parallaxe horizontale de la lune au moment de l'opposition du 17 Mars 1764, étoit de 60′ 56″, la parallaxe horizontale du soleil est constamment de 9 secondes (1742), la somme des parallaxes est donc 61′ 5″; si l'on en ôte le demi-diamètre du soleil 16′ 5″, on aura pour le demi-diamètre de l'ombre 45′ 0″. Il y faudra encore ajouter environ 45″ pour l'atmosphère de la terre (1776).

1773. Le demi-diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente, peut varier depuis 37′ 46″ jusqu'à 46′ 19″; il est le plus grand quand la lune est périgée & le soleil apogée.

Augmentation à cause de l'atmosphère.

1774. On connoît assez le diamètre de la terre & la parallaxe de la lune pour être sûr de la détermination du diamètre de l'ombre trouvé par la règle précédente. Cependant quand on observe les éclipses on trouve constamment que l'ombre est un peu plus grande que suivant cette règle; & il est évident que l'atmosphère de la terre en est la cause.

La densité de l'air est assez grande & réfléchit assez de rayons pour former des crépuscules (2260), pour causer la réfraction astronomique (2160), & pour affoiblir prodigieusement la lumière du soleil à l'horizon (2259): ainsi il n'est pas étonnant qu'elle le soit assez pour intercepter une partie des rayons qui éclairent la lune, pour former une augmentation autour de l'ombre de la terre, & pour changer la longueur & l'intensité du cône d'ombre. C'est une des causes qui font que l'ombre est mal terminée & qu'on trouve souvent 2′ de différence entre les temps du commencement d'une même éclipse de lune observée par différens astronomes.

L'augmentation que l'atmosphère produit dans le demi-diamètre de l'ombre est de 20″, suivant M. Cassini; de 30″ suivant M. le Monnier, de 60″ suivant M. de la Hire.

1775. M. le Gentil pense qu'elle est de 40″ dans les parties de l'ombre qui répondent à l'équateur, & de

de 1′ 40″ pour les parties qui sont formées par la masse d'un air plus dense répandu autour des poles de la terre. (*Mém. acad.* 1755, *Exposition du calcul*, *pag.* 157, *Connoissance des mouvemens célestes* 1763).

1776. Enfin d'autres astronomes, entr'autres M. Mayer, pensent que la correction de l'atmosphère est toujours $\frac{1}{60}$ du demi-diamètre de l'ombre, c'est-à-dire, qu'il faut y ajouter autant de secondes qu'il y a de minutes. Je m'en tiens ordinairement à cette règle, elle est suffisante à cause du peu de précision dont ces observations sont susceptibles. Dans l'exemple précédent l'on a trouvé 45′ 0″, on y ajoutera 45″, & l'on aura le demi-diamètre apparent de l'ombre de la terre y compris son atmosphère 45′ 45″. Règle générale.

Trouver les Phases d'une Eclipse de Lune.

1777. Lorsqu'on connoît l'heure de la pleine lune ou de l'opposition vraie (1761), la latitude de la lune pour ce temps-là, l'inclinaison de son orbite qui dépend du mouvement horaire de la lune tant en longitude qu'en latitude (1765), & le mouvement horaire du soleil; on doit chercher le temps du milieu de l'éclipse.

Soit *O* (*fig.* 100), le point de l'écliptique opposé au soleil, ou le centre de l'ombre de la terre à la distance de la lune; *OG* le demi-diamètre de l'ombre, *ELS* l'orbite relative de la lune (1765); *L* le lieu de la lune au moment de l'opposition, *OL* la latitude de la lune, ou sa distance à l'écliptique *KG*; *OM* la perpendiculaire abaissée sur l'orbite relative *EMS*; au moment où l'éclipse commence, la lune étant en *E*, le bord de la lune touche en *P* le bord de l'ombre; ainsi *E* est le lieu de la lune au commencement de l'éclipse; de même le point *S* est le lieu de la lune à la fin de l'éclipse, ou à la sortie de l'ombre: les triangles *MOE*, *MOS* sont égaux, puisqu'ils ont un côté commun *OM*, les côtés Le temps du milieu. Fig. 100.

Fig. 100. égaux *OE* & *OS*, & qu'ils ſont rectangles l'un & l'autre en *M*; ainſi le côté *EM* eſt égal au côté *MS*; donc le point *M* indique le milieu de l'éclipſe; au lieu que le temps de l'oppoſition arrive quand la lune eſt au point *L* de ſon orbite ſur un cercle de latitude *OL* perpendiculaire à l'écliptique *KG* dans le point *O* qui eſt directement oppoſé au ſoleil.

Dans le triangle *LOM*, formé par le cercle de latitude *OL* & par la perpendiculaire *OM*, l'angle *LOM* eſt égal à l'inclinaiſon de l'orbite relative de la lune (1765); puiſque la perpendiculaire à l'orbite & la perpendiculaire à l'écliptique, font néceſſairement le même angle que l'orbite fait avec l'écliptique; avec cet angle on a auſſi le côté *LO* latitude en oppoſition; on trouvera donc *LM* en faiſant cette proportion: *Le rayon eſt au ſinus de l'inclinaiſon, comme la latitude* OL *eſt à l'intervalle* LM. On le réduira en temps à raiſon du mouvement horaire de la lune, en diſant: *Le mouvement horaire relatif* (1765) *eſt à* 1^h *ou* 3600″, *comme l'eſpace* ML *eſt au temps qu'il y aura entre la conjonction & le milieu de l'éclipſe.* On retranchera cet intervalle de temps, du moment de l'oppoſition, ſi la latitude de la lune eſt croiſſante; on l'ajoutera au temps de l'oppoſition, ſi la latitude eſt décroiſſante, ou que la lune aille en ſe rapprochant du nœud, & l'on aura le milieu de l'éclipſe.

Règle pour trouver le milieu de l'éclipſe.

1778. Exemple. Dans l'éclipſe de lune du 17 Mars 1764, on trouve par les tables que la pleine lune ou l'oppoſition vraie devoit arriver à 12^h 6′ 28″; le mouvement horaire de la lune étoit de 37′ 23″ en longitude, & 3′ 26″ en latitude, le mouvement horaire du ſoleil 2′ 29″; la différence des mouvemens horaires, 34′ 54″, eſt au mouvement en latitude 3′ 26″, comme le rayon eſt à la tangente de l'inclinaiſon relative 5° 37′ (1765): le coſinus de cette inclinaiſon 5° 37′ eſt au rayon, comme la différence des mouvemens horaires en longitude, 34′ 54″, eſt au mouvement horaire de la lune ſur ſon orbite relative 35′ 4″.

La latitude de la lune en oppoſition étoit de 38′ 42″;

le rayon est au sinus de l'inclinaison 5° 37′, comme la latitude 38′ 42″ est à l'intervalle *ML*, qu'on trouve de 3′ 47″ en parties de degrés. Le mouvement horaire relatif 35′ 4″ est à 60′ 0″, comme 3′ 47″ sont à 6′ 28″ de temps; on ajoutera cet intervalle, parce que la latitude étoit décroissante, la lune n'étant pas encore arrivée à son nœud; & comme le temps de l'opposition est 12h 6′ 12″, on aura le milieu de l'éclipse à 12h 12′ 40″, c'est-à-dire, le 18 Mars, 0h 12′ 40″ du matin. *Fig.* 100.

1779. Les mêmes quantités qui ont servi à trouver la différence *LM* entre la conjonction & le milieu de l'éclipse, serviront à trouver la plus courte distance *OM* de l'orbite lunaire au centre de l'ombre; car dans le triangle *LOM* rectangle en *M*, on connoît *LO* qui est la latitude au temps de la conjonction, & l'angle *LOM* égal à l'inclinaison de l'orbite relative de la lune, on trouvera le côté *OM* par cette proportion: *Le rayon est à la latitude* LO, *comme le sinus de l'angle* L, *ou le cosinus de l'inclinaison relative, est à la plus courte distance* OM. Trouver la plus courte distance. Règle.

Exemple. Dans l'éclipse du 17 Mars 1764, la latitude de la lune *LO* étoit de 38′ 42″, & l'inclinaison de l'orbite relative 5° 37′: or le rayon est à 38′ 42″, comme le cosinus de *MOL* 5° 37′ est à 2311″, ou 38′ 31″; c'est la perpendiculaire cherchée: elle servira ci-après pour trouver le commencement, la fin, & la grandeur de l'éclipse (1781).

1780. Lorsqu'on connoît le milieu de l'éclipse (1778), la plus courte distance des centres de l'ombre & de la lune (1779), le demi-diamètre apparent de l'ombre (1776), & le demi-diamètre de la lune, pris dans les tables, il ne reste plus qu'un triangle à résoudre pour trouver le commencement & la fin de l'éclipse. Trouver le commencement de l'éclipse.

Soit *OM* (*fig.* 100), la plus courte distance, ou la perpendiculaire abaissée du centre *O* de l'ombre, sur l'orbite relative *EMS* de la lune (1779); *GPAK* la

Fig. 108. circonférence de l'ombre, *EP* le rayon du disque lunaire; *E* le centre de la lune au moment où son bord commence à toucher le bord de l'ombre en *P*, c'est-à-dire; au moment où l'éclipse commence; *S* le centre de la lune à sa sortie de l'ombre, lorsque l'éclipse finit ou que le dernier bord de la lune touche en *R* le bord de l'ombre. La distance *OE* des centres de la lune & de l'ombre, est composée des quantités *OP* & *PE*; dont l'une *OP* est le demi-diamètre de l'ombre (1776), & l'autre le demi-diamètre de la lune (1507); de même la distance *OS*, à la fin de l'éclipse, est composée des quantités *OR* & *RS*, c'est-à-dire, qu'elle est aussi à la somme du demi-diamètre de l'ombre & de celui de la lune; ainsi *OS* est égale à *OE*, à moins qu'on ne veuille avoir égard à la petite différence qu'il peut y avoir dans le mouvement horaire & dans la parallaxe de la lune pendant l'espace de quelques heures, & à la différence qu'on pourroit supposer dans l'atmosphère (1775); mais on a coutume de les négliger.

Dans le triangle *OEM*, rectiligne rectangle en *M*; on connoît la perpendiculaire *OM* (1779), & la somme *OE* des demi-diamètres de la lune & de l'ombre; on cherchera le troisième côté *ME* : l'on convertira ce côté *ME* en temps par la proportion suivante. Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative est à 1 heure ou 3600″, comme le côté trouvé *ME* est à la demi-durée de l'éclipse en secondes de temps. Cette demi-durée étant retranchée du temps du milieu de l'éclipse (1777), on aura le commencement; & si l'on ajoute la demi-durée avec le milieu, on aura la fin de l'éclipse.

1781. Exemple. Dans l'éclipse de lune du 17 Mars 1764, la perpendiculaire *MO* étoit de 38′ 31″, le demi-diamètre *OP* de l'ombre 45′ 0″, celui de la lune 16′ 39″, la somme des demi-diamètres, en y ajoutant 1′ 40″ pour l'atmosphère (1775) sera 1° 3′ 19″; ainsi dans le triangle *EMO*, on connoît *OE* & *OM* : on

trouvera *ME* par l'opération suivante, où j'employerai la méthode la plus commode pour résoudre ce triangle *OEM*. Méthode pour résoudre le triangle. *Fig.* 100.

Somme des côtés *OE* & *OM*, 1° 41′ 50″ log. 3, 786041
Différence des côtés *OE* & *OM*, 24′ 48″ log. 3, 172603

Somme des deux logarithmes 6, 958644
Moitié de la somme, ou logarithme de *EM*, 3, 479322
Auquel répond 50′ 15″.

Le mouvement horaire de la lune sur son orbite relative étoit de 35′ 4″; ainsi l'on dira 35′ 4″ est à 1 heure, comme *EM* 50′ 15″ est à la demi-durée de l'éclipse 1 heure 25′ 59″.

Cette demi-durée de l'éclipse est le temps que la lune employoit à aller de *E* en *M*; mais le milieu de l'éclipse en *M* a été trouvé 12 heures 12′ 40″ (1778); si l'on en retranche 1 heure 25′ 59″, on aura pour le commencement de l'éclipse 10 heures 46′ 41″; & si on l'ajoute, on aura la fin de l'éclipse 13 heures 38 minutes 39 secondes.

1782. Si l'on veut avoir égard à l'inégalité de la correction de l'atmosphère proposée par M. le Gentil, (1775), on résoudra deux triangles; un pour le commencement & un pour la fin de l'éclipse, en employant deux hypothénuses différentes *OE* & *OS*, dont l'une sera quelquefois plus grande d'une minute que l'autre.

1783. L'inégalité du mouvement horaire de la lune ne mérite guère d'être ici considérée; elle ne va jamais qu'à trois ou quatre secondes, dont le mouvement horaire peut être plus ou moins grand dans la première demi-durée d'une éclipse que dans la seconde. Les tables du mouvement horaire sont dans la *Connoiss. des mouv. celest.* 1765; & l'on en trouve aussi dans les tables qui font partie de cette astronomie. Inégalité dans le mouvement horaire.

1784. Dans les éclipses de lune qui sont totales, on a encore deux autres phases à chercher, qui sont l'IMMERSION & l'EMERSION, c'est-à-dire, le moment où la lune entre totalement dans l'ombre, & celui où Immersion & émersion.

Fig. 101. elle commence à en sortir. Soit D (*fig.* 101), le lieu de la lune à l'instant où elle est assez avancée dans l'ombre, pour que son dernier bord N touche le bord intérieur de l'ombre; on a un nouveau triangle OMD, dont l'hypothénuse OD est égale à la différence entre le demi-diamètre de l'ombre ON, & le demi-diamètre DN de la lune; mais l'opération est la même que dans l'article 1781; la demi-durée de l'éclipse totale se retranche du milieu de l'éclipse, pour avoir l'immersion qui arrive en D, & elle s'ajoute pour avoir l'émersion qui arrive en V.

Trouver la grandeur de l'éclipse. *Fig.* 100.

1785. Lorsqu'on a la plus courte distance des centres OM (*fig.* 100), le demi-diamètre de l'ombre OA, & le demi-diamètre de la lune MB, il est aisé de trouver la partie éclipsée de la lune, c'est-à-dire, la quantité AC. Car AM est égale à $OA - OM$, si l'on y ajoute MC, l'on aura AC; donc AC est égale à $OA + MC - OM$, c'est-à-dire, que *la partie éclipsée est égale à la somme des demi-diamètres de la lune & de l'ombre, moins la plus courte distance.*

Règle générale.

Exemple. Dans l'éclipse du 17 Mars 1764, (1781) la somme des demi-diamètres est $63' 19''$, la plus courte distance est $38' 31''$, la différence $24' 48''$ est la partie éclipsée. On a coutume de l'exprimer en doigts ou en douzièmes parties du diamètre de la lune; on fera donc cette proportion : le diamètre apparent de la lune $33' 18''$ est à 12 doigts 0 minutes, comme $24' 48''$ sont à un quatrième terme qu'on trouvera $8^d\ 56' \frac{1}{2}$: ainsi la grandeur de l'éclipse sera de 8 doigts & $56' \frac{1}{2}$ de doigts.

Doigts éclipsés.

1786. La règle que je viens de donner pour trouver la grandeur des éclipses de lune a lieu également, soit que le centre de la lune & son orbite apparente soient hors de l'ombre, comme dans la *fig.* 102; soit qu'au contraire la lune soit toute entière dans l'ombre, comme dans la *fig.* 101; car dans la *fig.* 102 l'on a $OA + CM = AC + OM$, ou $OA + CM - OM = AC$; & dans la *fig.* 101, qui a lieu pour les éclipses totales, on a $AC = OA - OM + CM$. Dans ce dernier cas,

Fig. 101. & 102.

on dit que la grandeur de l'éclipse est de plus de douze doigts, parce qu'on y comprend la partie *AB* de l'ombre, qui surpasse le bord de la lune; c'est-à-dire, que l'on comprend sous le nom de partie éclipsée toute la quantité *AC*, qui seroit éclipsée en effet, si la lune avoit assez de diamètre pour s'étendre jusqu'en *A*. Si dans ce cas, la lune est au nord de l'écliptique, on dit que l'éclipse est du côté du nord, quoique dans une éclipse partiale ce soit la partie australe de la lune qui soit éclipsée, quand la latitude est boréale. Cela fait une espèce de disparate qu'on peut éviter en disant la lune est au nord de l'écliptique. Cette règle qui est conforme à celle de M. de la Caille, (*Leçons d'astr. art.* 1119), me paroît n'être pas observée, dans plusieurs endroits de ses éphémérides; mais peut-être que cela vient des fautes d'impression ou de calcul. On voit par-là que les éclipses de lune sont de la même grandeur, quand elles arrivent à la même distance des nœuds, puisque leur grandeur dépend sur-tout de la latitude *OL* de la lune, & celle-ci de la distance de la lune à son nœud; voilà pourquoi on détermine le mouvement des nœuds par les éclipses de même grandeur, observées dans des temps éloignés (1488). *Fig.* 101.

Toutes les quantités dont nous venons de donner le calcul dans les articles 1778, 1780, 1785, se trouvent calculées dans les tables du P. Riccioli, (*Astron. refor. pag.* 66), & de M. Cassini, (*Tab. astr. pag.* 59); ensorte qu'avec ces tables auxiliaires, on peut calculer une éclipse de lune sans aucun calcul trigonométrique. Tables auxiliaires.

1787. On peut déterminer encore sans calcul, avec la règle & le compas, toutes les circonstances d'une éclipse de lune, aussi-tôt qu'on a calculé par les tables le temps de la conjonction, la latitude, la parallaxe, & le mouvement horaire. Cette méthode est même très-suffisante, lorsqu'il ne s'agit que d'annoncer les éclipses qui doivent arriver : car on ne sauroit se tromper d'une minute dans l'opération graphique si la Trouver les mêmes phases avec le compas.

figure a seulement un pied de diamètre; & l'on ne peut être assuré d'une plus grande exactitude dans la prédiction d'une éclipse de lune; à peine peut-on être sûr de l'observation même à une minute près. Ainsi je crois qu'on peut très-bien se contenter de l'opération graphique dans toutes les éclipses de lune.

Exemple. Le demi-diamètre de l'ombre de la terre dans la région lunaire ayant été trouvé de 46′ (1776); je divise le rayon *OG* (*fig.* 100) en 46 parties; je prends *OL* égale à la latitude de la lune 38′ $\frac{2}{3}$; & au point *L*, je tire l'orbite de la lune *ELS*, inclinée de 5° 37′, ou si l'on veut de 5° 40′ (1769), sur la parallèle à l'écliptique. Le mouvement horaire relatif étant de 35′, je prends 35′ sur les divisions de *OG*, je les porte sur l'orbite de *L* en *X*; & ayant marqué en *L* le temps de la conjonction 12 heures 6′, je marque 11 heures 6′ au point *X* où tombe le mouvement horaire; je divise *XL* en 60′ de temps, & les mêmes ouvertures de compas servent à diviser l'orbite *ELMS*. Je prends une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres de l'ombre & de la lune, 1° 3′, & la portant de *O* en *S* sur l'orbite relative, je trouve sur ses divisions que le point *S* répond à 13 heures 39 minutes, comme on l'a trouvé par le calcul (1781).

Fig. 100.

Pénombre dans les éclipses.

1788. La Penombre est une obscurité moindre que celle du cone d'ombre; c'est une lumière foible, causée par une portion du disque du soleil, qui éclaire encore la lune lors même que le centre ne l'éclaire plus. Le point *E*, (*fig.* 99), qui est sur le côté *OEP* du cone d'ombre, est dans une entière obscurité, parce qu'il n'est éclairé par aucun rayon du soleil. Le point *F*, qui est sur la ligne *AGF*, menée par le bord supérieur *A* du soleil, & par le bord inférieur *G* de la terre, jouit d'une lumière parfaite, parce qu'il voit le disque entier *AO* du soleil; mais tous les points situés entre *E* & *F* ne voient qu'une partie du disque solaire, ils ne reçoivent qu'une partie de la lumière du soleil, &

Fig. 99.

& forment la pénombre ; c'est ce qui fait que le commencement d'une éclipse de lune est si douteux, que l'on s'y trompe quelquefois de plusieurs minutes.

1789. On observe dans la couleur des éclipses de lune des différences considérables : lorsque la lune est apogée, elle traverse le cône d'ombre plus près de son sommet ; elle paroît alors plus rouge, plus lumineuse que lorsque les éclipses arrivent dans le périgée ; car dans le périgée, les rayons rompus par l'atmosphère, qui se dispersent dans le cône d'ombre, & qui en diminuent l'obscurité, ne parviennent pas jusqu'au centre de l'ombre ou à l'axe du cône, qui est trop large dans ce point-là, & qui est plus près de la terre. Couleur des éclipses.

Voilà pourquoi l'on a vu des éclipses où la lune disparoissoit entièrement ; telle fut l'éclipse du 15 de Juin 1620, ou celle du 9 de Décembre 1601, dans laquelle on ne distinguoit pas le bord éclipsé, (*Képler, astron. pars opt. pag.* 297, *Epitome, pag.* 825), Hévélius en parlant de l'éclipse du 25 Avril 1642, assure qu'on ne distinguoit pas, même avec des lunettes, la place de la lune, quoique le temps fût assez beau pour voir les étoiles de la cinquième grandeur, (*Hevel. Selenographia, pag.* 117) ; mais il est fort rare que la lune disparoisse ainsi totalement dans les éclipses. La lune disparoît quelquefois.

DES ECLIPSES DE SOLEIL.

1790. Les ÉCLIPSES de soleil sont produites par l'interposition de la lune, qui dans ses conjonctions passe quelquefois directement entre nous & le soleil : elle nous le cache alors en tout ou en partie. Les éclipses TOTALES sont celles où le soleil paroît entièrement couvert par la lune, le diamètre apparent de la lune étant plus grand que celui du soleil. Les éclipses ANNULAIRES sont celles où la lune paroît toute entière sur le soleil ; alors le diamètre du soleil paroissant le plus grand, excède de tout côté celui de la lune, & forme autour d'elle un anneau ou une couronne lumi- Eclipses totales ou annulaires.

neuse : telle fut l'éclipse du premier Avril 1764, que l'on vit annulaire à Cadix, à Rennes, à Calais & à Pello en Laponie ; ainsi que je l'avois annoncé dans la connoissance des mouvemens célestes de 1764, *pag.* 205. Les éclipses *centrales* sont celles où la lune n'a aucune latitude au moment de la conjonction apparente, son centre paroît alors sur le centre même du soleil & l'éclipse est totale ou annulaire, en même temps qu'elle est centrale.

1791. Les plus anciens auteurs nous ont consigné comme des événemens remarquables les grandes éclipses de soleil, & c'est ce qui m'engage à en dire ici quelques mots. Il en est parlé dans Isaïe, chap. 13, dans Homère & Pindare, dans Pline, liv. II, chap. 12 ; dans Denis d'Halicarnasse, liv. II. Ce dernier dit qu'à la naissance de Romulus, & à sa mort, il y eut des éclipses totales de soleil dans lesquelles la terre fut dans une obscurité aussi grande qu'au milieu de la nuit. Hérodote nous apprend que dans la sixième année de la guerre entre les Lydiens & les Mèdes, il arriva pendant la bataille que le jour se changea en une nuit totale ; Thalès le Milésien l'avoit annoncé pour cette année-là. Pline, (Liv. II, chap. 2) parle aussi de la prédiction de Thalès, & M. Costard prouve que cette éclipse fut celle du 17 Mai 603, avant J. C. (*Philos. transf.* 1753, *pag.* 23). On trouve de semblables éclipses dans les années 431, 190, & 50 ans avant J. C., & dans les années après J. C. 59, 100, 237, 360, 787, 840, 878, 957, 1133, 1187, 1191, 1241, 1415, 1485, 1544, 1560, (*Képl. astron. pars opt. pag* 290, &c.). On trouvera un catalogue exact de toutes les éclipses arrivées depuis l'ere vulgaire, dans *l'art de vérifier les dates*, seconde édition, in-folio chez Desprez.

Spectacle singulier d'une éclipse.

1792. C'est en effet, une chose très-singulière que le spectacle d'une éclipse totale de soleil. Clavius, qui fut témoin de celle du 21 Août 1560 à Conimbre, nous dit que l'obscurité étoit, pour ainsi dire, plus

grande ou du moins plus sensible & plus frappante que celle de la nuit ; on ne voyoit pas où pouvoir mettre le pied, & les oiseaux retomboient vers la terre par l'effroi que leur causoit une si triste obscurité, (*Képl. astr. pars opt.* 296).

Il n'y a eu depuis très-long-temps à Paris d'autre éclipse totale, que celle du 22 Mai 1724; celle de 1706 fut de dix doigts & 58 minutes : il restoit environ $\frac{1}{11}$ du diamètre du soleil, sa lumière étoit à la vérité d'une pâleur effrayante & lugubre ; cependant tous les objets se distinguoient, aussi facilement que dans le plus beau jour, (*Hist. acad.* 1706, *pag.* 115). Cette éclipse fut totale à Montpellier, & l'on y remarqua autour de la lune une couronne d'une lumière pâle, large de la douzième partie du diamètre de la lune, dans sa partie la plus sensible ; mais qui diminuant peu à peu s'appercevoit encore à 4 degrés tout autour de la lune (*Ibid*, *pag.* 118). Eclipse totale à Paris en 1724.

1793. Dans l'éclipse de soleil du 23 Septembre 1699, il ne resta que $\frac{1}{180}$ du diamètre du soleil à Gripswald en Poméranie, l'obscurité y fut si grande, qu'on ne pouvoit lire ni écrire ; il y eut des personnes qui virent quatre étoiles, ce devoit être Mercure, Vénus, Régulus & l'Epi de la Vierge, (*Hist. acad.* 1700, *pag.* 106).

Dans l'éclipse du 22 Mai 1724, l'obscurité totale dura $2' \frac{1}{4}$ à Paris; on vit le soleil, Mercure & Vénus sur la même ligne droite : il parut peu d'étoiles à cause des nuages. La première petite partie du soleil qui se découvrit lança un éclair subit & très-vif, qui parut dissiper l'obscurité entière; le baromètre ne varia point; le thermomètre baissa un peu ; mais il seroit difficile de dire si l'éclipse en étoit cause ; l'on vit autour du soleil la couronne lumineuse dont on avoit beaucoup parlé dans l'histoire de 1706. (*Mémoires de l'acad.* 1715. *Histoire de l'académie* 1724. *Mémoires pour servir à l'histoire de l'astronomie*, par M. de l'Isle, 1738, *pag.* 205).

1794. Les éclipses de soleil sont beaucoup plus rares que les éclipses de lune, pour un lieu déterminé: la raison en est évidente; la lune étant beaucoup plus petite que la terre, ne peut couvrir qu'une très-petite partie de notre globe; souvent même la pointe du cone d'ombre n'arrive pas jusqu'à nous, comme dans les éclipses *annulaires*. Il arrive toutes les années plusieurs éclipses, quelquefois jusqu'à six, en comptant celles de lune & de soleil; mais on ne les voit pas toutes dans un même lieu; car depuis 1755 jusqu'en 1764 inclusivement, on ne trouve que quatre éclipses de soleil visibles à Paris, tandis qu'on y a dû voir onze éclipses de lune.

Nombre des éclipses.

Le Roi ayant desiré de savoir s'il y auroit à Paris des éclipses totales, dans l'espace de quelques années, j'engageai M. du Vaucel à se livrer à cette recherche, il trouva que d'ici à l'année 1900, il y auroit 59 éclipses visibles à Paris, sans qu'aucune y soit totale, & une seule annulaire qui sera celle du 9 Octobre 1847, (*Mém. présentés, &c. tom. V; pag.* 575).

1795. Le calcul des éclipses de soleil est beaucoup plus difficile & plus long que celui des éclipses de lune, à cause des parallaxes qui y entrent nécessairement; les parallaxes diffèrent pour chaque point de la terre, ensorte qu'une éclipse de soleil paroît d'une manière différente à différens pays: au contraire les éclipses de lune paroissent de la même manière, & sont parfaitement les mêmes pour tous ceux qui les voyent; car la lune perdant alors véritablement sa lumière, devient obscure pour tout le monde.

Si nous étions placés en un point de la surface de la lune lorsqu'elle est éclipsée, & que nous voulussions calculer la manière dont elle devroit paroître dans ce point déterminé de la lune, nous tomberions également dans la difficulté des parallaxes; car l'éclipse de lune ayant lieu successivement & différemment pour les différens points de la surface de la lune, il faudroit calcu-

ler la parallaxe pour le point de la lune où nous serions placés.

Au contraire si dans le temps que nous avons sur la terre une éclipse de soleil, un observateur placé dans la lune, vouloit nous regarder, & calculer cette éclipse qu'il appelleroit *éclipse de terre*, il n'y trouveroit pas plus de difficulté que nous en trouvons dans le calcul d'une éclipse de lune ; il verroit les mêmes phases en quelque point de la lune qu'il fût placé ; il appercevroit une petite tache noire & ronde s'avancer sur le disque de la terre, & le parcourir successivement : c'est ainsi qu'il faudra considérer les éclipses de soleil pour rendre la théorie plus simple, & aller pas à pas dans des détails plus compliqués.

La théorie & le calcul des éclipses de soleil étant difficiles à concevoir, j'ai cru qu'il falloit commencer par employer une méthode, pour ainsi dire, mécanique, & telle que les yeux pussent soulager l'imagination ; je vais donc expliquer une opération graphique, avec laquelle on pourra calculer une éclipse de soleil, pour la terre en général avec la même facilité que l'on a calculé une éclipse de lune (1787), & même trouver à quelques minutes près, pour chaque pays de la terre, les circonstances de l'éclipse par le moyen d'un globe terrestre, pourvu qu'on ait fait seulement les calculs préliminaires (1761).

1796. Pour faire sentir les raisons & les principes de cette opération graphique, nous allons montrer la manière dont les éclipses de soleil arrivent sur la surface de la terre, dans le cas le plus simple : en supposant un principe qu'il ne faut pas perdre de vue, savoir que le soleil est assez éloigné de nous, pour que les rayons qui partent du centre du soleil, & qui vont aux différens points de la terre, soient sensiblement paralleles (1743). Le point T, (*fig.* 104), que je suppose le centre de la terre, voit le centre du soleil par un rayon TS ; le point E qui est à la surface de la terre, voit le centre du soleil par un autre rayon EO,

Parallélisme des rayons solaires.

Fig. 104.

Planche X.

Fig. 104. qui ne fait avec le précédent qu'un angle de 9″ (1742), & qui va par conséquent le rencontrer à une distance prodigieuse, ainsi ce rayon est sensiblement parallèle au précédent : on peut donc supposer que la ligne *EAO* parallèle à *TLS*, est celle par laquelle le point *E* de la terre voit le centre du soleil.

1797. Si cependant l'on veut avoir égard à la parallaxe du soleil, & supposer que le rayon *EO* se rapproche de *ES* pour aller former au centre du soleil un angle de 9″, toute la différence consistera à diminuer l'angle *TEA* de 9″, en tirant une ligne *ER* qui fasse avec *EO* un angle *REO* de 9″, & ce sera sur la ligne *ER* que le point *E* de la terre verra le centre du soleil, puisque *ER* & *TS* vont se réunir au soleil sous un angle de 9″, qui est en effet la parallaxe du soleil. Si l'on suppose que *LA* soit une portion de l'orbite lunaire interceptée par les rayons *TS*, *ER*, cette ligne *LA* paroîtra plus petite de 9″ lorsqu'on voudra tenir compte de la parallaxe du soleil : pour le comprendre il suffit de concevoir un autre rayon *GS* qui du point *G* de la terre aboutit au centre du soleil *S*; l'intervalle que les rayons *GS* & *TS* interceptent dans l'orbite de la lune, & que nous appellerons ci-après la projection de la terre, (1804, 1836), est vu de la terre sous un angle *LGS* qui est la différence des angles *GLT* & *LSG*; c'est-à-dire, la différence des parallaxes de la lune & du soleil; mais il faut imaginer le point de concours *S* à une distance prodigieuse, pour que l'angle *S* ne soit que de 9 secondes; alors l'angle *G* est plus petit de 9 secondes que l'angle *L*, & l'angle *RET* plus petit de 9 secondes que l'angle *ELT* ou son égal *OEL*; ainsi la projection de la terre est sensiblement égale à la parallaxe de la lune.

1798. Si la lune est en *L* au moment de la conjonction, l'observateur placé en *K* sur la surface de la terre, verra une éclipse centrale de soleil (1790), puisque le centre de la lune lui paroîtra sur le rayon même *TKLS*, par lequel il voit le centre du soleil.

Soit *AL* une portion de l'orbite lunaire décrite avant la conjonction, en allant de *A* en *L*, ou d'occident vers l'orient : puisque le point *E* de la terre voit le centre du soleil sur la ligne *EAO* (1796), il s'ensuit évidemment que quand la lune sera au point *A* de son orbite, elle couvrira le soleil, & formera une éclipse centrale pour l'observateur placé en *E*, puisqu'alors le centre de la lune, aussi bien que celui du soleil paroîtront sur une même ligne *EAO*. Fig. 104.

Si la lune employe une heure à parcourir la portion *AL* de son orbite, l'éclipse aura lieu pour le point *E* de la terre, une heure avant qu'elle ait lieu pour le point *K*, ou pour le centre *T* de la terre, c'est-à-dire, une heure avant la conjonction, que je suppose arriver au point *L*. L'espace *AL* est ce que nous appellerons bientôt le *rayon de projection* (1804, 1836), parce que c'est l'espace auquel on rapporte les points *E* & *K* de la terre, comme sur un plan de projection : nous parlerons plus en détail de la nature & des circonstances de la projection (1825, 3871). Rayon de projection.

1799. Je sais que l'on a d'abord quelque peine à se figurer ainsi le soleil, répondant au même instant à divers points de la projection pour différens lieux de la terre ; mais qu'on réfléchisse à ce qui se passe dans une allée de jardin, où l'on se promene en voyant le soleil sur sa droite ; toutes les ombres des arbres sont paralleles entr'elles ; quand on est sur la première ombre, on voit le soleil répondre au premier arbre ; quand on a fait quelques pas on voit le soleil répondre à l'arbre suivant ; & s'il y a quatre personnes en même temps qui soient entre elles à la même distance que les quatre arbres sont entr'eux, elles verront répondre le soleil aux quatre arbres différens ; c'est ainsi que l'observateur qui est en *D* voit le soleil répondre au point *C* de l'orbite de la lune ou de la projection ; tandis que l'observateur qui est en *K* voit le soleil au point *L* (a), comme

(a) Au reste il n'est pas besoin d'avertir que les points *E*, *F*, *K*, de la terre ne sont point fixes ; ils tournent par le mouvement de

celui qui eſt en *F* voit le ſoleil au point *H*.

1800. Le point *E* de la terre eſt le premier point d'où l'on verra la lune ſur le ſoleil ; il aura l'éclipſe centrale quand la lune ſera en *A* (1798), le centre de la lune répondant au centre du ſoleil ; mais avant que d'être en *A*, le centre de la lune a été en un point *M*, tel qu'alors le bord *B* de la lune touchoit le bord du ſoleil, parce que le centre du ſoleil paroiſſant en *A*, le bord de ſon diſque paroiſſoit en *B* éloigné du centre *A* d'environ 16 minutes (1388) ; le centre *M* de la lune étoit alors éloigné du centre *A* du ſoleil d'une quantité égale à la ſomme des demi-diamètres *AB* & *BM*, du ſoleil & de la lune, & c'étoit le commencement de l'éclipſe pour l'obſervateur ſitué en *E*, ou le premier inſtant où il a vu le bord de la lune toucher le bord du ſoleil. La diſtance de la lune au point *L* de la conjonction, ou à la ligne des centres, étant égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune plus la quantité *AL* égale à *ET*, l'obſervateur qui au lever du ſoleil étant en *E* aura vu l'attouchement des bords de la lune & du ſoleil, verra l'éclipſe centrale d'un autre point de l'eſpace abſolu, différent du point *E* ; & ce ſera l'habitant de la terre qui ſera arrivé au bord *E* du cercle d'illumination qui verra l'éclipſe centrale lorſque la lune ſera parvenue en *A*.

Quand commence l'éclipſe,

1801. La partie *AL* de l'orbite lunaire égale au rayon *ET* de la terre paroît ſous un angle *AEL*, égal à l'angle *ELT* qui eſt la parallaxe horizontale de la lune (1624) ; la partie *ML* paroît donc égale à la ſomme du demi-diamètre *BM* de la lune, du demi-diamètre *BA* du ſoleil, & de la parallaxe horizontale de la lune qui eſt égale à *AL*. Ainſi le point *E* de la terre verra commencer l'éclipſe auſſi-tôt que la diſtance *ML* de la lune au point *L* de la conjonction ſera égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, & de

rotation de la terre ; mais dans ces préliminaires généraux, nous n'examinons pas quels pays de la terre occupent les divers points du globe, il ſuffit de conſidérer ces points en général.

de la parallaxe horizontale de la lune, dont on aura ôté 9 secondes pour plus d'exactitude (1797). De même le point *G*, le dernier & le plus oriental de la terre, verra finir entiérement l'éclipse, lorsque la lune, après avoir passé la conjonction, sera éloignée du point *L* de la même quantité, c'est-à-dire, de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, & de la parallaxe horizontale de la lune.

Si la lune est en *C*, de maniere que *AC* soit aussi égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, le point *E* de la terre verra aussi le centre *C* de la lune éloigné du centre *A* du soleil, de la somme des demi-diamètres, c'est-à-dire, qu'il verra les bords du soleil & de la lune se toucher, & l'éclipse finir; puisqu'alors le centre du soleil paroît en *A* & celui de la lune en *C*, à une distance *CA* égale à la somme des demi-diamètres. Quand finit l'éclipse.

Mais dans le temps que la lune est en *C*, & que le point *E* de la terre voit finir l'éclipse, un autre point *D* de la terre, qui voit le centre du soleil sur le rayon *DC* parallele à *TS*, voit le centre de la lune sur celui du soleil, c'est-à-dire, qu'il a une éclipse centrale; il en est de même de tous les autres points de la terre qui répondent perpendiculairement sous différens points de la ligne *ACL*.

1802. En même temps que le point *E* de la terre voit finir l'éclipse par le contact des deux bords, lorsque le centre de la lune est en *C*, & que le point *D* voit l'éclipse centrale, les points de la terre situées entre *E* & *D*, voient l'éclipse de différentes grandeurs; ainsi le point *F* de la terre, qui voit le centre du soleil sur la parallele *FH*, voit la distance apparente de la lune *C* au soleil *H* de la quantité *CH*; si nous supposons que la ligne *CH*, prise sur l'orbite lunaire *LCHAM*, soit plus petite que la somme des demi-diamètres, la lune anticipera d'autant sur le soleil; si elle est plus petite d'un doigt, le bord de la lune sera d'un doigt sur le soleil, on dira que l'éclipse est d'un doigt. Si *CH* est

ſuppoſée moindre de ſix doigts ſolaires, que la ſomme des demi-diamètres, il faut néceſſairement que cette ſomme, qui forme la diſtance des centres de la lune & du ſoleil au commencement de l'éclipſe ait été retrécie d'autant; elle n'a pu l'être, que parce que le diſque lunaire a anticipé d'autant ſur celui du ſoleil; donc dans la ſuppoſition de *CH* moindre que *CA* de ſix doigts pour le point *F*, il doit y avoir ſix doigts du diamètre du ſoleil, couverts par la lune pour l'obſervateur *F*, & par conſéquent l'on verra du point *F* le bord de la lune ſur le centre même du ſoleil. De même ſi *CH* eſt plus petite que cette ſomme, & cela de 3 doigts ſeulement, ou d'un quart du diamètre ſolaire, la lune anticipera ou mordra ſur le ſoleil de 3 doigts ſeulement, & l'éclipſe ne ſera que de la même quantité.

1803. Ainſi pour trouver le point *F* de la terre où l'éclipſe doit paroître de 3 doigts, à un inſtant donné où l'on ſuppoſe la lune en *C*, il faut, en partant du point *C* où eſt la lune, 1°, prendre *CA* égale à la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune; 2°, en partant du point *A*, prendre *AH* de 3 doigts, &c. 3°, abaiſſer une perpendiculaire *HFN* ſur la terre, (c'eſt-à-dire, ſur le plan *GE* du cercle de la terre, qui eſt perpendiculaire à la ligne des centres), & l'on aura le point *F* de la terre où l'éclipſe doit paroître de 3 doigts, la lune étant en *C*, puiſque le ſoleil paroiſſant alors en *H* & la lune en *C*, leur diſtance eſt plus petite de 3 doigts, que la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune.

Cercle de projection.

1804. J'ai ſuppoſé juſqu'ici que l'orbite *LBM* de la lune paſſoit par la ligne *SLT*, qui joint les centres du ſoleil & de la terre, & que la lune en conjonction n'avoit aucune latitude; voyons ce qui arrivera dans les cas où la lune en conjonction aura une latitude. Il faut conſidérer d'abord que tout ce que j'ai dit du point *M* (1800), doit s'entendre également de tout autre point qui ſeroit à la même diſtance du point *T* & du point *L*; ſuppoſons que la ligne *LM* (égale à la parallaxe

de la lune, plus la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune), tourne autour du point *L*, & décrive un cercle dont le plan soit perpendiculaire à *LT*, & au plan de notre figure, ensorte que tous les points de ce cercle soient à égales distances du point *T*; c'est ce cercle décrit sur *LM* que nous appellerons le *Cercle de projection* (1835), & nous allons le considérer seul dans la suite du discours, en y rapportant tout ce que nous venons de dire sur la *Figure* 104. Il est évident que les différens points du cercle placé dans la région de la lune & décrit sur *LA*, répondent aux différens points de la circonférence de la terre, de la même maniere que le point *A* répond au point *E* de la terre, & le point *L* au point *K*; chaque point de la terre a sa projection ou son image à l'extrémité de la ligne qui va tomber perpendiculairement au plan de projection, dans la région de la lune.

1805. Supposons une ligne *LB*, (*fig.* 103), de même longueur que la somme *LM* du rayon de projection & des demi-diamètres du soleil & de la lune dans la *fig.* 104, décrivons un cercle *BCGD* sur le plan de projection; décrivons aussi un autre cercle *AEFR*, dont le rayon *LA* soit égal à la parallaxe de la lune, (dont on retranchera 9″ pour plus d'exactitude (art. 1797), comme *LA* dans la figure 104, formoit le rayon de projection égal au rayon de la terre & vu sous un angle égal à la parallaxe de la lune; lorsque la lune approchera assez de la conjonction pour que son centre vienne à se trouver sur quelque point *K* de la circonférence *BCD*, l'éclipse commencera pour quelque point de la surface de la terre (1801). Cercle de projection. *Fig.* 103.

De même, lorsque le centre de la lune sera sur quelque point *V* de la circonférence *AVE* du cercle de projection, le centre de la lune paroîtra répondre sur le centre du soleil, & l'éclipse commencera d'être centrale pour quelque point de la surface de la terre, c'est-à-dire, pour celui qui se trouvera directement sous le point *V*, ou qui aura sa projection au point *V*.

Fig. 103. 1806. L'Éclipse générale de soleil est celle que l'on calcule pour la terre en général, sans examiner à quel pays elle se rapporte; c'est par où nous commençons, à l'exemple de Képler, (*Epit. pag.* 873), avant de chercher les circonstances d'une éclipse de soleil pour chaque lieu déterminé de la terre. Au moment où la distance *LK* du centre de la projection au centre de la lune est égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection, l'éclipse de soleil commence pour un point de la terre qui répond perpendiculairement au point *I* (1800), ou dont la projection est en *I*; c'est le commencement de l'éclipse générale; de même, lorsque la lune est parvenue au point *G* de son orbite, assez éloigné pour que la distance *LG* soit encore égale aux trois demi-diamètres, le bord de la lune quitte le bord du soleil pour le dernier de tous les pays de la terre où il peut y avoir éclipse, c'est la fin de l'éclipse générale. De même, la perpendiculaire *LM* abaissée sur l'orbite, marque le milieu de l'éclipse générale, comme dans le cas des éclipses de lune (1777).

Milieu de l'éclipse générale. 1807. Pour connoître le temps du milieu de l'éclipse générale, on suppose les mêmes calculs préliminaires, & l'on suit la même méthode que pour une éclipse de lune (1777); *LAB* représente une portion de l'écliptique; *L* le point où est le soleil au moment de la conjonction, *LM* la latitude de la lune, *KMG* l'orbite relative (1765). Dans le triangle *LMH* rectangle en *M*, on connoît l'angle *HLM* égal à l'inclinaison de l'orbite relative, & l'hypothénuse *HL* égale à la latitude de la lune; on multipliera le côté *LH* par le sinus de l'angle *MLH*, & l'on aura le côté *HM*; on le convertira en temps à raison du mouvement horaire de la lune sur l'orbite relative, & l'on aura l'intervalle entre la conjonction & le milieu de l'éclipse; cet intervalle se retranchera du moment de la conjonction, arrivé en *H*, si la latitude de la lune est croissante, c'est-à-dire, si la lune a passé son nœud; mais

il s'ajoutera au temps de la conjonction, si la lune va en se rapprochant de son nœud; & l'on aura le temps du milieu de l'éclipse générale en *M*; comme dans l'exemple de l'article 1778.

Le cercle de projection *AER* représente le disque de la terre, ou l'image de l'hémisphère éclairé de la terre transporté dans l'orbite ou dans la région de la lune; la ligne *VX* est la portion de l'orbite lunaire qui sera décrite pendant la durée de l'éclipse totale, comme la ligne *KG* est la portion d'orbite qui sera décrite depuis le premier moment où la pénombre (1788) touchera le disque de la terre en quelque point *I*, c'est-à-dire, où quelque point de la terre verra un commencement d'éclipse, jusqu'au dernier instant où la pénombre abandonnera la terre au point *F*, le centre de la lune étant alors en *G*, & l'éclipse finissant pour le dernier de tous les pays où elle sera visible; ainsi la longueur *KG* de l'orbite lunaire comprise entre les points *K* & *G*, nous fera connoître la durée de l'éclipse; comme le milieu *M* de la ligne *KG* nous fera trouver le temps du milieu de l'éclipse générale: la ligne *KG* est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire *LM*, parce que les côtés *LK* & *LG* sont égaux; il en est de même de la corde *VX*; ainsi le point *M* indique le milieu de l'éclipse générale, dont la durée est exprimée par *KG*; & la durée de l'éclipse centrale est représentée par *VX*. Durée de l'éclipse générale.

1808. Exemple. Dans l'éclipse du premier Avril 1764, le temps vrai de la conjonction indiqué par les tables étoit $10^h\ 32'\ 7''$, mais nous nous servirons du temps observé $10^h\ 31'\ 23''$ du matin, à Paris; la latitude pour ce temps-là $39'\ 36''$ boréale; le mouvement horaire de la lune en longitude $29'\ 3[illegible]''$, celui du soleil $2'\ 27''\frac{1}{3}$, l'inclinaison relative $5^\circ\ 44'\ 26''$, le mouvement horaire relatif ou composé $27'\ 19''\frac{1}{2}$; on fera ces deux proportions: $R : 39'\ 36'' :: \text{sin. } 5^\circ\ 44'\ 26'' : 3'\ 58''$, valeur de *HM*, & $27'\ 19''\frac{1}{2} : 60'\ 0'' :: 3'\ 58'' : 8'\ 42''$; on retranchera ces $8'\ 42''$ de l'heure de la con-

Fig. 103. jonction, parce que la latitude de la lune alloit en augmentant, & l'on aura $10^h\ 22'\ 41''$ pour le temps du milieu de l'éclipse générale, compté au méridien de Paris.

Le même triangle HLM fera trouver la perpendiculaire LM par le moyen de cette analogie : R : cos. $5^\circ\ 44'\ 26'' :: 39'\ 36'' : 39'\ 24''$; c'est la plus courte distance de la lune au centre de la projection dans le temps du milieu de l'éclipse ; cette perpendiculaire LM, de $39'\ 24''$, nous servira pour trouver le commencement & la fin.

Commencement & fin de l'éclipse générale.

1809. Le commencement de l'éclipse générale compté au méridien de Paris, se trouve de la même manière que le commencement d'une éclipse de lune (1780, 1787); dans le triangle LKM rectangle en M, on connoît la perpendiculaire LM (1808) & l'hypothénuse LK égale à la somme des trois demi-diamètres du soleil, de la lune, & de la projection ; (1800), on cherchera le côté MK, on le convertira en temps à raison du mouvement horaire, & ce temps ôté de celui du milieu de l'éclipse en M, donnera le temps du commencement de l'éclipse générale en K; étant ajouté il donnera la fin de l'éclipse en G.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, le côté LM est de $39'\ 24''$; la parallaxe de la lune de $54'\ 9''$ pour Paris, le demi-diamètre horizontal de la lune $14'\ 47''$, celui du soleil $16'\ 1''$, la somme des demi-diamètres de la projection & la pénombre, c'est-à-dire, de la différence des parallaxes & des demi-diamètres du soleil & de la lune, est de $1^\circ\ 24'\ 48''$, on résoudra le triangle LKM (1781); pour cela on fera la somme & la différence ; on ajoutera leurs logarithmes, on prendra la moitié de la somme, & l'on y ajoutera le logarithme constant 0,344158, différence entre le logarithme du mouvement horaire (1765), & celui de 1^h ou $3600''$; on trouvera le logarithme de $9893''$ ou $2^h\ 44'\ 53''$; ainsi le commencement de l'éclipse générale étoit à $7^h\ 37'\ 48''$ du matin, & la fin à $1^h\ 7'\ 34''$

Logarithme constant.

après-midi, sa durée sur toute la terre étoit de 5 heures 29′ 46″. *Fig.* 103.

1810. Le commencement de l'éclipse centrale arrive lorsque la lune est au point *V*, où son orbite coupe le cercle de projection ; car alors le centre de la lune, le centre du soleil & le bord de la terre sont sur une même ligne, & le point de la terre dont la projection est en *V*, voit le centre de la lune sur le centre du soleil. Commencement & fin de l'éclipse centrale.

Dans le triangle *LMV*, rectangle en *M*, on connoît la perpendiculaire *LM* (1808) & la ligne *LV* qui est la différence des parallaxes ou le rayon de la projection, on cherchera le côté *MV*, on le convertira en temps, c'est-à-dire, on cherchera le temps que la lune emploie à parcourir *VM*, & ce temps étant ôté de celui du milieu de l'éclipse générale, on aura le temps qu'il étoit à Paris quand l'éclipse commençoit à être centrale pour quelque point *V* de la terre.

Exemple. Dans l'éclipse de 1764, supposant $LV = 54' 0'' = 3240''$; $LM = 39' 24''$, on trouvera $MV = 36' 56''$, qui réduit en temps donne $1^h\ 21'\ 5''$; cette demi-durée étant ôtée du milieu de l'éclipse $10^h\ 22'\ 41''$, donnera le commencement de l'éclipse centrale $9^h\ 1'\ 36''$, & ajoutée au milieu de l'éclipse donnera la fin $11^h\ 43'\ 46''$. Le temps que l'ombre employoit à traverser la terre étoit de $2^h\ 42'\ 10''$.

1811. Les calculs que nous venons de faire pour l'éclipse générale, peuvent s'exécuter graphiquement comme ceux des éclipses de lune (1787) ; on fera une grande figure dont le rayon *LA* soit égal à la différence des parallaxes horizontales, c'est-à-dire, divisé en autant de minutes qu'en contient cette différence des parallaxes ; on prendra la ligne *LH* égale à la latitude de la lune, & l'angle *MLH* égal à l'inclinaison relative de l'orbite lunaire ; on prendra sur la même échelle une quantité égale au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative, que l'on portera de *H* en *N* ; on marquera en *H* l'heure & la minute de Opération graphique.

la conjonction, & en *N* une heure de moins ; on divisera par ce moyen l'orbite *GK* en heures & minutes, & l'on verra à quelle heure la lune s'est trouvée en *K*, en *V*, en *M*, en *X* & en *G* ; comme on l'a trouvé par les calculs des articles précédens.

1812. Il s'agit actuellement de connoître quels sont les différens pays de la terre qui sont en *V*, en *X*, au moment où la lune y arrive, c'est-à-dire, leurs longitudes géographiques, & leurs latitudes ; Boulliaud les trouvoit par le moyen des tables du nonagésime ; je donnerai une méthode pour en faire le calcul par la trigonométrie (1930) ; mais il faut indiquer dès à présent une manière simple & naturelle pour trouver ces pays avec un globe. M. de la Caille a donné dans ses leçons d'astronomie (art. 1166) une méthode pour y parvenir avec la règle & le compas en décrivant des ellipses ; nous en parlerons également (1942 & suiv.) ; mais je ne conseillerois pas aux astronomes de faire ces calculs par la trigonométrie, si ce n'est dans des cas extraordinaires, & pour des observations importantes ; le temps qu exigent ces calculs rigoureux, est bien mieux employé à calculer des observations déja faites, pour en tirer des conséquences, qu'à annoncer avec une précision si scrupuleuse celles qui doivent arriver ; les opérations graphiques sont suffisantes pour tracer des cartes semblables à celles de la planche XIV, que l'on met ordinairement en abrégé dans les éphémérides. Ce fut M. Cassini qui en donna l'idée & le modèle, à l'occasion de l'éclipse de soleil qu'il avoit observée à Ferrare en 1664. (*Observatione dell' eclisse solare fatta in Ferrara* 1664).

Machines pour les éclipses.

1813. Il y a dans les manuscrits de M. de l'Isle une description avec les plans d'une machine de son invention, propre à faire trouver facilement & sans calcul les circonstances d'une éclipse de soleil. M. de Fouchy avoit aussi exécuté, il y a plusieurs années, une machine composée d'un globe & de différentes pièces pour le même usage. M. Segner, de Gottingen, en a décrit

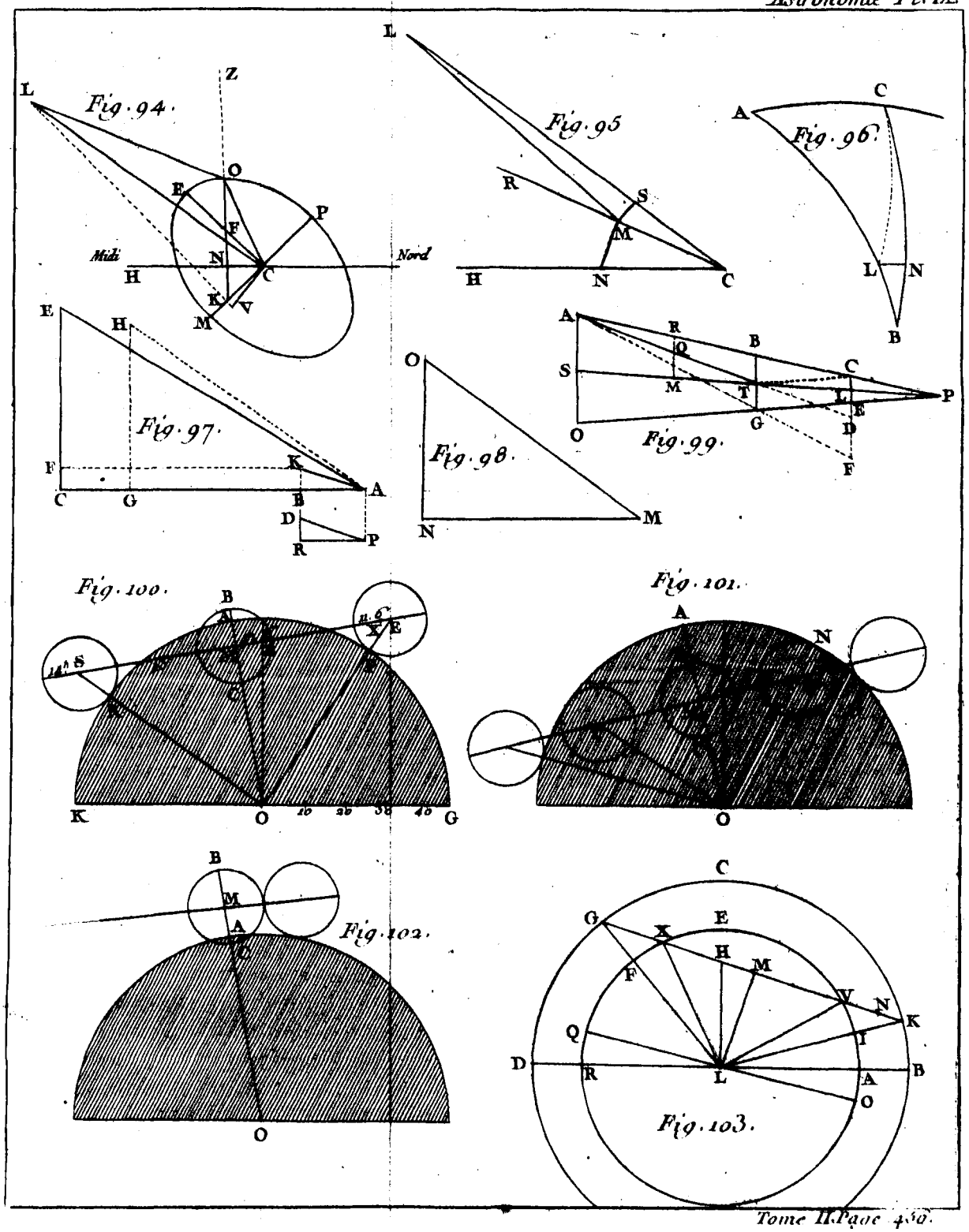


Fig. 94.
Z
L
O
E
F
P
Midi
N
Nord
H
C
K
V
M
Fig. 95
L
R
S
M
H
N
C
Fig. 96.
A
C
L
N
B
Fig. 97.
E
H
F
K
C
G
B
A
D
R
P
Fig. 98.
O
N
M
Fig. 99.
A
R
Q
B
S
C
M
T
L
E
P
O
G
D
F
Fig. 100.
B
A
S
C
K
O
10
20
30
40
G
Fig. 101.
A
N
O
Fig. 102.
B
M
A
C
O
Fig. 103.
C
G
X
E
H
M
F
V
N
K
Q
I
D
R
L
A
B
O

décrit une dans les transactions philosophiques, (*année* 1741, *n°*. 461). Enfin, dans le livre de M. Ferguson, intitulé, *Astronomy explained*, 1757, *pag*. 280, ou 1764 *pag*. 298, *planche XIII*, on trouve aussi la description d'une machine pour les éclipses, qu'il appelle *Eclipsareon*, avec laquelle il trouve le temps, la quantité, le progrès, les circonstances & la durée d'une éclipse de soleil pour tous les pays de la terre. L'Auteur qui étoit Berger du Roi, en Ecosse, est venu au sein de la ville de Londres exercer un talent naturel qu'il avoit pour la mécanique & pour l'astronomie, il s'y est distingué, & a obtenu des bienfaits du Roi d'Angleterre.

1814. Pour mettre tout au plus simple, je ne suppose qu'un globe terrestre qui ait cependant au moins 6 pouces de diamètre, & une règle avec deux pieds, représentée par *GVAE* (*fig*. 105), dont la longueur *VA* soit égale au diamètre du globe dont on se sert, & la hauteur égale au rayon du globe, ou un peu plus, afin d'être placée sur son horizon *GE*; le rayon de ce globe doit représenter le rayon de la terre, ou la parallaxe de la lune, comme *LA* dans la *figure* 104, c'est-à-dire, qu'il faut le supposer, par exemple, de 54′ parce que la parallaxe de la lune dans l'éclipse de soleil de 1764 étoit de 54′. *Fig*. 105.

Comme l'on n'est pas maître de changer le diamètre de son globe dans les différentes éclipses de soleil, il faudra calculer les différentes parties de la figure, c'est-à-dire, le mouvement horaire de la lune & les diamètres du soleil & de la lune, en les réduisant à cette échelle; si le globe a 8 pouces de diamètre, & que la parallaxe actuelle, soit, par exemple de 54′, on dira. 54′ sont à 48 lignes, comme 31′, somme des demi-diamètres, est à 27 lignes $\frac{1}{2}$, qu'on portera sur la règle *LA*, qui doit représenter l'orbite de la lune.

1815. On évitera même ces règles de trois en se servant d'une échelle composée de plusieurs lignes parallèles, & divisées en 60 parties par des transversales, telle qu'on la trouvera décrite ci-après (1858), &

Fig. 115. qu'on la voit dans la *figure* 115, la ligne marquée 60 est supposée égale au rayon du globe dont on se sert; mais le rayon de ce globe devant toujours être égal à la parallaxe, si elle est de 54′, on aura besoin d'une échelle plus longue que le rayon du globe dans le rapport de 60 à 54; car le rayon devant être alors divisé en 54′, les minutes doivent être plus longues dans le même rapport, par conséquent les divisions sur lesquelles on les prendra, doivent être plus étendues, ou être des portions d'une parallèle plus longue dans le rapport de 60 à 54. La parallèle *AB* qui répond à 54′ est dans ce rapport avec la parallèle qui répond à 60′, elle doit donc servir à prendre les minutes du mouvement horaire, des demi-diamètres & des autres parties de la figure, lorsque la parallaxe sera de 54′; ainsi le nombre des minutes sera plus petit, parce que le rayon n'en contiendra que 54 au lieu de 60.

Usage du globe pour le calcul des éclipses.

1816. Pour placer sur le globe l'orbite de la lune, il faut avoir fait une figure, telle que la *fig.* 103, où la ligne *BLD* représente une portion de l'écliptique, & XV l'orbite relative (1765); on y ajoutera une ligne *OLQ* pour représenter une portion de l'équateur; en faisant l'angle *ALO* égal à l'angle de position (1044), ou au complément de l'angle de l'écliptique avec le méridien (1846); l'équateur sera au midi ou au-dessous de l'écliptique à l'orient du globe, dans les signes ascendans, c'est-à-dire, quand la conjonction arrivera depuis le 21 Décembre jusqu'au 21 Juin. La somme de l'angle *ALO* & de l'inclinaison de l'orbite relative, ou leur différence, suivant les cas, donnera l'angle de la perpendiculaire *LM* avec le méridien universel *LH*, ou le méridien du globe, que l'on suppose immobile; cet angle est le même que l'angle de l'orbite avec l'équateur; on prendra sur la figure avec un compas les arcs *OV*, *QX*, & l'on marquera un pareil nombre de degrés sur l'horizon du globe, à compter depuis les vrais points d'orient & d'occident, c'est-à-dire, depuis les intersections de l'équateur & de l'horizon du globe,

Fig. 103.

en allant du côté du nord, si la latitude de la lune est boréale, du côté du midi, si elle est australe.

On élevera le pole du globe sur son horizon du nombre de degrés que la déclinaison du soleil indiquera; si la déclinaison est boréale, c'est le pole boréal qu'il faut élever; ce sera le pole antarctique, si la déclinaison est méridionale: on placera le support *G V A E*, (*fig.* 105), de maniere qu'un bord de la règle supérieure *VA* réponde perpendiculairement au-dessus des deux points marqués sur l'horizon du globe; dans cet état, cette traverse *VA* représentera l'orbite de la lune, placée sur l'horizon du globe, comme elle l'étoit sur le cercle de projection dans la *figure* 103. Maniere de placer le globe. *Fig.* 105.

Il faut prendre encore sur la *figure* 103 les temps de l'orbite lunaire qui répondent en *V* & en *X*, c'est-à-dire, au commencement & à la fin; on les écrira sur le support *VA*, que je suppose couvert d'une petite bande de papier collé, & l'on aura un intervalle *AV*, qu'on divisera en minutes de temps, comme l'on a divisé l'orbite *VX* de la lune (1811), ou bien l'on se servira du mouvement horaire, & l'on marquera seulement le temps du milieu de l'éclipse sur le milieu *L* de la règle.

Il ne s'agira plus que de placer le globe sur l'heure qui lui convient; par exemple, dans l'éclipse de 1764, la lune devant être en *A* à $9^h\ 2'$, qui est le commencement de l'éclipse centrale, on tournera le globe de maniere que Paris soit en *C*, $2^h\ 58'$ à l'occident du *Méridien universel MP*; c'est ce méridien dans lequel le soleil est supposé fixe, tandis que tous les pays de la terre passent successivement devant lui par la rotation du globe d'occident en orient (1829). Méridien universel.

1817. Le globe terrestre étant ainsi disposé pour l'heure de Paris, il est aussi placé pour tous les autres pays, & la lune étant supposée en *A*, le point de la terre qui répond perpendiculairement sous la lune, est celui où l'éclipse paroît centrale dans ce même moment (1800); on n'a donc qu'à abaisser un à-plomb du point *A*, si l'horizon du globe est bien de niveau, ou placer l'œil

Fig. 105. perpendiculairement au-dessus du point *A*, ou enfin, se servir d'une petite équerre, & l'on verra sur le globe le point de la terre que l'on cherchoit, perpendiculairement au-dessous de *A*; l'on marquera la longitude & la latitude de ce point-là; ce sera le premier point de l'éclipse centrale, marquée sur la carte de la *planche XIV*.

Au point *A* l'on placera le centre d'un cercle dont le rayon *AD* soit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra faire un cercle de carton, qu'on placera parallèlement à l'horizon du globe, son centre étant en *A*; ou bien l'on fera circuler un compas dont l'ouverture soit égale à la somme des demi-diamètres, & dont une pointe soit en *A*; on remarquera tous les points du globe qui se trouveront répondre perpendiculairement sous la circonférence de ce cercle, ce sont ceux qui verront les bords du soleil & de la lune se toucher au même instant.

1818. On fera un autre cercle dont le rayon soit plus petit que le précédent, d'un quart du diamètre du soleil, c'est-à-dire, de 3 doigts, (ce sera 8′ en 1764), ou bien on échancrera de la même quantité une portion du même cercle qui a servi pour la première phase, comme dans le limaçon de la *figure* 106; ou bien l'on diminuera seulement l'ouverture du compas dont on s'est servi dans l'opération précédente; alors la circonférence du cercle, ainsi diminuée de trois doigts, ou l'ouverture du compas, promenée tout autour du point *A* (*fig.* 105), indiquera sur le globe, par le moyen de l'à-plomb, tous les points de la terre où le soleil est éclipsé dans ce moment-là de 3 doigts seulement; on en comprendra la raison en réfléchissant sur les articles 1802 & 1803.

Cercle de la pénombre. 1819. On pourra faire de même d'autres cercle pour l'éclipse de 2, 3, 4, 5 doigts, &c. en diminuant de 2, 3 doigts, &c. le rayon du cercle de la *pénombre* c'est-à-dire, du cercle dont le rayon étoit égal à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on pourra échancrer un seul cercle dont la circonférence soit di-

visée en 12 parties, & le rayon de même en 12 parties, & dont les 12 secteurs aillent en diminuant comme le limaçon d'une montre à répétition (*fig.* 106), chacun étant plus petit que le précédent, d'un doigt ou d'une douzième partie du diamètre solaire, pris sur la même échelle que la parallaxe horizontale & le mouvement horaire (1815); en promenant un à-plomb sur les circonférences de ces cercles, il marquera sur le globe les pays qui pour cet instant-là auront l'éclipse d'un doigt, ou de 2, &c. *Fig.* 106.

Si l'on place en *L*, sur le milieu de la traverse *AV*, le centre de ces cercles, & qu'on fasse la même opération, après avoir fait tourner le globe pour amener la rosette *P* du globe sur $10^h\ 23'$, qui est l'heure du milieu de l'éclipse générale au méridien de Paris, on trouvera tous les pays qui à $10^h\ 23'$ ont l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. C'est ainsi qu'on peut tracer sur un globe, ou sur une carte géographique, la figure de tous les points qui auront une éclipse centrale, ou qui auront l'éclipse d'un doigt, de deux, &c. On en trouvera le calcul trigonométrique avec un exemple à l'article 1930 & suiv. Il est bon d'observer dès-à-présent que tous ces pays qui dans un instant donné voient l'éclipse d'un doigt, n'ont pas cependant la grandeur de l'éclipse d'un doigt; car ce n'est pas la plus grande phase qu'on trouve par cette opération, c'est seulement la phase qui a lieu pour moment donné.

Méthode pour déterminer les phases d'une éclipse de soleil par le moyen des projections.

1820. La méthode que je viens d'expliquer pour trouver, par le moyen d'un globe, les pays de la terre qui doivent voir une éclipse de soleil, ne seroit pas assez exacte pour trouver, à une ou deux minutes près, le commencement & la fin de l'éclipse en un lieu quelconque, à moins qu'on n'eût un globe très-grand &

très-parfait ; mais nous y parviendrons aisément au moyen d'une figure de projection & d'une ellipse tracée avec soin ; cette opération graphique avec la règle & le compas sera plus exacte, & aussi simple que celle du globe. Avant d'en donner les règles, je vais tacher d'en faire comprendre la théorie en expliquant avec soin les principes de la projection ortographique ; j'en ai déja fait quelque usage, (art. 1798 & suiv.), mais je vais en expliquer ici tous les fondemens & toutes les circonstances.

Opération graphique.

1821. M. Cassini s'étoit occupé, à ce qu'il paroît, de cette matière, même avant que d'avoir quitté l'Italie. M. Weidler, (*pag.* 522), cite à ce sujet un ouvrage de M. Cassini, intitulé : *Nova Eclipsium methodus. Bonon. Italice*, 1663, *in*-4°. J'aurois été fort curieux de voir un ouvrage aussi ancien de M. Cassini, sur cette matière ; mais je l'ai cherché inutilement en Italie, en France, en Angleterre & en Allemagne, & je suis persuadé qu'il n'a jamais été imprimé ; le P. Audiffredi, savant bibliothécaire & astronome, du Couvent de la Minerve à Rome, m'a écrit qu'il en jugeoit de même, & qu'il l'avoit dit dans son ouvrage *De'Scrittori Nizzardi*, où des Ecrivains du comté de Nice, dans lequel il a parlé de M. Cassini, & où il s'est servi de ce qu'en ont dit Apostolo Zeno, Michele Giustiniani, le P. Nicéron, &c. Le premier dit, en parlant de l'éclipse de 1664, que M. Cassini publia ses observations à Ferrare, & qu'elles furent d'autant plus intéressantes qu'il y fit usage d'une nouvelle méthode pour déterminer les apparences d'une éclipse de soleil dans toute la terre ; mais qu'il se reserva de publier dans un autre temps cette méthode en son entier, & d'en faire la matière d'un ouvrage qui devoit être intitulé : *Nova eclipsium methodus*, (*Giornale d'Italia*, *tom.* 27, *pag.* 121), il continue le détail de tous les ouvrages que M. Cassini donna jusqu'à son départ pour la France, mais il ne dit plus rien de la nouvelle méthode des éclipses, ce

qui me fait croire que du moins en Italie il n'en fut plus question. Le P. Nicéron n'en dit rien, quoiqu'il parle aussi des observations de l'éclipse de 1664, publiées à Ferrare, (1812). M. Eustache Zanotti, m'a dit qu'il ne croyoit pas qu'il y eût rien autre de publié sur cette matière; il se souvient qu'étant jeune il reçut de M. Manfredi, des manuscrits que Domin. Cassini avoit autrefois prêtés à ce dernier, où étoit expliquée la méthode de calculer graphiquement les éclipses, ces manuscrits étoient en françois, ce qui prouve qu'il les avoit composés en France, il n'y faisoit mention d'aucun ouvrage précédemment publié, & Manfredi n'en avoit pu indiquer aucun à M. Zanotti, lorsqu'il lui prêta ces papiers. On ne voit rien de M. Cassini jusqu'à l'année 1700, qu'il fit part de sa méthode à l'académie, (*Hist. de l'acad.* 1700, *pag.* 103); elle se trouve fort au long à la tête des tables de M. son Fils publiées en 1740.

1822. Flamsteed donna une dissertation à la suite du cours de mathématiques de Jonas Moore, (*A new systeme of the mathematick*, 1681), cette pièce a pour titre, *The doctrine of the sphere grounded on the motion of the earth*; il dit dans la préface qu'on n'avoit jamais publié de méthode pour trouver les phases d'une éclipse de soleil sans calculer les parallaxes; il y avoit pensé en 1676, & avoit envoyé sa méthode à Jonas Moore, celui-ci la communiqua à la société royale; mais Christ. Wren, dit alors qu'il avoit trouvé la même méthode 16 ans auparavant; & pour le prouver, il lui envoya peu après une semblable projection tracée proprement sur un carton, avec plusieurs inventions ingénieuses de nombres & d'échelles pour la construction des éclipses de soleil sous la latitude de Londres.

Je crois donc, dit Flamsteed, que Wren est le premier de tous qui ait connu la manière de trouver les phases d'une éclipse sans calculer les parallaxes; il ajoute que M. Halley, avant son depart pour Sainte

Wren est regardé comme le premier inventeur.

Helene en 1666, lui parla de la construction des éclipses, mais en lui cachant la méthode, à laquelle Flamsteed n'avoit pas alors beaucoup de confiance.

Projection ortographique.

1823. Projetter une figure, c'est la rapporter à un autre plan, par des lignes tirées de chaque point de la figure à chaque point du plan. On distingue plusieurs sortes de projections, mais la plus simple de toutes est la projection *ortographique* (a), formée par des lignes perpendiculaires au plan de projection; c'est celle dont on se sert avec un très-grand avantage pour les éclipses sujettes aux parallaxes. Soit une ligne *AB*, (*fig.* 107), & un plan quelconque *PL*, différent de cette ligne; si des extrémités *A* & *B* de la ligne donnée on abaisse sur le plan *PL* des perpendiculaires *Aa*, *Bb*, l'espace *ab* qu'elles occuperont sur le plan *PL*, sera la projection ortographique de la ligne *AB*, & le plan *PL* sur lequel on a abaissé ces perpendiculaires, s'appellera le *plan de projection*.

Fig. 107.

1824. Si les lignes *Aa*, *Bb*, au lieu d'être parallèles, & perpendiculaires au plan de projection, avoient pour origne un point commun, il en résulteroit sur le plan *PL* une autre figure, une autre sorte de projection; nous ferons usage, par exemple, de la projection *stéréographique* (b) (2111), à l'occasion de la Mappemonde qui servira pour le passage de Vénus; & nous parlerons dans le XXIVe. livre de plusieurs sortes de projections (3871); mais nous n'avons besoin ici que de la projection ortographique.

Projection d'une ligne.

1825. La projection ortographique *ab* d'une ligne *AB* faite sur un plan de projection *PL* par les perpendiculaires *Aa*, *Bb* est le cosinus de son inclinaison. Car ayant tiré *AC* parallèle à *PL*, l'angle *BAC* est égal à l'inclinaison de la ligne *AB* sur le plan de projection *PL*, & *AC* = *ab* est la projection de la

(a) Ὀρθὸς, *rectus*, parce que cette projection se fait par des angles droits.

(b) Στερεὸς, *solidus*, parce que c'est la projection employée pour représenter le globe qui est un corps solide.

ligne

ligne AB; or $AB : AC :: R : \text{cos.}\, BAC$; ainsi le rayon est au cosinus de l'inclinaison, comme la ligne AB est à sa projection AC. Donc si l'on prend le rayon pour l'unité, on trouvera que *la projection d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection.*

1826. La projection, d'un arc tel que FI est égale à son sinus. Soit la circonférence DFH (*fig.* 108), du demi-cercle dont on demande la projection, située dans un plan perpendiculaire au plan de projection, toutes les lignes perpendiculaires FC abaissées de chaque point de la circonférence sur le rayon CH, seront perpendiculaires au plan & marqueront les projections des mêmes points; le point K sera la projection du point I; ainsi la ligne CK sera la projection de l'arc FI; mais si C est le centre du cercle, CK égal à IL est le sinus de l'arc FI: ainsi les sinus des arcs FI seront les projections de ces arcs, si l'on prend leur origine au point F qui répond perpendiculairement au centre C. Cette proposition sera d'un grand usage dans le calcul des éclipses (1838 & suiv.). Projection d'un arc. *Fig.* 108.

1827. La projection ortographique d'un cercle incliné est toujours une ellipse. Soit DFH (*fig.* 108), le cercle dont on cherche la projection, DH celui de ses diamètres qui est dans le plan de projection, ou parallele à ce plan; si l'on incline ce demi-cercle en le faisant tourner autour du diamètre DH, de manière que toutes les lignes IK fassent avec le plan de projection un angle quelconque, toutes ces lignes auront pour projections des lignes KG qui seront égales chacune à leur correspondante IK multipliée par le cosinus de l'angle d'inclinaison (1825), ensorte que KG sera par-tout à IK comme le cosinus de l'angle d'inclinaison est au rayon; or, telle est la propriété d'une ellipse, que toutes ses ordonnées KG soient aux ordonnées IK d'un cercle de même diamètre dans un rapport constant (3256); donc les lignes KG formeront une ellipse; donc enfin la projection d'un demi- Projection d'un cercle. *Fig.* 108.

Fig. 108. cercle *DFH* sera la circonférence d'une ellipse *DGH*, dont le grand axe *DH* est le même que celui du demi-cercle; & le petit axe plus petit en raison du cosinus de l'inclinaison. Il en seroit absolument de même quand le diamètre *DH* du cercle projetté seroit à une certaine distance au-dessous du plan de projection.

Le cercle paroît en forme d'ellipse.

1828. Un cercle vu obliquement paroît donc sous la forme d'une ellipse; car on sait qu'une ligne *AB* (*fig.* 109), vue obliquement du point *O* paroît de la même grandeur que la ligne perpendiculaire *AC* = *AB* sin. *ABC*; ainsi dans un cercle *CAD* (*fig.* 110), vu obliquement toutes les ordonnées *AB*, *EF*, paroissent plus petites dans le même rapport, le cercle paroît donc une ellipse *CGD*, dont le petit axe est au grand comme le sinus de l'inclinaison est au rayon. Cette proposition revient au même que la précédente; mais il est nécessaire de s'accoutumer à comprendre que le cercle vu obliquement, paroît en forme d'ellipse; car nous ferons un usage continuel de cette proposition.

Fig. 109 & 110.

1829. Les principales lignes de la projection d'une éclipse sont représentées dans la *fig.* 111; *ST* est la ligne menée du centre du soleil au centre de la terre, que nous appellons simplement la ligne des centres; *IL* un plan qui passe par le centre de la terre perpendiculairement à la ligne des centres. Ce plan forme le *cercle d'illumination*, & sépare la partie éclairée *IDL* de la partie obscure *LOVI*; nous allons rapporter à ce plan les différentes parties de la projection; & tout ce que nous dirons à ce sujet pourra s'appliquer au plan de projection, lors même que nous le placerons dans la région de la lune (1835), parce qu'il sera toujours parallèle au cercle d'illumination, & sensiblement égal. La ligne *PO* est l'axe de la terre; *EQ* le diamètre de l'équateur; *PELOQIP* le *méridien universel* (1816), c'est-à-dire, celui qui passe continuellement par le soleil, & que les différens pays de la terre atteignent successivement par la rotation diurne de notre globe; *ED* est la déclinaison du soleil ou sa distance à l'équateur; l'arc

Fig. 111.

Cercle d'illumination.

PI est l'élévation du pole au-dessus du plan de projection; cette hauteur est égale à la déclinaison du soleil, car si des angles droits ou quarts de cercle *PE* & *DI* on ôte la partie commune *PD*, on aura l'arc *PI*=*DE* qui est la distance du soleil à l'équateur *E*, ou sa déclinaison. Cette élévation est aussi égale à l'inclinaison de tous les parallèles terrestres par rapport à la ligne des centres, & le complément de leur inclinaison par rapport au plan de projection. Fig. 1113. Elévation de l'axe & du pole.

Ayant pris, depuis l'équateur, les arcs *EG* & *QF* égaux à la latitude d'un lieu de la terre, tel que Paris, la ligne *GH* perpendiculaire à l'axe *PO*, & qui est le cosinus de la latitude *EG*, sera le rayon du parallèle de Paris, ou du cercle que Paris décrit chaque jour par la rotation diurne de la terre; *GF* sera le diamètre du parallèle. Des points *G*, *F* & *H*, qui sont les extrémités & le centre du parallèle de Paris, nous abaisserons des perpendiculaires *GM*, *FR*, *HN*; les points *M*, *R*, *N* où ces perpendiculaires rencontreront le cercle de projection *IL*, seront les projections des extrémités & du centre du parallèle.

1830. La distance *TM* du centre *T* de la projection au bord intérieur *M* de la projection du parallèle de Paris, est égale au sinus de l'arc *GD* ou de la différence entre *EG* qui est la latitude de Paris, & *DE* qui est la déclinaison du soleil; la distance *TR* du centre *T* de la projection à l'extrémité la plus éloignée *R* du parallèle de Paris, est égale au sinus de l'arc *DF*, ou *VF*; cet arc *VF* est égal à la somme des arcs *VQ* & *QF* dont l'un est égal à la déclinaison du soleil, & l'autre à la latitude de Paris; ainsi *la distance du centre à la projection du sommet du parallèle, est égale au sinus de la somme de la latitude du lieu & de la déclinaison du soleil.*

1831. La projection du pole *P* se trouvera en abaissant une perpendiculaire du point *P* sur la ligne *TI*; elle marque un point éloigné du centre *T* d'une quantité égale à *TP* cos. *PTI* ou *TP* cos. déclin. ☉ (1825).

Fig. 111.

Distance du centre de l'ellipse.

1832. La distance TN ou l'espace de la projection compris entre le centre T de la projection, & le centre N du parallèle est égal à TH. cos. HTN (1825); mais TH est le sinus de la latitude de Paris, HTN est égal à PI ou à DE, c'est-à dire, à la déclinaison du soleil; donc TN est égale au produit du sinus de la latitude du lieu, par le cosinus de la déclinaison du soleil pour le moment donné, en prenant pour rayon le rayon même de la projection: nous en ferons usage (1862).

1833. Le point D de la terre est celui qui a le soleil au zénit; un autre point quelconque E qui en est éloigné de la quantité DE, a donc le soleil éloigné de son zénit de la même quantité DE; delà il suit qu'une ligne TA étant prise sur la projection & étant convertie en arc pour avoir DE, elle donnera le sinus de la distance du soleil au zénit ou le cosinus de sa hauteur pour le lieu de la terre qui est projetté au point A; c'est-à-dire, que la ligne TA, sinus de l'arc DE, en est la projection. Nous ferons usage plusieurs fois de cette proposition, & en particulier à l'article 1936.

1834. Il suit aussi delà que TA exprime la parallaxe de hauteur pour le lieu de la terre qui est projetté en A; car TL qui est la parallaxe horizontale (1797), est encore le sinus total; donc TA qui est le cosinus de la hauteur sera aussi la parallaxe de hauteur, qui est toujours $= p$. cos. h (1629); donc en général *la distance d'un pays de la terre au centre de la projection, est égale à la parallaxe de hauteur*; le rayon de la projection étant pris pour la parallaxe horizontale. On peut dire cependant que c'est la parallaxe qui convient à la hauteur du soleil, & non pas celle qui conviendroit à la hauteur de la lune, parce que les différens points de la projection sont ceux auxquels on rapporte le soleil vu des différens points de la terre; ce n'est pas ceux où l'on rapporte la lune, qui se meut sur une orbite différente, tantôt au-dessus & tantôt au-dessous; cependant on néglige dans la méthode des projections la différence qu'il y a entre la hauteur du soleil & celle de la lune (1874),

Expression de la parall. de hauteur.

parce qu'elle ne peut aller qu'à un demi-degré environ, lorsque l'éclipse commence ou finit. *Fig.* 111.

1835. Le parallèle de Paris ou le cercle dont *H* est le centre, & *GF* le diamètre, étant rapporté ou projetté sur le plan *ITL* y devient une ellipse (1827), & c'est cette ellipse qu'il est nécessaire de décrire sur le plan, pour y rapporter les phases de l'éclipse; mais auparavant je dois faire observer que l'on peut transporter dans la région de la lune le plan de projection *ITL*, & que l'ellipse y sera parfaitement la même que sur le plan *ITL* qui passe par le centre de la terre, puisqu'elle sera comprise entre des lignes parallèles à la ligne des centres *TDS*, & qui s'étendent jusqu'à la lune, où elles forment une projection de la terre, égale à la terre elle-même (1796).

Plan de projection dans la Lune.

Soit *NO* (*fig.* 113), le diamètre de la terre perpendiculaire au rayon du soleil, ou le diamètre du cercle d'illumination, c'est-à-dire, du cercle terminateur de la lumière & de l'ombre; *OAN* l'hémisphère éclairé, *OVN* l'hémisphère obscur de la terre; *OK* & *NM* deux lignes dirigées vers le soleil, & que je suppose d'abord parallèles entr'elles puisqu'elles en diffèrent très-peu (1796); *XY* un plan perpendiculaire à la ligne des centres & aux rayons du soleil, que j'appellerai *plan de projection*; *MGK* un cercle décrit sur ce plan, & qui soit parallèle & égal au cercle d'illumination; c'est ce cercle *MK* que j'appelle *cercle de projection* (1804), parce qu'il est véritablement la projection ortographique (1823) du disque de la terre dans la région de l'orbite lunaire. *Fig.* 113.

Raisons de préférence.

1836. Nous choisissons pour plan de projection celui qui est dans la région de l'orbite lunaire & qui passe à la distance de la lune, quoiqu'on pût choisir d'autres plans qui passeroient ou par le soleil ou par la terre, (*Mém. acad.* 1744, *pag.* 191); mais celui qui passe par la lune me paroît le plus commode, parce que le mouvement de la lune & son diamètre y sont tels que nous les observons réellement de la terre;

Fig. 113. le rayon même de la terre y paroît d'une grandeur connue, & donnée par les tables, qui est la parallaxe horizontale de la lune. En employant un plan de projection, tel que le propose M. le Monnier, d'après Képler, & Boulliaud, (*Inst. astron. pag.* 213) qui passe par le centre de la terre, on est obligé de supposer l'œil de l'observateur placé dans la lune, ce qui peut donner quelque difficulté de plus à ceux qui commencent à s'occuper de ces matières. Ayant choisi la région lunaire pour y placer notre projection, voyons comment on doit y rapporter les parallaxes terrestres.

Soit *PCR* l'axe de la terre, élevé au-dessus du cercle d'illumination (1829), ou du cercle terminateur, de la quantité *PCN* égale à la déclinaison du soleil (1829). Soit *ABDE* le cercle ou parallèle diurne que décrit par le mouvement de rotation un point de la terre, tel que Paris; *AF*, *DG*, des lignes parallèles aux rayons du soleil, & que nous supposerons aussi parallèles entr'elles, puisque la différence est insensible (1796). Ces lignes forment un cylindre oblique dont la base est un cercle; mais dont toutes les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses; puisqu'elles sont la projection d'un cercle vu obliquement (1828).

1837. La projection de la terre entière sera un cercle *MFK* parallèle & égal au cercle d'illumination, comme nous l'avons déja dit; mais le parallèle de Paris ou le cercle *ABDE* n'étant point parallèle au plan de projection *XY*; il ne peut s'y projetter que sous une forme elliptique (1827). C'est cette ellipse que nous allons décrire; elle est la même sur le plan de projection *XY* que sur le plan qui passeroit par *NO*, c'est-à-dire, sur le plan du cercle d'illumination, puisque ces deux ellipses sont renfermées entre des lignes parallèles *FA*, *GD*; ainsi tout ce que j'ai dit à l'occasion de la *figure* 111, (art. 1829), aura lieu pour l'ellipse que nous allons décrire sur le cercle de projection qui passe dans l'orbite lunaire.

1838. Dans les opérations suivantes, il ne faut

pas oublier que la distance de la lune au point de la projection qui représente un lieu de la terre, marque la distance apparente des centres du soleil & de la lune pour ce lieu-là. Je suppose un point *A* de la terre (*fig.* 113), projetté en *F* par un rayon *AF*; le même lieu *A* de la terre voit le soleil sur la ligne *AF* (1796); si le centre de la lune répond alors au point *L* de la projection, l'observateur situé en *A* verra la lune éloignée du soleil de la quantité *FL*; ainsi la distance apparente sur le plan de projection entre la lune *L* & le point *F* qui répond au point *A* de la terre, sera *FL*. Il faut bien concevoir que le point *F* étant la projection du lieu *A* de la terre, c'est au point *F* de la projection que l'on rapporte le soleil quand on l'observe du point *A*; ainsi l'on peut indifféremment dire qu'un point *F* de la projection marque le lieu *A* de la terre, par exemple, la situation de Paris, ou qu'il marque le lieu du soleil vu de Paris (1799). *Fig.* 113.

1839. Au moyen des propositions démontrées dans les articles 1829 & suiv. il est aisé de tracer l'ellipse de projection pour un lieu & pour un jour donné. Soit *AOB* (*fig.* 112), le cercle d'illumination, ou le cercle de la terre qui est perpendiculaire au rayon du soleil ou à la ligne des centres; il faut supposer le soleil au-dessus de la figure, répondant perpendiculairement au-dessus du centre *C* de la terre. La ligne *OPDC* est un diamètre du méridien universel dans lequel on suppose le soleil immobile; *ACB* est un diamètre de l'équateur, perpendiculaire au méridien universel; *P* est la projection du pole, c'est-à-dire, le point du plan de projection sur lequel le pole répond perpendiculairement (1831); on prendra les arcs *BL* & *AK* égaux à la latitude du lieu; ensuite *KM*, *KN*, *LR*, *LV*, égaux à la déclinaison du soleil; on tirera les lignes *MER*, *NFV*, l'on aura *CE* égale au sinus de *BR* ou de la somme de la latitude du lieu & de la déclinaison de l'astre, & la ligne *CF* égale au sinus de *BV* ou de la différence des mêmes arcs. Ainsi les points *E* & *F* *Fig.* 112. Pour avoir le petit axe.

Fig. 112. feront les extrémités de la projection du parallèle (1830); donc l'ellipse qui représente le parallèle aura *E F* pour petit axe, & divisant *E F* en deux parties égales au point *G*, l'on aura le centre de l'ellipse, car le centre doit être nécessairement à égale distance des deux extrémités *E*, *F*, du petit axe.

1840. Il est vrai que le point *G* est différent du point *D*, par lequel passe le diamètre *KL* du parallèle de Paris; mais cela vient de ce que le cercle *AOB* sur lequel nous avons pris les arcs *BL* & *AK* égaux à la latitude de Paris, n'est pas un méridien ni un cercle sur lequel se comptent les latitudes; l'axe est incliné au cercle de projection, le méridien est incliné au cercle *AOB*, le point de l'axe par lequel passe le parallèle de Paris, est bien à une distance du centre égale à *CD*; mais ce point rapporté sur le cercle de projection répond perpendiculairement en *G*, ensorte que *CG* est égale à *CD* multipliée par le cosinus de la déclinaison (1825). Ainsi l'opération que nous venons de faire pour trouver le point *G*, est seulement une construction par laquelle on a les grandeurs *CE* & *CF* telles que nous avons fait voir qu'elles devoient se trouver, mais où la ligne *KDL* ne servira point comme diamètre du parallèle.

Pour le grand axe, 1841. Le grand axe de l'ellipse est le diamètre même du parallèle; ayant pris déja les arcs *AK* & *BL* égaux à la latitude du lieu pour lequel on veut dresser la projection, la ligne droite *KL* sera égale au diamètre du parallèle; or l'on a vu (1829) que le demi-diamètre du parallèle ou le demi-grand-axe de l'ellipse, n'est autre chose que le cosinus de la latitude du lieu. Ayant la grandeur de l'axe on tirera par le centre *G* que nous avons déterminé, une ligne *SGX* parallèle & égale à *KL*, qui est égale au diamètre du parallèle de Paris; *SGX* sera le grand axe de l'ellipse qu'il s'agit de décrire.

Règles pour décrire l'ellipse, 1842. Connoissant le grand axe *SX* & le petit axe *EGF* (1839) de l'ellipse que nous cherchons, il sera

sera aisé de la décrire, c'est-à-dire, d'en trouver tous les points d'heure en heure. On décrira sur le grand axe SX un cercle $SHXQ$, qui représentera le parallèle de Paris, quoique situé dans un plan différent; ce cercle étant divisé en 24 heures aux points marqués 1, 2, 3, &c. on sera sûr que chaque point g du parallèle paroîtra sur la ligne gf perpendiculaire au grand axe SX, tirée par chaque point de division; car quelle que soit l'inclinaison du cercle SHX, & l'obliquité sous laquelle il sera vu, pourvu qu'il passe par les points S & X, le point g de sa circonférence répondra toujours perpendiculairement au point h du grand axe, & l'abscisse Gh de l'ellipse sera toujours le sinus même de l'arc Hg du parallèle, ou de la distance au méridien. *Fig. 111.*

Pour trouver aussi l'ordonnée bh de l'ellipse, au même point, on remarquera que la ligne gh du parallèle étant vue obliquement, doit paroître d'une longueur bh, telle que bh soit à gh, comme le cosinus de l'inclinaison du parallèle est au rayon (1825), ou comme le sinus de la déclinaison du soleil est au rayon (1829), ou enfin comme le petit axe EG est au grand axe HG, donc $HG : gh :: EG : bh$; ainsi gh étant le cosinus de 30° pour le rayon HG, bh sera le cosinus de 30° pour le rayon GE.

1843. Les abscisses de l'ellipse PbX étant les sinus de 15°, 30°, 45°, &c. les ordonnées bh doivent être les cosinus des mêmes arcs, en prenant pour rayon la moitié du petit axe (3264); on marquera donc en partant du centre G les points 1, 2, 3, tels que G 1, soit le sinus de 15° ou de Hg; G 2, le sinus de 30°, &c. pour le rayon GH; aux points 1, 2, 3, &c. on élevera sur GX des perpendiculaires qui soient les cosinus de 15°, 30°, 45°, pour le rayon FG, ou GE, & ces perpendiculaires détermineront les points cherchés & le contour de l'ellipse du parallèle. Décrire l'ellipse.

1844. Pour trouver aisément ces sinus & ces cosinus, au défaut d'un compas de proportion, on décrira du centre G un autre cercle EYF sur le petit axe,

on le divisera comme le cercle *HXQ* en 24 parties, si l'on se contente de 24 heures, ou en 48, si l'on veut avoir une ellipse divisée en demi-heures. Par les points de division du grand cercle, on tirera des lignes *g b f* parallèles au petit axe, & par les points de divisions du petit cercle, qui correspondent aux mêmes heures, on tirera des lignes comme *a b* parallèles au grand axe; celles-ci étant prolongées iront rencontrer les premières dans des points tels que *b*, qui formeront l'ellipse que l'on cherche. Par exemple, la seconde ligne parallèle au petit axe, & qui va du point 30 au point *F*, coupe la seconde ligne *a b*, tirée également à 30° du point *E* parallèlement au grand axe *GX*, dans le point *b*, ce point est celui de l'ellipse qui est à deux heures du méridien. Le point correspondant *c* à gauche marque deux heures après midi. C'est ainsi qu'on a pour chaque heure la projection du parallèle de Paris, & la situation de Paris sur le cercle de projection, à toutes les heures du jour.

Déclinaison septentrionale ou méridionale. *Planche XI. Fig.* 114.

1845. On voit dans la *fig.* 114 une ellipse tracée par la méthode précédente pour 26 degrés de déclinaison, mais dans laquelle on a supprimé toutes les lignes qui ont servi à la décrire. La partie inférieure de l'ellipse a lieu quand la déclinaison est septentrionale; car alors la partie éclairée du parallèle, telle que *BAE*, dans la *fig.* 113, paroît la plus basse ou la plus méridionale par rapport au rayon solaire *TS*. Mais soit qu'on se serve de la partie supérieure ou de la partie inférieure de l'ellipse, il faut toujours considérer Paris, comme allant vers la gauche, c'est-à-dire à l'orient, dans la partie visible du parallèle ou dans la partie qui est tournée vers l'étoile.

Heures du matin ou du soir. *Fig.* 114.

La partie droite ou occidentale de l'ellipse, (*fig.* 114), sert pour les heures du matin, dans les éclipses de soleil; ou si c'est une éclipse d'étoile fixe, cette partie sert avant le passage de l'étoile au méridien, puisque le mouvement de la terre se fait vers l'orient, soit sur la terre, soit sur la projection qui en est l'image; on marque

0^h ou 12^h aux sommets du petit axe, lorsqu'il s'agit du soleil, ou bien l'on y marque l'heure du passage de l'étoile au méridien, lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune.

On voit au bas de la *fig.* 114 les diamètres des ellipses qu'on trouveroit pour différentes déclinaisons en employant le même rayon de projection. On y voit aussi à quelle distance passeroient toutes ces ellipses du sommet *S* de la projection, c'est-à-dire, la valeur de *SV*. J'ai marqué au milieu de l'ellipse les lieux des centres de ces différentes ellipses; chacun pourra les tracer toutes sur autant de cartons différens, pour calculer les éclipses de toutes les étoiles par la lune. *Fig.* 114.

Pour rendre l'usage de cette méthode plus facile, j'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1763, une figure qui peut servir à tracer des ellipses pour tous les degrés de déclinaison, dont l'échelle est double de celle de la *fig.* 114; & sur la même planche, j'en ai tracé plusieurs qui sont divisées exactement de minutes en minutes; on pourra aussi, pour décrire de semblables ellipses, se servir des tables que le P. Pilgram a calculées dans les éphémérides de Vienne pour 1769, de toutes leurs dimensions.

1846. La situation du cercle de latitude ou de l'axe de l'écliptique sur le cercle de projection, par rapport au cercle de déclinaison *CA*, (*fig.* 116), peut se trouver par le moyen du calcul de l'angle de position (1044); mais pour abréger, autant qu'il est possible, l'opération graphique dont nous parlerons bientôt (1848), on peut se servir de la méthode suivante. Je suppose que *FGH*, soit un arc du cercle de projection égal au double de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, que du point *G* où se termine le méridien *CG* de la projection, on ait pris les arcs *GF* & *GH*, chacun de 23° 28′; sur la tangente *GV* de l'arc *GF* & du centre *G*, l'on décrira un demi-cercle *VMX* qu'on divisera en 12 signes, comme l'écliptique, en commençant au point *X* du côté de l'occident, où l'on marquera le Bélier, c'est-à- Tracer le cercle de latitude. *Planche XII.* *Fig.* 116.

Fig. 116. dire, 0s de longitude ; on prendra sur ce cercle un arc égal à la longitude du soleil ou de l'étoile, par exemple, XM ; on abaissera sur le diamètre VX la perpendiculaire MN ; & le point N de la tangente GNV où passera cette perpendiculaire MN, sera le point où l'on devra tirer le cercle de latitude CSN.

En effet, GN est le cosinus de l'arc XM ou de la longitude du soleil, pour le rayon GV ; donc GV : R : : GN : cos. long. ☉ ; c'est-à-dire, $GN = GV$ cos. longit. mais par la construction $GV =$ tang. $23^\circ \frac{1}{2}$ pour le rayon que nous supposons égal à l'unité, c'est-à-dire, CG, donc $GN =$ tang. $23^\circ \frac{1}{2}$ cos. long., cela revient à la proportion suivante, par laquelle on trouve l'angle de position (908, 3680), le rayon est au cosinus de la longitude du soleil, comme la tangente de l'obliquité de l'écliptique est à la tangente de l'angle de position. Donc l'angle NCA est celui que forme le cercle de latitude CN avec le méridien CG.

1847. On pourroit aussi faire une construction semblable pour les étoiles fixes que la lune rencontre, en supposant le cosinus de la latitude égal au rayon (1044) ; l'erreur est insensible, puisque la latitude de la lune ne va pas à 6 degrés ; ensorte qu'il n'y a pas $\frac{1}{120}$ d'erreur à craindre, ce qui ne fait pas 8 minutes de degré sur l'arc AF : or 8′ sont insensibles même sur une figure d'un pied de rayon, telle que j'ai coutume de l'employer. Au reste j'ai donné à l'art. 1046 ces angles calculés pour toutes les étoiles considérables, & j'ai marqué sur la circonférence de la *fig.* 114. les points où il faut tirer le cercle de latitude pour différentes étoiles, telles que γ ♍, c'est-à-dire, l'étoile γ de la constellation de la Vierge, &c. On voit que toutes celles dont la longitude est dans le premier ou le dernier quart de l'écliptique, c'est-à-dire, dans les signes ascendans, sont à la droite du méridien CS, les autres sont à la gauche ; parce que dans la *fig.* 116, les trois premiers & les trois derniers signes de longitude sont dans le quart de cercle $3X$, qui est à l'occident ou

à la droite du point *G*; cela est aisé à appercevoir sur un globe; la direction de l'écliptique tend à l'orient dans tous les cas; si en même temps elle se rapproche du nord, la perpendiculaire doit décliner du côté opposé à la direction de l'écliptique, c'est-à-dire, à l'occident, quand on la considère du côté du nord.

Trouver les phases d'une Eclipse de soleil ou d'étoile, avec la règle & le compas.

1848. On peut par une opération très-commode, & avec l'exactitude d'une minute de temps trouver le commencement & la fin d'une éclipse, sans calculer les parallaxes; j'ai parlé de l'auteur de cette invention, art. 1821.

On voit dans la *fig.* 114 un demi-cercle d'environ 6 pouces de rayon, qui représente la projection de la terre dans l'orbe de la lune (1798); le rayon *CR* est divisé en autant de minutes qu'en contient la différence des parallaxes horizontales de la lune & du soleil, (1797); le diamètre *TR* est parallèle à l'équateur, *CS* est une portion du méridien universel ou du cercle de déclinaison qui passe par le soleil ou par l'étoile; *CK* est la distance du centre de projection au centre de l'ellipse, trouvée ci-dessus (1832); *KF* est le demi-axe de l'ellipse (1841), égal au cosinus de la latitude du lieu pour lequel on calcule une éclipse, par exemple, de Paris. La ligne *KV* ou *KQ* est la moitié du petit axe de l'ellipse, qui est au grand axe comme le sinus de la déclinaison de l'astre est au rayon (1828). Cette ellipse de la *fig.* 114 représente le parallèle de Paris, ou la trace décrite sur le plan de projection par le rayon mené de Paris à une étoile dont la déclinaison est de 26 degrés. *Fig.* 114.

1849. La partie supérieure de l'ellipse est l'arc diurne, ou celui dont on doit faire usage quand la déclinaison du soleil est méridionale; la partie inférieure

Fig. 114. *FQH*, est celle qui sert pour les déclinaisons septentrionales (1845).

1850. On tirera le cercle de latitude *CL* ou l'axe de l'écliptique, qui est à la gauche ou à l'orient du méridien dans le second & troisième quart de longitude, ou dans les signes descendans; il est à la droite ou à l'occident dans les autres signes qui sont 9, 10, 11, 0, 1, 2, de longitude (1847).

1851. La latitude de la lune au moment de la conjonction étant prise sur les divisions de la ligne *CR*, qui sert d'échelle, & portée de *C* en *L* sur le cercle de latitude, le point *L* est celui où doit passer l'orbite de la lune, en lui donnant l'inclinaison convenable. On marquera au point *L* l'heure de la conjonction.

1852. Pour tracer l'orbite de la lune, on tirera au point *L* de la conjonction une ligne *LM* perpendiculaire au cercle de latitude; on prendra la quantité du mouvement horaire de la lune en longitude, moins celui du soleil, sur les divisions de *CR*, & l'on portera ce mouvement de *L* en *M*; on prendra aussi le mouvement horaire en latitude, on le portera de *M* en *N* parallèlement au cercle de latitude; au midi du point *M*, si la lune se rapproche du nord; au nord, si la lune s'approche du midi, c'est-à-dire, si la latitude est australe croissante ou boréale décroissante. Par les points *N* & *L*, on tirera l'orbite de la lune *INL*; on marquera au point *L* l'heure & la minute de la conjonction; on marquera en *N* une heure de moins; l'on divisera *NL* en 60 minutes de temps, & l'on portera les mêmes divisions à gauche du point *L*, pour avoir la situation de la lune de minutes en minutes une heure avant la conjonction, & une heure après. On prolongera même ces divisions plus loin, si cela paroît nécessaire.

1853. On marquera sur l'ellipse les heures du soleil ou de l'étoile qui répondent aux divisions qu'on a trouvées (1844); savoir, les 6 heures du matin à la droite, ou à la partie occidentale de la figure, & les

6 heures du soir à la partie orientale. Ces 12 heures se mettroient dans la partie supérieure de l'ellipse si le soleil ou l'étoile étoit dans les six derniers signes, ou dans les signes méridionaux (1845). Quand il s'agit d'une éclipse d'étoile, c'est l'heure du passage au méridien que l'on écrit sur le méridien, en *V* ou en *Q*. Ces règles seroient les mêmes, si l'observateur étoit dans l'hémisphère austral de la terre, avec cette seule différence que l'ellipse seroit au-dessous ou au midi du centre *C* de la projection.

1854. On prendra sur les divisions de *CR* la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, ou le demi-diamètre seul de la lune, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile. Le compas étant ouvert de cette quantité, on verra si le moment de la conjonction marqué en *L*, & la même minute de temps prise sur les divisions de l'ellipse, sont éloignés entre eux de cette quantité des demi-diamètres, dans ce cas le temps de la conjonction sera aussi le temps du commencement ou de la fin de l'éclipse; ce sera le commencement si le point trouvé sur le parallèle est à l'orient du point *L*; ce sera la fin de l'éclipse si le point de l'ellipse marqué de la même heure que le point *L*, est à l'occident ou à la droite du point *L*.

1855. Si cette distance des points correspondans sur l'ellipse & sur l'orbite de la lune n'est pas égale à la somme des demi-diamètres, on placera le compas à la droite ou à la gauche du point *L* sur l'orbite de la lune comme en *I*; on verra si le point *A* de l'ellipse marqué du même nombre d'heures & de minutes que le point *I* de l'orbite, est à la gauche de celui-ci de la quantité des demi-diamètres; s'il est trop éloigné, on rapprochera peu à peu la branche droite du compas, sans changer l'ouverture, jusqu'à ce que la branche gauche trouve un point *A* de l'ellipse marqué du même nombre de minutes que le point de l'orbite où est la branche droite.

Commencement de l'éclipse.

1856. Quand on aura ainsi trouvé deux temps cor-

respondans, l'un sur l'orbite, l'autre sur le parallèle; tels que *I* & *A*, marqués de la même heure & de la même minute, & éloignés de la quantité *IA*, de manière que le point *I* de l'orbite soit à la droite ou à l'occident du point *A* du parallèle, on sera sûr que ce moment est celui du commencement de l'éclipse; car on a vu que l'éclipse commence pour Paris, quand la distance entre le point de la projection ou Paris voit le soleil, c'est-à-dire, auquel Paris répond, & celui où se trouve la lune au même instant, est égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune (1801).

La lune avance vers l'orient dans son orbite de *I* en *E*, & Paris avance sur son parallèle de *A* en *B*; mais beaucoup plus lentement, puisqu'il faut 12 heures pour décrire la demi-ellipse du parallèle de Paris, tandis que la lune en 2 heures de temps ou environ fait dans son orbite un chemin aussi considérable : ainsi la lune arrivera de l'autre côté ou à l'orient de Paris, & se trouvera en *E* lorsque Paris ne sera arrivé qu'en *B*; ils seront encore une fois à la même distance l'un de l'autre, c'est-à-dire, à une distance *BE*, égale à la somme des demi-diamètres de la lune & du soleil, la lune abandonnant le soleil; & quand on aura trouvé deux points *B* & *E* marqués de la même minute, on sera sûr d'avoir la fin de l'éclipse.

La plus courte distance.

1857. Le milieu de l'éclipse est à peu près le milieu de l'intervalle de temps écoulé entre le commencement & la fin : ainsi l'on cherchera la minute ou le point *D* qui tient le milieu entre ces momens marqués en *I* & en *E*, & la minute ou le point *G* qui tient aussi le milieu entre *A* & *B*. La distance de ces deux points *D* & *G*, dont l'un est sur l'orbite, l'autre sur le parallèle de Paris, donnera la plus courte distance des centres de la lune & du soleil, ou leur distance, dans le temps du milieu de l'éclipse. Cette distance étant portée avec le compas sur les divisions du rayon *CR*, se trouvera exprimée en minutes & en secondes de degré; car sur une échelle d'un pied de rayon, chaque

que minute occupe plus de deux lignes, & l'on y distingue facilement un intervalle de 5 à 6″ : ainsi l'on aura en minutes & en secondes la plus courte distance du centre de la lune au centre du soleil ou de l'étoile, au temps du milieu de l'éclipse. Si le point *D* de l'orbite est au-dessous ou au midi du point *G* du parallèle, ce sera une preuve que la lune passe au midi de l'étoile. *Fig.* 114.

On peut aussi trouver la plus courte distance des centres sans supposer que le milieu de l'éclipse soit à égale distance du commencement & de la fin; il n'y a qu'à mesurer plusieurs fois la distance de la lune à l'étoile, ou la distance des points correspondans marqués de la même minute sur l'orbite & sur l'ellipse, on verra cette distance diminuer peu à peu jusqu'à un certain terme, ou cette distance étant parvenue à son *minimum*, cesse de diminuer pour augmenter un moment après; l'on aura par ce moyen, soit la plus courte distance, soit le temps où elle arrive, qui est le milieu de l'éclipse.

1858. Pour éviter de diviser chaque fois le rayon *CR* de la projection, en autant de parties qu'en contient la parallaxe; c'est-à-dire, tantôt en 54′, tantôt en 61′, sans compter les fractions de minutes, on forme une échelle *EF*, (*fig.* 115), dont les lignes sont plus longues que le rayon du cercle qu'on veut faire servir de projection, lorsque la parallaxe est plus petite; & plus petites quand la parallaxe est plus grande : par exemple, si la parallaxe est de 54′, c'est-à-dire, plus petite d'un sixième que le rayon de la projection qu'on suppose toujours de 60′, il faut avoir une échelle où le compas puisse indiquer 54′ au lieu de 60′; car la même ouverture de compas qui valoit 10′ quand la parallaxe étoit de 60′, ne doit valoir que 9′ quand cette parallaxe n'est que de 54′; il faut donc avoir une échelle plus grande d'un sixième; cette échelle, quoique divisée en 60 parties, n'en fera trouver que 54 quand on y portera le rayon de projection, parce qu'elle est plus grande que ce rayon, & que ses parties ont

Echelle des parallaxes.

Fig. 115.

Fig. 114. plus d'étendue. Aussi la ligne *AB* qui répond à 54′ est plus longue que la ligne supérieure de l'échelle marquée 60, autant que 60 est plus grand que 54; ainsi une portion quelconque de l'orbite ou une ouverture quelconque de compas qui vaudroit 10′ sur la ligne de 60′ ne vaudra que 9′ sur la ligne de 54′, dont les subdivisions sont plus allongées.

Pour faire sentir encore mieux la raison de ce procédé, supposons que la parallaxe étant de 54′, la latitude soit de 27 minutes; il faut prendre la moitié du rayon de la figure, ou du cercle de projection pour avoir la latitude, mais ce rayon est divisé en 60′ sur l'échelle, il en faudroit donc prendre 30 sur cette ligne; mais il revient au même d'en prendre 27 sur une ligne plus grande dans la même proportion, ou de $\frac{1}{9}$; les 27′ de de cette échelle plus longue, en feront 30 sur le rayon de la figure; car 54 : 60 : : 27 : 30, ainsi l'on aura une latitude qui se trouvera la moitié du rayon, comme elle doit l'être; il en est de même du mouvement horaire & des diamètres, qu'on prendra sur une échelle plus longue quand la parallaxe sera plus petite.

1859. Le demi-diamètre de la lune étant toujours les $\frac{3}{11}$ de la parallaxe (1717), on pourra tirer une ligne droite *CD* sur l'échelle, de maniere qu'elle intercepte les $\frac{3}{11}$ de toutes les échelles de parallaxe, en comptant de la ligne marquée 10, 10; on prendra facilement sur cette échelle le demi-diamètre de la lune qui est, par exemple, de 16′ $\frac{2}{3}$ si la parallaxe est de 61′; de 14 $\frac{2}{3}$ si elle est de 54′, & ainsi des autres; on le prendra avec le compas sans avoir besoin d'en savoir la valeur; on néglige ici l'augmentation du diamètre de la lune qui a lieu à différens degrés de hauteur (1509).

Fig. 114 Quand on a la plus courte distance *GD* des centres du soleil & de la lune, & qu'on en veut conclure la grandeur de l'éclipse en doigts (1785), il faut porter cette distance sur le diamètre du soleil, divisé en 12 parties ou 12 doigts, & l'on y voit aisément la partie éclipsée du soleil.

1860. Lorsqu'il s'agit d'une éclipse d'étoile, on suit le même procédé que pour les éclipses de soleil, en observant, 1°, que CL est la différence entre la latitude de la lune & celle de l'étoile ; 2°, que LN est le mouvement horaire de la lune seule, puisque l'étoile n'a aucun mouvement propre ; 3°, que sur les points V ou Q de l'ellipse on marque l'heure du passage au méridien, ou plus exactement, la différence entre son ascension droite & celle du soleil, convertie en temps, pour le temps de l'éclipse ; 4°, que l'on prend la distance IA égale au seul diamètre de la lune. Eclipse d'étoile par la lune.

1861. Exemple. Le 7 Avril 1749, Antarès fut en conjonction avec la lune à $2^h\ 22'$ du matin ; la parallaxe de la lune étoit alors de $57'\frac{1}{4}$, son mouvement horaire $33'\ 12''$ en longitude, & $1'\ 56''$ en latitude décroissante ; la latitude au moment de la conjonction étoit de $3°\ 45'\ 22''$, celle de l'étoile étoit de $4°\ 32'\ 12''$; ainsi la lune étoit au nord de l'étoile de $46'\ 50''$.

Je commence par tirer l'axe de l'écliptique ou le cercle de latitude CL au point qui convient à la longitude d'Antarès $8^s\ 6°\ 16'$ (1046, 1846), je prends sur la ligne qui répond à $57'$ dans l'échelle des parallaxes, une quantité de $46'\ 50''$, & je la porte de C en L sur le cercle de latitude ; au point L je tire la perpendiculaire LM.

Je prends sur la même ligne de l'échelle des parallaxes le mouvement horaire de la lune $33'\frac{1}{5}$, & je le porte de L en M sur la perpendiculaire au cercle de latitude, je porte aussi $2'$ au-dessous du point M, parce que la lune s'avançoit de $2'$ par heure vers le nord, & le point N marque le lieu de la lune une heure avant la conjonction, ou à $1^h\ 22'$ du matin : ayant donc marqué en L le moment de la conjonction $2^h\ 22'$, je marque en N $1^h\ 22'$, & divisant l'intervalle LN en 60 parties ; je marque la situation de la lune de 10 en $10'$, comme on le voit dans la *figure* depuis $0^h\ 50'$ jusqu'à $2^h\ 30'$.

L'heure du passage d'Antarès au méridien de Paris est $3^h\ 11'$ (984), je la marque au sommet V de l'ellipse,

Fig. 114. & je marque 2^h 11′, 1^h 11′, &c. sur les autres divisions de l'ellipse ; je subdivise les intervalles de 10 en 10′, du moins dans les heures où il paroît que l'éclipse peut arriver, c'est-à dire, qui approchent de l'heure de la conjonction.

Je prends sur l'échelle le demi-diamètre de la lune, depuis la ligne 10, 10, jusqu'à la ligne *CD*, & cela sur la ligne de 57′; cette ouverture de compas étant promenée sur l'orbite de la lune & sur l'ellipse, je vois qu'une des pointes étant en *I* sur 1^h 1′, l'autre pointe tombe en *A* sur l'ellipse, & y rencontre aussi 1^h 1′: ainsi la lune étant en *I* à 1^h 1′, & la projection de Paris, ou le lieu apparent de l'étoile en *A*, il doit se faire une éclipse, la distance de la lune à l'étoile étant précisément égale au demi-diamètre de la lune, ce qui suppose un contact de l'étoile au bord de la lune.

Immersion.

Je promène la même ouverture de compas de l'autre côté en avançant vers l'orient, & je trouve qu'une des pointes étant en *E* sur 2^h 11′, l'autre pointe tombe aussi à 2^h 11′ sur l'ellipse en *B*, c'est le moment de l'émersion ; la lune a donc parcouru la portion *IE* de son orbite, depuis le moment de l'immersion jusqu'à celui de l'émersion, & le lieu apparent de l'étoile a changé de la quantité *AB*. C'est vers le milieu de cet intervalle, la lune étant en *D* & l'étoile en *G*, qu'est arrivée la plus courte distance ; on s'en assurera en mesurant la distance de minute en minute ; car l'on verra qu'aux environs de 1^h 36′ elle cesse de diminuer, après quoi elle augmente ; cette plus courte distance *DG* étant portée sur la ligne 57 de l'échelle des parallaxes, se trouvera de 6′, ce qui m'apprend que le centre de la lune a passé 6′ au midi de l'étoile, vers le temps de la conjonction apparente.

Emersion.

La plus courte distance.

Changement pour différentes latitudes.

1862. Les opérations que je viens de décrire, supposent que la *figure* 114 est dressée pour Paris ; s'il étoit question de toute autre latitude la distance *CK* du centre de la projection au centre de l'ellipse, seroit différente. Car cette distance augmente quand la latitude ou la hauteur

du pole devient plus grande (1832); cependant une seule ellipse étant donnée, & son ouverture conforme à la déclinaison du soleil ou de l'étoile dont il s'agit, on peut la faire servir pour toutes les latitudes géographiques, en plaçant le centre *C* de la projection à différentes distances du centre *K* de l'ellipse. En effet, dès que l'ellipse est tracée de l'ouverture convenable, c'est-à-dire, que son grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de la déclinaison de l'astre, elle peut servir pour exprimer toutes sortes de parallèles, ou de cercles qui sont vus sous une même obliquité & qui forment tous des ellipses semblables; il ne s'agit plus que de proportionner le reste de la figure, c'est-à-dire, la distance du centre de projection & le rayon du globe ou de sa projection, de façon que l'ellipse y occupe la place du parallèle terrestre qu'il s'agit de représenter: or, voici la manière de le faire. La distance *CK* est égale à cos. déclin. sin. latit. (1832), en supposant que *CR* est le rayon: si l'on veut prendre pour rayon, ou pour échelle le demi-diamètre du parallèle, ou le cosinus de la latitude, il faudra encore faire cette proportion: le cosinus de la latitude est à l'unité, comme la valeur de *CK* est à sa valeur en parties du parallèle, qui sera par conséquent $\frac{\text{sin. lat.}}{\text{cos. lat.}}$ cos. déclin.; mais $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ = tang.; donc *CK* = tang. lat. cos. déclin. Ainsi *la distance du centre de la projection au centre du parallèle ou de l'ellipse, est égale à la tangente de la latitude, multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre*, en prenant pour unité le demi-diamètre du parallèle, ou le demi-axe *KF* de l'ellipse. *Fig.* 114. Distance des deux centres.

1863. Exemple. Dans le passage de Vénus de 1761, la déclinaison du soleil étoit de 22° 42′; je suppose qu'on ait décrit l'ellipse qui convient à cette déclinaison, c'est-à-dire, une ellipse dont le grand axe est au petit, comme l'unité est au sinus de 22° 42′, & qu'on veuille faire servir cette ellipse pour la latitude de 10°, on ajoutera le logarithme de la tangente de 10° avec celui du cosinus de 22° 42′, la somme étant cherchée

dans les nombres naturels, on trouve 0, 163 pour la distance qu'il y a entre le centre de l'ellipse & le centre du cercle qui doit servir de projection, en supposant que le demi-axe de l'ellipse est l'unité, ou 163, en supposant ce demi-axe divisé en 1000 parties. On trouvera de même la distance qui convient aux autres latitudes de 10 en 10°. pour la même déclinaison de 22° 42′.

Rayon de projection.

1864. On doit chercher aussi la longueur du rayon de projection pour la latitude donnée; mais il est évident que ce n'est autre chose que la sécante de la latitude du lieu, en prenant pour rayon le demi-diamètre du parallèle : car si *DL*, (*fig.* 112), étoit pris pour rayon d'un cercle décrit du centre *L*, la ligne menée de *C* en *L* seroit la sécante de l'angle *CLD* égal à l'arc *LB*, qui est la latitude du lieu; ainsi l'on cherchera dans les tables ordinaires les sécantes de chaque latitude, & divisant le rayon *DL* de l'ellipse en 1000 parties, on prendra sur ces divisions la grandeur du rayon de chaque projection, par exemple, 2000 pour 60° de latitude; & l'on aura la longueur du rayon avec lequel il faut décrire le cercle de projection, en partant du centre qu'on a trouvé (1863): c'est ce rayon de projection qu'il faut diviser en autant de parties qu'en contient la différence des parallaxes; ainsi l'échelle des parallaxes (*fig.* 115), doit être augmentée dans la proportion des sécantes des latitudes, par ce moyen la même ellipse servira pour différens pays, en employant différentes échelles, (2075).

Fig. 112.

Fig. 115.

1865. La table suivante contient la valeur de la distance des centres *CK* (*fig.* 114) pour différentes latitudes & différentes déclinaisons; c'est par le moyen de cette table que j'ai marqué dans la *fig.* 114, aux environs du centre *K*, les points où doit être le centre de l'ellipse pour Paris, à différentes déclinaisons; on voit que le centre de l'ellipse qui sert pour 28° de déclinaison, est plus près du centre *C* de la projection d'environ six lignes, que le centre de l'ellipse qui répond à zéro, ou plutôt de la ligne droite qui en tient

Fig. 114.

lieu quand la déclinaison est nulle. Cette même table servira pour marquer dans la Planche XV, à l'occasion du passage de Vénus, le rayon de la projection pour différentes latitudes (2077).

Distance du centre de la Projection au centre de l'Ellipse, pour différentes latitudes & différentes déclinaisons, en supposant le demi-axe de 1000; avec le rayon de Projection, pour chaque latitude.

Degrés de Latit.	Degrés de déclinaison.												Rayon de projec.
	0	3	6	9	12	15	18	21	2242	24	27	30	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
5	87	87	87	86	86	84	83	82	81	80	78	76	1004
10	176	176	175	174	172	170	168	165	163	161	157	153	1015
15	268	268	260	265	262	259	255	250	247	245	239	232	1035
20	364	363	362	359	356	352	346	340	336	332	324	315	1064
25	466	466	460	461	456	450	443	435	430	426	415	404	1103
30	577	577	574	570	565	558	549	539	533	527	514	500	1155
35	700	699	696	692	685	676	666	654	646	640	624	606	1221
40	839	838	834	828	821	810	798	783	774	767	748	727	1305
45	1000	999	994	988	978	966	951	934	923	913	891	866	1414
48 5/8	1143	1142	1137	1130	1119	1105	1088	1068	1055	1045	1019	990	1519
50	1192	1190	1185	1177	1166	1151	1133	1113	1099	1089	1062	1032	1556
55	1428	1426	1420	1411	1397	1379	1358	1333	1318	1305	1272	1237	1743
60	1732	1730	1723	1711	1694	1673	1647	1617	1598	1582	1543	1500	2000
65	2144	2142	2133	2118	2098	2071	2040	2002	1978	1959	1911	1857	2366
70	2747	2744	2732	2714	2687	2654	2613	2565	2535	2510	2448	2379	2924

1866. Par le moyen de cette table on peut faire servir une seule ellipse pour tous les pays du monde, au lieu que suivant le procédé de l'article 1839, on décriroit sur le même cercle de projection une ellipse pour chaque latitude. Les positions & les grandeurs de ces ellipses seroient différentes, comme on le voit dans la Planche XIII; mais leur ellipticité, leur figure, le rapport de leurs axes seroit le même, parce qu'il ne dépend que de la déclinaison du soleil, (1827);

& comme les ellipses sont difficiles à décrire, il est souvent plus commode en calculant pour plusieurs lieux, de conserver l'ellipse, & de changer le centre du cercle de projection aussi bien que la grandeur du rayon : on en verra une application importante à l'occasion du passage de Vénus, où cette méthode s'emploie avec succès (2076). On trouvera aussi des tables détaillées, & propres à tracer ces sortes de figures pour tous les pays, calculées par le P. Pilgram, d'après ma méthode, dans le livre intitulé : *Ephemerides astronomicæ, anni* 1769, *ad meridianum Vindobonensem, Viennæ* 1769.

1867. L'augmentation du diamètre de la lune à diverses hauteurs (1509), doit entrer dans cette opération d'une façon particulière : c'est au diamètre du soleil qu'il convient de l'appliquer, si l'on vouloit porter la précision jusques-là. Supposons Paris au point *F* (*fig.* 104), ensorte qu'il voie le centre du soleil au point *H* de la projection, la lune étant en *L*; si la distance *HL* ou l'angle *HFL* compris entre les centres du soleil & de la lune égale la somme des demi-diamètres, ce sera la fin de l'éclipse; mais ce sont les demi-diamètres vus du point *F*, & non pas vus du point *N*, ou vus du centre de la terre qu'il faut prendre; la différence est nulle pour le soleil, mais elle est sensible pour la lune, & va jusqu'à 18″ ou une demi-minute de temps. Mais si le demi-diamètre de la lune paroît plus grand, l'arc total de la projection *HL* paroît plus grand aussi, dans la même proportion, & si le diamètre du soleil étoit augmenté de même, il ne seroit plus nécessaire d'avoir égard à l'augmentation de *HL*, tout resteroit proportionnel, la projection, les diamètres & le mouvement horaire. Alors les phases de l'éclipse seroient les mêmes vues du point *F*, ou vues du point *N*; il vaut donc mieux appliquer l'augmentation au diamètre du soleil, qu'au diamètre de la lune, afin de n'avoir rien à changer dans les autres parties de la figure & du calcul.

Fig. 104.

En

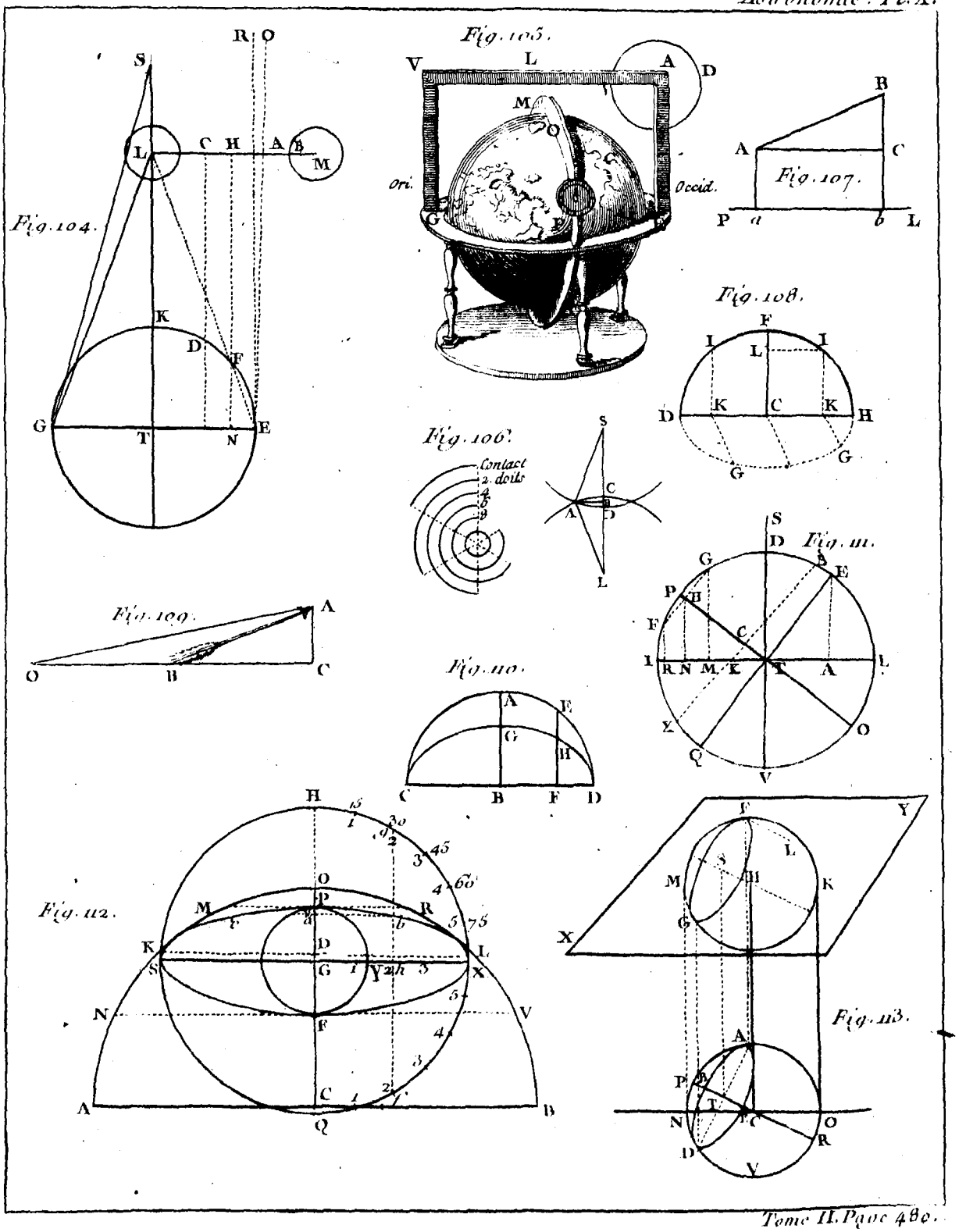
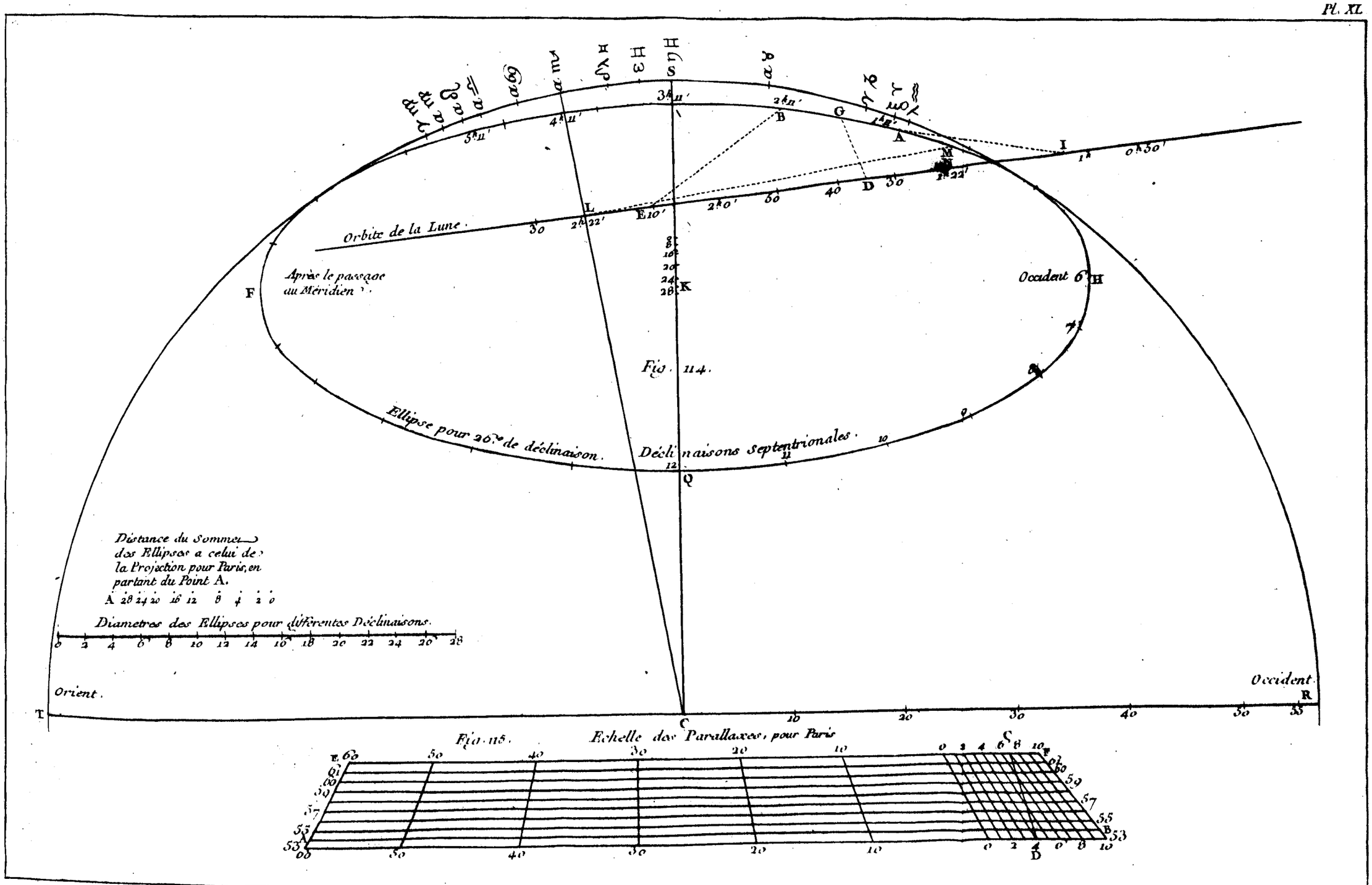


Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Contact
2. doits
Ori.
Occid.


Orbite de la Lune.
Après le passage au Méridien.
Occident 6 H
Fig. 114.
Ellipse pour 26.° de déclinaison.
Déclinaisons septentrionales.
Distance du Sommet des Ellipses a celui de la Projection pour Paris, en partant du Point A.
A 28 24 20 16 12 8 4 2 0
Diametres des Ellipses pour différentes Déclinaisons.
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28
Orient.
Occident.
Fig. 115.
Echelle des Parallaxes, pour Paris

En effet, supposons pour rendre les choses très-sensibles, & les calculs très-simples que le point *K* où est l'observateur, soit à la moitié de *TL* ou de la distance de la lune, que le rayon de projection *LA* au lieu d'être d'un degré paroisse de deux degrés; que le mouvement horaire vu du point *K* ait également doublé & soit d'un degré, & le diamètre de la lune d'un degré; si le diamètre du soleil étoit aussi doublé & qu'il parût d'un degré, la distance des centres *CL* commencement de l'éclipse seroit de 1°, & ce commencement paroîtroit arriver une heure avant que la lune fût au point *L*, ou se fait la conjonction; & il en seroit tout de même pour le centre *T* de la terre, où les quantités précédentes paroîtroient moindres de moitié; mais si le demi-diamètre du soleil ne participe pas à cette augmentation vue du point *K*, il faudra pour réduire tout à ce qu'on auroit vu du centre de la terre augmenter le demi-diamètre du soleil. Si c'est une étoile dont on calcule l'éclipse, il n'y aura point de correction à faire pour la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon. Fig. 104.

Méthodes pour calculer rigoureusement les éclipses sujettes aux parallaxes.

1868. Nous avons expliqué assez au long la manière de trouver par une opération graphique le commencement & la fin d'une éclipse de soleil ou d'étoile. Nous allons passer à l'explication des méthodes rigoureuses où l'on employe le calcul, pour trouver jusqu'à la précision des secondes les résultats qu'on ne pouvoit trouver qu'à une minute près par le moyen de l'opération graphique; & nous expliquerons quatre méthodes différentes.

Lorsqu'on ne veut calculer une éclipse de soleil que pour la prédire dans les éphémérides, la méthode graphique (1848) est suffisante; on auroit tort, ce me

ſemble, de mettre beaucoup de temps à les calculer en ſecondes, avec une préciſion à laquelle les tables ne répondent pas, puiſque l'erreur des tables de la lune, qui va quelquefois à une minute, entraîne deux minutes d'incertitude ſur le temps du commencement & de la fin d'une éclipſe.

Mais lorſqu'on a quelque raiſon particulière de ſe préparer à une obſervation, lorſqu'on a obſervé une éclipſe de ſoleil ou d'étoile, & qu'on veut l'employer à trouver le lieu de la lune, le temps de la conjonction & l'erreur des tables; c'eſt alors qu'on doit faire avec la dernière préciſion le calcul de l'éclipſe, & qu'on peut en chercher le commencement & la fin par les méthodes exactes que nous allons expliquer.

Quatre méthodes différentes.

Il y a quatre méthodes employées pour cet effet par les aſtronomes; celle des projections, employée par M. de la Hire, & par M. Caſſini; celle du nonagéſime & des parallaxes de longitude, employée par M. de la Caille, dans ſes Leçons d'aſtronomie; celle des angles parallactiques & des parallaxes de hauteur, que je préfère, comme étant la plus courte & la plus exacte, au moyen de la forme que je lui ai donnée, (1881); enfin la méthode analytique donnée dans les mémoires de l'académie par M. du Séjour.

Néceſſités des Figures.

1869. Je commencerai par avertir le Lecteur, qu'en entreprenant le calcul exact d'une éclipſe, il eſt utile & même néceſſaire de former une figure, où l'on marque à peu-près avec la règle & le compas les angles que l'on aura trouvés par le calcul, & les lignes que l'on aura déterminées, ſuivant leur poſition & leur grandeur. Sans ce ſecours, il eſt aiſé de ſe tromper, en ajoutant quelquefois ce qui doit être ſouſtrait; d'ailleurs cette précaution dont je ſuppoſerai qu'on faſſe uſage, épargnera beaucoup de détails ſur les règles & ſur les exceptions qui ont lieu dans différens cas pour la poſition de la lune, par rapport au vertical, au cercle de déclinaiſon, au cercle de latitude, & à la perpendiculaire ſur l'orbite.

MÉTHODE DES PROJECTIONS.

1870. PARMI les différentes manières de calculer la projection, je choisirai celle de M. Cassini, comme étant la plus simple, & je prendrai pour exemple l'éclipse de soleil du 28 Février 1710, employée dans les tables astronomiques de M. Cassini, *pag.* 53; mais dont cet auteur n'a donné que l'opération graphique, & j'y appliquerai le calcul trigonométrique. Je suppose le temps de la conjonction au 28 Février 1710, 0^h 18′ après midi, la déclinaison du soleil 7° 59′ 42″, la latitude de la lune en conjonction 46′ 31″, l'inclinaison de l'orbite relative 5° 42′ 26″ (1765), le mouvement horaire relatif 27′ 10″, le milieu de l'éclipse générale en *T* (*fig.* 116) à 12^h 7′ 47″, la distance perpendiculaire *CT* (1808) de 46′ 17″, l'angle de position 22° 9′ 27″, qui ajouté avec l'inclinaison donne l'angle *ACT* de 27° 51′ 53″; la différence des parallaxes horizontales, ou le rayon de la projection 54′ 28″; le demi-grand axe *DK* ou le cosinus de la latitude de Paris, 35′ 51″, le demi-petit axe 4′ 59″ 5, & la distance *CD* du centre de la projection à celui de l'ellipse = 40′ 36″ 5. Soit *O* le lieu de Paris sur son parallèle *K.OA* à 11^h 43′ 30″, *L* le lieu de la lune sur son orbite *LT*, on demande la distance apparente des centres de la lune & du soleil, ou la valeur de la ligne *OL*, pour ce moment-là, c'est-à-dire, 34′ 30″ avant la conjonction, ou 24′ 17″ avant le milieu de l'éclipse générale; c'est le temps du commencement de l'éclipse trouvé par l'opération graphique, (*M. Cassini, tab. astron. pag.* 55).

Méthode pour calculer la projection.

Fig. 116.

1871. Puisque le mouvement de la lune est de 27′ 10″ en une heure, il sera de 10′ 59″ 7 en 24′ 17″ de temps, & l'on aura la portion de l'orbite lunaire *TL* = 10′ 59″ 7; on dira *CT* est à *TL*, comme le rayon est à la tangente de l'angle *TCL* qu'on trouvera de 13° 21′ 45″, ensuite sin. *TCL* : : *TL* : *R* : *CL*, qui sera de 2854″ 5 ou 47′ 34″ 5.

Fig. 116. Pour trouver l'angle OCA, l'on considérera que la distance depuis l'heure donnée $11^h\ 43'\ 30''$ jusqu'à midi est de $16'\ \frac{1}{2}$, ce qui répond à $4^\circ\ 7'\ 30''$; le demi-grand axe de l'ellipse multiplié par le sinus de $4^\circ\ 7'\ \frac{1}{2}$, donnera $OB = 154''\ 7$, & le demi-petit axe multiplié par le cosinus de $4^\circ\ 7'\ \frac{1}{2}$, donnera $DB = 298''\ 7$, (1843); DB étant ajouté avec $CD =$ sin. latit. cos. déclin. (1832) $= 2436'', 5$, donnera $CB = 2735'', 2$.

Dans le triangle BCO rectangle en B, dont on connoît les deux côtés CB & BO, l'on trouvera l'angle $OCB = 3^\circ\ 14'\ 16''\ 6$, & l'hypothénuse $CO = 45'\ 39''\ 6$. On prendra la différence de l'angle OCB & de l'angle ACT, qui est lui-même la somme, quelquefois la différence de l'angle de position $22^\circ\ 9'\ 27''$, & de l'angle d'inclinaison $5^\circ\ 42'\ 26''$, (1934); cette différence donnera l'angle $OCT = 24^\circ\ 37'\ 36''\ 4$, la somme de l'angle OCT & de l'angle LCT, trouvé ci-dessus de $13^\circ\ 21'\ 45''$ (1871), sera l'angle $OCL = 37^\circ\ 59'\ 21''\ 4$. On connoîtra aisément les cas où il faut prendre la somme ou la différence, en examinant la situation respective des points L, O & T.

1872. Dans le triangle OCL, on connoît les deux côtés OC, CL & l'angle compris OCL; il ne restera plus qu'à chercher le côté OL, qui est la distance apparente des centres, en disant la somme des côtés OC, CL qui est $93'\ 14''\ 1$ est à leur différence $1'\ 54''\ 9$, comme la tangente de la demi-somme des angles inconnus, $71^\circ\ 0'\ 19''\ 3$, est à la tangente de leur demi-différence $3^\circ\ 24'\ 53''$; ainsi l'angle O sera de $74^\circ\ 25'\ 12''\ 3$, d'où l'on conclura enfin le côté OL de $30'\ 24''$: c'est la distance apparente des centres du soleil & de la lune à $11^h\ 43'\ 30''$.

Distance apparente des centres.

1873. Le moment pour lequel on a calculé seroit le moment même du vrai commencement de l'éclipse, si l'on eût trouvé la distance apparente égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; mais le demi-diamètre du soleil étoit de $16'\ 12''$, celui de la lune à l'horizon $14'\ 46''$; & comme la lune avoit 33°

de hauteur, il y a 9″ pour l'augmentation du demi-diamètre, ainsi la somme étoit 31′ 7″, & la distance apparente des centres est plus petite de 43″ que la somme des demi-diamètres du soleil & de la ☾; cela prouve que l'éclipse étoit déja commencée; on fera un semblable calcul de la distance apparente pour 11^h 40′, & l'on trouvera 63″ de plus pour la distance des centres : ainsi en 3′ ½ de temps la distance apparente changeoit de 63″, donc elle change de 43″ en 2′ 23″; on ôtera cette quantités de l'heure du premier calcul 11^h 43′ 30″, & l'on aura 11^h 41′ 7″ pour le commencement de l'éclipse. On pourroit tracer, par le moyen de deux calculs semblables, l'orbite apparente de la lune, pour trouver les autres phases de l'éclipse; c'est ce que j'expliquerai dans la méthode suivante (1879).

Si l'on veut avoir égard à l'inflexion des rayons (1992), il faudra oter 4″ ½ de la somme des demi-diamètres apparens, ou de 31′ 7″, avant que de la comparer avec la distance apparente calculée, parce que l'inflexion fait paroître le commencement de l'éclipse plus tard, & la fin plutôt qu'on ne les observeroit si ces phases ne dépendoient que de la somme des demi-diamètres apparens. Inflexion.

1874. Cette méthode des projections suppose implicitement que la hauteur de la lune soit égale à celle du soleil, ou que la parallaxe de la lune soit proportionnelle au cosinus de la hauteur du soleil; en effet, si le point *Y* est le vrai lieu de la lune sur son orbite, *O* la projection de Paris ou le lieu du soleil vu de Paris, *C* le vrai lieu du soleil vu du centre de la terre, *CY* est la vraie distance des centres du soleil & de la lune, *YO* la distance apparente (1800), & *CO* la parallaxe de hauteur (1834), cependant le point *O* ne dépend que du lieu du soleil, & nullement de la situation de la lune en *Y* ou en *L*, ainsi cette parallaxe ne dépend que de la hauteur du soleil.

Si un point *K* de la terre (*fig.* 104) qui voit le soleil *S* à son zénit voyoit le bord de la lune au point *Fig.* 104.

L, c'eſt-à-dire, également au zénit, la parallaxe ſeroit nulle en ſuivant les règles de la projection, mais dans le vrai, le centre de la lune en ſuppoſant ſon demi-diamètre de 15′ ſeroit à 15′ du zénit, & la parallaxe de ſon centre ſeroit véritablement de 14″ $\frac{1}{2}$, quoiqu'elle paroiſſe nulle dans la figure, & que le lieu de la terre pour lequel on calcule ſoit au centre même de la projection.

On y remédieroit dans ce cas-là, en augmentant la diſtance apparente des centres donnée par la projection, à raiſon de la hauteur de la lune ſur l'horizon, par le moyen de la table qui ſert pour les diamètres de la lune; en effet, l'augmentation du demi-diamètre de la lune, quand il paroît au zénit eſt de 15″; c'eſt la différence entre la parallaxe du bord & la parallaxe du centre (1510), où la quantité dont la diſtance du centre de la lune au centre du ſoleil vue de la ſurface *K* eſt plus grande que celle qu'on voit du centre *T* de la terre; cette augmentation eſt proportionnelle à la diſtance apparente, elle eſt de 29″ pour 30′; ainſi elle ſerviroit à corriger la diſtance trouvée par la méthode des projections dans le cas où les deux centres ſeroient dans le même vertical.

1875. M. de la Caille, dans les Mémoires de la l'académie pour 1744, *pag.* 202 & ſuiv. fait voir de quelle manière on pourroit calculer rigoureuſement une éclipſe par le moyen des projections; c'eſt-à-dire, corriger la méthode précédente; mais celle de M. de la Caille m'a paru plus longue, ſans être auſſi exacte que celle qui ſera détaillée ci-après (1881). D'ailleurs M. du Séjour a traité la projection de la manière la plus exacte dans la méthode analytique, dont on verra bientôt la formule (1923).

Calcul d'une Eclipſe par le Nonagéſime.

1876. Le nonagésime (1660), fournit une ſeconde méthode pour le calcul d'une éclipſe; mais dans cette méthode, il faut, pour avoir la diſtance apparente des

centres, chercher la différence apparente de longitude & de latitude, entre la lune & le soleil. Je suppose donc que pour un instant donné, l'on veuille trouver la distance apparente des centres; il faut avoir pour cet instant la parallaxe de longitude & celle de latitude 1665 & suiv.

Si la lune est à l'orient du nonagésime (1676), il faut ajouter la parallaxe de longitude avec la longitude vraie, pour avoir la longitude apparente de la lune. Mais si la longitude de la lune est occidentale, c'est-à-dire, plus petite que celle du nonagésime, pourvu que la différence ne soit pas de 180°, il faut retrancher la parallaxe.

La somme ou la différence de 90°, & de la latitude vraie de la lune, suivant qu'elle est australe ou boréale est la distance au pole boréal de l'écliptique; on ajoute la parallaxe en latitude à la distance vraie de la lune au pole de l'écliptique pour avoir sa distance apparente au pole; ayant fait le même calcul pour deux instans, on verra si la lune se rapproche ou s'éloigne de l'écliptique.

1877. On prendra la différence entre la longitude du soleil & la longitude apparente de la lune pour avoir la différence apparente en longitude. Soit *DE* (*fig.* 121) une portion de l'écliptique, *S* le lieu du soleil au moment pour lequel on calcule, *L* le lieu apparent de la lune, *EL* sa latitude apparente, *SE* sa différence apparente de longitude avec le soleil : dans le triangle *SEL*, rectangle en *E*, l'on connoîtra deux côtés *SE* & *EL*; on cherchera l'hypothénuse *SL*, qui est la distance apparente des centres du soleil & de la lune. Pour cela, on ajoutera les carrés des deux côtés, & l'on cherchera la racine de la somme; ou bien on fera les deux proportions suivantes $SE : EL :: R :$ tang. *ESL*, & sin. $ESL : R :: EL : SL$, distance apparente des centres. Trouver la distance apparente. *Fig.* 121.

Exemple. Le 1 Avril 1764 à 9^h 10′ du matin à Paris, où la latitude est de 48° 50′, on demande la

distance apparente de la lune au soleil. Supposons la différence de longitude vraie entre la lune & le soleil, suivant les tables, de 37′ 11″ & la latitude de la lune 36′ 21″ boréale, sa déclinaison 4° 48′, le lieu du soleil 0ˢ 11° 29′ 25″, l'ascension droite du milieu du ciel 21° 54′ 32″; la longitude du nonagésime 11ˢ 28° 31′ 55″; la hauteur du nonagésime 34° 12′ 30″, la différence des parallaxes horizontales à Paris 54′ 0″; on trouve pour
Fig. 94. la parallaxe réduite au point *K* (*fig.* 94) 54′ 20″ 8, la parallaxe de longitude (1665) 6′ 55″ 8; la correction de l'applatissement, en supposant l'angle de la verticale & du rayon de la terre 19′, est $\frac{54'\,0''.\ \text{sin. } 19'\ \text{sin. } 23^\circ\ \text{cos. } 11^\circ\,29'}{\text{cos. } 48^\circ\,50'.\ \text{cos. } 0^\circ\,36'} = 10''$ 6 (1700), la parallaxe exacte 7′ 6″ 4 & la distance à la conjonction apparente 30′ 4″ 6.

La 1ʳᵉ partie de la parall. en latitude (1668) = 44′ 57″: la seconde partie (1670) + 4″, la correction de l'applatissement (1698) $\frac{54'\,0''.\ \text{sin. } 19'}{\text{cos. } 48^\circ\,50'}\left(\frac{\text{cos. } 23^\circ}{\text{cos. } 0^\circ\,36'} - \text{sin. } 4^\circ\,48'\right.$ tang. $\left.0^\circ\,36'\right) = 25''$, ensorte que la parallaxe entiere de latitude est 44′ 36″; la latitude vraie étant 36′ 21″ la latitude apparente est 8′ 15″. Connoissant les deux
Fig. 121. côtés *EL*, *SE* (*fig.* 121), dont l'un est de 8′ 15″, & l'autre de 30′ 5″; on trouvera l'hypothénuse ou la distance apparente *SL* des centres du soleil & de la lune 31′ 12″, la même que par la nouvelle méthode (1918).

Si l'on veut comparer cette distance avec la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, il faudra y ajouter 4″ ½ à cause de l'inflexion des rayons (1992), qui fait paroître trop grandes toutes les distances de la lune au soleil ou aux étoiles, & l'on aura 31′ 16″ ½ distance apparente qui, pour le temps du commencement de l'éclipse, doit être égale à la somme des demi-diamètres.

Exception pour les étoiles.

1878. S'il s'agit d'une éclipse d'étoile par la lune, ou d'une autre éclipse dans laquelle la lune ait une latitude sensible, il faudra avoir soin de multiplier la différence de longitude *HI* par le cosinus de la latitude apparente

apparente *IL*, pour avoir cette différence *SE* en arc de grand cercle dans l'endroit où se trouve la lune, qui est la quantité dont nous avons fait usage.

1879. On fera le même calcul une heure après, & l'on aura une autre distance apparente *SF* (*fig.* 121) de la lune au soleil, & l'angle *DSF*, par le moyen de la différence de longitude apparente *SD*, & de la latitude apparente *FD* (1877). On connoîtra aussi par ce moyen le mouvement apparent en longitude relativement au soleil, *ED* ou *AF*, & le mouvement apparent en latitude *AL*. Connoissant *FA* & *LA* on calculera l'angle *AFL*, qui est l'inclinaison du mouvement apparent, & la ligne *LF*, qui est le mouvement de la lune relativement au soleil, sur l'orbite apparente ou affectée par la parallaxe. Cet angle *AFL* peut être de plus de 20 degrés dans certains cas, comme quand la lune est dans son nœud descendant, & que le nonagésime à 0^s de longitude; car alors le changement de la parallaxe porte la lune du même côté que l'inclinaison de son orbite, ce qui augmente l'inclinaison apparente. On aura donc l'angle *SLF*, égal à la somme des angles *ESL*, *AFL*; quelquefois c'est leur différence; on en conclura la perpendiculaire *SB*, qui est la plus courte distance apparente de la lune au soleil; & le temps où la lune a été en *B*, c'est le milieu de l'éclipse; en supposant que l'orbite apparente est rectiligne pendant une heure de temps, ce qui est sensiblement vrai, cette perpendiculaire donnera la grandeur de l'éclipse de soleil.

Fig. 121.

Orbite apparente de la lune.

On supposera *SL* égal à la somme des demi-diamètres apparens du soleil & de la lune; connoissant *SL* & *SB*, on cherchera la ligne *BL*, on la convertira en temps, à raison du mouvement sur l'orbite apparente trouvé ci-dessus, & l'on saura combien la lune a employé de temps à aller de *B* en *L*. Or l'on connoît le temps du milieu de l'éclipse en *B*, donc on connoîtra le moment de la fin en *F*, & celui du commencement en *L*. (*Kepler Epit. astr. p.* 888).

Il faut bien distinguer cette *orbite apparente* affectée par la parallaxe, & que nous venons de déterminer, de

l'orbite relative (1765), qui peut être représentée ici par une autre ligne *MN*; nous n'en parlerons point dans le cas actuel. On se rappelle que dans l'orbite relative il s'agit du mouvement vrai de la lune, vu du centre de la terre par rapport au soleil supposé fixe en *S*; on le détermine par le moyen des latitudes vraies *EM*, *DN*, qui peuvent aller d'un autre sens & être d'une autre dénomination que les latitudes apparentes *EL*, *DF*.

1880. Quand on voudra connoître avec une grande précision la grandeur de l'éclipse, il faudra calculer deux autres distances apparentes, comme nous avons calculé *SF* & *SL*, mais plus voisines du milieu *B* de l'éclipse, & se servir de ces nouvelles distances pour trouver la perpendiculaire *SB*. Mais si l'orbite apparente *FL* n'est pas parfaitement rectiligne, comme nous l'avons supposé pendant la durée d'une éclipse, la différence ne va jamais qu'à peu de chose: dans l'éclipse de 1748, je n'ai trouvé que 3″ de courbure en 40′ de temps, par un calcul rigoureux. La plus courte distance *SB*, fait connoître la grandeur de l'éclipse, à peu près comme dans les éclipses de lune (1785); *car la somme des diamètres apparens de la lune & du soleil, moins la plus courte distance apparente des centres, donne la grandeur de l'éclipse.* Cette maniere de déterminer les phases par le moyen de l'orbite apparente, est beaucoup plus facile que celle des interpolations indiquée par M. de la Caille dans ses leçons d'astronomie, art. 1140.

Règle pour la grandeur de l'éclipse.

Le diamètre apparent de la lune exige que l'on connoisse sa hauteur, du moins à peu près, pour trouver l'augmentation (1509). On peut trouver cette hauteur grossiérement avec un globe; mais si l'on veut mettre de la précision dans ce calcul, on est obligé, pour ce seul objet, quoique extrêmement petit, de faire tout le calcul de la hauteur (1034). Cela seul donne à la méthode du nonagésime un désavantage marqué; la méthode suivante, non-seulement par cette raison, mais en général, par sa simplicité & son exactitude, me paroît être sans contredit préférable.

NOUVELLE MÉTHODE POUR CALCULER *les Eclipses.*

1881. JE passe enfin à ma méthode, que je crois être la plus courte, la plus générale, la plus exacte; j'y fais usage des angles parallactiques, ainsi que les plus anciens astronomes, à compter depuis Ptolomée; mais d'une maniere beaucoup plus simple, & sans négliger l'applatissement de la terre, ni aucune des considérations nécessaires pour l'exactitude des résultats. Ma méthode consiste à trouver la différence de hauteur & d'azimut entre les deux astres qui sont en conjonction, pour en conclure leur distance apparente, qui est le terme auquel on se propose de parvenir, pour trouver le commencement & la fin d'une éclipse (1873), ou pour tracer l'orbite apparente (1879).

Calcul par les angles parallactiques.

La premiere opération qui est nécessaire dans ce calcul, est de trouver la hauteur du soleil ou de l'étoile que la lune doit éclipser. Je suppose qu'on ait calculé par les tables, pour un moment donné, la longitude du soleil ou de l'étoile & la latitude de celle-ci; la longitude & la latitude vraie de la lune, sa parallaxe horizontale, la déclinaison du soleil ou de l'étoile, & leurs ascensions droites; enfin l'angle de position du soleil (908) ou de l'étoile (1044), & son angle horaire (1008): par le moyen de la déclinaison & de l'angle horaire, on calculera sa hauteur (1034), & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison (1036).

Calculs préliminaires.

1882. EXEMPLE. Le premier Avril 1764, la conjonction vraie est indiquée par les tables à $10^h\ 32'\ 7''$ du matin, la latitude de la lune étant de $40'\ 4''$ boréale à l'heure de la conjonction; la différence des mouvemens horaires en longitude $27'\ 10''$; le mouvement horaire de la lune en latitude $2'\ 43''\frac{1}{2}$ du midi au nord, sa parallaxe $54'\ 9''$, celle du soleil $9''$. Si l'on demande à $9^h\ 10'$ du matin la distance apparente des

Elémens pour le premier Avril 1764.

centres du soleil & de la lune, on aura la déclinaison du soleil pour cet instant 4° 47′ 36″, sa hauteur 33° 7′ 30″; l'angle *ZSO* du vertical *ZS* avec le cercle de déclinaison *SO* (*fig.* 119), 32° 4′ 17″; l'angle de position *OSP* 23° 0′ 0″; la différence de longitude *AB* entre la lune & le soleil 37′ 11″, & la latitude de la lune *SB* 36′ 21″ boréale.

Fig. 119.

L'angle parallactique.

1883. L'ANGLE PARALLACTIQUE proprement dit, celui que nous désignerons généralement par ce nom, lorsqu'il ne sera pas qualifié plus spécialement, est formé par le vertical *ZSD* & le cercle de latitude *PSE*, qui est toujours perpendiculaire à l'écliptique. On ne peut calculer l'angle parallactique *PSZ* sans le diviser en deux parties qui se calculent séparément; savoir l'angle de position *PSO* (1044), & l'angle *OSZ* du cercle de déclinaison *OS* qui passe par l'étoile, avec le vertical *ZS* (1036).

1884. Nous prendrons toujours ces angles du côté du pole élevé, c'est-à-dire, du côté du nord pour nos climats septentrionaux, soit que l'angle du vertical & du cercle de déclinaison soit aigu ou obtus (a), & nous considérerons la partie du cercle de latitude ou du cercle de déclinaison, qui est comprise entre l'astre & le pole élevé, qui chez nous est le pole boréal de l'écliptique ou de l'équateur. Les angles étant ainsi considérés, on observera les règles suivantes, qui n'ont besoin d'aucune autre démonstration que l'inspection d'un globe, ou d'une figure.

Dans quel cas on les ajoute.

Il faut ajouter ensemble ces deux angles, c'est-à-dire, l'angle de position & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison après le passage au méridien, si c'est dans les signes ascendans 9, 10, 11, 0, 1, 2, ou avant le passage au méridien, si c'est dans les signes descendans; mais on prend leur différence en ôtant le plus

(a) Il est obtus (1036) lorsque *ZS fig.* 42. est plus près du pole que la perpendiculaire *ZX*; cela ne peut avoir lieu pour le soleil que dans la zone torride, & pour la lune à 5 ou 6 degrés plus loin de l'équateur.

petit du plus grand, quand l'astre n'a pas passé le méridien, & qu'il est dans les signes ascendans, ou lorsqu'il a passé le méridien & se trouve dans les signes descendans.

1885. Pour pouvoir se former aisément une figure exacte, dans les différens cas, supposons qu'on ait tiré une ligne verticale *Z SD* (*fig.* 119), & que le soleil soit en *S*; si c'est le matin, on sait qu'en regardant l'orient on a le pole septentrional à sa gauche, ainsi l'on tirera vers la gauche une ligne *SO* pour représenter le cercle de déclinaison. On sait aussi que vers l'orient l'écliptique & le mouvement propre du soleil qui se fait d'occident en orient doivent aller de haut en bas; mais, si c'est dans les signes ascendans, ce mouvement du haut en bas n'est pas tout-à-fait perpendiculaire au cercle de déclinaison *SO*, il va un peu en se rapprochant du pole *O*, où de l'origine du cercle *SO*, on tirera donc l'écliptique dans la direction *LE* qui se rapproche du pole *O*, & l'on verra par ce moyen que la ligne perpendiculaire à l'écliptique ou le cercle de latitude *SP* doit passer à droite du cercle de déclinaison *SO*; il en est ainsi à proportion des autres cas. On peut dire aussi en général que le point *P* est à l'occident du point *O*, dans les signes ascendans, 9, 10, 11, 0, 1, 2, & qu'il est à l'orient dans les 6 autres signes, ou que l'angle de position est occidental dans les signes descendans, oriental dans les autres. *Fig.* 119.

1886. Lorsque l'angle du cercle horaire est oriental (1036), aussi bien que l'angle de position, il faut les ajouter ensemble pour former l'angle parallactique, & celui-ci sera également oriental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude sera à l'orient du vertical. Si l'un des angles est oriental, & l'autre occidental, il faudra prendre leur différence, & l'angle parallactique aura la dénomination du plus grand.

Il faut donc examiner si par le résultat de l'addition ou de la soustraction, l'angle parallactique est oriental (1036), c'est-à-dire, si le cercle de latitude est à l'o- Le cercle de latitude est à l'orient ou à l'occident.

rient du vertical du côté du nord, ou s'il est à l'occident. En général le cercle de latitude est à l'orient du vertical avant le passage au méridien, & à l'occident après le passage au méridien; si ce n'est dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, non-seulement est plus petit que l'angle de position; mais qu'il en a été retranché ([a]). Car alors le cercle de latitude est à l'occident du vertical, si c'est avant le passage au méridien; & à l'orient du vertical, si c'est après le passage au méridien; nous serons obligés plusieurs fois de rappeller cette distinction (1895 & suiv.).

Si nous étions dans la partie septentrionale de la Zone torride, & que nous eussions le soleil du côté du nord, c'est-à-dire, que sa déclinaison fut plus grande que la latitude du lieu, l'angle du cercle horaire seroit occidental le matin, du côté du zénit, & il seroit obtus dans certains cas. L'angle de position seroit oriental dans les signes ascendans, tout comme il l'est dans l'Europe.

Dans les pays situés au midi de l'équateur, l'angle du cercle horaire est oriental le matin, comme en Europe. L'angle de position est oriental dans les signes 3, 4, 5, 6, 7, 8, au contraire de ce qui a lieu en Europe.

Exemple. Le premier Avril 1764, à $9^h\ 10'$ du matin, on prendra la différence des deux angles $32°\ 4'\ 17''$ & $23°\ 0'\ 0''$; & l'on aura $9°\ 4'\ 17''$ pour l'angle parallactique ZSP. Cet angle est oriental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude PS est à la gauche ou à l'orient du vertical, dans ce cas-là, puisque c'est avant le passage au méridien, & que l'angle du cercle horaire étant oriental, l'angle de position quoique occidental ne s'est pas trouvé le plus grand.

([a]) Cela arrive pendant quelque temps avant midi, dans les signes ascendans; & après midi pendant quelque temps dans les signes descendans; car dans le premier cas, le cercle de latitude peut être à l'occident du vertical un certain nombre de minutes avant le passage au méridien, & dans le second cas, il peut être à l'orient plusieurs minutes après le méridien.

1887. L'ANGLE DE CONJONCTION est l'angle formé par le cercle de latitude, & par le cercle mené du soleil à la lune. Cet angle est nul dans la conjonction, & il augmente d'autant plus, que la lune s'éloigne de la conjonction, toutes choses égales. Soit *S* (*fig.* 119) le soleil ou l'étoile dont on calcule une éclipse, *A* la lune, *SB* la latitude de la lune avant sa conjonction, *BA* la différence de longitude entre la lune & l'étoile, mesurée dans la région de l'étoile, c'est-à-dire, multipliée s'il est nécessaire par le cosinus de la latitude (892); *SA* la ligne qui joint le vrai lieu du soleil à celui de la lune, l'angle *ASB* est celui que j'appelle ANGLE DE CONJONCTION; parce qu'il est formé au centre du soleil ou de l'étoile *S* par le cercle de latitude *SB*, & par la ligne *SA* menée du soleil *S* au lieu vrai *A* de la lune. Pour trouver cet angle de conjonction l'on dira : *La différence des latitudes est à la différence des longitudes des deux astres, comme le rayon est à la tangente de l'angle de conjonction*, ou *SB* : *BA* : : *R* : tang. *BSA*.

Angle de conjonction.

Fig. 119.

Règle pour le trouver.

La ligne *BA*, s'il s'agit d'une éclipse d'étoile, est un peu plus petite que la différence de longitude prise dans les tables, & mesurée le long de l'écliptique. Pour être réduite à l'écliptique, il faudroit qu'elle fût divisée par le cosinus de la latitude apparente de la lune (892); j'ai donné une table de la quantité qu'il faut ôter de la différence de longitude pour avoir l'arc *AB*, (*Connoissance des mouv. celest.* 1764, *pag.* 118). Cette quantité ne peut aller qu'à 15 secondes dans les plus grandes latitudes de la lune, & en supposant même *AB* d'un degré.

Attention pour les étoiles.

1888. L'ANGLE D'AZIMUT, ou l'angle de distance est l'angle *ZSA* formé au centre du soleil ou de l'étoile, par le vertical de l'étoile, & par la ligne *SA*, qui va du centre de l'étoile au centre de la lune. Cet angle d'azimut *ASC* ne peut se former que par la somme ou la différence des angles *BSC* & *ASB*, c'est-à-dire, de l'angle parallactique & de l'angle de conjonction.

Angle d'azimut.

Fig. 119. Règle pour le former.

L'angle de conjonction est toujours occidental, ou à l'occident du cercle de latitude avant la conjonction, il est oriental après la conjonction; ainsi lorsque l'angle parallactique sera oriental, c'est-à-dire, lorsque le cercle de latitude pris du côté du nord, ou la portion du cercle de latitude qui est au nord de l'étoile, sera à l'orient du vertical, avant la conjonction, on prendra la *différence* de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique, & après la conjonction l'on prendra la *somme*. Lorsque l'angle parallactique sera occidental, c'est-à-dire, que le cercle de latitude sera à l'occident du vertical, on prendra la *somme* avant la conjonction & la *différence* après la conjonction. Tout cela dans le cas où la lune sera au nord du soleil ou de l'étoile qui est en conjonction; mais si la latitude de la lune est au midi du soleil ou de l'étoile, c'est-à-dire, si la lune a une latitude plus méridionale ou moins boréale que l'étoile, on changera les mots de *somme* & de *différence* dans les préceptes que nous venons d'établir, parce que ce sera la partie inférieure de la figure 119, dont on fera usage. On aura soin de remarquer si la somme est plus grande que 90 degrés (1903). Ces préceptes sont généraux, soit dans les pays septentrionaux, soit dans les pays méridionaux, & dans le cas même où l'angle parallactique est obtus; pourvu qu'on n'employe que son supplément à 180° dans les règles précédentes & qu'on entende par le mot *d'angle parallactique oriental*, un angle aigu du côté de l'orient vers le nord. C'est ainsi que l'on formera l'angle d'azimut *ASC*, compris entre le vertical *ZCS*, & l'arc de la distance vraie *SA* qui est entre le soleil & la lune.

Distance vraie de la lune au soleil.

1889. Il faut chercher aussi l'arc *AS*, qui est la distance vraie de la lune au soleil ou à l'étoile, soit en ajoutant les carrés de *AB* & *BS* en secondes, pris dans les tables ordinaires des carrés, soit en faisant cette proportion. Le sinus de l'angle de conjonction *ASB* est à la différence de longitude *AB*, comme le rayon est à la distance *AS*. Cette distance *AS* multi-

pliée

pliée par le ſinus de l'angle d'azimut *ASC* (1888), ou de ſon ſupplément, donnera la différence d'azimut vraie *AC*; & cette même diſtance *AS*, multipliée par le coſinus de l'angle d'azimut *ASC*, ou de ſon ſupplément s'il eſt obtus, donnera la différence de hauteur vraie *SC* entre le ſoleil & la lune : nous en ferons uſage art. 1903. *Fig.* 119. Différence de hauteur & d'azimut.

Exemple. La différence de latitude 36′ 21″ (1882), eſt à la différence de longitude 37′ 11″, comme le rayon eſt à la tangente de 45° 38′ 57″, angle de conjonction *ASB*. Diviſant 37′ 11″ par le ſinus de 45° 39′, on a la diſtance vraie *SA*, 52′ 0″; la différence entre l'angle de conjonction 45° 38′ 57″, & l'angle parallactique eſt de 9° 4′ 17″ (1886), ce qui donne l'angle d'azimut *ASC*, 36° 34′ 40″. La diſtance vraie 52′ 0″, multipliée par le ſinus de l'angle d'azimut 36° 34′ 40″, donne la différence vraie d'azimut *AC*, 30′ 59″ 2; & la diſtance vraie multipliée par le coſinus du même angle d'azimut, donne la différence de hauteur *SC*, 41′ 45″,5 (a).

1890. La différence vraie d'azimut peut être priſe pour la différence apparente, dans tous les calculs où l'on ne veut pas mettre une préciſion extraordinaire, & dans ce cas le calcul d'une éclipſe devient beaucoup plus ſimple, mais ſi l'on veut calculer tout à la rigueur, la différence vraie d'azimut *AC* exige deux petites corrections que je vais expliquer. Suppoſons les deux verticaux de l'étoile & de la lune très-proches l'un de l'autre, comme *ZCD* & *ZAM* (*fig.* 117). Soit un arc *AC* perpendiculaire au vertical *ZC*, j'ai appellé cet arc la différence vraie d'azimut; ſi l'on prend *AM* *Fig.* 117.

(a) Les petites Tables de Logarithmes imprimées *in*-12, 1760 (chez *Guérin* & *Delatour*, & qui ſe vendent chez *Deſaint*), ſont fort commodes pour ces calculs, quand on néglige les décimales, parce qu'elles diſpenſent de réduire ces arcs en ſecondes pour en trouver les logarithmes; ce ſont d'ailleurs les plus exactes que je connoiſſe : nous employâmes, M. de la Caille & moi, la plus grande attention à en revoir les épreuves, elles furent même encore lues ſéparément par d'autres Académiciens.

Fig. 117. égal à la parallaxe de la lune en hauteur (1629); en sorte que M soit son lieu apparent dans le vertical ZAM, & qu'on tire MD perpendiculaire au vertical du soleil CD, la différence apparente d'azimut qui est MD, sera plus grande que la différence vraie AC, parce que AM n'est pas exactement parallèle à CD. Pour savoir combien la différence apparente MD surpasse la différence vraie AC, on tirera AN parallèle à CD, & l'on aura NM pour l'excès de MD sur AC; c'est cet excès dont il s'agit de trouver la valeur. Dans le triangle ANM l'on a $MN = AM$ cos. M, (3611); mais dans le triangle sphérique ZMD, R : cos. M : : tang. MZ : tang. MD (3668), ou cos. $M = \frac{\text{tang. } MD}{\text{tang. } ZM}$; donc $MN = \frac{AM \text{ tang. } MD}{\text{tang. } ZM}$; mais puisque AM est la parallaxe de hauteur, on a $AM = p$ sin. ZM (1629); donc en substituant cette valeur & mettant cos. ZM à la place du sinus divisé par la tangente, on aura p cosin. ZM tang. MD.

Valeur de cette premiere équation.

1891. Ainsi *la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la hauteur apparente, & par la tangente de la différence apparente d'azimut à peu-près connue*, donne la quantité de secondes qu'il faut ajouter à la différence vraie pour avoir la différence apparente d'azimut MD, entre la lune & l'étoile, prise dans la région de la lune. Je ne prends pas ici les différences d'azimut dans l'horizon comme on le fait dans d'autres occasions (1038), mais sur un almicantarat, à la hauteur de la lune, ou sur l'arc de grand cercle qui se confond sensiblement avec le parallèle à l'horizon.

On ajoute dans tous les cas cette quantité à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente; mais cette quantité ne va jamais qu'à 30″ dans les éclipses, & j'en ai fait une table, (*Connoissance des mouv. céleſt.* 1764, *pag.* 120), dans laquelle on prendra facilement à la vue & sans parties proportionnelles cette quantité, dont il faudra augmenter la différence vraie d'azimut. Dans des calculs qui ne feroient pas bien im-

portans, ou dans les premiers calculs préparatoires d'une éclipse on peut négliger cette correction de l'azimut, comme celle qui dépend de l'applatissement de la terre (1892).

EXEMPLE. La différence des parallaxes horizontales étant de 54′ 0″, la hauteur de la lune 33°; la différence d'azimut *AC* 30′ 59″ 2 (1889), on a *p* sin. *h* tang. *AC* = 16″, qui étant ajoutées à *AC* donnent la différence apparente *DM* = 31′ 15″. Fig. 119.

C'est cette différence apparente 31′ 15″ qu'il auroit fallu employer dans l'opération précédente; mais l'erreur qui résulte d'avoir pris la différence vraie au lieu de l'apparente, est comme insensible : si cependant on vouloit y avoir égard on recommenceroit le calcul en mettant la tangente de 31′ 15″, au lieu de celle de 30′ 59″, & l'on trouveroit 16″ 4 pour la correction cherchée, qu'il faut ajouter à 30′ 59″, 2 pour avoir 31′ 15″ 6, différence apparente d'azimut.

1892. LA PARALLAXE D'AZIMUT qui a lieu dans le sphéroïde applati (1686), est la seconde correction qu'il faut faire à la différence vraie d'azimut pour avoir la différence apparente. Lorsqu'on a calculé par les tables la vraie différence d'azimut entre le soleil & la lune (1889, 1891), & qu'on a trouvé *DM* (*fig.* 119); cela nous apprend que la lune vue du centre de la terre paroîtroit au point *M*, si la terre étoit sphérique; mais à cause de l'applatissement de la terre elle ne paroît pas dans le même vertical, étant vue de la surface. Si l'on prend un petit arc de grand cercle *ML* égal à la parallaxe d'azimut, le point *L* sera celui où la lune devra paroître vue de la surface de la terre. Seconde équation, ou parallaxe d'azimut. Fig. 119.

Cette parallaxe d'azimut = *p* sinus *a*. sinus *z*, (1686) fait toujours paroître la lune du côté du pole élevé; en effet, l'observateur situé en *O* (*fig.* 94) voit la lune dans le même vertical & au même point d'azimut que s'il étoit situé au point *N* de la verticale : or le point *N* est toujours opposé au pole *P* qui est élevé sur l'ho- Fig. 94.

Fig. 94. rizon, comme cela eſt évident par la ſituation de l'ellipſe terreſtre; donc l'obſervateur placé en *O* ou en *N* voit la lune plus près du pole *P*, que s'il étoit au centre *C* de la terre. Ainſi cette parallaxe dans les pays ſeptentrionaux eſt additive à la différence vraie d'azimut, ſi la lune eſt au nord du vertical du ſoleil ou de l'étoile; elle ſe retranche ſi la lune eſt au midi, c'eſt-à-dire, ſi la différence vraie d'azimut eſt vers le midi.

1893. Pour pouvoir faire diſtinguer d'une manière ſûre & commode les cas où la lune eſt au nord du vertical, nous allons donner des règles générales auxquelles on pourra avoir recours dans le calcul des éclipſes; mais dont on pourra ſe paſſer ſi l'on a devant les yeux une figure du vertical & du méridien, ou du cercle de déclinaiſon qui paſſe par l'étoile, dans laquelle la lune ſoit placée comme elle doit l'être au temps pour lequel on calcule, telle qu'eſt la *figure* 119 pour l'exemple que nous avons choiſi. On peut encore ſe ſervir d'un globe pour guider le calcul. Au reſte, j'ai renfermé dans les règles ſuivantes toutes les variétés poſſibles, afin de lever pour jamais toute incertitude dans ma méthode.

Dans les hauteurs du pole qui ont lieu en Europe & qui ſont plus grandes que 28°, l'angle parallactique eſt toujours aigu; ainſi dans les premières règles nous le ſuppoſerons moindre que 90° du côté du nord; nous diſtinguerons ſi la lune a paſſé le méridien ou non, c'eſt-à-dire, ſi elle eſt dans l'hémiſphère oriental ou occidental, & ſi elle eſt au nord du ſoleil ou de l'étoile. En diſant que la lune eſt au nord, j'entends que ſon lieu vrai eſt plus près du pole boréal de l'écliptique, que celui de l'étoile; c'eſt-à-dire, ſa vraie latitude boréale plus grande ou ſa vraie latitude auſtrale plus petite que la latitude de l'étoile. Tout cela poſé, l'on aura la parallaxe d'azimut additive à la différence d'azimut dans tous les cas ſuivans.

1894. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. AVANT LE MÉRIDIEN, si la lune est au NORD & APRÈS sa conjonction.

Cas où cette équation est additive.

Dans les pays septentrionaux.

Si la lune est au NORD, AVANT sa conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus PETIT que l'angle parallactique.

Si la lune est au MIDI, APRÈS la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus GRAND que l'angle parallactique.

1895. Dans le cas où l'angle de position se sera trouvé le plus grand & où l'on en aura retranché l'angle du vertical avec le méridien (1886); il faudra dans les trois règles précédentes mettre MIDI au lieu de NORD.

1896. APRÈS LE MÉRIDIEN. Si la lune est au NORD & AVANT sa conjonction.

Si la lune est au NORD, APRÈS sa conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus PETIT que l'angle parallactique.

Si la lune est au MIDI, AVANT la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus GRAND que l'angle parallactique.

1897. Dans le cas où l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison aura été retranché de l'angle de position (1886), il faudra dans ces trois règles mettre *midi* au lieu de *nord*, & *nord* au lieu de *midi*; ou, ce qui revient au même, changer dans les trois premières règles (1894) ces mots, *avant*, *après*, *nord* & *midi*.

Si l'angle parallactique est obtus.

1898. Il peut arriver dans des pays situés près de la zone torride sous des latitudes moindres que 28°, que l'angle parallactique soit obtus du côté du nord (1036), alors on considérera son supplément à 180° & dans les six règles des articles 1894 *& suiv.* on changera les mots AVANT & APRÈS; d'où résultent les règles suivantes pour trouver les cas où la lune est au nord du vertical de l'étoile dans les pays septentrionaux, & où la parallaxe d'azimut est additive à la différence d'azimut.

1899. Avant le méridien. Si la lune est au nord, avant la conjonction.

Si la lune est au nord, après la conjonction; mais l'angle de conjonction plus petit que le supplément de l'angle parallactique.

Si la lune est au midi, avant la conjonction, & l'angle de conjonction plus grand que le supplément de l'angle parallactique.

1900. Après le mérieien. Si la lune est au nord, après la conjonction.

Si la lune est au nord, avant la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus petit que le supplément de l'angle parallactique.

Si la lune est au midi, après la conjonction, & que l'angle de conjonction soit plus grand que le supplément de l'angle parallactique.

Dans les pays situés au-delà de l'équateur.

1901. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX, c'est-à-dire, situés dans l'hémisphère austral de la terre, ou au midi de l'équateur; la parallaxe d'azimut s'ajoute à la différence d'azimut lorsque la lune est au midi du vertical de l'étoile; d'où il résulte que pour trouver les cas où elle sera additive, il suffit de changer les mots de *nord* & *midi* dans toutes les règles précédentes, où il s'agit de la latitude de la lune.

Cas où l'équation est soustractive.

Je me dispense, pour abréger, de rapporter les cas où l'équation est soustractive; mais l'on pourra en faire une table en écrivant toutes les règles ci-dessus, & changeant tout à la fois les mots *avant* & *après*, *nord* & *midi*.

1902. Exemple. La parallaxe étant de $54' \; 0''$ dans l'éclipse de 1764, l'angle a supposé de $19'$, comme je l'employois autrefois (1708), l'azimut de la lune $53^{\circ}\frac{1}{2}$, on a la parallaxe d'azimut p sin. a. sin. z (1686) $= 14''$ 4, qui retranchée de $31' \; 15'' \; 6$ (1891), différence d'azimut vue du centre de la terre, donne la différence apparente d'azimut DL $31' \; 1''2$, telle qu'on la voit sur la surface du sphéroïde.

1903. Quand on a trouvé la différence d'azimut entre la lune & l'étoile, il faut connoître aussi la hauteur vraie de la lune, & pour cela on prend la différence de hauteur entre la lune & l'étoile (1889), qu'on ajoute à celle de l'étoile si la lune est plus élevée. Mais pour distinguer cette circonstance, voici des règles générales qui supposent seulement qu'on ait examiné si la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (en prenant son supplément, s'il est obtus), forme plus ou moins de 90°, dans les cas où on les ajoute ensemble (1888). On pourra se dispenser de consulter ces règles si l'on voit assez distinctement la situation des lignes & des angles dont il s'agit dans ce calcul, ou si l'on a un globe ou une figure exacte devant les yeux. Les règles suivantes renferment tous les cas où il faut ajouter la différence de hauteur vraie, à celle du soleil, ou de l'étoile, pour avoir la hauteur vraie de la lune.

1904. DANS LES PAYS SEPTENTRIONAUX. Cas où la différence de hauteur est additive.

AVANT LE MÉRIDIEN. Si la latitude de la lune est au NORD, de l'étoile, AVANT la conjonction.

Si la lune est au NORD, APRÈS la conjonction, & que la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique (1888), soit moindre que 90°.

Si la lune est au MIDI, AVANT la conjonction & que la somme de l'angle de conjonction & de l'angle parallactique soit plus grande que 90°.

1905. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1886), l'on aura une différence de hauteur additive dans les cas suivans.

Si la lune est au NORD du soleil ou de l'étoile, APRÈS la conjonction.

Si la lune est au NORD, AVANT la conjonction, & que la somme soit plus petite que 90°.

Si la lune est au MIDI APRÈS la conjonction, & que la somme des angles soit plus grande que 90°.

1906. APRÈS LE MÉRIDIEN. Ce sont les trois règles de l'article 1905.

Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le méridien (1886), ce sont les trois règles de l'article 1904.

Les préceptes de ces trois articles, sont les seuls dont on ait besoin en Europe.

1907. Dans les pays septentrionaux de la zone torride, l'angle parallactique peut se trouver obtus si la lune est entre le zénit & le pole élevé : alors on changera les mots de NORD & de MIDI dans les articles 1904 & 1905; mais on prendra le supplément de l'angle parallactique avant de l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

Si l'angle parallactique est obtus.

Dans les pays méridionaux,

1908. DANS LES PAYS MÉRIDIONAUX, c'est-à-dire, si le lieu pour lequel on calcul une éclipse est de l'autre côté de l'équateur, ayant une latitude géographique australe, AVANT LE MÉRIDIEN; l'on changera les mots de NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1909. Mais si l'on a retranché de l'angle de position celui du vertical avec le cercle de déclinaison, l'on changera dans l'article 1905 les mots de NORD & de MIDI.

1910. APRÈS LE MÉRIDIEN. On changera aussi dans l'art. 1905 les mots de NORD & MIDI.

1911. Mais si l'angle du vertical avec le méridien a été soustrait de l'angle de position (1886), on changera NORD & MIDI dans l'art. 1904.

1912. Si l'angle parallactique est obtus dans les pays méridionaux, AVANT LE MÉRIDIEN; on prendra l'art 1904. APRÈS LE MÉRIDIEN ce sera l'article 1905; je suppose toujours qu'on prend le supplément de l'angle parallactique pour l'ajouter à l'angle de conjonction (1888).

1913. Les cas où la différence de hauteur est soustractive se peuvent conclure de ceux où elle est additive, en changeant dans les neuf articles précédens tous les mots MIDI & NORD, AVANT & APRÈS; d'ailleurs on saura qu'elle est soustractive, lorsqu'après avoir parcouru les cas précédens où elle est additive on n'y verra pas celui dont on aura besoin,

1914.

1914. Après avoir ajouté la différence de hauteur *SC* avec celle du soleil ou de l'étoile, ou l'avoir retranché par le moyen des règles précédentes, on aura la hauteur vraie de la lune. Pour avoir sa hauteur apparente, on multipliera la différence des parallaxes par le cosinus de la hauteur vraie de la lune que l'on vient de trouver, on aura la parallaxe de hauteur à quelques secondes près; cette parallaxe se retranchera de la hauteur vraie de la lune pour avoir sa hauteur apparente, & la différence des parallaxes horizontales, multipliée de nouveau par le cosinus de cette hauteur apparente, donnera plus exactement la parallaxe de hauteur (1629). Trouver la hauteur apparente.

1915. On retranchera de cette parallaxe la correction dûe à l'applatissement de la terre, *p* sin. *a*. sin. *h*. cos. *z* (1689); & l'on aura exactement la parallaxe de hauteur *AM* ou *CD* (*fig.* 117 & 119) dans le sphéroïde applati. Correction de la parallaxe.

1916. La parallaxe de hauteur *CD* (*fig.* 119) abaisse la lune au-dessous du soleil ou de l'étoile; ainsi l'on en retranchera la quantité *CS* dont la hauteur vraie de la lune étoit plus grande que celle du soleil, & l'on aura la différence de hauteur apparente *SD*. Si la hauteur vraie de la lune a été trouvée moindre que celle de l'étoile, on ajoutera cette différence avec la parallaxe de hauteur, pour avoir la quantité *SD* dont le lieu apparent de la lune sera plus bas que celui de l'étoile. Fig. 119.

1917. Connoissant ainsi la différence apparente de hauteur *SD*, & la différence apparente d'azimut *LD* (1902), on résoudra le triangle *SLD*, & l'on trouvera la distance apparente *SL*. Cette distance fera connoître si l'éclipse est commencée, & fera trouver le véritable commencement de l'éclipse, en faisant le même calcul pour un temps plus ou moins avancé de quelques minutes, comme on le verra dans l'exemple suivant.

1918. Exemple. La différence de hauteur vraie entre la lune & le soleil 41′ 45″, 5 (1889), étant

Fig. 119. ajoutée à la hauteur du soleil 33° 7′ 35″ donne la hauteur vraie de la lune 33° 49′ 20″. La différence des parallaxes horizontales du soleil & de la lune 54′ 0″, multipliée par le cosinus de la hauteur de la lune, donne la parallaxe de hauteur à peu-près, 44′ 51″. Cette parallaxe retranchée de la hauteur vraie de la lune 33° 49′ 20″ donne sa hauteur apparente 33° 4′ 29″. Le cosinus de cette hauteur apparente multiplié par la parallaxe horizontale, donne plus exactement la parallaxe de hauteur 45′ 15″ 2; il en faut ôter la correction p sin. a sin. h cos. z dûe à l'applatissement (1689), qui se trouvera de 5″ 9, & l'on aura la véritable différence des parallaxes dans le sphéroïde applati 45′ 9″ 3 = AM ou CD; il en faut retrancher la différence de hauteur vraie CS = 41′ 45″ 5, il reste la différence de hauteur apparente SD, 3′ 23″ 8; cette valeur de SD avec celle de DL (1902) qui est de 31′ 1″ 2, nous donnera l'angle de 83° 45′ 4″, & la distance apparente des centres du soleil & de la lune 31′ 12″ 3, comme par la première méthode (1877). La somme du demi-diamètre du soleil 16′ 0″ $\frac{1}{2}$ & du demi-diamètre horizontal de la lune 14′ 47″ augmenté de 7″ $\frac{1}{2}$, à cause de sa hauteur (1510), est de 30′ 55″, quantité moindre de 17″ que la distance apparente des centres; ainsi le centre de la lune doit se rapprocher encore du centre du soleil de 17″ pour que l'éclipse puisse commencer. Si l'on refait un semblable calcul (1882 & suiv.), pour un temps plus avancé de 5′, ou pour 9^h 15′ l'on trouvera que la distance apparente des centres est de 29′ 22″ 5, plus petite que la précédente de 1′ 49″ 8 ou en nombres ronds de 1′ 50″; or 1′ 50″ : 5′ 0″ :: 17″ : 46″; donc la distance des centres perdra, dans l'espace de 46″ de temps, les 17″ dont nous l'avons trouvée trop grande; ainsi l'éclipse commencera à 9^h 10′ 46″. Il faudroit ôter 4″ $\frac{1}{2}$ de la somme des demi-diamètres, & la réduire à 30′ 50″ $\frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion des rayons qui rasent le limbe de la lune (1992).

Distance apparente.

Commencement de l'éclipse.

1919. Si l'on veut former l'orbite apparente de la lune, affectée de la parallaxe, pour trouver le milieu de l'éclipse, & le mouvement apparent, on cherchera dans le même triangle (dont on connoît les côtés SD & DL), l'angle LSD, 83° 45′ 4″; la somme ou la différence de cet angle, & de l'angle parallactique (1883), donnera l'angle LSE 74° 40′ 47″ (a). L'on fera le même calcul deux heures plus tard la lune étant en F, & l'on aura de même l'angle FSE, qu'on ajoutera avec l'angle LSE; ainsi l'on formera un triangle LSF, dans lequel on connoîtra LS, SF, & l'angle LSF, on cherchera le segment LX qui donnera le temps où la lune doit paroître en X, c'est le temps du milieu de l'éclipse (1879); on cherchera ensuite la perpendiculaire SX avec laquelle on trouvera facilement la grandeur de l'éclipse (1880). *Fig.* 119. Former l'orbite apparente.

1920. Pour plus d'exactitude, il faudroit que les calculs d'où l'on déduit le milieu de l'éclipse ne fussent éloignés entre eux que d'une demi-heure, ou bien que l'un des calculs ne fût pas éloigné d'un quart d'heure de la plus grande phase. Ainsi l'on peut regarder le premier résultat comme une approximation, & calculer la distance des centres pour le temps de la plus grande phase que l'on aura trouvé par le premier calcul; on combinera cette nouvelle distance des centres avec celle qu'on aura calculée pour le commencement ou pour la fin, & l'on en déduira plus exactement la grandeur & le temps de la plus grande phase.

1921. La nouvelle méthode que je viens de donner pour calculer une éclipse, est plus simple que celle du nonagésime. 1°. On n'a besoin que de la hauteur de la lune, qu'il est nécessaire d'avoir à peu-près, même dans la méthode du nonagésime, pour connoître l'augmentation du diamètre de la lune (1510). 2°. On a la parallaxe exacte qui convient à la hauteur apparente, par deux Avantages de cette méthode.

(a) Ce sera la somme, si la lune & le vertical sont de différens côtés par rapport au cercle de latitude.

Fig. 119. simples additions (1918), au lieu que dans la formule du nonagésime (1665), il faut faire deux fois une évaluation qui est bien plus compliquée. 3°. Lorsque les corrections de l'applatissement de la terre sont réduites en tables, comme je l'ai fait pour Paris, & qu'on a une table des hauteurs, & des angles parallactiques, ma méthode est beaucoup plus courte que celle du nonagésime, en supposant de pareilles tables pour cette méthode.

1922. Si l'on vouloit avoir non-seulement la distance apparente des centres; mais encore les parallaxes de longitude & de latitude. On les trouveroit par le moyen du triangle *SLE*, dans lequel on calculeroit la différence des longitudes apparentes *EL* 30′ 5″ 8, & la latitude apparente $SE = 8' 14'' 7$, comparant ces valeurs avec les différences vraies *AB* 37′ 11″, & *BS* 36′ 21″, l'on aura la parallaxe de longitude 7′ 5″ 2, & celle de latitude 44′ 35″ 7, ainsi que par la méthode du nonagésime (1877); mais on aura rarement besoin de ces parallaxes, si l'on calcule les éclipses par la méthode précédente, que je crois plus exacte, & plus simple que celle du nonagésime. Cependant nous emploierons la méthode du nonagésime, pour trouver la différence des méridiens, par le temps de la conjonction vraie (1971).

Méthode analytique pour calculer les Eclipses.

1923. Après avoir expliqué trois méthodes astronomiques pour calculer exactement une éclipse, j'aurois souhaité de développer ici une méthode purement analytique, donnée par M. *du Séjour*, Conseiller au Parlement de Paris, d'abord en 1761 (a), & plus rigoureusement dans les Mémoires de l'académie pour

(a) Recherches sur la Gnomonique, les rétrogradations des planètes, & les éclipses de soleil, (par M. du Séjour & M. Goudin), à Paris chez *Desaint* & *Saillant* 1761, *in*-8° 86 pages.

1765, 1766, 1767, &c.; mais M. du Séjour ayant considéré ce problême dans une généralité, où il suppose beaucoup de principes qui ne peuvent être démontrés dans cet ouvrage, je vais me contenter de rapporter ici sa principale formule, avec un exemple, pour que le lecteur puisse du moins en comparer l'usage avec celui des trois méthodes précédentes. Cette méthode analytique a toute la généralité qu'un géomètre habile pouvoit lui donner; elle est simple dans l'application, & très-élégante dans ses principes & ses démonstrations. Je souhaite que l'exemple que je vais en donner, détermine les astronomes à consulter les mémoires de l'académie pour en voir les fondemens, & suivre les applications sans nombre que M. du Séjour en a faites à toutes les sortes de problêmes que l'on peut proposer sur les éclipses.

1924. Problême. Trouver la distance apparente des centres du soleil & de la lune, à un instant donné.

Je suivrai dans ces calculs les mêmes lettres que M. du Séjour, & les mêmes élémens pour l'éclipse de 1764, qui me servira d'exemple; j'avertirai seulement que dans les formules suivantes, on peut négliger r qui exprime le rayon ou le sinus total, puisqu'il est toujours égal à l'unité dans nos tables.

Soit π = sinus de la parallaxe horizontale de la lune sous le pole, à l'instant donné.

π' = sin. de la parallaxe du soleil, qui est de $9''$ (1742).

ρ = demi-grand axe de la terre, supposant le demi-petit axe = 1, c'est-à-dire, que $\rho = \frac{178}{177}$.

θ = sinus de l'inclinaison de l'orbite corrigée ou de l'orbite relative (1765).

ψ = cosinus de l'inclinaison de l'orbite corrigée.

ξ = cosinus de la latitude de la lune à l'heure de la conjonction.

$\zeta = 1 - \frac{\pi'}{\pi}\xi$

b = nombre de secondes de temps depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

s = ſinus de la latitude du lieu diminuée de la moitié de l'angle de la verticale (1708).

c = coſinus de la latitude du lieu ainſi corrigée.

g = ſinus de l'angle horaire ⊙, ou du temps vrai réduit en degrés.

h = coſinus de l'angle horaire.

p = ſinus de la déclinaiſon du ſoleil à l'inſtant donné.

q = coſinus de la déclinaiſon du ſoleil.

Ω = coſinus obliquité de l'écliptique. $\chi = \sqrt{q^2 - \Omega^2}$.

ι = tangente, ω = ſinus, φ = coſinus } de l'angle de l'orbite relative avec la perpendiculaire au méridien univerſel, à l'inſtant pour lequel on calcule.

On trouve la valeur de ω par cette formule $\omega = \frac{\theta\Omega}{q} + \frac{\psi\chi}{q}$ (mém. de l'acad. 1766, *pag.* 257).

$$l = r\,\frac{\text{ſin. lat. ☾ au temps de la conjonction.}}{\text{ſin. parall. polaire au temps de la conjonct.}}$$

$$\gamma = \xi\,\frac{\text{ſin. verſe (mouv. hor. ☾ en longit. ſur l'éclip. mouv. hor. ⊙)}}{\text{ſin. parall. horiz. polaire au temps de la conjonction.}}$$

$$\omega = \frac{r\xi\,\text{ſin. (mouv. hor. ☾ — mouv. ⊙)}}{\psi\ \text{ſin. parall. polaire.}}$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\phi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{chp\rho\phi}{r^4}$$

$$B = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\phi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4} + \frac{b\eta r}{3600\,\zeta}$$

$$\frac{Ar}{B} = \text{tang. } H$$

$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4} - \frac{\gamma b^2\pi}{(3600)^2 r}$$

La tangente de la diſtance apparente des centres du ſoleil & de la lune ſera enfin égale à $\frac{A\zeta\pi}{E\,\text{ſin. } H}$ (*mém. de l'ac.* 1765, *pag.* 299).

1925. L'uſage de cette méthode n'exige d'autre attention que celle de changer les ſignes d'une manière convenable, ſuivant la règle qu'on verra dans la trigonométrie que depuis 180° juſqu'à 360, les ſinus

changent de signe, & les cosinus depuis 90° jusqu'à 270. On sait aussi que + multiplié par — donne —, & que — multiplié par — donne +, enfin que les quantités qui après avoir diminué jusqu'à zéro continuent de diminuer encore deviennent négatives.

Ainsi l'on suppose pour b, que le temps est après la conjonction, sinon b est négatif.

Pour l, que la latitude à l'heure de la conjonction est boréale, autrement l est négative.

Pour p, que la déclinaison du soleil est boréale à l'heure du calcul.

Pour χ, que le soleil est dans les signes ascendans, ou depuis 9^s jusqu'à 3^s de longitude.

Pour g, que l'heure donnée est après midi.

Pour h, que l'heure est entre six heures du matin & six heures du soir, sans cela le cosinus h est négatif.

Pour le changement de la parallaxe que la lune s'approche de la terre, ou que la parallaxe augmente.

Pour s, que la latitude du lieu est boréale; le cosinus de la latitude $= c$ est toujours positif.

Pour ν, que le mouvement horaire relatif est direct ou vers l'orient, ainsi ν est négatif, dans les passages de Vénus & de Mercure.

Pour γ, que l'orbite est concave vers la terre; dans les passages de Vénus γ est négatif, mais on peut négliger totalement cette petite quantité.

Pour θ, que le mouvement de la lune en latitude va vers le nord, & le mouvement relatif en longitude vers l'orient, si l'une des deux conditions change sans l'autre, θ devient négatif.

t a le même signe que ω.

Dans les éclipses de soleil les quantités r, ρ, ψ, ξ, c, q, Ω, φ, π, π', ζ, γ, ν, sont toujours positifs.

1926. Exemple. Je suppose qu'on demande la distance apparente des centres du soleil & de la lune, le 1 Avril 1764, à $9^h\ 10'$ à Paris, $1^h\ 21'\ 23''$ avant la conjonction; nous supposerons avec M. du Séjour, la conjonction à $10^h\ 31'\ 23''$, & la latitude $39'\ 36''$, la

parallaxe horizontale pour Paris 54′ 9″, & sous le pole 54′ 1″ $\frac{1}{2}$; sa formule pour trouver les parallaxes sous d'autres latitudes, est dans les mémoires de l'académie pour 1764. Le nombre 206265 qui se trouve dans les formules suivantes est l'arc égal au rayon (1242); j'ai supprimé la lettre r qui exprime toujours l'unité.

Tangente de l'inclinaison de l'orbite relative ou corrigée $= \frac{\text{mouv. en latit.}}{206265 \text{ sin.diff.mou.en lon.}} = \frac{2' 44''}{206265 \text{ sin. } 27' 11'', 3}$, ainsi cette inclinaison $= 5^\circ 44' 26''$.

$\rho = 1,00565$ Logarithme.	0,0024467
$\pi = 54' 1'' 5$	8,1963030
$\pi = 10''$	
$57^\circ = 206264'' 8$	5,3144281
$\theta = \text{sin. } 5^\circ 44' 26''$	9,0001044
$\psi = \text{cos. } 5^\circ 44' 26''$	9,9978165
$\xi = \text{cos. latit. } ☾ 39' 36''$	9,9999711
$b = -4883$	3,6886867
$s = \text{sin. } 48 . 41 . 25$	9,8757280
$c = \text{cos. } 48\ 41\ 25$	9,8196289
$g = -\text{sin. } 42^\circ 30'$	9,8296833
$h = \text{cos. } 42\ 30$	9,8676309
$p = +\text{sin. } 4^\circ 48' 50''$	8,9238624
$q = \text{cos. } 4 . 48 . 50$	9,9984653
$\Omega = \text{cos. } 23\ 28\ 21$	9,9624884
$\chi = +38936$	9,5903565
$\omega = \text{sin. } 28\ 44\ 30$	9,6820198
$t = \text{tang. } 28\ 44\ 30$	9,7391209
$\varphi = \text{cos. } 28\ 44\ 30$	9,9428989
$\zeta = \text{sin. } 85\ 30\ 6$	9,9986603
$l = +0,73301$	9,8651087
$\gamma = 0,00200$	7,3008965
$n = +0,50581$	9,7039847

1927. Pour parvenir à l'évaluation des termes de A, de B, & de E, on calcule d'abord séparement les termes généraux qui ne changent pas de valeur pendant la durée d'une éclipse.

Le

Le premier terme de A est $\frac{\psi 1}{\zeta} = +0,73159$.

Le premier terme de B est $\frac{\theta 1}{\zeta} = +0,07354$.

Le premier terme de E est $\xi = +0,99993$.

Il entre encore dans la valeur de A des quantités qui sont sensiblement les mêmes pour toute la durée de l'éclipse, tels sont dans le second terme $q\varphi$, dans le troisième $\rho\omega$, dans le quatrième $p\rho\varphi$. De même dans la valeur de B, on a $q\omega$, $\rho\varphi$, $p\rho\omega$, & $\frac{n}{3600\zeta}$; dans celle de E les produits $p\pi$, $\rho q\pi$, $\frac{\gamma\pi}{(3600)^2}$; il est bon de les former séparément avant que de calculer les termes qui dépendent du lieu, & de l'heure pour lesquels on calcule, voici leurs Logarithmes, (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 298).

LOGAR. de	$q\varphi$	$= -0,0586358$.
	$\rho\omega$	$-0,3155335$.
	$p\rho\varphi$	$-1,1307920$.
	$q\omega$	$-0,3195149$.
	$\rho\varphi$	$-0,0546544$.
	$p\rho\omega$	$+1,3916711$.
	$\frac{n}{3600\zeta}$	$+6,1490219$.
	$p\pi$	$-2,8798346$.
	$\rho q\pi$	$-1,8027850$.
	$\frac{\gamma\pi}{(3600)^2}$	$-1,6154055$.
	$\zeta\pi$	$+8,1949633$.

On écrit ensuite les quatre termes de A, dans quatre colonnes, chacun avec le signe qui convient au produit qui a lieu dans le cas actuel; il n'y a que le troisième terme qui change dans notre exemple, parce que g est négatif, l'heure donnée étant avant midi; on les évalue chacun séparément, & l'on trouve les quantités suivantes.

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{\psi 1}{\zeta} = +\ 0,73159 \\ -qs\varphi = -\ 0,65629 \\ -cg\rho\omega = -\ 0,21566 \\ +chp\rho\omega = +0,03601 \end{array}\right\} \text{donc } A = -\ 0,10435$$

On écrit aussi les quatre termes de *B* chacun avec le signe qui leur convient ; dans notre exemple, le troisième terme change de signe, parce que *g* est négatif ; le cinquième terme change aussi, parce que le temps donné étant avant la conjonction *b* est négatif. Voici tous les termes de *B*.

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{\phi 1}{\zeta} = +\ 0,07354 \\ -qs\omega = -\ 0,35992 \\ +cg\rho\varphi = +0,39324 \\ +chp\rho\omega = +0,01975 \\ -\frac{b\eta}{3600\zeta} = -\ 0,68819 \end{array}\right\} \text{donc } B = -\ 0,56158,$$

donc $\frac{A}{B}$ = tang. H, & H = 10° 31′ 35″

$$\left.\begin{array}{l} \xi = +0,99993 \\ -ps\pi = -0,00101 \\ -c\rho qh\pi = -0,00766 \\ -\frac{\gamma b^2\pi}{(3600)^2} = -0,00006 \end{array}\right\} \text{donc } E = +0,99120.$$

1928. Ainsi la tangente de la distance apparente $= \frac{A\zeta\pi}{E \sin. H}$ = tang. 31′ 2″. Elle s'accorderoit parfaitement avec celle que j'ai trouvée par les autres méthodes (1877, 1918), si l'on avoit employé les mêmes élémens, comme je m'en suis assuré. La manière d'en conclure le commencement & la fin de l'éclipse est la même que par les autres méthodes (1918).

1929. Cette méthode de M. du Séjour a toute la généralité possible ; elle auroit l'avantage de servir avec

la même facilité dans les cas mêmes où les quantités qu'on néglige actuellement, ne feroient pas négligeables. On peut, avec ces formules, trouver les limites des erreurs que l'incertitude de chaque élément peut produire ; c'eſt cette facilité qui a fait trouver l'inflexion (1992). Enfin la même forme de calcul ſert à trouver le *maximum* & le *minimum* de toutes les circonſtances d'une éclipſe, à en tirer toutes les conſéquences poſſibles, & à chercher tous les élémens que l'obſervation de l'éclipſe peut déterminer ; de même que les courbes d'illumination qui feront l'objet des articles ſuivans.

Méthode pour calculer la route de l'ombre & les lignes des phaſes ſur la ſurface de la terre.

1930. Aprés avoir déterminé les circonſtances de l'éclipſe générale pour le méridien de Paris, (1806), par le calcul, ou par l'opération graphique, dont on peut très-bien ſe contenter (1811), il eſt queſtion de connoître par longitudes & latitudes les pays de la terre où commenceront ces phaſes ; il faut ſavoir, par exemple, quel eſt le point *I* de la terre *fig.* 103, qui le premier de tous verra commencer l'éclipſe en voyant lever le ſoleil, quel eſt le point *V* qui le premier verra l'éclipſe centrale au lever du ſoleil. On a vu la manière de le trouver ſans calcul, par le moyen d'un globe (1814), nous allons indiquer une méthode trigonométrique, & une opération graphique pour y parvenir. *Fig.* 103.

M. de la Caille avoit donné, il eſt vrai, une méthode graphique pour tracer les lignes des phaſes, mais perſonne encore n'avoit donné avant moi, la manière de les calculer par la trigonométrie ; M. du Séjour, étoit le ſeul qui eût donné des formules analytiques pour tracer la ligne de l'ombre, ou de l'éclipſe centrale, dans le recueil que j'ai cité (1923) ; depuis ce temps-là, il a donné dans les Mémoires de l'académie, une théorie plus générale & une analyſe plus complette

de tous les cas de ce problême; mais cela ne m'empêchera pas de suivre dans cette partie l'application des méthodes que j'ai expliquées ci-dessus, & qui sont plus familières aux astronomes, quant à présent.

Fig. 118. 1931. Soit le centre de la projection en C (*fig.* 118), l'orbite de la lune KMG; le milieu de l'éclipse en M, le commencement de l'éclipse générale au moment où la lune est en K; le triangle MCK que nous avons employé à trouver la portion MK de l'orbite (1809), servira aussi à trouver l'angle MCK, en disant $CK : R :: CM :$ cos. MCK; la somme ou la différence de cet angle MCK, & de l'angle PCM que forme le méridien universel CP avec la perpendiculaire à l'orbite, donnera l'angle PCK ou PCI, dont la mesure est l'arc DI du cercle de projection. Rien n'empêche actuellement de concevoir sur le cercle ADE le globe même, dont il est la projection, & d'imaginer sur le globe un triangle sphérique PDI; le côté PD est égal à la déclinaison du soleil, c'est-à-dire, à l'élévation de l'axe de la terre au-dessus du cercle terminateur ou du cercle de projection (1829), le côté DI est l'arc déterminé il n'y a qu'un instant sur le cercle de projection; l'angle D est droit, puisque le méridien universel CPD est perpendiculaire au cercle terminateur; on pourra donc résoudre le triangle IPD, en disant 1°. Le rayon est au cosinus de la déclinaison du soleil, ou de PD, comme le cosinus du côté DI, est au cosinus de l'hypothénuse PI, 2°. Le sinus de PD est au rayon, comme la tangente du côté DI est à la tangente de l'angle DPI. L'hypothénuse PI est la distance du lieu I au pole P du monde, ou le complément de sa latitude, si PI est moindre que 90 degrés; mais si le côté DI étoit plus grand que 90°, l'hypothénuse PI seroit aussi plus grande, on seroit obligé de prendre le supplément à 180° de l'arc trouvé dans les tables par le calcul trigonométrique, & d'ôter 90° de ce supplément pour avoir la latitude du point I, qui dans ce cas-là seroit une latitude méridionale. Je

Trouver le premier lieu qui verra l'éclipse.

Latitude du point I.

ſuppoſe que le pole *P*, élevé au-deſſus du cercle de projection eſt le pole boréal du monde, c'eſt-à-dire, que la déclinaiſon du ſoleil eſt boréale; mais ſi c'étoit le pole auſtral qui fût élevé au-deſſus du plan de projection, il faudroit tirer le méridien ou cercle horaire *PI* du pole auſtral & non du pole boréal. Fig. 118.

1932. L'angle *DPI*, formé au pole du monde par le méridien *PI* du lieu cherché, & par la partie ſupérieure *PD* du méridien univerſel, ſervira à trouver l'angle horaire du lieu *I*, c'eſt-à-dire, ſa diſtance au méridien univerſel, ou le chemin qu'il a fait & l'arc qu'il a décrit depuis ſon paſſage par le méridien univerſel, en y ajoutant 180 degrés; car comme le point *I* s'avance d'occident en orient, ou de droite à gauche vers le méridien univerſel *PC* où il arrivera à midi, l'angle *DPI* eſt ſa diſtance au point de minuit, & l'angle horaire compté d'un midi à l'autre, eſt plus grand que 180° de la quantité *DPI*. Si le lieu dont il s'agit étoit à gauche ou à l'orient du méridien univerſel, comme le point *F*, l'angle horaire *CPF* ſeroit le ſupplément de l'angle *DPF*, trouvé par le calcul précédent.

1933. L'angle horaire pour Paris, qui eſt déterminé par l'heure donnée (211), étant diminué de 20 degrés, on le retranchera de l'angle horaire trouvé pour le point *I*, & l'on aura la longitude géographique du lieu de la terre qui y répond, comptée du premier méridien (1012).

1934. Exemple. Dans l'éclipſe de 1764, $CK = 1°24'48''$, (1809) $CM = 39'24''$, & $PD = 4°48'50''$; on fera cette proportion: $1°24'48'' : R :: 39'24'' : \text{cof. } 62°18'47''$ valeur de l'angle *MCK*; on y ajoutera l'angle d'inclinaiſon *LCM* 5° 44′ 26″, puiſque le milieu *M* de l'éclipſe eſt à l'occident de la conjonction, & le point *K* à l'occident du point *M*; on y ajoutera l'angle de poſition $LCP = 23°0'0''$, parce que le cercle de latitude eſt à l'orient du méridien vers le nord dans les ſignes aſcendans (1847), & l'on aura 91° 3′ 13″

Fig. 118. (dont le supplément est 88° 56′ 47″) pour l'angle *PCI* qui est égal à l'arc *DI*; cet arc *DI* étant obtus, nous apprend que l'hypothénuse *PI*, & l'angle *DPI* le seront également, suivant les règles de la trigonométrie sphérique (3658, 3659). On fera cette proportion : sin. 4° 48″ 50″ : *R* : : tang. 88° 56′ 47″ : tang. 89° 54′ 42″; ce qui montre que l'angle *P* est de 90° 5′ 18″, & l'angle horaire du lieu *I*, 270° 5′ 18″.

Le commencement de l'éclipse générale en *I* a été trouvé 7h 38′ 8″ à peu-près (1809), ou 19h 38′ 8″, en comptant d'un midi à l'autre, ce qui fait 294° 32′ 0″ pour l'angle horaire à Paris, dont ôtant 20°, on aura 274° 32′ 0″ pour l'angle horaire sous le premier méridien; on le retranchera de l'angle horaire du lieu *I*, 270° 5′ 18″, en ajoutant 360° pour la soustraction : il restera 355° 33′ 18″ pour la longitude géographique du lieu cherché *I*, (1012).

Sa situation dans l'éclipse de 1764.

1935. On fera aussi cette proportion *R* : cos. 4° 48′ 50″ : : cosinus 88° 56′ 47″ : cos. 88° 57′ 0″, dont le supplément 91° 3′ 0″ marque la distance du lieu *I* au pole boréal du monde : ainsi ce lieu est à 1° 3′ de latitude australe & à 355° 33′ de longitude, c'est-à-dire, qu'il est situé dans le milieu de la Mer du Nord, entre la côte de Guinée & la côte du Brésil. On trouveroit par une opération semblable le point *V*, qui le premier verra l'éclipse centrale au lever du soleil; sa longitude est à peu-près de 332° 28′, & sa latitude 18° 49′ boréale. On trouvera ci-après le résultat du calcul de M. du Séjour, (1957); le calcul est encore le même pour trouver la position du point *F* & du point *X*, les derniers de la terre qui verront l'éclipse.

Tracer la route de l'ombre.

1936. La trace de l'ombre de la lune sur la surface de la terre peut se marquer sur un globe ou sur une carte de géographie, en déterminant de quart-d'heure en quart-d'heure la longitude & la latitude du lieu qui doit voir l'éclipse centrale, pendant l'espace de temps compris entre ceux où la lune a été en *V* & en *X*. Commençons par le point *M* de la projection, & cher-

chons quel est le pays de la terre, qui projetté au point *M*, aura l'éclipse centrale à l'heure même du milieu de l'éclipse générale (1807). Fig. 118.

La ligne *CM*, considérée comme une ligne droite de la projection, représente un arc du cercle de la terre dont elle est la projection, & qui est compris entre le point *C*, qui répond perpendiculairement au soleil, & le point de la terre qui est projetté en *M*. Or on a vu que les arcs comptés du centre de la projection ont leur sinus même pour projection (1833) : ainsi pour trouver l'arc de la terre qui répond à *CM*, il suffit de savoir quels sont les degrés dont *CM* est le sinus; l'on fera donc cette proportion : le rayon de la projection exprimé en secondes, est au sinus total, comme la perpendiculaire *CM* est au sinus de l'arc de la terre qui lui répond.

On considérera ensuite le triangle sphérique *PCM*, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, savoir, l'arc *CM* que nous venons de trouver, l'arc *CP*, complément de la déclinaison du soleil, ou sa distance au pole, & l'angle *PCM*, égal à celui que forme le méridien avec la perpendiculaire *CM*, ou l'équateur avec l'orbite apparente de la lune (1816), on cherchera le côté *PM* & l'angle *CPM* par les analogies suivantes, en abaissant une perpendiculaire du point *M* sur le méridien *PC*. (3696, 3697).

R : cos. *PCM* : : tang. *CM* : tang. *CZ*; on a *CP* — *CZ* = *PZ*;
Cos. *CZ* : cos. *PZ* : : cos. *CM* : cos. *PM*.
Sin. *PZ* : sin. *CZ* : : tang. *PCM* : tang. *CPM*.

Au moyen de *PM* & de l'angle *P*, on trouvera la longitude & la latitude du point *M* par les considérations que nous avons employées ci-dessus pour trouver celles du point *I* (1934).

1937. Tous les autres pays de la terre qui doivent avoir l'éclipse centrale se trouveront par une semblable opération, ou pour un moment donné, ou pour une latitude donnée, ou enfin pour une longitude prise à Trouver le pays où l'éclipse est centrale à l'heure donnée.

volonté : mais il est plus commode de choisir un temps donné. Supposons, par exemple, qu'à une heure fixe la lune étant en O, on demande quel est le point O de la terre où l'éclipse paroîtra centrale, c'est-à-dire, le pays qui est projetté au point O de la projection en même-temps que la lune s'y trouve ; ce pays de la terre voyant tout à la fois le soleil & la lune au point O de la projection, aura une éclipse centrale.

1938. Pour connoître le côté MO, on se servira du mouvement horaire de la lune, en disant, une heure ou $60'$ sont au mouvement horaire de la lune sur son orbite relative, comme la différence entre le temps donné & celui du milieu M de l'éclipse générale est au mouvement MO. On cherchera l'angle MCO par cette proportion : la perpendiculaire CM est au côté MO, comme le rayon est à la tangente de l'angle MCO; cet angle combiné avec l'angle PCM que le méridien fait avec la perpendiculaire, donnera l'angle PCO ; on cherchera le côté CO, en disant : Le sinus de l'angle MCO est à MO, comme le sinus total est à CO ; ensuite, le rayon de la projection est au sinus total, comme la ligne CO est au sinus de l'arc de la terre dont elle est la projection ; par ce moyen l'on a dans le triangle sphérique PCO, deux côtés PC, CO & l'angle compris PCO ; on trouvera par les analogies rapportées ci-dessus (1936), le côté PO, & l'angle au pole CPO, d'où l'on tirera la latitude & la longitude du point O (1934).

1939. Exemple. Le 1 Avril 1764, le milieu de l'éclipse générale étant supposé à $10^h\ 22'\ 41''$ au méridien de Paris, (1808), on demande quel pays de la terre aura l'éclipse centrale, à $10^h\ 42'\ 30''$, c'est-à-dire, $19'\ 49''$ après le milieu de l'éclipse, on dira $1^\circ, 60' : 27'\ 19''\frac{1}{2} :: 19'\ 49'' : MO$ qui sera de $9'\ 2'' : 2^\circ, 39'\ 24'' : 9'\ 2'' :: R :$ tang. $MCO = 12^\circ\ 54'\ 5''$; on ôtera cet angle OCM de l'angle $PCM = 28^\circ\ 44'\ 26''$, il restera l'angle PCO $15^\circ\ 50'\ 21''$; 3°, cosin. $MCO = 12^\circ\ 54'\ 5'' : CM, 39'\ 24'' :: R : CO = 40'\ 25''$. $4^\circ, 54'\ 0'' : R :: 40'\ 25'' :$

25″ : sin. 48° 27′ 54″; c'est l'arc de la terre qui répond à la projection *CO*. 5°, *R* : cos. *PCO* = 15° 50′ 21″ :: *T*. *CO* = 48° 27′ 54″ : *T*. segment=47° 21′ 43″; on ôtera ce segment 47° 21′ du côté *PC* = 85° 11′ 10″, il restera le second segment 37° 49′ 27″. 6°, sin. 37° 49′ 27″ : sin. 47° 21′ 43″ : : tang. *PCO* = 15° 50′ 21″ : tang. *CPO* = 18° 47′ 44″, d'où il suit que l'angle horaire du lieu *O* est de 341° 12′ 16″. 7°, Enfin, cos. 47° 21′ 43″ : cos. 37° 49′ 27″ : : cos. 48° 27′ 54″ : cos. *PO* = 38° 54′ 26″; ce qui prouve que la latitude du lieu *O* est de 51° 5′ 34″. A 10ʰ 42′ 30″ l'angle horaire pour Paris, est de 340° 37′ 30″, & pour le premier méridien 320° 37′ 30″, on retranchera cet angle horaire de celui du lieu *O* = 341° 12′ 16″, & il restera 20° 34′ 46″ pour la longitude du pays cherché; ce point tombe à l'orient de Calais, qui est à 19° 31′ de longitude, & à 50° 58′ de latitude septentrionale. *Fig.* 118.

1940. On peut aisément trouver par les mêmes principes une suite de pays qui auront l'éclipse d'un doigt, où de telle autre grandeur qu'on voudra : voici en quoi consistoit le procédé de l'opération graphique de M. de la Caille, (*Leçons d'astronomie*, *art.* 1169). Du point *M* (*fig.* 120), où est le milieu de l'éclipse, on prend *MA* égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; on tire par ce point *A* la ligne *BAE* parallèle à l'orbite de la lune; elle marque sur la projection une suite de points qui auront successivement un simple contact de la lune & du soleil, au nord du soleil sans aucune éclipse (1801). Du point *A* l'on prendra *AQ* d'un quart du diamètre du soleil ou de 3 doigts, & la ligne *OQR* marquera des pays où l'on doit voir le soleil éclipsé de trois doigts; on prendra *AS* égale au diamètre du soleil, & la ligne *SY* marquera une suite de points où l'on verra la lune entière sur le soleil, touchant le bord septentrional du soleil; la distance *MS* est la demi-largeur de l'espace, où l'on voit une éclipse annulaire, quand le diamètre de la lune est plus petit que celui du soleil, & une éclipse tota- *Fig.* 120.

Fig. 120. le, si le diamètre de la lune est plus grand, c'est-à-dire, si le point *S* tombe au-dessous du point *M*.

1941. En suivant l'esprit de cette méthode, M. de la Caille cherche encore pour un instant donné la longitude & la latitude d'un point *R* de la terre qui voit l'éclipse de trois doigts, & d'un point *Z* qui voit les deux bords se toucher, de la même manière que l'on a déterminé sur l'orbite celui qui voyoit l'éclipse centrale (1937): la seule différence consiste à employer *CQ* au lieu de *CM*, & du reste la ligne *QR* est égale à la portion *MH* de l'orbite lunaire qui serviroit à trouver un lieu de la terre, comme *H*, qui voit l'éclipse centrale au même instant. Mais dans cette méthode, on néglige la différence entre l'inclinaison de l'orbite relative, & celle de l'orbite apparente; & l'on suppose que *HR* soit la plus courte distance de la lune *H*, à un point *R* de la projection, quoique en décrivant son parallèle ou son ellipse le point *R* puisse s'en approcher davantage. M. du Séjour a corrigé cette erreur dans ses méthodes, en résolvant le problême d'une manière plus rigoureuse (*Mém. de l'acad.* 1765, *pag.* 306; 1767, *pag.* 156).

1942. Au reste, M. de la Caille ne s'est servi de ces principes que pour exécuter sur une carte géographique, ainsi que dans notre Planche XIV, le type général d'une éclipse, qu'il faisoit graver dans ses éphémérides, toutes les fois qu'il y avoit à Paris éclipse de soleil; ces principes suffisent même pour former une carte semblable à celle que *Madame le Paute*, donna pour la grande éclipse du 1 Avril 1764 ([a]); où il n'est question que de donner aux astronomes un avertissement général, pour qu'on fasse des calculs plus rigoureux, dans les endroits où l'on se propose d'observer. On voit sur cette carte de Mad. le Paute, la trace de l'ombre, qui formoit sur la terre une petite el-

Vitesse de l'ombre.

([a]) A Paris chez Latré, Graveur, rue S. Jacques, à la ville de Bordeaux.

lipse, & qui parcouroit environ 12 lieues par minute : cette vîtesse est double de celle d'un boulet de canon, qui est d'environ 200 toises par seconde, ou 5 lieues par minute, (*Journal des Savans*, Avril 1769). Mais quoique les principes que je viens d'exposer suffisent pour ces cas-là, cette branche du calcul des éclipses étant par elle-même curieuse & intéressante, je vais donner quelques détails de plus à ce sujet, & y appliquer la méthode des projections, soit par une opération graphique, soit par le calcul trigonométrique ; je finirai par des tables détaillées qui ont servi à construire la carte des phases de l'éclipse tracée avec soin dans la Planche XIV.

1943. Pour trouver graphiquement les phases de l'éclipse, en divers pays de la terre avec plus de précision que par le globe, il faut tracer une projection ortographique de la terre, sur un plan perpendiculaire à la ligne des centres du soleil & de la lune, telle qu'on la voit dans la Planche XIII, (*fig.* 122) ; *C* est le centre, & *CK* le rayon de la projection égal à 54′ 0″ dans notre exemple ; *P* est la projection du pole, dont la distance $CP = 54'$ cos. déclin. $= 53'\ 49''$ (1831) ; les ellipses qui représentent les parallèles de 10° 20°, &c. de latitude y sont tracées, suivant la méthode de l'article 1842 ; chacune a son demi-grand axe égal au cosinus de sa latitude (1829), & le demi-petit axe égal au cos. de la latitude, multiplié par le rayon de projection, & par le sinus de la déclinaison du soleil (1828), c'est-à-dire, en commençant par l'équateur, 4′ 32″, 4′ 28″, 4′ 16″, 3′ 55″, 3′ 28″, 2′ 55″, 2′ 16″, 1′ 33″, 0′ 47″, de 10 en 10 degrés. *Planche XIII. Fig.* 122.

La distance du centre *C* de la projection au centre de chaque ellipse, est égale au produit de 54′, par le sinus de la latitude & le cosinus de la déclinaison (1832), ces distances prises de 10 en 10 degrés, sont de 9′ 21″, 18′ 24″, 26′ 54″, 34′ 35″, 41′ 13″, 46′ 36″, 50′ 34″, 53′ 00″. Chacune des abscisses, prise sur le grand axe, est égale au demi-axe multiplié par le sinus de l'an-

Fig. 122. gle horaire, & chaque ordonnée (1843) égale au demi-petit axe multiplié par le cosinus de l'angle horaire, comme dans la table suivante; par ce moyen, il est aisé de tracer exactement chacune de ces ellipses, en supposant qu'on ne veuille pas se servir de l'opération graphique (1844) ou du compas elliptique, dont l'usage est peu commode.

Table des abscisses & des ordonnées des ellipses qui représentent les parallèles terrestres dans l'éclipse de 1764, en supposant le rayon de projection de 54′ 0″ & la déclinaison 4° 48′ 50″.

Latitudes	Midi.		I. heure.		II. heures.		III. heures.		IV. heures.		V. heures.	
	Ab.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.	Absc.	Ordon.
0°	0	4′ 32″	13″ 59″	4′ 21″	27′ 0″	3′ 54″	38′ 11″	3′ 11″	46′ 46″	2′ 15″	52′ 10″	1′ 10″
10	0	4 28	13 46	4 19	26 35	3 52	37 36	3 9	46 3	2 14	51 22	1 9
20	0	4 16	13 8	4 7	25 22	3 41	35 53	3 1	43 57	2 8	49 1	1 6
30	0	3 55	12 6	3 47	23 23	3 24	33 4	2 46	40 30	1 58	45 10	1 1
40	0	3 28	10 42	3 21	20 41	3 0	29 15	2 27	35 50	1 44	39 57	0 54
50	0	2 55	8 59	2 49	17 21	2 31	24 33	2 4	30 4	1 27	33 32	0 45
60	0	2 16	6 59	2 11	13 30	1 58	19 6	1 36	23 23	1 8	26 5	0 35
70	0	1 33	4 47	1 30	9 14	1 21	13 4	1 6	16 0	0 46	17 50	0 24
80	0	0 47	2 26	0 46	4 41	0 41	6 38	0 33	8 7	0 24	9 3	0 12

1944. Toutes les ellipses des parallèles terrestres, étant ainsi tracées se trouvent divisées en heures, & il est aisé d'en tracer le contour; elles touchent la circonférence *ABTR* du cercle de projection en deux points, l'un à l'orient, l'autre à l'occident: ces points séparent l'ellipse en deux parties, dont l'une est l'arc diurne, & l'autre l'arc nocturne; si l'on veut savoir par le calcul à quel endroit de chaque ellipse est le point de contact du cercle de projection, il ne faut que trouver les arcs semi-diurnes pour chaque latitude, qui sont les complémens des différences ascensionnelles; le cosinus de l'arc semi-diurne est égal à la tangente de la

latitude, multipliée par la tangente de la déclinaison, quand on néglige la réfraction (1026). Ces arcs semidiurnes en degrés, depuis l'équateur jusqu'à 80 degrés de latitude sont de 90°, 90° 51′, 91° 45′, 92° 47′, 94° 3′, 95° 46′, 98° 23′, 103° 23′, 118° 32′; si on les convertit en temps, on aura l'heure & la minute qui doit se trouver dans le point de contact.

On peut chercher aussi par le calcul, à quels points du cercle de projection doivent passer les différens parallèles; on considérera un parallèle *BCK* (*fig.* 111), dont *C* est le centre, *BE* la latitude du lieu, *CT* le sinus de la latitude, *KT* le sinus de la distance du centre *T*, ou du point par où passe l'équateur, au point *K* par où l'astre doit passer pour paroître sur le cercle terminateur; or sin. *TKC* : *TC* : : *R* : *TK*, c'est-à-dire, que le cosinus de la déclinaison, est au sinus de la latitude, comme le rayon est au sinus de la distance entre l'équateur & le point de section du parallèle terrestre, dont le rayon est *BC*. *Fig.* 111.

1945. Dans l'éclipse du 1 Avril 1764, la déclinaison du soleil étant de 4° 49′; on trouve par l'analogie précédente que le parallèle de 10° touchoit le cercle de projection à 10° 2′ de l'équateur, celui de 20° à 20° 4′; celui de 30° à 30° 7′; celui de 40° à 40° 10′; celui de 48° 50′ à 49° 4′; celui de 60° à 60° 21′; celui de 70° à 70° 34′; celui de 80° à 81° 13′; & celui de 85° 11′ à 90°; c'est-à-dire, au sommet du méridien universel de la figure, puisque la déclinaison est supposée de 4° 49′. Les parallèles qui sont plus éloignés de l'équateur que le complément de la déclinaison ne touchent point le cercle de projection; mais leurs ellipses en sont éloignées au sommet où dans leur plus proche distance, d'une quantité *RI* égale au sinus verse de l'arc *DF* qui est la somme du complément *DP* de la déclinaison, & du complément *PF* de la latitude du parallèle.

On auroit pu décrire encore sur la figure 122, les parallèles de 10° & de 20° au midi de l'équateur; mais

cela auroit rendu la figure trop grande pour ce volum

1946. Par les points de division de chaque ellipse, on a tiré d'autres ellipses qui se coupent toutes au pole *P* (*fig.* 122); car les cercles horaires dans cette projection ortographique sont aussi des ellipses (1827); mais comme ce sont de grands cercles, ces ellipses ont toutes pour centre, le centre même de la projection, & pour grands axes des lignes égales au diamètre de la projection. Le petit axe de chacune est le produit du grand axe par le sinus de l'angle d'inclinaison, c'est-à-dire, de l'angle que fait le cercle lui-même avec la ligne des centres (1828).

Fig. 122.

Si pour décrire ces ellipses avec précision, l'on veut savoir quel angle forment les axes avec le méridien universel *CP*, & quelles sont les valeurs des petits axes, on imaginera un triangle sphérique, rectangle, formé par le cercle d'une heure & le méridien, avec un arc abaissé perpendiculairement du soleil sur le cercle horaire; l'angle au soleil formé par le méridien universel & par la perpendiculaire se trouvera en disant : le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pole comme la tangente de 15° est à la cotangente de l'angle cherché (3680); ainsi en multipliant la tangente de l'angle horaire par le sinus de la déclinaison, l'on aura la tangente de l'angle que forme le grand axe de chaque ellipse avec le méridien *CP*, ces angles sont dans la figure 122, de 1° 17′, 2° 47′, 4° 49′, 8° 16′, & 17° 24′. En prenant ces quantités-là sur la circonférence, à droite & à gauche du sommet *R* de la projection, on pourra tirer le grand axe de chaque ellipse, pour la décrire avec plus de facilité.

1947. Quand à l'inclinaison du rayon solaire ou de la ligne des centres du soleil & de la terre sur le plan du cercle horaire, elle est égale à l'arc perpendiculaire abaissé du soleil sur ce cercle; on la trouve par le même triangle sphérique, en disant (3681) : le rayon est au cosinus de la distance du soleil au pole, comme

le ſinus de l'angle horaire eſt au ſinus du côté, qui eſt égal à l'inclinaiſon; & ce ſinus multiplié par le rayon de projection donne le demi-petit axe de l'ellipſe du cercle horaire. Ces demi-axes dans notre exemple, ſont de 13′ 56″, 26′ 54″, 38′ 3″, 46′ 36″, 51′ 59″, pour 1^h, 2^h, 3^h, 4^h & 5^h. *Fig.* 122.

1948. Ayant décrit les parallèles & les méridiens ſur la projection, on tirera le cercle de latitude *CT* formant l'angle de poſition *RCT* (1846); il eſt dans cette éclipſe de 23° 0′; on prendra *CL* égale à la latitude de la lune 39′ 36″; on tirera l'orbite *LF* faiſant un angle de 84° 15′ 34″ avec le cercle de latitude (1765). Au point *L* de la conjonction, on marquera 10^h 31′ 23″ qui eſt le temps de la conjonction; on prendra ſur l'orbite le mouvement horaire relatif 27′ 19″½ par le moyen duquel on diviſera l'orbite en heures & en minutes avant & après la conjonction, depuis 7^h 35′ juſqu'à 12 heures 30′, c'eſt-à-dire, pendant toute la durée de l'éclipſe.

Nous avons ſuffiſamment expliqué la manière de trouver ſur cette figure les points de la terre qui auront l'éclipſe centrale (1931); la table qu'en a calculé M. du Séjour, ſe trouvera ci-après (1969), avec celles des autres circonſtances de l'éclipſe, dont nous avons à parler. Nous commencerons ici par chercher les points qui voient pour plus grande & unique phaſe, le contact des deux bords du ſoleil ou de la lune; la méthode eſt la même que pour trouver la grandeur de l'éclipſe d'un doigt, de deux doigts, &c. Si l'on tire une ligne *DEG* (*fig.* 122) parallèle à l'orbite, qui en ſoit éloignée de la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune, cette ligne *DEG* marquera bien ſur la terre une ſuite de points qui verront les deux bords ſe toucher, comme l'orbite elle-même y marque une ſuite de points qui voient les centres coïncider; mais il n'eſt pas exactement vrai que le point *E* de la terre qui voit le contact des bords, lorſque la lune eſt ſur la ligne *BE* perpendiculaire à l'orbite, ne les a pas vu plus près, ou *Fig.* 122.

Fig. 122. qu'il ne verra pas ensuite la lune entamer le bord du soleil ; enfin il n'est pas vrai que la distance *B E* doive être la plus courte distance ou la plus grande phase, puisque cette plus courte distance arrive ordinairement sur une ligne inclinée à la perpendiculaire, & c'est ce que M. de la Caille avoit négligé d'observer dans ses leçons d'astron. (art. 1172), où il n'avoit pour objet que de dresser en général une figure approchée des phases de l'éclipse.

1949. Le problême des plus grandes phases données, considéré généralement, seroit impraticable, même par les méthodes directes ; mais M. du Séjour voulant résoudre ce problême dans son grand travail des éclipses a imaginé pour simplifier l'équation de prendre pour son *medium* ou pour sa donnée, l'angle que forme la ligne de la plus grande phase avec la perpendiculaire *B E* sur l'orbite ; cet angle étant supposé d'une certaine quantité détermine la latitude, l'heure & la quantité de la plus grande phase, par le moyen d'une équation qui a servi à construire la table de la limite de l'éclipse qui se trouvera ci-après (art. 1969). M. de Séjour trouve qu'il y auroit une erreur de $3^\circ\ 33' \frac{1}{2}$ sur la longitude & de $0^h\ 35'\ 49''$ sur l'heure du contact, pour la latitude de $16^\circ\ 57'$, si l'on supposoit que la plus grande phase arrive sur la perpendiculaire à l'orbite relative.

1950. Pour trouver, par la méthode graphique, cette ligne de la plus grande phase sous une latitude donnée, on peut faire varier l'orbite avec ses divisions, jusqu'à ce qu'on ait rencontré deux heures pareilles, l'une sur le parallèle & l'autre sur l'orbite, qui soient éloignées de la somme des demi-diamètres, & en même temps plus près que les autres points semblables qui précèdent & qui suivent. Pour cela on trace l'orbite *R B M* sur un carton séparé de la figure ; en faisant mouvoir cette orbite *BL* de la lune vers la droite, de la valeur, par exemple, de $50'$, ensorte que ce soit le point de $11^h\ 21'$, au lieu de $10^h\ 31'$, qui tombe en *L* sur le cercle de latitude, je trouve après quelques essais qu'en mettant une pointe du compas sous l'équateur à $9^h\ 48'$ du

du matin, avec une ouverture égale à la somme des demi-diamètres, elle tombe aussi à 9^h 48′ de l'orbite ainsi déplacée, & qu'en la portant sur 9^h 45′, & sur 9^h 50′, la distance est sensiblement la même, ensorte que 9^h 48′ est véritablement le temps de la plus courte distance & de la plus grande phase, réduite à un simple contact, sous l'équateur; pour un pays qui compte 50′ de plus, ou qui est plus oriental que Paris de 0^h 50′, c'est-à-dire, de $12^\circ\frac{1}{2}$ & qui a par conséquent $32^\circ\frac{1}{2}$ de longitude. *Fig. 122.*

1951. Au lieu de faire promener l'orbite, on peut aussi se contenter de chercher un point sur l'orbite, & un sur le parallèle, où la distance donnée soit sensiblement la même, en faisant varier chacun de ces points de cinq minutes; on trouve que l'heure de l'orbite est alors plus petite que l'heure du parallèle, de 50′ de temps, on en conclut que le lieu cherché est plus oriental que Paris de 50′ de temps.

1952. Si je fais la même opération sous le parallèle de 30°, & en faisant avancer l'orbite mobile de 2^h 39′ sur la droite, ensorte qu'elle soit coupée par le cercle de latitude à 1^h $10'\frac{1}{2}$, je vois en essayant différentes heures sur le parallèle, que si je mets les pointes de compas sur 1^h 49′ du soir, tant au parallèle qu'à l'orbite, la distance sera égale à la somme des demi-diamètres, & que ce sera la plus courte qui ait lieu avant & après, ensorte que le contact y arrivera, comme plus grande phase à 1^h 49′; or ce pays ayant la conjonction 2^h 39′ plutôt que Paris, est de $39^\circ\frac{3}{4}$ plus oriental, ainsi il a $59^\circ\frac{3}{4}$ de longitude. On trouveroit de même la suite de tous les points qui sont dans la table de la limite de l'éclipse (1969).

1953. Si l'on tire une ligne parallèle à l'orbite, qui soit au-dessus de la ligne du contact *GED*, de la douzième partie du diamètre du soleil, elle marquera de même une suite de points qui doivent avoir l'éclipse d'un doigt. Mais pour avoir des points où ce soit la plus grande phase, & afin de trouver le milieu de l'éclipse pour chaque point, il faut faire le même tâtonnement que

pour le contact, en portant sur divers parallèles & sur l'orbite mobile une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres, moins la douzième partie du diamètre du soleil, & ainsi des autres phases.

1954. Pour appliquer le calcul à ces opérations graphiques, il faudroit chercher la distance apparente des centres pour chaque lieu trouvé, par les méthodes ordinaires (1879, 1876 ou 1881), & recommencer ce calcul pour deux ou trois instans à chaque latitude, afin de reconnoître si l'on a trouvé exactement l'heure de la plus grande phase donnée, par exemple, l'heure où l'on y a observé le milieu de l'éclipse, & sa grandeur d'un doigt.

Faisant le même calcul pour différentes latitudes, on aura une suite de points où doit paroître le contact des deux bords, & l'on en tracera la courbe sur une carte, comme celle de la Planche XIV. Ce calcul seroit long, mais on ne le fait que pour un petit nombre de points. D'ailleurs on ne cherche communément ces lignes que par pure curiosité, pour avertir, dans les éphémérides, les habitans des pays où l'on peut espérer de voir une éclipse; cela ne vaut guère la peine de chercher une exactitude plus grande que celle des lignes droites parallèles à l'orbite, ou des opérations graphiques dont je viens d'indiquer la méthode. Mais dans le cas où l'on voudroit même calculer ces distances exactement, je crois que la méthode indirecte que je propose, feroit encore la plus courte.

1955. Il en est à peu-près de même quand on cherche le point de la terre qui doit voir le contact des deux bords au lever du soleil, ou qui voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin de l'éclipse au lever du soleil, en un seul instant & comme plus grande phase; le point *B* (*fig.* 120) où le cercle de projection est coupé par la ligne *AB* du contact est bien un point où l'on voit le commencement de l'éclipse au lever du soleil, mais il n'est pas exactement vrai que ce contact y soit la plus grande phase, & que ce soit le plus mé-

Fig. 120.

ridional de tous les lieux de la terre où l'on voit l'éclipse; il est nécessaire d'y appliquer les mêmes opérations que pour les autres points des lignes de limites, & l'on trouvera, comme M. du Séjour, qu'à 19° 36′ 33″ de latitude australe, le contact arrivera au lever du soleil a 6^h 6′ 48″ sous une longitude de 346° 3′ 49″. Quant au point le plus méridional de tous ceux qui ont vu l'éclipse, on trouve qu'à 20° 5′ 47″ de latitude, le contact est arrivé à 5^h 25′ du matin, dans un lieu plus occidental que Paris de 3^h 2′ ou 45° $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qui est à 334° $\frac{1}{2}$ de longitude. C'est le point marqué *B* dans la figure 123. On verra la différence qu'il y a entre ce point de la ligne de limite, & le point dont la projection est en *B* (*fig.* 120), si l'on calcule la longitude & la latitude de celui-ci. Si *CM* est de 39′ 24″ (1934), *AM* = 30′ 47″, *CA* = 8′ 37″, *CB* = 54′ 0″, on aura l'angle *ACB* = 80° 49′, ôtant l'angle *ACF* = 62° 19′ (1934) on a l'arc *FB* = 18° 30′; connoissant l'arc *FB*, on a la latitude du parallèle qui passe au point *B* du cercle de projection; car sin. latit. = sin. *BF* cos. déclin. (1943); cette latitude est de 18° 26′. Pour trouver la longitude de ce point-là, on cherchera l'angle au pole, ou l'arc semi-diurne, dont le cosinus = tang. déc. tang. lat. = 88° 23′; on cherchera aussi *AB* qui réduit en temps de l'orbite donnera 1^h 57′ 3″, ainsi la lune étoit en *B* a 8^h 25′ 38″; l'angle horaire pour Paris étoit donc 53° 35′ $\frac{1}{2}$; il surpasse celui du lieu *B* de 34° 47′ $\frac{1}{2}$, & puisque ce sont des angles du matin, le point *B* est plus occidental que Paris, & sa longitude est 345° 12′ $\frac{1}{2}$. Cette longitude est moindre de 52′ que celle qu'on a trouvé en calculant rigoureusement le point qui doit voir le contact pour plus grande phase, & au lever du soleil. *Fig.* 120.

1956. Le point de la plus petite phase est un autre cas assez simple, du problême des phases: nous avons vu qu'au midi il y a une suite de points où se voit le contact du bord austral de la lune avec le bord boréal du soleil; mais l'attouchement du bord boréal

Fig. 118. de la lune, n'avoit point lieu en 1764; la plus proche distance des centres n'a pû être plus grande pour les pays septentrionaux que la ligne *MH* (*fig.* 118), différence entre le rayon de la projection & la plus courte distance. Le pays dont le parallèle touche le cercle de projection en *H*, & qui voit le milieu de l'éclipse au coucher du soleil, voit aussi exactement la plus petite distance possible pour ce point-là, puisque son mouvement est parallèle à l'orbite de la lune, & la plus petite phase qui soit possible du côté du nord, sur la surface de la terre. Pour trouver la position géographique du point *M*, je suppose l'angle $PCM = 28^\circ\ 44'$, est $HE = 62^\circ\ 19'$, le sinus de cet arc multiplié par le cosinus de la déclinaison donne le sinus de la latitude du point de la terre, dont le parallèle touche en *H* le cercle de projection, & il se trouve de $61^\circ\ 56'$. L'arc semi-diurne sous cette latitude est $99^\circ\ 5'$; la lune étant en *M* à $10^h\ 22'\ 41''$, l'angle horaire pour Paris, n'est que de $24^\circ\ 20'$, ainsi le lieu cherché est de $74^\circ\ 45'$ à l'occident de Paris; c'est-à-dire, à $305^\circ\ 15'$ de longitude; c'est le point boréal de la terre qui voit la plus petite phase possible; la plus grande distance des centres y est de $14'\ 36''$, ou de 5 doigts & demi, c'est-à-dire, égale à *MH*, au coucher du soleil. C'est donc sous le parallèle de $61^\circ\ 56'$ à l'endroit marqué *A* dans la carte de l'éclipse, Planche XIV, que doivent se terminer toutes les lignes des phases qui ne diminuent pas au-delà de 6 doigts & un quart. Ce pays est dans la terre de Labrador, à l'orient de la Baie d'Hudson, pour l'éclipse de 1764.

1957. Après avoir indiqué la manière de tracer la ligne des phases sur la terre par longitudes & latitudes, nous allons parler des *courbes d'illumination* qui marquent les limites de tous les pays où peut s'observer une éclipse.

Milieu de l'éclipse au lever du soleil. TROUVER *les lieux où le milieu de l'éclipse arrive au lever du soleil.* Le point $9^h\ 1'\ 9''$ de l'orbite lunaire coupe le cercle de projection sur la droite vers l'endroit où

ce cercle est touché par l'ellipse ou le parallèle de 18° 5′ de latitude, or le soleil ayant 4° 48′ 50″ de déclinaison se leve à 5^h 53′ 45″ sous cette latitude, son arc semi-diurne étant de 6^h 6′ 15″; ainsi le point qui se trouvera sur le bord du cercle à 9^h 1′ 9″ de Paris, comptera 5^h 53′ 45″; la différence est 3^h 7′ 24″ dont il comptera moins que Paris, ou dont il sera plus occidental que Paris; 3^h 7′ font 46° 51′, donc sa longitude sera 333° 9′ comptée du premier méridien; c'est le résultat du calcul de M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 258). Ce point est entre les Isles du Cap-Verd, & celles de l'Amérique, & c'est-là le premier endroit de la terre où l'on a commencé de voir l'éclipse centrale au lever du soleil; il est marqué *C* dans la carte, Planche XIV.

1958. On observera que le point d'intersection *B* (*fig.* 122) de l'orbite avec le cercle de projection, n'est pas à 18° de l'équateur ou du point *A*; mais qu'il est le point où le parallèle de 18° coupe le plan de projection; il représente le point de la terre dont nous avons donné le calcul (1944); ce point *B* est celui où l'arc diurne est séparé de l'arc nocturne par le plan d'illumination perpendiculaire au rayon du soleil. Les divisions marquées 10°, 20°, &c. sur le cercle *A P* ne sont pas des arcs de 10° & de 20° pris sur ce cercle; mais les points où il rencontre les parallèles qui sont à 10° & à 20° de l'équateur; aussi le sommet *R* de ce cercle au lieu d'être marqué de 90°, répond à 85° 11′ complément de la déclinaison du soleil, parce qu'il est touché par le parallèle de 85° 11′ qui est tout entier au-dessus du cercle d'illumination & du cercle de projection; mais on n'a pu le représenter dans la figure, à cause de son extrême petitesse. *Fig.* 122.

1959. Du côté de l'orient l'orbite doit couper le cercle de projection, à 11^h 43′ 23″, à l'endroit où il est touché par le parallèle de 75° 7′ 22″ de latitude; il est aisé d'en conclure la longitude de ce point ou du pays qui le dernier de tous a vu l'éclipse centrale, ou

Fig. 122. qui l'a vue au coucher du soleil. Cette longitude est de 132° 25′; ce point est situé au nord de la Chine, & il est marqué *D* dans la carte de l'éclipse, Planche XIV. On a vu ci-devant la manière de trouver rigoureusement par la trigonométrie la suite des points de l'éclipse centrale (1936). M. du Séjour, a résolu ce problême & un grand nombre d'autres par ses méthodes analytiques, de la manière la plus exacte & la plus générale (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 187 & suiv.).

1960. La courbe du milieu de l'éclipse au lever
Fig. 123. ou au coucher du soleil, où *BCADM* (*fig.* 123), ne peut se trouver par un procédé aussi simple; celle qui est marquée de *B* en *H* sur la Planche XIV, n'est pas la suite des points qui se levent ou qui voient le soleil quand la lune est au milieu *M* de son orbite (*fig.* 122), dans le moment du milieu de l'éclipse générale, c'est la suite des points qui voient au lever du soleil la plus grande phase qu'ils aient à voir; c'est pourquoi toutes les courbes des phases de trois doigts, de six doigts, &c. se terminent sur cette ligne *BCADM* (*fig.* 123), où elles marquent les points de la terre qui voient la plus grande phase de trois doigts au lever du soleil, de six doigts au lever, &c.

Pour trouver sur un parallèle quelconque le point où passe cette courbe du milieu de l'éclipse au lever du soleil; il faut pour chaque ligne des phases trouver comme dans les articles, 1950, 1954, un point de l'orbite & un point de l'ellipse éloignés de la quantité d'une phase quelconque, & tels que pendant quelques minutes, la lune soit à la même distance du parallèle terrestre considéré vers l'endroit où il touche le cercle de projection, & où par conséquent arrive le lever ou le coucher du soleil. On trouvera de même ci-après la table des pays qui doivent avoir le milieu de l'éclipse au lever ou au coucher du soleil; M. du Séjour, a traité cette matière analytiquement dans les *Mémoires de* 1765, *pag.* 322.

1961. On a coutume de tracer aussi sur la carte

géographique d'une éclipse la courbe de tous le pays où l'éclipse commence & finit, soit au lever, soit au coucher du soleil, on la voit dans la Planche XIV, sous la forme d'un huit de chiffre, dont le nœud est près du pole, & qui s'étend depuis la Tartarie jusqu'au Brésil. Commencement au lever du soleil.

Pour tracer cette courbe, on cherche successivement les points où elle coupe les divers parallèles de la terre : on choisit un parallèle quelconque, par exemple, l'équateur qui passe au point *A* du cercle de projection (*fig.* 122); on prend une ouverture de compas égale à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, & mettant l'une des pointes en *A*, on fait avec l'autre une intersection sur l'orbite de la lune, qui tombe en *R* à $7^h\ 37' \frac{1}{2}$, l'arc semi-diurne est de $6^h\ 0'$; car on néglige ici l'effet des réfractions, ainsi le point *A* de la terre compte $6^h\ 0'$ du matin, tandis qu'il est $7^h\ 37' \frac{1}{2}$ à Paris; donc ce lieu est $1^h\ 37' \frac{1}{2}$ à l'orient de Paris, c'est-à-dire, que sa longitude est de $355^\circ\ 37' \frac{1}{2}$. Cette opération est exacte & n'exige point de tâtonnement : il est sûr que ce point *A* verra les deux bords du soleil & de la lune se toucher au lever du soleil; il pourra voir ensuite une plus grande éclipse, mais cela n'intéresse pas la question présente. Si l'on fait l'intersection à gauche avec la même ouverture de compas, elle doit tomber sur $9^h\ 39' \frac{1}{3}$, c'est l'heure qu'il étoit à Paris, lorsque la lune étoit dans ce point de son orbite; mais il étoit $6^h\ 0'$ du matin pour le point de l'équateur qui se levoit en *A*, donc ce point est à $3^h\ 39' \frac{1}{3}$ à l'occident de Paris, ou à $325^\circ\ 10'$ de longitude, peu éloigné de Cayenne; M. du Séjour trouve $325^\circ\ 14'\ 0''$ de longitude. *Fig.* 122.

1962. On trouvera de même sous les autres parallèles, à l'occident de la projection la longitude des lieux qui verront le commencement & la fin de l'éclipse au lever du soleil, on en trouvera ci-après une table exacte, calculée par M. du Séjour. En faisant la même chose sur le bord oriental du cercle de projection sous

chaque parallèle, on trouvera les longitudes des lieux qui doivent avoir le commencement ou la fin de l'éclipse au coucher du soleil; le commencement en prenant les intersections à droite sur l'orbite lunaire, la fin en les faisant sur la partie gauche ou sur l'extrémité orientale de l'orbite.

1963. Quand tous ces points du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil sont rapportés sur un globe, ou sur une carte géographique, il en résulte une courbe singulière qui ressemble quelquefois à un huit de chiffre, quelquefois aussi elle ne contient qu'un seul ovale, ou deux ovales séparés; M. du Séjour donnera toutes les propriétés géométriques & astronomiques de ces courbes, les points de croix, d'infléxion, de rebroussement, les points isolés, &c. dans les *Mémoires* de 1769, comme il l'a annoncé dans ceux de 1768, *pag.* 187 & 188. Celle que l'on voit dans la carte, Planche XIV, (*fig.* 123) a vers le point *K* au-dessus du pole arctique, un nœud ou intersection formée par un point triple, à l'endroit de la terre, où le soleil ne fait que se coucher un instant à minuit, ou rase l'horizon, ce qui arrive sous le parallèle de 85° 11′ complément de la déclinaison du soleil ce jour-là. Pour avoir la longitude de ce méridien, M. de la Caille (art. 1177), suppose qu'il faut prendre le point *M* (*fig.* 122), où la perpendiculaire coupe l'orbite de la lune, il est marqué 10^h 22′ 41″, c'est-à-dire, selon cet Auteur, le lieu qui avoit midi quand la lune étoit en *M*; or il comptoit 1^h 37′ 19″ de moins que Paris, il étoit donc de 24° $\frac{1}{3}$ plus oriental, c'est-à-dire, qu'il avoit 44° $\frac{1}{3}$ de longitude. Mais observons que le point, qui en se couchant & se levant, à minuit au-delà du pole *P* voit le commencement de l'éclipse, ne verra point la fin à ce même moment, à moins que toute l'éclipse ne fût réduite à un simple contact pour ce point-là, ce qui forme un cas unique, & n'avoit pas lieu en 1764; de même la ligne *BCADM*, qui marque sur le globe le

Courbe singulière.

Planche XIV. Fig. 123.

le milieu au lever & au coucher du soleil, ne peut pas être coupée en un même point par les 2 lignes courbes, dont l'une marque le commencement au lever & au coucher du soleil, & l'autre la fin au lever & au coucher du soleil; celle du commencement au lever du soleil se termine & se joint à celle du commencement au coucher du soleil, lorsque la lune est vers le point $10^h\ 14'$ (*fig.* 122), éloignée du sommet *R* de la projection de $30'\ 48''$, ou de la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune; la ligne de la fin au lever se termine, & celle de la fin au coucher commence, lorsque la lune est vers $12^h\ 27'$, éloignée du point *R* vers l'orient de la somme des demi-diamètres; les deux premières se joignent au point *G* de la terre (*fig.* 124), & les deux dernières en un point *I*, beaucoup plus occidental. *Fig.* 122. *Fig.* 124.

1964. Pour déterminer sur la terre ces deux points *G* & *I*, l'on remarquera d'abord qu'ils sont sur le parallèle de $85°\ 11'$ où le soleil ne fait que raser l'horizon; mais ils sont à des longitudes fort différentes. La lune étant au point de l'orbite marqué $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ (*fig.* 122), on a $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ à Paris, en comptant depuis minuit, & le point qui est en *R* comptant 0^h, il compte moins, il a moins de longitude, il est plus occidental de $10^h\ 14'\frac{1}{3}$ ou $153°\ 35'$, sa longitude est donc de $226°\ 25'$. C'est le point *G* (*fig.* 124), qui est commun aux lignes du commencement au lever, & du commencement au coucher. On trouvera de même le point *I* où se réunissent les courbes de la fin au lever, & de la fin au coucher; car la lune étant au point de son orbite marque $12^h\ 25'$, est éloignée du point *R* de la somme des demi-diamètres, & le lieu de la terre qui pour lors est arrivé en *R*, comptant $12^h\ 25'$ de moins, a aussi une longitude moindre de $186°\ \frac{1}{4}$; sa longitude est donc de $193°\ 45'$; M. du Séjour trouve $193°\ 49'\frac{1}{2}$, comme on le verra dans la table. Sous le parallèle de $85°\ 11'$, il faut distinguer 3 points au lieu d'un seul qui est indiqué dans la figure de M. de la Caille.

Fig. 124. Le premier est à 226° 24′ de longitude, il voit le commencement au lever & au coucher du soleil ; le dernier est à 193° 49′, il voit la fin au lever & au coucher du soleil ; entre ces deux points est un lieu intermédiaire qui voit le milieu où la plus grande phase au lever & au coucher du soleil, il est marqué *H* dans la figure 124 ; c'est l'endroit où le parallèle de 85° 11′, est touché par la ligne du milieu, & ce point de contact sépare le milieu au lever d'avec le milieu au coucher.

1965. Ce lieu de la terre qui doit voir le milieu de l'éclipse au lever & au coucher du soleil, est aussi sur le parallèle dont la latitude est égale au complément de la déclinaison du soleil 85° 11′ ; ou suivant M. du Séjour, 85° 14′ ; c'est le lieu qui se trouve en *L* (*fig.* Fig. 120. 120), lorsque la lune est aux environs du point *N*, où aboutit la perpendiculaire *LN* ; cette ligne exprime à peu-près la plus grande phase ou la plus courte distance possible pour le point *L*, & c'est au moment du minuit qui joint le lever avec le coucher du soleil. Pour savoir à quelle heure la lune étoit en *N*, on employe les triangles semblables *CMT*, *LTN* dans lesquels on connoît $CT = 44' 56''$, $TM = 21' 36''$, $CL = 54' 0''$, & l'on fait cette proportion $CT : TM :: CL : NM$, que l'on trouve répondre à 57′ 0″ de temps ; ce temps ajouté avec celui du milieu de l'éclipse générale en *M*, $10^h\ 22' 41''$, donne $11^h\ 19' 41''$ pour l'heure qu'il étoit à Paris, lorsque la lune étoit en *N* ; & comme l'on comptoit 0^h dans le lieu *L*, il s'ensuit qu'il étoit plus occidental que Paris, de $11^h\ 19' 41''$ ou de 169° 55′ ½ ; ainsi sa longitude étoit de 210° 4′ 30″.

1966. A parler exactement, ce n'est pas au point *N* que la distance *LN* est réellement la plus courte possible pour le point *L* ; mais comme le mouvement en *L* est toujours très-petit, & que l'inclinaison de l'orbite *TN*, par rapport à la tangente en *L* ne va jamais qu'à 29°, il n'y a pas d'erreur sensible ; je trouve, par exemple, que dans le cas où la déclinaison seroit de 10°, & l'inclinaison de 27°, la perpendiculaire *LN*

ne différeroit de la ligne de la plus grande phase que de 2°, parce que le mouvement sur l'ellipse étant 12 fois moindre que celui de la lune, il faut que le cosinus de l'angle que forme la ligne *LN* avec l'orbite, soit 12 fois moindre que le cosinus de l'angle formé par cette même ligne *LN* avec la tangente en *L*; or les deux angles étant assujettis à faire entr'eux 153°, qui est le supplément de 27°, il n'y a que des angles de 88° & de 65°, qui ayant leur somme égale à 153°, ayent aussi leurs cosinus dans le rapport de 1 à 12.

On voit, par ce qui précède, combien le point du milieu de l'éclipse au lever du soleil, est éloigné du point *M* qui, suivant M. de la Caille, marquoit sur l'orbite la longitude du lieu où devoient se couper les lignes du commencement & de la fin de l'éclipse au lever & au coucher du soleil.

1967. Ces courbes d'illumination que l'on voit dans la carte, (*fig.* 123) paroissent d'abord assez bisarres; mais quelques considérations sur la nature du phénomene qu'elles représentent, feront sentir les raisons générales de leur situation & de leur contour. Les courbes du coucher sont plus vers la droite, ou plus orientales que celles du lever, parce que les pays qui quittent déjà l'horizon, quand l'éclipse commence ont plus de longitude & sont plus orientaux que ceux qui y arrivent, ou qui ont le soleil levant. Les courbes du coucher sont aussi plus au nord que celle du lever, cela arrive en général dans les signes ascendans, surtout quand la lune est en même-temps dans son nœud ascendant; car alors elle va en se rapprochant du nord depuis le commencement jusqu'à la fin de l'éclipse; le mouvement de l'ombre tend vers le nord, & les pays qui en se couchant sont éclipsés sur la gauche ou sur la partie orientale *NU* de la figure 122, sont plus au nord que ceux qui ont vu l'éclipse en se levant dans la partie droite *GABT*. *Fig.* 123.

Le pays situé en *B*, qui est à peu-près le plus méridional de tous ceux qui peuvent voir l'éclipse au soleil

Fig. 123. levant ne voit qu'un contact, ou un instant d'éclipse, & ce pays voit tout à la fois le commencement, le milieu & la fin; ainsi les trois courbes commencent en un point *B*, qui est à l'occident de la figure, parce que la lune arrivant par l'occident, les pays les plus occidentaux sont ceux qui voient l'éclipse les premiers.

Dans des pays un peu plus septentrionaux, la lune étant un peu plus basse, il y a un peu plus de parallaxe, la lune mord davantage sur le soleil, l'éclipse y dure plus long-temps, il se passe plus de temps entre le commencement & la fin; il y a donc plus d'espace entre le lieu *E* qui se leve quand l'éclipse commence, & le lieu *F* qui se leve quand l'éclipse finit; voila pourquoi la courbe s'élargit & se renfle en *E* & en *F*; mais le point *E* qui se leve ou qui arrive sur le cercle terminateur, parallèle au plan de projection, quand l'éclipse commence, est plus occidental que celui qui se leve quand l'éclipse finit, & la distance de ces deux points, où la largeur de la courbe répond à la plus grande durée de l'éclipse, & à la petitesse des degrés de longitude qui fait que la courbe occupe moins d'espace; la plus grande largeur en longitude est à 18° 5′ 24″ de latit. comme on le verra dans la table, *pag.* 554. En arrivant au parallèle de 85° 11′, le soleil ne se couche qu'un instant, donc les trois points qui séparent la partie droite & la partie gauche de chaque courbe; c'est-à-dire, où l'on voit le commencement, le milieu, ou la fin de l'éclipse, au lever & tout à la fois au coucher du soleil doivent être sur ce cercle-là; & les courbes qui marquent la suite de ces points doivent toucher sa circonférence, voila pourquoi les 3 courbes se rapprochent & se terminent sur ce parallèle, vers le nord, en 3 points, dont l'un *G* est commun aux courbes du lever & du coucher au commencement, le second *H* appartient aux courbes du milieu de l'éclipse au lever & au coucher, le troisième *I* est celui du lever & du coucher à la fin de l'éclipse, à 193° 49′ de longitude.

Trois points de contact.

1968. Les deux courbes du milieu de l'éclipse ne doivent pas se rencontrer au même point que celles du commencement & de la fin; car les pays qui ont 85° 11′ de latitude arrivant l'un après l'autre au nord de la projection, dans le point *R* du sommet (*fig.* 122); celui qui y arrive quand l'éclipse commence à moins de longitude que celui qui y arrive quand elle est à son milieu, & la différence est proportionnelle au nombre de degrés qui répondent à la demi-durée de l'éclipse, pour les pays les plus septentrionaux de tous, où la lune ne paroîtra qu'à 14 ½ minutes du soleil (*1956*). *Fig.* 122.

La courbe de la fin au lever, coupe celle du commencement au coucher, en un point *K* très-voisin du parallèle de 85° 11′, parce que le pays qui après avoir vu l'éclipse commencer au coucher du soleil, la voit finir le lendemain matin au lever du soleil, a nécessairement une nuit fort courte; il est par conséquent situé à une latitude fort grande, & fort peu éloignée de celle où le soleil ne se couche point, il est à 169° 47′ 38″ de longitude. Il y a encore deux autres points d'intersection, ensorte qu'on doit considérer six points, là où les figures ordinaires semblent n'en indiquer qu'un seul. Mais pour qu'on apperçoive distinctement tous ces points d'attouchement & d'intersection qui étoient confondus en un seul point, dans les figures de M. de la Caille, je les ai représentés séparément sur le côté de la Planche XIV. Le cercle *GHI* est le parallèle de 85° 11′, où le soleil ne fait que raser l'horizon le jour de l'éclipse; les points *G*, *H*, *I* sont les points où ce cercle est touché par les courbes du commencement, du milieu & de la fin; le point *R* est celui qui voit le commencement au coucher, & ensuite le milieu au lever du soleil; le point *S* est celui qui voit le milieu au coucher, & ensuite la fin au lever; le point *K* est celui qui voit le commencement au coucher, & ensuite la fin au lever du soleil, il est à 85° 3′ 28″ de latitude, & à 210° 12′ de longitude; au reste la différence de ces points, quoiqu'elle fasse plus de 30° en longi-

tude, n'occupe pas ſur la figure un eſpace ſenſible.

Si la déclinaiſon du ſoleil étoit auſtrale, ce ſeroit à la partie ſupérieure du parallèle de 85°, & non pas à la partie inférieure, que ſe feroient les contacts *G*, *H*, *I*, des trois courbes, & la ligne du commencement au lever, couperoit celle de la fin au coucher, de la même manière que celle du commencement au coucher, coupe la courbe de la fin au lever du ſoleil.

L'heure où arrive chaque phaſe, ſe trouve naturellement par les calculs que nous avons indiqués, ainſi il eſt facile de tirer ſur la figure de l'éclipſe, la courbe qui marque tous les pays où chaque phaſe paroîtra à ſix heures du matin, comme on le voit ſur la gauche dans la figure 123, & ainſi de toutes les autres heures, juſqu'à celles du ſoir qui ſont ſur la droite de la figure; mais il faut obſerver que ces lignes des heures ne ſe rapportent pas aux lignes du commencement & de la fin de l'éclipſe, mais ſeulement à celles du milieu ou des plus grandes phaſes. On pourroit marquer les heures ſur les lignes du commencement & de la fin, puiſque ce ſont les arcs ſemi-diurnes de chaque latitude qui indiquent l'heure du lever & du coucher du ſoleil.

1969. Les opérations graphiques, aidées de quelques calculs aſſez ſimples peuvent ſuffire pour trouver les courbes d'illumination, celles des différentes phaſes, & les principales affections des ſix courbes, qu'aucun Auteur d'aſtronomie n'avoit encore expliquées : il y auroit de plus grands détails à donner ſur cet article, s'il ne falloit mettre des bornes à cet ouvrage. Mais pour donner un modele des calculs que l'on peut faire dans ces cas-là, pour mettre dans l'exemple que j'ai choiſi toute l'exactitude poſſible, & pour qu'on voie préciſément à quels points de la figure 123, doivent paſſer toutes les courbes des phaſes qui y ſont repréſentées, je vais donner une table de tous ces points, par longitudes & latitudes, calculée avec ſoin par les formules rigoureuſes de M. du Séjour, qui ſont dans les mémoires de 1765 & 1767. C'eſt M. du Vaucel, déja connu par

divers mémoires d'astronomie, qui a bien voulu se charger de calculer les courbes des phases, & de placer ces courbes sur une projection ortographique d'une partie du globe, où la partie géographique a été dirigée par M. Buache, premier Géographe du Roi. Les tables de l'éclipse centrale & annulaire, avoient été calculées par M. du Séjour, (*Mém. acad.* 1766, *p.* 258, 1767, *p.* 192), de même que la limite de l'éclipse du côté du midi, (*Mém.* 1768, *pag.* 95), & une partie de la courbe du commencement & de la fin; on trouvera dans les mémoires de 1769, lorsqu'ils paroîtront, la théorie de cette courbe d'illumination (1967).

TABLES DES PAYS DE LA TERRE où l'on a vu les différentes phases de l'éclipse du 1 Avril 1764.

ECLIPSE CENTRALE.

Heures dans chaque lieu.		Longitude en supp. celle de Paris 20°.	Latit. géog. septentrionale.
5h 53′ 45″	Lever du Soleil.	333° 8′ 30″	18° 5′ 24″
6 0 0		334 41 30	18 14 7
7 0 0		348 2 15	21 7 58
8 0 0		358 44 45	26 38 4
9 0 0		7 17 30	34 26 55
9 21 12		9 57 22	37 38 11
9 30 0		11 2 15	39 0 20
10 0 0		14 44 0	43 48 22
10 30 0		18 34 0	48 38 54
10 31 16	Latitude de Paris.	18 43 55	48 51 0
11 0 0		22 43 30	53 20 1
11 30 0		27 20 30	57 40 19
Midi		32 28 0	61 31 26
1 0 0		44 6 30	67 34 14
2 0 0		57 5 15	71 36 19
3 0 0		70 52 0	74 7 20
4 0 0		85 6 15	75 33 41
5 0 0		99 36 45	76 11 52
5 25 12	Maximum de Latitude.	105 45 45	76 15 26
6 0 0		114 18 15	76 8 42
7 0 0		129 9 45	75 23 31
7 13 4	Au coucher du Soleil.	132 25 15	75 7 22

Eclipse annulaire, ou contact intérieur des bords du Soleil & de la Lune, en supposant l'inflexion de $4''\frac{1}{2}$, & le diamètre de la Lune augmenté à raison de sa hauteur.

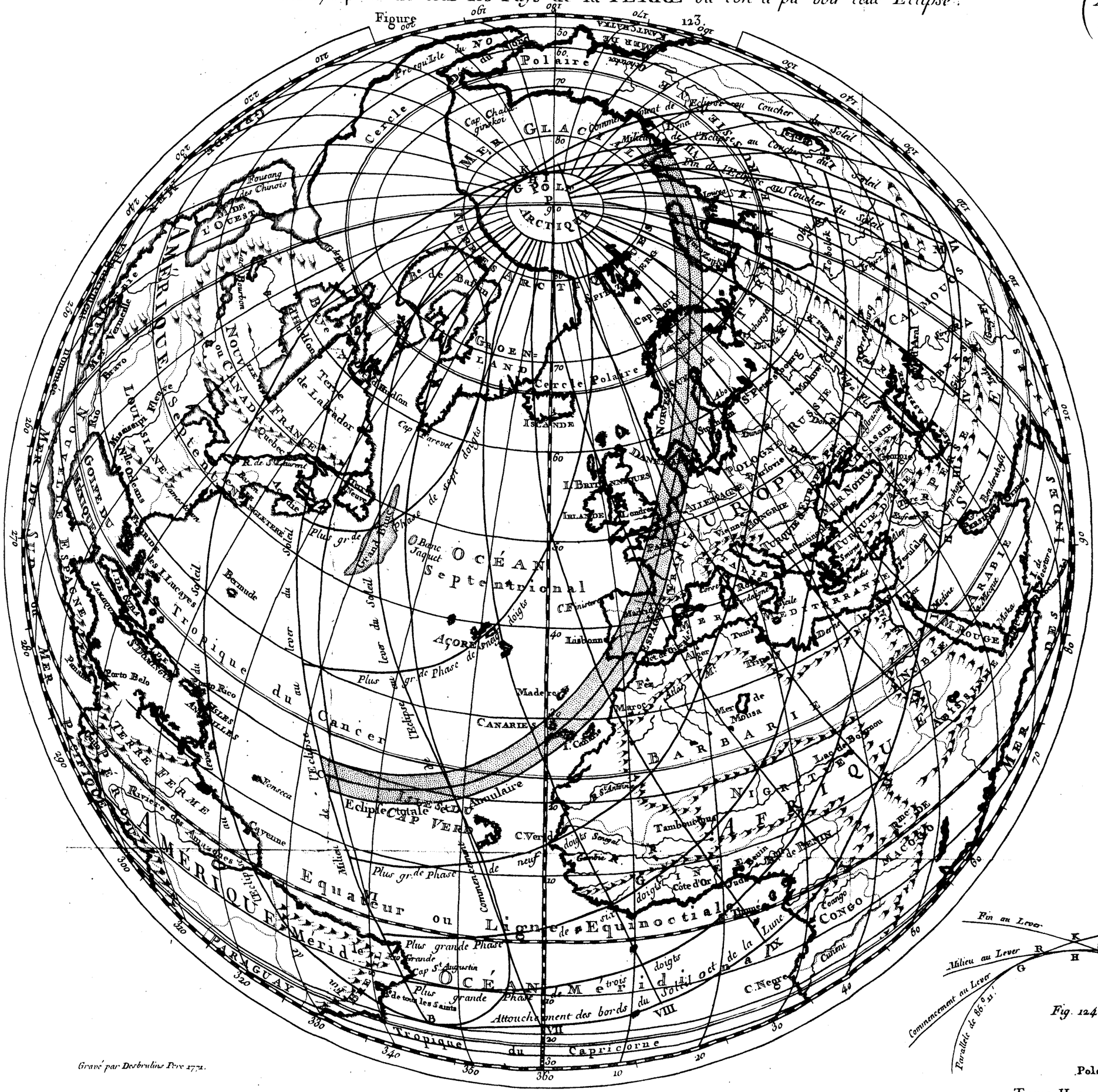
Au midi du Soleil.			Au nord du Soleil.		
Latitude.	Longitude.	Heure dans le lieu de l'observ.	Latitude.	Longitude.	Heure pour le lieu de l'observ.
38° 0′	7° 26′ 29″	9h 9′ 7″	36° 0′	11° 17′ 0″	9h 24′ 19″
40 0	9 3 15	9 21 59	40 0	14 25 15	9 49 58
42 0	10 36 32	9 34 31	42 0	15 57 45	10 2 34
44 0	12 7 47	9 46 48	44 0	17 31 29	10 15 8
45 0	12 53 8	9 52 53	45 0	18 19 5	10 21 26
46 0	13 38 31	9 58 57	46 0	19 7 15	10 27 44
47 0	14 24 11	10 5 0	47 0	19 56 30	10 34 5
48 0	15 10 30	10 11 2	48 0	20 47 40	10 40 29
48 30	15 33 53	10 14 3	48 30	21 13 50	10 43 43
49 0	15 57 25	10 17 4	49 0	21 40 20	10 46 58
50 0	16 45 0	10 23 8	50 0	22 34 30	10 53 31
51 0	17 33 40	10 29 13	52 0	24 28 50	11 6 53
52 0	18 23 55	10 35 22	56 0	28 50 20	11 35 24
54 0	20 9 25	10 47 50	60 0	34 14 40	12 7 34

Limite de l'Eclipse, ou table des lieux où l'on a dû observer le contact extérieur des limbes au nord du Soleil, calculée pour les différentes valeurs de l'angle que fait la ligne de la plus grande phase, avec la perpendiculaire à l'orbite relative (1949) Mém. de l'acad. 1768, pag. 172.

Angle supposé.	Longitude.	Latitude vraie.		Heure dans chaque lieu.	
0°	334° 31′ 0″	20° 5′ 47″	Méridion.	5h 25′ 12″	Matin.
Lev. du Soleil.	346 3 49	19 36 33		6 6 48	
4	352 39 25	18 51 52		6 30 36	
8	5 32 0	16 0 3		7 24 45	
12	15 50 53	12 0 38		8 12 21	
16	24 20 15	6 57 15		8 57 36	
20	32 10 30	0 15 25		9 47 3	
22	36 32 16	4 36 49	Septentrion.	10 20 2	
23	39 38 2	8 32 30		10 46 22	
23	45 56 10	16 56 53		11 46 6	
22	48 47 37	20 24 48		0 13 40	Soir.
20	52 29 30	24 22 34		0 48 53	
16	58 44 2	29 25 44		1 42 24	
12	65 17 20	33 2 50		2 30 57	
8	73 4 27	35 51 40		3 21 21	
4	82 40 7	37 52 24		4 17 46	
0	96 47 30	38 42 52		5 25 12	
.....	108 13 12	38 10 43		6 15 0	

CARTE des Phases de l'ECLIPSE du 1. Avril 1764. et de tous les Pays de la TERRE *où l'on a pû voir cette Eclipse.*

Figure 123.



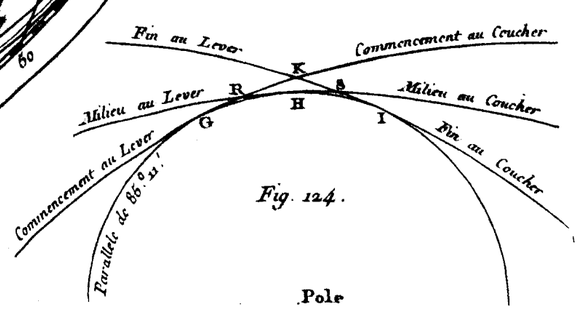


Fig. 124.

Courbe du milieu de l'éclipse.

Latitude vraie.			Milieu au lever. Longitude.			Milieu au coucher. Longitude.		
D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
19	30	Mérid.	346	9	13			
19	0		345	50	52			
15	0		345	4	30			
10	0		343	47	45			
5	0		342	18	30			
0	0		340	40	15			
10		Septent.	336	47	45			
20			332	13	20			
30			326	58	25			
38	42	52	.....			96	47	30
40			320	3	20	108	33	25
48	50		315	13	10	111	28	50
60			306	38	25	117	6	20
70			296	28	40	125	22	20
80			276	8	45	144	49	45
84	11	10	246	53	20	173	33	10
84	41	10	237	44	55	182	40	5
85	11	10	219	7	5	201	17	15
85	11	43	218	21	7½	202	0	7½
85	14	23	210	13	0	210	13	0

Le dernier point de chaque colonne est commun à la courbe du commencement au coucher, & de la fin au lever du ☉, comme on le voit à la page suivante.

Éclipse de 3 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude vraie.
7h Matin.	358° 1′ 45″	8° 41′ 13″ Mérid.
8	10 53 0	4 9 15
9	21 29 0	2 29 20 Septent.
10	29 50 45	10 46 38
11	36 42 30	19 31 10
Midi.	43 11 15	27 35 48
1 Soir.	51 20 45	34 20 10
2	59 30 0	39 41 0
3	68 7 0	43 34 46
4	79 49 30	46 5 41
5	92 16 45	47 16 16
6	106 30 45	47 7 9

Éclipse de 6 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude
7h Matin.	354° 34′ 0″	0° 43′ 11″ Septen.
8	7 39 0	5 26 15
9	17 13 11	12 15 19
10	25 21 15	20 7 5
11	32 2 30	29 18 33
Midi.	39 22 15	37 22 38
1 Soir.	47 23 0	44 7 41
2	57 9 30	49 24 51
3	68 22 30	53 2 4
4	80 39 0	55 22 28
5	93 52 45	56 27 11
6	107 52 15	56 19 6

Éclipse de 9 doigts au nord du ☉.

Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	338° 11′ 15″	8° 25′ 59″ Septen.
7	352 4 45	11 2 6
8	2 56 0	16 0 13
9	12 29 0	23 8 28
10	19 42 45	31 44 52
11	27 5 45	40 41 46
Midi.	35 20 30	48 51 36
1 Soir.	45 9 15	55 26 36
2	56 31 45	60 15 36
3	69 7 45	63 33 31
4	82 19 30	65 33 35
5	96 25 30	66 28 21
6	111 21 15	66 25 1

Éclipse de 9 doigts au midi du ☉.			Éclipse de 7 doigts au midi du ☉.		
Heures.	Longitude.	Latitude.	Heures.	Longitude.	Latitude.
6h Matin.	329°35′45″	30°22′38″ Septen.	6h 0 Matin.	322°53′ 0″	44°31′ 5″ Septen.
7	342 20 0	33 51 10	7 0	334 32 0	49 53 23
8	352 15 30	40 34 35	7 52	340 7 45	62 39 38
9	0 9 30	50 25 47	7 52	337 14 45	68 56 8
10	7 40 0	62 43 30	7 0	322 3 30	75 57 59
11	17 26 0	74 59 13	6 0	360 0 45	77 47 9
Midi.	29 10 0	82 55 15			
1 Soir.	44 45 0	86 2 0			
2	59 33 30	87 13 59			
3	74 36 15	87 47 0			
4	89 35 30	88 3 22			
5	104 22 15	88 10 51			
6	119 19 15	88 9 30			

Commencement & fin de l'éclipse, au lever ou au coucher du Soleil.

Latitude vraie.				Commen. au Lever.			Commen. au Coucher.			Fin de l'écl. au lev. du Soleil.			Fin au Couc.			
D.	M.	S.		D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.	
19	36	12	Mérid.	.	.	.	.	.	.	348	37	13	.	.	.	Sommet *B*.
19	34	23		346	3	48	.	.	.	.	.	.	.	.	.	(1)
19	30			347	13	58	.	.	.	343	26	28				
19	0			348	43	20	.	.	.	341	46	20	.	.	.	
15	0	0		353	6	45	.	.	.	335	48	45				
10	0	0		355	4	59	.	.	.	331	31	59				
5	0	0		355	49	30	.	.	.	328	4	30				
1	1	54		355	39	39	.	.	.	.	.	.	.	.	.	(2)
0	0	0		355	33	30	.	.	.	325	14	0				
10	0	0	Septen.	353	15	31	.	.	.	320	8	1				
18	5	24		349	59	13	.	.	.	316	18	13	.	.	.	Plus grande largeur.
20	0	0		349	2	12	.	.	.	315	23	22				
30	0	0		342	43	54	.	.	.	309	52	24				
38	10	15		.	.	.	108	48	16	.	.	.	.	.	.	Sommet *M*.
38	12	2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	108	13	12	(3)
40	0	0		334	42	50	112	34	10	303	23	50	101	32	10	
48	50			330	31	25	124	19	50	300	2	55	99	33	20	
50	0	0		329	34	32	125	12	43	299	20	32	99	34	13	
56	17	21		.	.	.	.	.	.	.	.	.	100	39	17	(4)
60	0	0		321	29	10	132	58	35	291	48	38	101	41	5	
60	53	52		320	42	2	.	.	.	291	2	2	.	.	.	Plus petite largeur.
70	0	0		311	27	55	142	9	35	281	23	25	108	41	35	
75	7	22		.	.	.	149	16	3	.	.	.	115	35	3	Plus grande largeur.
80	0	0		291	46	31	161	11	44	260	26	31	127	42	14	
84	41	10		253	25	25	199	5	5	221	38	25	166	5	50	
85	0	23		244	40	40	208	14	5	212	11	40	175	21	35	
85	3	28		.	.	.	210	12	22	210	12	22	.	.	.	Intersection *K*.
85	7	10		239	50	5	213	14	40	207	7	35	180	25	10	
85	9	10		237	42	10	215	12	5	205	8	40	182	24	5	
85	11	43		.	.	.	218	21	7	202	0	7	.	.	.	(5)
85	14	27		226	23	59	226	23	59	193	49	30	193	49	30	Sommets *G* & *I*.

(1) Point de passage de la portion du commencement à celle de la fin; la durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point de la terre; il est le plus austral de tous ceux qui ont vu le commencement au lever du Soleil. C'est aussi l'extrémité de la courbe du milieu au lever du Soleil.

(2) Lieu qui a vu le premier contact extérieur visible sur la terre.

(3) Point du passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'éclipse, à celle qui appartient à la fin. La durée de l'éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la terre : il est le moins boréal de tous ceux qui ont vu la fin au coucher du Soleil.

(4) Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visible sur la terre.

(5) Ces deux points sont les intersections avec le milieu au coucher & le milieu au lever du Soleil.

TROUVER LA DIFFÉRENCE DES MÉRIDIENS ou la différence de longitude, au moyen d'une éclipse de soleil, ou d'une éclipse d'étoile par la lune.

1970. LA MÉTHODE la plus exacte que nous ayons pour connoître les longitudes géographiques (47), ou les différences des méridiens (51, 54), est certainement celle des éclipses de soleil ou d'étoiles; le seul inconvénient de cette méthode est la longueur des calculs qu'elle exige, mais cela n'empêche pas que nous n'en fassions un usage continuel; & je vais l'expliquer avec soin pour mettre tout le monde à portée de l'employer, & procurer, s'il est possible, à la géographie & à l'astronomie plus de secours qu'elle n'en a trouvé jusqu'à présent, dans cette partie des observations.

1971. Lorsqu'on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, l'immersion & l'émersion d'une étoile cachée par la lune, ou celle d'une planète, il faut en déduire le temps de la conjonction vraie; & quand on a le temps de la même conjonction pour chacun des deux pays, la différence des temps est évidemment celle des méridiens, (*Képler, astron. pars opt.* 393. *Expos. du calc. astron. pag.* 150. *Mém. présentés, tom. I, pag.* 539). Cette méthode est la plus directe, la plus élégante & la plus sûre dont on puisse faire usage, & je ne pense pas même qu'on en doive employer d'autre. Je choisis, pour exemple, le calcul d'une éclipse d'étoile, comme renfermant quelques considérations de plus que celui d'une éclipse de soleil; mais j'y ajouterai toujours les modifications qu'exigent les éclipses de soleil.

1972. Soit *S* (*fig.* 121), le soleil ou l'étoile, qui sont éclipsés, *L* la situation apparente du centre de la lune, par rapport au soleil au commencement de l'éclipse; *F* le lieu apparent du centre de la lune au moment *Fig.* 121.

Fig. 121. de l'émersion; *LF* le mouvement apparent de la lune, par rapport au soleil dans l'intervalle de la durée de l'éclipse; *GHI* un arc de l'écliptique, *DSE* un parallèle à l'écliptique passant par le centre du soleil ou de l'étoile; si *FA* est parallèle à *DE*, l'on aura le mouvement apparent en latitude *AL*, & le mouvement relatif apparent en longitude *FA* sur un arc de grand cercle; cet arc se confond sensiblement avec le parallèle à l'écliptique, mais il est plus petit de quelques secondes que l'arc *GI* de l'écliptique; & c'est la première chose qu'il s'agit de trouver.

1973. On connoît par les tables l'heure de la conjonction vraie, calculée, de même que les longitudes & les latitudes vraies de la lune, & de l'astre éclipsé au commencement & à la fin de l'éclipse; on calcule pour les mêmes instans la différence des parallaxes en longitude & en latitude, par les méthodes qui ont été détaillées (1665 & suiv. 1922); on ajoute chaque parallaxe à la longitude vraie, ou bien on la retranche suivant les cas que nous avons expliqués (1676), & l'on a les longitudes apparentes ou affectées de la parallaxe, dont la différence est le mouvement apparent de la lune sur l'écliptique; on en retranche le mouvement du soleil, ou de l'astre éclipsé; s'il est rétrograde on les ajoute, & l'on a la valeur de *GI* mouvement relatif apparent sur l'écliptique.

On applique de même la différence des parallaxes en latitude pour chacun des deux instans, à la latitude vraie de la lune calculée par les tables (ou à sa distance au pole boréal de l'écliptique), & l'on a les latitudes apparentes *IL*, *GF*, au commencement & à la fin de l'éclipse; la différence de ces latitudes apparentes ou leur somme, si l'une étoit australe & l'autre boréale, est le mouvement apparent de la lune en latitude; on en ôte le mouvement en latitude de l'astre éclipsé, si sa latitude change dans le même sens que celle de la lune, & l'on a la valeur de *AL*; on multiplie la différence des longitudes apparentes, c'est-à-

dire, *GI*, par le cosinus de la latitude apparente qui tient le milieu entre les latitudes *IL* & *GF* (892), & l'on a la valeur du mouvement *FA* mesuré dans la région de l'éclipse; il est plus petit que le mouvement sur l'écliptique; j'ai donné une table de la différence, dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, pour 1764, *pag.* 118. Fig. 121.

1974. Dans le triangle *FAL* rectangle en *A*, l'on connoît les deux côtés *FA* & *AL*, on trouvera l'hypothénuse *FL*, en disant : le mouvement en longitude dans la région de l'étoile est au mouvement en latitude, comme le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'*orbite apparente* (1879), ou de l'angle *LFA*. Le cosinus de l'inclinaison apparente est au mouvement apparent en longitude, dans la région de l'étoile, comme le rayon est au mouvement apparent *FL* en ligne droite, sur l'orbite apparente de la lune relativement à l'astre *S*, qui est toujours supposé immobile pendant la durée de l'éclipse. Inclinaison apparente.

Dans le triangle *LSF*, on connoît 3 côtés, le mouvement apparent *FL* en ligne droite, la somme des demi-diamètres de la lune & de l'astre éclipsé, celui de la lune étant augmenté à raison de sa hauteur sur l'horizon (1510), cette somme étant diminué de $4'' \frac{1}{2}$, à cause de l'inflexion des rayons (1992); la somme des demi-diamètres pour le commencement est *SL*, pour la fin c'est *SF*; on cherchera les angles, *SLF* & *SFL*; commençant par l'analogie suivante : le mouvement *FL* est à la somme des deux distances observées, ou des deux sommes des demi-diamètres, *SL* & *SF*, comme leur différence, est à la différence des segmens *BL* & *BF*; la moitié de cette différence trouvée, étant ajoutée avec la moitié du mouvement *FL* donnera le plus grand des deux segmens; cette demi-différence retranchée de la moitié du mouvement *FL* donnera le plus petit des deux segmens.

1975. L'on prendra le segment qui est du côté de la plus grande latitude apparente, soit qu'elles soient

Fig. 121. de même dénomination, ou de dénominations différentes, c'eſt-à-dire, que ſi dans la première obſervation la latitude apparente calculée *IL* eſt plus petite que dans la ſeconde, on ſe ſervira du rayon de la lune, & du ſegment, qui répondent à la ſeconde obſervation; mais ſi la latitude eſtplus grande au commencement de l'éclipſe, on choiſira le ſegment qui répond à ce commencement. Avec ce ſegment, on fera la proportion ſuivante : la ſomme des demi-diamètres apparens qui répond à ce ſegment eſt au rayon des tables, comme le ſegment correſpondant eſt au coſinus de l'angle adjacent *BLS* ou *BFS*; cet angle ajouté avec celui de l'inclinaiſon apparente *LFA* donnera le complément de l'angle de conjonction apparente, c'eſt-à-dire, l'angle *DSF*, qui répond à la plus grande latitude.

Diſtance à la conjonction apparente.

Le rayon eſt à la ſomme des demi-diamètres apparens *SF*, qui répond à la plus grande latitude, diminuée de $4'' \frac{1}{2}$ à cauſe de l'inflexion, comme le coſinus de l'angle *DSF* eſt à *SD*; cette quantité diviſée par le coſinus de la latitude *HS* de l'aſtre *S*, ſi ce n'eſt pas le ſoleil, donnera la diſtance *HG* à la conjonction apparente, pour celle des deux obſervations qui répond à la plus grande des deux latitudes apparentes de la lune. Cette diſtance à la conjonction apparente, avec le mouvement apparent, pourroit ſervir à trouver la conjonction apparente, ſi l'on en avoit beſoin. On ôtera cette diſtance de la longitude vraie du ſoleil ou de l'étoile, ſi c'eſt le commencement de l'éclipſe auquel répond la plus grande latitude, on l'ajoutera avec la longitude du ſoleil, ſi c'eſt la fin de l'éclipſe, & l'on aura la longitude apparente de la lune obſervée. Cette longitude apparente obſervée étant comparée à celle qu'on avoit calculée, donnera l'erreur des tables en longitude. Il pourroit arriver que l'immerſion fût après la conjonction apparente en longitude, le cas eſt rare; mais ſi l'on avoit lieu de le craindre, on pourroit s'en aſſurer en calculant par les tables ſeules l'immerſion, & la conjonction apparente.

1976. Le mouvement vrai de la lune seule en longitude sur l'écliptique, est à une heure ou 3600″, comme l'erreur des tables en longitude, est à un nombre de secondes de temps qu'on ôtera de l'heure de la conjonction calculée par les tables, si l'on a trouvé par observation une longitude plus grande que par les tables, & l'on aura l'heure de la conjonction observée; c'est ce qu'il falloit trouver. Fig. 121.

En se contentant de chercher ainsi l'erreur des tables sur le temps de la conjonction, au lieu de chercher directement la longitude vraie, & la conjonction vraie; on évite l'attention qu'il faudroit avoir d'employer la parallaxe de la lune seule à la fin du calcul dans les éclipses de soleil, au lieu de la différence des parallaxes du soleil & de la lune qu'on emploie dans le commencement. Je donnerai, un exemple de l'autre manière de procéder (1980), qui est plus simple quand il s'agit d'une étoile. Il est toujours utile, de trouver également la conjonction & l'erreur des tables, par le moyen de l'autre triangle *S B L*, qui est du côté de la plus petite latitude, en prenant l'autre segment, & l'autre somme des demi-diamètres, & en prenant la différence des deux angles, dont on a pris la somme dans le premier calcul. Le résultat doit être exactement le même, puisque les deux observations du commencement & de la fin n'en font qu'une seule pour la détermination de la longitude & de la latitude.

Le triangle *S F D* qui a servi à trouver la différence de longitude apparente *SD*, sert aussi à trouver la différence des latitudes apparentes, c'est-à-dire, *FD*, qu'on ajoutera avec la latitude de l'étoile *S*, si celle de la lune *F* qu'on a calculée par les tables, a été trouvée plus grande que celle de l'étoile, ensorte que le point *F* soit plus éloigné de l'écliptique que le point *D*, & l'on aura la latitude apparente de la lune, qui comparée avec celle qu'on a tirée des tables fera connoître l'erreur des tables en latitude. Différence des latitudes apparentes.

Il peut arriver un cas, où l'on seroit embarrassé de

Fig. 121. ſavoir, ſi le point *F* eſt plus ou moins éloigné de l'écliptique *GI* que le point *D*; c'eſt le cas ou la différence *FD* des latitudes apparentes, ne ſeroit que d'environ 30″ dans chacune des deux obſervations; l'erreur des tables laiſſant à peu-près une incertitude de 30″, on ne ſauroit pas ſi le centre de la lune a paſſé au nord ou au midi de l'aſtre *S*; dans ce cas le commencement & la fin d'une éclipſe ne ſuffiroient pas pour déterminer la latitude; il faudroit y ſuppléer ou par la grandeur de l'éclipſe, s'il s'agit du ſoleil, ou par la différence de déclinaiſon obſervée, entre la lune & l'étoile avant l'immerſion ou après l'émerſion; dans ce cas-là, il faudroit calculer la longitude & la latitude apparente de la lune pour le moment de l'obſervation (1973), en conclure l'aſcenſion droite & la déclinaiſon apparente (906); les comparant à celles qu'on auroit obſervées, on jugeroit ſi la lune eſt plus au nord ou au midi par l'obſervation que par les tables. Les préceptes que nous venons de donner pour trouver la conjonction vraie, ſuffiſent à ceux qui ont déja l'habitude de ces ſortes de calculs; les autres auront beſoin de ſe fortifier par l'exemple ſuivant.

1977. Exemple. Le 6 Avril 1749, l'étoile *Antarès* fut éclipſée par la lune à Berlin, à 14^h 6′ 19″ de temps vrai, & elle reparut de l'autre côté de la lune à 15^h 12′ 54″. Le même jour, j'obſervai l'émerſion à Paris, à 13^h 1′ 20″; je me propoſe de chercher la différence des méridiens, entre Paris & Berlin, par la comparaiſon de ces obſervations. Pour faire ce calcul, par la méthode exacte que je viens de détailler, il faut connoître déja à peu-près la différence des méridiens que l'on cherche, ou bien le premier calcul ne ſera qu'une approximation, & on le recommencera pour trouver le même réſultat une ſeconde fois avec plus de préciſion; par exemple, ſi je n'avois aucune idée de la longitude de Berlin, je prendrois la différence entre les heures de l'immerſion à Paris & à Berlin, c'eſt-à-dire, entre 13^h 1′ 20″, & 14^h 6′ 19″, & je ſuppoſerois qu'il y

a 1^h

a $1^h\ 4'\ 59''$ de différence entre les deux méridiens; mais ſachant dès à préſent que cette différence n'eſt pas fort éloignée de $44'\ 25''$, je me ſuis ſervi de cette connoiſſance.

1978. J'ai donc réduit au méridien de Paris, les deux obſervations de Berlin, je les ai auſſi réduit en temps moyens, & j'ai calculé pour ces deux inſtans les quantités ſuivantes par des tables ſemblables à peu-près à celles qui ſont à la fin du premier volume de cet ouvrage.

Longitudes vraies de la lune,	$8^s\ 5^\circ\ 43'\ 16''$	$8^s\ 6^\circ\ 26'\ 9''$
Latitudes vraies de la lune, auſtrales, ...	$3^\circ\ 47'\ 18''$	$3^\circ\ 45'\ 10''$

Pour la hauteur du pole de Berlin, $52^\circ\ 31'\ 30''$, la parallaxe horizontale étoit de $57'\ 15''$, 7 en la ſuppoſant de $57'\ 18''$ à Paris; l'angle de la verticale avec le rayon de la terre, que je ſuppoſois alors de $18'\ 42''$ (1708), donne une augmentation de $24''$, 1 (1695); ainſi la parallaxe qu'il faut d'abord employer eſt de $57'\ 39''$, 8. Voici les autres élémens du calcul des parallaxes.

	Immerſion.	Emerſion.
a	$13^h\ 21'\ 54''$	$14^h\ 28'\ 29''$
b	$0^s\ 17\ 20\ 17\frac{1}{2}$	$0^s\ 17\ 23\ 1$
c	$227\ 33\ 32$	$244\ 14\ 49$
d	$24\ 56\ 6$	$18\ 52\ 37$
e	$6\ 13\ 7\ 26$	$7\ 5\ 12\ 24$
f	$19\ 27,8$	$9\ 43,3$
g	$4,9$	$4,9$
h	$19\ 22,9$	$9\ 38,4$
i	$53\ 18,6$	$55\ 40,9$
k	$21,0$	$21,0$
l	$52\ 57,6$	$55\ 19,9$

a Temps vrai à Paris.
b Le lieu du ſoleil par les tables.
c Aſcenſion droite du milieu du ciel (1011).
d Hauteur du nonagéſ. (1661).
e Longit. du nonagéſ. (1662).
f Parall. de longit. par les formules (1674).
g Applatiſſement en longitude (1700).
h Parallaxe en longitude dans le ſphéroïde.
i Parallaxe de latitude par les formules (1666).
k Applatiſſement en latitude (1698).
l Parallaxe de latitude dans le ſphéroïde.

La formule qui m'a donné l'applatiſſement en latitude

pour Berlin, est celle-ci $\frac{57' 16'' \text{ sin. } 18' 44''}{\text{sin. } 52° 31'} \left(\frac{\text{cos. } 23° 28'}{\text{cos. } 3° 46'} - \text{sin. } 26° \text{ tang. } 3° 46' \right) = 21''$.

1979. Le mouvement apparent en latitude dans l'espace de 1^h $6'$ $35''$, qu'a duré l'occultation à Berlin, c'est-à-dire, la valeur de AL est de $11''4$, dont la latitude apparente croissoit; le mouvement apparent en longitude sur l'écliptique étoit de $27' 8'', 5 = GI$, & de $27' 3'', 2$ dans la région de l'étoile, sur un grand cercle FA; on trouvera donc l'angle AFL de $30' 17''$ & le côté FL, ou le mouvement de la lune sur son orbite apparente $27' 3'', 2$.

1980. Le diamètre horizontal de la lune étant de $31' 18''$, le demi-diamètre apparent sera $15' 41'', 9 = SL$ pour le premier instant, & de $15' 42'', 2 = SF$ pour la fin; que l'on diminueroit chacun de $4'' \frac{1}{2}$, si l'on vouloit avoir égard à l'inflexion. Ayant abaissé du centre S de l'étoile une perpendiculaire SB sur l'orbite apparente FL, les segmens seront de $13' 31'', 4 = BL$, & de $13' 31'', 8 = BF$, & l'angle $SLB = 30° 31' 13''$. L'angle L étant du côté de la plus petite latitude IL, on en ôtera l'angle AFL ou CLF de $30' 17''$, & l'on aura l'angle $SLC = LSE = 30° 0' 56''$. Dans le triangle ESL, on connoît $SL = 15' 41'', 9$, & l'angle ESL de $30° 0' 56''$, on trouvera SE qui divisé par le cosinus de la latitude apparente LI $4° 40' 16''$ donne $13' 38'', 3$ pour la distance apparente HI de la lune à sa conjonction sur l'écliptique : c'est ce que Képler & Boulliaud appellent *scrupula incidentiæ*. Cette distance apparente IH de $13' 38'' 3$, est à l'occident de l'étoile, & précède la conjonction apparente, puisqu'il s'agit de l'immersion, & que la lune étoit moins avancée que l'étoile; mais la parallaxe de longitude faisoit paroître la lune plus avancée vers l'orient de $19' 22'', 9$ (a),

(a) S'il s'agissoit d'une éclipse de soleil, il faudroit employer ici, pour plus d'exactitude, la parallaxe seule de la lune en longitude, & non pas la différence des parallaxes du soleil & de la lune, dont on se sert dans les premiers calculs (1877).

parce que la longitude de la lune est plus grande que celle du nonagésime (1876) : ainsi le lieu vrai de la lune étoit encore plus éloigné de l'étoile que le lieu apparent ; il faut donc ajouter la parallaxe avec la distance à la conjonction apparente, & l'on aura 33′ 1″, 2 pour la distance de la lune à la conjonction vraie, en minutes de degrés comptées sur l'écliptique ; ce qui fait (a) 0^h 59′ 36″, à raison de 36′ 53″ pour 1^h 6′ 35″ de temps qui est la différence des deux longitudes calculées ; ces 59′ 36″ sont la différence entre l'observation & la conjonction vraie ; or l'immersion avoit été observée à 14^h 6′ 19″, donc le temps vrai de la conjonction étoit à 15^h 5′ 55″, au méridien de Berlin. On pourroit dans les éclipses de soleil chercher cette conjonction observée par le moyen de la conjonction calculée, & de l'erreur des tables, comme je l'ai indiqué (1976). Temps de la conjonction vraie.

1981. Il y a des cas où la ligne *FL* du mouvement apparent est située différemment par rapport à *DE* qui est parallèle à l'écliptique ; mais on pourra prendre dans tous les cas, la somme de l'angle *SFB* du triangle, & de l'angle d'inclinaison *AFL*, l'on aura toujours l'angle *DSF* du côté où la différence de latitude apparente *EL* est la plus grande (c'est-à-dire, qu'on aura le complément de l'angle de conjonction apparente). Son sinus & son cosinus multipliés par la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, ou par le demi-diamètre apparent seul de la lune, diminué de 4″ ½, donneront les différences apparentes de latitude & de longitude, *FD* & *SD*, pour l'observation où la différence de latitude étoit la plus grande.

1982. Pour vérifier le calcul précédent, il est bon de chercher aussi la conjonction par l'émersion de l'étoile. L'on connoît *SF* = 15′ 42″, 2 & le segment Le même calcul par l'émersion.

(a) Pour réduire en temps, ces différences de longitude, on ne fait qu'ajouter à leur logarithme un logarithme constant, qui est la différence entre le logarithme de 3600″ ou 1^h, & celui du mouvement horaire vrai de la lune seule sur l'écliptique, c'est ici 0,2569281.

Fig. 111. $FB = 13' 31'', 8$ on trouve l'angle $SFB = 30° 30' 12''$, l'on ajoute ensemble les deux angles SFB, BFA, l'on a $SFA = DSF = 31° 0' 29''$. Dans le triangle DSF, rectangle en D, dont on connoît l'hypothénuse $FS = 15' 42'', 2$ & l'angle $DSF = 31° 0' 29''$; on trouve SD, qui étant divisé par le cosinus de la latitude apparente $4° 40' 31''$, donne $GH = 13' 30'', 2$, distance à la conjonction apparente, mesurée sur l'écliptique. Dans cette seconde observation, la lune paroissoit plus orientale que l'étoile, de $13' 30'', 2$; mais à cause de la parallaxe de longitude, qui la faisoit paroître plus avancée, le lieu apparent étoit plus oriental que le lieu vrai, de $9' 38'' 4$; donc il reste $3' 51'' 8$, dont la lune avoit réellement passé sa conjonction vraie avec l'étoile, ce qui fait en temps $6' 59''$; cet intervalle étant ôté de l'heure de cette seconde observation $3^h 12' 54''$, on trouve le temps vrai de la conjonction vraie à $3^h 5' 55''$, aussi bien que par la première observation. On sent bien qu'il ne doit y avoir aucune différence si l'on a bien opéré, puisque le temps de la conjonction étant déterminé par le mouvement FL, qui dépend des deux observations conjointement, on ne sauroit trouver qu'un seul résultat par ces deux observations; mais une différence de quelques décimales qu'il est très-difficile d'éviter, n'est ici d'aucune conséquence.

Latitude observée. 1983. Pour connoître la vraie latitude de la lune par cette observation, on cherchera aussi les côtés DF & EL, par le moyen des triangles DSF & LSE qu'on a résolus ci-dessus; on trouvera $DF = 8' 5'', 5$, & $EL = 7' 51''$; on ajoutera ces quantités à la latitude de l'étoile $4° 32' 12'' = IE = GD$, parce que la lune paroissoit plus méridionale que l'étoile, & l'on aura les latitudes apparentes de la lune IL, GF, $4° 40' 3'', 0$, & $4° 40' 17'' 5$; on en ôtera les parallaxes de latitude $52' 57'' 4$, & $55' 19'' 8$, parce que la latitude australe de la lune étoit augmentée par la parallaxe, & l'on aura $3° 47' 5'' 6$, & $3° 44' 57'' 7$ pour les latitudes vraies de la lune IM, GN conclues de l'obser-

vation; ces latitudes se trouvent être plus petites de 12″ 5 chacune que celles qu'on avoit tirées des premières tables de M. Mayer. On remarquera en passant, que l'orbite vraie *MN* de la lune se rapproche ici de l'écliptique, quoique l'orbite apparente *LF* s'en éloigne. *Fig.* 121.

1984. Le même jour j'observai à Paris l'immersion d'Antarès à 1ʰ 1′ 20″ du matin (*Mém. acad.* 1755, *p.* 370) du matin; il s'agit de trouver aussi la conjonction vraie de la lune à l'étoile par l'observation de Paris. On feroit la même opération que pour Berlin (1978), si l'on avoit observé à Paris l'émersion aussi bien que l'immersion; mais les nuages m'ayant empêché de faire la seconde observation, je vais y suppléer par une autre méthode, qui servira d'exemple en pareil cas. Observation correspondante à Paris.

1985. La latitude vraie de la lune calculée par les tables pour le moment de l'observation est 3° 47′ 58″; il en faut ôter 12″, 5, puisque nous avons trouvé par l'observation de Berlin, que les tables donnoient ce jour-là une latitude trop grande de 12″ 5 (1983), & nous aurons pour la latitude vraie de la lune, au moment de l'immersion observée à Paris, 3° 47′ 45″ $\frac{1}{2}$; il y faut ajouter la parallaxe de latitude 48′ 15″, 7, pour avoir la latitude apparente de la lune 4° 36′ 1″, 2 & en ôter la latitude de l'étoile 4° 32′ 12″, ce qui donne, pour la différence apparente en latitude *EL* au moment de l'observation, 3′ 49″, 2. Dans le triangle *SLE*, on connoît *LE* = 3′ 49″, 2, & *SL* = 15′ 41″, 7 demi-diamètre apparent de la lune, augmenté à raison de sa hauteur qui étoit de 10 degrés; l'on cherchera le côté *SE*, par la méthode que j'ai expliquée (1781); ce côté divisé par le cosinus de la latitude apparente de la lune, donnera la différence apparente de longitude *HI*, sur l'écliptique pour Paris, 15′ 16″, 4; il y faut ajouter la parallaxe de longitude 29′ 19″, 6, pour avoir la distance à la conjonction vraie, 44′ 36″. On réduira cette différence en temps, par le moyen du mouvement horaire de la lune, (en ajoutant à son logarithme le logarithme constant 0, 256536), & l'on aura

celui de $1^h\ 20'\ 31''$, intervalle de temps entre l'observation de Paris, $13^h\ 1'\ 20''$, & le temps vrai de la conjonction vraie, qui se trouvera par conséquent être à $14^h\ 21'\ 51''$ pour Paris.

Conjonction pour Paris.

1986. On aura donc les deux temps de la conjonction, de la manière suivante :

Comparaison des 2 temps.

Temps vrai de la conjonction vraie à Berlin,	15^h	$5'$	$55''$
Temps vrai de la conjonction vraie à Paris,	14	21	51
Donc la différence des Méridiens,	0	44	4
Et par rapport à l'observatoire R. de Paris,	0	44	6

Cette quantité est plus petite de $19''$ que suivant M. Grischow, (*Mémoires présentés à l'acad. tom. I.*).

Longitude de la lune.

La longitude de l'étoile Antarès étoit alors $8^s\ 6^\circ\ 16'\ 20''$, c'est aussi la longitude vraie de la lune pour le 5 Avril $14^h\ 21'\ 51''$, temps vrai à l'Observatoire Royal de Paris, ou $14^h\ 24'\ 2''$, temps moyen, & la latitude vraie de la lune étoit de $3^\circ\ 45'\ 11''$, suivant l'observation. La longitude calculée par les anciennes tables de Mayer n'étoit que de $9''$ trop grande, & la latitude l'étoit de 12 à 13 secondes.

1987. Quand on a observé le commencement & la fin d'une éclipse de soleil, on a pareillement deux distances égales SL & SF; mais elles sont égales à la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune, diminuée aussi de $4''\frac{1}{2}$ à cause de l'inflexion (1992). Quand on a observé deux phases avec un micromètre (1991); on a également deux distances entre les centres de la lune & du soleil, on les prend deux à deux, l'une avant & l'autre après le milieu, & calculant le mouvement apparent de la lune dans l'intervalle des deux observations, on a toujours un triangle SLF, dont les trois côtés sont connus, & par lequel on trouve la distance à la conjonction, & le temps de la conjonction vraie.

Usage de la fin d'une éclipse.

1988. Si l'on n'a que la fin d'une éclipse observée exactement en deux endroits, comme cela arrive souvent, on est obligé de supposer la latitude de la lune

exactement connue, dans chaque observation, & cela n'influe pas beaucoup sur le résultat, sur-tout si la distance des deux observateurs n'est que de peu de degrés. Dans ce cas, on peut se contenter de calculer par les tables la distance apparente des centres (1877, 1918); ces calculs peuvent aisément se faire avec ma méthode des angles parallactiques (1881); car dès qu'on connoît la latitude de la lune & sa longitude, on calcule la distance apparente des centres pour l'heure de l'observation faite sous le méridien inconnu; si on la trouve plus grande ou plus petite que par l'observation, on change la supposition faite pour la différence des méridiens, & par conséquent la longitude & la latitude, ce qui donne une autre distance apparentes des centres. Alors par une règle de trois, on trouve quelle est la différence des méridiens qu'il faut supposer pour trouver par le calcul la même distance des centres que par observation. On peut aussi calculer par ma méthode la conjonction vraie, en cherchant l'orbite apparente comme je l'ai indiqué (1919).

1989. La manière de déterminer les longitudes des différens pays de la terre, par la conjonction vraie calculée pour les deux pays, est la plus exacte que nous ayons; le seul inconvénient qu'on y trouve, est la longueur du calcul qu'elle suppose; c'est un très-grand obstacle, à cause du peu de personnes qui s'occupent de ces recherches. On verra dans le XIVe. livre (2481) différentes considérations sur la manière d'observer les éclipses de lune & celles des satellites de Jupiter, pour en déduire la différence des méridiens entre deux villes; mais celle que je viens d'expliquer par les éclipses de soleil & d'étoiles, sera peut-être toujours la plus exacte. Utilité de cette méthode.

1990. Lorsque la lune a passé l'opposition, sa partie orientale est éclairée, sa partie occidentale est obscure; ainsi les immersions se font dans la partie éclairée, & les émersions se font dans la partie obscure, c'est-à-dire, à gauche dans une lunette astronomique. Je crois que ce sont-là les seules émersions dont on puisse être

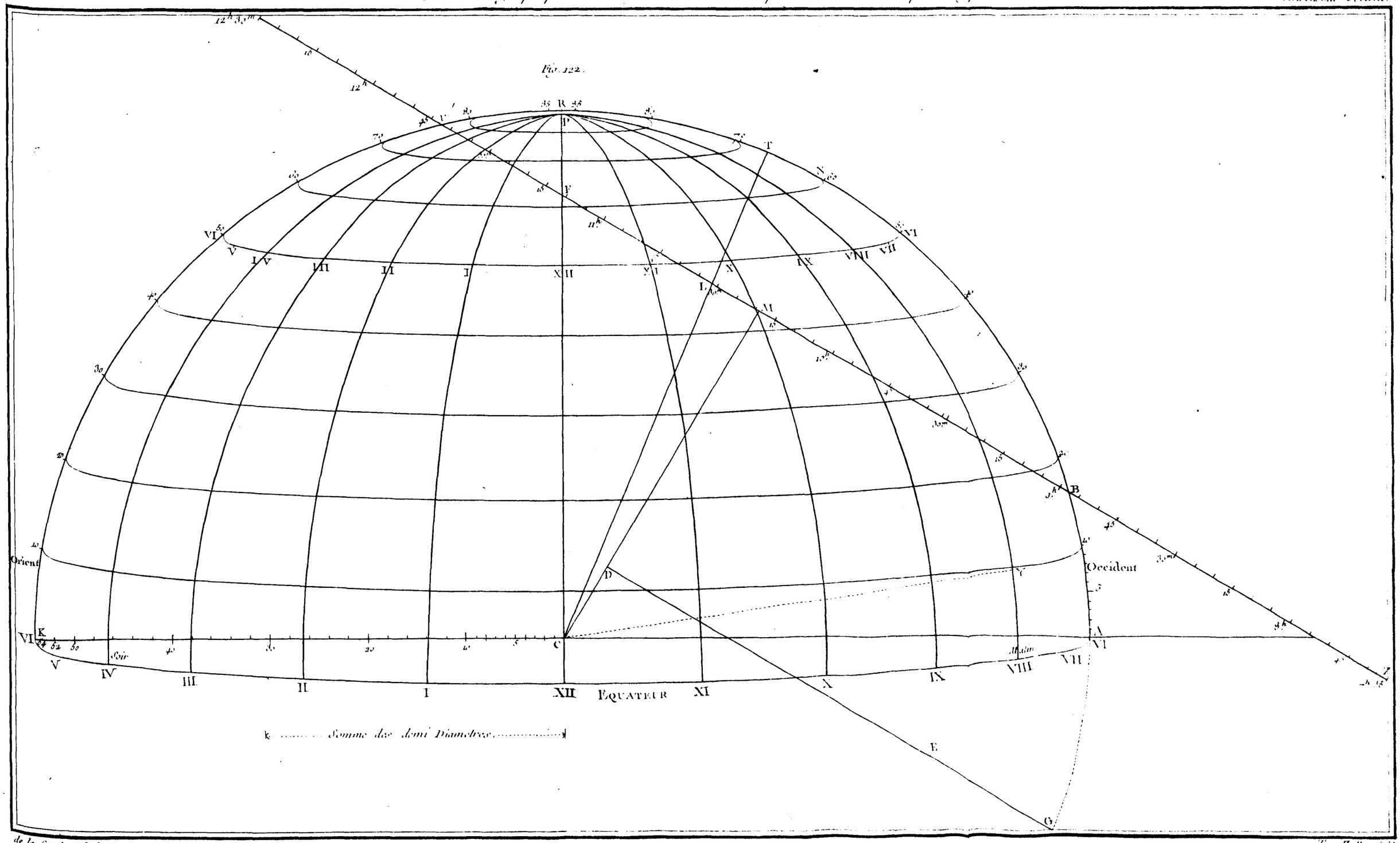
bien assuré; car quand l'étoile sort de la partie éclairée de la lune, sa lumière, trop foible par rapport à celle de la lune, ne se distingue pas facilement au premier instant de l'émersion.

Lorsqu'on a vu une planète, ou une étoile entrer sous la lune, & que l'on sait à quelle distance elle doit passer par rapport au centre de la lune, on conçoit une ligne au travers des taches de la lune, & l'on essaie de remarquer vis-à-vis de quelles taches doit se faire l'émersion; car si l'on n'est pas prévenu de la situation du point d'émersion, c'est en vain que l'on espere appercevoir l'étoile au moment de son émersion; & ces observations, au lieu d'être les plus exactes que l'on ait, deviennent les plus défectueuses: je pourrois citer plusieurs exemples, ou des astronomes habiles s'y sont trompés considérablement.

1991. Il arrive souvent dans les éclipses d'étoiles ou de planètes par la lune que l'astre éclipsé paroît tout entier pendant quelques secondes sur le disque éclairé de la lune; on a attribué ce phénomène à l'atmosphère de la lune, & M. Euler entreprend de prouver son existence par les éclipses de soleil (*Mém. de Berlin*, 1748, *pag.* 103). M. de l'Isle l'attribuoit à la diffraction ou à l'inflexion des rayons qui rasent les bords de la lune (*Mémoires pour servir à l'Histoire de l'Astronomie*, 1738, *pag.* 249); ce phénomène observé par le Pere Grimaldi, & par Newton (*Opt. parte* 3), servoit surtout à M. de l'Isle, pour expliquer les anneaux que l'on voit autour du soleil dans les éclipses totales; pour moi, je pense que c'est une simple illusion optique, occasionnée par l'irradiation ou le débordement de lumiere de la lune (a); l'atmosphère de la lune ne sauroit produire un effet si sensible; car dans les éclipses de

(a) On peut voir dans l'essai du Docteur Jurin sur la vision distincte & indistincte, que l'apparence d'une étoile sur le disque de la lune, ne vient que du cercle de dissipation, dans lequel l'étoile se trouve lorsqu'elle est fort proche de la lune, (*Optique de Smith*, *Tom. I. p.* 236, de la traduction du P. Pezenas, Avignon 1767, 2 vol. *in*-4°).

soleil



de la Gardette Sculp.

soleil on voit le bord de la lune très-net & très-bien terminé, à l'exception de quelques inégalités dans certaines parties de sa circonférence; les taches de la lune sont toujours de la même couleur; Vénus quand elle est éclipsée par la lune, ne change pas de forme & de couleur; enfin on a vu dans une occultation de Jupiter par la lune, que le bord de la lune paroissoit sur le bord même de Jupiter. (*Mém. acad.* 1715). Ainsi l'atmosphère de la lune est trop peu considérable pour faire paroître les étoiles sur le disque éclairé de la lune, quoiqu'elle suffise pour produire le phénomène dont nous allons parler.

1992. L'INFLEXION des rayons qui rasent les bords de la lune paroît cependant démontrée par les observations de l'éclipse de 1764; que M. du Séjour a discutées dans plusieurs mémoires avec beaucoup d'habileté; il la trouve d'environ $4''\frac{1}{2}$, & il l'attribue à une petite réfraction de l'atmosphère de la lune. Ayant comparé d'abord les distances des cornes de l'éclipse de soleil à divers instans, que M. Short avoit observées à Londres, il vit qu'on ne pouvoit les concilier. La réfraction dans l'atmosphère de la lune, & les causes physiques d'inflexion dont M. de la Hire, M. Euler, &c. avoient parlé, lui firent naître l'idée de calculer les mêmes phases avec une formule, dans laquelle entroit la supposition d'une inflexion, dont la valeur pouvoit se déterminer ensuite en comparant la formule avec les observations; & il trouva qu'il falloit, pour concilier toutes ces observations, faire l'inflexion d'environ $4''\frac{1}{2}$. Inflexion de $4''\frac{1}{2}$.

1993. La durée de l'éclipse entre le commencement & la fin est diminuée par l'inflexion, qui fait toujours paroître trop grande la distance des bords de la lune & du soleil; au contraire la durée de l'éclipse annulaire est augmentée par l'inflexion, & la bande terrestre où l'éclipse paroît annulaire, est élargie par cette cause physique; M. du Séjour a comparé toutes les observations de l'anneau faites en 1764, & il a reconnu

que la durée en avoit été plus longue qu'elle n'auroit dû l'être. (*Mém. acad.* 1767, *pag.* 201). Il desire cependant que les astronomes profitent des observations semblables qui pourront se présenter pour constater davantage ce phénomène ; la circonstance la plus favorable seroit celle d'une éclipse qui seroit totale pour les pays où la lune seroit fort élevée sur l'horizon, & annulaire dans les pays où la lune seroit plus basse ; telle fut l'éclipse du 23 Septembre 1699. Ce point d'astronomie physique mériteroit qu'on entreprît quelques voyages pour observer les éclipses de soleil dans les pays où elles sont totales ou annulaires ; il exige du moins qu'on se rende très-attentif à mesurer les distances des cornes avec de bons héliomètres, le plus près qu'il est possible du commencement ou de la fin d'une éclipse.

1994. Cette inflexion de $4'' \frac{1}{2}$ est égale au double de la réfraction horizontale qui a lieu dans l'atmosphère de la lune, multipliée par la distance de la lune au soleil, & divisée par la distance du soleil à la terre (*Mém. acad.* 1767, *p.* 215). L'attraction du globe lunaire sur le rayon qui en rase les bords, y produiroit une courbure hyperbolique & une semblable inflexion, mais elle est absolument insensible, comme l'a fait voir M. du Séjour, (*Ibid. pag.* 213).

Différentes sortes d'Éclipses.

Eclipses des planètes par la lune.

1995. Les éclipses des planètes par la lune se calculent de la même manière que les éclipses de soleil, ou d'étoiles ; la seule différence consiste à prendre la somme des mouvemens de la planète & de la lune, en latitude, & de leurs mouvemens en longitude réduits à la région de l'étoile (892), ou bien leur différence, suivant que les mouvemens se font en sens contraire, ou du même sens, cela donne le mouvement relatif en longitude & en latitude, qui sert à trouver l'inclinaison de l'orbite relative (1765). On prend de même la somme ou la

différence des mouvemens apparens (1973), pour avoir l'inclinaison apparente, avec laquelle on calcule l'immersion, l'émersion & le milieu de l'éclipse (1919).

Les éclipses des planètes par la lune sont assez fréquentes; Mercure est la seule planète que l'on puisse rarement observer quand elle est cachée par la lune; je n'en connois qu'une seule observation qui fut faite au Brésil par Margraf, dans le dernier siècle; ces éclipses seroient utiles pour déterminer les longitudes des villes où on les observe.

1996. Les planètes sont quelquefois assez proches l'une de l'autre pour s'éclipser mutuellement; Mars parut éclipser Jupiter le 9 Janvier 1591, & il fut éclipsé par Vénus le 3 Octobre 1590, (Képler, *Astron. Pars Optica, pag.* 305); Mercure fut caché par Vénus le 17 Mai 1737, (*Philos. transact. n°.* 450). Eclipse d'une planète par une autre.

1997. On trouve aussi dans les ouvrages des astronomes plusieurs exemples des occultations d'étoiles par les planètes: Saturne couvrit l'étoile o de la sixième grandeur qui est à la corne australe du Taureau, le 7 Janvier 1679, suivant M. Kirch, (*Miscell. Berolin, p.* 205).

Jupiter couvrit l'étoile du Cancer appellée l'*Ane austral*, le 4 Sept. 241 avant J. C.; Gassendi observa le 19 Décembre 1633, Jupiter qui cachoit une étoile aux pieds des Gémeaux, & M. Pound observa en 1716 l'occultation de l'étoile *a* des Gémeaux par Jupiter, (*Phil. transf. n°.* 350. Abrégé, IV. 319).

Le 18 Janvier 272 avant J. C. Mars couvrit l'étoile boréale au front du Scorpion; & Gassendi a vu Mars couvrir aussi l'étoile qui est à l'extrémité de l'aîle de la Vierge. Mars en 1672 couvrit une des étoiles du Verseau, & nous avons eu occasion de parler des remarques dont ce phénomène fut l'occasion (1733).

Vénus dut cacher la belle étoile au cœur du Lion, le 16 Sept. 1574, suivant Mœsthlinus, & le 25 Sept. 1598, suivant Képler. (*Astr. Pars Opt. p.* 305. Riccioli, *Alm. l.* 721).

1998. Les comètes couvrent aussi quelquefois des étoiles fixes. Le 12 de Janvier 1764, je vis la comète, qui paroissoit alors, sortant de dessus une étoile de septième grandeur à la queue du cygne; l'étoile étoit encore enveloppée dans la chevelure de la comète. Ces sortes d'observations seroient très-curieuses pour la théorie des comètes, si l'on connoissoit parfaitement les positions des petites étoiles.

1999. Enfin, on peut regarder comme une autre sorte d'éclipses les passages de Mercure & de Vénus sur le disque du soleil dans leurs conjonctions inférieures; mais à cause de l'importance de ces passages, je suis obligé d'en parler plus au long, & ce sera la matière du livre suivant.

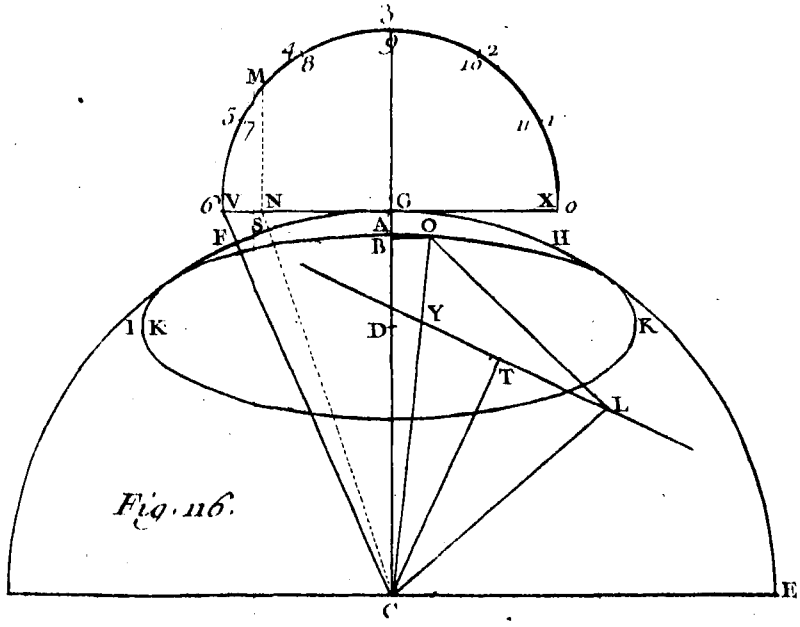


Fig. 116.

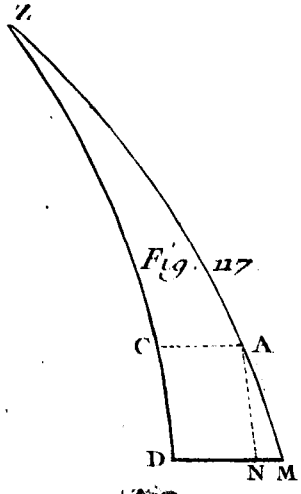


Fig. 117

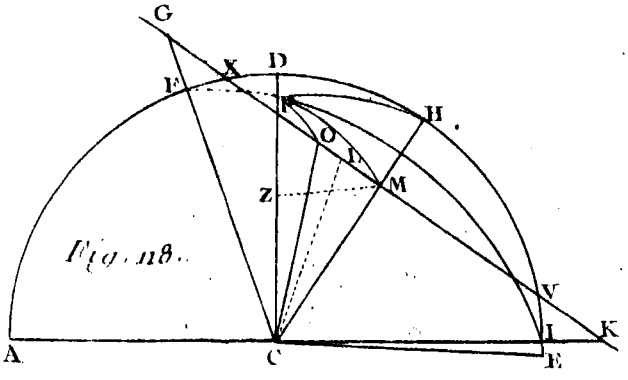


Fig. 118.

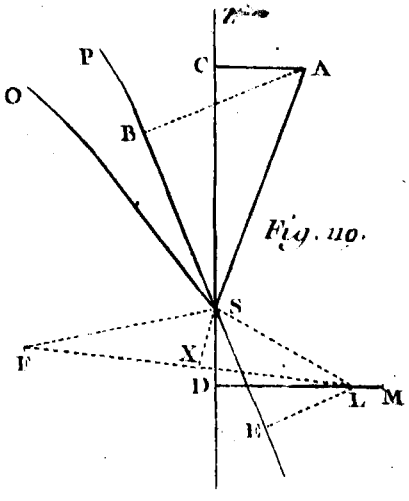


Fig. 119.

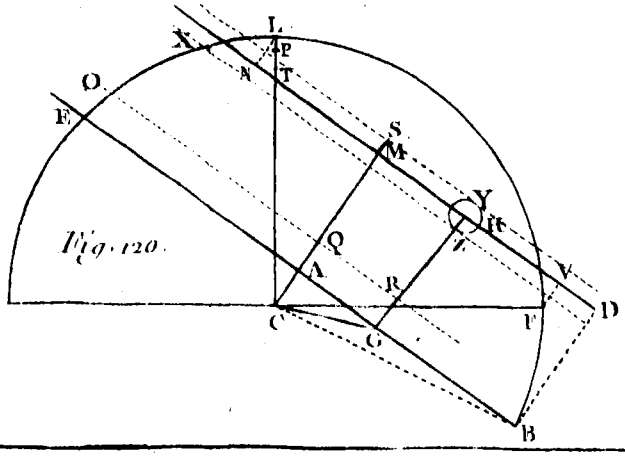


Fig. 120.

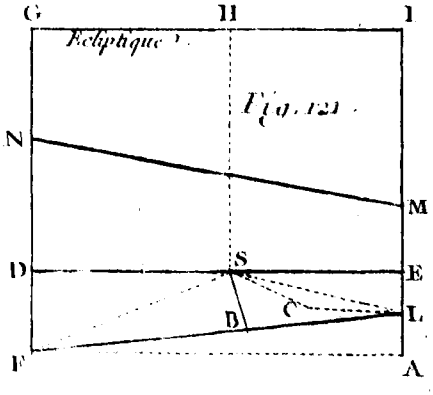


Fig. 121.

LIVRE ONZIEME.

DES PASSAGES DE VÉNUS ET DE MERCURE sur le Soleil.

VÉNUS & Mercure qui tournent autour du soleil à une moindre distance que la terre, (art. 1082), se trouvent entre nous & le soleil à chaque révolution synodique ; & si ces planètes n'ont alors que peu de latitude, on voit sur le soleil une tache noire & ronde, dont la largeur paroît occuper environ la trentième partie de celle du soleil, si c'est Vénus, & seulement la 150e partie si c'est Mercure.

2000. Averrhoës crut avoir apperçu Mercure sur le soleil, mais Albategnius & Copernic, (*L. II. c.* 10°), ne pensoient pas qu'il fût possible de l'y voir à la vue simple, & ils avoient raison. Képler crut aussi avoir apperçu Mercure sur le soleil à la vue simple ; mais il reconnut ensuite que ce ne pouvoit être qu'une tache du soleil ; il s'en trouve quelquefois d'assez grosses pour qu'on puisse les entrevoir sans lunettes ; Gallilée assuroit en avoir vu & les avoir montré à d'autres à la vue simple, & nous en citerons des exemples (3131). Mais à l'égard de Mercure qui n'a que 12″ de diamètre, il est impossible qu'on l'ait jamais apperçu sur le soleil ; c'est tout ce que l'on pouvoit faire, en 1761, que d'y appercevoir Vénus, qui avoit 58″ de diamètre (1391, 2157), je n'oserois même assurer qu'on l'ait apperçue à la vue simple ; Gassendi nous assure que plusieurs fois & entr'autres le 10 Septembre 1621, il n'a pu voir à la vue simple des taches qui mesurées avec des lunettes, avoient cependant une minute & un tiers de diamètre. Il n'est donc pas étonnant qu'avant la découverte des lunettes, on n'eût jamais observé Mercure ni même Vénus sur le soleil.

Ces passages ne se voient pas à la vue simple.

2001. Ces passages n'arrivent que lorsque Vénus & Mercure dans leur conjonction inférieure, n'ont pas une latitude plus grande que le demi-diamètre du soleil, c'est-à-dire, lorsque la conjonction arrive fort près du nœud, tout au plus, à la distance de $1^{\circ}\frac{3}{4}$ pour Vénus.

Ils sont très-importans.

2002. Ces passages sont importans; ils fournissent un moyen de déterminer exactement le lieu du nœud de Mercure, ou de Vénus, & la longitude héliocentrique indépendamment de la parallaxe du grand orbe; mais les passages de Vénus ont sur-tout l'avantage singulier de pouvoir faire connoître exactement la parallaxe du soleil (2149); d'où dépendent les distances de toutes les planètes entr'elles & par rapport à nous (1222); c'est ce qui leur a donné une si grande célébrité, & ce qui m'oblige de les traiter séparément dans ce XIe livre.

Il y a dans les passages de Vénus trois choses qui concourent à donner de l'avantage & du mérite à ces sortes d'observations; 1°, la grande précision avec laquelle on observe le contact de deux objets, dont l'un est obscur & placé sur un autre qui est lumineux; il n'y a dans l'astronomie que ce seul cas où l'on puisse observer un angle de distance à un dixième de seconde près; 2°, le rapport connu de la parallaxe de Vénus au soleil, avec celles de toutes les autres planètes; 3°, la grandeur de cette parallaxe qui produit un quart-d'heure de différence entre les observations, & qui est plus que double de celle du soleil.

2003. Képler fut le premier qui en 1627 après avoir dressé sur les observations de Tycho ses tables Rudolphines, osa marquer les temps où Vénus & Mercure passeroient devant le soleil; il annonça même un passage de Mercure pour 1631, & deux passages de Vénus, l'un pour 1631, & l'autre pour 1761, dans un avertissement aux astronomes, publié à Leipsick en 1629: *Admonitio ad Astronomos rerumque cœlestium studiosos, de miris rarisque anni 1631 phœnomenis, Veneris puta, & Mercurii in solem incursu.* Képler n'avoit pas pu donner à ses tables

un degré de perfection assez grand, pour annoncer d'une manière exacte & infaillible ces phénomènes, qui tiennent à des quantités fort petites; le passage qu'il annonçoit pour 1631 n'eut pas lieu; & Gassendi qui s'y étoit rendu fort attentif à Paris ne l'avoit point apperçu; mais aussi il y eut en 1639 un passage de Vénus que Képler n'avoit point annoncé & qui fut observé en Angleterre. Képler mourut en 1631 quelques jours avant le passage de Vénus qu'il avoit annoncé pour 1631; mais celui de Mercure fut observé, comme il l'avoit prédit.

2004. Avant que de tracer l'histoire de ces observations, examinons d'abord pourquoi les passages de Mercure & sur-tout ceux de Vénus sur le soleil, sont si rares: Vénus revient toujours à sa conjonction inférieure au bout d'un an & 219 jours (1173); il sembleroit donc qu'à chaque conjonction Vénus devroit paroître sur le soleil, étant placée entre le soleil & nous; mais il en est de ces éclipses comme des éclipses de lune (1770), il ne suffit pas que Vénus soit en conjonction avec le soleil, il faut qu'elle soit vers son nœud, & que sa latitude vue de la terre n'excède pas le demi-diamètre du soleil, c'est-à-dire, environ 16′. Soit *C* le centre du soleil (*Pl. XV, fig.* 125), *NCD* l'écliptique, *NSVE* l'orbite de Vénus; *V* Vénus en conjonction, c'est-à-dire, au moment où elle répond perpendiculairement au point *C* de l'écliptique où est le soleil; *CV* la latitude géocentrique de Vénus; si cette latitude est plus petite que le rayon *CO* du soleil, il est évident que Vénus paroîtra sur le disque *SOE* du soleil, il en est de même de Mercure. *Planche XV. Fig.* 125.

2005. Lorsqu'on connoît la révolution synodique moyenne de Mercure ou le retour de ses conjonctions au soleil, qui est de 115j 21^h 3′ 22″ 3 (1173), on peut trouver pour un intervalle quelconque toutes les conjonctions inférieures de Mercure au soleil; on choisit celles qui arrivent quand le soleil est près du nœud de Mercure, c'est-à-dire, vers le commencement de Mai & de Novembre, & en les calculant avec plus de soin (2043), l'on

Trouver les années des passages.

voit bientôt si la latitude géocentrique au moment de la conjonction vraie n'excède pas le demi-diamètre du soleil, & si Mercure peut paroître sur le disque du soleil. C'est ainsi que M. Halley calcula, en 1691, plusieurs passages de Mercure sur le soleil, qui sont rapportés dans les transactions philosophiques, n°. 193, *pag.* 511, dans le premier volume de l'Abrégé, *pag.* 427, & dans les leçons d'astronomie de Whiston, dictées en 1703 & imprimées en 1708 *in*-8°, (*Prælectiones Astronomiæ*, pag. 267); on y trouve les calculs que M. Halley avoit faits de 29 passages tant pour le dernier siècle que pour celui-ci. Il y employoit des périodes de 6 ans, de 7, de 13, de 46 & de 265, qui fort souvent ramenent les passages de Mercure sur le soleil au même nœud; & qui suffisent pour indiquer les années où il peut y en avoir, comme nous le dirons bientôt. M. Halley avoit fait la même chose pour les passages de Vénus; il y reconnut les périodes de 8 ans, de 235 & de 243, qui ramènent les passages de Vénus sur le soleil, & il calcula 17 passages de Vénus, comme nous le dirons, après que nous aurons parlé de l'histoire de ces observations.

Périodes des passages de Mercure & de Vénus.

2006. La premiere observation que l'on ait eu d'un semblable phénomène, est le passage de Mercure observé à Paris par Gassendi, le 7 Novembre 1631 au matin; il en rendit compte lui-même dans une lettre adressée à Schickardus la même année; & qui se trouve à la fin de son *Institutio astronomica*, sous ce titre: *Mercurius in sole visus*. J'ai été plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques occupés à chercher *Mercurium in sole*; (c'est-à-dire, la pierre philosophale): je l'ai trouvé, je l'ai contemplé, là où personne avant moi ne l'avoit vu. En conséquence de l'avertissement de Képler, publié en 1629, Gassendi se préparoit à observer Mercure sur le soleil dans une chambre obscure, en recevant l'image du soleil sur un carton, au travers d'une lunette, comme il avoit coutume de le faire pour les éclipses de soleil; dans la chambre qui étoit au-dessous, il avoit placé un observateur avec un quart de cercle de deux pieds, pour mesurer

Premier passage de Mercure.

mesurer la hauteur du soleil au premier signal, ce qui devoit lui donner le temps vrai de chaque observation (1030). Dès le 5 de Nov. il vouloit chercher Mercure sur le soleil, mais le ciel fut pluvieux toute la journée, & le 6 il eut encore presque tout le jour un ciel couvert. Le 7 au matin, il ne put appercevoir le soleil qu'au travers des nuages jusqu'à 9 heures; il remarqua pour lors quelque chose de noir sur son image du soleil; mais ne croyant pas que le diamètre de Mercure pût être si petit, il ne soupçonna pas que ce fût cette planète, & ne marqua sa position que d'une manière assez vague. Cependant Gassendi fit ensuite réflexion que ce pouvoit être une petite tache formée ce jour-là; elle pouvoit servir à y comparer Mercure s'il venoit à y paroître ensuite, au moyen de quoi l'on pourroit déterminer la parallaxe de Mercure par cette tache, si dans quelqu'autre pays on se trouvoit avoir fait une pareille observation; en conséquence il mesura sa distance au centre du soleil; quelque temps après il la mesura de nouveau, & trouva la distance un peu plus grande; il fut très-étonné de cette différence, & commença de croire que ce n'étoit point une tache ordinaire, puisqu'elle avoit un mouvement si sensible; il eût même quelque idée que ce pouvoit être Mercure, mais sans oser se le persuader, tant il étoit préoccupé de l'idée que Mercure paroîtroit beaucoup plus gros. Mais enfin le soleil ayant reparu, Gassendi mesura de nouveau la distance des centres, & l'ayant trouvé fort augmentée, il comprit enfin que c'étoit Mercure qu'il voyoit sur le soleil; il frappa du pied pour avertir de prendre hauteur, afin d'avoir le temps vrai; mais celui qu'il avoit placé au quart de cercle avoit quitté son poste, ce qui lui fit perdre encore beaucoup de temps, ensorte qu'il ne pût faire, pour ainsi dire, d'autre observation que celle de la sortie de Vénus; elle arriva à 10h 28′, suivant le calcul de Gassendi, le soleil ayant 21° 44′ de hauteur apparente; Mercure étoit à 32° $\frac{1}{2}$ du vertical du centre du soleil, mais Gassendi avoit quelque doute sur ce dernier point.

Ce passage de 1631 observé à Paris par Gassendi, le fut aussi à Inspruck, par le P. Jean-Baptiste *Cysatus*, Jésuite; à Rufac en Alsace, par Jean *Remus Quietanus*, Médecin; & à Ingolstad par un anonyme; mais l'observation de Gassendi est la seule dont on ait tiré des conséquences astronomiques.

Résultat de ce passage.

Ce premier passage de Mercure étant la premiere observation que les astronomes aient eue d'une longitude héliocentrique de Mercure, a été employé pour la théorie de Mercure par plusieurs astronomes, & en particulier par M. Cassini (*Elemens d'astron. pag.* 592): il trouve que le milieu de ce passage a dû arriver le 7 Novembre 1631 à $7^h\ 44'\ 16''$ du matin, & la conjonction vraie à $7^h\ 50'$, le lieu du soleil & celui de Mercure étant à $7^s\ 14^\circ\ 41'\ 35''$, & le lieu du nœud à $1^s\ 13^\circ\ 24'\ 43''$; on peut voir aussi le calcul qu'en fit M. Halley, (*Philos. transf.* 1725, n°. 386). J'ai placé le résultat de ce passage parmi les observations de Mercure *pag.* 167.

Douze autres passages.

2007. Depuis ce temps-là, nous avons eu 12 autres passages de Mercure sur le soleil, dont les résultats ont été rapportés dans le VIe livre avec les autres observations de Mercure (*pag.* 167): on trouvera le détail des 8 premiers dans M. Cassini, *pag.* 585. *& suiv.*

Après le passage de 1631, on trouve d'abord le second passage qui fut celui du 3 Novembre 1651 n. st., observé à Surate dans les Indes, par *Shakerlæus*, Anglois, qui avoit entrepris exprès ce grand voyage, pour observer Mercure sur le soleil; l'observation est rapportée dans l'ouvrage de Wing intitulé: *Astronomia Britannica.*

2008. Le troisième est celui du 3 Mai 1661. Il fut observé à Dantzick par *Hevelius*, qui composa à ce sujet l'ouvrage intitulé, *Mercurius in sole visus*; mais son calcul a été réformé par M. Cassini (*pag.* 584), qui en a fait un grand usage pour la théorie de Mercure. C'étoit le premier passage qu'on eût observé vers le nœud descendant; il fut aussi observé à Londres par *Huygens*, *Mercator* & *Street.*

2009. Le 4e passage de Mercure arriva le 7 Nov. 1677, & fut observé par M. Halley à l'isle de Ste Hélène, où il étoit allé pour cette observation; par M. Gallet, à Avignon; par M. Tounley, en Angleterre; & par un Anonyme à Montpelier.

2010. Le 5e passage de Mercure fut observé le 10 Nov. 1690, à Canton dans la Chine, par les PP. Fontanay & le Comte, Jésuites; à Nuremberg, par M. *Wurtzelbaur*; à Erford, par M. *Kirch*; à Varsovie, par le P. A. A. *Kochanski*; à Sommerfeld, près de Leipsick, par Michel *Arnoldus*.

2011. Le 6e passage fut observé le 3 Novembre 1697; à Paris, par M. Cassini, M. Maraldi & M. de la Hire; à Roterdam, par le fils de M. Cassini; à Tchaotcheoufou dans la Chine, par le P. Fontanay, Jésuite; à Pékin, par le P. Visdeloup, Jésuite; à Nuremberg, par M. Wurtzelbaur, &c. M. de l'Isle qui, dans un avertissement parle de toutes ces observations, a laissé dans ses manuscrits les détails de l'observation faite à la Chine; celle qui fut faite à Paris est rapportée dans les élémens de M. Cassini, *pag.* 597.

Je ne parle pas ici d'un passage du 5 Mai 1707, qui fut entrevu à Copenhague, par M. Roemer, sans qu'on en ait tiré aucune conséquence utile. On en attendoit un le 8 Mai 1720 au matin; M. de l'Isle qui étoit pour lors à l'hôtel de Taranne, chercha Mercure inutilement, & le passage ne dut pas arriver suivant mes tables.

2012. Le 7e passage est du 9 Novembre 1723; il fut observé à Paris, à Londres, à Gênes, à Bologne, à Padoue, &c. M. Halley dans les transactions philosophiques de 1725, en a fait usage pour corriger ses tables de Mercure, & M. de l'Isle donna à cette occasion un grand mémoire dans le volume de l'académie pour 1723.

2013. Le 8e passage est arrivé le 11 Novembre 1736, c'est l'observation la plus complette qu'on ait eue en Europe d'un passage de Mercure; car en plusieurs endroits l'on observa l'entrée & la sortie. On peut voir à

ce sujet les mémoires de l'académie, année 1736.

2014. Le 9e passage est celui du 2 Mai 1740, observé seulement à Cambridge dans la nouvelle Angleterre, par M. Wintrop; l'observation se trouve dans les transactions philosophiques, elle servit à M. de l'Isle en 1752 à prédire le passage de 1753, en lui apprenant qu'il falloit ajouter 1′ 23″ à la longitude héliocentrique de Mercure, tirée des tables de M. Halley; c'étoit le second passage qu'on eût vu dans le nœud descendant. M. de l'Isle étoit allé exprès de Pétersbourg à Beresow, en Sibérie, pour y faire cette observation, mais les nuages se dissipèrent une heure trop tard, & il manqua l'objet de ce pénible voyage.

2015. Le 10e passage a été observe dans toute l'Europe, le 5 Novembre 1743, Voyez les mémoires de l'académie pour cette année-là.

2016. Le 11e est celui du 6 Mai 1753, c'est le troisième qu'on ait vu dans le nœud descendant; il a été observé de même dans toute l'Europe; on eut à Paris, & j'eus moi-même au Château de Meudon l'observation la plus complette; ce fut à cette occasion que je donnai ma méthode pour calculer ces sortes d'observations (2125). *Mém. de l'acad.* 1753 & 1754.

2017. Le 12e passage de Mercure est celui du 7 Novembre 1756, observé à Pékin par le P. Amiot & le P. Gaubil, & à Pondicheri par le P. Cœurdoux, tous trois savans Missionnaires Jésuites. M. de l'Isle a donné le détail de cette observation avec les conséquences qu'il en avoit tirées, dans les mémoires de l'acad. pour 1758, j'aurai occasion d'en parler encore à l'art. 2159.

2018. Enfin, il y a eu un 13e passage le 9 Novembre 1769 au soir, dont la conjonction a dû arriver à 10h 33′ avec 7s 17° 50′ 49″ de longitude, & 7′ 39″ de latitude géocentrique; j'apprends qu'il a été observée en Amérique, mais les observations ne me sont point encore parvenues. (Août 1770).

Passages du mois de Novembre.

2019. Les observations de ces 13 passages font voir qu'il y a des périodes ou des retours assignables pour ces

sortes de phénomènes, & M. Halley qui les avoit apperçus, s'en servit pour les prédire tous. La période la plus courte pour les passages de Mercure, dans son nœud ascendant au mois de Novembre, est celle de 6 ans 8j 18^h 27′; il y a un jour de plus, quand l'année du premier passage est la bissextile ou la suivante, par exemple 1776; il n'y a pour lors qu'une bissextile entre les deux passages qui arrivent dans les 6 ans. Après cet intervalle de temps Mercure paroît de 31′ 35″ plus au nord que la premiere fois au moment de la conjonction, suivant nos nouvelles tables.

2020. Ainsi pour que l'on puisse observer deux passages de Mercure sur le soleil au nœud ascendant, ou au mois de Novembre dans l'intervalle de 6 ans, il faut que dans le premier passage, Mercure ait eu une latitude très-méridionale, & qu'il ait presque rasé le bord austral du soleil, afin que dans le passage suivant, il puisse rencontrer le bord boréal du soleil; mais cette circonstance arrivera très-rarement. Le calcul précédent pour la quantité dont Mercure paroît plus au nord dans un passage que dans l'autre, se fera par les règles des articles 2045 & suiv. Ces nombres sont un peu plus exacts que ceux de M. Halley. (*Philos. transf.* 1691, *n°.* 193, *pag.* 511. Abrégé I. 430).

2021. La seconde période est celle de 7 ans moins 7 jours & 44′, elle a lieu de 1769 à 1776; mais lorsqu'il n'y a qu'une bissextile en 7 ans, ce qui arrive quand l'année du premier passage est bissextile, on retranche seulement 6 jours. A la fin de cette période, Mercure passe 23′ 24″ plus au midi que la premiere fois; c'étoit seulement 22′ 47″, suivant les calculs de M. Halley, dans lesquels il donnoit la plus courte distance, ou la perpendiculaire sur l'orbite relative.

2022. La troisième période est celle de 13 années Juliennes, 2j 17^h 48′; il y a un jour de moins, s'il se trouve 4 bissextiles dans l'intervalle. Mercure passe 8′ 21″ plus au nord que la premiere fois, au moment de

la conjonction. Cette période a lieu de 1743 à 1756, de 1756 à 1769, &c.

2023. La quatrième période du retour de Mercure au soleil est de 46 années Juliennes 1j 4h 47′, ou un jour de moins, s'il y a douze bissextiles dans l'intervalle, comme cela arrive lorsque la premiere observation a lieu dans la seconde ou la troisième année après la bissextile; il y a un jour de plus quand le calendrier Grégorien fait omettre une intercalaire. Mercure à la fin de cette période passe 1′ 22″, plus au nord qu'au commencement de cette période, suivant le calcul de M. Halley, ou 1′ 36″, suivant mes tables. Cette période a eu lieu de 1631 à 1677.

2024. Enfin, la cinquième & la plus exacte de toutes ces périodes, est celle de 263 années Juliennes, 11h 7′ environ; l'on comptera un jour de plus, si la premiere année de la période est une bissextile. A cause de l'omission de deux intercalaires en 1700 & en 1800 dans le calendrier Grégorien, la période entre le passage de 1631 & celui de 1894, sera de 263 ans 3j 11h. Mercure passe 10″ seulement plus au nord, suivant le calcul de M. Halley, mais suivant mes tables qui donnent un mouvement du nœud beaucoup moindre (1337), Mercure doit passer 1′ 20″ plus au nord.

Passages du mois de Mai.

2025. Dans les retours de Mercure au nœud descendant, les périodes de 6 & de 7 ans ne peuvent avoir lieu, parce que dans les passages du mois de Mai, Mercure étant plus loin du soleil, & plus près de la terre que dans ceux du mois de Novembre, sa latitude géocentrique est plus grande, même à égale distance du nœud; Mercure paroît donc nécessairement au nord du disque du soleil, s'il a rencontré ce disque même dans sa partie la plus méridionale, au commencement de cette période.

2026. Ainsi la période la plus courte pour les retours de Mercure sur le soleil à son nœud descendant au mois de Mai, est celle de 13 années Juliennes 3j 7h & 38′, ou un jour de moins, si l'année précédente est la troisième après

une bissextile, c'est-à-dire, si la premiere conjonction est arrivée dans l'année qui précède une bissextile. Mercure passe plus au midi de 17′ 15″. Cette période a eu lieu de 1740 à 1753.

2027. La seconde période des passages de Mercure dans le nœud descendant est de 46 années Juliennes, en supposant qu'il y en ait 12 de bissextiles, avec 5h 40′ environ. Mais si la premiere année est la bissextile, ou celle qui suit la bissextile, il faut ajouter un jour de plus pour avoir le second passage; on trouve même entre 1661 & 1707, 2j 5h 46′ de différence, à cause de la bissextile de 1700 qui avoit été omise (1547). Mercure étoit 2′ 59″ plus au midi, à la fin de cette période.

2028. La troisième est celle de 263 années Juliennes 1j 2h & un quart; on compte un jour de plus, si l'année du premier passage a été bissextile, & encore deux autres jours de plus, s'il y a deux interruptions du calendrier. Mercure passe seulement de 27″ plus au midi que la premiere fois, suivant mes tables de Mercure. M. Halley comptoit un jour de moins, mais il me paroît que c'est une méprise.

2029. Il y avoit plusieurs passages dans la liste de M. Halley, qui ne pourront avoir lieu, parce que la latitude sera plus grande qu'il n'avoit cru; M. Trebuchet en avoit fait la remarque à l'occasion des passages de Vénus; en conséquence, il a cru devoir vérifier les calculs de M. Halley en se servant de mes tables de Mercure, plus exactes que celles de cet auteur; il a employé aussi les nouvelles tables du soleil, mais en négligeant les petites équations. En même temps il a poussé les calculs beaucoup plus loin que M. Halley qui s'étoit arrêté à 1799, voici la nouvelle table de M. Trebuchet qui s'étend jusqu'à la fin du 19e siècle, & contient 40 passages. Ceux qui doivent arriver jusqu'en 1815, sont figurés dans une planche gravée, que Whiston publia à Londres en 1723. La table suivante contient le temps moyen de la conjonction vraie de Mercure au soleil, & la latitude vraie de Mercure au moment de la conjonction.

Passages de Mercure sur le Soleil dans son nœud descendant, au mois de Mai pendant trois siècles.

Années.	Temps moy. à Paris.				Longit. géocent. vraie en conjonc.				Latitude géoc.		
		H.	M.	S.	J.	D.	M.	S.	M.	S.	
1615	3 Mai.	1	23	50	1	12	34	17	6	33	B
1628	5	9	20	17	1	15	38	59	10	52	A.
1661	3	6	58	58	1	13	38	17	3	36	B
1674	6	15	0	37	1	16	43	19	13	51	A
1707	5	12	45	0	1	14	43	5	0	37	B
1740	2	10	47	36	1	12	43	23	14	52	B
1753	5	18	25	37	1	15	47	28	2	22	A
1786	3	16	27	0	1	13	47	44	12	3	B
1799	7	0	5	48	1	16	51	52	5	20	A
1832	4	22	6	12	1	14	52	6	9	3	B
1845	8	5	48	38	1	17	56	17	8	19	A
1878	6	3	45	12	1	15	56	25	6	8	B
1891	9	11	27	12	1	19	9	41	11	19	A

Passages de Mercure sur le Soleil dans son nœud ascendant, au mois de Novembre pendant trois siècles.

Années.	Temps moy. à Paris.				Longit. géocent. vraie en conjonc.				Latitude géoc.		
		H.	M.	S.	J.	D.	M.	S.	D.	S.	
1605	1 Nov.	7	57	29	7	9	29	20	13	58	A
1618	4	1	49	30	7	12	5	32	5	32	A
1631	6	19	37	10	7	14	41	45	2	48	B
1644	8	13	21	25	7	17	17	56	11	7	B
1651	2	12	47	30	7	10	32	10	12	16	A
1664	4	6	38	50	7	13	8	21	3	58	A
1677	7	0	26	20	7	15	44	33	4	25	B
1690	9	18	9	15	7	18	20	44	12	44	B
1697	2	17	37	50	7	11	35	2	10	40	A
1710	6	11	28	30	7	14	11	12	2	19	A
1723	8	5	15	52	7	16	47	26	6	0	B
1736	10	22	59	40	7	19	23	38	14	21	B
1743	4	22	27	0	7	12	37	50	9	3	A
1756	8	16	18	0	7	15	14	3	0	42	A
1769	9	10	6	0	7	17	50	19	7	39	B
1776	2	9	21	40	7	11	4	26	15	45	A
1782	12	3	48	41	7	20	26	30	15	50	B
1789	5	3	16	35	7	13	40	37	7	25	A
1802	8	21	7	35	7	16	16	53	0	55	B
1815	11	14	53	30	7	18	53	7	9	15	B
1822	4	14	11	46	7	12	7	14	14	8	A
1835	7	8	6	50	7	14	43	31	5	49	A
1848	9	1	57	0	7	17	19	44	2	31	B
1861	11	19	43	50	7	19	56	0	10	52	B
1868	4	19	2	34	7	13	10	7	12	33	A
1881	7	12	56	10	7	15	46	20	4	12	A
1894	20	6	46	40	7	18	22	40	4	9	B

2030. Pour faire sur les passages de Vénus de semblables calculs, on se sert aussi de sa révolution synodique (1173), par laquelle on trouve les temps de toutes les conjonctions moyennes; lorsqu'on a calculée ces conjonctions, on choisit celles qui arrivent aux environs des nœuds, c'est actuellement vers le commencement de Juin & de Décembre : on les calcule plus exactement (2043), & l'on trouve les retours de ces conjonctions à peu-près tels que je vais les rapporter (2038).

2031. La premiere période qu'on remarque dans les passages de Vénus sur le soleil à son nœud ascendant, ou au mois de Décembre, est celle de 8 ans, en ôtant du premier passage 2j 10h 52′; Vénus passe la seconde fois 24′ 18″ plus au midi que la premiere fois. Il n'y a point de différence à faire pour le nombre de jours, relativement aux années bissextiles. Périodes de Vénus.

2032. La seconde période est celle de 235 ans 2j 10h 10′. On compte un jour de plus, si la premiere conjonction s'est trouvée dans une année bissextile; la route de Vénus est de 21′ 30″ plus boréale dans la seconde observation que dans la premiere; au lieu que M. Halley la croyoit plus au nord de 11′ 33″ seulement.

2033. La période de 243 ans ramène aussi les passages de Vénus, en ôtant seulement 43′ du premier; mais si la premiere année a été bissextile, on compte un jour de plus pour l'intervalle. La route de Vénus au bout des 243 ans est de 2′ 48″ plus méridionale, suivant mes tables; M. Halley la croyoit plus méridionale de 13′ 8″ par le défaut des tables que l'on avoit alors.

2034. Dans tous les passages du mois de Décembre vers le nœud ascendant, l'inclinaison relative de l'orbite de Vénus suivant M. Halley, est de 9° 5′, le mouvement horaire de Vénus 4′ 7″, & le temps qu'il lui faudroit pour traverser le disque entier du soleil est de 7h 56′. Dans ceux du mois de Juin les élémens sont à peu-près tels qu'on les trouvera ci-après (2058), la durée

du passage du centre de Vénus par le centre du soleil ne peut être que de 7^h 37′.

2035. Dans les conjonctions de Vénus qui arrivent au mois de Juin vers le nœud descendant, les mêmes périodes ont lieu, avec quelques petites différences : la premiere période est de 8 ans moins 2j 7^h 37′, & Vénus devient plus boréale de 19′ 34″, suivant les observations qu'on a faites dans les deux passages de 1761 & 1769.

2036. La seconde période est de 235 ans 2j 8h 18′, ou un jour de plus, si la premiere année est bissextile. On ajoute encore un jour, si le calendrier Grégorien a souffert quelque interruption, comme en 1700, 1800 & 1900. Vénus devient plus australe de 18′ 10″ à la fin de cette période ; il est vrai que suivant M. Halley qui ne tenoit pas compte du mouvement du nœud de Vénus, elle devoit passer plus au midi de 9′ 21″, mais ce mouvement étant de 19″ par année (1340), cela rend Vénus plus méridionale.

2037. La troisième période est de 243 ans, 1^h 23′, ou un jour de plus, si la premiere année est bissextile ; Vénus à la fin de cette période paroît plus boréale, non pas de 10′ 37″, comme l'avoit cru M. Halley, mais de 1′ 20″ seulement.

2038. En se servant de pareilles périodes, M. Halley calcula les 17 passages de Vénus qui sont dans la table suivante ; mais M. Trébuchet ayant corrigé le calcul des latitudes, d'après le mouvement du nœud de Vénus qui a été observé, en a trouvé 6 où Vénus ne paroîtra point sur le soleil, quoiqu'elle dût y passer suivant le le calcul de M. Halley, & je les ai marqués d'une astérisque * dans la table suivante. Les plus courtes distances y sont rectifiées, & j'y ai corrigé deux autres erreurs que M. Trébuchet avoit remarquées dans le calcul de M. Halley.

Table des passages de Vénus sur le disque du Soleil pendant 12 siècles.

Temps vrai de la conjonction à Paris.					La plus courte distance de Vénus au centre du Soleil.			
V.St. 918	20	Nov.	22h	3′	25′	30″	A	*
1048	20	Mai	0	6	26	35	B	*
1161	20	Nov.	21	20	27	22	A	*
1283	23	Mai	8	24	7	50	B	
1291	21	Mai	1	29	27	40	B	*
1396	23	Nov.	7	30	5	47	A	
1518	25	Mai	16	42	10	55	A	
1526	23	Mai	9	47	8	55	B	
N.St. 1631	6	Déc.	17	39	15	48	B	
1639	4	Déc.	6	47	8	30	A	
1761	5	Juin	18	5	9	50	A	
1769	3	Juin	11	10	10	0	B	
1874	8	Déc.	16	56	13	0	B	
1996	10	Juin	2	23	28	0	A	*
2004	7	Juin	19	28	8	30	A	
2109	13	Déc.	3	6	34	42	B	*
2117	10	Déc.	16	13	10	23	B	

2039. Nous avons dit que Képler avoit annoncé un passage de Vénus pour l'année 1631, & qu'il n'y en avoit point eu (2003); mais il y en eut un 8 ans après, en 1639: Gassendi qui étoit déjà à Paris en 1631, se rendit très-attentif au passage que Képler avoit annoncé pour 1631; il raconte fort au long ses tentatives à ce sujet. (*Mercurius in sole visus, & Venus invisa*); mais elles furent infructueuses. La conjonction devoit arriver à 9h 6′ du soir, avec une latitude boréale de 11″ $\frac{1}{7}$, ensorte que l'entrée de Vénus sur le soleil, devoit se faire le 6 Décembre vers le coucher du soleil; il auroit voulu examiner le soleil & se préparer deux jours d'avance à cette observation, mais le 4 & le 5 on n'eut que de la

Passage de Vénus annoncé pour 1631.

pluie avec un vent impétueux ; le 6 Gassendi vit plusieurs fois le soleil, & le soir jusqu'à trois heures passées, sans que Vénus y parût ; le 7 & le 8 au matin Vénus n'y étoit point, & Gassendi resta dans le doute, si ce passage étoit arrivé tout entier pendant la nuit du 6 au 7, comme nous le croyons aujourd'hui, ou si la latitude s'étant trouvée trop grande, le passage avoit manqué totalement.

Passage observé en 1639.

2040. Le passage de Vénus qu'il y eut en 1639 fut le premier qu'on observa ; mais ce fut par un hazard heureux ; Horoccius s'étoit occupé à calculer des éphémérides sur les tables de Lansberge, beaucoup moins parfaites que les tables Rudolphines ; ces tables de Lansberge donnoient une erreur de 16′ pour la latitude de Vénus, & les tables Rudolphines une erreur de 8′ seulement ; mais l'erreur de Lansberge faisoit remonter Vénus sur le soleil, de sorte que le passage devoit être visible, tandis que l'erreur des tables de Képler la faisoit passer au-dessous ; c'est ainsi que de mauvaises tables occasionnèrent une bonne observation ; sur la foi de ces tables, que Lansberge avoit célébrées avec une assurance capable d'en imposer, Horoccius se prépara à observer ce passage, & le 24 Novembre 1639 vieux style, ou le 4 Décembre N. St., il vit en effet pendant environ une demi-heure Vénus sur le soleil ; il en avoit donné avis à *Cabtrée* son ami, qui étoit à quelques lieues d'Hoole & qui l'observa également. J'en ai donné le résultat parmi les observations de Vénus, *pag.* 169, d'après M. Honsby ; suivant M. Cassini, la conjonction arriva le 4 Décembre 1639 à 6^h 20′ du soir, temps vrai, avec 8^s 12° 31′ 44″ de longitude, & 9′ 8″ de latitude géocentrique (*Elém. d'astr. pag.* 559).

M. Halley calcule les passages de Vénus.

2041. Dans le temps qu'on observa le passage de Vénus sur le soleil en 1639, on ne connoissoit pas encore toute l'utilité qu'on retireroit un jour de ces sortes de phénomènes : ce fut M. Halley qui en 1677 apperçut que la durée d'un passage de Mercure ou de Vénus sur le soleil pouvoit servir à trouver sa parallaxe ; il essaya

même de la trouver par le moyen du passage de Mercure; mais en 1691 il donna dans les transactions philosophiques un mémoire exprès sur les passages de Vénus, où il parla de 17 passages, c'est-à-dire, de ceux qui avoient dû avoir lieu depuis 918, ou qu'on pouvoit espérer jusqu'à l'an 2117. (V. l'art. 2038). (*The Philosophical transactions*, *n°* 193, *pag.* 511, *ou l'Abrégé de Lowthorp*, *tom. I. pag.* 434).

2042. Enfin M. Halley annonça que si l'intervalle de temps entre les deux contacts intérieurs des bords de Vénus & du soleil, pouvoit se déterminer, à une seconde près, en deux pays situés d'une manière convenable, on en concluroit la parallaxe du soleil & sa distance, à $\frac{1}{100}$ près. Il développa ensuite cette dernière conséquence en 1716 dans un autre mémoire: (Voyez *Philosoph. transf. n°.* 348, *pag.* 454, *ou l'Abrégé de* Jones, *tom. IV*, *pag.* 213). Il assigna pour lors les lieux de la terre où il croyoit qu'on devoit se transporter pour faire, en 1761, cette importante observation avec tout l'avantage convenable; mais il se trompa considérablement dans cette partie de son mémoire, comme je l'ai expliqué fort au long dans l'*Hist. de l'acad.* année 1757, *pag.* 83. Il annonce leur importance.

Méthodes pour calculer les circonstances d'un passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil.

2043. Les circonstances d'un passage de Vénus sont le temps de la conjonction, le milieu du passage, l'entrée & la sortie; la latitude au temps de la conjonction, & la plus courte distance des centres de Vénus & du soleil; les méthodes qu'on emploie pour ces calculs sont les mêmes pour Vénus & pour Mercure; ainsi l'on devra entendre de Mercure tout ce que je dirai de Vénus dans les articles suivans.

On commence par calculer ces passages tels qu'ils paroîtroient s'ils étoient vus du centre de la terre; on cherche ensuite l'effet des parallaxes en différens points de

Deux méthodes différentes.

la surface de la terre. Il y a deux méthodes pour calculer les circonstances d'un passage de Vénus pour le centre de la terre, l'une par les longitudes & latitudes héliocentriques, l'autre par les longitudes & latitudes géocentriques; la premiere est la plus simple; M. de l'Isle est le premier qui l'ait employée; je m'en servirai dans l'exemple suivant.

2044. Lorsqu'on connoît par le moyen des périodes indiquées ci-dessus (2005, 2031), le jour où il peut y avoir un passage de Venus sur le soleil, il s'agit de trouver l'heure de la conjonction : on calcule pour ce jour-là & pour la veille, la longitude du soleil & la longitude héliocentrique de Vénus réduite à l'écliptique, pour avoir le vrai mouvement diurne de Vénus vu du soleil; on calcule aussi le mouvement diurne de la terre aussi vu du soleil, qui est égal au changement de la longitude du soleil.

Ainsi le 5 Juin 1761 à midi, la longitude de la terre opposée à celle du soleil étoit de $8^s\ 14^\circ\ 53'\ 34''$, & celle de Vénus $8^s\ 14^\circ\ 24'\ 47''$, par les tables dont je me servois alors; le 6 Juin la longitude de la terre $8^s\ 15^\circ\ 50'\ 56''$, & celle de Vénus $8^s\ 15^\circ\ 59'\ 55''$. Ainsi le mouvement diurne du soleil ou de la terre étoit de $57'\ 22''$, & celui de Vénus de $1^\circ\ 35'\ 8''$; la différence $37'\ 46''$ est le mouvement diurne de Vénus par rapport à la terre, vu du soleil, sur l'écliptique. La longit. de Vénus pour le 5 à midi étant moindre que celle de la terre de $28'47''$, on fera cette proportion; le mouvement relatif $37'\ 46''$ est à 24^h comme $28'\ 47''$, distance de Vénus à sa conjonction avec la terre, sont à $18^h\ 17''\frac{1}{2}$, temps de la conjonction suivant les tables; je l'ai trouvée par observation à $17^h\ 50'$, c'est-à-dire, le 6 à $5^h\ 50'$ du matin; ainsi l'erreur des tables étoit de près de demi-heure; quoique j'eusse choisi les élémens dont on pouvoit espérer le plus d'exactitude, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 107); mais il ne faut pas s'en étonner, car une erreur de $50''$ dans la longitude de Vénus suffit pour changer d'une demi-heure le temps de la conjonction, à cause de la lenteur de son mouvement

Temps de la conjonction.

relatif. En employant les tables seules de M. Halley, on trouve la conjonction à $5^h\ 56'$; mais cette exactitude est produite par la compensation de deux erreurs. (*Ibid. pag.* 111). L'heure de la conjonction vue du soleil ou de la conjonction vue de la terre, est exactement la même; puisque la conjonction a lieu quand Vénus est sur le plan du cercle de latitude qui passe par les centres du soleil & de la terre; ainsi nous n'avons aucun autre calcul à faire pour trouver la conjonction.

Latitudes & distances.

2045. Ayant trouvé l'heure de la conjonction, l'on calcule par les tables la latitude héliocentrique de Vénus, le rayon vecteur ou la distance au soleil, aussi bien que la distance de la terre au soleil. Cette latitude vue du soleil étoit, suivant mes tables de $3'\ 54''$ australe; le mouvement horaire en latitude vu du soleil $14''08$, la distance de Vénus au soleil 72643, celle de la terre au soleil 101546, & par conséquent celle de Vénus à la terre 28903; je suppose cent mille pour la distance moyenne du soleil à la terre, comme l'a fait M. Halley dans ses tables. On cherchera aussi le demi-diamètre du soleil, qui dans cet exemple est de $15'\ 46''\frac{1}{2}$, mais que je réduirai dans la suite à $15'\ 43''$ (2159).

Section du cône solaire.

2046. Soit S le centre du soleil (*fig.* 126), dont le demi-diamètre est SA, T le centre de la terre, TV la distance de Vénus à la terre; si l'on conçoit un cône ATB, dont le sommet soit au centre de la terre T, & dont le soleil soit la base, l'angle ATB de ce cône sera la valeur du diamètre du soleil vu de la terre (1383). Ce cône étant coupé dans la région de Vénus par un plan perpendiculaire à son axe, la section est un cercle dont le diamètre est CD; lorsque Vénus traverse le cône ATB, elle passe dans ce plan de section, ou dans le cercle dont le diamètre est CD, & elle y est nécessairement pendant toute la durée du passage. En effet, quand Vénus entre en C dans le cône ATB, elle paroît vue de la terre T, être sur le bord A du soleil; quand elle quitte ce cône en D, elle paroît sur l'autre bord B du disque solaire, & c'est la fin du passage; ainsi nous allons cher-

Fig. 126.

Fig. 126. cher par le moyen des longitudes vues du soleil (2044); à quelle heure Vénus entrera dans la section du cône *CD*, & ce sera le commencement du passage.

2047. Il faut savoir d'abord quelle est la grandeur apparente vue du soleil de la section *CD*, que Vénus doit traverser pendant la durée du passage, ou de l'angle *CSV*; pour cela on considère les triangles rectilignes rectangles *SCV*, *TCV*, qui ont un côté commun *CV*; si l'on prend *CV* pour rayon, on aura *SV* pour tangente de l'angle *SCV*, ou cotangente de *CSV*, on aura de même *TV* pour cotangente de l'angle *CTV*, qui est égal au demi-diamètre du soleil; on pourra donc faire cette proportion, *TV* : *SV* : : cotang. : *CTV* : cot. *CSV*, ou parce que les tangentes sont en raison inverse des cotangentes, *SV* : *TV* : : tang. *CTV* : tang. *CSV*; mais de si petits angles sont entre eux comme leurs tangentes, il n'y auroit pas une seconde d'erreur à craindre, même pour des arcs d'un degré; ainsi l'on dira : *la distance de Vénus au soleil est à la distance de Vénus à la terre, comme le demi-diamètre du soleil vu de la terre est au demi-diamètre de la section vue du soleil.*

Règle pour trouver cette section.

2048. Au moyen des distances rapportées ci-dessus (2045) pour le passage de Vénus sur le soleil en 1761, on aura cette proportion, 7264 : 2890 : : 15′ 46″ $\frac{1}{2}$: 6′ 16″ 59, ensorte que le demi-diamètre de la section que Vénus traversoit le jour du passage, étoit de 6′ 16″ 59 vu du soleil.

Fig. 125. 2049. Soit un cercle *AES* (*fig.* 125), dont le demi-diamètre *CO* vu du soleil soit de 6′ 16″ $\frac{1}{2}$ (2048), la circonférence *AES* représentera celle de la section que Vénus doit traverser; *CN* étant supposée une portion de l'écliptique; on tirera sur *CN* une perpendiculaire *CV*, égale à 3′ 54″, latitude héliocentrique de Vénus que nous avons trouvée ci-dessus (2045) pour le moment de la conjonction; le point *V* sera celui où Vénus devra se trouver au moment de la conjonction, & c'est par le point *V* qu'il faudra tirer une ligne *EVS*, pour représenter la trace ou l'orbite relative de Vénus, après

après que nous aurons déterminé l'inclinaison relative de cette orbite vue du soleil. *Fig.* 125.

2050. Nous avons fait voir en parlant des éclipses (1765), que pour trouver l'inclinaison relative d'une orbite par rapport à un astre *C*, supposé fixe, il faut faire cette proportion : la somme ou la différence des deux mouvemens en longitude, est à la somme ou à la différence des mouvemens en latitude, comme le rayon est à la tangente d'un angle qui se trouve être l'inclinaison de l'orbite relative. Dans le cas dont il s'agit ici, les mouvemens en longitudes vont du même sens; ainsi l'on prendra la différence des mouvemens diurnes de la terre & de Vénus, qui est 37′ 46″; & le mouvement diurne de Vénus en latitude, qui est de 5′ 38″, le soleil n'en a aucun, l'on dira donc, 37′ 46″ : 5′ 38″ :: *R* : tang. 8° 29″, c'est à peu-près l'inclinaison de l'orbite relative de Vénus sur l'écliptique; ou plus exactement 8° 28′ 47″ (2058). On tirera donc une ligne *SVE*, qui fasse avec le cercle de latitude *CV* un angle de 81° 31′, c'est le complément de l'inclinaison 8° 29′; & comme la latitude de Vénus *CV* va en croissant, on fera l'angle aigu *OVS* extérieurement du côté de la sortie *S* de Vénus, ou du côté de l'orient. Je dis que la sortie est du côté de l'orient, parce que toutes les planètes vues du soleil paroissent aller à l'orient; c'est-à-dire, selon l'ordre des signes; quoiqu'il n'y ait véritablement ni orient ni occident quand on se suppose dans le soleil, on est convenu de dire, comme sur la terre, qu'une planète va d'occident vers l'orient, quand elle va suivant l'ordre des signes, le Bélier, le Taureau, &c. en augmentant de longitude. Orbite relative.

2051. On abaissera sur l'orbite *ES* une perpendiculaire *CM*; le point *M* sera le milieu du passage de Vénus, & *CM* sera la plus courte distance de Vénus à la terre, vue du soleil; c'est sa distance à la ligne des centres, ou à l'axe du cône dont nous avons parlé (2046). Pour trouver la quantité *MV*, on fera attention que l'angle *MCV*, formé par la perpendiculaire à l'orbite, & la perpendiculaire à l'écliptique, est égal à celui que

Fig. 125. forment l'orbite relative & l'écliptique, c'est-à-dire, à l'inclinaison 8° 28′ 47″; on fera donc cette proportion, $R : CV$: ou 3′ 54″ : : sin. 8° 28′ 49″ : MV qui se trouvera 34″ 505.

Mouvement relatif. 2052. Le mouvement diurne de Vénus sur son orbite relative se trouvera en disant (1765), le cosinus de l'inclinaison est au rayon, comme la différence des mouvemens diurnes 37′ 46″ est au mouvement sur l'orbite relative 38′ 11″ dont la vingt-quatrième partie est le mouvement horaire vu du soleil 1′ 35″ à peu-près; nous le trouverons ensuite par une méthode plus exacte, 1′ 35″ 504 (2057).

Milieu du passage. Au moyen de ce mouvement horaire, il est aisé de trouver le milieu du passage & le temps que Vénus emploie à aller de V en M; on dira pour cet effet, 1′ 35″ 504 : 3600″ : : 34″ 505 : 21′ 41″, différence entre la conjonction & le milieu du passage. La différence des logarithmes de 3600″ & du mouvement horaire, forme un logarithme constant 1576281 qui, ajouté avec celui de la quantité VM vue du soleil, donne le temps correspondant. Si l'on suppose l'heure de la conjonction 5h 50″ (2044), on aura pour le milieu du passage 5h 28′ 19″.

La plus courte distance. Le triangle CVM, qui a servi à trouver MV (2051) servira aussi à trouver CM, en disant, $R : CV$: : cos. $VCM : CM$, qui sera 231″ 44 : ainsi la plus courte distance CM vue du soleil est de 3′ 51″ 44. Pour trouver cette distance vue de la terre; on dira comme dans l'article 2047, la distance de Vénus à la terre est à celle de Vénus au soleil, comme 3′ 51″ 44 sont à 9′ 41″ 69, c'est la plus courte distance de Vénus au soleil vue de la terre.

2053. Si l'orbite de Vénus traversoit le centre C de la section, l'arc ME de l'orbite seroit égal à CD, c'est-à-dire, au rayon même de la section, 6′ 16″ 6; mais à cause de la latitude CV, Vénus traverse une corde ES plus petite que le diamètre; ainsi Vénus ne sera pas aussi long-temps dans le cercle ASE, & la durée du passage sera moindre, que si Vénus n'avoit point de latitude.

Pour connoître la longueur *ME*, qui est égale à *SM*, on résoudra le triangle *CME*, dans lequel on a $CE = 6'\ 16'\ 59$ & $CM\ 3'\ 51''\ 44$: l'on trouvera *ME* de $4'\ 57'',08$. Le temps que Vénus employera à parcourir *ME*, sera la demi-durée du passage : ainsi on la trouvera par cette proportion ; le mouvement horaire relatif $1'\ 35''\ 504$, est à une heure ou $3600''$, comme $4'\ 57''\ 08$ sont à $3^h\ 6'\ 38''$. C'est le temps que Vénus emploie à aller de *E* en *M*, & c'est la demi-durée du passage, vue du centre de la terre. Fig. 1151. Demi-durée du passage.

La demi-durée $3^h\ 6'\ 38''$ étant ôtée de $5^h\ 28'\ 19''$, milieu du passage (2052), donnera $2^h\ 21'\ 41''$, pour le moment de l'entrée du centre de Vénus dans la section du cône solaire, ou dans le cercle *ASE* ; & cette même demi-durée étant ajoutée à $5^h\ 28'\ 19''$, donnera $8^h\ 34'\ 57''$ pour la sortie du centre de Vénus ; c'est aussi la sortie vue du centre de la terre ; c'est-à-dire, telle qu'elle est, en faisant abstraction des parallaxes (2060). Entrée & sortie.

2054. Telle est la méthode la plus simple de trouver le commencement & la fin du passage de Vénus par rapport au centre de la terre ; on n'y emploie autre chose que les longitudes de Vénus vues du soleil, qui sont beaucoup plus aisées à calculer que les longitudes géocentriques (1143). On pourroit faire la même chose en y employant les longitudes géocentriques, & le mouvement de Vénus vu de la terre (2057) ; il suffiroit de prendre pour rayon du cercle *AES* le demi-diamètre du soleil $15'\ 46''\ 5$: on trouveroit $CM = 9'\ 42''\ 626$ le logarithme constant 11760380 & la demi-durée $3^h\ 6'\ 38''$; avec un mouvement rétrograde.

2055. Le changement de la distance de Mercure au soleil est assez sensible dans l'espace de quelques heures, pour qu'on ne doive pas supposer égaux les rayons du disque ou de la section *ASE* au commencement & à la fin du passage. M. de l'Isle, en calculant le passage de Mercure pour le 7 Novembre 1756 (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 148), trouve le rayon *CE* pour l'entrée $34'\ 24''\ 43$, & le rayon *CS* pour la sortie $34'\ 30''\ 25$, c'est-à-dire, Inégalité des distances de Mercure.

Fig. 125. plus grand de $5'' 82$; parce que dans l'espace de $5^h 25'$ que dura ce passage, Mercure s'étoit rapproché de son périhélie, & par conséquent du soleil; ce qui lui faisoit parcourir une section plus voisine de la base du cône, & par conséquent plus étendue : mais cette inégalité peut se négliger dans les passages de Vénus.

Inégalité de son mouvement.

2056. L'inégalité du mouvement de Mercure doit aussi entrer dans le calcul, si l'on veut être assuré du résultat à quelques secondes près. Dans le passage de 1756, le mouvement héliocentrique de Mercure sur son orbite relative, dans la premiere demi-durée du passage étoit de $34' 21'' 18$; & dans la seconde demi-durée, il étoit de $34' 26'' 07$, c'est-à-dire, plus grand, en temps égal, de $4'' 89$. (*Mém.* 1758, *pag.* 143); la moitié de cette inégalité vaut $11'' \frac{1}{2}$ de temps, dont le vrai milieu du passage est différent d'un milieu pris entre l'entrée & la sortie, observées en E & en S, ensorte que la seconde demi-durée, à compter du point M, étoit plus courte de $23''$ que la premiere demi-durée EM (*Ibid. pag.* 153).

Calcul du mouvement horaire.

2057. J'ai donné dans les mémoires de l'académie pour 1762, *pag.* 96, une méthode exacte, pour trouver avec la précision d'un centième de seconde, les mouvemens horaires de Mercure & de Vénus, & par conséquent leur inégalité; mais les bornes de ce traité ne me permettent pas d'en donner ici la démonstration : il me suffira de rapporter mes formules, elles sont tirées des règles que j'ai démontrées (1240, 1241), & des formules différentielles (3307, & suiv.). Soit x l'anomalie excentrique, u l'anomalie vraie, a la distance aphélie, p la distance périhélie, e l'excentricité en secondes; on a $dx = du \frac{\sqrt{a} \cos. \frac{1}{2} x^2}{\sqrt{p} \cos. \frac{1}{2} u^2}$, & $e\,dx$ cos. x est la quantité qu'il faut ajouter au mouvement dx de l'anomalie excentrique (dans le premier & le dernier quart de l'anomalie excent.) pour avoir le mouvement de l'anomalie moyenne. On supposera le mouvement vrai du connu à peu-près, pour en déduire d'abord dx, & ensuite le mouvement moyen, qui doit se trouver de $4' 0'' 32$ pour

Vénus, & de 10′ 13″ 86 pour Mercure, si l'on a bien supposé le mouvement vrai. Si l'on trouve un mouvement moyen plus grand, l'on diminuera la valeur qu'on a supposée pour mouvement vrai, à peu-près comme on a fait pour trouver l'équation du centre (1244). Le mouvement horaire vrai sur l'orbite multiplié par le cosinus de l'inclinaison vraie de l'orbite, donnera le mouvement horaire sur l'écliptique; & multiplié par le sinus de l'inclinaison, & le cosinus de la distance au nœud, il donnera le mouvement horaire en latitude vu du soleil. Ayant pris la différence entre le mouvement sur l'écliptique & celui de la terre, on trouvera le mouvement relatif (2052), l'on en conclura les mouvemens géocentriques relatifs, de Vénus ou de Mercure par rapport au soleil, par le simple rapport des distances de la planète à la terrre & au soleil.

2058. C'est ainsi que j'ai trouvé pour le passage de Vénus sur le soleil en 1761, le mouvement horaire 1′ 35″ 504 vu du soleil, & le mouvement vu de la terre 3′ 57″ 40 sur l'écliptique, 4′ 0″ 03 sur l'orbite, 35″ 39 en latitude & l'inclinaison 8° 28′ 47″; mais pour 1769 le mouvement relatif vu de la terre est de 3′ 57″ 49 sur l'écliptique, 4′ 0″ 11 sur l'orbite relative, & 35″ 42 en latitude, l'inclinaison 8° 28′ 59″; il faut avoir soin d'employer ou le mouvement sur l'orbite ou le mouvement sur l'écliptique, suivant les différens cas (2065, 2150).

2059. Pour Mercure dans son passage sur le soleil, le 6 Mai 1753, à 10h 20′ du matin; le mouvement héliocentrique vrai de Mercure seul étoit de 7′ 17″ 56 sur l'orbite, 7′ 14″ 31 sur l'écliptique, 53″ 24 en latitude, les mouvemens géocentriques relativement au soleil 3′ 59″ 83, 3′ 55″ 87 & 43″ 40; l'inclinaison relative 10° 25′ 28″ vue du soleil ou de la terre.

Méthode pour trouver l'effet de la parallaxe dans les passages de Vénus & de Mercure sur le Soleil, par un calcul rigoureux.

2060. Lorsqu'on veut simplement calculer & prédire un passage de Vénus sur le soleil, il suffit de calculer l'effet des parallaxes en différens lieux de la terre par les méthodes graphiques, dont je donnerai bientôt l'explication (2070); mais lorsqu'un passage de Vénus a été observé en différens pays de la terre, comme ceux de 1761 & de 1769, & qu'on veut en conclure la parallaxe du soleil, on ne sauroit mettre trop d'exactitude & trop de scrupule dans le calcul de la parallaxe, pour réduire chaque observation au centre de la terre, & pour trouver le rapport qu'il y a entre les effets de la parallaxe dans ces différens lieux d'observations: c'est ce que nous allons exécuter par la méthode la plus rigoureuse & la plus exacte, en ne négligeant pas même les centièmes de secondes dans la parallaxe; car cette précision est nécessaire, si l'on veut avoir pour les temps cherchés la précision d'une seconde.

2061. Je prendrai pour exemple l'observation que je fis à Paris le 6 Juin 1761. Le contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil arriva à $8^h\ 28'\ 25''$ du matin; il faut trouver pour ce moment la parallaxe de Vénus par rapport au soleil, l'effet qu'elle produisoit sur la distance du centre de Vénus au centre du soleil, & le temps où ce même contact a dû arriver pour le centre de la terre. La premiere opération consiste à trouver pour cet instant la hauteur vraie du centre de Vénus, & l'angle du vertical, avec le cercle de déclinaison au centre de Vénus. La longitude du soleil étoit de $2^s\ 15^\circ\ 42'\ 29''$, son ascension droite $74^\circ\ 28'\ 43''$, sa déclinaison $22^\circ\ 42'\ 15''$, l'angle de position $6^\circ\ 7'\ 6''$. L'angle horaire ou la distance du soleil au méridien, se trouve en convertissant en degrés, ce qui manque au

temps vrai donné pour aller à 12^h, c'eſt-à-dire, $3^h\ 31'\ 35''$, à raiſon de $15°$ par heure; il eſt de $52°\ 53'\ 45''$. Vénus étant aſſez éloignée du centre du ſoleil, pour que ſa hauteur ſoit différente de celle du ſoleil; il faut, pour trouver exactement cette hauteur, avoir l'angle horaire de Vénus & ſa déclinaiſon.

2062. Soit S (*fig.* 131) le centre vrai de Vénus au moment du contact intérieur apparent, CS la diſtance vraie des centres de Vénus & du ſoleil, elle eſt égale à la différence des demi-diamètres du ſoleil & de Vénus; le premier eſt de $15'\ 46''\frac{1}{2}$ dans les tables, nous le réduirons à $15'\ 43''$ (2159), le ſecond eſt d'environ $29''$ (2157). Il faut encore ôter $3''$, c'eſt à peu-près l'alongement que la parallaxe produiſoit dans la diſtance, mais que l'on pourroit négliger, ſi l'on n'en ſavoit pas déjà la valeur par des calculs préliminaires; ainſi CS eſt $15'\ 11''$; CM eſt la perpendiculaire ou la plus courte diſtance ſuppoſée de $9'\ 30''$ (a); on trouvera par la réſolution du triangle MCS que l'angle MCS eſt de $51°\ 16'\ 3''$, on en prendra le complément $SCV = 38°\ 43'\ 57''$; on y ajoutera l'angle $VCO = 14°\ 35'\ 53''$, inclinaiſon de l'orbite ſur l'équateur pour le moment de l'obſervation, qui étoit la ſomme de l'inclinaiſon $8°\ 28'\ 47''$, & de l'angle de poſition pour le ſoleil $6°\ 7'\ 6''$, la ligne CV étant ſuppoſée parallèle à l'orbite relative & CO parallèle à l'équateur, l'on aura l'angle $SCO = 53°\ 19'\ 50''$. Par le moyen du triangle SCO, dont on connoît l'hypothénuſe CS $15'\ 11''$ & l'angle OCS, on trouvera OS, différence de déclinaiſon vraie $= 12'\ 11''$, & CO qui diviſée par le coſinus de la déclinaiſon du ſoleil (892), parce que CO n'eſt qu'un parallèle à l'équateur, & non pas l'équateur lui-même, donnera la différence d'aſcenſion droite vraie entre Vénus & le ſoleil $9'\ 50''$. *Fig.* 131.

(a) Je l'ai trouvée ainſi par le calcul d'un grand nombre d'obſervations (2135), en ſuivant les méthodes dont je donnerai l'explication ci-après (2153). On pourroit ſuppoſer quelques ſecondes de plus ou de moins, ſans que les calculs ſuivans en fuſſent ſenſiblement affectés.

On retranchera cette différence d'ascension droite de l'angle horaire du soleil 52° 53′ 45″, puisque Vénus à sa sortie étoit plus près du méridien que le centre du soleil, & l'on aura l'angle horaire pour Vénus 52° 43′ 55″; on retranchera la différence de déclinaison 12′ 11″ de la déclinaison du soleil 22° 42′ 15″ & l'on aura la déclinaison vraie de Vénus 22° 30′ 4″; avec ces deux élémens, & la hauteur du pole 48° 51′ 0″, (comme elle est au Palais du Luxembourg où je faisois alors mes observations), je trouve la hauteur vraie de Vénus 41° 1′ 7″, & l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison pour le lieu vrai de Vénus 43° 57′ 10″, (1034, 1036).

La différence d'ascension droite étant retranchée de celle du soleil, donne l'ascension droite de Vénus 74° 18′ 53″; cette ascension droite avec la déclinaison vraie 22° 30′ 4″, & l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 19″ fait trouver l'angle de position 6° 10′ 59″ pour le lieu vrai de Vénus; il faut résoudre pour cela un triangle dont on connoît deux côtés, & l'angle compris qui est la distance de Vénus au colure des solstices; c'est un angle obtus dans ce cas-ci; l'angle de position 6° 10′ 59″, ajouté avec l'inclinaison sur l'écliptique 8° 28′ 47″ donne l'inclinaison de l'orbite de Vénus par rapport à l'équateur ou à son parallèle 14° 39′ 46″.

2063. La parallaxe horizontale du soleil est de 9″, ce qui donne pour celle de Vénus 31″ 62; car la distance de Vénus est à celle du soleil comme 9″ est à 31″ 62 au moment de la conjonction; ainsi la différence des parallaxes horizontales de Vénus & du soleil est 22″ 62; on la multipliera par le cosinus de la hauteur vraie de Vénus, diminuée, si l'on veut de la parallaxe à peu-près connue, ou de 17″, & l'on aura 17″ 068 pour la différence des parallaxes de hauteur. Soit *V* (*fig.* 134) le vrai lieu du centre de Vénus au moment de l'observation, *ZVD* le vertical, *D* son lieu apparent, qui étoit plus bas de 17″ 068; *GF* le bord du soleil, *VM* l'orbite relative de Vénus, vue du centre de la terre, *CE* une ligne tirée par le centre du soleil, supposée parallèle au

Fig. 134.

au vertical *ZVD* de Vénus; il faut trouver la valeur exacte de l'angle *CVM* formé par l'orbite *VM*, & par la vraie distance *CV* de Vénus au centre du soleil; pour cela je suppose que le milieu du passage est arrivé en *M* à $5^h\ 30'\ 10''$ (2135), ou environ $2^h\ 58'\ 15''$ avant le moment du contact; le mouvement horaire de Vénus sur son orbite étant de $4'\ 0''\ 03$ (2058); on peut en conclure la portion *MV* de l'orbite vraie de Vénus parcourue depuis le milieu du passage; de son logarithme on ôte celui de la plus courte distance vraie *CM*, $9'\ 30''$, & l'on a celui de la tangente de l'angle *MCV*; on peut aussi le conclure des valeurs de $CV = 15'\ 11''$ & de $CM = 9'\ 30''$, je le trouve par-là de $51^\circ\ 16'\ 3''$. *Fig.* 134.

L'angle *ECF* est supposé formé par une ligne *CE* parallèle au vertical *ZVD* de Vénus & par la ligne *PCF* parallèle au cercle de déclinaison qui passe par Vénus, cet angle est de $43^\circ\ 57'\ 10''$; on en retranchera l'angle *MCF* du cercle de déclinaison *CF* avec la perpendiculaire à l'orbite, qui est de $14^\circ\ 39'\ 41''$, & l'on aura $29^\circ\ 17'\ 29''$ pour l'angle *ECM*, qui ajouté avec *MCV*, donnera $80^\circ\ 33'\ 32''$ pour l'angle *ECV*, égal à *CVZ*, formé au lieu vrai de Vénus; son supplément est l'angle *CVD* dont nous avons besoin. En prenant l'angle parallactique & l'angle de position pour le centre vrai de Vénus *V*, c'est-à-dire, en supposant que *CE* n'est point le vertical du soleil, mais une ligne parallèle au vertical de Vénus, on ne suppose point que les deux verticaux soient réellement parallèles. On pourroit chercher aussi ces angles pour le lieu apparent *D* de Vénus, comme je l'ai fait ailleurs (2148), mais il faut supposer que *CV* soit connu à très-peu-près.

2064. Dans le triangle *CVD*, l'on connoît donc deux côtés & un angle, savoir, *CD* qui est la différence des demi-diamètres de Vénus & du soleil, $= 914''$, *VD* qui est la parallaxe de hauteur $17''\ 068$, l'angle *CVD* opposé à *CD*, & que nous venons de trouver; on cherchera l'angle *VCD* qui est de $1^\circ\ 3'\ 19''\ 8$, on le retranchera de l'angle $CVZ = 80^\circ\ 33'\ 32''$, & l'on aura

Fig. 134. l'angle CDV 79° 30′ 12″ 2. Alors on dira sin. $V : CD ::$ sin. $D : CV$, & l'on aura la vraie distance $CV = 911''$ 03 ; si l'on retranche cette distance vraie de la distance apparente $CD = 914''$, égale à la différence des demi-diamètres, on aura 2″ 97 pour l'allongement que la parallaxe causoit dans la distance du centre de Vénus au centre du soleil, observée à Paris, au moment du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil.

Allongement à Paris.

2065. Par le moyen de la distance vraie CV, nous saurons combien Vénus étoit éloignée du contact vrai, qui eût été observé du centre de la terre : pour que ce contact ait lieu, il faut que Vénus soit en un point X de son orbite vraie MVX, tel que la distance vraie CX des deux centres soit égale à la différence des demi-diamètres 914″, c'est-à-dire, égale à CD ; il faudra donc résoudre séparément les deux triangles CMV, CMX, avec la plus courte distance $CM = 9'$ 30″ qui est un côté commun à tous les deux ; mais en employant d'abord le côté CV de 911″ 03, comme nous l'avons trouvé, & ensuite le côté CX de 914″ ; on trouvera MV de 710″ 68 & MX de 714″ 49, la différence 3″ 81 est la valeur de VX ; les temps qui correspondent à MV & MX sont 2ʰ 57′ 39″ 0 & 2ʰ 58′ 36″ 0 ; ainsi la portion de l'orbite de Vénus parcourue depuis le moment du contact observé à Paris, Vénus étant alors réellement en V, jusqu'au moment du vrai contact vu du centre de la terre, qui est arrivé lorsque Vénus étoit en X, ou l'arc VX correspond à 57″ de temps ; on trouveroit la même chose avec sa valeur 3″ 81 convertie en temps, (par le moyen du logarithme constant 1, 176038 qui est celui de 3600″ ou 1ʰ divisées par le mouvement horaire 4′ 0″ 03) ; car on trouveroit 57″ pour le temps que l'on cherche ; c'est l'effet de la parallaxe sur le temps de l'attouchement intérieur, à Paris ; il y est donc arrivé 57″ plutôt qu'on ne l'auroit vu du centre de la terre, en supposant la parallaxe du soleil de 9″.

Effet de la parall. à Paris en 1761.

On pourroit trouver aussi l'arc VX de l'orbite, en abaissant sur CX la petite perpendiculaire VA ; dans le

triangle VAX on connoît $AX = 2'' 97$ différence entre la distance vraie & la distance apparente, avec l'angle $AVX = MCX$ qui pourroit être pris pour $MCV = 51^\circ 16'$, quoiqu'il soit plus grand de quelques minutes ; l'on trouveroit facilement l'hypothénuse VX ; mais cette méthode n'est pas tout-à-fait aussi exacte que celle dont je viens de donner le détail. Fig. 134.

2066. La sortie apparente, en général, arrive plutôt que la vraie, quand elle se fait au-dessous du diamètre horizontal. *Mém.* 1756, *pag.* 263. *Journal des Savans*, *Mars* 1760, *Février* 1762), c'est-là l'unique règle ; mais pour prévenir la difficulté qui pourroit avoir lieu quand la sortie vraie se fait au-dessus du diamètre horizontal & l'apparente au-dessous, on peut dire que la sortie apparente est avancée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous du diamètre horizontal, & plus loin de ce diamètre que la sortie vraie ; par la même raison, l'entrée apparente est retardée toutes les fois qu'elle se fait au-dessous & plus loin du diamètre horizonal, que l'entrée véritable, ensorte que si la parallaxe de hauteur est une corde partagée également par le diamètre horizontal du soleil, l'entrée sera la même qu'au centre de la terre.

Ainsi dans l'observation de la sortie faite à Naples, en 1761, il n'y avoit, pour ainsi dire, aucun effet de parallaxe, parce que la parallaxe y étoit partagée presque également par le diamètre horizontal, suivant une table que M. Trébuchet a mise à la fin d'un mémoire imprimé dans les mercures de Mai & Juin 1764.

2067. Si l'on supposoit la parallaxe du soleil de $10''$, on trouveroit l'accélération qui en résulte en faisant cette proportion ; $9'' : 57'' :: 10'' : 63'' 4$; cela prouve que cette différence eût été de $1' 3''$ de temps, si la parallaxe horizontale du soleil eût été de $10''$, car l'effet augmente proportionnellement ; en faisant de semblables hypothèses pour les pays où le passage a été observé, on reconnoîtra quelle est la parall. qui satisfait aux observations.

2068. C'est par la méthode que je viens d'expliquer, que j'ai calculé pour 1761 l'effet des parallaxes à

Fig. 134. Tobolsk, à Rodrigues, à Stockolm, &c. pour le comparer avec ce qui avoit été observé, & reconnoître par là si la parallaxe du soleil que j'avois supposée dans mes calculs étoit la véritable, j'en donnerai le détail ci-après (2143); je passe à la manière de calculer la parallaxe pour les autres momens du passage, afin de donner ensuite une méthode infiniment plus courte, & d'une exactitude suffisante, pour les autres observations.

2069. On doit employer à peu-près la méthode précédente pour calculer l'effet de la parallaxe sur les distances de Vénus au bord du soleil, quand on a mesuré les distances de Vénus au bord du soleil, en observant le passage (2131), mais ces calculs n'exigent pas la même précision. Je suppose que le 6 Juin 1761 à $7^h\ 18'\ 55''$ du matin, on ait observé une distance DC, & qu'on veuille en conclure la distance vraie CV, on abaissera sur le rayon CD une perpendiculaire VH, & l'on aura $CH = CV$, du moins sensiblement, & DH sera l'effet de la parallaxe sur cette distance observée; je suppose que le milieu soit arrivé à $5^h\ 30'\ 10''$ (2151), on aura la distance du milieu du passage $1^h\ 48'\ 45''$, & par conséquent la portion MV de l'orbite $7'\ 15''$, CM est de $9'\ 30''$: ainsi l'on trouvera l'angle MCV de $37°\ 21'$. L'inclinaison MCF étant $8°\ 29'$, & l'angle parallactique ECF du vertical avec le cercle de latitude (1884), étant supposé de $39°\ 23'$, on aura l'angle $ECM = 30°\ 54'$, & l'angle $ECV = 68°\ 15' = CVZ$: c'est l'angle de la vraie distance CV avec le vertical ZV. Comme cette opération n'a pas besoin d'une aussi grande précision que la précédente, je suppose, vû la petitesse du triangle HDV que l'angle CDV ou HDV est égal à l'angle CVZ, & dans le triangle HDV, connoissant la parallaxe de hauteur VD de $21''$ pour l'heure de l'observation, je la multiplie par le cosinus de l'angle HDV qui est l'angle d'azimut (1888) ou l'angle du vertical avec le rayon DC, & je trouve $HD = 8''$, c'est l'allongement que la différence des parallaxes produisoit dans la distance observée à l'heure donnée : mais on va voir une ma-

niere bien plus commode de trouver cet allongement, par une opération graphique.

2070. C'est une chose très-avantageuse pour l'astronomie que toutes les opérations & les calculs de parallaxes dans les passages de Mercure & de Vénus, puissent s'exécuter par une opération graphique très facile, & cela jusqu'à la précision des dixièmes de secondes. Le travail est si long par les autres méthodes, que la plupart des astronomes ont négligé de calculer leurs observations, d'en faire usage, & d'en tirer des résultats, parce qu'ils n'appercevoient pas le moyen que je vais expliquer d'exécuter fort vîte, & avec une exactitude suffisante, la partie la plus difficile de ce travail. Trouver les parall. avec le compas.

2071. Il faut appliquer ici ce qui a été dit sur les projections dans les éclipses de soleil (1796, 1835 & suiv.). On imaginera du centre du soleil un cône de rayons qui environnent la terre, ensorte que le cercle de la terre que nous avons appellé cercle d'illumination (1829) en soit la base; & que l'angle au centre du soleil soit de 18″, puisque du soleil on verroit la terre sous un angle de 18″ (1742). Ce cône de rayons coupé dans l'orbite de Vénus y forme un petit cercle qui est la projection de la terre dans la région de Vénus; son demi-diamètre vu de la terre, paroît sous un angle égal à la différence des parallaxes de Vénus & du soleil (1797), qui est d'environ 22″ $\frac{1}{2}$ dans son passage sur le soleil, en supposant la parallaxe du soleil de 9″ (2063). Projection dans l'orbite de Vénus.

2072. Soit le disque du soleil *GEKSV* (*fig.* 131), tel qu'il étoit vu de la terre dans le passage de Vénus, en 1761; *EMRS* l'orbite relative de Vénus sur le soleil; *LCK* le cercle de déclinaison, ou méridien universel, passant par le centre du soleil; *LQN* le cercle qui représente la projection de la terre dans l'orbite de Vénus, & dont le rayon *CL* ou *CN* vu de la terre paroît de 22″ $\frac{1}{2}$. Sur ce cercle de projection l'on tracera l'ellipse de projection *PQ*, qui représente le parallèle diurne de Paris, ou du lieu pour lequel on veut faire le calcul des parallaxes (1839). Par exemple, je suppose qu'à une heure quelconque, Vénus étant au point *R* de son orbite Rayon de projection. *Fig.* 131.

Fig. 131. *EMRS*, on veuille ſavoir l'effet de la parallaxe ; on conſidèrera premièrement, que *CP* exprime la parallaxe de hauteur (1834). Ayant enſuite tiré la ligne *PR*, on verra que ſi *CR* eſt la vraie diſtance de Vénus au centre du ſoleil, vue du centre de la terre, la ligne *PR* eſt leur diſtance apparente pour Paris, parce que *P* eſt le lieu où Paris voit le centre du ſoleil, au lieu de le voir en *C*, & le lieu où le centre du ſoleil voit Paris ; c'eſt le point où la projection eſt coupée par le rayon viſuel mené de Paris au centre du ſoleil. Ainſi du point *R*, comme centre, on décrira un petit arc *CH*, pour avoir *RH* égal à *RC*, & la ligne *PH* ſera la différence entre ladiſtance apparente *PR* & la diſtance vraie *CR*, c'eſt-à-dire, la parallaxe de diſtance.

2073. Au lieu du petit arc *CH* décrit du centre *R*, on peut prendre ſans erreur ſenſible une ligne droite perpendiculaire à la ligne *CR* ; car *CH* étant extrêmement petite en comparaiſon de la longueur de *CR*, ſa courbure eſt abſolument inſenſible ; mais on peut tirer une perpendiculaire *CH*, ſans avoir beſoin du point *R*, qui devient inutile dès-lors qu'on ne prend plus *CH* pour un arc décrit du centre *R*. En conſéquence, on peut ſe paſſer totalement de l'orbite *EMS* & du grand cercle *GEKS* qui exigeroit une figure exceſſivement grande ; il ſuffira de tirer dans le petit cercle de projection une ligne *ms* parallèle à l'orbite *MS*, & de la diviſer également en heures & minutes, auſſi bien que ſi c'étoit l'orbite même ; au point *r* qui répond à l'heure & à la minute pour laquelle on calcule, on tirera la ligne *Cr* ; ſur cette ligne *Cr* une perpendiculaire *CH*, & une parallèle *PH*, qui ſera la parallaxe de diſtance. Ainſi rien n'empêche de tracer en grand ce petit cercle de projection, & de lui donner 8 à 9 pouces de rayon ; alors on y pourra faire avec la règle & le compas, d'une maniere fort exacte toutes les opérations précédentes.

Parallaxe de diſtance.

2074. Suppoſons donc que le cercle *LBN* (*fig.* 132), qui eſt plus grand & plus ſenſible, repréſente également le petit cercle de projection, *m RS* étant l'orbite de Vénus ; on voit que ſi *R* eſt le lieu de Vénus ſur ſon

orbite ; *CH* perpendiculaire à *CR*, & *PH* parallèle à *CR*, cette ligne *PH* sera la parallaxe de distance. *Fig.* 131.

Pour éviter de faire usage du centre *C* de la projection qui est variable pour différens pays (2076), je tire par le centre *D* de l'ellipse une ligne *DM* qui soit parallèle à l'orbite *m R S*, & *MG* qui lui soit perpendiculaire ; ayant supposé la plus courte distance des centres *DM* de 9′ 30″ (2135), je prens sur *MG* le mouvement horaire, ou 4′ par heure, pour la diviser en temps, tout ainsi que l'orbite de Vénus ; je tire par le centre de l'ellipse une ligne *DG* au point où se trouve Vénus à un instant donné, cette ligne est nécessairement parallèle à la ligne *CH* trouvée par l'opération précédente : ainsi je me sers de la ligne *DG* pour tirer *CH* & pour avoir *PH* qui est la parallaxe de distance, en supposant que *P* marque la situation de Paris sur l'ellipse *QPV*, au moment pour lequel on calcule.

Parallaxe d'ascension droite.

2075. On peut trouver de même la parallaxe en ascension droite & en déclinaison, & cela est extrêmement commode pour ceux qui en observant le passage de Vénus emploient une machine parallatique ou un micromètre ordinaire (2136). Je suppose que *BCA* soit une portion du parallèle à l'équateur, & que du point *P* où Paris est situé à l'heure donnée sur son parallèle diurne, on abaisse une perpendiculaire *PK* ; on aura *CK* pour la parallaxe d'ascension droite mesurée sur un grand cercle, & *PK* pour la parallaxe de déclinaison ; parce que c'est le point *P* au lieu du point *C* qui est le centre apparent du soleil, en vertu de la parallaxe, ou si l'on veut, parce que le lieu de l'observateur est projetté au point *P*, qui répond au point *K* du parallèle à l'équateur, au lieu que le centre de la terre est projetté en *C* (2072). Pour le comprendre encore mieux, soit tirée du point *R* (*fig.* 131), une perpendiculaire *RA* sur le parallèle à l'équateur ou sur *CO*, elle sera la différence de déclinaison, & *CA* la différence d'ascension droite du soleil & de Vénus vue du centre de la terre, donc si l'observateur est en *P*, ou si le lieu du soleil paroît en *P* & qu'on tire du point *P* une perpendiculaire *PK* sur *CO*, elle sera la *Fig.* 131.

Fig. 131. parallaxe de déclinaison, & *CK* celle d'ascension droite. Ainsi ayant divisé le rayon *CA* de la projection (*fig.* 131), en autant de parties qu'en contient la parallaxe horizontale de Vénus au soleil, (c'étoit $22'' \frac{1}{2}$ en 1761), on portera sur les divisions de *CA* les quantités *PK* & *CK*, & l'on aura en secondes & en dixièmes de secondes, la valeur des parallaxes d'ascension droite & de déclinaison.

Cette parallaxe d'ascension droite sur un arc de grand cercle dans la région du soleil deviendroit plus grande d'un treizième, si on la rapportoit sur l'équateur par le moyen des deux cercles de déclinaison qui passent par les extrémités de l'arc (892); mais on peut dans les calculs ne se servir que de celle qui est mesurée sur un grand cercle, en rapportant les observations à la région du soleil.

La même opération pour divers pays,

2076. Jusqu'ici j'ai supposé que c'étoit pour Paris que l'on vouloit calculer les parallaxes; il faut étendre maintenant cette méthode à tout autre pays, puisque les passages de Vénus arrivés en 1761 & 1769 ont été observés dans un grand nombre de pays différens; toutes ces observations peuvent se calculer par la méthode que nous allons expliquer, d'une maniere extrêmement simple & commode.

2077. L'ellipse qui représente le parallèle de Paris ayant été tracée pour 22° 42′, déclinaison du soleil le jour du passage de 1761, elle a la même figure ou la même proportion dans ses axes pour tous les pays; mais le rayon de projection & la distance *CD* du centre de l'ellipse au centre de projection, doivent être différens (1862): j'ai fait voir qu'en supposant le demi-axe *QD* de l'ellipse divisé en mille parties, *la distance des centres* C *&* D *est égale à la tangente de la latitude du lieu multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre*; j'ai donné une table à la page 487, dans laquelle y a une colonne pour la déclinaison de 22° 42′, & où l'on voit la distance du centre de la projection à celui de l'ellipse; & le rayon avec lequel on doit décrire le cercle de la projection, quand on a trouvé le centre qui convient à un pays quelconque: en voici une plus détaillée pour les passages de Vénus.

TABLE

TABLE de la distance qu'il y a entre le centre de la projection, & le centre de l'ellipse décrite pour 22° 42′ de déclinaison, avec le rayon de la projection, pour différentes latitudes.

Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de projection.	Deg. de latit.	Distan. des centres.	Rayon de project.
0	0	1000	24	411	1095	48	1025	1494
2	32	1001	26	450	1112	50	1099	1556
4	65	1002	28	491	1132	52	1181	1624
6	97	1006	30	533	1155	54	1270	1701
8	130	1010	32	577	1179	56	1368	1788
10	163	1015	34	622	1206	58	1476	1887
12	196	1022	36	670	1236	60	1598	2000
14	230	1031	38	721	1269	62	1735	2130
16	265	1040	40	774	1305	64	1892	2281
18	300	1051	42	831	1346	66	2072	2459
20	336	1064	44	891	1390	68	2283	2669
22	373	1079	46	955	1449	70	2535	2924
24	411	1095	48	1025	1494	72	2839	3236

Dans le cas où la déclinaison du soleil sera différente, on se servira toujours de la deuxième colonne qui contient le rayon de projection pour différens pays; mais pour avoir la distance des centres il faudra multiplier les nombres de la premiere colonne par le cosinus de la déclinaison donnée, divisé par le cosinus de 22° 42′, qui est la déclinaison employée dans la table précédente, parce qu'il faudra détruire la multiplication par cos. 22° 42′ & la faire par le cos. de la nouvelle déclinaison (1862).

2078. L'ellipse de la *figure* 127 a été décrite assez en grand pour qu'on puisse y faire toutes les opérations précédentes dans les passages de Vénus, en se servant de l'échelle qui est à côté, dans la figure 128; cette échelle suppose la différence des parallaxes horizontales de 26″, parce que la figure avoit été gravée avant le passage de 1761, dans un temps où l'on croyoit la parallaxe du soleil un peu plus grande qu'elle n'est réellement, mais l'explication sera la même, & chacun ayant choisi le rayon de projection dont il voudra faire usage, pourra le diviser de maniere qu'il réponde à 22″ & $\frac{6}{10}$ qui est la différence des parallaxes, en supposant celle du soleil de 9″.

Explication d'une figure par la laquelle on trouve, sans aucun calcul, tous les effets de la Parallaxe sur les passages de Vénus, dans tous les pays de la terre (a).

2079. Les différentes sortes d'observations que l'on a faites dans les passages de Vénus sur le soleil, en 1761 & en 1769, sont toutes affectées des parallaxes en différentes manières; le calcul de ces parall. est d'une extrême longueur par les méthodes ordinaires; mais il devient de la plus grande facilité par l'opération graphique, dont nous allons donner l'explication.

Fig. 127.

Je décris une ellipse *hVGP* (*fig.* 127), dont le grand axe est au petit, comme le sinus total est au sinus de la déclinaison du soleil, qui est de 22° 42′, ou à peu-près, dans les passages de Vénus sur le soleil qui arrivent au mois de Juin; on a divisé cette ellipse en temps, de deux en deux minutes, pour avoir à chaque instant la situation de Paris sur son ellipse de projection.

Parallaxe de hauteur.

2080. Si *P* est le lieu de Paris sur son parallèle le 6 Juin à 8h 15′ du matin, & *C* le centre de la projection pour Paris, la ligne *PC* tirée au centre de la projection représentera la parallaxe de hauteur (1834); si l'on porte la longueur de cette ligne *PC* sur l'échelle de 49° de latitude, près de laquelle est marqué Paris, (*fig.* 128), l'on verra qu'elle est de 19″. Ainsi la parallaxe de hauteur de Vénus au soleil, à 8h 15′ du matin, étoit de 19″ à Paris; en supposant 26″ pour la différence des parall. horiz. comme dans l'échelle de la *figure* 128.

Fig. 128.

Parallaxe d'ascens. droite.

2081. Pour trouver la parallaxe d'ascension droite on abaissera une perpendiculaire *PZ* (*fig.* 127) du point *P* où est situé Paris, sur le parallèle à l'équateur, mené par le point *C* qui est le centre de la projection pour Paris; la ligne *CZ* comprise depuis le centre jusqu'à cette perpendiculaire étant portée sur l'échelle (*fig.* 128), doit se trouver de 14″. C'est la parallaxe d'ascension

(a) Il y a eu quelques exemplaires des articles suivans publiés sous le nom de M. de l'Isle, à qui je crus devoir en faire honneur, parce qu'il avoit eu la premiere idée de ce genre d'opérations.

droite mesurée sur un arc de grand cercle passant par le soleil (2075), telle par conséquent qu'il faut l'avoir pour réduire les observations faites au micromètre (2136), dans lesquelles on n'a pour objet que de trouver la différence d'ascension droite dans la région du soleil ; elle seroit plus grande d'un treizième, si on la divisoit par le cosinus de la déclinaison (892) pour la réduire à l'équateur. Fig. 128.

2082. La parallaxe de déclinaison n'est autre chose que la perpendiculaire elle-même tirée du point *P* sur le parallèle à l'équateur (2075) ; dans cet exemple elle doit être de $14'' \frac{1}{2}$. C'est la quantité qu'il faut ôter de la différence apparente de déclinaison entre Vénus & le soleil, observée à Paris le 6 Juin 1761 à 8h 15′ du matin, déjà corrigée par la différence des réfractions (2546 & suiv.), pour avoir cette vraie différence de déclinaison. Parallaxe de déclinaison.

2083. On trouvera de la même manière la parallaxe de longitude & de latitude au moyen de la ligne *AC* marquée *parallèle à l'écliptique* sur la *figure* 127, elle fait avec la parallèle à l'orbite de Vénus, un angle égal à l'inclinaison relative qui étoit, en 1761, de 8° 29′. Sur ce diamètre qui représente une portion de l'écliptique, on abaissera du point *P* une perpendiculaire *PB*, qu'on trouvera dans l'exemple proposé de 16″ ; ce sera la parallaxe de latitude. La distance entre cette perpendiculaire & le centre *C* de la projection, mesurée le long de l'écliptique, sera la parallaxe de longitude ; elle se trouve de $12'' \frac{1}{2}$. Je ne vois pas qu'on ait besoin de ces deux sortes de parallaxes dans la réduction & dans le calcul des observations ; mais j'ai voulu les expliquer pour qu'il ne manquât rien à l'usage & à l'intelligence de la figure que je propose. Parallaxe de longit. & de latitude.

2084. La parallaxe de distance est une des plus nécessaires, puisque les meilleures observations que l'on ait faites dans les passages de Vénus, sont celles où l'on a employé des héliomètres, pour observer la distance de Vénus au bord du soleil (2131), & que ces observations seroient difficiles à réduire sans le secours de l'opération graphique dont il s'agit. Pour trouver la parallaxe de Parallaxe de distance.

Fig. 127. distance, on est obligé d'avoir égard à la situation de Vénus ; on tirera par le centre de l'ellipse une ligne *EM* parallèle à l'orbite, & une autre ligne *MN* perpendiculaire à l'orbite ; ayant pris *EM* pour représenter la plus courte distance des centres, 9′ 30″, on prendra sur *MN* la valeur de 4′ par heure, pour diviser cette orbite *MN*, & marquant au point *M* le temps observé du milieu du passage, (c'étoit 5^h 30′ en 1761), on divisera *MN* en heures & minutes (2074); le point *N*, par exemple, répondra à 8^h 15′, qui étoit 2^h 45′ avant le milieu du passage ; alors on tirera une ligne occulte *EN*, & par le centre *C* de la projection une ligne *CH* parallèle à *EN*; la perpendiculaire *PH* abaissée du point *P* sur cette ligne sera la parallaxe de distance ; si dans l'exemple précédent on porte *PH* sur l'échelle qui convient à la latitude de Paris, on la trouvera d'environ $3'' \frac{1}{2}$ pour $8^h \frac{1}{4}$ du matin. Cette parallaxe de distance doit se retrancher de la distance apparente de Vénus au centre du soleil, parce que le point *H* est au midi du point *P*, aussi bien que Vénus ; si le point *H* n'étoit pas entre le point *P*, & la parallèle à l'orbite de Vénus, tirée par le centre *C* de la projection, il faudroit ajouter la parallaxe à la distance apparente.

Parallaxe pour 1769. 2085. La ligne *MN* doit être tirée plus loin du centre *E* de l'ellipse, si l'on emploie cette figure pour le passage de 1769, parce que la plus proche distance des centres étoit de 10′ 10″ (2147) : on pourra prendre *EO* au lieu de *EM*, & par ce moyen l'on conservera les divisions de la ligne *NM* pour l'entrée, & on les portera au-dessous de la ligne *EO* pour la sortie de Vénus ; le point *O* répondra à 10^h 36′ du soir, milieu du passage à Paris.

Pour l'entrée à Paris. 2086. Je suppose qu'à 7^h 20′ du soir, temps où Vénus commençoit à paroître sur le soleil à Paris, l'on veuille avoir la parallaxe de distance ; on tirera une ligne du centre *E* au point *D* qui répond au-dessus du point *O*, à 3^h 16′ de distance au milieu du passage ; du centre *C* de la projection on tirera une perpendiculaire

ſur cette ligne *DE* prolongée à gauche ou au-deſſous du point *E*, cette perpendiculaire va ſe diriger vers le lieu de Vénus ſur ſon orbite pour $7^h\ 20'$; alors du point *R* qui eſt à $7^h\ 20'$ du ſoir ou à la gauche de l'ellipſe, l'on tirera une perpendiculaire *RV* ſur cette derniere ligne, ou ce qui revient au même, une parallèle à *ED*; le point *V* où elle rencontrera *CV*, marquera l'endroit qui paroît auſſi éloigné de Vénus que le point *R* où Paris eſt projetté, & la diſtance *CV* du centre *C* au point *V* ſera la parallaxe de diſtance. On peut auſſi tirer par le centre *C* une parallèle à *DE*, & la perpendiculaire abaiſſée du point *R* où eſt Paris ſur cette parallèle à *ED* ſera la parallaxe de diſtance; cette parallaxe étant portée ſur les diviſions du rayon de projection pour Paris, l'on y verra qu'elle contient $26''$, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt à très-peu-près égale à la parallaxe horizontale. *Fig.* 127.

2087. Le commencement de la ſortie à Péteſbourg eſt arrivé à $3^h\ 27'\ 25''$ du matin, & $2^h\ 59'$ après le milieu du paſſage. Pour trouver la parallaxe de diſtance à ce moment-là, je tire du centre *E* de l'ellipſe une ligne au point *Q* qui répond à $2^h\ 59'$ au-deſſous du point *O*; par le point *K* marqué 60°, qui eſt le centre de la projection pour Péterſbourg, je tire une parallèle à cette ligne *EQ*; du point *G* où eſt Péterſbourg ſur ſon parallèle à $3^h\ 27'$ du matin j'abaiſſe une perpendiculaire *GT* ſur la derniere parallèle *KT*, & *GT* eſt la parallaxe de diſtance; en la portant ſur l'échelle de 60°, je trouve $19''$, qui eſt la parallaxe de diſtance, pour la ſortie, en ſuppoſant toujours que la parall. horiz. ſoit de $26''$; il y auroit $16''$ ſeulement, ſi l'on avoit ſuppoſé la parallaxe relative de $22''\ 6$, & que l'échelle de la figure 128 eût été diviſée en $22\frac{1}{2}$ parties, au lieu de l'être en 26. Pour la ſortie à Péterſbourg.

2088. Dans les exemples précédens le point *H* où aboutit la perpendiculaire *PH* eſt au midi du point *P* pour l'entrée, c'eſt une preuve que l'entrée apparente eſt accélérée par l'effet de la parallaxe de diſtance *PH*; & tant que le point *T* ou la ligne *KT* eſt à la gauche ou au midi du lieu *G* pour la ſortie, cette ſortie eſt également

Fig. 127. accélérée; cela revient au même que la règle dont j'ai déja parlé (2066).

Au lieu du grand nombre d'échelles qui sont dans la figure 128, on pourroit se contenter d'une seule, ou même des divisions du demi-grand axe de l'ellipse, en faisant seulement cette règle de trois: la sécante de la latitude pour un rayon 1000 est à la différence des parallaxes horizontales, comme le nombre de millièmes trouvées sur les divisions du demi-grand axe de l'ellipse est à leur valeur en secondes, ainsi dans le dernier exemple ayant trouvé 144, je dis 1996 : 26 : : 1440 : 19″, c'est la parallaxe de sortie à Pétersbourg.

Centres pour différens pays.

2089. Le centre *C* de la projection pour Paris, (*fig.* 127), est marqué par les trois lignes qui y passent; mais il doit changer si l'on calcule des observations faites sous d'autres latitudes (2076): on voit sur la ligne *ECK* les points qui répondent à différentes latitudes, c'est-à-dire, les centres de la projection qu'il faut substituer au point *C*, & par lesquels on doit tirer les parallèles à l'écliptique & à l'équateur, c'est-à-dire, toutes les lignes qui donnent les parallaxes. Les degrés marqués au-dessus du centre *E* de l'ellipse sont pour les pays situés au midi de l'équateur à des latitudes australes, & quoiqu'ils ne soient marqués que jusqu'à 30°, il est aisé d'étendre les divisions en transportant vers le haut, sur un papier qu'on y ajoutera, les divisions qui sont au-dessous du centre de l'ellipse. Quand on aura trouvé une parallaxe quelconque pour une latitude différente de celle de Paris, on portera cette ouverture de compas dans l'échelle générale (*fig.* 128), sur celles des lignes verticales qui sera marquée de la latitude dont il s'agit; & l'on y verra sa valeur en secondes & dixièmes de secondes, parce que la projection ne donne les parallaxes qu'en supposant le rayon de la projection égal à la parallaxe horizontale.

Inconvénient du papier.

2090. Le racornissement du papier est un obstacle à l'exactitude des figures imprimées; Hévélius s'en plaignoit à l'occasion de ses phases de la lune, (*Selenogr. pag.* 214): le papier que l'on mouille pour l'impression,

se dilate & s'étend, il se comprime plus ou moins, suivant sa qualité & son épaisseur; il se retire ensuite inégalement lorsqu'on le fait sécher, & la proportion n'est plus la même entre sa longueur & sa largeur; Hévélius en avertissoit le lecteur pour qu'on ne l'accusât pas d'avoir mal dessiné la situation des taches de la lune, & d'avoir fait ovales des figures qui devoient être circulaires.

2091. Dans une des épreuves de la grande ellipse, (*fig.* 127), j'ai observé que les extrémités du grand axe de l'ellipse étoient plus près du centre de l'ellipse sur le papier que sur le cuivre, de 1 ligne $\frac{1}{4}$ d'un côté, & 2 lignes $\frac{1}{4}$ de l'autre, les sommets du petit axe étoient rapprochés du centre, l'un de $\frac{1}{3}$, l'autre de $\frac{1}{5}$ de ligne; le centre de la projection pour Paris étoit rapproché d'une ligne du centre de l'ellipse; ainsi le papier s'étoit rétréci dans toutes ses parties, mais beaucoup plus dans sa longueur, qui est la direction de l'enverjure de la forme, parce qu'il a beaucoup moins de densité dans le sens des fils de l'enverjure, que dans le sens des pontuseaux, où les fils étant serrés l'un contre l'autre, ont donné à la pâte plus de fermeté & de consistance, (Voyez l'*Art de faire le Papier*, que j'ai donné en 1760), on pourroit croire que le rouleau de la presse contribue à l'extension du papier, mais l'expérience fait voir que les estampes ne laissent pas de se rétrécir même dans le sens où la presse auroit dû les étendre. *Fig.* 127. Manière d'y remédier.

2092. Pour y remédier dans les cartes géographiques, *Guillaume de l'Isle*, premier géographe du Roi, avoit eu l'attention d'altérer sur ses cuivres les dimensions des cartes, & de changer ses cercles en ovales, de la quantité dont le papier avoit coutume de se rétrécir, en longueur plus qu'en largeur. *Joseph Nicolas de l'Isle* en faisant graver la figure que l'on voit ici, a pris une autre précaution qui n'est pas moins bonne, pour mettre chacun à portée de remédier à l'irrégularité de la figure imprimée : on voit tout autour de la figure un rectangle *AABB*, dont la longueur *AA* ou *BB*, a été faite exactement de 23 pouces sur le cuivre, & la hauteur *AB*

de 17 pouces. Il arrivera communément par le tirage que la longueur se réduira à 22 pouces 8 lignes, & la hauteur à 16 pouces 10 lignes; mais comme l'on humecte nécessairement la figure en la collant sur un carton, il sera aisé de l'étendre de manière qu'elle remplisse exactement un rectangle fait sur le carton, dont un côté soit à l'autre comme 17 est à 23 : on la laissera sécher dans cet état, & elle conservera ses dimensions proportionnelles, parce que le carton s'opposera suffisamment à la contraction du papier (a).

DE L'ENTRÉE ET DE LA SORTIE DE VÉNUS pour tous les pays de la Terre.

2093. C'EST une partie essentielle du calcul des passages de Vénus sur le soleil, que de déterminer à la fois pour tous les pays de la terre, & cela par une méthode facile, l'effet de la parallaxe, qui fait paroître l'entrée ou la sortie plutôt ou plus tard. M. de l'Isle fut le premier qui eut l'idée de marquer sur une seule Mappemonde, au moyen d'un certain nombre de cercles, la quantité dont l'entrée & la sortie arrivent dans les différens pays plutôt ou plus tard que pour le centre de la terre. Il l'exécuta d'abord pour le passage de Mercure, en 1753, ensuite pour celui de Vénus, en 1761, & j'en ai tracé une semblable pour le passage de 1769 (b), dont il y a un petit extrait dans la *figure* 133.

2094. En expliquant cette Mappemonde, je pris pour exemple le passage de Vénus qui étoit annoncé pour 1769, dont j'avois fait le calcul & construit la figure par une méthode particulière. J'en donnai l'explication & les calculs à l'académie, lorsqu'on y étoit occupé à traiter du passage de 1761 & de celui de 1769, en discutant les avantages qu'il pourroit y avoir dans l'un & l'autre (Voyez l'*Hist. de l'acad. pour* 1757, *pag.* 100, *& les Mém. pag.* 232); je conserverai ici le même exemple, mais j'y ajouterai ensuite les résultats de l'observation.

(a) On en trouvera encore quelques exemplaires chez *Latré*, graveur, rue S. Jacques.

(b) Elle se trouve gravée en grand, avec tous les détails & les distinctions de couleurs, à Paris, chez *Latré*.

2095.

2095. Je calculai d'abord les circonstances de ce passage par la méthode expliquée ci-dessus (2044); en corrigeant les tables de Vénus par l'observation de 1761, je trouvai le temps de la conjonction vraie en *C*, (*fig.* 129), le 3 Juin 1769 à 10^h 10′ du soir, sa longitude étant de 8^s 13° 27′ 10″, la latitude géocentrique 10′ 13″ 4 boréale (a), l'entrée du premier bord de Vénus en *E* à 7^h 21′, & la sortie du second bord de Vénus en *S* à 13^h 44′, la perpendiculaire *TM* = 10′ 7″; la différence des parallaxes horizontales 22″ 6, en supposant celle du soleil de 9″; le mouvement horaire 4′ 0″ 11 (2058); l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique étoit de 8° 28′ 59″ & son inclinaison sur l'équateur (ou la somme de 8° 29′ & de l'angle de position) de 15° 32′. Circonstances du passage de 1769. *Fig.* 129.

La projection *TA* de la terre étant vue sous un angle de 22″ 6, la distance *TA* est de 22″ 6, tandis que *TS* est de 15′ 47″, c'est la valeur que je supposois au demi-diamètre apparent du soleil; ainsi le lieu de la terre, dont la projection se trouve en *A*, & qui rapporte le centre du soleil au point *A* (1797), verra Vénus éloignée du centre du soleil de 15′ 23″ 4 seulement, ou de la quantité *SA*, lorsque le centre de Vénus étant en *S*, quittera véritablement le soleil pour un observateur qui répondroit au centre *T*; il faudra donc que Vénus en avançant dans son orbite soit arrivée en *V*, pour que la distance *VB* du centre du soleil qui paroît en *B* (pour le lieu de terre dont la projection est au point *B*), & du centre de Vénus qui est en *V* soit de 15′ 47″, c'est-à-dire, que *VD* soit de 22″ 6, aussi bien que *TB*; alors le pays de la terre projetté en *B* verra le centre de Vénus sortir de dessus le soleil, puisque sa distance apparente au centre du soleil sera égale au demi-diamètre du soleil (1800); & le point *B* sera le dernier de tous les points de la terre, d'où l'on verra la sortie.

2096. Par la même raison, si l'on prend une ligne *TN* qui soit plus petite de 22″ 6 que *TS*, ensorte que

(a) Par les observations, j'ai trouvé la conjonction à 10^h 13′ 40″ & la latitude 10′ 16″ (2155).

Fig. 129. la ligne entiere *NTI* soit égale au demi-diamètre du soleil ; le point de la terre dont la projection est actuellement en *I* verra Vénus sortir du soleil, quoiqu'elle ait encore tout l'espace *NS* à parcourir pour en sortir réellement par rapport au centre *T* de la terre ; ainsi le point *I* sera le premier de tous les points de la terre qui verra le centre de Vénus sortir du soleil, parce qu'il verra Vénus éloignée du soleil de la quantité *IN*, égale au demi-diamètre du soleil, dans le temps qu elle sera encore en *N*; de même que le point *B* sera le dernier de tous. Le point *I* n'est pas diamétralement opposé au point *B*, mais la différence est assez légère pour pouvoir se négliger dans une opération purement graphique ; d'ailleurs, il n'en résulteroit pas 5″ d'erreur sur les temps que l'on cherche, & il s'en faut beaucoup que nous soyons assurés d'une si grande exactitude, dans ces sortes de prédictions.

2097. Ce que nous avons dit des points *B* & *I* pour la sortie de Vénus, doit s'entendre aussi des points *H* & *K* pour l'entrée de Vénus sur le soleil : le point *H* est le premier de tous les pays de la terre qui verra Vénus entrer sur le soleil ; le point *K* sera le dernier de tous : je suppose les points *H* & *K* diamétralement opposés par la raison que je viens de dire (2096). On trouveroit facilement les longitudes & les latitudes géographiques des pays de la terre qui sont en *A*, en *I*, en *H* & en *K* par les méthodes que nous avons employées pour les éclipses de soleil (1930).

2098. La différence entre le temps où le point *H* verra l'entrée de Vénus, & le temps où elle arrivera pour le point *K*, dépend de la distance *HK* qui est de 45″ ; il en est de même de la sortie. Il faut que Vénus, qui a paru quitter le soleil pour le point de la terre dont la projection est en *I*, s'éloigne encore de 45″, pour pouvoir paroître de même à l'observateur situé en *B* ; ainsi l'on connoîtra la différence de temps entre ces deux phases, si l'on trouve combien il faut de temps à Vénus pour s'éloigner du centre du soleil de cette quantité de 45″.

Pour trouver exactement cet intervalle de temps, il

faut résoudre séparément les deux triangles *TMN*, *TMV*; on connoît la perpendiculaire *TM*, avec les hypothénuses, on cherchera les autres côtés. Pour faire ce calcul, je supposerai que le point *N* & le point *V* soient ceux du dernier contact extérieur de Vénus en 1769, le demi-diamètre de Vénus étant supposé de 29″ (2157), l'on aura 16′ 16″ pour la somme des demi-diamètres du soleil & de Vénus; mais puisqu'il s'agit du contact extérieur des deux bords, l'hypothénuse *TN* est plus petite de 22″ 6, & *TV* plus grande de la même quantité, c'est-à-dire, que *TN* est de 15′ 53″ 4, & *TV* de 16′ 38″ 6; en conséquence, on trouvera *MN* de 735″ 20, & *MV* de 792″ 94, la différence *NV* est 57″ 74; or Vénus emploie 14′ 27″ de temps à parcourir sur son orbite un arc de 57″ 74, parce que son mouvement apparent est de 4′ par heure: ainsi le plus grand effet de la parallaxe est de 14′ 27″, en supposant de 9″ la parallaxe horizontale du soleil. Je supposerai cette quantité de 15′, en nombres ronds, pour la facilité des opérations suivantes, c'est-à-dire, que je supposerai 15′ de temps entre la sortie de Vénus pour le point *I* de la terre, & sa sortie pour le point *B*, comme on les auroit réellement si la parallaxe du soleil étoit de 9″ $\frac{1}{3}$, à peu-près comme la donne l'observation faite à la Baie d'Hudson (2149). En ôtant 15′ de l'entrée pour le centre de la terre & de plus la valeur du demi-diamètre de Vénus, on trouvera que le point *H* a le premier contact à 7^h 14′ du soir.

Fig. 129.

Le plus grand effet de la parallaxe.

2099. Considérons maintenant des points de la terre *Z*, *F*, & *Y*, qui sont éloignés du point *E* d'une quantité *EF*, plus grande que *EH* d'un tiers du diamètre *HK* de la projection; tous ces pays verront l'entrée de Vénus 5′ plus tard que les pays situés en *H*; car puisque du point *H* au point *K*, il y a 15′ de différence, il doit y en avoir cinq du point *H* au point *F*; & tous les points qui sont sur la ligne ou sur l'arc *ZFY* étant à même distance du point *E*, verront la même distance apparente des centres de Vénus & du soleil, & Vénus entrera au même instant sur le soleil pour tous les pays de la terre projettés sur l'arc *ZFY*; je pren-

drai l'arc *ZFY* pour une ligne droite, à cause de son extrême petitesse, en comparaison de *EF*.

2100. Si l'on partage le diamètre *HK* en 15 parties égales (comme nous l'avons fait séparément dans la *figure* 130 pour éviter la confusion), & que le point *H* ait vu l'entrée lorsqu'il étoit 7^h 14′ à Paris, le pays de la terre qui répond au premier point de division verra l'entrée une minute plus tard ou à 7^h 15′; le second point la verra à 7^h 16′, &c. J'ai marqué à la droite du diamètre *HK* les minutes de l'entrée, & à gauche celles de la sortie, pour les différens points de la terre, qui répondent aux 15 portions du diamètre de la projection.

Fig. 130.

2101. Si donc on prend un globe terrestre d'un diamètre égal à *HK* (*fig.* 129); qu'on prenne l'ouverture ou la distance *GH* (*fig.* 130), & qu'on décrive un cercle en prenant pour centre ou pour pole le point du globe que représentoit le point *H* de la projection; on tracera aisément sur ce globe un petit cercle, dont la circonférence marquera tous les pays de la terre, où l'entrée doit commencer à 7^h 19′. Tous ces pays de la terre étoient marqués sur la projection (*fig.* 129) par le cercle *ZFY*, ils étoient par conséquent à une distance du bord de Vénus, égale à 16′ 16″, somme des demi-diamètres de Vénus & du soleil: ainsi ils ont tous observé au même instant le premier contact des deux bords: j'appellerai *cercles d'entrée* ces petits cercles décrits sur le globe, & qui passent sur tous les points où l'entrée paroît au même instant.

Cercles d'entrée.

2102. Ainsi la premiere opération préliminaire consiste à trouver sur le globe terrestre le point *H*, (*fig.* 129), qui doit servir de pole à tous ces cercles d'entrée que nous avons à décrire, & qui seront à peu-près parallèles entre eux; on peut trouver ce point avec le globe même, & l'on peut aussi y employer le calcul: on cherchera d'abord l'angle *ETM* qui est de 50° 48′. Si l'on en ôte l'angle *OTM* de 15° 32′ (2095), on aura l'angle *OTE*, ou l'arc *HX* de la terre qui en est la mesure, égal

Trouver les poles d'entrée. *Fig.* 129.

à 35° 16′; & si on les ajoute ensemble, on aura l'arc *XA*, de 66° 20′. Fig. 128

2103. On prendra un globe terrestre monté sur son horizon; on élévera le pole de 22° 36′, qui est la déclinaison de Vénus; & dans cet état l'horizon du globe représentera le cercle d'illumination (1829), ou un plan de la terre parallèle au plan de projection. Car le soleil étant dans l'hémisphère boréal, est plus près du pôle arctique, il faut que ce pole soit toujours dans la partie illuminée, & avancé de 22° sur le cercle d'illumination qui dans tous ses points est à 90° du soleil. Si la déclinaison de Vénus étoit méridionale, ce seroit le pole antarctique ou méridional qu'il faudroit élever au-dessus de l'horizon.

2104. Le globe étant ainsi élevé, suivant la déclinaison du soleil, il faut le tourner suivant l'heure qu'il est. Par exemple, à 7^h 20′ temps vrai à Paris, le soleil est éloigné de 110° du méridien; il faut donc faire tourner le globe d'occident en orient, comme tourne la terre, jusqu'à ce qu'il y ait 110° de l'équateur entre Paris & le méridien; on suppose le soleil fixe dans ce méridien universel, comme nous l'avons fait pour les éclipses de soleil.

2105. Les pays de la terre qui sont à 110° du méridien de Paris vers l'occident ont 270° de longitude, en prenant 20° pour la longitude de Paris, comme les géographes ont coutume de le faire (49); il n'y a donc qu'à tourner le globe, ensorte que le point marqué à 270° de longit. terrestre se trouve sous le méridien. Dans cet état, le globe sera dans la position où le verroit un observateur placé dans le soleil, quand il est à Paris 7^h 20′ du soir; l'horizon de ce globe représentera le cercle *HBKI* de la *fig.* 129, ou le plan de projection.

2106. Tous les pays situés alors dans l'horizon de notre globe artificiel du côté de l'orient auront le soleil couchant; tous ceux qui se trouveront à l'occident verront le soleil se lever. Ce cercle d'illumination passe dans la partie orientale de la France & dans la mer Baltique; Entrée au lever ou au coucher du soleil.

il passe au nord de la Sibérie, de-là il s'étend en Asie jusqu'à la terre d'Yesso; il entre dans la mer du Sud près des Isles Marianes, va rejoindre l'Amérique méridionale vers le détroit de le Maire, l'Afrique vis-à-vis du Cap-verd, & enfin la France d'où nous étions partis. Ces points sont marqués dans la *fig.* 133 par le cercle *FGO BAD*, tracé sur la Mappemonde; & ils désignent d'un côté tous les pays qui verront l'entrée de Vénus au coucher du soleil, de l'autre tous ceux qui verront l'entrée au lever du soleil; en négligeant pour ce moment l'effet des parallaxes. Si l'on prend à l'orient du méridien un arc de $35^\circ \frac{1}{4}$ (2102) sur l'horizon du globe, en partant du nord, cet arc se terminera vers le midi de la Baviere, entre Munich & Inspruck, à $28^\circ \frac{1}{3}$ de longitude & $47^\circ \frac{1}{2}$ de latitude; c'est le pays dont la projection est au point *H* (*fig.* 129); c'est l'endroit d'où il faut partir, comme d'un pole pour décrire les cercles d'entrée dont nous avons déja commencé de parler (2101), & que l'on voit dans la *fig.* 133.

Fig. 133. Fig. 129.

2107. L'on trouvera par la même méthode le pole *B* de sortie à 20° de latit. boréale, & $73^\circ \frac{1}{2}$ de longit. ce qui tombe en Arabie près du détroit d'Ormus, en mettant le globe de maniere qu'il soit à Paris $13^h\ 43' \frac{1}{2}$. On remarquera aussi quels sont alors les pays qui se lèvent & qui se couchent, afin de tracer sur la mappemonde le cercle d'illumination au moment de la sortie vue du centre de la terre, qui est représenté par les arcs *CAI* & *EGH*; ainsi les quatre portions de cercles *FGB*, *BAD*, *EGH*, *CAI* marqueront tous les points où l'on doit voir l'entrée & la sortie au moment du lever ou du coucher du soleil, & serviront par conséquent de limites pour les autres cercles que nous avons à décrire, car il sera inutile de marquer les cercles d'entrée sur les pays où le soleil est couché, quand Vénus entre sur son disque.

Fig. 133.

2108. Dans tous les pays qui sont au-dessus de *FGB*, c'est à-dire, au nord de l'Europe & de l'Asie ou au-dessus de *BAD*, c'est-à-dire, dans toute l'Amérique, le soleil étoit levé, & par conséquent on a vu l'entrée

de Vénus sur le soleil. Chaque pays, par le mouvement diurne de la terre, avance vers l'orient; ceux qui sont dans ce moment sur la ligne *FG* seront à droite ou au-dessous de cette ligne un instant après, ils seront hors du cercle d'illumination, & ne verront plus le soleil: ainsi la ligne *FG* est celle des points où l'on verra l'entrée au coucher du soleil; il en de même des pays situés sur l'arc *AD*, en avançant vers l'orient ou vers la droite ils cesseront de se trouver sur le cercle d'illumination *AD*, & perdront le soleil de vue: ainsi l'entrée de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Au contraire les pays situés sur *GB* & sur *BA*, en avançant vers l'orient, monteront alors sur le cercle d'illumination, & verront l'entrée au lever du soleil, comme nous l'avons marqué sur les arcs *GB* & *BA*. Fig. 133.

2109. On trouvera par une opération semblable le cercle d'illumination, pour le moment de la sortie du centre de Vénus, ou pour $13^h\ 44'$ au méridien de Paris. L'angle horaire étant de 206°, les pays situés à 174° de longitude seront alors dans le méridien, car $360 - 206 + 20 = 174$; on disposera donc le globe, élevé de 22°, ensorte que le 174e degré de longitude soit sous le méridien; alors on verra du côté de l'orient, dans l'horizon, tous les pays où la sortie doit paroître au coucher du soleil, & à l'occident tous ceux où la sortie doit arriver au soleil levant; ces lignes sont marquées *EGH* & *CAI* sur la mappemonde. Les pays situés sur *CI*, en avançant vers l'orient, quitteront alors le cercle d'illumination, & perdront de vue le soleil; ainsi la sortie de Vénus arrivera pour eux au coucher du soleil. Cette ligne s'étend depuis le Groenland, au travers de l'Amérique septentrionale & du Méxique, jusques dans la Mer du Sud. Au contraire les lieux situés sur la ligne *EGH* & qui, par le mouvement diurne, avancent vers l'orient s'élèvent au-dessus du cercle d'illumination *EGH*, & verront la sortie au lever du soleil. La ligne qui passe dans tous ces points s'étend depuis le nord de l'Europe, au travers de la Turquie & de l'Arabie, jusques dans la mer des Indes, & finit dans les terres australes.

Fig. 133. Le point *G* où se coupent les lignes *FGB*, *EGH*, voit l'entrée au coucher du soleil, & la sortie le lendemain matin au lever du soleil; mais la durée de ce passage y est invisible, c'est ce qui arrivoit vers Marienbourg, en Livonie. Le point *A* où se coupent les deux lignes *CAI* & *BAD* voyoit l'entrée au soleil levant, & la sortie au coucher du soleil, on y voyoit par conséquent toute la durée du passage.

Dans tout l'espace *FGBEF*, on a vu l'entrée de Vénus aussi bien que dans tout l'espace *BCDAB*. Dans l'espace *HBEGH* & *CBIAC*, on a vu la sortie, ainsi les espaces communs à tous les deux; sçavoir, *CBAC* & *BGEB* ont vu l'un & l'autre, c'est-à-dire, l'entrée & la sortie. Dans les espaces *ADCA* & *FGEF* on ne voyoit que l'entrée. Dans les espaces *EGHB* & *BAI*, on ne voyoit que la sortie. Dans les parties *FGHF*, *IADI*, l'on ne voyoit ni l'un ni l'autre. Dans les mappemondes que M. de l'Isle a publiées pour les passages de Mercure & de Vénus, en 1753 & 1761, de même que dans la mienne pour 1769, ces différens espaces sont désignés par des couleurs différentes; on fait enluminer de bleu les pays où se voit l'entrée seulement, de jaune ceux où il n'y a de visible que la sortie, & de rouge ceux où les deux phases peuvent être observées.

2110. Il s'agit maintenant de tracer sur la carte les cercles d'entrée & de sortie pour 7^h 17′, 20′, 23′, 26′, afin de connoître les pays où l'effet de la parallaxe est le plus considérable, & de pouvoir choisir en conséquence la position la plus favorable pour l'observer.

Supposons que le cercle *HGK* *fig.* 130, soit exactement de la même grandeur que le globe dont on veut se servir, par exemple, de six pouces; que le point *H* représente le premier de tous les pays de la terre où se voit l'entrée, c'est-à-dire, où elle s'apperçoit dès 7^h 14′, tandis qu'au point opposé *K* elle se voit seulement à 7^h 29′; dans les points comme *G*, on la voit à des temps intermédiaires entre 7^h 14′ & 7^h 29′. On divisera *HK* en 15 parties égales, puisque nous supposons 15′ de temps pour

pour la différence entiere des deux points *H* & *K* (2098); par chacun de ces points de division, on tirera des perpendiculaires au diamètre *HK*, elles intercepteront des arcs *HG*, qui feront les largeurs des cercles d'entrée & de fortie pour les différens temps marqués fur le diamètre *HK*; ainfi prenant avec un compas la diftance du point *H* au point *G*, marqué par la ligne de la cinquième divifion, on prendra cette même diftance qui eft d'environ 70° 32′ fur le globe, puifque fon finus verfe eft un tiers du diamètre; avec cette ouverture, partant du pole que nous avons déterminé près de Munich (2106), & faifant tourner circulairement une pointe du compas, on formera un cercle qui coupe l'équateur à 330° de longitude, le premier méridien à 17° de latitude auftrale, le méridien de 60° de longitude à 16° de latitude auftrale, celui de 90° à 2° ½ de latitude boréale, celui de 120° à 29° de latitude boréale, le méridien de 180° de longitude, fur le parallèle de 59°, & celui de 290° fur le parallèle de 35°. Il fuffit d'avoir trois de ces points fur un hémifphère, on les marquera fur la mappemonde par leurs longitudes & leurs latitudes; on fera paffer un cercle par ces trois points, & ce même cercle paffera néceffairement fur tous les autres points de l'hémifphère qui appartiennent au même cercle, & où l'entrée de Vénus doit arriver à 7ʰ 19′ comptées fur le méridien de Paris. *Fig.* 130.

2111. Nous parlons de ces cercles décrits fur la mappemonde, comme des cercles décrits fur le globe; parce qu'on verra que dans la projection des mappemondes, qui eft la projection ftéréographique ordinaire, tous les cercles du globe deviennent des cercles, quoique plus ou moins grands fuivant leur fituation (3874); ainfi nous fommes affurés que le même trait de compas, qui paffe fur trois points de notre mappemonde, paffera auffi par tous les autres lieux, qui fur le globe terreftre, fe trouvoient appartenir au même cercle. Projection ftéréographique.

2112. La mappemonde repréfente le globe coupé en deux parties différentes, ce qui nous a obligé de cou-

per aussi en deux portions la plupart des cercles d'entrée. Par exemple, on voit sur l'hémisphère du nouveau
Fig. 133. monde (*fig.* 133), une portion *LM* du cercle d'entrée de 7^h 17′, & l'on voit encore à gauche dans l'autre hémisphère une portion *NO* du même cercle, marquée de même 7^h 17′. Chacune de ces deux portions exige 3 points pour la déterminer; mais on voit que le point *N* & le point *L* ne sont qu'un même point, l'un & l'autre étant sur le premier méridien vers 71° de latitude; & d'ailleurs, quand on a son compas ouvert sur le globe, il est aisé de marquer par longitude & latitude autant de points qu'on juge à propos, & d'en prendre trois dans l'hémisphère oriental, & trois dans l'hémisphère occidental, si cela est nécessaire. Il seroit inutile de marquer sur notre mappemonde la partie d'un cercle d'entrée qui passe sur les pays où le soleil n'est pas levé, & où par conséquent l'on ne peut voir l'entrée de Vénus sur le soleil; c'est pourquoi j'ai terminé tous les cercles d'entrée à la ligne *GOBAD* qui sur la mappemonde sépare les pays où l'on voyoit le soleil à 7^h 14′ de ceux où on ne le voyoit pas.

Cercles de sortie. 2113. Les cercles de sortie se décriront de la même manière lorsqu'on aura les poles de sortie, (art. 2107).
Fig. 129. Le pole *B* (*fig.* 129), se trouve vers Mascate en Arabie; le point ou pole opposé *I* se trouve dans la Mer du Sud; celui-ci voit la sortie à 13^h 36′, tandis que le point *B*
Fig. 130. la voit à 13^h 51′, comme je l'ai marqué dans la *fig.* 130; la différence est encore de 15′; ainsi l'on peut prendre le cercle *HGK*, pour représenter les différens arcs dont on aura besoin pour la sortie; le point *H* étant marqué 13^h 51′, les points de division qui ont servi à marquer d'un côté 7^h 17′, 20′, 23′ & 26′, serviront à marquer de l'autre 13^h 48′, 45′, 42′, 39′, & les mêmes ouvertures de compas qui ont servi pour tracer les cercles d'entrée (2110), serviront à décrire les cercles de sortie. Le cinquième point de division du diamètre *HK*, par lequel on a tiré une perpendiculaire *GG*, a déterminé l'arc *HG* pour 7^h 19′, & il détermine l'arc *HG* pour

13^h 46′ ; l'arc *HG* étant toujours de 70° 32′. Fig. 130.

2114. Ayant tracé de même tous les cercles d'entrée & de sortie dans le passage de 1769, j'ai vu que l'entrée à *Mexico* dans la nouvelle Espagne devoit être à 7^h 21′ 10″, la sortie à 13^h 37′ 40″; ainsi la durée totale du passage y étoit de 6^h 16′ 30″; tandis qu'aux environs de Pétersbourg la durée y devoit être plus grande de 18′ $\frac{1}{4}$, je dis aux environs de Pétersbourg, c'est-à-dire un peu au nord, parce qu'à Pétersbourg on ne pouvoit voir l'entrée.

Voyages qu'il étoit utile d'entreprendre.

2115. En conséquence j'annonçai que deux observations complètes de ce passage, en 1769, dont l'une seroit faite au Méxique & l'autre au nord de Pétersbourg, nous donneroient la parallaxe avec une précision deux fois aussi grande que celle qu'on auroit pu avoir dans le passage observé en 1761, en supposant même toutes ces observations d'accord. (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 244). En effet la plus grande différence que nous eussions pu comparer, étoit de 8′ entre Tobolsk & l'Isle Rodrigues, encore falloit-il supposer qu'on connût exactement leur différence de longitude, au lieu qu'on avoit, en 1769, une différence double, indépendante de la longitude, supposé que l'on parvînt à observer la durée entiere du passage de 1769 en Laponie & au Méxique, ou en Californie ; c'est ce qui fut adopté par toutes les académies, & qui détermina les voyages dont nous parlerons en faisant l'histoire de ces observations (2146). Celles de la mer du Sud étoient encore plus importantes, puisque la durée totale du passage pouvoit s'y trouver de 25′ plus courte qu'en Laponie ; j'en avertis dans le mémoire que je publiai en 1764 sur ce passage ; mais il n'y a eu qu'un vaisseau Anglois avec lequel on ait tenté d'aller faire cette observation dans la mer du Sud, & nous ignorons encore le succès de ce voyage, (en Octobre 1770).

Méthodes pour observer un passage de Vénus, ou de Mercure sur le Soleil, & pour tirer des Observat. toutes les conséquences qui en résultent.

2116. Il y a trois sortes d'observations différentes que l'on peut faire dans un passage de Vénus & de Mercure sur le soleil ; chacune exige une méthode pour calculer ces observations, & en tirer les résultats convenables. Je ne parle que de trois espèces d'observations, parce qu'on ne peut guères employer pour un passage de Vénus que trois sortes d'instrumens ; 1°, le quart-de-cercle (2311), pour avoir les différences de hauteur & d'azimut ; 2°, le micromètre (2358), ou l'héliomètre (2433), pour avoir les distances au bord le plus proche ; 3°, le micromètre dans la lunette parallatique (2400), pour avoir les différences d'ascension droite & de déclinaison : l'explication de ces méthodes pourroit être réservée pour le XIVe livre ; mais elle devient nécessaire ici à cause des résultats que nous avons à en tirer.

Par le moyen du quart-de-cercle.

2117. Le quart-de-cercle est de tous les instrumens d'astronomie le plus familier aux astronomes, celui dont les observations sont les plus simples, la manipulation la plus aisée ; c'est en général celui que l'on doit préférer à tous, lorsqu'il est possible de l'employer : M. de l'Isle en fit sentir toute l'utilité dans le temps du passage de Mercure sur le soleil en 1723, (*Mém. acad.* 1723) ; & il est communément préférable à la lunette parallatique, pour les raisons suivantes.

Raisons de préférence pour le quart-de-cercle.

2118. Dans un quart-de-cercle les fils conservent toujours leur position exacte, l'un est toujours vertical, & l'autre toujours horizontal, au lieu que dans la machine parallatique il est difficile que le mouvement soit aussi régulier, & la position aussi exacte que celle que détermine un fil à plomb. Dans ces observations du quart-de-cercle la réfraction ne change point les quantités, ou les différences de hauteur observées, au lieu qu'elle affecte & complique beaucoup les différences d'ascension

droite & de déclinaison. Enfin, les réductions & le calcul qu'exigent les parallaxes & les réfractions, rendent le calcul plus long dans les observations faites à la lunette parallatique, que dans celles qu'on fait au quart-de-cercle.

2119. Soit *AB* le fil vertical de la lunette, & *ED* le fil horizontal, qui se coupent au foyer de la lunette d'un quart-de-cercle, en sorte que *AEBD* représente le champ de la lunette, *S* le disque du soleil sur lequel on apperçoit Vénus en *V*, dont on veut déterminer la position. On disposera la lunette de maniere que le soleil ne touche point les fils; mais que par le mouvement diurne il soit obligé de venir les rencontrer; si c'est le matin, comme les lunettes astronomiques renversent les objets, il faut faire paroître le soleil au haut de la lunette & sur la droite, comme on le voit dans la figure; alors le mouvement diurne étant dirigé de *S* en *C*, le soleil traversera le fil vertical, & l'horizontal aussi bien que Vénus. *Planche XVI. Fig. 135.*

2120. On observera donc attentivement avec une horloge à secondes les six instans suivans, dans l'ordre où ils arriveront: car il pourra se faire que les passages au fil horizontal, précèdent les passages au fil vertical; & que l'ordre suivant soit changé, cela dépendra de l'endroit où l'on aura placé le soleil, & de la direction de son mouvement par rapport à l'horizon. **Momens des six observations.**

1. Passage du bord précédent du soleil, au fil vertical.
2. Passage du bord inférieur du soleil, au fil horizontal.
3. Passage du bord précédent de Vénus, au fil vertical.
4. Passage du bord inférieur de Vénus, au fil horizontal.
5. Passage du bord suivant du soleil, au fil vertical.
6. Passage du bord supérieur du soleil, au fil horizontal.

J'appelle bord inférieur du soleil celui qui paroît tel dans la lunette, (quoiqu'il soit réellement supérieur), afin de ne pas compliquer l'atttention de l'observateur par des considérations incidentes.

2121. Je n'observe que le passage d'un des bords de

Fig. 135. Vénus, parce que le diamètre de cette planète étant assez connu (2157), il est inutile de se charger d'une double observation qui peut nuire à l'exactitude des autres, & détourner l'attention de l'observateur; si cependant on a avec soi une personne pour compter les secondes & une autre pour les écrire; on fera bien d'observer les deux bords de Vénus au fil vertical *AB* & au fil horizontal, *ED*; le milieu donnera plus surement le passage du centre de Vénus.

2122. Quoique j'aie indiqué le passage de chaque bord du soleil au fil vertical, & au fil horizontal, on peut se contenter d'observer un seul bord, en choisissant celui dont Vénus est le plus près; car le diamètre du soleil étant très-bien connu, on trouvera fort exactement par le calcul combien son diamètre a dû employer de temps à traverser le fil vertical & le fil horizontal du quart-de-cercle (894); mais si l'on a la facilité d'observer chaque bord, on aura une confirmation de l'un par l'autre, & un double terme de comparaison pour la situation de Vénus.

2123. Lorsqu'on a par observation le temps qui s'est écoulé entre les passages du bord du soleil & du bord de Vénus à un même fil, on en conclud leur différence de hauteur si c'est le fil horizontal, & leur différence d'azimut si c'est le fil vertical; j'appellerai ici différence d'azimut comme dans le calcul des éclipses (1891), un arc de grand cercle perpendiculaire au vertical.

On connoît ou par observation ou par le calcul (897) le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le fil horizontal du quart-de-cercle; on fera donc cette proportion: le temps que le demi-diamètre entier met à traverser le fil, est la valeur du demi-diamètre du soleil (1388), comme le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & du bord du soleil au fil horizontal, est à un quatrième terme, qui sera la différence de hauteur entre les bords observés de Vénus & du soleil. Je suppose que le demi-diamètre du soleil étant de 15′ 46″

Différence de hauteur par observation.

emploie 2′ de temps à traverser le fil horizontal dans le temps de l'observation, & qu'entre les bords inférieurs de Vénus & du soleil au fil horizontal il se soit écoulé une minute de temps, il est évident qu'il y aura la moitié de 15′ 46″, ou 7′ 53″, pour la différence de hauteur entre les deux bords de Vénus & du soleil. *Fig.* 135.

2124. On connoît de même ou par l'observation (2120) ou par le calcul (896), le nombre de minutes & de secondes de temps que le demi-diamètre entier du soleil met à passer le fil vertical; on a par observation le temps écoulé entre les passages du bord de Vénus & de celui du soleil au même fil; on fera donc aussi cette proportion: le temps employé par le demi-diamètre du soleil à traverser le fil vertical, est à la valeur du demi-diamètre du soleil en min. & en sec., comme le temps écoulé dans l'observation entre le bord précédent du soleil & celui de Vénus au même fil vertical, est au nombre de minutes & de secondes qui forme la différence d'azimut entre ces deux bords observés. Si le bord occidental du soleil *F* a passé au fil vertical 2′ plutôt que le centre *S*, & 1′ plutôt que Vénus *V*, on sent assez que la différence d'azimut doit être la moitié de la différence *FS*, l'une & l'autre étant mesurée perpendiculairement au vertical.

2125. Quand on a observé par le moyen du quart-de-cercle la différence de hauteur & d'azimut entre Vénus & le centre du soleil, il faut en conclure la différence de longitude & de latitude, pour le moment de l'observation. En expliquant la maniere d'en faire le calcul je prendrai pour exemple une des observations que je fis le 6 Juin 1761. A 6^h 31′ 46″ du matin temps vrai à Paris, le bord précédent ou le bord occidental *A* de Vénus, (*fig.* 136), suivoit le bord précédent *P* du soleil de 43″ au fil vertical, & le bord boréal *F* de Vénus précédoit de 59″ $\frac{1}{2}$ le bord austral *M* ou le dernier bord du soleil; il s'agit d'en conclure d'abord la différence de hauteur & la différence d'azimut entre les centres de Vénus & du soleil. Ces deux passages de Vénus au vertical & à l'horizontal n'étoient pas éloignés l'un de l'autre d'une minute de

Déterminer le lieu de Vénus par cette observation.

Fig. 136.

Fig. 136. temps, sans quoi il faudroit les réduire à un même temps, au moyen du changement qu'on auroit remarqué entre ces observations & les suivantes. Le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le méridien (895), étoit ce jour-là de 1′ 8″ 2, l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison 44° 39′ pour l'heure de cette observation (1036); on en déduit le temps que le demi-diamètre employoit à traverser le fil horizontal 1′ 37″ 0, & le temps qu'il employoit à traverser le vertical 1′ 36″ 0; on fera donc ces proportions, 1′ 36″ : 15′ 46″ :: 43″ : 7′ 4″; d'où il suit que le bord occidental *A* de Vénus (*fig.* 136), étoit éloigné horizontalement du bord occidental *P* du soleil de la quantité *AB* égale à 7′ 4″; & y ajoutant le demi-diamètre de Vénus *AD* (2157), on aura la quantité *BD* = 7′ 33″, on retranchera *BD* de *BE* qui est égale au demi-diamètre du soleil 15′ 46″, & l'on aura *ED* = 8′ 13″, c'est la différence d'azimut entre le centre du soleil & le centre de Vénus, au moment où Vénus a été observée.

2126. On fera ensuite cette seconde proportion; 1′ 37″ : 15′ 46″ : : 59″ $\frac{1}{4}$: 9′ 40″; c'est la différence *FG* de hauteur apparente entre le bord précédent *F* de Vénus, qui paroissoit inférieur dans la lunette, & le bord suivant *M* du soleil; on en ôtera le demi-diamètre *FD* de Vénus 29″, & l'on aura *DG* = 9′ 11″; on retranchera *DG* de *GH* égale au demi-diamètre du soleil 15′ 46″, & l'on aura *DH* différence de hauteur apparente entre les centres de Vénus & du soleil 6′ 35″ au moment où Vénus a passé au fil horizontal.

2127. Cette différence de hauteur apparente n'a pas besoin d'être corrigée par la réfraction; comme si on l'avoit mesurée au micromètre; d'ailleurs, le soleil étoit assez haut & les deux points assez voisins l'un de l'autre pour que cette quantité fût insensible; mais cette différence doit être corrigée par le moyen de la parallaxe. Pour cet effet, ayant calculé la hauteur du soleil (1034), on la trouve de 21° 59′; le cosinus de cette hauteur multiplié par la différence des parallaxes horizontales 22″ donne

donne la différence des parallaxes de hauteur 19″ qui n'exige aucune correction pour la différence des réfractions. Il faut donc ôter 19″ de la différence en hauteur 6′ 35″ pour avoir la vraie différence 6′ 16″; c'est la véritable valeur de *HD* ou *CE*. On a vu ci-devant une méthode beaucoup plus simple pour trouver la parallaxe (2080). Dans le triangle *CED* qui est sensiblement rectiligne & rectangle, on connoît *CE* = 6′ 16″ & *ED* = 8′ 13″, on trouvera l'angle *DCE* = 52° 40′, & l'hypothénuse *CD* = 10′ 21″, c'est la vraie distance du centre de Vénus au centre du soleil. *Fig.* 136.

2128. On cherchera ensuite la position du cercle de latitude sur la figure, pour avoir l'angle de conjonction. L'angle de position pour l'heure donnée est 6° 23′ qu'il faut soustraire (1884), de l'angle 44° 39′ que fait le vertical avec le cercle de déclinaison; il reste 38° 16″ pour l'angle parallactique du vertical avec le cercle de latitude, c'est l'angle *ECI*, on le retranchera de l'angle *ECD* = 52° 40′; il restera 14° 24′ pour l'angle de conjonction *DCI* (1887).

2129. On abaissera du centre *D* de Vénus une perpendiculaire *DK* sur le cercle de latitude, ce sera la différence de longitude entre les centres de Vénus & du soleil; & *CK* sera la latitude de Vénus. Dans le triangle *DCK* l'on connoît l'hypothénuse *CD* = 10′ 21″ & l'angle *DCK* 14° 24′; on trouvera la latitude *CK* = 10′ 1″ & la différence de longitude *DK* = 2′ 34″; c'est le résultat immédiat de l'observation (2125); mais on doit en conclure aussi la conjonction & la latitude, comme nous le dirons ci-après (2150). La méthode que nous venons d'expliquer est aussi celle dont on se sert pour observer les taches du soleil & de la lune (3141). Différence de longitude & de latitude.

2130. M. de Fouchy a donné une méthode pour calculer de semblables observations sans supposer que l'un des fils soit horizontal & l'autre vertical, mais seulement qu'ils soient perpendiculaires l'un à l'autre: soit *RH* *fig.* 135, la route du centre du soleil, *MLKO* celle du centre de Vénus; si l'on a observé le bord du soleil en

Fig. 135. *T* & en *I*, le milieu entre ces deux instans d'observation donne l'heure où le centre a passé en *N*; de même le milieu entre les passages des deux bords au fil *AB* donne le moment du passage du centre du soleil au point *O*; on a donc la valeur de *NO*. Dans le triangle *RNT*, on connoît *RN* & *RT*, on trouve l'angle *N*, ce qui fait connoître le côté *NC* du triangle *NOC*. Dans le triangle *CYL* on connoît *YL* par le temps du passage de Vénus en *L* & en *Y*, & l'angle *L* égal à l'angle *N*, on cherche *CL*, on en ôte *NC*, & l'on a *NL*. Dans le triangle *NLK* l'on a *NL* avec l'angle *L*, on trouve *NK* différence de déclinaison entre Vénus & le soleil, & *KL* qui donne le temps du passage de Vénus en *K*, & par conséquent la différence entre l'ascension droite du soleil pour le moment où il a passé en *N*, & celle de Vénus lorsqu'elle étoit en *K*. (*Mém. acad.* 1737, *pag.* 250).

Avec le micromètre. 2131. Lorsqu'on peut observer pendant plusieurs heures un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, & qu'on a un bon héliomètre (2433), ou micromètre objectif; la méthode la plus exacte de toutes pour observer la position de la planète sur le disque du soleil, est de mesurer sa distance au bord le plus proche du soleil; sur-tout quand la hauteur est assez grande pour qu'on n'ait pas à craindre une grande inégalité de réfractions; j'ai employé cette méthode avec succès dans le passage de 1761, quoique je n'eusse pas un long espace de temps pour mesurer des distances fort différentes entr'elles. Par la distance du bord de Vénus au bord le plus proche du soleil, on trouve aisément la vraie distance des centres, par exemple *CA* (*fig.* 137); si l'on a une autre distance, telle que *CD*, avec l'intervalle de temps compris entre ces deux observations, on calcule le mouvement *AD* de Vénus sur son orbite dans cet espace de temps; alors dans le triangle *CAD* dont on connoît les trois côtés, on cherche un angle *A* & la perpendiculaire *CB* qui est la plus courte distance des centres; d'où il est aisé de conclure le milieu du passage, le temps de la conjonction & la latitude pour ce temps-là. C'est à peu près de même

Fig. 137.

Usage de 2 distances.

que nous avons cherché le temps de la conjonction vraie par le moyen d'une éclipse de soleil (1973). Si l'on a observé la plus courte distance *CB*, on la compare avec une des distances comme *CD*, la plus éloignée du milieu du passage, & l'on en conclut *BD* que l'on réduit en temps, pour avoir le temps du milieu du passage en *B*. *Fig.* 137. Usage de la plus courte distance.

2132. Enfin si l'on n'a observé que deux distances telles que *CD* & *CV* du même côté de la perpendiculaire, comme cela m'est arrivé en 1761, on peut également s'en servir pour trouver le temps de la conjonction & la latitude pour cet instant; c'est ici le cas le plus compliqué, c'est pourquoi je vais l'expliquer en détail, en l'accompagnant d'un exemple. Les autres cas s'en déduiront facilement.

2133. Exemple. Je choisis pour terme de comparaison & pour une de mes deux distances, le contact intérieur des bords de Vénus & du soleil observé le six Juin 1761 à $8^h\ 28'\ 25''$. Je suppose que la distance vraie des deux centres de Vénus & du soleil étoit à ce moment-là de $915''\ 1$, après l'avoir corrigée par la parallaxe (2084); c'est la distance *CV*. Le même jour à $7^h\ 18'\ 45''$, j'avois mesuré la distance du bord de Vénus au bord du soleil le plus éloigné, à laquelle ajoutant le demi-diamètre de Vénus je trouve la distance du centre de Vénus au bord boréal du soleil $27'\ 53''$; si le soleil eût été moins élevé, il faudroit encore la corriger par la réfraction (2247); j'en ôte le demi-diamètre du soleil, & j'ai la distance apparente des centres de Vénus & du soleil $12'\ 6''\ 5$; j'en ôte $7''$ dont la parallaxe faisoit paroître cette distance trop grande (2084), & j'ai la distance vraie *CD* $11'\ 59''\ 5$. L'intervalle de temps entre *D* & *V* est de $1^h\ 9'\ 40''$, pendant lequel Vénus parcouroit sur son orbite un arc *DV* de $4'\ 38''\ 5$, (2058). Usage du premier contact de Vénus.

2134. Dans le triangle *CVD* l'on connoît donc les trois côtés $CV = 914''\ 95$, $CD = 719''\ 5$; & $VD = 278''\ 5$, le grand côté *CV* est à la somme de *CD* & *VD*, comme leur différence est à la différence des segmens que la perpendiculaire *DX* forme sur le grand côté *CV*;

Fig. 137. la moitié de cette différence est 240″ 5, ce qui donne le plus petit segment $VX = 216''\ 9$. A cause du triangle VDX, on a $VD : VX :: R :$ cosin. V, 38° 44′, & à cause du triangle CVB, on a $R :$ sin. $V :: CV : CB$, & $R :$ cos. $V :: CV : VB$; par-là on trouve la perpendiculaire CB ou la plus courte distance des centres de 9′ 32″ 4, & ayant trouvé le logarithme de VB, on y ajoute tout de suite le logarithme constant 1, 176038, qui est celui d'une heure divisée par 4′ 0″ 03, & l'on a le logarithme de $2^h\ 58'\ 25''$; cette quantité est la distance en temps du milieu du passage à l'heure du contact; on la retranchera du temps vrai de l'observation, & l'on aura 5^h 30′ 0″ pour le temps du milieu du passage.

Résultat de la plus courte distance. 2135. C'est ainsi que j'ai calculé toutes mes observations des distances de Vénus au bord du soleil en les comparant toutes à celle que donne le contact en V, qui est nécessairement l'observation la plus exacte de toutes (2140), & j'ai trouvé par un milieu général la plus courte distance de 9′ 30″, & le milieu du passage de 3^h 30′ 10″; d'où il suit que le temps de la conjonction étoit à 5^h 51′ avec une latitude pour ce temps-là de 9′ 36″ 3. Je montrerai ci-après comment l'on doit tirer une semblable conclusion de chaque observation prise séparément, lorsqu'on se sert du quart-de-cercle (2150).

Troisième méthode. 2136. Le réticule appliqué à une lunette ordinaire (2350) est de tous les instrumens d'astronomie le plus simple, le plus ordinaire, le plus facile à se procurer; ainsi nous devons expliquer ici la méthode d'y observer les différences d'ascension droite & de déclinaison dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil; M. J. Dom. Cassini proposa cette méthode en 1698, & M. Maraldi en a donné le détail, (*Mém. de l'acad.* 1736). On dispose la lunette sur une machine parallatique (2400), ou sur un pied ordinaire, en inclinant les fils de maniere que le bord du soleil décrive par son mouvement diurne parallèle à l'équateur, un des fils de la lunette tel que AB (*fig.* 138); dans cet état l'on compte à l'horloge la minute & la seconde à laquelle le premier bord du

Fig. 138.

soleil *D* touche le fil horaire *CDE*, & ensuite le moment où le bord *V* de Vénus y arrive à son tour; la différence des temps convertie en degrés, & multipliée par le cosinus de la déclinaison (892), donne la différence d'ascension droite entre le bord du soleil & celui de Vénus, mesurée dans la région même du soleil; on peut aussi employer le temps que le demi-diamètre du soleil emploie à passer le méridien (894), en faisant cette règle de trois; le temps du demi-diamètre du soleil est à sa valeur en secondes de degré, comme le temps entre les bords du soleil & de Vénus est à leur différence d'ascension droite en secondes de degré. *Fig.* 138. Différence d'ascension droite.

2137. La différence de déclinaison se mesure ou par le moyen d'un micromètre dont le curseur *VR* soit placé sur Vénus, ou par le temps qu'elle emploie à aller de *F* en *G*, c'est-à-dire, d'un des fils obliques à l'autre (2352); on conclura aisément de ces deux observations la différence d'ascension droite & de déclinaison entre les centres de Vénus & du soleil; on la corrigera par la parallaxe (2081); & par la réfraction si le soleil a été assez bas, & la différence des hauteurs assez sensible pour qu'on en ait besoin, & l'on aura la vraie différence d'ascension droite & de déclinaison entre le centre de Vénus & celui du soleil.

2138. Je suppose que *CE* & *DE* (*fig.* 136) soient les différences de déclinaison & d'ascension droite, la ligne *CE* étant le cercle de déclinaison; & *DE* un parallèle à l'équateur; voici la maniere la plus simple de calculer ces sortes d'observations. Dans le triangle *CED* où l'on connoît les deux côtés, on cherchera l'angle *ECD* & l'hypothénuse *CD*; on tirera ensuite le cercle de latitude *CKI* faisant avec le cercle de déclinaison *CE* un angle *ECI* qu'on appelle l'angle de position (1044), & qui pour le centre du soleil étoit de 6° 7′ au temps du passage de Vénus en 1761; on prendra la somme ou la différence de ces angles *ECD* & *ECK* suivant la situation du cercle de latitude (1884), & l'on aura l'angle *KCD*. Dans le triangle *KCD* l'on connoît l'hypothénuse *Fig.* 136.

Fig. 136. Différence de longitude & de latitude.

CD & l'angle *KCD*, l'on trouvera la latitude *CK* & la différence de longitude *DK*, d'où l'on conclura le temps de la conjonction & la latitude au même instant (2150). Le 6 Juin 1761, à 8h 13′ 3″, le bord précédent de Vénus suivoit de 32″ de temps au fil horaire le bord du soleil, & il y avoit 3′ 43″ 4 de différence de déclinaison entre le centre de Vénus & le bord boréal du soleil. En suivant les régles précèdentes, on trouvera la latitude de Vénus 11′ 0″ & la différence de longitude 9′ 20″. On verra ci-après (2150) la maniere dont on doit déduire de deux semblables élémens le temps de la conjonction, & la latitude pour ce même instant.

2139. Cette maniere de calculer les observations faites avec le micromètre, est celle que je donnai dans les *Mém. de l'acad.* pour 1754; elle est la plus simple qu'on ait imaginée : avant moi les astronomes calculoient l'ascension droite du soleil & sa déclinaison, ensuite celle de Vénus, & enfin sa longitude & sa latitude, (*Mém. de l'acad.* 1723), ce circuit rendoit le calcul d'une longue rebutante ; je crois l'avoir réduit à la plus grande facilité.

Observations de l'entrée & de la sortie de Vénus, en 1761 & 1769, avec les résultats qu'on en déduit.

2140. La plus importante de toutes les observations que l'on fait dans un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, est celle de l'entrée ou de la sortie, principalement du contact intérieur des deux bords de Vénus & du soleil ; ce n'est qu'une distance de Vénus au bord du soleil que l'on observe ; mais elle se mesure avec plus de précision qu'aucune distance que pourroient donner les instrumens d'Astronomie : car l'on peut se tromper d'une ou deux secondes de degré avec les meilleurs instrumens, & l'on ne doit pas craindre ici une erreur de plus d'un cinquième de seconde, ou moins encore, si l'on opère avec les précautions convenables.

D'ailleurs c'est une distance qui est exactement & rigoureusement la même pour tous ceux qui l'observent, & pour tous les pays de la terre; car elle est réellement égale au diamètre apparent du soleil, qui est égal pour tous les observateurs du monde, ensorte que la comparaison de toutes ces observations devient très-facile, & en même temps très-exacte.

2141. Au moment où le bord de Vénus touche celui du soleil, le filet de lumiere qui restoit au bord du soleil se trouve tranché subitement; on distingue ce filet de lumiere lors même qu'il n'a qu'un dixième de seconde, & l'on voit un point noir se détacher de Vénus & s'élancer vers le soleil (2159); voilà pourquoi l'on ne doit se tromper que d'une ou de deux secondes de temps au plus, sur cette observation. C'étoit l'avis de M. Halley; c'est celui de M. Pingré: (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 480); & M. Short avec qui j'eus à Londres, en 1763, une conversation à ce sujet, m'assura qu'il avoit vu le contact de Vénus de la même maniere que moi; aussi la différence des méridiens qu'il a trouvée de 9′ 16″ entre les observatoires de Greenwich & de Paris par son observation comparée avec la mienne, tombe à la même seconde que le milieu pris entre tous les passages de Mercure observés jusqu'ici, & les calculs des éclipses de soleil de 1764 & 1769. De quelle maniere se fait le contact.

Je négligerai ici la différence qu'il peut y avoir entre les différentes lunettes qui ont servi à cette observation, je crois qu'elle est peu considérable, & très-peu constatée jusqu'à présent, on peut voir cependant la maniere dont le P. Hell desire qu'on y ait égard, dans ses *Ephémérides pour* 1765, depuis la page 281 jusqu'à la page 308, & sur-tout le *Suppositum* VII, *pag.* 283, sur lequel il n'a pas voulu s'expliquer complettement.

2142. J'ai raconté dans l'histoire de l'académie pour 1757, quels étoient les préparatifs du monde savant, pour observer avec fruit le passage de Vénus en 1761, lorsque ce phénomène si desiré arriva enfin le 6 Juin, comme on l'avoit prédit. Il fut observé en une multitude de

provinces de France, d'Angleterre, d'Allemagne, d'Italie. On trouvera les observations dans *la connoissance des mouvemens célestes de* 1763, *pag.* 211; dans *les éphémérides du* P. Hell *pour* 1762; dans *les transactions Philos.*; dans *les mém. de l'acad.*, & dans le mémoire que j'ai donné avec la figure du passage de 1769, à Paris chez Latré, Graveur, 1764. Je parlerai ci-après des élémens que j'en ai déduits; mais les plus importantes observations sont celles qui furent faites au Cap de Bonne-espérance, à Tobolsk, à Rodrigues, & dont il est nécessaire de parler, afin d'expliquer les conséquences importantes qu'on en a déduites.

2143. Les déterminations de la parallaxe les plus sûres, sont celles qui sont indépendantes de la différence des méridiens ou de la longitude des lieux, élément toujours difficile à bien constater; telles sont celles qui se tirent de la durée totale du passage, observée tout à la fois à Stokolm & à Tobolsk en 1761: voici le calcul que j'en donnai à l'académie le 23 Décembre 1761, aussitôt après que nous eûmes reçu les observations des pays éloignés. La latitude de Tobolsk est de 58° 12′ 30″, celle de Stokolm 59° 20′ 30″; le contact intérieur fut observé par M. l'Abbé Chappe à Tobolsk, lorsque Vénus entra totalement sur le soleil, à 7^h 0′ 28″ du matin; & le contact intérieur, lorsque Vénus commença de sortir, 0^h 49′ 20″ $\frac{1}{2}$ après midi.

Les contacts intérieurs observés par M. Wargentin à Stokolm, sont 3^h 39′ 29″ & 9^h 30′ 10″. En supposant la parallaxe horizontale du soleil de 10″ $\frac{1}{4}$, je trouvai par un calcul très-exact & très-rigoureux, fait de la même maniere que celui de l'article 2061, que les corrections nécessaires pour réduire ces quatre observations au centre de la terre, étoient de — 6′ 19″ 7, & + 2′ 46″ 2 pour Stokolm; — 6′ 23″ 6, & + 4′ 29″ 4 pour Tobolsk; par ce moyen, la durée se trouve 5^h 59′ 46″ 9 par les observations de Stokolm, & 5^h 59′ 45″ 5 par celles de Tobolsk. Il y a 1″ 4 de différence dans cette supposition; ensorte que pour trouver exactement la même durée, il faut employer

Parallaxe déduite de l'observation de M. Chappe, 10″ $\frac{1}{4}$.

employer 10″ 4 pour la parallaxe du soleil, en supposant ces 4 observations rigoureusement exactes; cependant nous verrons bientôt que cette parallaxe est un peu trop grande (2149). La différence des méridiens qui résulte de cette détermination est de 4^h 24′ 23″ entre Paris & Tobolsk; (Voyez les *Mém. de l'ac.* 1761, *p.* 112 & 485).

Ces deux observations seroient décisives si la distance des lieux eût été plus grande; mais il faut considérer que l'effet de la parallaxe ayant été presque le même sur l'entrée, & seulement de 1′ 43″ plus grand à Tobolsk pour la sortie, 5″ d'erreur sur l'instant de chacune des observations de la sortie, c'est-à-dire, 10″ de différence entre les temps vrais de ces observations & ceux qu'on a pris pour tels changeroient la parallaxe d'une seconde.

2144. La durée observée d'un côté à Upsal, par M. Bergman, de l'autre à Cajanebourg, par M. Planman, ne donne que 9″ pour la parallaxe quand on les compare avec la durée observée à Tobolsk, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 458); mais comme les différences entre les durées observées n'alloient pas à 2′ de temps, il restoit toujours à cet égard un petit degré d'incertitude.

M. Pingré observa le contact intérieur à 0^h 36′ 49″, à l'Isle Rodrigues, située par 19° 40′ 40″ de latitude méridionale. Il détermina par quelques observations de la lune & des satellites la différence des méridiens entre Paris & l'Isle Rodrigues 4^h 3′ 26″: ainsi la différence des temps observés a été de 4′ 58″ plus grande que celle des méridiens. Cette différence devoit être de 4′ 35″ 56 seulement, en supposant la parallaxe de 10″; d'où M. Pingré conclut que la parallaxe horizontale du soleil, dans ses moyennes distances, est de 10″ 18, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 482). Observation de M. Pingré, 10″ un cinquième.

2145. Enfin M. Mason ayant déterminé au Cap de Bonne-Espérance le contact intérieur à 9^h 39′ 52″, si l'on suppose la différence des méridiens entre Paris & le Cap de 1^h 4′ 17″, on trouvera pour Paris 8^h 35′ 35″, au lieu de 8^h 28′ 25″: ainsi la différence des temps observés est de 7′ 10″; on trouve par la méthode de l'art. Observation de M. Mason, 8′ ½.

2061 qu'elle feroit de 8′ 17″ 2, en fuppofant la parallaxe du foleil de 10″; d'où il fuit que cette parallaxe ne doit être fuppofée que de 8″ 6, pour concilier ces obfervations.

Longitude du Cap.

La longitude du Cap doit être regardée comme bien connue; car M. de la Caille la trouvoit 1h 4′ 18″ ½, par fes obfervations, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 11); & M. Short la trouvoit 1h 4′ 13″, par quatre obfervations de M. Mafon, très-bien d'accord entre elles & faites avec d'excellens téleſcopes de même longueur, mais il l'a augmentée enfuite jufqu'à 1h 4′ 19″, (*Phil. tranf.* 1763, *pag.* 321); ainfi l'on doit regarder, ce me femble, l'obfervation du Cap comme très-concluante; d'ailleurs M. Short par un grand nombre de comparaifons trouvoit la parallaxe de 8″ 56. (*Philof. tranf.* 1762, *pag.* 621 & 1763, *pag.* 340), ce qui donne pour la moyenne 8″ 7.

Obfervations faites en 1769.

2146. Au milieu de ces incertitudes nous attendîmes le paffage de 1769; il étoit encore plus important que celui de 1761, parce que l'effet de la parallaxe y devoit être plus fenfible, en fuppofant que l'obfervation fût faite dans les points les plus favorables, tels que la mer du fud, la Californie, & les parties les plus feptentrionales de l'Europe. Auffi tous les Princes qui aiment & qui favorifent les fciences, firent pour cette obfervation des dépenfes & des préparatifs immenfes.

M. le Gentil étoit refté aux Indes depuis le paffage de 1761, pour y attendre celui de 1769. D'un autre côté l'académie n'ayant pu obtenir de la Cour d'Efpagne des facilités pour un voyage dans la mer du fud, M. l'Abbé Chappe partit pour la Californie, avec deux Officiers Efpagnols, le 29 Décembre 1768 (a); j'étois deftiné pour l'Ifle de S. Domingue, où il s'agiffoit auffi d'aller vérifier les montres marines de M. Berthoud, commiffion dans laquelle M. Pingré voulut bien me remplacer, ma fanté ne m'ayant pas permis de l'exécuter. M. Véron fut chargé d'aller faire le tour du monde fur le vaiffeau commandé par M. de Bougainville, avec M. Commerfon, habile naturalifte, pour revenir aux Indes, où M. Véron

(a) Il eft mort à S. Jofeph près le Cap S. Lucas, le 1 Aout 1769

espéroit aussi faire l'observation du passage de Vénus; mais il n'a pu y parvenir; le P. Christophe, Capucin, se chargea de la faire à la Martinique, & il y réussit.

La société royale de Londres, sous la protection du Roi d'Angleterre, envoya M. Dymond & M. Wales dans l'Amérique septentrionale; M. Green dans la mer du sud, sur un vaisseau commandé par le Capitaine James Cook; & M. Call à Madras, aux Indes; il y avoit d'ailleurs plusieurs personnes qui étoient déja à portée de faire cette observation dans divers endroits des colonies Angloises; savoir, M. Wintrop, à Cambridge; M. Smith, à Norriton en Pensilvanie; M. Wright, à l'Isle Coudre, près de Québec; M. le Capitaine Helland, près du Fort S. Louis, & d'autres observateurs à Philadelphie & aux environs.

L'académie de Pétersbourg, par ordre de l'Impératrice de Russie, attira des astronomes de Genève & d'Allemagne, & fit faire à Londres & à Paris un grand nombre d'instrumens; elle envoya des observateurs dans trois endroits de la Laponie Russienne; savoir, M. Rumowsky, à Kola, lat. 69°, long. 50° $\frac{1}{2}$; M. Pictet, de Genève, à Oumba, lat. 67°, long. 52°; M. Mallet, de Genève, à Ponoi, lat. 67°, long. 59°: on envoya le Capitaine Islenief, dans la Russie Asiatique, à Yakoutsk, sur la Lena, lat. 62°, long. 147° $\frac{1}{2}$ environ; d'autres astronomes allèrent du côté de la mer Caspienne, dans le gouvernement d'Astracan; M. Lowitz, à Gurief, lat. 47°, long. 70°; M. Kraft, à Orenbourg, lat. 52°, long. 73°; & M. Christ. Euler, à *Orsk*, lat. 51°, long. 76°. Chacun de ces observateurs étoit bien accompagné, & muni de toutes les choses nécessaires pour le succès de sa mission. J'étois sur le point d'aller moi-même à Saint Pétersbourg, lorsqu'ayant appris que l'Electeur Palatin vouloit bien contribuer à ces observations, en laissant voyager le P. Mayer son astronome, je me reposai sur lui de cette commission. Le P. Mayer partit de Manheim pour aller à Pétersbourg, où il fit l'observation, avec M. Albert Euler, M. Stahl & M. Kotelnikoff qui y étoient déja: toutes ces observations ont été imprimées successive-

ment en Russie, & elles seront encore insérées dans le XIVe volume des mémoires de l'académie de Pétersbourg.

Le Roi de Dannemarck demanda le P. Hell, astronome de L. M. Impériales, pour faire l'observation à l'Isle *Whardus* ou Wardoë, extrémité septentrionale de notre continent. Ces observations ont été imprimées à Copenhague, & nous les avons reçues au commencement de Mars 1770.

Parmi les astronomes Suédois, nous avions pour observateurs à *Stokolm*, M. Wargentin, M. Ferner & M. Wilcke; à *Upsal*, M. Mélander, M. Prospérin, M. Bergman, M. Salénius & M. Stromer; à *Pello*, M. Mallet; à *Torneo*, M. Hellant; à *Cajanebourg*, M. Planman; à *Gripswald*, en Poméranie, M. Mayer.

En France l'observation fut faite à Paris, à la Meute, à Colombes, à Saron, à S. Hubert, à Laon, à Calais, à Montreuil, à Caen, à Rouen, au Havre, à Brest, à Kergais, à Bordeaux, à Bayonne, à Toulouse. Les astronomes Anglois l'ont faite à Londres, à Greenwich, à Oxfort, à Shirburn, à Edimbourg; à Cavan & à Londonderry, en Irlande; au Cap-Lizard, & à Gibraltar; on l'a faite aussi à Cadix, à Porto en Portugal, &c. mais il me suffit de parler ici des observations que j'ai calculées, & dont je puis tirer des conséquences.

2147. L'empressement que j'avois de savoir le résultat de tant de préparatifs, fut secondé par M. Maskelyne, astronome royal d'Angleterre; par M. Albert Euler, secretaire de l'académie Impériale de Pétersbourg; & M. Wargentin, secretaire de l'académie royale de Suede: ils m'envoyèrent sans délai, toutes les observations qu'ils reçurent, & dès la fin de l'année 1769, je fus en état de comparer des observations assez éloignées, pour pouvoir en conclure avec une précision suffisante, la distance du soleil à la terre; ce résultat fut publié dans la Gazette de France du 10 Janvier. Parmi les observations faite dans l'Amérique septentrionale; celle de la Baie d'Hudson étoit la plus complette, de même que celle de Cajanebourg.

MM. Dymond & Wales ayant été envoyés dans le nord de l'Amérique septentrionale, avoient choisi leur station au Fort du Prince de Galles, sur la côte occidentale de la Baie d'Hudson, près de la rivière Churchil, à 58° 47′ 30″ de latitude septentrionale, 6^h 26′ 23″ à l'occident de Paris, dans un endroit, par conséquent où l'on devoit voir l'entrée & la sortie de Vénus; ils observèrent, en effet, le contact intérieur de l'entrée à 1^h 15′ 23″, & le contact intérieur de la sortie à 7^h 0′ 47″ $\frac{1}{2}$; j'ai pris un milieu entre deux résultats qui ne différoient que de 3″, ces observations furent faites avec des télescopes de M. Short de deux pieds de foyer. Observation faite à la Baie d'Hudson.

Le calcul de cette observation est donc indépendant de la longitude du lieu, avantage considérable à cause de l'incertitude qu'il est si difficile de lever dans les observations de longitude; pour profiter de tout l'avantage de cette observation d'Amérique, il falloit la comparer à une autre qui fût également complette dans notre continent; je n'avois pas encore reçu celle du P. Hell, qui ne nous est parvenue qu'au mois de Mars; je choisis celle de M. Planman, faite à Cajanebourg dans la Finlande, Province de Suede, qui avoit la plus grande autenticité, nous ayant été envoyée aussi-tôt après le jour de l'observation. M. Planman avoit aussi observée la durée du passage; savoir le contact intérieur de l'entrée à 9^h 20′ 45″ $\frac{1}{2}$, & seulement le contact extérieur de la sortie à 13^h 32′ 27″ de temps vrai, sous une latitude de 64° 13′ 30″, & 1^h 41′ 42″ à l'orient de Paris. Observation faite à Cajanebourg.

Si la parallaxe du soleil est bien connue, & si elle est de 9″, comme je l'ai supposée dans la premiere édition de cette astronomie, il faut qu'en supposant cette parallaxe, & réduisant les quatre observations au centre de la terre, la durée du passage entre deux contacts intérieurs soit parfaitement la même. Si cette durée est plus petite à Cajanebourg, où l'effet de la parallaxe faisoit paroître la durée plus longue qu'au Fort du Prince de Galles, c'est une preuve que la parallaxe employée dans le calcul est trop forte; mais en supposant 9″ 04 pour la paral-

laxe de ce jour-là, j'ai concilié si bien les quatre observations que j'ai trouvé la même durée pour les deux stations de Cajanebourg & de la Baie d'Hudson, à un tiers de seconde près, ce qui est absolument insensible. En augmentant de 0″ 15 la parallaxe on a une durée moindre de 6″ 7 pour Cajanebourg, que pour le Fort; ce qui fait voir qu'il faut mettre dans le calcul une très-grande précision, & dans les données une grande exactitude, si l'on veut avoir rigoureusement l'effet des parallaxes; j'ai donc été obligé de recommencer plusieurs fois ces opérations, je ne rapporterai ici que le résultat de la dernière, avec la méthode que j'y ai employée. Soit *C* le centre du soleil (*fig.* 134), *MV* l'orbite de Vénus vue du centre de la terre, *D* le lieu apparent de Vénus au moment du contact intérieur observé; *VD* la parallaxe de hauteur dans le vertical *ZVD*; j'ai calculé d'abord à peu-près le temps où Vénus avoit été réellement en *M*, & en *V* pour le lieu de l'observateur; avec l'angle *ECV* ou *CVZ*; *CV* étoit alors égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, que je suppose ici de $917'' \frac{1}{2}$ ou à la somme $976'' \frac{1}{2}$, plus ou moins l'accourcissement ou l'allongement produit par la parallaxe; mais *CD* étoit par-tout égale à la différence ou à la somme des demi-diamètres, je m'en suis servi pour calculer la différence apparente de déclinaison, & la différence d'ascension droite, ou la différence des angles horaires de Vénus & du soleil. Ayant ainsi pour chaque observation l'angle horaire & la déclinaison de Vénus, j'ai calculé sa hauteur, l'angle parallactique, & la parallaxe de hauteur; je pourrois ne supposer ici la hauteur vraie diminuée que par la différence des parallaxes de Vénus & du soleil; mais pour plus d'exactitude, il faut en ôter la parallaxe de hauteur du soleil, pour avoir la hauteur apparente de Vénus, par laquelle on trouve la différence des parallaxe de Vénus & du soleil plus exactement; connoissant aussi à peu-près le temps que Vénus a mis à aller de *M* en *V*, j'en ai conclu l'arc *MV*, l'angle *MCV*, l'angle *ECV*, que je suppose égal à *CVZ*, puisque *CE* n'est

Fig. 134.

pas le vertical du soleil, mais une parallèle au vertical de Vénus *ZVD*. Fig. 134.

Dans le triangle *CVD* connoissant l'angle *V*, le côté *VD* qui est la différence des parallaxes de hauteur, & le côté *CD* qui est la différence ou la somme des demi-diamètres, j'en ai conclu l'angle *DCV*, dans lequel il faut employer jusqu'aux dixièmes de secondes; ensuite l'angle *CDV* qui est la différence ou la somme de l'angle *V* & de l'angle *C*, & ensuite le côté *CV* distance vraie de Vénus au centre du soleil. Dans le triangle *CMV*, l'on connoît la plus courte distance *CM*, qui par mes premiers caculs se trouvoit de 609″, 693, & *CV* que l'on vient de trouver, on cherche *MV* qui réduit en temps à raison de 4′ 0″ 115 par heure, donne la distance de Vénus depuis le milieu *M* du passage. Mais avec la même valeur de *CM* & la distance des centres *CX* égale à la différence des demi-diamètres du soleil & de Vénus, supposés ici de 15′ 43″ 55 (2159) & 29″ ½ (2157), on trouve 2h 50′ 8″ 1 pour la distance *XM* vue du centre de la terre, qui diffère de la précédente, de la quantité *VX* qui est l'effet cherché de la parallaxe le long de l'orbite. Si au lieu de la différence des demi-diamètres, on emploie leur somme, on trouvera 3h 9′ 28″ 0 pour la distance entre le contact extérieur & le milieu du passage. Voici le détail des quantités que j'ai trouvées, dans lequel il faut observer que la situation du vertical est orientale ou à gauche du cercle de déclinaison pour l'entrée, soit à Cajanebourg, soit à la Baie d'Hudson, & même pour la sortie dans ce dernier endroit, mais que le vertical est plus occidental ou plus à droite du côté du nord, que le cercle de déclinaison *PC*, dans la sortie de Cajanebourg, parce que la sortie de Vénus y est arrivée le matin.

Élémens du calcul des Parallaxes dans les observations de Cajanebourg *& de la* Baie-d'Hudson.	CAJANEBOURG 64° 13′ 30″						FORT-DU-PRINCE 58° 47′ 30″					
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
Temps vrai des 4 observ. sous leurs méridiens respectifs. . .	9	20	45,5	15	32	27	1	15	23	7	0	47,5
Milieu du passage à peu-près connu.	12	18	3	12	18	3	4	10	0	4	10	0
Distance de l'observation au milieu du passage.	2	57	17,5	3	14	24	2	54	37	2	50	47,5
Ang. *CVM fig*, 134, formé par la perp. *CM* & le ray. du lieu vr.	49°	5	16	51°	40	51	48°	39	27	48°	1	34
Ang. *DCM* formé par la perpend. *CM* & le rayon du lieu app.	49	30	20	52	38	6	48	55	27	49	23	49
Différence appar. d'ascens. droite entre Vénus & le Soleil. .	−	9	16	−	16	22	−	9	8	+	15	0
Différence de déclinaison à ajouter à celle du Soleil. . . .		12	41		6	3		12	46		6	29
Angle horaire de Vénus.	140	2	6,5	126	36	53	18	41	37	105	26	52,5
Distance de Vénus au pole du Monde.	67	21	32	67	26	22	67	21	27	67	26	3
Hauteur apparente de Vénus.	2	14	11	6	4	53	51	27	59	11	34	45
Parall. de Vénus au Soleil, en supposant 9″ 04 pour le Soleil.	22″711			22″605			14″159			22″265		
Angle de position pour Vénus.	7	1	56	7	5	43	7	1	57	7	6	28
Som. de l'ang. de position & de l'inclin. de l'orb. 8° 28′ 59″.	15	30	55	15	34	42	15	30	56	15	34	27
Angle parallactique du cercle horaire avec le vertical de Vénus.	16	13	53	20	32	57	15	27	42	30	39	5
Ang. *V* qui est la som. ou la diff. des angl. préc. & de l'ang. *LCV*.	17	20	28	46	42	36	17	40	49	94	15	6
Angle *D* formé par le vertical & le rayon apparent *CD*. . .	17	45	55,7	47	40	43,7	17	56	59,5	84	21	22,3
Distance apparente *CD*.		913, 95			972, 95			913, 95			913, 95	
Distance vraie des centres de Vénus & du Soleil, ou *CV*. .		935, 60			988, 30			927, 43			912, 03	
Temps correspondant ou distance *MV* au milieu du passage.	2	57	19,9	3	14	21,8	2	54	37,6	2	49	29,4
Distance vraie vue du centre de la terre ou valeur de *MX*. .	2	50	8,1	3	9	28,0	2	50	8,1	2	50	8,1
Eff. de la parall. en tems, en fur. la parall. horiz. du Sol. 9″04.	+	7	11,8	−	4	53,8	+	4	29,5	−		38,7
Temps des 4 observations réduits au centre de la terre. . .	9	27	57,3	15	27	33,2	1	19	52,5	7	0	8,8

2148. Le milieu entre les deux phases réduites au centre de la terre, pour le Fort du-Prince, ou le milieu du passage est $4^h\ 10'\ 0''\ 6$. A l'égard des phases de Cajanebourg, les deux distances observées n'étant pas les mêmes, il faut résoudre

résoudre un triangle dans lequel on connoît deux côtés 913″95 & 972″95 avec l'arc parcouru en 5^h 59′ 35″9 de temps, qui est 1439″08 ; on trouve les deux segmens 680″86 & 758″22, qui réduits en temps donnent 3^h 9′ 28″0, & 2^h 50′ 8″1, d'où l'on conclud le milieu 12^h 18′ 5″4 ; mais le milieu, pour le fort est 4^h 10′ 39″3, la différence de longitude de ces deux villes seroit de 8^h 7′ 26″. Mais la demi-durée 2^h 50′ 8″1, étant plus petite de 38″5 que celle qu'on tire de l'observ. du fort, il s'ensuit qu'il faut diminuer la parall. de 1″31, & quelle étoit ce jour-là de 7″73, ce qui donne pour la parall. moy. 7″86 ; en adoptant ces deux obs. le milieu du passage se trouve à 4^h 10′ 17″ & 12^h 17′ 59″. Parallaxe de 8″.

2149. M. Pingré observa l'entrée de Vénus au Cap-François à 2^h 44′ 44″½, 4^h 58′ 40″ à l'occ. de Paris ; ayant calculé son observ. de même que celle de M. Wintrop, à Cambridge, 4^h 53′ 59″ à l'occ. de Paris, il trouve la parall. moy. 9″3 ; en comparant l'obs. de Wardhus avec celle de la Baie d'Hudson, il trouve 9″27 ; par les observations de Stokolm, de Pétersbourg, & de la Baie d'Hudson 9″3. Autres observations.

Parmi les observateurs qui attendoient le passage de Vénus, il y en a plusieurs qui n'ont pu l'observer, tels sont M. le Gentil, à Pondichery ; M. Call, à Madras ; M. Pictet, à Oumba en Laponie ; M. Helland, à Torneo ; M. Mallet, Suédois, à Pello ; M. Rome, à Rochefort ; le P. Béraud, à Lyon ; & il y en a plusieurs aussi dont les observ. ont été incomplettes. Mais M. l'abbé Chappe qui étoit à S. Joseph en Californie à 23° 3′ 37″ de latitude, observa le premier contact intérieur à 0^h 17′ 27″ & le second contact à 5^h 54′ 50″3 ; cette observation comparée avec celle de Wardhus me donne 8″80 pour la parallaxe moyenne : je trouve 8″36 par Cajanebourg & S. Joseph, 8″54 par S. Joseph & le Fort du Prince ; enfin je trouve 9″07 par l'observation de Wardhus & celle du Fort du Prince de Galles. Tout cela fait voir que la parallaxe moyenne approche beaucoup de 9″ ; il semble qu'on peut s'en tenir à 8″¾. Nous n'attendons plus, pour confirmer ce résultat, qu'une observation faite dans la mer du Sud ; mais qui ne nous est point encore parvenue (Juillet 1771).

2150. Après cette obſervation des contacts intérieurs, les réſultats les plus importans des paſſages de Vénus ſont la conjonction & la latitude : on a vu ci-deſſus la manière de trouver par chaque obſ. faite au quart-de-cercle ou au micromètre, la différence de long. & de latit. entre Vénus & le Soleil (2129, 2138). La différ. de long. de Vénus au moment de l'obſ. que nous avons trouvée de 2′34″ (2129), ou plus exactement 2′ 34″ 4, nous fera trouver le moment de la conjonction, en nous ſervant du mouvement hor. ſur l'écliptique 3′ 57″ 4 (2058) ; nous ferons donc cette proportion 3′ 57″ 4 : 60′ 0″ : : 2′ 34″ 4 : 39′ 1″ de temps, qu'il faut ôter de l'heure de l'obſervation 6^h 31′ 46″ (2125), parce que la conjonction étoit paſſée, & l'on aura 5^h 52′ 45″ pour l'heure de la conjonction qui réſulte de cette obſervation ; il ſuffit d'ajouter le logar. conſtant 1,180822 au logar. de la différence de longitude ſur l'écliptique, pour avoir celui du temps en ſecondes.

Heure de la conjonction.

2151. On cherchera auſſi la latit. de Vénus pour ce moment, par le moyen du mouvement hor. en latitude, que l'on ſait être de 35″ 4 (2058), en diſant ; 60′ 0″ : 35″ 4 : : 39′ 1″ : 23″ ; on ôtera ces 23″ (qui ſont le mouvement en latitude) de la différence trouvée pour le moment de l'obſ. 10′ 1″ 2 (2129), & l'on aura enfin 9′ 38″ 2 pour la latit. de Vénus au moment de la conjonction ; c'eſt le ſecond élément que nous avions à trouver : il faut en ôter 6″ 3 pour avoir la plus courte diſtance des centres, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par la méthode de l'art. 2052 ; ainſi la plus courte diſtance étoit de 9′ 32″, par cette obſervation ; le milieu entre un grand nombre d'autres m'a donné 9′ 30″, & le milieu du paſſage 5^h 30′ 10″ (2135).

Latitude en conjonction.

2152. Je ſuis ſurpris que les aſtronomes n'aient pas encore remarqué l'avantage qu'il y avoit à déduire ainſi de chaque obſervation, ſoit le temps de la conjonction, ſoit la latitude pour ce temps-là. Les plus célèbres aſtronomes ont cru qu'il falloit comparer deux obſervations entre elles, pour déterminer le temps de la conjonction, le mouvement en longitude & en latitude, & l'inclinaiſon de l'orbite ; ils n'ont pas fait attention que le mouvement

horaire & l'inclinaison sont donnés par les tables, dix fois plus exactement qu'on ne peut les déduire de deux observations de cette espece, & qu'ils perdroient ainsi tout l'avantage que le grand nombre d'observations doit procurer, celui d'avoir un grand nombre de fois le résultat essentiel pour la théorie de Vénus. En suivant la méthode que je viens d'expliquer, on trouve le temps de la conjonction autant de fois que l'on a d'observations; on est en état de prendre un milieu entre beaucoup de résultats, de distinguer les observations défectueuses, & de les discuter toutes avec très-peu de calcul.

2153. C'est ainsi que j'ai calculé une multitude d'observations faites pendant la durée de ce passage, à Paris, à Béziers, à Gottingen, &c; elles m'ont donné $9' 30''$ à peu-près pour la plus courte distance des centres; M. de Thury la trouva de $9' 30''$ à Vienne en Autriche, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 411); M. Pingré, de $9' 33''$, (*Ibid. pag.* 466), mais il la diminue de $3''$ pour le cas où la différence des demi-diamètres ne seroit que de $917\frac{1}{2}$: or c'est en effet la quantité que l'on devoit supposer, comme on le verra par les diamètres du Soleil & de Vénus, que j'ai déterminés, (1388, 2157), il faudroit même diminuer encore la perpendiculaire de $5''\frac{1}{2}$ à cause de la diminution du diamètre du soleil (2159). La plus courte distance des centres, en 1761.

2154. Les observations faites pendant la durée du passage, par l'une des trois méthodes que j'ai données, (2116 & suiv.) doivent toujours se réduire à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, qui dans le passage de 1761 est arrivé à $5^h 51'$ de temps vrai, & la latitude pour cet instant de la conjonction, qui a été trouvée de $9' 36''$, (2135, 2151); cette latitude géocentrique observée doit se réduire au soleil, lorsqu'on veut en déduire le lieu du nœud; pour cela on fait cette proportion: la distance de Vénus au soleil est à sa distance à la terre, comme la latitude géocentrique est à la latitude héliocentrique. Ainsi la latitude en 1761 ayant été trouvée de $9' 36''3$ au moment de la conjonction (2135), & le rap- Temps de la conjonction.

port des distances étant celui de 28903 à 72643, (2045), on trouve 3′ 49″ 3 pour la latitude héliocentrique *CV* (*fig.* 125).

Latitude héliocentrique. *Fig.* 125.

Pour en conclure la distance de Vénus à son nœud, il suffit de résoudre le triangle *CVN* rectangle en *C*, & qui est sensiblement rectiligne, en disant : la tangente de l'inclinaison vraie, 3° 23′ 20″, est au rayon, comme le côté *CV* de 3′ 49″ 3 est au côté *CN* qui se trouvera de 1° 4′ 40″, c'est l'arc de l'écliptique vu du soleil, & compris entre le nœud *N* de Vénus & le point *C* de la conjonction. Cet arc retranché du lieu du soleil au moment de la conjonction 2ˢ 15° 36′ 10″, donnera le lieu du nœud de Vénus 2ˢ 14° 31′ 41″; peu différent de celui dont j'ai fait usage ci-dessus, (1339); on trouve 2ˢ 14° 32′ 6″ en diminuant de 7″ le diamètre du soleil (2159).

Lieu du nœud.

On trouveroit le même résultat avec la latitude géocentrique observée 9′ 36″3, & l'inclinaison relative vue de la terre 8° 28′ 47″; mais de l'une ou de l'autre maniere, l'opération précédente se réduit sommairement à ajouter le logarithme constant 082731 avec celui de la latitude géocentrique observée 9′ 36″, & l'on a le logarithme de la distance au nœud, qu'on ajoute avec la longitude de Vénus au temps de la conjonction, qui est l'opposite de celle du soleil, ou qu'on en retranche, suivant que la conjonction est arrivée avant ou après le passage au nœud; en 1761 elle étoit soustractive; en 1769 additive.

Résultat pour 1769.

2155. En 1769 le contact intérieur fut observé à Paris à 7ʰ 38′ 45″, l'effet de la parallaxe étoit de 7′ 30″; ainsi le contact intérieur vu du centre de la terre, arriva à 7ʰ 46′ 15″; la demi-durée du passage intérieur étoit de 2ʰ 40′ 8″ (2148), ainsi le milieu du passage est 10ʰ 36′ 23″, & ôtant 22′ 43″½, on a la conjonction 10ʰ 13′ 39″½ temps vrai, ou 10ʰ 11′ 26″½ temps moyen. La durée vue du centre de la terre nous donne l'arc parcouru sur le soleil, & par conséquent la plus courte distance 10′ 9″ 69; d'où je tire la latitude 10′ 16″, & la distance de Vénus au nœud 1° 9′ 0″, qui ajoutée au lieu du soleil 2ˢ 13°

27′ 19″ au moment de la conjonction donne le lieu du nœud ascendant de Vénus 2ˢ 14° 36′ 20″ pour le 3 Juin 1769; en négligeant l'aberration.

C'est une chose singulière que cette méthode, si naturelle & si simple, de trouver le nœud de Vénus ou de Mercure par observation, n'ait point été employée par les astronomes qui ont calculé ces passages; la plupart se sont servi d'opérations compliquées qui quelquefois les ont jettés dans l'erreur; je pourrois en citer plusieurs exemples.

2156. Les réductions & le calcul des observations que nous venons de discuter, suppose qu'on connoisse la parallaxe, par la méthode expliquée ci-devant (2147); mais on pourroit encore choisir des observations par lesquelles on éviteroit l'effet de la parallaxe. M. le Monnier considère, par exemple, qu'en 1769, elle étoit presque nulle en latitude pour S. Domingue, & en longitude pour Ponoi, de sorte qu'en combinant ces deux observations ensemble, on peut avoir complettement le vrai lieu de Vénus sans connoître la parallaxe; mais elle est trop bien déterminée pour qu'on puisse craindre actuellement d'en faire usage dans les calculs.

2157. Le diamètre de Vénus mesuré sur le soleil par M. de la Caille avec un bon micromètre, en 1761, s'est trouvé de 59″, (*Mém. ac.* 1761, *p.* 80); suivant le P. la Grange à Marseille 58″4; d'autres observateurs l'ont trouvé un peu plus petit, ou un peu plus grand de quelques secondes. Mais la meilleure maniere de le déterminer exactement, est d'y employer le temps qu'il a mis à quitter le soleil; car chaque seconde du diamètre de Vénus emploie 19″ de temps à sortir du soleil; & comme on ne se trompe pas de 5″ sur la durée de la sortie, cette durée doit faire trouver, à un quart de seconde près, le vrai diamètre de cette planète. Trouver le diamètre de Vénus.

Lorsque le dernier bord de Vénus touche le bord extérieur du soleil en *E*, (*fig.* 137), Vénus est au point *F* de son orbite, & la distance *CF* des centres de Vénus & du soleil est égale à la somme des demi-diamètres de *Fig.* 137.

Fig. 137. Vénus & du soleil ; au contraire dans le contact intérieur Vénus est en D, & la distance des centres est égale à la différence des demi-diamètres ; on connoît la plus courte distance CB (2153) ; ainsi en résolvant séparément les deux triangles CBD, CBF, on trouvera les portions BD & BF de l'orbite de Vénus, dont la différence DF étant réduite en temps, nous donnera le temps que le diamètre de Vénus devoit employer à sortir, vu du centre de la terre ; mais la durée de la sortie n'est point la même vue de la surface de la terre.

Il faut donc connoître aussi la quantité dont la parallaxe fait varier cette durée de la sortie, pour le lieu de l'observation ; quand on se tromperoit de quelque chose sur la parallaxe, l'erreur seroit insensible dans l'espace de 18′ de temps ; ainsi l'on peut calculer, comme dans l'art. 2061, l'effet de la parallaxe sur le
Fig. 134. temps de chacun des deux contacts : je trouve en supposant les demi-diamètres 15′ 43″, & 29″ que l'intervalle MV est de 3^h 16′ 5″5, celui qui répond à MX de 3^h 16′ 48″5 ; la différence entre ces intervalles de temps & ceux que l'on trouveroit pour le contact intérieur, vu de Paris & du centre de la terre, 2^h 57′ 39″0, & 2^h 58′ 36″0 (2065), fait voir que la durée de la sortie du diamètre de Vénus étoit de 18′ 12″ 5 pour le centre de la terre, & 18′ 26″5 pour Paris, en supposant le demi-diamètre de 29″. Or, par mon observation cette durée s'est trouvée de 18′ 25″ : on fera donc cette proportion ;
Diamètre de Vénus, 18′ 26″ 5 : 0′ 58″ : : 18′ 25″ : 57″9 ; c'est le diamètre de Vénus conclu de la durée de sa sortie, en 1761. On pourroit faire un semblable calcul par les observations de 1769.

2158. Au moyen des distances données ci-dessus, entre Vénus, la terre & le soleil, (2045), on trouve que si Vénus eût été à la même distance que le soleil, son diamètre eût paru de 16″½, le jour du passage de 1761 ; or, si la parallaxe du soleil est de 9″., le diamètre de la terre, vu à la même distance, est de 18″, donc le diamètre de Vénus est à celui de la terre, comme 16½

est à 18 ; d'où il suit que le volume de Vénus est à celui de la terre, comme 77 est à 100 : ce seroit aussi le rapport de leurs masses, de leurs poids ou de leurs quantités de matiere, si la densité de Vénus étoit égale à celle de la terre ; mais on verra qu'elle est probablement un peu plus grande (3410), ce qui me fait regarder la masse de Vénus comme étant à peu-près égale à celle de la terre ; ou plus exactement 1,01818 (1391, *p.* 158). Grosseur de Vénus.

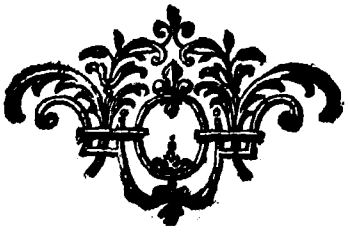
C'est par la même méthode que je déterminai en 1753 le diamètre de Mercure, tel que je l'ai inséré dans la table générale des diamètres des planètes (1391). Voyez les *Mém. de l'académie* 1756, *pag.* 264.

2159. On a vu que le diamètre du soleil doit paroître amplifié par le débordement de la lumière qui l'environne (1388), & que les meilleures lunettes ne dégagent pas tout-à-fait les bords du soleil de cette aberration : les passages de Mercure & de Vénus en donnent un indice très-fort : M. de l'Isle ayant examiné le passage de Mercure, arrivé en 1756, dans lequel l'orbite de Mercure passoit presque au centre du soleil, trouva que la durée du passage supposoit le diamètre du soleil d'environ 32′ 4″, tandis que, suivant moi, il auroit été de 32′ 21″ (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 145). M. du Séjour a trouvé que pour concilier les observations de l'éclipse annulaire de 1764, il falloit diminuer aussi de quelques secondes le diamètre du soleil. Nous n'avons pas de passage de Vénus par le centre du soleil, mais puisque en 1761 Vénus a passé au midi du centre, & en 1769 au nord, nous pouvons, en comparant ces deux passages, en tirer une induction sur le diamètre du soleil. J'ai trouvé que le lieu du nœud conclu de ces deux passages par le moyen du diamètre du soleil que j'avois observé (1388), étoit différent de 1′ 18″, en tenant compte du mouvement de ce nœud en 8 ans : pour avoir le même lieu du nœud par les deux observations, il falloit que les distances au nœud fussent de 1° 4′ 20″ & 1° 8′ 43″, & que les plus courtes distances fussent de 9′ 28″3 & 10′ 7″. Pour trouver cette distance de 10′ 7″, par le moyen de la durée du passage, il faut supposer que le dia- Diamètre du Soleil.

mètre du soleil soit plus petit d'environ 6″, ou de 15′43″7 dans le passage de 1769 ; c'est ce que j'ai fait voir dans un mémoire lu à l'académie, au commencement de 1770.

Phénomène du contact.

Le contact de Vénus, avec le bord du soleil, est accompagné d'un phénomène qui paroît confirmer cette diminution ; on voit un point noir ou une espèce de ligament noir allongé qui unit les deux bords de Vénus & du soleil, lors même que leurs circonférences paroissent séparées (2141) ; il me semble que cela vient de l'irradiation qui environne le bord du soleil, & qui disparoît nécessairement dans un point, aussi-tôt que les bords réels se touchent ; en effet, l'expansion de lumière ne sauroit avoir lieu quand la cause primitive de cette lumière, c'est-à-dire, le bord effectif du soleil ne nous envoie plus de rayons ; il doit donc y avoir dans cette partie du bord apparent du soleil une cessation & une interruption subite de la lumiere exorbitante ; & comme cette interruption n'a pas lieu dans les parties voisines du point de contact, il paroît dans ce point-là une gibbosité, ou un ligament noir, que grand nombre d'observateurs ont remarqué, comme je l'ai dit plus au long dans les mémoires de 1769. En conséquence de cette explication j'ai diminué le diamètre du soleil, dans les calculs les plus importans de ce XIe Livre.



LIVRE XII.

LIVRE DOUZIEME.

DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES.

2160. L'ATMOSPHERE (a), c'est-à-dire, la masse d'air qui environne la terre, affoiblit la lumiere, la disperse, la décompose, & change sa direction. Il est prouvé par un grand nombre d'expériences qu'on trouve dans tous les livres d'optique, & par la théorie même de l'attraction, que les rayons de lumiere qui entrent obliquement d'un milieu moins dense dans un milieu plus compact, changent de direction, & se rapprochent de la perpendiculaire, comme s'ils étoient plus fortement attirés par la matiere la plus dense; ce changement des rayons de lumiere est différent suivant l'obliquité du rayon, & les tables qui en contiennent l'effet, s'appellent *Tables de Réfractions*, ou *Tables Anaclastiques* (b).

2161. Soit *ABD* la surface de la terre, (*fig.* 139); *EKG* la surface extérieure de l'atmosphère qui environne la terre, & dont la densité est sensible jusqu'à quelques lieues de hauteur; *A* le lieu de l'observateur, & *MK* un rayon de lumiere qui entre obliquement dans l'atmosphère en *K*; ce rayon plié & courbé dans l'atmosphère, parvient au point *A*, comme s'il avoit suivi la ligne droite *NKA*; l'œil reçoit l'impression de la lumiere suivant la direction *NKA* du rayon qui arrive à l'œil en *A*; l'observateur rapporte sur le rayon *AKN* l'astre qui est véritablement en *M*, ensorte que la réfraction fait paroître l'astre plus élevé de la quantité de l'angle *NKM*, que nous appellons la RÉFRACTION ASTRONOMIQUE. De quelle maniere se fait la refraction. *Fig.* 139.

Le rayon *CKR* étant perpendiculaire à la surface ré-

(a) Ἀτμος, *Vapor*, Σφαῖρα, *Globus*.
(b) Ce mot vient de Κλάω, *frango*.

fringente en *K*, on appelle Angle d'incidence l'angle *MKR*, que forme le rayon incident avec la perpendiculaire, avant la réfraction, & l'on appelle Angle de réfraction, l'angle *NKR*, ou son égal *AKC* que forme ce rayon avec la même perpendiculaire, après la réfraction; les sinus de ces deux angles ont entre eux un rapport constant, qu'on appelle le *Rapport de Réfraction*, & que Newton suppose ici être de 3201 à 3200; aussi n'y a-t-il point de réfraction quand le rayon est perpendiculaire à la surface réfringente, car un des angles étant nul, l'autre s'évanouit nécessairement; d'ailleurs le rayon perpendiculaire a une surface plus dense, ne change pas de direction pour en être plus attiré, puisqu'il y arrive le plus directement possible, & par le plus court chemin. Delà il suit que la réfraction se fait toujours dans un plan vertical; car le rayon rompu n'ayant de tendance que pour se rapprocher de la ligne verticale ou du zénit, ne déviera ni à droite ni à gauche, le rayon rompu sera dans le même plan que le rayon direct & la ligne du zénit; ainsi le lieu vrai & le lieu apparent seront dans le même vertical.

Auteurs qui ont écrit sur l'optique.

2162. On trouvera les loix, les propriétés & les effets de la réfraction, & ceux de la lumiere, dans plusieurs livres d'optique, sur-tout dans celui qui a pour titre: *A compleat System of Optiks by* Robert Smith. Cambridge, 1738, 2 vol. *in*-4°. Il y en a deux éditions Françoises d'Avignon & de Brest, données par le P. Pézenas & par M. le Roy. On peut consulter aussi l'optique de Newton, celle de M. Bouguer, celle de M. de Courtivron; la Dioptrique oculaire du P. d'Orleans, in-fol. 1671, Kirker, *Ars magna Lucis & Umbræ*; la Dioptrique d'Huygens, celles d'Hartsoeker, de Molineux, de Descartes; Schot, *Magia naturalis*; Zahn, *Oculus fundamentalis artificialis*; Rheita, *Oculus Enochi & Eliæ*; Craige, *Optica analytica*, les leçons d'optique de M. de la Caille, de Volf, &c.

2163. Les anciens connurent très-bien le phénomène des réfractions en général. Aristote dans un de ses pro-

blêmes parle de la courbure apparente d'une rame dans l'eau, & Archimède paſſe pour avoir écrit un traité ſur la figure d'un cercle vu ſous l'eau ; on croyoit alors que les angles de réfraction étoient proportionnels aux angles d'incidence ; Snellius & Descartes ont fait voir que la proportion n'avoit lieu qu'entre les ſinus de ces angles.

La réfraction aſtronomique ne fut même pas inconnue à Ptolomée, quoiqu'il n'en ait pas fait uſage dans ſes calculs, (*Riccioli I*, 642) ; il dit ſur la fin du VIIIe livre de l'Almageſte, qu'il y a des différences dans le lever & le coucher des aſtres, qui dépendent des changemens de l'atmoſphère : il en faiſoit mention d'une maniere plus détaillée dans ſon *Optique*, Ouvrage qui ne nous eſt pas parvenu, (Montucla, *Hiſtoire des Mathématiques*, *I.* 308. Roger Bacon, *Specula Math. pag.* 37). Alhazen, Opticien Arabe du dixieme ſiècle (393), qu'on ſoupçonne généralement d'avoir pris dans Ptolomée preſque toute ſon optique, en parle décidément & fort au long, (*lib. VII. cap.* 4, *n°.* 15, *pag.* 251. *edit. an.* 1574) : il donne la maniere de s'en aſſurer par l'expérience.

Comment les Anciens ont apperçu la réfraction.

2164. Prenez, dit-il, un inſtrument compoſé avec des armilles qui tournent autour des poles (2274), meſurés la diſtance d'une étoile au pole du monde, lorſqu'elle paſſe près du zénit dans le méridien, & lorſqu'elle ſe lève près de l'horizon, vous trouverez la diſtance au pole plus petite dans ce dernier cas ; Alhazen démontre enſuite que cela doit arriver par l'effet de la réfraction ; il ne dit point, à la vérité, quelle eſt la quantité qui en réſulte ſur les obſervations ; mais ce paſſage d'Alhazen fait voir de quelle maniere on obſerva l'effet de la réfraction, & comment on parvint d'abord à le reconnoître. De même quand les anciens obſervoient l'équinoxe avec ces armilles, ils pouvoient l'apperçevoir deux fois en un même jour, par l'effet des réfractions, (Flamſteed, *Prolegom. pag.* 21), cet effet pouvoit auſſi ſe reconnoître facilement par les étoiles circompolaires ; car ſi l'on obſerve deux étoiles, comme γ d'Andromède

& l'étoile polaire, éloignées l'une de l'autre de 47°, on trouvera leur distance plus grande d'un demi-degré, quand la premiere passera par le méridien, près du zénit, que quand elle passera sous le pole, près de l'horizon; & toutes les distances des étoiles entre elles changeront ainsi plus ou moins.

2165. Snellius, en publiant les observations de Waltherus, remarqua (*pag.* 51) que ces observations étoient si exactes, qu'elles avoient appris à Waltherus l'augmentation de hauteur que cause la réfraction; mais Tycho fut le premier qui la détermina d'une maniere à en dresser des tables: voici la maniere dont il raconte lui-même cette découverte astronomique (*Progymn. pag.* 15).

Tycho en donne des tables.

2166. Il avoit déterminé avec un ou deux instrumens assez bien faits, la hauteur du pole par les hauteurs supérieures & inférieures de l'étoile polaire (33), il la détermina aussi par les hauteurs du soleil dans les deux solstices (70), & il trouva la seconde plus petite de 4'; il eut d'abord un soupçon sur la bonté de ses instrumens, il continua d'en faire construire jusqu'à dix de différentes grandeurs & de différentes formes, travaillés avec le plus grand soin, & il trouva toujours le même résultat; il ne pouvoit plus alors attribuer cette différence au défaut des observations; il pensa sérieusement à chercher une cause de ce phénomène, & il imagina enfin, qu'il provenoit d'une réfraction considérable que le soleil devoit éprouver au solstice d'hyver, n'étant élevé que de 11° pour lui. Cette explication étoit d'acord avec les démonstrations de l'optique, cependant il avoit peine à se persuader que cette réfraction fût assez considérable pour produire une si grande erreur; il jugeoit qu'il y avoit au moins 9' de réfraction (a) à la hauteur de 11°; c'est pourquoi Tycho fit faire encore des armilles de dix pieds de diamètre, dont l'axe

(a) Il n'y en a réellement que $4\frac{3}{4}$, mais Tycho en augmentoit l'effet par la parallaxe du soleil qu'il supposoit de 1' 50" à cette hauteur (1726).

répondoit exactement au pole du monde, & avec leſquelles il meſuroit la déclinaiſon des aſtres hors du méridien, il reconnut alors que, même en été, la réfraction, quoique inſenſible à la hauteur méridienne du ſoleil, devenoit ſenſible près de l'horizon, & que l'effet alloit à un demi-degré dans l'horizon.

2167. Tycho-Brahé crut que la réfraction du ſoleil devenoit nulle à 45° de hauteur, & celle des étoiles à 20°; quoiqu'à cet hauteur elle ſoit de $2'\frac{1}{2}$; cette erreur ſubſiſta long-temps: le P. Riccioli, même en 1665, ſuppoſoit encore que les réfractions n'avoient plus lieu au-delà de 26° de hauteur, ou environ, qu'il n'y avoit que 29′ de réfraction horizontale pour la lune en été, 30 pour le ſoleil, & 30′ 27″ pour les étoiles. *Aſtron. reform. Tabularum*, *pag.* 47.

2168. Ce fut M. Caſſini qui vers l'an 1660, entreprit de former une nouvelle table de réfractions, en même temps que les nouvelles tables du ſoleil, qui repréſentèrent les obſervations avec une juſteſſe beaucoup plus grande qu'on ne l'avoit fait avant lui (554, 1730). Mais pour éprouver la juſteſſe de ſa nouvelle table de réfractions, M. Caſſini ſouhaita d'avoir des obſervations du ſoleil faites au zénit, où tout le monde convenoit qu'il n'y avoit point de réfractions, pour vérifier ſi les obſervations qui y ſeroient faites ne ſeroient pas beaucoup mieux répréſentées par ſes nouvelles tables du ſoleil, que par les Tychoniciennes; car dès lors il n'y avoit plus de doute que les tables du ſoleil & celles des réfractions, ne fuſſent préférables aux Tychoniciennes, repréſentant mieux les obſervations faites, & dans les cas où il y a réfraction & dans ceux où il n'y en a point.

Louis XIV, & le grand Colbert, dont le zèle pour la gloire des ſciences avoit déja paru tant de fois, laiſſoient à l'académie le choix des entrepriſes: elle jugea qu'il n'y avoit point de lieu plus commode pour de pareilles obſervations que l'Iſle de Cayenne qui eſt à 5° de l'équateur, & où la France envoyoit des vaiſſeaux pluſieurs fois l'année. Les hauteurs méridiennes du ſoleil

Voyage de Cayenne.

devoient être, en tout temps, exemptes de réfractions, si cette réfraction étoit nulle au-dessus de 45°, car la plus petite hauteur du soleil y est de 61°. On y devoit donc trouver l'obliquité de l'écliptique, sans aucune diminution de réfractions, mais au contraire, augmentée par l'effet de la parallaxe du soleil dans les deux solstices; ainsi dans les hypothèses Tychoniciennes, la distance des deux tropiques devoit se trouver à Cayenne de plus de 47° 3′, & selon M. Cassini qui diminuoit la parallaxe & supposoit de la réfraction, même dans les grandes hauteurs, cette distance ne devoit paroître à Cayenne que de 46° 58′; il y avoit donc entre ces hypothèses une différence de 5′ qui pouvoit s'observer exactement à Cayenne, & décider à la fois ces trois objets, la réfraction, la parallaxe & l'obliquité de l'écliptique. Ces seuls motifs étoient plus que suffisans pour faire entreprendre le voyage de Cayenne, & cependant il y avoit encore d'autres objets intéressans à constater, tels que la longueur du pendule, la parallaxe de la lune, de Mars & du soleil, la théorie de Mercure, & les longitudes géographiques, la position des étoiles australes, les marées, les variations du baromètre; tels furent les motifs curieux du voyage qu'entreprit M. Richer (538, 546). Il partit de Paris au mois d'Octobre 1671, & il séjourna à Cayenne depuis le 22 Avril 1672, jusqu'à la fin de Mai 1673, accompagné du Sr. *Meurisse*, qu'on lui avoit donné pour l'aider dans ses observations; elles furent publiés en 1679, & sont aussi rapportées dans le receuil d'observations que l'académie donna en 1693.

2169. Les choses arrivèrent à Cayenne à peu-près comme M. Cassini l'avoit prévu; l'obliquité apparente de l'écliptique y parut de 23° 28′ 32″, c'est-à-dire, beaucoup plus petite qu'elle ne devoit être, suivant Tycho-Brahé; elle ne différa que de 5″ de celle qu'il devoit y avoir, en adoptant pour les réfractions, & pour la parallaxe du soleil, les tables de M. Cassini; il n'eut d'autre conséquences à tirer des observations de Cayenne, si ce n'est que les élémens par lesquels il avoit représenté les

observations faites en Europe, représentoient avec la même justesse les observations faites en Amérique, ce que ne faisoient point, les élémens dont s'étoit servi Tycho-Brahé à l'égard de l'obliquité de l'écliptique, de la parallaxe du soleil & des réfractions astronomiques.

MÉTHODES pour observer la quantité des Réfractions Astronomiques.

2170. APRÈS avoir tracé l'histoire de la réfraction, je passe aux méthodes qui ont été employées successivement pour l'observer. On a vu celle des déclinaisons (2164) : voici celle des hauteurs. La réfraction étant la différence entre la hauteur apparente & la hauteur vraie, il s'agit de pouvoir calculer celle-ci pour le moment où l'on a observé la premiere. Méthodes anciennes.

Lorsqu'on n'avoit pas l'usage des horloges, on employoit l'azimut ou l'angle Z (*fig.* 89), pour résoudre le triangle PZS, & trouver la véritable hauteur; l'angle Z ou PZS ne dépend point de la réfraction & n'en est point affecté, puisque le lieu vrai & le lieu apparent, sont dans un seul & même vertical ZS (2161), & par conséquent au même degré d'azimut; ainsi dans le triangle PZS, on connoîtra pour l'instant donné les côtés PZ & PS avec l'angle Z opposé à l'un d'eux; l'on trouvera par la trigonométrie sphérique, le troisième côté ZS, dont le complément est la hauteur vraie, qui comparée avec la hauteur apparente, observée en même temps que l'azimut, donne la quantité de la réfraction. (Tycho, *Progymn. pag.* 93). Cette méthode des azimuts n'est point usitée actuellement. *Fig.* 89.

2171. Les hauteurs correspondantes du soleil, ou d'une étoile sont très-propres à faire connoître la quantité de la réfraction, si elles sont prises avec un grand quart-de-cercle & une horloge excellente. Je suppose, par exemple, que la hauteur du soleil observée à six heures de distance du méridien, le matin & le soir, se soit trouvée de 9° précisément, & que suivant le calcul Par les hauteurs correspondantes.

(1034), elle ne doive être réellement que de 8° 54′; on saura dès-lors qu'à la hauteur apparente de 9° il y a 6′ de réfraction, & que le soleil paroît trop élevé de 6′.

Fig. 89. 2172. Dans le triangle *PZS* (*fig.* 35 ou 89), formé au pole, au zénit & au soleil, on suppose connues la distance *PZ* du pole au zénit, & la distance *PS* du soleil au pole boréal du monde, indépendamment des réfractions; mais l'erreur qui peut en résulter sur les grandes réfractions est trés-petite, & elle sera corrigée par d'autres méthodes (2174, 2181, 2215); on connoît aussi, par l'observation des hauteurs correspondantes, l'heure qu'il est, & l'angle horaire *ZPS*: ainsi l'on trouvera par la résolution du triangle *PZS* la distance au zénit, ou *ZS*; c'est le complément de la hauteur vraie, puisque les deux côtés *PZ* & *PS*, aussi bien que l'angle *P*, sont des quantités vraies, & données indépendamment des réfractions. Cette hauteur vraie, trouvée par le calcul, est toujours plus petite que la hauteur apparente observée avec le quart-de-cercle, & la différence est la quantité de réfraction qui convient à la hauteur observée. Cette méthode fut employée autrefois par M. Picard, & l'a été récemment par M. de la Caille; c'est par son moyen qu'on a reconnu que la réfraction horizontale, la plus grande de toutes les réfractions, est d'environ $32'\frac{1}{2}$.

Réfraction horizontale.

2173. M. de la Caille avant son voyage en Afrique, avoit aussi entrepris de déterminer les réfactions par le moyen des angles horaires & des hauteurs correspondantes du soleil, & des étoiles fixes les plus brillantes; il est le premier qui ait eu l'avantage d'employer cette méthode d'une maniere indépendante des hypothèses; car à son retour du Cap, connoissant la réfraction à la hauteur du pole (2187), & les déclinaisons des étoiles observées près du zénit du Cap, indépendamment des réfractions, il avoit les côtés *PS* & *PZ* avec une extrême exactitude; il a donc calculé à son retour la plupart de ces hauteurs correspondantes; elles étoient d'autant plus exactes qu'il les avoit observées avec l'intention d'en conclure, & la théorie du soleil, & les

les aſcenſions droites des étoiles, dans un temps où il ne penſoit point à aller au Cap; mais où il cherchoit à vaincre la difficulté qu'il y a de bien déterminer les aſcenſions droites des étoiles dans une ſphère auſſi oblique que la nôtre; il eut la ſatisfaction de trouver de la conformité entre ces réſultats & ceux d'une méthode plus parfaite que nous expliquerons bientôt.

M. de la Caille détermina ſur-tout en 1753, la réfraction de 18° par la méthode des hauteurs correſpondantes, avec un ſoin particulier, & par un grand nombre d'obſervations; cette réfraction de 18° eſt une des plus importantes, parce que c'eſt celle du bord du ſoleil à Paris, dans le tropique du capricorne. M. de la Caille y emploie 9 étoiles, & il trouve 20 réſultats, entre 2′ 59″ & 3′ 25″, le milieu entre tous donne la réfraction moyenne à 18° de hauteur apparente pour Paris, de 3′ 12″ 6. Réfraction ſolſtitiale d'hyver.

2174. Il y a un moyen de trouver la réfraction à de certaines hauteurs, ſans ſuppoſer l'angle *P*; elle conſiſte à obſerver une étoile qui paſſe au méridien, par le point même du zénit, ou fort près de-là, & qui paſſe enſuite au méridien ſous le pole. La réfraction étant nulle au zénit, on aura la diſtance de l'étoile au pole, ſans autre réfraction que celle de la hauteur du pole; mais lorſque l'étoile, environ 12ʰ après, paſſera au méridien ſous le pole & fort près de l'horizon, on trouvera ſa diſtance au pole beaucoup moindre, parce qu'elle ſera accourcie par la réfraction qui élève l'étoile. Par les étoiles circompolaires.

Exemple. La Claire de Perſée paſſoit il y a quelques années à ſix minutes du zénit de Paris; ainſi l'on étoit ſûr que ſa diſtance au pole étoit de 41° 4′; par conſéquent elle devoit paſſer au méridien ſous le pole à 41° 4′ du pole, ou à 7° 46′ de hauteur vraie. On l'obſervoit cependant à 7° 52′ 25″; ainſi l'on étoit aſſuré que la réfraction élevoit cette étoile de 6′ 25″ à 7° 52′ ½ de hauteur apparente, (*Inſtit. aſtr. pag.* 418). On trouvera d'autres exemples de cette méthode, art. 2226.

2175. Mais la plus grande difficulté conſiſtoit à déterminer la réfraction vers 45° de hauteur; comme elle Réfraction à 45°.

n'eſt que d'environ une minute, la méthode précèdente étoit trop peu exacte pour qu'on pût l'employer; Flamſteed & Halley faiſoient cette réfraction de 54″, Caſſini de 59″, Picard & la Hire de 71″, Bradley de 57″; M. de la Caille l'a trouvée de 66″ ½ par la méthode que nous allons expliquer; mais on croit aſſez généralement quelle ne paſſe pas 60″.

Travail de M. de la Caille ſur les réfractions.

2176. Le travail de M. de la Caille ſur les réfractions, eſt cependant un des fruits les plus précieux de ſon voyage au Cap de Bonne-Eſpérance; il eſt fondé ſur la comparaiſon répétée des diſtances de 160 étoiles au zénit de Paris & du Cap, obſervées dans chacune de ces deux ſtations, au moins ſix fois chacune, & cela avec des inſtrumens de ſix pieds de rayon, (*Mém. acad.* 1755).

2177. La premiere partie du mémoire de M. de la Caille, conſiſte à prouver que les réfractions au Cap de Bonne-Eſpérance, ſont plus petites d'un quarantième que celles de Paris, (2232). La ſeconde partie eſt deſtinée à prouver par la ſomme de 4 réfractions, qu'à la hauteur du pole de Paris, qui eſt 49°, la réfraction moyenne eſt de 58″ 2, & que la vraie différence en latitude de Paris au Cap, eſt de 82° 46′ 42″ (2186).

Depuis la hauteur de 48° juſqu'au zénit, il calcula toutes les autres réfractions pour Paris, en les ſuppoſant proportionnelles aux tangentes de la diſtance au zénit (2207). Ces réfractions ainſi connues, ſervirent à réduire en hauteurs vraies, les hauteurs apparentes des étoiles qu'il avoit obſervées au Cap depuis 48° juſqu'au zénit; il compara enſuite ces hauteurs vraies aux hauteurs apparentes des mêmes étoiles, qui étant obſervées à Paris, avoient depuis 7° juſqu'à 48° de hauteur; par ce moyen il eut un grand nombre de diſtances apparentes des parallèles de Paris & du Cap, affectées ſeulement des réfractions pour Paris à de petites hauteurs.

2178. Ces diſtances apparentes des deux parallèles étoient toutes plus grandes que 82° 46′ 42″, différence vraie des parallèles de ces deux obſervatoires (2186), & leur excès donnoit la réfraction pour chaque hauteur

obſervée à Paris. Ayant comparé de même les étoiles obſervées à de grandes hauteurs à Paris, & à de petites hauteurs au Cap, il trouva les réfractions pour le Cap, & elles ſe ſont trouvées plus petites d'un quarantième que celles de Paris. Réfraction plus petite au Cap.

2179. Toutes ces réfractions ainſi obſervées à Paris, à la hauteur de différentes étoiles, étant priſes conſécutivement de cinq en cinq, & réduites à des degrés juſtes de hauteur apparente, & à une certaine régularité dans leur progreſſion, au moyen des interpolations, M de la Caille en forma ſa table des Réfractions, que j'ai donnée dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, *p.* 251. Ce long travail fut recommencé pluſieurs fois, vérifié par un nombre immenſe de hauteurs obſervées dans le même-temps à Greenwich par M. Bradley; à Gottingen par M. Mayer; à Bologne par M. Zanotti; & par moi-même à Berlin. J'y étois allé en 1751 pour faire des obſervations correſpondantes à celles de M. l'Abbé de la Caille, & je m'occupai ſpécialement des hauteurs méridiennes des étoiles qui étoient près du zénit & près de l'horizon, pour en déduire la réfraction au Cap & à Berlin. Les comparaiſons des étoiles obſervées au Cap, fort près du zénit, & en Europe à de petites hauteurs, ont ſervi à trouver auſſi les réfractions pour Paris à ces petites hauteurs, c'eſt-à-dire, juſqu'à 30°, telles qu'elles ſont dans la table de M. de la Caille; les autres ont été conclues par la règle de M. Bradley (2206).

2180. Il eſt vrai qu'une partie de ce travail eſt fondée ſur la réfraction de 45° que M. de la Caille a trouvée plus grande que tous les autres aſtronomes (2175); on lui en fit l'objection de ſon vivant, & j'ai vu à Londres, en 1763, une lettre que M. de la Caille écrivoit à M. Bévis le 21 Décembre 1760, dans laquelle il lui diſoit qu'il avoit réſolu de faire l'été ſuivant une nouvelle vérification de ſon ſecteur, en conſéquence du ſoupçon de M. Bradley. Il avoue que pluſieurs obſervations de M. Mayer & de M. Zanotti s'accordoient à indiquer une réfraction plus petite que la ſienne, mais il avoit ſoupçonné que Doute ſur la réfraction à 45°.

l'arc de 90°, dans ces instrumens étoit trop petit de quelques secondes; c'est ainsi que celui de Greenwich est trop grand de 15″, & que l'arc de 60° du quart-de-cercle que j'avois porté à Berlin en 1751 est trop petit de 30″. La vérification que M. de la Caille se proposoit de faire sur son instrument n'a pas été exécutée, du moins, je n'en ai pas connoissance; & quoiqu'il soit actuellement entre mes mains, je n'ai pas cru qu'il fût possible de déterminer avec bien de la certitude une si petite différence, sur un instrument de six pieds, dont la suspension est une aiguille (2385). Nous parlerons encore d'une autre objection (2217).

Maniere de tripler la réfraction.

2181. Malgré le doute qui nous reste sur les réfractions de M. de la Caille, je vais continuer à expliquer les méthodes ingénieuses dont il s'est servi, & qu'on pourra employer encore avec succès. M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 411), trouva une maniere heureuse de tripler l'effet de la réfraction, à 34° de hauteur pour la rendre plus sensible: la distance apparente du soleil au zénit du Cap, en 1752, fut observée dans le solstice de 57° 21′ 55″ 6, affectée de la réfraction seulement, & la distance apparente du pole au zénit 56° 3′ 10″ 3, aussi affectée de la réfraction; la premiere réfraction est plus grande de 4″9 que la seconde, il faut l'augmenter de cette quantité pour avoir la distance du zénit au tropique du cancer 57° 22′ 0″5, affectée de la même réfraction que celle de la distance du zénit au pole.

La distance vraie du tropique du Capricorne au zénit du Cap étant fort petite, on peut supposer d'abord que sa réfraction soit connue, & l'employer de 10″1; s'il y a une erreur, elle sera d'autant plus petite, que la quantité elle-même est moindre, & l'on sera à même d'y revenir ensuite. Cela étant supposé, M. de la Caille trouve la vraie distance du tropique au zénit du Cap de 10° 26′ 53″3, il y ajoute la distance du zénit au pole austral affectée de la réfraction, 56° 3′ 10″3, de sorte que la distance du pole austral au tropique du Capricorne, altérée par la réfraction de la hauteur du pole est 66° 30′ 3″6.

2182. On a donc ſéparément trois quantités affectées chacune de la réfraction qui convient à la hauteur apparente du pole 33° 57′, & qui ſans la réfraction devroient faire enſemble 180° degrés, ſavoir :

La diſtance du pole au trop. du cancer.	66°	30′	3″6
La diſtance du pole au zénit.	56	3	10 3
La diſtance du zénit au trop. du cancer. . .	57	22	0, 5
Som. de ces 3 quant. dimin. de 3 réf. égal.	179	55	14, 4
La véritable ſomme devoit être.	180	0	0
Donc le triple de la réfraction eſt.		4	45, 6
Et la réfraction à 34° de hauteur		1	35, 2

2183. M. de la Caille trouva auſſi un moyen pour quadrupler la réfraction : la poſition du Cap de Bonne-Eſpérance à l'égard de Paris étoit ſinguliere, par deux circonſtances qui ſe trouvèrent favorables pour la détermination directe des réfractions, & M. de la Caille ſut en profiter d'une maniere ingénieuſe pour quadrupler l'effet qu'il avoit beſoin de déterminer, & rendre par-là quatre fois moindres les petites incertitudes qu'on pouvoit craindre ſur le réſultat. Manière de quadrupler la réfraction.

La premiere circonſtance eſt que la hauteur du tropique du cancer au Cap, eſt à peu-près la même que celle du pole auſtral ; de-là il eſt aiſé de conclure, ſans aucun calcul & ſans aucune hypothèſe, la réfraction abſolue à cette hauteur de 34°, en comparant la hauteur ſolſticiale du ſoleil, avec la hauteur apparente du pole, (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 411).

La ſeconde circonſtance eſt que la diſtance du pole boréal du monde au zénit de Paris, 41° 10′, eſt preſque égale à la moitié de l'arc intercepté, entre le Cap & Paris, qui eſt de 82° 46′ 42″ ; d'où il ſuit que ſi les réfractions ſont les mêmes, ou ſi l'on connoît leur rapport, on peut trouver directement la réfraction qui convient à la hauteur du pole de Paris.

2184. La diſtance vraie des parallèles de Paris & du Cap eſt de 82° 46′ environ, dont la moitié eſt 41° 23′,

ainsi une étoile située à 41° 23′ du zénit de chacun, auroit la même hauteur méridienne, & la même réfraction; mais chaque distance au zénit étant diminuée par la réfraction de 58″, la somme de ces deux distances doit être diminuée du double, ou de 1′ 56″ par l'effet de la réfraction; ainsi la distance apparente des deux parallèles conclue de la somme de ces deux distances observées est trop petite du double de la réfraction qui a lieu à 41° 23′ du zénit.

Il y a grand nombre d'étoiles qui ayant environ 41° de distance au zénit, ont pu servir à cette recherche; M. de la Caille y employa 13 étoiles qui sont entre 38° 50′ & 44° 10′, savoir β du Serpentaire, δ de la Vierge, ε du Serpent, β de l'Aigle, Procyon, γ d'Orion, α du Serpent, α d'Orion, α de l'Aigle, ε de Pégase, β du petit Chien, β de l'Écrevisse, & γ de l'Aigle; elles étoient toutes également propres à cette recherche, parce que si l'une de ces étoiles passe à moins de 41° 23′ du zénit de Paris, & y éprouve une moindre réfraction, elle passe au Cap à une distance plus grande & y éprouve une plus forte réfraction, ainsi la somme des deux réfractions est encore la même que si chacune de ces étoiles étoit précisément à 41° 23′ de chaque zénit. Si la réfraction croissoit en raison simple des distances au zénit, il seroit inutile de s'assujettir à certaines limites, comme celles de ces 13 étoiles; or, dans toutes les hypothèses & dans toutes les tables de réfraction, on trouve un progrès uniforme de 38 à 44° de distance au zénit, ainsi toutes les étoiles précédentes ont dû donner la distance apparente des parallèles de Paris & du Cap, affectée du double de la réfraction qui a lieu à 41° 23′ de distance au zénit, en supposant qu'à même hauteur elle soit la même au Cap & à Paris. Cette distance apparente diminuée de deux réfractions, s'est trouvée de 82° 44′ 46″.

La hauteur apparente du pole au Cap, affectée de la réfraction à cette hauteur, fut observée sur un grand nombre d'étoiles de 33° 56′ 49″ 1, & celle du College Mazarin à Paris, où M. de la Caille avoit fait une

multitude d'observations, de 48° 52′ 27″ 5 ; la somme de ces deux hauteurs apparentes, donne 82° 49′ 16″ 6 pour la distance des deux parallèles de Paris & du Cap, augmentée par la somme de deux réfractions qu'il eût fallu en soustraire pour avoir les hauteurs vraies. Cette distance augmentée est plus grande de 4′ 30″ 6, que la distance diminuée qui est de 82° 44′ 6″ ; ainsi l'on a 4′ 30″ 6 pour la somme des quatre réfractions qu'il s'agit de séparer.

Distance apparente plus grande que la vraie.

2185. Si ces 4 réfractions étoient égales, il suffiroit de prendre le quart des 4′ 30″6 pour avoir la réfraction cherchée ; mais de ces 4 réfractions, il y en a deux qui doivent être différentes d'un quarantième, & qui répondent à 41° 23′, une pour 56° 3′, distance du pole au zénit du Cap, & une pour 41° 8′, distance apparente du pole au zénit de Paris ; ainsi il faut diviser 4′ 30″6 en 4 parties, qui ayent les conditions requises dans les 4 cas que je viens d'expliquer.

Partage des 4 réfractions.

Pour parvenir à ce partage convenable, & pour séparer les 4 réfractions contenues dans la quantité de 4′ 30″, il n'y a qu'à employer la règle démontrée ci-aprés (2207), que les réfractions sont comme les tangentes des distances au zénit, en faisant celles du Cap plus petites d'un quarantième que celles de Paris ; l'on trouvera 1′ 36″5 pour la hauteur de 33° 57′ au Cap, 57″ 2 pour 41° 22′ de distance au zénit du Cap, 58″ 2 pour 48° 52′ de hauteur apparente à Paris ; & 58″7 pour 41° 22′ de distance au zénit à Paris ; ce sont là les quatre réfractions dont la somme est de 4′ 30″6, & qui ont servi à M. de la Caille pour trouver les réfractions moindres, en suivant les tangentes des distances au zénit (2207), (*Mém.* 1755, *p.* 568).

Réfraction à la hauteur du pole.

2186. La réfraction trouvée, par ce moyen, pour 41° distance au zénit étant appliquée à chacune des hauteurs égales d'une même étoile, observées au Cap & à Paris, a fait connoître que la vraie distance des parallèles est de 82° 46′ 42″, & cette vraie distance a servi à trouver toutes les réfractions à de petites hauteurs, depuis 6° où elle est de 8′ 42″, jusqu'au zénit ; M. de la Caille n'a rien voulu statuer sur les hauteurs plus petites (2254).

Distance vraie des parallèles.

2187. On peut séparer encore par une autre méthode sans le secours d'aucune hypothèse, les 4 réfractions contenues dans 4′ 30″6. Il faut d'abord en retrancher 1′ 35″2, réfraction trouvée immédiatement par observation pour 33° 57′ de hauteur apparente (2182); le reste 2′ 55″4 sera la somme de trois réfractions presque égales, qui répondent aux distances apparentes de 41° 8′ à Paris, & 41° 22′ au Cap & à Paris; l'on aura donc 58″6 pour 41° 8′ à Paris, 57″8 pour 41° 22′ au Cap, & 59″0 pour 41° 22′ à Paris, quantités qui ne diffèrent pas sensiblement de ce que nous venons de trouver (2185), & d'où il résulte, suivant M. de la Caille, qu'à 45° la réfraction est de 66″$\frac{1}{2}$; il est aisé d'en conclure toutes les autres qui sont comme les tangentes des distances au zénit (2207).

2188. A l'égard des réfractions à de moindres hauteurs, il les a déterminées immédiatement en comparant les hauteurs méridiennes d'étoiles qu'il avoit observées au Cap, avec celles qu'il observa ensuite à Paris & avec celles des autres astronomes (2179).

2189. Jamais table de réfractions, ni aucune autre table astronomique n'a été vérifiée par tant d'observations, ni avec des précautions aussi grandes que celle dont on vient de voir la construction; il étoit donc bien naturel que M. de la Caille jugeât de l'exactitude des tables qui avoient paru jusqu'alors par leur comparaison avec la sienne. Dans la table de réfraction, dressée par M. Cassini, & qui étoit depuis long-temps celle du livre de la *Connoiss. des temps*, les réfractions sont un peu plus petites; savoir de 4″ à 18°, de 16″ à 30°, de 6″ à 49°, &c. Cette table fut calculée vers 1662, par Dominique Cassini, & imprimée la même année à la fin des éphémérides de *Malvasia*, sous le titre de *Refractio æstiva*. Il y avoit dans le même livre une table qu'il appelloit *Refractio æquinoctialis*, & une autre qui étoit destinée pour l'hiver, la réfraction équinoxiale, qui étoit sa réfraction moyenne, étoit si conforme à celle de M. de la Caille, sur-tout depuis 23° de hauteur, qu'à peine trouve-t-on une

Réfractions de M. Cassini.

une seconde de différence, de sorte qu'on peut dire, à la gloire de ce grand homme, qu'il fut le premier qui calcula géométriquement la réfraction, & que de ceux qui vinrent après lui, pas un ne réussit aussi-bien. Il est vrai que ces réfractions équinoxiales deviennent ensuite un peu trop grandes en approchant de l'horizon, mais il s'en faut beaucoup qu'elles soient en excès autant que les tables de Flamsteed & de Newton sont en défaut; & M. de la Caille pense que cette table des réfractions équinoxiales, est la meilleure de toutes celles qui ont été calculées depuis 1662. (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 576).

Les réfractions publiées dans les tables de M. de la Hire, (*pag.* 6), & qui avoient été calculées en tout ou en partie, par M. Picard, s'accordent assez bien avec celles de M. de la Caille, depuis l'horizon jusques vers 35° de hauteur, mais depuis 35° jusqu'au zénit, elles sont toujours trop grandes.

Les réfractions de Flamsteed, sont celles qui s'éloignent le plus de celles de M. de la Caille, elles sont plus petites de 1′ 4″ à 10°, de 40″ à 20°, de 31″ à 30°, & de 21″ à 40° de hauteur. Réfractions de Flamsteed.

Les réfractions de Newton & de Halley sont aussi trop petites de 45″ à 10° de hauteur, de 29″ à 20°, de 22″ à 30°, & de 15″ à 40°. Enfin, celles de M. Bradley sont plus petites de 14″ à 6°, de 22″ à 10°, de 26″ à 20°, de 11″ à 40°. Réfractions de Bradley.

Mais de peur qu'on n'objecte à M. de la Caille que les réfractions peuvent être moindres en Angleterre qu'à Paris, M. de la Caille rapporte la comparaison de 23 hauteurs méridiennes d'étoiles observées à Greenwich, à de petites hauteurs, en même temps qu'il les observoit au Cap près du zénit, & il les trouve d'accord, en les corrigeant par sa table de réfractions; en supposant la latitude de Greenwich de 51° 28′ 53″, & la distance vraie des parallèles de Greenwich & du Cap 85° 24′ 5″,8; il ne s'en trouve que quatre qui s'écartent de 5 à 6″, & toutes les autres s'accordent à 2 ou 3″ près, à donner la même distance des paralelles. Il a fait de même la comparaison

de 35 étoiles observées à Gottingen, 24 à Bologne, & 50 que j'avois observées à Berlin, chacune plusieurs fois avec un mural de cinq pieds de rayon, & il a trouvé continuellement le même accord. Ainsi quoique l'on soit persuadé assez généralement que les réfractions de M. de la Caille sont un peu trop fortes, je crois qu'il importe de s'en assurer encore, & l'on ne pourra faire mieux que de suivre la route de cet incomparable astronome.

Des hypothèses physiques propres à représenter les réfractions.

2190. Quoiqu'on puisse déterminer immédiatement par observation à toutes les hauteurs possibles la réfraction astronomique, il seroit très-utile d'en connoître la loi, de maniere à pouvoir remplir par un calcul exact les intervalles que l'observation a laissés : voici les diverses tentatives qu'on a faites à ce sujet.

M. Cassini, en 1662, voyant que la maniere d'observer les réfractions qu'avoit employé Tycho, ne pouvoit faire connoître la réfraction à de grandes hauteurs, & dès qu'elle est moindre qu'une minute, songea à y employer le calcul & la théorie ; sa méthode fut perfectionnée dans la suite, & on la trouve dans les élémens d'*Astronomie de M. Cassini le fils*, page 15.

Hypothèse de M. Cassini. *Fig.* 139.

2191. Soit *AB* la surface de la terre, (*fig.* 139) *EKG* la surface de l'atmosphère ou de la matiere réfractive, supposée homogène, *IG* le rayon de l'étoile avant son entrée dans l'atmosphère, *GA* le rayon rompu, qui est perpendiculaire à la ligne verticale *CAZ*, lorsque l'étoile paroît à l'horizon ; au lieu de voir l'étoile sur le rayon *FG*, on la doit voir sur la ligne droite *IGT*, & l'angle *TGF* que forme le rayon direct, avec le prolongement *GT* du rayon rompu est la quantité de la réfraction horizontale, que M. Cassini avoit trouvée par observation de 32′ 20″. Lorsque l'étoile se sera élevée en *M* son rayon direct sera *MK*, & le rayon rompu *AKN*;

l'angle *MKN* est l'angle de réfraction à cette hauteur; je suppose avec M. Cassini qu'elle ait été observée de 5′ 28″ à 10° de hauteur apparente (2172, 2189).

La hauteur *AE* que l'on veut donner à l'atmosphère supposée homogène doit être telle que les sinus des angles d'incidence *FGF*, *MKR*, soient aux sinus des angles rompus *PGT* *RKN* dans un rapport constant, & que les réfractions *FGT* *MKN* soient entre elles, comme 32′ 20″ & 5′ 28″, ces deux réfractions étant supposées immédiatement & exactement connues par observation.

Pour trouver cette hauteur, M. Cassini emploie la méthode indirecte de fausse position; il suppose de 2000 toises la hauteur *AE* de l'atmosphère uniforme, le rayon *AC* de la terre étant de 3271600 toises, ainsi la longueur totale *CE* ou *CG* sera de 3273600 toises. (*Elém. d'astron. pag.* 15). Dans le triangle *CAG* rectangle en *A*, dont on connoît *CA* & *CG*, on trouvera l'angle *CGA* de 87° 59′ 50″, auquel on ajoutera la réfraction *FGT* de 32′ 20″, & l'on aura l'angle *FGP* de 88° 32′ 10″; c'est l'angle d'incidence pour le rayon *FG* à son entrée dans l'atmosphère en *G*. De même dans le triangle *CAK*, dont on connoît les côtés *CA*, *CK* & l'angle *CAK* de 100° à la hauteur apparente de 10°, l'on trouvera l'angle *AKC* égal à l'angle *RKN* de 79° 48′ 12″.

2192. Pour trouver la réfraction en *K*, l'on dira: le sinus de l'angle rompu *CGA* 87° 59′ 50″, est au sinus de l'angle d'incidence *FGP*, 88° 32′ 10″, comme le sinus de l'angle rompu *RKN*, 79° 48′ 12″, est au sinus de l'angle d'incidence *MKR* 79° 53′ 40″, dont retranchant l'angle *NKR* 79° 48′ 12″, il reste l'angle *MKN* de 5′ 28″; c'est la réfraction à la hauteur apparente de 10°; & comme cette réfraction est véritablement égale à celle que M. Cassini avoit observée, il s'en suit que la hauteur de l'atmosphère supposée de 2000 toises suffit pour représenter les deux réfractions observées de 5′ 28″, & 32′ 20″. Si l'on avoit trouvé dans le calcul précédent une réfraction plus ou moins grande que 5′ 28″, on auroit recommencé le calcul, en supposant une hauteur de l'atmosphère

Règle pour trouver la réfraction.

un peu différente de 2000 toises. La même règle servira pour trouver toute autre réfraction par le calcul.

2193. Cette hypothèse de M. Cassini sur la hauteur d'une matiere réfractive équivalente à la hauteur de l'atmosphère, s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations faites à différens degrés de hauteurs, ensorte qu'elle peut donner avec très-grande facilité, comme on vient de le voir, & avec une précision suffisante, la réfraction qui convient à une hauteur quelconque.

Cependant il y a une grande différence entre l'hypothèse de M. Cassini qui suppose une matiere homogène finissant à 2000 toises d'élévation, & l'état réel de l'atmosphère qui diminue insensiblement & par degrés, & qui est encore sensible à 54 mille toises de hauteur, par l'ombre qu'elle répand sur le disque de la lune (1776), & à 34 mille par son effet sur les crépuscules (2270); mais malgré cette différence entre l'hypothèse de 2000 toises, & la nature de l'air, il suffit pour l'astronomie d'y trouver un équivalent qui compense, par la simplicité du calcul, le petit degré de précision qui manque peut-être à l'hypothèse. Au reste, nous allons passer à une détermination plus rigoureuse de ce problême Physico-Mathématique.

2194. La découverte du principe général de l'attraction, fit reconnoître à Newton que la réfraction de la lumiere étoit un effet de l'attraction que l'atmosphère exerce sur les corpuscules de la lumière. En partant de ce principe, on peut déterminer la trajectoire du rayon, & la loi suivant laquelle varie la réfraction depuis le zénit jusqu'à l'horizon. Un rayon de lumière qui est attiré successivement vers le centre de la terre par les différentes couches de l'atmosphère, se trouve par-là détourné de la ligne droite qu'il suivroit dans le vide; cette attraction, qui va toujours en augmentant lorsque le rayon s'enfonce dans l'atmosphère, produit une réfraction qui augmente toujours de plus en plus; la somme de toutes ces réfractions, quand le rayon arrive à notre œil, forme la réfraction astronomique.

Trajectoire d'un rayon.

2195. Pusieurs auteurs ont cherché à déterminer la courbe décrite par ce rayon dans l'atmosphère ; M. Taylor, (*Method. increm. directa & inversa*) ; M. Bernoulli, (*Hydrodyn. pag.* 221) ; M. Euler, (*Mém. de Berlin* 1754 ; *Tom.* X. *pag.* 131) ; M. Simpson, (*Mathematical Dissertations*, *pag.* 46, 1743). On peut voir encore sur cette matiere un ouvrage qui a pour titre : *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, par J. H. Lambert, à la Haye 1759, *in*-8°. Enfin, le P. Boscovich ayant traité cette matiere d'une façon plus simple & plus élégante qu'aucun des géomètres qui l'avoient précédé, & m'ayant communiqué son travail ; je me servirai de sa méthode pour démontrer la loi des réfractions, trouvée par M. Simpson, & celle que M. Bradley en a déduite, sans en avoir donné la démonstration (2203), mais que j'avois démontrée déjà dans la premiere édition de cet ouvrage (a).

2196. Pour déterminer la réfraction, il s'agit de considérer, en général, la courbe qu'une particule de lumière doit décrire lorsqu'elle est sans cesse attirée vers le centre de la terre avec une force quelconque. Soit *C* le centre de la terre, (*fig.* 140) vers lequel est attiré le corpuscule *F* de lumière ; *A* le lieu de l'observateur, *Z* le zénit ; *FA* la courbe que doit décrire le rayon ; *SF* la ligne par laquelle il entre dans l'atmosphère, *BIA* la direction du rayon qui arrive au point *A*, *FH* & *AG* les tangentes à la courbe en *A* & en *F*, & qui se coupent en *I* ; on abaissera du centre *C* de la terre des perpendiculaires *CH* & *CG* sur ces tangentes ; l'angle *ZAI* est la distance apparente au zénit pour un astre *S* ou *F*, & si l'on suppose *AK* parallèle à *FS*, l'angle *ZAK* sera la distance vraie. La premiere tangente *SFH* de la courbe décrite par le rayon de lumière étant continuée, rencontre en un point *I* la derniere tangente *AIB*, qui marque

Méthode du P. Boscovich.

Fig. 140.

(a) On ne peut se dispenser de supposer ici la connoissance du calcul différentiel dont il sera parlé dans le XXIe Livre : ainsi le lecteur qui n'y auroit pas encore pénétré, doit passer les démonstrations suivantes, & se contenter d'en voir les résultats.

Fig. 140. le lieu apparent de l'aſtre ; la réfraction aſtronomique eſt égale à l'angle *BIS* ou *GIH* des deux tangentes ; & puiſqu'on ſuppoſe *AK* parallèle à *SFIH*, elle eſt encore égale à l'angle *BAK*.

2197. La première choſe qu'il eſt bon de démontrer relativement à la cauſe phyſique des réfractions, c'eſt que leur changement ne dépend que de la conſtitution de la partie baſſe de l'atmoſphère, & pour cela nous ferons ſur le mouvement, en général, quelques remarques néceſſaires. Dans toutes les courbes décrites en vertu d'une force de projection uniforme & d'une force centrale quelconques, la force à égales diſtances du centre étant égale, *la vîteſſe en différens points de la courbe eſt en raiſon inverſe des perpendiculaires* abaiſſées ſur les tangentes en ces différens points ; car les aires étant toujours égales (1233), & étant le produit de l'arc de la courbe par la perpendiculaire abaiſſée ſur cet arc prolongé, ou ſur la tangente, les petits arcs de la courbe diminueront dans le même rapport que les perpendiculaires augmenteront, & de maniere à former toujours le même produit. Ainſi la vîteſſe du corpuſcule de lumière en *F* eſt à ſa vîteſſe en *A*, comme *CG* eſt à *CH* ; & faiſant le rayon de la terre $CA = 1$, $CH = y$, la vîteſſe dans un point *F* de la courbe $= v$, la vîteſſe finale en $A = c$, l'angle *CAG* ou la diſtance apparente au zénit $= a$, enſorte que $CG =$ ſin. a, on aura $v = \frac{c \text{ ſin. } a}{y}$.

2198. Suppoſons pour un inſtant que *FA* ſoit un arc infiniment petit, compris entre deux lignes droites finies *FC*, *AC*, dont l'angle *FCA* ſoit $= dx$; ſoient tirées deux tangentes *FI*, *AI*, une ligne *AL* parallèle à *CF*, *AQ* perpendiculaire à *CF*, & *QO* perpendiculaire ſur la corde *AOF*. Si la réfraction totale *HIG* eſt égale à r, on aura dans le cas de la portion infiniment petite $FCA = dx$, $LIA = dr$, puiſque l'une eſt la différentielle de l'angle au centre *C*, & l'autre l'angle d'une tangente de la courbe avec la tangente qui en eſt infiniment proche, & que la ſomme de tous ces angles eſt l'inclinaiſon de

la derniere tangente sur la premiere. Si l'on fait encore $CA = z$, $FQ = dz$, la force réfractive en $F = f$, $CH = y$, la vîtesse en F étant $\frac{v \text{ sin. } a}{y}$; l'espace FA qui est comme le produit du temps par la vîtesse sera $v\,dt$, & l'effet AL de la force accélératrice sera proportionel à la force & au carré du temps (3365) ou $f\,dt^2$. La force suivant FQ ou la force réfractive absolue f est à cette même force décomposée suivant FA ou FO, comme FQ est à FO, comme FA est à FQ, comme $v\,dt$ est à dz, c'est-à-dire, $v\,dt : dz :: f : \frac{f\,dz}{v\,dt}$, expression de la force attractive, dans la direction du mouvement FI de la lumière; ainsi la différentielle de la vîtesse, qui est comme la force & le temps conjointement, c'est-à-dire, $dv = \frac{f\,dz\,dt}{v\,dt}$; donc $v\,dv = f\,dz$; ainsi l'augmentation du carré de la vîtesse dans chacun des petits arcs de la courbe est comme la force absolue, & le changement de la distance au centre.

2199. De-là il suit que si deux particules de lumiere appartenantes à deux rayons différens, ont eu une fois des vîtesses égales à même distance du centre, elles les auront toujours; car en se rapprochant également du centre elles éprouveront des forces égales, des accroissemens égaux dans les carrés de vîtesses égales, ainsi les vîtesses elles-mêmes seront égales. Mais tous les rayons homogènes parviennent à la premiere surface de l'atmosphère avec des vîtesses égales, ainsi sous quelle direction qu'ils traversent l'atmosphère, ils auront des vîtesses égales à même distance du centre, la valeur de c ou de la vîtesse finale en A sera constante pour tous les rayons; le rapport de CH à CG ou de la vîtesse finale à la vîtesse initiale, sera également le même; ce rapport différera peu de l'égalité, puisque la réfraction est toujours fort petite en comparaison de la distance au zénit. Vîtesses égales à même distance.

2200. Quelque changement qui arrive dans l'atmosphère, pourvu que son état reste le même en A, la vîtesse finale sera la même; car l'augmentation du carré de la vîtesse, sera comme la somme de tous les produits des

forces attractives dans chaque couche par leurs épaisseurs relatives, c'est-à-dire, des fdz. Que l'on conçoive l'atmosphère divisée en plusieurs couches de même épaisseur; la force en chaque point sera l'excès des actions qu'exerçent les couches inférieures sur celles des couches supérieures; le rayon approchant de la terre, les effets des couches intermédiaires seront successivement détruits, & il ne restera que l'effet produit par l'excès de la dernière force sur la première. Ainsi quoique la lumière parvienne à l'air qui nous touche par un nombre quelconque de milieux différemment denses, sa vîtesse est la même que si elle y parvenoit immédiatement de l'Ether. La vîtesse de la lumière en A ne dépend donc que de la constitution de l'atmosphère en A, & de la hauteur du thermomètre ou du baromètre dans le lieu de l'observation; mais la situation du point I ou de l'intersection des deux tangentes, peut rendre plus variable la réfraction aux environs de l'horizon.

La réfraction ne dépend que de l'air inférieur.

2201. Pour avoir la loi des réfractions, il faut trouver leur rapport avec la distance au zénit & avec l'angle FCE, formé au centre de la terre. La hauteur de l'atmosphère ou la longueur de CF étant la même pour tous les rayons de même espèce, le rapport du sinus d'incidence CFH, au sinus de réfraction CAG sera le même pour tous, car ces sinus sont $\frac{CH}{CF}$ & $\frac{CG}{CA}$ (3613); si le rapport des vîtesses en A & en F ou de CH à CG est celui de $1+b$ à 1, & que la hauteur de l'atmosphère MF soit $= e$, ce rapport de $\frac{CH}{CF}$ à $\frac{CG}{CA}$ sera celui de $\frac{1+b}{1+e}$ à 1. Si l'on fait $\frac{1+b}{1+e} = m$, on aura $1 : m$;: sin. CAG ou sin. a : sin. CFH, qui sera $= m$ sin. a.

Dans le quadrilatère rectiligne $CFIA$ les quatre angles internes sont nécessairement quatre angles droits, aussi bien que les angles internes A & I réunis avec leurs externes; retranchant de part & d'autre les deux internes A & I, l'on aura les deux externes A & I égaux aux deux autres internes C & F, ou $CFI + ACF = CAG + GIH$;

GIH; CFI ou $CFH = CAG - ACF + GIH = a - (x - r)$, ainsi l'on aura m sin. a = sin. $(a - (x - r))$. Nous en déduirons la règle de Simpson (2210). La somme de deux sinus qui sont comme 1 & m est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles a, & $a - (x - r)$ est à la tangente de leur demi-différence (3644); ainsi $1 + m : 1 - m ::$ tang. $(a - \frac{1}{2}(x - r))$: tang. $\frac{1}{2}(x - r)$; & puisque ce rapport est constant, il s'ensuit que la tangente de $\frac{1}{2}(x - r)$ ou le petit angle lui-même $x - r$ sera comme la tangente de $(a - \frac{1}{2}(x - r))$ ou de la distance apparente au zénit diminuée du petit angle $\frac{x - r}{2}$.

2202. Si le rapport de x à r ou de l'angle au centre à la réfraction est constant, le petit angle $\frac{x - r}{2}$ sera un certain multiple de la réfraction r; & la réfraction elle-même sera comme la tangente de la distance au zénit, diminuée d'un certain multiple de la réfraction, nous verrons que c'est à peu-près trois fois la réfraction. Pour que le rapport de x à r soit constant, il faut supposer que la force attractive des couches de l'atmosphère croît uniformément, & que le rayon éprouve continuellement la même force, en passant d'une couche à la suivante. Dans cette supposition de la force constante, soit un arc infiniment petit $AF = vdt$ (2198); la tangente AI sensiblement égale à la moitié de l'arc, sera $\frac{vdt}{2}$; le sinus de CFA, ou de CFL (qui lui est égal, parce que l'angle AFL est infiniment petit) est $= \frac{AQ}{AF}$, mais l'arc AQ est comme l'angle multiplié par le rayon (3357), ainsi $AQ = zdx$, & comme $AF = vdt$ le sinus de CFA sera $\frac{zdx}{vdt}$; mais $AI : AL ::$ sin. ALI ou ALH : sin. AIL; c'est-à-dire, $\frac{vdt}{2} : fdt^2 :: \frac{zdx}{vdt}$: sin. dr, donc sin. dr ou dr lui-même $= \frac{2fzdx}{v^2}$, & $\frac{dr}{dx} = \frac{2fz}{v^2}$; ainsi l'on a le rapport entre le petit changement de la réfraction & l'angle au centre.

Force constante.

Le rapport $\frac{2z}{vv}$ est pour ainsi dire constant, parce que les vîtesses & les distances au centre de la terre ne changent que très-peu, ainsi $\frac{dr}{dx}$ est sensiblement comme la force réfractive f, qui a lieu dans chacune des couches de l'atmosphère, & si cette force f est sensiblement constante, ou égale dans les différentes hauteurs de l'atmosphère, le rapport $\frac{dr}{dx}$ sera constant.

2203. Ainsi en supposant que la force réfractive est constante dans toute l'atmosphère, le rapport de x à r est un rapport constant; dans cette hypothèse Simpson, en prenant deux réfractions observées, trouvoit $r = \frac{2}{11}(x - r)$, ou $x = 6\frac{1}{2}r$; Bradley supposoit $\frac{2}{12}$ ou $\frac{1}{6}$, au lieu de $\frac{2}{11}$, & faisoit $x = 7r$; d'où il suit que $a - \frac{x-r}{2} = a - 3r$, ainsi *la réfraction est comme la tangente de la distance au zénit diminuée de trois fois la réfraction.* C'est la règle trouvée par M. Bradley peu de temps avant sa mort, mais qui n'avoit été ni publiée ni démontrée avant la premiere édition de mon Ouvrage; elle s'est trouvée assez bien d'accord avec les observations; nous verrons bientôt la maniere de trouver ce nombre trois par le moyen des observations (2210, 2213). Cette démonstration de la règle de Bradley, que le P. Boscovich déduit des notions les plus simples du mouvement est la plus élégante & la plus simple qu'on eût pu desirer.

Règle de Bradley.

2204. Les principes que l'on vient de voir suffisent pour prouver que dans toutes les hypothèses qu'on fait sur le progrès de la force réfringente, le sinus d'incidence est au sinus de réfraction en raison constante, & en raison inverse de la vîtesse dans le premier milieu, à la vîtesse dans le second, (on suppose que le rayon soit attiré perpendiculairement à la surface réfringente & à une très-petite distance). Car si AC devenoit paralléle à CF, CA & CF seroient égaux, CFH seroit l'angle d'incidence, CAG l'angle de réfraction, & le rapport de leurs sinus seroit celui des perpendi-

laires *CH* & *CG* ou des vîtesses, donc les vîtesses sont en raison inverse des sinus de réfraction & d'incidence.

2205. D'après la règle de Bradley on a $x = 7r$, c'est-à-dire, l'angle *FCA* égal à 7 fois la réfraction; ainsi la réfraction est toujours la septieme partie de l'angle au centre de la terre, dans lequel est renfermé tout l'espace que le rayon a parcouru dans l'atmosphère. Nous en ferons usage pour les réfractions terrestres (2252).

2206. Pour faire usage de la règle de Bradley, je suppose que la réfraction soit de 33′ à l'horizon, & qu'on demande celle qui a lieu à 45°: le triple de la réfraction horizontale, 1° 39′, étant ôté de la distance apparente au zénit 90°, on a 88° 21′, on en conclura la réfraction pour 45°, dès qu'on saura que cette réfraction est d'environ 1′, en disant, la tangente de 88° 21′ est à la tangente de 44° 57′, comme la réfraction horizontale 33′ est à 57″, qui est exactement la réfraction pour 45° 0′ de distance apparente au zénit. C'est par cette règle qu'on a construit la table de réfractions de M. Bradley, que j'ai publiée dans la connoissance des mouvemens célestes pour 1765, & pour les années suivantes jusqu'à 1770, ainsi que dans la premiere édition de cet ouvrage. Cette même règle a servi à calculer une partie de la table de M. de la Caille (2177).

2207. Cette règle qui a lieu dans les petites hauteurs comme dans les grandes, & qui est confirmée sensiblement par les observations, prouve aussi que les réfractions sont proportionnelles aux tangentes des distances au zénit, tant que ces réfractions ne passent pas environ 3′, ou que leurs hauteurs excedent 20°; car alors les tangentes des distances simples ou celles de ces distances diminuées de trois fois la réfraction, ont sensiblement le même rapport; ainsi nous avons pu supposer, sans aucune erreur sensible, que les réfractions au-dessus du pole à Paris étoient comme les tangentes des distances au zénit (2187). Mais en approchant de l'horizon la simple distance au zénit ne suffit plus, parce que la réfraction étant triplée, produit dans les tan- Règle plus simple.

gentes une différence énorme, il faut alors employer une fausse position pour calculer la réfraction par la règle de Bradley, comme dans l'exemple précédent.

Qualité réfractive de l'air.

2208. On sait par les expériences du baromètre que les densités de l'air grossier croissent en progression géométrique, & non pas en progression arithmétique en s'approchant de la terre. (Voyez Mariotte, Gravesande, Mussenbroëck, Nollet, l'Encyclopédie; la connoissance des mouvemens célestes 1765, *pag.* 212). Mais on a lieu de croire que la réfraction, ou en général la force attractive des corps sur les rayons de lumiere, ne dépend pas seulement de leur densité, mais aussi d'une cause interne qui est peut-être la structure de leurs parties, leur distribution, leurs interstices, leur viscosité, leur adhérence, leur qualité plus ou moins huileuse, plus ou moins inflammable. M. Simpson attribuoit cette différence entre la loi des densités observées avec le baromètre, & celle que nous admettons pour les réfractions dans l'étendue de l'atmosphère à la chaleur de l'air, beaucoup plus grande vers la surface de la terre que dans la région supérieure. Mais, quoi qu'il en soit de cette cause, on sait d'ailleurs que la réfraction n'augmente pas toujours comme les pesanteurs ou les densités des corps réfringens : l'esprit de térébenthine est bien plus léger que le verre, & cependant la réfraction y est presque aussi grande; ainsi rien n'empêche de croire que la matiere réfractive change de densité d'une maniere uniforme en s'élevant au-dessus de la terre, quoique cela ne soit pas vrai pour l'air grossier. Quoique les expériences faites sur un air condensé fassent paroître la réfraction proportionnelle à la densité, il peut arriver que la matiere électrique, ou la matiere du feu, beaucoup plus abondante dans la région supérieure de l'atmosphere que dans la partie basse, rende la réfraction plus grande à une certaine hauteur qu'elle ne devroit être, si l'air étoit homogène avec celui que nous respirons; par-là il peut arriver que la force réfractive approche bien plus de l'uniformité que de la

progression géométrique. Au reste, M. Cassini, (*Mém. acad.* 1714), employoit une courbe circulaire pour les rayons de lumiere, ce qui suppose implicitement une force réfractive constante; & M. Bouguer, (*Mém. acad.* 1749), trouvoit aussi un rapport constant entre x & r (2203), dans des suppositions qui reviennent à celle d'une force constante.

2209. Cette hypothèse s'accorde avec les réfractions observées; tandis que la loi des densités démontrée par les hauteurs du baromètre ne sauroit s'y appliquer; si l'on calcule la quantité de la réfraction horizontale suivant cette loi des densités au moyen de la pesanteur spécifique de l'air & de la force réfractive, qui sont connues, l'on trouve cette réfraction horizontale de 52′, au lieu de 32′ que l'on observe réellement; mais quand on calcule cette même réfraction horizontale en supposant que la densité croisse uniformément, on approche beaucoup de l'observation. Au-dessus de 7° de hauteur, il est indifférent, quelle supposition l'on fasse sur les densités de l'atmosphère; car si l'on prend une réfraction observée à une hauteur qui ne soit pas au-dessous de 7°, & qu'on en déduise les autres réfractions suivant les deux hypothèses différentes, on ne trouvera jamais plus de 2″ de différence, d'où M. Simpson. (*Math. diff.* pag. 61), conclut que l'hypothèse des accroissemens égaux étant beaucoup plus conforme à l'observation vers l'horizon, doit donner elle seule une table fort exacte des réfractions à de plus grandes hauteurs, aussi-tôt que les grandes réfractions sont une fois observées. Force constante.

2210. Suivant la règle de Simpson, il y a un rapport constant entre le sinus de la distance apparente au zénit, & le sinus d'un certain angle; & la différence de ces deux angles est à la réfraction cherchée dans un autre rapport constant; or, par l'art. 2201, en mettant au lieu de $x - r$ un multiple nr de la réfraction, l'on a m sin. a = sin. $(a - nr)$, & c'est par les observations que l'on détermine m & n; par exemple, en Règle de Simpson.

ſuppoſant la réfraction de $33'$ à l'horizon & de $1' 30'' \frac{1}{2}$ à $30°$ de hauteur, Simpſon trouvoit $m =$ ſin. $86° 58' \frac{1}{2}$ ou $0,99861$ & $n = \frac{11}{2}$.

Suivant la règle de Bradley, la réfraction eſt proportionnelle à la tangente de la diſtance apparente au zénit diminuée d'un certain multiple de la réfraction (2203), ou en général r proportionnel à tang. $(a - hr)$, & il ſuppoſe $h = 3$, ce qui revient à $n = 6$ au lieu de $\frac{11}{2}$ qu'il y a dans la règle de Simpſon ; or ces deux règles peuvent facilement ſe déduire l'une de l'autre.

En effet par celle de Simpſon l'on a $1 : m ::$ ſin. $a :$ ſin. $(a - nr)$, ainſi $1 + m : 1 - m ::$ ſin. $a +$ ſin. $(a - nr) :$ ſin. $a -$ ſin. $(a - nr)$, ou ce qui revient au même : : tang. $(a - \frac{1}{2} nr) :$ tang. $\frac{1}{2} nr$, parce que la ſomme de deux ſinus eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des deux arcs eſt à la tangente de leur demi-différence (3644) ; ainſi tang. $\frac{1}{2} nr$, & r lui-même ſont proportionnels à tang. $(a - \frac{1}{2} nr)$, ainſi la valeur de h dans Bradley eſt $= \frac{1}{2} n$ dans Simpſon, & ſi $n = 6$ on a $h = 3$, mais ſi $n = \frac{11}{2}$ comme Simpſon le ſuppoſoit, on a $h = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ au lieu de 3 ; ainſi dans ce cas-là, il faut diminuer la diſtance au zénit de deux fois & $\frac{3}{4}$ la réfraction. Au contraire le nombre n dans Simpſon ſe déduit facilement de la valeur de h dans Bradley $= \frac{1}{2} n$: pour trouver enſuite l'autre coëfficient m, on emploie une réfraction r obſervée à une diſtance a du zénit ; ayant, par exemple, $m = \frac{\text{ſin.}(a - nr)}{\text{ſin.}\, a}$, ſi l'on ſuppoſe $a = 90°$, on a ſin. $(a - nr) =$ coſ. $nr = m$.

Avantage de cette règle.

2211. La règle de Bradley eſt plus facile à retenir & plus ſimple dans l'énoncé, que la règle de Simpſon ; mais elle n'eſt pas auſſi commode lorſqu'il s'agit de conſtruire une table par le moyen des obſervations, parce qu'elle ſuppoſe qu'on connoiſſe d'avance la réfraction que l'on cherche. Ainſi dans l'uſage il vaudroit mieux la diſpoſer ſuivant la forme de Simpſon : pour chaque diſtance apparente au zénit a' à laquelle répond une réfraction r' on a cette équation ſin. $(a' - nr') = m$

sin. a' (2210); la valeur de $a' - nr'$ étant trouvée & retranchée de a' il reste nr' qui divisée par n donne la réfraction cherché r'. Par exemple, si la réfraction horizontale est de $33' = r$, on a $nr = 6r = 3^\circ\ 18'$ & cos. $nr = m =$ cos. $3^\circ 18' = 0{,}9983$; si maintenant l'on veut avoir la réfraction à 50° de distance au zénit, on trouve cos. $3^\circ\ 18'$ sin. $50^\circ =$ sin. $49^\circ\ 53'\ 13''$, cet angle est plus petit que 50°, de $6'\ 47''$ dont la sixieme partie $1'\ 7''\ 8$ est la réfraction qui convient à 50° de distance apparente au zénit.

2212. Si l'on veut employer la hauteur apparente $= p$, l'on pourra prendre cos. $q = m$ cos. p, p sera le complément de a, & q le complément de $a - nr$; ainsi $a = 90^\circ - p$; $q = 90^\circ - (a - nr) = p + nr$, $nr = q - p$, $r = \frac{q-p}{n}$: cette formule nous servira bientôt pour les réfractions qui ont lieu au-dessous même de l'horizon (2220).

2213. Il faut maintenant trouver dans cette hypothèse les coëfficiens nécessaires à la construction d'une table, au moyen de deux réfractions observées; on considérera que par les formules de la trigonométrie la valeur de m sin. a, ou sin. $(a - nr) =$ sin. a cos. $nr -$ sin. nr cos. a (3619), mais l'arc nr étant très-petit, l'on a cos. $nr = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2$ (3316); c'est pourquoi l'on aura sin. $(a - nr) =$ sin. $a - \frac{1}{2} n^2 r^2$ sin. $a - nr$ cos. a; & parce que m sin. $a =$ sin. $(a - nr)$, divisant par sin. a & mettant cot. a pour $\frac{\text{cos. } a}{\text{sin. } a}$, on aura $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2 - nr$ cot. a. En employant une autre réfraction r' à une distance du zénit a', on a la même valeur; ainsi $\frac{1}{2} n^2 r'^2 - \frac{1}{2} n^2 r^2 = nr$ cot. $a - nr'$ cot. a', & $\frac{1}{2} n = \frac{r \text{ cot. } a - r' \text{ cot. } a'}{r'^2 - r^2}$. Si r' est la réfraction horizontale, on aura cot. $a' = 0$ & $n = \frac{2r \text{ cot. } a}{r'^2 - r^2}$. Connoissant la valeur de n on trouvera aussi celle de $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r^2 - nr$ cot. a. Si r est une réfraction assez éloignée de l'horizon pour que cot. a ne soit pas trop petite on pourra omettre $\frac{1}{2} n^2 r^2$ & faire $m = 1 - nr$ cot. a.

Pour la réfraction horizontale r', on aura cot. $a = 0$ & $m = 1 - \frac{1}{2} n^2 r'^2 =$ cos. $n r'$ (3316).

Simpson employoit les valeurs suivantes, $a = 60°$, $r = 1' 30'' \frac{1}{2}$, $r' = 33'$, ce qui donne $n = \frac{11}{2}$, $m =$ cos. $3° 1' \frac{1}{2} =$ sin. $86° 58'' \frac{1}{2} = 0,9983$. Bradley supposoit $r = 1' 38'' 4$, ce qui donne $n = 6$ & $m =$ cos. $3° 18'$. Si l'on employoit les réfractions de M. Cassini, (*Mém. ac.* 1714) $r' = 32' 20''$, $r = 5' 24''$, $a = 80°$, on trouveroit $n = 6,452$ & $m =$ cos. $3° 28' 37''$. Si l'on prenoit deux réfractions dans la table de M. de la Caille, $r = 1' 54'' 4$ pour $60°$ & $r' = 8' 42''$ pour $84°$, on trouveroit $n = 17,78$ au lieu de 6 & $m =$ cos. $6° 7'$; mais les réfractions de M. de la Caille n'étant point faites sur cette théorie ni assujetties à cette règle, il n'est pas étonnant qu'elles s'y accordent mal; il suffit d'une différence de quelques secondes dans les données pour en produire une très-grande dans les coëfficiens.

2214. Pour réduire en nombre la valeur de $\frac{1}{2} n$ donnée ci-dessus, il faut réduire le numérateur & le dénominateur en décimales du rayon; mais on peut simplifier l'opération en ôtant le logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144251 de la somme des logarithmes de $r' + r$ & de $r' - r$ qui font celui de $r'^2 - r^2$, & l'on a pour valeur de n une quantité dont toutes les parties sont homogènes entr'elles (3359); parce que pour lors r & $r' + r$ restent exprimées en secondes de degré, & $r' - r$ se convertit en décimales du rayon.

Méthodes pour avoir les réfractions absolues.

2215. La loi des réfractions ou la règle de leur progression étant supposée connue par la théorie précédente, il seroit facile de trouver les réfractions absolues. Je suppose, par exemple, qu'on ait observé la hauteur apparente de deux étoiles circompolaires au-dessus & au-dessous du pole (33); en corrigeant ces quatre observations par les réfractions, elles doivent donner exactement la même hauteur du pole; on pourra donc par de fausses positions trouver quelle est la réfraction horizontale qui, en suivant la théorie précédente, donnera quatre réfractions telles que la hauteur du

du pole se trouve exactement la même par chacune des deux étoiles. On pourroit même les donner par une formule directe ; mais on en a rarement besoin, & le calcul est aussi court par la méthode indirecte. De même la déclinaison du soleil observée très-exactement en divers temps de l'année a servi à M. Bradley pour construire sa table des réfractions, en supposant le rapport de ces réfractions connu par les règles précédentes.

2216. La règle de Bradley étant fondée sur une hypothèse qui n'est pas absolument conforme à la physique (2208), mais que les observations nous font admettre, il étoit permis d'examiner si l'on ne représenteroit pas encore mieux les observations en changeant un peu la forme de cette règle & la valeur des coëfficiens ; M. Bonne ayant combiné un très-grand nombre d'observations, a trouvé qu'on les représentoit mieux en mettant au lieu du nombre 3 constant pour toutes les hauteurs, celui-ci $3,19953 + 0,03428 \cos. a$, ensorte que sa formule de réfraction se réduit à celle-ci, en supposant a égale à la distance au zénit. Régle de M. Bonne.

$$\text{Réfraction} = \frac{\text{tang.}\,(a - R''\,3,19953 + 0,03428 \cos\, a)}{\text{tang.}\,(90^\circ - 1944\,(3,19953 + 0,03428 \cos.\, a)\,\frac{1}{1944}}.$$

A la fin de nos tables, on trouvera la table de réfractions calculée sur ce principe par M. Bonne, pour le cas où le baromètre est à 28 pouces de hauteur, & le thermomètre de M. Réaumur à 10° au-dessus de la congélation.

2217. Je reviens à l'hypothèse de la force constante (2209), pour en tirer l'augmentation de vîtesse de la lumiere dans l'atmosphère, où la valeur de b. Soit ACI (*fig.* 140) $= x'$, CIG ou $CIA = a - x'$; $CIH = a - x' + r$; leurs sinus sont comme les perpendiculaires CG, CH, ou les vîtesses 1 & $1 + b$ (2197. 2201), donc $(1 + b)$ sin. $(a - x') =$ sin. $(a - x' + r)$, & supposant que l'angle r soit fort petit $(1 + b)$ sin. $(a - x') =$ sin. $(a - x') + r$ cos. $(a - x')$, (3617) ; divisant par sin. $(a - x')$ & mettant cotang. pour $\frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$, on a $1 + b =$ Changement de vîtesse de la lumière. *Fig.* 140.

$1 + r$ cot. $(a - x')$ & $b = r$ cot. $(a - x')$. Pour faire usage de cette formule, il faut observer que la valeur de x' est très-petite en comparaison de a, sur-tout lorsque a n'approche pas beaucoup de 90°, car sin. CAG ou a : sin. CIG ou $a - x'$: : $CI : CA$, c'est-à dire, dans un rapport qui diffère peu de l'égalité. Si la réfraction à 60° de distance au zénit est $1' 38'' 4 = r$, on trouve $b = r$ cot. a, ou sin. r cot. $a = 0,0002755$; Haukſbée trouvoit 0,000264 en se servant de la réfraction observée du vide dans l'air, le sinus d'incidence étant au sinus de réfraction, comme $1 + b$ est à 1 ; cela s'accorde assez avec les réfractions de Bradley, tandis que celles de M. de la Caille donneroient 0,00032, qui est sensiblement trop fort ; aussi est-on persuadé que les réfractions de M. de la Caille sont un peu trop considérables (2180). On peut aussi déduire b de la valeur de m, car $b = r$ cot. a & $1 - m = nr$ cot. a, donc $b = \frac{1-m}{n}$ & si $m = 0,9983$ (2213), on a $b = 0,000277$, ce qui ne diffère pas beaucoup de ce qu'on vient de trouver par une méthode indépendante de l'hypothèse de la force constante.

2218. Sous la zone torride au niveau de la mer M. Bouguer a trouvé la réfraction horizontale de 27', & à 83° de 5' 30'' ; par-là on trouve $\frac{1}{2} n = \frac{r \text{ cot. } a}{r'^2 - r^2} = 3,262$; $m = \text{cos. } nr = 0,99866$ & $b = 0,0002054$; cette quantité est plus petite que dans nos climats, & nous verrons bientôt que la raréfaction produite par la chaleur de l'air diminue les réfractions (2222).

Hauteur de l'atmosphère.

La hauteur e de l'atmosphère sensible ou réfringente se trouvera facilement par ces formules, car $m = \frac{1 + b}{1 + e}$ (2201) ; donc $e = \frac{1 - m + b}{m}$, & parce que $b = \frac{1-m}{n}$ (2217), on a $e = \frac{(n+1)(1-m)}{nm}$. Cette expression fait voir que la distance au centre de la terre change réellement plus que la vîtesse, car le changement e de la distance est au changement b de la vîtesse, comme $n + 1$ qui surpasse un peu l'unité est à m qui est un peu moindre que l'unité,

quand on l'exprime en parties du rayon de la terre (2219); mais on peut prendre pour le rapport de ces changemens le rapport de $n+1$ à 1. Avec les réfractions de Bradley on trouve $e=0,001942$ en parties du rayon de la terre (2690); avec celles de Bouguer 0,001548, ce qui fait 6342 & 5065 toises; M. Bouguer trouvoit 5158 toises, fondé en partie sur les réfractions horizontales observées à différentes hauteurs, & en partie sur une hypothèse qui revenoit à peu-près à la force constante que nous employons actuellement.

2219. On peut trouver par ces formules la réfraction pour un lieu situé à une élévation quelconque, & pour des objets situés même au-dessous de l'horizon, pourvu qu'on ait déterminé m & n pour le lieu proposé. La valeur de n est la même à quelle hauteur que l'on soit; car c'est le nombre 6 par lequel se multiplie la réfraction pour corriger la distance au zénit (2210), or cette loi, qui vient de la nature de la réfraction est la même dans toute la hauteur de l'atmosphère, puisque la force est constante. Pour trouver la valeur de m qui dépend de la hauteur de l'atmosphère, on se rappellera que $e=\frac{(n+1)(1-m)}{nm}$ (2218), donc $m=\frac{n+1}{n+1+en}=1-\frac{en}{n+1}$ en faisant la division suivant les règles ordinaires, & négligeant les puissances supérieures de e à cause de la petitesse de cette hauteur e de l'atmosphère. Réfraction à différentes hauteurs.

Par exemple, les observations de M. Bouguer donnent $n=6,524$, & la hauteur totale de l'atmosphère 5055 toises; ainsi à 2388 toises de hauteur la distance au sommet ou la valeur de e qui est la hauteur de l'atmosphère dans ce cas-là, $=2667=0,008166$, d'où l'on conclut $m=1-\frac{en}{n+1}=0,9992919=\text{cos.}\,nr$ (2210), dans le cas de la réfraction horizontale; on a donc $nr=2^\circ\,9'\,24''$ & $r=19'\,50''$. Or cette réfraction fut observée par M. Bouguer en différens temps de $19'\,34''$, de $19'\,35''$ & de $20'\,17''$; ensorte que cette règle de théorie

donne une réfraction qui tombe fort bien entre celles que donne l'observation.

2220. Pour une hauteur p au-dessus de l'horizon, si l'on appelle q cette hauteur augmentée d'un certain angle (2212), on a cos. $q = m$ cos. p & $r = \frac{q-p}{n}$, d'où il est aisé de conclure la réfraction ; par exemple, pour 7° on trouve 3′ 55″; par l'observation elle étoit de 3′ 24″ ou de 3′ 51″.

Au-dessous de l'horizon.

Pour le cas où l'objet paroissoit au-dessous de l'horizon rationel, de 1° 17′, p étant négatif, on trouve 34′ 53″, tandis que par observation M. Bouguer trouvoit 34′ 47″; l'augmentation est rapide au-dessous de l'horizon, parce que l'on a la somme des deux angles p & q, au lieu qu'au dessus de l'horizon l'on n'avoit que leur différence. Nous parlerons bientôt de ces réfractions terrestres (2251).

2221. La valeur de $m = \text{cos. } nr = 1 - \frac{en}{n+1}$ (2219) sert à prouver ce qu'avoit remarqué M. Bouguer, que la réfraction horizontale à différentes hauteurs est comme la racine de la distance au sommet de l'atmosphère ; car $\frac{en}{n+1} = 1 - \text{cos. } nr = \text{sin. verse } nr = \frac{1}{2} n^2 r^2$ (3316) ; donc $r^2 = \frac{2e}{n(n+1)}$; donc r est comme la racine de e.

Réfraction sur les montagnes.

Ainsi pour avoir la réfraction horizontale à un degré quelconque de hauteur au-dessus du niveau de la mer, on ôte cette hauteur de celle de l'atmosphère (5158 toises suivant M. Bouguer), & la réfraction horizontale est comme la racine du reste, qui est la hauteur restante de l'atmosphère au-dessus du lieu de l'observation.

C'est ainsi que le P. Boscovich a déduit toutes les règles & toutes les formules qu'on avoit données jusqu'ici pour la réfraction, d'une théorie aussi simple qu'elle est élégante & féconde ; on trouvera de plus grands détails dans le mémoire qu'il a composé sur cette matiere, & qui est destiné à paroître dans un des volumes des *Mémoires présentés à l'académie*.

Du changement de la Réfraction produit par les variations de l'atmosphère.

2222. La densité de l'air est la cause immédiate de la réfraction; il étoit donc naturel de croire que la réfraction diminueroit lorsque la densité de l'air deviendroit moindre, soit par l'expansion que produit la chaleur, soit par les causes qui en diminuent le poids; les astronomes ont en effet reconnu dans les réfractions, deux sortes de variétés très-sensibles, dont l'une dépend de la chaleur de l'air, & l'autre de son poids; elles sont indiquées par le thermomètre (129), (a) & par le baromètre, instrument que je suppose connu, & dont j'ai parlé fort au long dans la *Connoiss. des mouv. célestes de* 1765.

2223. Tycho-Brahé en donnant sa table des réfractions reconnut bien qu'elles étoient sujettes à des variations, (*Progymn. pag.* 79, 104); mais M. Cassini & M. Picard furent les premiers qui mesurèrent avec quelque précision le changement & l'inégalité des réfractions. M. Picard reconnut par les hauteurs méridiennes du soleil en 1669, que les réfractions étoient plus grandes en hiver qu'en été, & la nuit plus grandes que le jour. (*Hist. céleste. pag.* 19). Suivant les observations rapportées à la fin de son voyage d'Uranibourg, (*pag.* 41), il trouva la réfraction horizontale de 33′ 2″ par le premier bord du soleil, & 32′ 37″ par le second bord; ensorte que dans le petit intervalle de temps que le soleil emploie à se lever, la réfraction diminue de 25″ par la présence du soleil. Il ajoute qu'étant au Mont-Valérien & ayant pointé un quart-de-cercle vers

M. Picard observe l'inégalité des réfractions.

(a) Θερμὸς, *calidus*, Μέτρον, *mensura*, Βάρος, *pondus*. Le baromètre n'est qu'un tube vide d'air à sa partie supérieure, & dans lequel une colonne de vif-argent se tient élevée par la pression de l'air d'environ 28 pouces, cette hauteur diminue quand l'air devient plus léger (2270). M. Bouguer l'a vu à 15 pouces 11 lignes à une hauteur de 2484 toises. (*Mém. acad.* 1753 *pag.* 516).

le sommet des Tours de Notre-Dame de Paris, il trouva leur abaissement de 20′; mais le soleil ne fut pas plutôt levé que l'abaissement fut de 22′; les vapeurs s'étoient élevées par la présence du soleil, & le milieu entre Paris & le Mont-Valérien étoit devenu plus égal, au lieu qu'avant le lever du soleil Paris étoit dans un air plus dense que le Mont-Valérien.

Changement du jour à la nuit.

2224. Ce changement de la réfraction a été observé de même en Amérique; M. Bouguer a observé que les réfractions de la nuit y sont plus grandes que celles du jour, de $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{7}$. (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 105). Avant le lever du soleil le froid est plus grand, l'atmosphère plus condensée doit avoir perdu le plus de sa hauteur, au moins par sa partie inférieure; si l'atmosphère se condensoit par-tout proportionnellement d'un septième de son volume le changement de réfraction ne seroit que de $\frac{1}{14}$, c'est-à-dire, la moitié moindre, comme le démontre M. Bouguer; mais les variations se font principalement dans la partie inférieure & vont en effet à un septième, tandis qu'elles sont insensibles dans la partie supérieure de l'atmosphère (2254).

C'est surtout dans la partie inférieure de l'atmosphère.

2225. M. Halley remarqua à l'occasion des hauteurs méridiennes de Sirius observées à Paris en 1714 & 1715, qu'il devoit y avoir 8″ de différence en divers temps de l'année sur la réfraction qui convient à cette hauteur, (*Phil. transf.* n°. 364). En effet, la hauteur du baromètre qui marque la pesanteur de l'air, varie d'environ deux pouces sur vingt-huit, ou d'un quatorzième: les réfractions sont proportionnelles à la densité du milieu, comme il est démontré par les expériences de Haukſbée faites sur un air condensé au double & au triple; ainsi les réfractions doivent changer aussi d'un quatorzième, & puisqu'à la hauteur de Sirius qui est de 25°, la réfraction est, suivant M. Halley, de 1′ 55′, il doit y avoir des différences de 8″ suivant les temps & les pesanteurs de l'air: nous en parlerons ci-après (2237).

Haukſbée prouve qu'il doit avoir lieu.

Effet de la chaleur.

2226. M. le Monnier en 1738 & 1739, fit un grand nombre d'observations sur les réfractions des

étoiles circompolaires ; elles sont rapportées au commencement de l'Histoire céleste, qu'il a publiée en 1741. Il employa pour observer la réfraction, les étoiles qui passent aux environs du zénit de Paris, telles que la Chèvre, la Claire de Persée, & la dernière de la grande Ourse, il déterminoit leur distance au zénit avec le grand secteur de 9 pieds, qui avoit servi en Laponie pour la figure de la terre (2380), & il observoit ensuite leur hauteur sous le pole avec un quart-de-cercle de trois pieds de rayon. Ainsi, le 24 Septembre 1738 l'étoile α de la Chèvre observée à 48° 51′ de latitude, parut à 3° 9′ 24″ $\frac{1}{2}$ du zénit, l'observation étant réduite au premier Juillet 1738 ; la vraie distance de la Chèvre au pole étoit donc de 44° 18′ 24″ $\frac{1}{2}$, & sa hauteur inférieure devoit être de 4° 32′ 35″ $\frac{1}{2}$, mais le 14 Juillet cette hauteur méridienne parut de 4° 42′ 23″ ; ainsi la réfraction étoit de 9′ 47″ $\frac{1}{2}$ à cette hauteur, tandis que, suivant la table de M. Cassini, elle devoit être de 11′ 7″. Le thermomètre qui avoit monté à 23°, vers les trois heures, étoit encore sur les neuf heures du soir à 18°, ainsi la réfraction étoit plus petite de 1′ 20″ que suivant la table de M. Cassini. Le 5 Août on la trouva de 9′ 20″ seulement, le baromètre étoit à 27 pouces $\frac{1}{2}$.

Au mois de Février 1739, la distance de la Chèvre au zénit, observée avec le secteur, étoit de 3° 9′ 9″, & par conséquent sa hauteur méridienne sous le pole devoit être de 4° 32′ 51″ ; cependant le 4 Février au matin, le thermomètre étant à 5°, la hauteur apparente inférieure fut déterminée de 4° 43′ 22″, la réfraction étoit donc de 10′ 31″, plus grande de 71″ qu'elle n'avoit été le 5 Août 1738.

2227. Le 27 Février 1740, le thermomètre étant à 10° au-dessous de la congélation, & la vraie hauteur de la Chèvre devant être de 4° 33′ 2″, à la même latitude 48° 51′, cette hauteur parut de 4° 44′ 15″ ; ainsi la réfraction à cette hauteur étoit de 11′ 13″ ; l'observation du 26 donnoit 11′ 18″ ; ainsi M. le Monnier établit par ces deux observations la réfraction dans le plus

grand froid à Paris, lorsque le thermomètre est à 10° au-dessous de la congélation, de 11′ 15″ à 4° 44′ $\frac{1}{4}$ de hauteur apparente, tandis qu'elle a été observée de 9′ 20″ à 24° au-dessus de la congélation; la différence est à raison de 2′ pour 36° du thermomètre. Le baromètre étoit à 28 pouces.

Différence de 2′ pour 36° du thermomètre.

2228. M. le Chevalier de Louville, à Carré, près d'Orléans; M. le Docteur Bévis, à Newington, près de Londres, avoient fait aussi de semblables observations, & M. le Monnier en avoit déduit les réfractions, mais il ne les a point publiées. (*Hist. céleſt. pag.* xxxjii).

2229. Les changemens de la réfraction horizontale pourroient peut-être se reconnoître par la seule observation des amplitudes; M. le Monnier remarque, par exemple, que de la hauteur de Chatillon, près Paris, où est bâti l'observatoire de M. le Prince de Croy, l'on peut appercevoir le lever & le coucher de la lyre, & qu'une seule minute de variation dans la réfraction horizontale en produit 29 dans la distance apparente des verticaux du lever & du coucher; ce seroit peut-être un moyen d'observer les variations relatives au thermomètre & au baromètre, avec assez de précision. (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 611). Mais il y a trop peu de beaux jours à Paris, pour qu'on puisse espérer beaucoup d'une pareille méthode.

2230. De ces différences de réfraction en différentes saisons de l'année, on est porté à conclure que les différens climats de la terre doivent aussi éprouver des réfractions différentes; on avoit cru que dans le nord les réfractions augmentoient considérablement. (*Mém. acad.* 1700, *pag.* 37); elles alloient même jusqu'à un degré par les observations de Bilberg & de Spole, Mathématiciens de Charles XI, Roi de Suède; mais probablement il s'étoit glissé quelque erreur dans leur observation.

L'examen des réfractions dans le nord étoit un des objets que se proposerent les Académiciens qui allerent en Suède en 1736, & voici ce que M. le Monnier en rapporte.

2231.

2231. Le 5 Janvier 1737, à Tornea sur les confins de la Laponie où nos Académiciens étoient allé mesurer la base qui devoit servir à leurs triangles, le thermomètre marquoit 31° au-dessous de la glace à 11h du matin, un peu avant le lever du soleil; le même jour la réfraction fut déterminée par l'observation du soleil à midi de 20′ 3″ à la hauteur de 2° 9′ ½, ce qui étoit conforme à la table de M. Cassini.

Le 7, la réfraction fut trouvée d'une minute plus grande que suivant la table, ou de 20′ 10″ à la hauteur de 2° 24′ ½; mais quelquefois on la trouva d'une minute plus petite, sur-tout quand le thermomètre étoit aux environs de la congélation; enfin *l'on fut obligé de conclure que les réfractions étoient les mêmes au cercle polaire qu'à Paris*, parce qu'elles furent trouvées assez souvent d'accord avec la table de M. Cassini, principalement dans des plus grands froids. (*Hist. céleſt. pag.* XII.). Réfractions égales dans le Nord.

2232. M. de la Caille étant en Afrique, se proposa aussi d'examiner si les réfractions étoient égales au Cap & à Paris; pour cela, il choisit deux étoiles telles que γ du Sagittaire, & β du Cocher; la premiere passe à 4° du zénit du Cap & à 79° de celui de Paris; la seconde passe à 4° du zénit de Paris, & à 79° de celui du Cap; si la distance de ces deux étoiles ne paroît pas la même au Cap & à Paris, c'est-à-dire, si la réfraction accourcit plus leur distance à Paris qu'au Cap, c'est une preuve que la réfraction est plus forte à Paris, & M. de la Caille trouva en effet 7″ sur 5′ 12″, c'est-à-dire, un 44e de plus à Paris. Ayant formé ainsi 47 comparaisons de différentes étoiles prises deux à deux, il n'y en eut que 7 qui indiquèrent une réfraction plus petite à Paris, toutes les autres la donnèrent plus grande; il y en eut qui donnèrent même un seizième de plus, mais la quantité moyenne entre toutes est un quarantième. (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 562).

2233. Cette différence paroît à M. de la Caille assez petite pour lui faire tirer cette conclusion définitive, & que l'on peut, sans craindre des erreurs sen- Et dans toute la Zone Tempérée.

» sibles, se servir dans toute l'étendue des zones tem-
» pérées d'une même table de réfractions, quand même
» un observateur la trouveroit un peu en défaut par des
» observations faites près de son horizon, parce qu'on
» doit attribuer l'erreur apparente à la réfraction ter-
» restre & aux autres circonstances locales ».

Dans la Zone Torride.

2234. Pour déterminer les réfractions dans la Zone Torride, M. Bouguer fit au Pérou différentes observations : dont on trouve le résultat dans les mémoires de 1739; il descendit encore en 1740, dans une Isle de la riviere des Emeraudes, nommée alors l'Isle de l'Inca, & qui a été appellée depuis ce temps-là l'Isle de l'Observatoire; & il y détermina les réfractions horizontales depuis 1 jusqu'à 7° : la table qu'il dressa fait voir que les réfractions y sont plus petites environ d'une septième partie qu'elles ne sont en Europe; cette table est dans les mémoires de 1739; la réfraction horizontale y est de 27′; à 6° de hauteur elle est de 7′ 4″, & à 45° de 44″. M. Bouguer a donné ensuite une table de réfraction pour Quito, qui est plus élevé au-dessus du niveau de la mer. (*Mém. acad.* 1749), & je l'ai insérée dans la *Connoiss. des mouv. céleſt. pour* 1765.

Diminution des Réfractions lorsqu'on s'éleve.

2235. M. Romer étoit persuadé que sur des lieux élevés les réfractions devoient être plus grandes, (*Horrebow Atrium Astron. pag.* 6 *&* 83), & on le croyoit assez généralement avant le voyage du Pérou. Pour décider cette question, M. Bouguer observa au mois de Décembre 1738 la réfraction à Chimboraço 2388 toises au-dessus du niveau de la mer, il n'y trouva la réfraction horizontale que de 19′ $\frac{3}{4}$ (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 79 *&* 82); à la croix de Pitchincha qui est à 2044 toises il la trouva de 20′ 48″; à Quito, qui est élevé de 1479 toises, de 22′ 50″; enfin au niveau de la mer de 27′. Ces observations, jointes à la théorie (2219), lui firent établir cette règle générale : si l'on prend l'excès de de 5158 toises sur l'élévation des lieux par rapport au niveau de la mer, les réfractions y sont comme les racines de ces excès. Ainsi la racine carrée de 5158

est à 27′, réfraction horizontale au niveau de la mer dans la Zone Torride, comme la racine carrée de l'excès de 5158 toises sur la hauteur du poste proposé sera à la réfraction horizontale. Nous en avons fait voir la raison (2221). La quantité de 5158 toises est la hauteur au-dessus de laquelle la matiere réfractive ne produit plus d'effet sensible, du moins dans la Zone Torride.

Changement de Réfraction relatif au baromètre.

2236. Ayant reconnu que les réfractions étoient plus petites le jour que la nuit; plus petites l'été que l'hyver, & plus petites dans la Zone Torride que dans les Zones Tempérées; il étoit naturel de chercher combien, dans le même pays, il devoit y avoir de différence lorsque l'air y étoit plus ou moins dense, plus ou moins pesant; par exemple, on prend pour terme moyen de la pesanteur de l'air, le cas où il soutient le mercure dans le baromètre à 28 pouces de hauteur mesure de Paris; mais cette élévation change à Paris depuis 26 pouces 3 lignes, jusqu'à 28 pouces 9 lignes, quoique ces extrêmes soient très-rares, & la réfraction doit changer à proportion (2225).

2237. Si l'on établit les réfractions moyennes pour 28 pouces, on devra les trouver plus petites d'une 28e partie quand le Mercure descendra d'un pouce, c'est-à-dire, quand le poids de l'air aura diminué d'un 28e; sur le sommet de Pitchincha, le mercure n'alloit qu'à 15 pouces 11 lignes, aussi la réfraction y étoit-elle très-petite. Il en sera de même de tous les autres cas: la variation de la réfraction sera toujours à la réfraction moyenne, comme le changement du baromètre est à sa hauteur moyenne 28 pouces (2225).

2238. Cette règle adoptée d'abord par M. Halley (2225), confirmée ensuite par M. Euler dans les calculs qu'il a donnés sur le changement des réfractions, (*Mém. de Berlin* 1754, *pag.* 168), a été suivie par M. Mayer & par M. de la Caille; & les observations du baromètre que M. de l'Isle a faites chaque jour à Paris pendant plusieurs années, ont servi à réduire les réfractions obser-

vées par M. de la Caille, à leur quantité moyenne; toutes les fois que dans le temps des observations le baromètre différoit de 28 pouces. Ces réfractions ainsi corrigées se sont trouvées d'une régularité qui prouve la bonté de cette règle, & M. de la Caille a fait en conséquence une table (2240), où l'on voit quelle fraction ou quelle partie de réfraction il faut ajouter à la moyenne, ou en ôter, pour avoir la réfraction actuelle & apparente quand le mercure est au-dessus ou au-dessous de 28 pouces; cette quantité est, par exemple, de $\frac{1}{14}$ de la réfraction moyenne, quand le baromètre est à 26 pouces; parce que 2 pouces sont $\frac{1}{14}$ de 28; c'est sur ce principe qu'on a dressé la table du changement des réfractions, ou des densités de l'air pour chaque hauteur du thermomètre & du baromètre, qui est à la suite de nos tables. On en trouve aussi une dans les tables de M. Mayer, publiée à Londres en 1770, avec laquelle il étoit persuadé qu'on pouvoit représenter les réfractions dans tous les pays de la terre.

Changement relatif au thermomètre.

2239. Les changemens que la chaleur produit dans les réfractions, ont été déterminés par observation. M. de la Caille a trouvé que les réfractions diminuent d'une vingt-septième partie, quand le mercure change de 10 degrés sur le thermomètre de M. de Reaumur (129); il prend pour réfraction moyenne celle qui a lieu, quand le thermomètre est à la température moyenne des caves de l'Observatoire, c'est-à-dire, à 10° sur le thermomètre de M. de Réaumur, 134 de M. de l'Isle, & $54\frac{1}{2}$ de Farenheit.

M. Mayer, qui depuis plusieurs années observoit à à Gottingen, avec un excellent quart-de-cercle mural de six pieds de rayon, construit à Londres par Bird, avoit communiqué à M. de la Caille plusieurs observations faites pour déterminer les réfractions; il trouvoit que la réfraction moyenne changeoit de $\frac{1}{22}$, soit pour 15 lignes de variation dans le baromètre, soit pour 10° de changement dans le thermomètre, en prenant pour réfraction moyenne, celle qui répond à 28 pouces du

M. Mayer le trouve par observation.

baromètre, & à 0° du thermomètre, c'eſt-à-dire, à la premiere congélation. Cette proportion avoit lieu, ſelon lui, depuis 10° de hauteur juſqu'au zénit; & il étoit perſuadé que la réfraction étoit la même ſur toute la ſurface de la terre, ſans autre variation que celle du thermomètre & du baromètre.

2240. M. de la Caille, d'après la formule de M. Mayer, dreſſa deux tables fort amples des variations, qui répondent aux différentes hauteurs du thermomètre & du baromètre, il corrigea au moyen de ces deux tables toutes ſes obſervations des étoiles faites à Paris depuis 7° de hauteur juſqu'à 36, & au Cap, depuis $5^{\circ}\frac{2}{3}$ de hauteur juſqu'à 30; il trouva en général que ces équations rétabliſſoient aſſez bien les inégalités des diſtances apparentes d'une même étoile au zénit, obſervées en différentes ſaiſons & en différens états de l'atmoſphère. Cependant la correction qui répondoit aux variations du thermomètre lui parut un peu trop grande; & après pluſieurs eſſais, il jugea qu'il falloit la faire égale tout au plus à $\frac{1}{27}$ des réfractions moyennes qui conviennent à 10° du thermomètre. Ayant conſtaté cette valeur, il réduiſit en une ſeule table à double entrée les deux corrections, & il les employa à réduire toutes ſes hauteurs obſervées, à une température moyenne. L'exactitude de cette table fut conſtatée par le réſultat de 243 comparaiſons différentes corrigées d'après les équations qu'elle indique, la moitié de ces obſervations ne diffèrent que de 2″ du réſultat qu'on devoit avoir, & il n'y en a pas un quart où la différence ſoit de plus de 6″; on trouvera cette table dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, pag. 252, & dans l'édition Françoiſe que j'ai donnée en 1759 des tables de Halley pour les planètes. M. de la Caille a repréſenté toutes ſes obſervations d'une maniere très-ſatisfaiſante, au moyen de cette table; en effet les diſtances entre le parallèle du Cap & ceux de Paris, de Greenwich, de Berlin, de Bologne & de Gottingen, corrigées par la ſeule table des réfractions moyennes, paroiſſoient toujours

M. de la Caille diminue cette quantité.

Table des denſités de l'air.

plus petites lorsqu'il comparoit des observations faites dans les temps froids, & plus grande dans les autres: de 243 comparaisons que M. de la Caille a faites entre le Cap & Paris, il n'y en a que 7 qui donnent 10″ de plus que 82° 46′ 42″ distance vraie des parallèles de Paris & du Cap, & 3 qui donnent 10″ de moins; il y a 198 comparaisons qui ne s'en écartent pas de plus de 6″, & 119 qui la donnent à 2″ près.

2241. M. Bonne ayant fait ensuite des expériences & des calculs sur ces densités de l'air & comparé beaucoup d'observations avec une très-grande sagacité, a fait une autre table du changement de la réfraction ou des densités de l'air; il suppose la réfraction moyenne pour 10° & pour 28 pouces égale à 1, & en changeant la température, pour la même hauteur du baromètre, c'est-à-dire 28 pouces, il trouve pour 30° de chaleur 0,920, & pour 8° de froid 1,085. La table qu'il a dressée en conséquence est à la fin de nos tables astronomiques, elle est fondée sur ce que la densité de l'air exprimée dans la table est égale au volume de l'air à la température, multiplié par la hauteur actuelle du baromètre, divisé par le volume qui répond à la chaleur actuelle, multiplié par la hauteur moyenne du baromètre.

2242. Pour réduire cette formule en table, il faut supposer le volume de l'air au tempéré égal à 229 parties (a); pour avoir ensuite le volume qui répond à la chaleur actuelle, on y ajoutera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessus de la température, ou bien

(a) Ce nombre 229 exprime le volume total de l'air au tempéré, en supposant que le changement total soit de 90 parties, comme dans un thermomètre à Mercure qu'on fait passer de la glace à l'eau bouillante; M. Bonne a déterminé ce nombre 229 en faisant soutenir une goutte de Mercure par l'air d'un thermomètre, mis à la glace & à l'eau bouillante; le nombre de lignes cubes de l'espace que la goutte de Mercure a parcouru, est à 90, comme le nombre de lignes cubes, compris dans la boule & le tube au-dessous de la congélation, est à 229, & il a trouvé le même résultat par les calculs faits d'après les observations de M. Mayer, de M. de la Caille & de M. de Luc; c'est une chose assez singuliere observée par M. Bonne que les volumes de l'air, à la glace & à l'eau bouillante, sont entr'eux comme le côté d'un carré est à sa diagonale.

l'on en ôtera autant d'unités qu'il y aura de degrés au-dessous de la même température ; par exemple, pour 30° du thermomètre on ajoutera 20, & l'on aura 249, volume répondant à la chaleur actuelle de 30° ; pour 8° au-dessous de la congélation, on ôtera 8 & l'on aura 211. Ainsi la formule pour 30° & 27 pouces du baromètre est $\frac{229}{336} \times \frac{324}{249} = 0,887$, tel est le fondement de la table que j'ai adoptée.

Effet de la Réfraction sur la hauteur du pole à Paris.

2243. L'INCERTITUDE que l'on a sur la hauteur du pole à Paris vient de l'incertitude de la réfraction à 49° de hauteur ; c'est donc ici le lieu de parler de cette hauteur du pole & de la réfraction qui y convient. La latitude du milieu de Paris, qui est de 48° 51′ 22″, étoit marquée de 48° 30′ dans la Géographie de Ptolomée (II. 8.), de 48° 40′ dans Oroncé Finé, qui vivoit en 1528, dans Fernel son contemporain, dans Mersenne, Bourdin, Alleaume ; elle est de 48° 49′ dans Viete, (*Responsorum*, *L. II.*), de 48° 50′ dans le Comte de Pagan, Morin & Duret ; de 48° 51′ dans Boulliaud ; de 48° 52′ dans Midorge & Gassendi, en 1625 ; de 48° 54′ dans Roberval & Henrion. (*Cosmo. pag.* 328) ; de 48° 55′ dans la même Cosmographie, *pag.* 325, c'étoit en 1614. M. Petit, Intendant des Fortifications, la trouva en 1652 par les hauteurs méridiennes du soleil de 48° 53′ 10″, & en 1654 de 48° 52′ 41″. MM. Roberval & Buot en 1667, 48° 53′ au Jardin de la Bibliothèque du Roi. Ce ne fut qu'à l'époque de l'application des lunettes aux quart-de-cercles qu'on eut de la précision & de la certitude sur cet article fondamental de l'astronomie ; la hauteur du soleil au solstice d'été, le 21 Juin 1667, prise à l'endroit désigné pour le bâtiment de l'Observatoire Royal, fut trouvée de 64° 41′ quantité trop grande de près de 2′ ; ce ne fut qu'à

la fin de l'été que se fit cette découverte importante pour la perfection des quarts-de-cercle. Il faut observer aussi que nous ne savons pas à quel endroit de Paris quelques-unes de ces observations furent faites, & que depuis la Porte Montmartre, vers laquelle M. Picard observoit en 1666, jusqu'à l'Observatoire Royal, il y a plus de 2000 toises de différence en latitude.

Hauteur du pole constante.

La hauteur du pole est constante, c'est une vérité reçue de tous les astronomes; M. Manfredi avoit cru reconnoître une variation dans celle de Bologne, par la comparaison des solstices d'hiver & d'été observés à la méridienne de S. Petrone depuis 80 ans, (*De gnomone Bonon.* cap. 16); mais je suis persuadé qu'il faut attribuer à des circonstanees locales, les différences qu'il a trouvées.

2244. La hauteur apparente du pole en 1667, fut observée à Paris par M. Picard, au Jardin de la Bibliothèque du Roi, de 48° 53′; d'où il résulte qu'à l'Observatoire Royal, la hauteur apparente du pole étoit de 48° 51′ 10″; on ne comptoit pas beaucoup alors sur la différence de la hauteur vraie à la hauteur apparente, quoique M. Cassini l'eût indiquée; si l'on en ôte 53″, on aura pour la hauteur vraie 48° 50′ 17″ par les observations de 1667.

M. de la Hire observa dans la suite la hauteur apparente 48° 51′ 2″; & comme il augmentoit la réfraction & diminuoit la parallaxe du soleil, il trouva la vraie hauteur 48° 49′ 58″; mais M. le Monnier a fait voir, (*Hist. céleſt. pag.* XIX), que le quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, dont M. Picard & M. de la Hire se servirent, n'étoit pas aussi exact que ces astronomes le croyoient, & qu'il ne falloit pas compter sur cette détermination à quelques secondes près.

Suivant M. de Louville (*Mém. acad.* 1721), la hauteur apparente du pole à l'Observatoire étoit 48° 50′ 58″; il en ôte 50″ pour la réfraction, ce qui donne la hauteur vraie 48° 50′ 8″.

M. Maraldi (*Mém. acad.* 1733), trouve 48° 50′ 12″;

&

& M. le Monnier y ajoute 2″ de plus, à cause de la réfraction, (*Mém. acad.* 1739), ce qui donne 48° 50′ 14″.

M. le Monnier par des observations de l'étoile polaire, faites en 1738, trouva la hauteur apparente du pole 48° 51′ 4″, il en conclut la hauteur vraie 48° 50′ 14″, (*Mém. acad.* 1739, *pag.* 220). Par d'autres observations faites en 1740, il jugea la hauteur apparente du pole à l'observatoire royal 48° 51′ 9″, & la hauteur vraie 48° 50′ 15″, la réfraction étant de 54″ lorsque le thermomètre étoit à 3° au-dessous de la congélation, (*Hist. céleſt. pag.* XXXVII).

M. Cassini de Thury au moyen d'un quart-de-cercle de 6 pieds de rayon, qui venoit d'être construit pour l'observatoire, trouva la hauteur du pole en 1742, de 48° 50′ 12″ & de 48° 50′ 9″, en employant les deux lunettes différentes, & en supposant la réfraction de 52″ à la hauteur du pole; s'il avoit supposé la réfraction de 58″, comme M. de la Caille, il n'auroit trouvé par ses observations que 48° 50′ 5″, (*Mém. acad.* 1744).

2245. Enfin, M. l'Abbé de la Caille après un nouveau travail sur les réfractions, fait avec deux secteurs différens de 6 pieds de rayons, vérifiés une multitude de fois & avec les soins les plus scrupuleux, a jugé par un très-grand nombre d'observations, que la réfraction à la hauteur du pole de Paris étoit de 58″2, & la vraie hauteur du pole à l'observatoire royal de Paris 48° 50′ 14″, (*Mém. acad.* 1755, *pag.* 569). Vraie latit. à Paris 48° 50′ 14″.

Ainsi M. de la Caille avec une réfraction plus grande de 6″ que M. Cassini ne la supposoit, (ce qui devoit diminuer la hauteur du pole), a trouvé cependant encore 4″ de plus pour la hauteur du pole, ainsi il y a 10″ de différence entre ces observations; au reste ces différences sont assez petites pour prouver que la hauteur du pole ne varie point dans un même lieu; c'est-à-dire, que le mouvement diurne de la terre se fait toujours sensiblement sur le même axe, & autour des mêmes

points. Cette hauteur du pole de 48° 50′ 14″ eſt celle dont j'ai coutume de me ſervir.

Autres effets de la Réfraction.

Sur les diamètres.

2246. Lorsque le bord inférieur du ſoleil ou de la lune paroît à l'horizon, ſi la grandeur réelle du diamètre de l'aſtre eſt de 30′, la réfraction étant plus petite d'environ 4′ 21″ à 30′ de hauteur apparente qu'elle n'eſt à l'horizon, le bord ſupérieur du ſoleil étant beaucoup moins élevé par la réfraction que le bord inférieur, le diamètre vertical paroîtra plus court que le diamètre horizontal; voilà pourquoi le ſoleil paroît ovale quand il ſe leve ou qu'il ſe couche; M. de Mairan a vu le ſoleil ſenſiblement elliptique, même à 10° de hauteur ſur l'horizon, le 28 Juin 1733, (*Mém. acad.* 1733, *pag.* 329).

Cet effet des réfractions ne fut pas inconnu aux anciens: Diodore de Sicile parle avec étonnement d'un pays où le ſoleil ne paroît point rond, mais un peu applati; il paroît que ce fait étoit emprunté d'Agatharchides, qui avoit auſſi parlé d'un pays où le jour ne duroit que trois heures; le paſſage entier mérite d'être lu.

Cet accourciſſement du diamètre vertical a lieu proportionellement ſur tous les diamètres inclinés, du ſoleil & de la lune; or les aſtronomes faiſant un uſage continuel de ces diamètres obſervés dans tous les ſens, il eſt important d'en tenir compte dans le calcul; j'en ai donné une table dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, & on la trouvera encore parmi les tables qui ſont à la fin du premier volume de cet ouvrage. T. LXXXIII.

Pour en expoſer la conſtruction, je ſuppoſe d'abord que la figure du diamètre du ſoleil eſt ſenſiblement elliptique par l'effet de la réfraction; cela eſt vrai du moins au-delà de 3 ou 4° de hauteur; car la réfraction étant alors uniforme, l'accourciſſement de la réfraction eſt proportionel à la quantité des cordes verticales du

disque solaire qui sont affectées de la réfraction ; c'est-à-dire, qu'une corde de 15′ est accourcie moitié moins que celle de 30′ ; or quand on diminue proportionellement toutes les ordonnées d'un cercle, on a celles d'une ellipse (3256).

Dans une ellipse qui est peu excentrique les diminutions des rayons, en s'éloignant du grand axe, sont sensiblement comme les carrés des sinus des distances au sommet (2680) ; ainsi quand on a observé un diamètre incliné, par exemple, le diamètre de la lune dans le sens des cornes, l'accourcissement diminue comme le carré du cosinus de l'angle que fait la ligne des cornes avec la verticale.

Par exemple, la lune en quadrature ayant été observée avec un micromètre, on a trouvé son diamètre de 33′ 10″ dans la direction de la ligne des cornes, & l'on a estimé que cette ligne faisoit avec la ligne horizontale un angle de 30°, la lune ayant 20° de hauteur ; on trouve dans la table au-dessous de 20°, & vis-à-vis de 30°, 1″0, mais comme le diamètre est de 33′ au lieu de 30′ que suppose la table, il faut augmenter cette correction proportionellement, ou de 0″ 1, & l'on aura 1″ 1, pour l'accourcissement cherché.

Si l'on vouloit avoir cet accourcissement pour le cas où la hauteur de la lune est moindre que 2°, il faudroit le calculer plus rigoureusement, mais il est bien rare qu'on en ait besoin dans ce cas-là.

2247. On doit corriger de la même maniere les distances mesurées sur le disque du soleil entre le bord & une tache ou une planète, telle que Mercure & Vénus ; cette correction est alors proportionnelle à la distance mesurée ; la table ne donne sa valeur que pour une distance égale au diamètre dans le sens où l'on a mesuré. Sur les distances.

2248. La maniere de corriger les grandes distances observées entre deux astres & de les dégager de l'effet des réfractions, sera expliquée dans le XXIVe livre, à l'occasion de l'usage qu'on en fait pour trouver les longitudes en mer (3982).

Sur les éclipses.

2249. C'eſt auſſi par l'effet des réfractions qu'il arrive qu'on a vu la lune éclipſée, tandis que le ſoleil étoit encore ſur l'horizon, Pline raconte le fait (II. 13), auſſi-bien que Cléomèdes (II. 6); mais celui-ci regardoit la choſe comme impoſſible; nous l'avons vu arriver à Paris le 19 Juillet 1750 : le ſoleil & la lune, quoique réellement oppoſés, étoient rapprochés d'un degré par l'effet des deux réfractions.

Des Réfractions terreſtres; & des accidens de Réfraction.

2250. Les réfractions terrestres ſont celles qui ont lieu entre deux points de la terre, tels que *M* & *L*, (*fig.* 141); ſi l'on ſuppoſe l'obſervateur en *M* meſurant la hauteur d'une montagne en *L*, le rayon *LGM* en s'approchant de la terre en *G*, & s'en éloignant en *M*, prend une courbure conſidérable, ce qui fait paroître l'objet *L* hors de ſa véritable place, & ſur le rayon *MGF*.

Fig. 141.

Cas où les aſtres paroiſſent plus bas que l'horizon.

2251. La réfraction terreſtre ſe joint quelquefois à la réfraction aſtronomique, parce qu'il y a des cas où l'obſervateur étant fort élevé voit les aſtres au-deſſous de la ligne horizontale : la différence peut devenir extrêmement conſidérable. M. Bouguer étant à Chimboraço 2388 toiſes au-deſſus du niveau de la mer, & obſervant le ſoleil à l'horizon lorſqu'il ſe couchoit, la réfraction horizontale étoit de 19′ 45″; mais le ſoleil étant parvenu à 1° de dépreſſion apparente, la réfraction étoit déja de 30′, & même de 34′ 47″ à 1° 17′ de dépreſſion apparente, par l'effet de la réfraction terreſtre, (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 79); nous en avons donné la démonſtration (2220).

2252. Soit *M*, l'obſervateur ſur le ſommet d'une haute montagne; *MH* la ligne du niveau appparent ou de l'horizon rationel & aſtronomique; *S* le ſoleil, dont le rayon *SRLM* ſe courbe en entrant dans l'atmoſphère

en R, & arrive à l'œil M, en se confondant avec la tangente FGM; la dépression apparente du soleil est l'angle HMF; la partie la plus basse MGL du rayon solaire est égale de part & d'autre du point G, qui est le plus près de la surface de la terre T; l'inclinaison en L est la même qu'en M, si l'on suppose le point L aussi élevé que le point M au-dessus de la terre. Si donc on suppose l'angle MCL de deux degrés, l'angle HML d'un degré, l'observateur en L verroit l'astre S un degré au-dessus de l'horizon, au lieu de le voir un degré au-dessous, & la courbure de la partie RL du rayon seroit la réfraction astronomique pour un degré d'élévation apparente; mais la seconde courbure de L en M est plus considérable, c'est une réfraction terrestre, qui ajoutée à la réfraction astronomique pour un degré de hauteur apparente, forme la réfraction pour un degré de dépression apparente; & cette même réfraction terrestre est celle qu'on éprouveroit, si du point M on observoit la hauteur apparente de l'objet terrestre L: cette réfraction est à peu-près la septième partie de l'arc de la terre compris entre M & L, ou de l'angle MCL décrit par le rayon, pendant son trajet dans l'atmosphère (2205); quelquefois M. Bouguer l'a supposée d'un neuvième, (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 101); mais en supposant un septième, il s'ensuit que sur une distance de 950 toises ou d'une minute, cette réfraction seroit de $8'' \frac{1}{2}$; ainsi l'on doit retrancher de chaque hauteur observée, ou ajouter à chaque dépression la moitié de cette réfraction, ou $\frac{1}{14}$ de l'intervalle des deux stations. Il y a sur cette matiere une petite dissertation de M. Mayer intitulée: *Programma de refractionibus objectorum terrestrium*, (Gotting. 1751), & un ouvrage de M. Lambert intitulé: *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs, & en général par plusieurs milieux réfringens, sphériques & concentriques, avec la solution des problêmes qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques & terrestres, & ce qui en dépend*, par J. H. Lambert, à la Haye, chez Nicolas Van-Daalen 1759,

Fig. 141.

Quantité de la Réfraction terrestre.

116 pages *in*-8°. Il y traite de la réfraction à différentes hauteurs, de la réfraction terrestre, des hauteurs des montagnes, mesurées par le moyen du baromètre, ou par des triangles, de la correction des hauteurs des objets terrestres que M. Cassini avoit déterminées dans le livre de la figure de la terre; il prouve que la réfraction terrestre est $\frac{1}{14}$ de la courbure de la terre, le rayon osculateur de la courbe de la lumière étant 7 fois le rayon de la terre.

2253. C'est ainsi que le P. Boscovich corrige les hauteurs des signaux dans sa mesure du degré en Italie. Le signal placé au sommet de Carpegna, vu de l'extrémité occidentale de la base de Rimini, étoit à 87° 53′ du zénit, & cette extrémité vue du signal de Carpegna, étoit à 92° 24′ 10″ du zénit; la somme de ces arcs est de 180° 17′ 10″ au lieu de 19′ 11″ que l'excès auroit été, à raison de la distance, en négligeant l'effet de la réfraction. (*De litteraria expeditione, &c. pag.* 162). La hauteur de chaque objet étoit augmentée de plus d'une minute par la réfraction, aussi le P. Boscovich suppose 87° 54′ 0″ & 92° 25′ 11″ pour les distances de chacun des objets par rapport au zénit.

Irrégularités des réfractions horiz.

2254. Les changemens réguliers, qui peuvent se mesurer & se prédire par le moyen du thermomètre (2239) & du baromètre (2237), ne sont pas les seuls qu'on apperçoive dans les réfractions : il y a des changemens irréguliers qu'on ne sauroit calculer, & qui viennent principalement de la partie inférieure de l'atmosphère (2223). M. de Mairan avoit déja remarqué (*Mém. acad.* 1721), que plus la couche des vapeurs denses est près de la surface de la terre, plus les réfractions en sont augmentées; M. Bouguer a fait voir aussi (*Mém. acad.* 1749, *pag.* 108), que les changemens de réfractions ne viennent pas d'un changement de l'atmosphère entière, mais seulement de la partie la plus basse : voici comme il le prouve. Lorsqu'on est sur le sommet de Pitchincha où le baromètre n'a que 16 pouces de hauteur, la couche d'air qu'on a au-dessous de soi, ou la

colonne d'air qui s'étend depuis le niveau de la mer jusqu'à la hauteur de la montagne équivaut à 12 pouces de mercure, car les deux ensemble produisent une hauteur de 28 pouces; si toute la masse de l'air se dilatoit alors de $\frac{1}{48}$ seulement, il y auroit $\frac{1}{48}$ de la colonne inférieure qui s'éleveroit sur Pitchincha, le poids de la colonne supérieure y augmenteroit, & le baromètre y monteroit de 3 lignes, car $\frac{1}{48}$ de 12 pouces fait trois lignes; cependant l'observation a prouvé qu'il n'y a point de pareil changement du baromètre sur les hautes montagnes, & que le mercure y varie à peine d'une ligne; c'est une preuve que les différences d'un sixième observées dans la réfraction au-dessous de ces montagnes, comme à Quito, entre le jour & la nuit, ne viennent que du changement de l'air qui s'est fait au-dessous du sommet; ce changement d'une ligne dans le baromètre qui a lieu sur les montagnes, ne peut produire que $\frac{1}{144}$ de différence dans la réfraction, puisqu'il ne prouve que $\frac{1}{144}$ de dilatation dans l'atmosphère (2237).

Les réfractions sont sur-tout inégales quand il vient un filet de vent froid au travers d'une masse d'air échauffé, ou quand il arrive de ces causes météorologiques qui rompent les colonnes de l'air & font baisser le baromètre quelquefois de deux pouces. (*Anciens mémoires de l'académie, tom. II, pag.* 87).

2255. On apperçoit à Paris que les réfractions voisines de l'horizon sont sensiblement affectées par les vapeurs & les fumées qui s'élèvent de dessus la ville, située au nord de l'observatoire royal. Les vapeurs & l'humidité de l'air influent beaucoup sur les réfractions, de même que la situation des lieux plus ou moins élevés, le voisinage des villes, des montagnes, des forêts, des rivieres, ou des pleines arides; aussi M. de la Caille étoit persuadé qu'un astronome ne sauroit jamais avoir près de l'horizon des réfractions purement célestes, c'est-à-dire, de la nature de celles qui se font à 20° de hauteur ou au-dessus; les seules circonstances locales

produisent des différences si considérables dans les réfractions horizontales, qu'il n'a pas même voulu insérer dans sa table de réfractions celles qui ont lieu au-dessous de 6°.

Différences dans l'espace de 24 heures.

A différentes heures du jour ces réfractions sont différentes : on voit des côtes de Gènes & de Provence, les montagnes de l'Isle de Corse, à certaines heures du jour ; mais à d'autres heures ces montagnes paroissent se plonger dans la mer, sans qu'on puisse attribuer cette différence à autre chose qu'aux réfractions terrestres, (*Mém. acad.* 1722, *pag.* 348). Le P. Laval à Marseille trouvoit l'abaissement apparent de l'horizon, tantôt de 11′ 46″, & tantôt de 14′ 30″, tandis que l'inclinaison véritable du rayon direct qui rasoit la surface de la mer devoit être de 13′ 14″, (*Mém. acad.* 1707, *pag.* 195). On trouvera sur cette matière des observations curieuses dans le Traité de M. de Luc sur les baromètres & les thermomètres, qui est actuellement sous presse à Genève, en 1770.

Tremblement de lumière.

2256. Je dois placer ici un fait assez singulier, & qui a quelque rapport avec les accidens de réfraction ; M. de la Caille éprouvoit quelquefois au Cap de Bonne-Espérance, des ondulations de lumière qui faisoient trembler les astres dans sa lunette au point de ne pouvoir pas observer ; dans ces circonstances, il ne distinguoit pas même les taches de la lune, quoique le ciel fût très-serein ; & le demi-diamètre de la lune enflé par cette ondulation paroissoit de 3 à 4″ plus grand que dans les autres temps. Nous observons en France que le vent de sud-est, lorsqu'il est un peu fort, produit quelque chose de semblable, quoique d'une manière beaucoup moins sensible qu'au Cap de Bonne-Espérance.

Diminution de la lumière.

2257. Les rayons en traversant obliquement l'atmosphère se dispersent, ensorte que l'intensité de la lumière du soleil lorsqu'il est à l'horizon, est 1354 fois moindre que lorsqu'il est au zénit, suivant les expériences de M. Bouguer : voyez le livre intitulé : *Traité d'Optique sur la gradation de la lumière*, par M. Bouguer,

à

à Paris chez Delatour 1760 *in*-4°, & un autre livre qui est aussi très-bon, sur la même matière : *J. H. Lambert Photometria, sive de mensura & gradibus luminis, colorum & umbræ ; Augustæ Vindelicorum* 1760, 547 *pag. in*-8°. On sent assez que les rayons qui se présentent obliquement à l'entrée de l'atmosphère doivent être en effet les plus faciles à réfléchir ; chacun a éprouvé par les ricochets d'une pierre jettée sur la surface de l'eau, que plus le choc d'un corps est oblique, plus il se réfléchit aisément.

2258. Ce n'est pas tant l'atmosphère que les vapeurs dont elle est chargée, qui produisent l'affoiblissement de la lumière du soleil : M. de Mairan examine cette matière fort au long dans les mémoires de 1719 & 1721, & il conclud que si l'atmosphère toute pure interceptoit à midi dans le solstice d'hiver, seulement la cinquième partie de la lumière qui parvient jusqu'à nous dans le solstice d'été, le soleil nous seroit toujours caché dès qu'il approcheroit de l'horizon, à peu-près comme il l'est dans les jours sombres, ce qui est contraire à l'expérience ; il est donc certain, continue M. de Mairan, que lorsque la lumière du soleil nous paroît sensiblement plus foible en hiver qu'en été, cet affoiblissement doit presque toujours être attribué aux vapeurs dont la partie inférieure de l'atmosphère est chargée, plutôt qu'à l'atmosphère proprement dite, quoique traversée beaucoup plus obliquement.

2259. L'atmosphère est chargée continuellement d'exhalaisons, de vapeurs, de nuages aqueux ou de feux électriques ; delà naissent une multitude de météores, & sur-tout ces feux que les enfans prennent pour de véritables étoiles, mais qui ne sont que des exhalaisons légères, dont la lumière ne dure qu'un instant. Etoiles volantes.

Des Crépuscules.

2260. Le crépuscule ou la lumière crépusculaire qu'on apperçoit vers l'horizon après que le soleil est

couché, de même que l'aurore qui nous annonce son lever, sont encore des effets semblables à celui de la réfraction; c'est l'atmosphère qui réfléchit & qui disperse les rayons du soleil, ensorte qu'il en parvient jusqu'à nos yeux une partie assez forte pour nous empêcher de distinguer les astres, quoique le soleil soit au-dessous de l'horizon.

Arc d'émersion.

2261. L'ARC D'ÉMERSION d'un astre est la quantité dont le soleil est abaissé sous l'horizon dans un vertical, lorsque l'on commence à appercevoir cet astre à la vue simple. On estime ordinairement les arcs d'émersion de 5° pour Vénus, quoique dans certains temps il soit absolument nul (1197), de 10° pour Mercure & Jupiter, de 11 à 12° pour Mars, Saturne, & les étoiles de première grandeur (218). Cependant Sirius se voit en plein jour, dans les pays méridionaux; M. de la Nux l'a vu souvent à l'Isle de Bourbon; *Canopus* est une étoile aussi grande en apparence que Sirius, du moins dans une belle nuit; mais sa lumière est un peu moins blanche, ou un peu plus terne, & on ne la voit pas aussi facilement dans le crépuscule. L'arc d'émersion, suivant Ptolomée, est de 14° pour les étoiles de troisième grandeur, (*Riccioli Almag. nov. I.* 659); enfin il est d'environ 18° pour les plus petites étoiles, puisqu'on ne les apperçoit distinctement à la vue simple que quand le soleil est abaissé de 18°: c'est ce qu'on appelle l'abaissement du cercle crépulculaire.

Abaissement du cercle crépusculaire.

2262. Cet abaissement de 18° est ce qui doit décider de la durée du crépuscule, mais il varie sans doute suivant les temps & les lieux: on peut voir dans le P. Riccioli, (*Almag. nov. I, pag.* 39), une table de toutes les opinions qu'il y a eu sur la durée des crépuscules.

2263. Rothman, (suivant Tycho), avoit trouvé que le crépuscule ne finissoit complètement que quand le soleil étoit descendu de 24° sous l'horizon; suivant Nonius dans son traité des crépuscules, c'étoit 16°; suivant M. Cassini 15°; suivant le P. Riccioli, c'est dans

les équinoxes 16° le matin, 20 $\frac{1}{2}$ le ſoir, dans le ſolſtice d'été 21° 25′ le matin, dans le ſolſtice d'hiver 17° 25′ le matin; il y a apparence que cela varie ſuivant les temps & les lieux; M. de la Caille étant en mer l'a trouvé de 16° 38′ & de 17° 13′, (*Mém. de l'acad.* 1751, *pag.* 454); mais la plupart des aſtronomes prennent 18° pour l'abaiſſement du cercle crépuſculaire.

2264. La durée du crépuſcule eſt donc le temps que le ſoleil emploie à s'abaiſſer de 18°; cette durée varie tous les jours; on trouve dans les œuvres du P. Clavius, (*Tom. III*, *pag.* 275), une table de la durée du crépuſcule depuis 35° juſqu'à 61° de latitude, & pour chaque longitude du ſoleil de trois en trois degrés; on y voit qu'elle varie ſous la latitude de 35° depuis 1^h 28′ juſqu'à 1^h 52′, & ſous celle de 45° depuis 1^h 42′ juſqu'à 2^h 39′; l'inégalité eſt encore plus grande quand on avance vers les poles. Durée du crépuſcule.

2265. Le crépuſcule le plus long de tous arrive toujours au ſolſtice d'été, mais le plus court n'arrive pas au ſolſtice d'hiver; il y a un terme moyen, où ſa durée eſt la moindre, & c'eſt la matière d'un problême *De maximis & minimis*, qui coûta de la peine à M. Bernoulli, & dont la ſolution eſt rapportée dans *l'analyſe des inf. pet.* art. 61: en voici une ſolution de M. Euler qui eſt plus facile & plus complète; dans laquelle nous donnerons auſſi la durée du plus court crépuſcule. Du plus court crépuſcule.

2266. *Trouver la déclinaiſon du ſoleil au temps du plus court crépuſcule ſous une latitude donnée, & la durée du crépuſcule le même jour*: ſoit *HO l'horizon*, (*fig.* 35), *CHZPOD* le méridien, *CD* le cercle crépuſculaire abaiſſé de 18° ſous l'horizon (2263), *Z* le zénit du lieu donné, *P* le pole boréal, *FNGM* le parallèle que décrit le ſoleil au temps du plus court crépuſcule, & dont il s'agit de connoître la déclinaiſon, ou la diſtance *PM* au pole; *NM* l'arc du même parallèle qui répond à l'angle horaire *NPM* & qui meſure la durée du plus court crépuſcule. On tirera un autre cercle *TR* parallèle à l'équateur, infiniment proche du parallèle *NM*, *Planche III. Fig.* 35.

Fig. 35. & suivant la nature du *Minimum*, ces deux arcs seront égaux; parce que le changement ou la différentielle d'une quantité devient zéro, quand cette quantité est la plus petite ou la plus grande. Ainsi l'on aura $TR = NM$; mais $TR = FG$ à cause du parallélisme des arcs FG & TR; FT & GR; donc $FN = GM$. De plus $FT = GR$ à cause du parallélisme des deux cercles FG, TR; donc les triangles rectangles FTN, GRM sont égaux, donc l'angle RMG est égal à l'angle TNF. L'angle ZMR & l'angle PMG sont droits, donc l'angle RMG est égal à l'angle PMZ. Par la même raison $TNF = PNZ$; donc l'angle PNZ égal à l'angle PMZ. Si l'on prend $MQ = 90^\circ$ & qu'on tire l'arc PQ, l'on aura le triangle sphérique PQM égal au triangle ZNP, puisque $ZN = MQ$, $PN = PM$, & l'angle N égal à l'angle M; donc on aura $PQ = PZ$.

2267. Dans le triangle ZQP l'on a par la trigonométrie (3716) cos. $ZQP = \frac{\text{cos. } ZP - \text{cos. } QP \text{ cos. } ZQ}{\text{sin. } QP \text{ sin. } ZQ}$ $= \frac{\text{cos. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZP \text{ sin. } ZQ}$ (parce que $ZP = QP$) $= \frac{\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$; donc pour son supplément dont le cosinus est négatif (3605), on aura $\frac{-\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$ $=$ cos. PQM.

Dans le triangle PQM on a par la trigonométrie (3719) cos. $PM =$ sin. PQ sin. QM cos. $Q +$ cos. PQ cos. QM; mais le second terme est nul, puisque $QM = 90^\circ$; de plus sin. $QM = 1$ donc cos. $PM =$ sin. PQ cos. PQM $= \frac{-\text{cot. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ) \text{ sin. } ZP}{\text{sin. } ZQ} = \frac{-\text{cos. } ZP\,(1 - \text{cos. } ZQ)}{\text{sin. } ZQ}$; & mettant à la place de $\frac{1 - \text{cos. } ZQ}{2}$ sa valeur sin. $\frac{1}{2}$ sin. QZ (3626), on aura $\frac{1}{2}$ cos. $PM = \frac{-\text{cos. } ZP \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ}{\text{sin. } ZQ}$. Le dénominateur sin. $ZQ = 2$ sin. $\frac{1}{2} ZQ$ cos. $\frac{1}{2} ZQ$ (3625); substituant cette valeur dans le dénominateur de l'expression précédente, elle devient $\frac{-\text{cos. } ZP \text{ sin. } \frac{1}{2} ZQ}{2 \text{ cos. } \frac{1}{2} ZQ} = \frac{-\text{cos. } ZP \text{ tang. } \frac{1}{2} ZQ}{2}$ $= \frac{1}{2}$ cos. PM. Donc $-$ cos. $PM =$ cos. ZP tang. $\frac{1}{2} ZQ$

d'où l'on tire cette proportion : *Le sinus total est au sinus de la latitude du lieu donné* (cos. PZ), *comme la tangente de* 9° ($\frac{1}{2}$ ZQ) *est au sinus de la déclinaison du soleil.* Le signe moins indique une déclinaison australe.

2268. Pour trouver la durée du plus court crépuscule, on considère que les triangles PQM, ZNP étant égaux (2266), l'angle $QPM = ZPN$; donc $ZPQ = MPN$; or dans le triangle ZPQ, dont les trois côtés sont donnés, on a pour l'angle P, 2 sin. $\frac{1}{2}$ $P^2 = \frac{\text{cos.}(PQ - PZ) - \text{cos.}\,ZQ}{\text{sin.}\,PQ\,\text{sin.}\,PZ}$ (3743) $= \frac{1 - \text{cos.}\,ZQ}{\text{sin.}\,PZ^2}$, parce que $PQ = PZ$; donc sin. $\frac{1}{2}$ $P^2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos.}\,ZQ}{\text{sin.}\,PZ^2} = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,ZQ^2}{\text{sin.}\,PZ^2}$; donc sin. $\frac{1}{2}$ $P = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,ZQ}{\text{sin.}\,PZ}$; d'où l'on tire cette proportion ; *Le cosinus de la latitude du lieu* (sin. PZ), *est au sinus de* 9° (sin. $\frac{1}{2}$ ZQ), *comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle* ZPQ ou NPM, *qui convertie en temps donne la durée du plus court crépuscule.*

Formule pour le plus court crépuscule.

Formule pour sa durée.

2269. Par le moyen de ces deux proportions, on trouve que le plus court crépuscule arrive à Paris quand le soleil a 6° 51′ de déclinaison australe, ce qui alieu vers le 2 Mars & le 10 Octobre, & que sa durée est de 1ʰ 47′. Mais le plus court crépuscule qui puisse avoir lieu sur la terre est sous l'équateur, au temps de l'équinoxe, & il est de 1ʰ 12′.

La figure du crépuscule est une hyperbole, qui est un peu altérée par la réfraction, (*Mém.* 1713, *pag.* 60), on voit en mer dans la Zone Torride cette courbe assez bien terminée lorsque le crépuscule est près de finir, au rapport de M. de la Caille.

2270. La hauteur de l'atmosphère peut se déduire de l'abaissement du cercle crépusculaire ; Képler en fit l'essai, & M. de la Hire, (*Mém. acad.* 1713, *pag.* 54), perfectionna cette méthode ; soit C le centre de la terre, *fig.* 139, ABD un arc la circonférence de la terre que je suppose de 18°, BG la hauteur de l'atmosphère, DG le rayon du soleil quand il est à 18° au-dessous de l'horizon, c'est le premier rayon qui commence

Fig. 139.

Fig. 139. à être réfléchi vers l'obſervateur placé en *A*, par la partie ſupérieure *G* de l'atmoſphère.

Dans le triangle *AGC* rectangle en *A*, on connoît l'angle *ACG* qui eſt de 9°, & le rayon de la terre *CA* que Képler ſuppoſoit de 904 milles d'Allemagne; on trouvera *CG* de 914 milles, donc l'excès *BG* eſt de 10 milles; ſi l'on évalue chaque mille, à 3800 toiſes, on aura 38 milles toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère, du moins ſuivant cette méthode, employée à la façon de Képler. Quoique Képler trouvât 10 milles pour la hauteur de l'atmoſphère par la méthode des crépuſcules, cependant il n'eſtimoit cette hauteur que d'un demi-mille, ou environ 2000 toiſes, il attribuoit le crépuſcule, ſoit aux différentes réflexions & réfractions des rayons au-dedans de l'atmoſphère, ſoit à l'atmoſphère du ſoleil (845).

Hauteur de l'atmoſphère.

M. de la Hire ne trouve que 34585 toiſes au lieu de 38000, en faiſant entrer dans ſon calcul la réfraction du rayon *DG*, & la différence de hauteur entre le bord & le centre du ſoleil, (*Mém. acad.* 1713, *p.* 59).

M. Mariotte dans ſon eſſai de la nature de l'air, en employant les expériences ſur la condenſation de l'air, trouve l'atmoſphère encore un peu moindre que M. de la Hire.

Si l'on ſuppoſe que la hauteur de l'atmoſphère dans les éclipſes de lune produit une ombre qui ſoit la 60e partie de celle de la terre, comme pluſieurs aſtronomes l'ont dit (1776), on aura 54488 toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère.

Si l'on prend pour atmoſphére la partie de l'air où la réfraction de la lumière eſt ſenſible, on ne trouve que 5158 toiſes de hauteur, ſuivant M. Bouguer (2218).

Quand on ne prend que la hauteur où le poids de l'air & ſon action ſur le baromètre ſont ſenſibles, on ne trouve qu'environ 4200 toiſes pour la hauteur de l'atmoſphère ou plus exactement 25275 pieds, ſuivant les expériences de M. de Luc. Ce nombre de pieds diviſé par la hauteur du baromètre en lignes, donne au quotient le nombre de pieds dont il faut monter ou deſcendre

pour faire changer d'une ligne la hauteur du baromètre, en supposant toutes fois que l'air soit à la température, ou à 10° du thermomètre (129), on prendroit 27096 pieds si le thermomètre étoit à 25°. (*Connoiss. des mouv. celest.* 1765, *pag.* 220).

Des Atmosphères des Planètes.

2271. Nous avons parlé de l'atmosphère du soleil à l'occasion de la matière zodiacale (845), & de celle de la lune à l'occasion de l'inflexion (1992); nous ajouterons seulement que le P. Boscovich, dans une dissertation imprimée à Rome en 1753, *De Lunæ atmosphæra*, a fait voir que la lune pourroit avoir une atmosphère aussi dense que de l'eau, sans qu'il fût possible de nous en appercevoir, & que cette atmosphère pourroit bien être la cause qui empêche de distinguer les montagnes sur le bord de la lune, tandis qu'on les voit distinctement sur son disque. On peut voir aussi ce que dit le P. Frisi dans sa dissertation de *Atmosphæra cœlestium corporum*, qui remporta le prix de l'académie en 1758, & qu'il a fait imprimer à Lucques en 1759, dans le premier volume de ses dissertations. Au reste, il est impossible de dire quelque chose de certain sur cette matière.

2272. Les passages de Vénus & de mercure sur le soleil devroient nous faire appercevoir les atmosphères de ces deux planètes, s'il y en avoit, comme quelques astronomes l'ont cru; cependant j'ai vu Mercure en 1753, & Vénus en 1761, sans aucune apparence d'anneau lumineux; mais je ne dois pas dissimuler que d'autres astronomes ont parlé plusieurs fois de ces anneaux; on en vit un à Montpellier dans le passage de Mercure en 1736, & l'on assure même que cet anneau continua de paroître six à sept secondes après que Mercure fut totalement sorti de dessus le disque du soleil. M. de Fouchy, M. le Monnier, M. Chappe, M. Wargentin ont assuré qu'ils avoient vu cet anneau autour de

Anneau lumineux.

Vénus, (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 365), ce qui formeroit un préjugé pour le systême des atmosphères des planètes, si cet anneau ne pouvoit s'expliquer par des causes purement optiques.

M. Cassini, (*Observations astron. pag.* 42 & 45), en comparant entre elles diverses observations de Mars, lorsque cette planète étoit fort près de la moyenne des 3 ♆ dans l'eau du verseau, trouva des différences très-irrégulieres; il crut qu'elles pouvoient être causées par quelque réfraction extraordinaire, faite dans l'atmosphère de Mars; il trouva les mêmes irrégularités par l'observation de Cayenne; le jour de la conjonction de Mars à la moyenne ♆, l'intervalle entre cette étoile & celle qui la précède parut sensiblement augmenté, car les jours précédens la différence du passage de ces deux étoiles étoit de 2′ 8″ de temps à Cayenne, comme on l'observa toujours à Paris, & le jour de la conjonction, il parut de 2′ 14″, ce qui semble s'accorder à ce que M. Cassini avoit imaginé que le rayon visuel qui alloit à l'étoile après la conjonction avec Mars, rencontrant obliquement son atmosphère y pouvoit être rompu, de sorte qu'il faisoit paroître l'étoile trop orientale en augmentant sa distance par rapport à Mars qui avoit passé à l'occident de l'étoile.

M. Cassini attribuoit à la même cause la trop grande vîtesse dans la séparation de Mars & de l'étoile, qu'il trouvoit par la comparaison des observations de M. Picard & de M. Romer. Un autre phénomène semblable, c'est que la parallaxe déduite de la comparaison de la dernière observation de M. Picard avec celle de M. Richer, parut insensible, tandis qu'elle paroissoit trop grande, vers le temps de la conjonction, à cause d'une trop grande vîtesse dans la séparation de Mars avec l'étoile fixe suivante: il attribuoit une partie seulement de la différence à la parallaxe, & l'autre à la réfraction produite dans l'atmosphère de Mars. M. Cassini, en rapportant ses doutes sur cette matière, avertit les observeurs d'y prendre garde dans les occasions semblables, pour

pour avoir la confirmation ou la réfutation de cette idée par des observations plus décisives.

2273. La diffraction ou inflexion des rayons dont parle M. Newton dans le 3e livre de son optique, est le changement de direction que des rayons éprouvent en passant près d'un corps solide qui les attire par sa masse ou les repousse par une espèce de réflexion : on a essayé quelquefois d'expliquer, par cette diffraction, divers phénomènes que d'autres expliquent par les réfractions des atmosphères, ou par l'irradiation & l'aberration des rayons qui bordent les corps lumineux (1991, 2272), de même que les bandes lumineuses des ombres, observées par le P. Grimaldi, & par M. de l'Isle, (*Mémoires pour servir à l'histoire & au progrès de l'astronomie*, à Pétersbourg 1738, *in*-4°).

LIVRE TREIZIEME.

DES INSTRUMENS D'ASTRONOMIE.

Les fondemens essentiels de l'astronomie & les calculs des principaux phénomènes ont rempli la majeure partie de cet ouvrage ; il est temps d'y joindre le détail & la pratique des observations : cette branche de l'astronomie n'avoit été traitée par aucun astronome ; c'est ce qui m'a obligé à lui donner ici une certaine étendue.

2274. Le plus ancien instrument d'astronomie dont on ait fait usage, est le Gnomon ou style droit avec lequel on mesuroit les ombres du soleil, nous en parlerons bientôt en détail (2281). On employa ensuite les cercles divisés en degrés (23, 304), auxquels on rapportoit les arcs des cercles célestes ; le plus célèbre de ces instrumens est ce qu'on appelle les *Armilles d'Alexandrie*, avec lesquelles Timocharès (345) observa la déclinaison de l'épi de la Vierge ; elles avoient une demi-aune de diamètre, (*Proclus Hyp. astr.* c. 2.) Flamsteed pense que, comme l'aune des anciens pouvoit être la longueur des bras étendus, ces armilles devoient avoir trois pieds de diamètre, (*Flamst. proleg. pag.* 19,21,30) ; il en est parlé dans l'Almageste III. 2. Je crois que leur précision pouvoit aller à 10′.

2275. Ptolomée se servit pour déterminer la parallaxe de la lune d'un instrument qu'on a appellé *Triquetrum* ou *Règles parallactiques* (a), dont le rayon étoit de 4 coudées ou de 6 pieds, il en donne la decription dans son Almageste, (Lib. V. cap. 12, *pag.* 113), la
Fig. 196. *figure* 196 représente les 3 règles.

(a) Copernic & Tycho écrivent *parallatiques*, mais Ptolomée écrivoit παραλλακτικὸν, il s'en servoit pour les parallaxes ; c'est la machine que nous décrirons ci-après (2400), qu'on doit appeller parallatique, parce qu'elle suit le parallèle des astres.

Sur un côté de la règle *AO* l'on voit à angles droits deux petites planchettes carrées *L* & *O* parallèles entre elles, dont chacune a au milieu un petit trou, celui de l'œil est le plus petit, & celui qui est en *L* est assez grand pour que la lune puisse y paroître toute entière; la règle *AO* étoit ajustée par une charnière sur la règle verticale *AF*, & elle tournoit librement autour du point *A*; la règle *GD* servoit à régler le mouvement de *AO*; sur les lignes *AG* & *AO* étoient marquées 60 parties égales qui formoient le rayon, tandis que *GD* étoit la corde de l'angle *GAO*, en supposant que le triangle *GAD* fût toujours isocelles. Le long de la règle verticale *AF*, il y avoit un fil à plomb passant par deux trous *B* & *C* qui servoit à rendre la règle *AF* exactement perpendiculaire à l'horizon.

Ptolomée décrit encore dans son Almageste, (Liv. V. cap. 1, *pag.* 100), un autre instrument qu'il appelle *Astrolabe*; & qu'il employoit pour observer les distances de la lune au soleil: il y avoit deux cercles exactement tournés, placés l'un dans l'autre à angles droits, l'un destiné à représenter l'écliptique, & l'autre le colure des solstices sur lequel on marquoit les poles de l'équateur; un troisième cercle tournoit autour des poles de l'écliptique sur deux cylindres qui y étoient fixés, & servoit à marquer les longitudes; un quatrième cercle au-dedans des trois autres portoit deux trous ou deux pinules, qui servoient à regarder la lune ou un autre astre & à mesurer sa longitude & sa latitude. Cet instrument ne diffère de celui de Tycho, que nous décrirons ci-après (2279), que par une plus grande perfection dans ce dernier. Astrolabe.

2276. Les Arabes ne se servirent point des armilles, mais seulement des règles parallactiques de Ptolomée, ils y ajoutèrent des quarts-de-cercles d'un plus grand rayon & des sextans, comme on le voit par un écrit du Docteur Bernard sur l'obliquité de l'écliptique déterminée par les Arabes, (*Phil. transf.* n° 163); il raconta à Flamsteed qu'il avoit vu un écrit d'un ancien Arabe sur Instrumens des Arabes.

la comparaison des instrumens de son temps avec ceux des anciens, pour prouver que les observations des Arabes étoient plus exactes que celles des Grecs, il seroit bien à desirer que ce petit ouvrage fût traduit, (*Flamst. Proleg. pag.* 20 *&* 26).

De Waltherus. 2277. Après les observations Arabes, on trouve celles de Waltherus, qui se servit d'abord des règles parallactiques, & du rayon ou bâton astronomique, *Baculus astronomicus*, qui étoit à peu-près de la même nature, ensuite d'une armille à la façon de Ptolomée. Les erreurs de ses observations alloient quelquefois à 10′, ainsi que dans celles de Copernic; Régiomontanus dans son livre *de Torqueto*, parle de plusieurs autres espèces d'instrumens, dont le détail seroit trop long. Le *Torquetum* avoit une table horizontale, une autre parallèle à l'équateur, & une 3ᵉ dans le plan de l'écliptique, avec un cercle de latitude mobile.

2278. Copernic fut ensuite le plus célèbre observateur du 16ᵉ siècle, mais nous voyons qu'il n'employa pas d'autres instrumens que ceux de Ptolomée (2275); son astrolabe est décrit dans son livre de *Revolutionibus*, Lib. II. cap. 14, & son instrument parallatique, Lib. IV. cap. 15. De son aveu il pouvoit y avoir 10′ d'erreur dans ses observations.

De Tycho. 2279. Tycho-Brahé fut le premier qui fit construire des instrumens sur lesquels on distinguoit, non-seulement les minutes, mais quelquefois les secondes de dix en dix, comme on le voit dans l'ouvrage où il en donne la description, (*Astronomiæ instauratæ mecanica*), dans son histoire céleste, dans les mémoires de l'académie pour 1763, où M. Jeaurat a donné les figures de ceux qui étoient les plus remarquables, beaucoup mieux gravées que dans le livre de Tycho, enfin dans l'histoire céleste de Flámsteed, *Tom. III*, *pag.* 46.

Tycho rendant compte dans ses Progymnasmes des observations qu'il avoit faites pour l'établissement des principaux points de l'astronomie, donne la description des deux instrumens dont il s'étoit le plus servi, sur-

tout pour mesurer les distances des étoiles & leurs différences d'ascensions droites; le premier de ces deux instrumens est un sextant dont le rayon avoit 4 coudées ou environ 6 pieds, & il en avoit trois de la même construction, (*Progymn. pag.* 247, *Astronomiæ inst. mecanica, pag.* 53).

Le second instrument que Tycho décrit dans ces deux ouvrages, comme un des instrumens dont il faisoit le plus d'usage, est celui qu'il appelle ARMILLES ÉQUATORIENNES, elles sont représentées dans la *fig.* 195; le cercle extérieur *NZH* représente le méridien, & il est supposé placé en effet dans le plan du méridien, ensorte que le point *N* regarde directement le midi, & que le point *N* soit au nord; ce cercle étoit de cuivre, poli & divisé de minute en minute, les autres cercles étoient couverts de lames de cuivre. Autour de l'axe *PA* tournent les deux cercles *FI* & *QN*; le cercle *FI* n'est point divisé, parce qu'il ne sert qu'à soutenir & porter l'équateur *NMR* qui est mobile; l'axe *PA* est de cuivre, & porte un cylindre *D* au centre de cette sphère. Les pinnules *R* & *N* qui sont sur l'équateur sont de cuivre, elles servent à mesurer les distances des astres au méridien ou les angles horaires, & les différences d'ascension droite. On a même cet avantage avec un équateur mobile, que lorsqu'on met un astre sur le degré d'ascension droite qui lui convient, on voit dans le méridien même l'ascension droite du milieu du ciel (1011), dont les astronomes ont souvent besoin; d'où l'on conclut l'heure qu'il est, quand on sait l'ascension droite du soleil. *Fig.* 195.

Le cercle intérieur *VQC* est un cercle de déclinaison ou un méridien qui tourne autour de l'axe *PA*, & dont le plan est toujours perpendiculaire à celui de l'équateur *RMN*; on dirige ce méridien mobile vers l'astre dont on veut mesurer la déclinaison, & au moyen des pinnules *Q* & *C* & du cylindre *D*, qui est au centre de l'instrument, porté sur l'axe même, on s'aligne vers

l'étoile dont la déclinaison se trouve marquée par la pinnule.

Toute cette machine étoit placée sur un pied de cuivre, très-solide, qu'il faut concevoir au-dessous de *T*, & que je n'ai pas représenté, parce qu'il n'est pas essentiel à la nature de l'instrument; le fil à-plomb *ZT* étoit un fil de cuivre très-délié chargé d'un poids *T*, qui servoit à placer l'instrument une fois pour toutes, ou à vérifier de temps à autres sa position. On imite, pour ainsi dire, ces armilles dans la construction de l'*Anneau astronomique*, dont on peut voir la description dans le traité des instrumens de mathématiques, par *Bion*.

Cet instrument est celui dont Tycho faisoit le plus d'usage, car toutes les fois qu'il avoit observé les distances des planètes aux étoiles avec le sextant, il mesuroit ordinairement leur déclinaison, & le temps vrai de l'observation avec ces armilles équatoriennes, en mesurant la distance de quelque belle étoile au méridien le long de l'équateur. On mesuroit aussi quelquefois la hauteur & l'azimut pour avoir le temps vrai, avec d'autres instrumens. Souvent Tycho, à la suite des distances d'une planète aux étoiles, donne aussi l'ascension droite de la planète conclue de sa distance au méridien par les armilles équatoriennes.

Tels sont les deux principaux instrumens de la nombreuse collection de Tycho, & ceux qu'il décrit par préférence dans ses Progymnasmes; leur précision alloit à peu-près à une minute.

Instrumens d'Hévélius.

2280. Les instrumens dont se servit Hévélius dans le dernier siècle, étoient aussi remarquables par leur grandeur & leur exactitude; il en a décrit 12 principaux dans son Organographie, (*Mach. cœlest. pars* 1), parmi lesquels on remarque un sextant de cuivre, de plus de six pieds de rayon, avec lequel il mesura ce nombre prodigieux de distances qu'on trouve dans le grand ouvrage intitulé: *Mach. cœlestis*; on peut estimer à 15″ ou

20″ les erreurs probables de ses observations. Il semble même que Flamsteed les regarde comme encore plus petites, (*Flamst. Proleg. pag.* 100).

DES GNOMONS OU MÉRIDIENNES.

2281. On appelle Gnomon (72) une hauteur perpendiculaire prise au-dessus d'une méridienne horizontale; on mesure sur la méridienne ou la longueur de l'ombre, ou la distance entre l'image lumineuse du soleil & la verticale qui marque le pied du style; l'on a dans les deux cas la tangente de la distance du soleil au zénit; la hauteur du style étant prise pour le rayon.

L'observation des hauteurs méridiennes du soleil (70), ou de la longueur des ombres a dû être une des premieres méthodes employées pour mesurer l'année, & le retour des saisons; cette méthode paroît avoir été fort en usage chez les Egyptiens, les Chinois & les Péruviens, voyez M. Goguet, (II. 250), l'histoire de l'astronomie Chinoise, (*Tom. I, pag.* 3. *Tom. II, pag.* 5, 8 & 21). Les Gnomons ont été les premiers instrumens astronomiques qu'on ait imaginés, parce que la nature les indiquoit pour ainsi dire aux hommes: les montagnes, les arbres, les édifices sont autant de Gnomons naturels qui ont fait naître l'idée des Gnomons artificiels qu'on a employés presque par-tout. Tels furent probablement l'horloge d'Achaz, (Voyez M. Goguet), les Gnomons des Caldéens (261), de Pythéas à Marseille (341), & d'Ératosthènes (2628).

Sous l'empire d'Auguste un Mathématicien nommé *Manlius*, profita d'un obélisque que ce Prince avoit fait élever dans le champ de Mars, pour en faire un Gnomon; Pline dit qu'il avoit $116\frac{1}{4}$ pieds, ($105\frac{3}{4}$ de France), & qu'il marquoit les mouvemens du soleil. (*Pl. lib.* 36. *cap.* 9, 10 & 11). Cet obélisque se voit encore à Rome, quoique abattu & fracassé; j'en ai parlé dans le IVe volume de mon *Voyage en Italie*, & l'on peut voir plusieurs belles

dissertations sur cette matière dans l'ouvrage de M. Bandini, *Dell' obelisco di Cesare Augusto*, &c. à Rome 1750, *in-folio*.

Cocheou-King en fit un de 40 pieds à Pékin, vers l'an 1278 (418); Ulug-Beg vers 1430 se servit à Samarkand d'un Gnomon qui avoit 165 pieds de hauteur (396). Cet usage des Gnomons a été si naturel & si général qu'on en a trouvé des vestiges, même au Pérou: *Garcilaso de la Vega, commentarios reales de los incas* 1723, *Tom. I, Lib. 2. cap. 22, pag. 61.*

Paul Toscanella qui mourut en 1482, éleva à Florence l'un des plus fameux Gnomons que l'on ait vu, il a 277 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur, & c'est le plus grand qui existe. Le P. Ximenez premier mathématicien du grand Duc de Toscane, l'a rétabli, & en a donné une ample & belle description: *Del vecchio e nuovo Gnomone Fiorentino* &c. 1757, *in-4°.*

Gassendi voulant observer en 1636, la hauteur solsticiale du soleil, comme il l'avoit promis à Wendelinus, forma dans le college de l'Oratoire à Marseille, un Gnomon de 51 pieds 8 pouces 4 lignes de hauteur (*Gass. op. Tom. V, pag.* 525), avec lequel il observa la hauteur solsticiale du bord supérieur du soleil 70° 25′ 59″. Le Gnomon du P. Henri à Breslaw avoit 35 pieds, comme je le trouve dans les manuscrits de M. de l'Isle.

Méridienne de S. Petrone.

2282. Ignace *Dante*, Dominicain, ensuite Evêque d'Alatri, construisit un Gnomon de 67 pieds de haut en 1575 ou 1576, dans l'Eglise de Saint Pétrone, patron de Bologne (460); M. Cassini le rétablit en 1655, & en 1695 (554), & lui donna 83 $\frac{1}{2}$ pieds de hauteur; c'est cette méridienne de Saint Petrone de Bologne, qui a été la plus célèbre & la plus utile de toutes. On en trouve la description dans deux ouvrages, l'un de M. Cassini, l'autre de M. Manfredi, avec les observations qui y ont été faites en très-grand nombre: j'en ai parlé dans le second volume du *Voyage d'un François en Italie*, publié en 1769.

M. Picard

M. Picard en 1669 commença la méridienne qui eſt dans la grande ſalle de l'Obſervatoire royal de Paris, dont le Gnomon à 31 pieds; M. Caſſini l'a refaite long-temps après, & elle a été ornée de marbres avec des diviſions & des figures pour chaque ſigne.

La méridienne des Chartreux de Rome aux Thermes de Dioclétien eſt la plus ornée que je connoiſſe; il y a deux Gnomons, l'un de $62\frac{1}{2}$ pieds de hauteur au midi, l'autre de 75 pieds du côté du nord; cet ouvrage fut conſtruit par M. Bianchini en 1701. Voyez ſa diſſertation de *Nummo & Gnomone clementino*, à la ſuite de ſon livre de *Kalendario & cyclo Cæſaris*, *Romæ* 1703 *in-folio*; le livre publié par Manfredi, à Vérone en 1737: *Franciſci Blanchini aſtronomicæ obſervationes*; & mon Voyage en Italie, *Tom. III. pag.* 484, édition de Paris 1769.

La méridienne de S. Sulpice de Paris fut entrepriſe en 1727 par M. Sully, Horloger; M. le Monnier l'a refaite en grand, avec ſoin & avec magnificence, (*Mém. acad.* 1743, *pag.* 361), & il s'en eſt ſervi chaque année pour obſerver l'obliquité de l'écliptique; les objections que j'ai faites contre le réſultat de ces obſervations ſe trouvent dans les *Mémoires de l'académie* pour 1762. De S. Sulpice de Paris.

Des Lunettes Aſtronomiques.

2283. L'INVENTION des lunettes d'approche devenue ſi utile à l'aſtronomie, fut faite vers l'an 1609 par hazard en Hollande; mais Molyneux dans ſa Dioptrique obſerve que Roger Bacon, mort en 1292, en avoit donné quelque idée, & Képler dans une diſſertation imprimée en 1611, obſervoit que J. B. Porta, Napolitain, en avoit parlé avant la fin du dernier ſiècle d'une manière aſſez poſitive. (Voyez l'*Optique de Smith*).

Galilée dans le *Nuncius Sydereus*, publié au mois de Mars 1610, *pag.* 9, raconte qu'environ dix mois auparavant, le bruit s'étoit répandu qu'un certain Hollandois avoit fait une lunette, par le moyen de laquelle

les objets éloignés paroiſſoient fort proches ; on en racontoit pluſieurs effets ſinguliers, que quelques perſonnes révoquoient en doute. Quelques jours après un gentilhomme François, nommé Jacques *Badovere*, lui ayant écrit de Paris la même choſe, il ſe mit à en chercher la raiſon, & à méditer ſur les moyens de faire un pareil inſtrument, par le moyen des loix de la réfraction ; il y parvint bientôt. Il mit aux deux extrémités d'un tube de plomb, deux verres, plans d'un côté & ſphériques de l'autre, mais dont l'un avoit un côté convexe, & l'autre un côté concave ; alors approchant l'œil du verre plan concave, il vit les objets trois fois plus près qu'à la vue ſimple, il continua à Padoue de conſtruire des lunettes plus longues ; & nous avons au dépôt de l'académie l'objectif avec lequel il découvrit peu après les ſatellites de Jupiter (2880).

Objectif & oculaire.

2284. Les lunettes dont ſe ſervent aujourd'hui les aſtronomes, ſont formées de deux verres convexes, dont l'un tourné du côté de l'objet s'appelle l'*objectif*, & l'autre vers lequel on place l'œil s'appelle l'*oculaire* ; je ſuppoſerai comme des choſes connues pluſieurs propoſitions que l'on trouvera démontrées dans les livres d'Optique (a) déja cités (2162) ; je ne rapporterai donc ici que les principes les plus ſimples pour mettre ſur la voie le Lecteur qui ne voudra pas recourir à d'autres livres.

Effet des Lunettes.

Fig. 142.

2285. Les rayons *SA*, *SA* (*fig.* 142) qui viennent d'un point lumineux, par exemple, d'une étoile, ſont parallèles entr'eux à cauſe de la grande diſtance (1743) ; ils ſe réuniſſent en un foyer *F*, & y forment l'image du point lumineux ; ces rayons après s'être réunis au point *F* s'écartent & vont tomber ſur l'oculaire *GG*, duquel ils ſortent parallèles pour entrer dans l'œil placé en *O*.

(a) Optique vient de ὄπτομαι, *video*; Catoptrique vient de κάτοπτρον, *ſpeculum*, parce que c'eſt la connoiſſance des rayons réfléchis ; Dioptrique vient de διόπτομαι, *je vois au travers*, parce qu'elle traite des réfractions ; la Dioptrique s'appelle auſſi *anaclaſtique*, du mot κλάω, *frango*.

Un œil bien conſtitué, c'eſt-à-dire, qui n'eſt ni myope ni preſbyte, voit diſtinctement un objet lorſque les rayons qui vont de l'objet à l'œil y arrivent parallèlement entr'eux, & il voit l'objet ſur l'axe optique *CF* ou ſur la ligne qui paſſe par l'objet, par le centre de l'objectif, & par le point *F* du foyer où tous les rayons étoient raſſemblés avant que d'arriver à l'oculaire. *Fig.* 142. Axe Optique.

2286. Si l'on conſidère deux points lumineux, par exemple, les deux extrémités *S* & *L* d'un objet (*fig.* 143), on aura deux axes *SAF* & *LAG*; le point *S* envoie une infinité de rayons parallèles entr'eux, qui vont tous ſe réunir en un point *F* pour arriver enſuite à l'œil parallèles entr'eux, & c'eſt ainſi que l'œil apperçoit diſtinctement l'image de cet objet au point *F* (2285); de même le point *L* envoie une infinité de rayons qui couvrant toute la ſurface de l'objectif, vont enſuite ſe réunir au foyer *G*, ſur l'axe *LAG*, & font voir diſtinctement le point *L*; l'angle que ces rayons *SAF* & *LAG* font entr'eux après avoir traverſé l'oculaire, lorſqu'ils arrivent à l'œil, eſt plus grand que celui des rayons directs; & l'on démontre dans les livres d'Optique que la grandeur apparente d'un objet eſt multipliée autant de fois que le foyer de l'objectif contient celui de l'oculaire; ainſi une lunette de 18 pieds de foyer, avec un oculaire de 2 pouces de foyer, groſſit un objet 108 fois, parce que deux pouces ſont contenus 108 fois dans 18 pieds; avec une ſemblable lunette on voit les objets comme on les verroit s'ils étoient 108 fois plus près de nous qu'ils ne ſont réellement. A l'égard des Téleſcopes, voyez l'art. 2410. *Fig.* 143. Combien groſſiſſent les lunettes.

2287. La grandeur de l'image *GF* répond à un angle *GAF* égal à l'angle *SAL* qui meſure le diamètre de l'objet; ainſi pour qu'un objet qui a 32′ de diamètre puiſſe ſe voir dans une lunette, il faut que l'ouverture de l'oculaire ſoit aſſez grande pour que le demi-diamètre *BF* de cette ouverture ſouſtende un angle de 16′ au centre *A* de l'objectif; c'eſt cette ouverture de l'oculaire, ou

plutôt celle du *Diaphragme* (a), ou du cercle de carton qu'on place au foyer *F* d'une lunette, qui décide seule du *champ* de la lunette, c'est-à-dire, de la grandeur de l'objet qu'on peut y appercevoir.

Champ de la lunette.

2288. On donne 10 à 12 lignes d'ouverture au diaphragme d'une lunette de 5 pieds dont l'oculaire auroit 2 pouces de foyer; on doit consulter là-dessus l'expérience; car il est permis d'augmenter cette ouverture tant qu'on ne voit ni couleurs ni confusion sur les bords du champ de la lunette; mais plus une lunette grossit, plus le champ diminue, parce qu'un oculaire d'un court foyer ne peut pas avoir une grande ouverture: un oculaire de 2 pouces de foyer ne sauroit avoir que deux pouces d'ouverture tout au plus.

La lumière dépend de l'ouverture de l'objectif.

2289. L'ouverture de l'objectif ou la largeur *CD* qu'on y réserve pour introduire les rayons, décide seule de la quantité de lumière qu'on aura dans la lunette, & de la clarté avec laquelle on y verra les objets; c'est-là le principal avantage d'une grande lunette sur une petite; le verre *CD* pouvant admettre une plus grande quantité de lumière, on peut la disperser par le moyen d'un oculaire qui grossisse beaucoup, sans qu'elle soit trop affoiblie.

Il seroit donc très-utile d'augmenter cette ouverture pour augmenter la lumière des objets; cependant on donne à peine deux pouces & demi d'ouverture à une lunette de 18 pieds; parce que la figure sphérique de nos verres ne réunit pas exactement les rayons en un seul point; cette *aberration* provenant de la sphéricité est d'autant plus forte que l'ouverture est plus grande; les objets deviennent confus & mal terminés quand on augmente l'ouverture assez pour rendre cette aberration sensible, & c'est là un des principaux inconvéniens des lunettes astronomiques (1395).

Aberrations qui viennent de la sphéricité.

2290. Dans des verres qui seroient parfaitement sphériques l'aberration des rayons ou la confusion qui en

(a) Διὰ *inter*, φράγμα *vallum separatio*.

résulte, seroit comme le cube des longueurs focales. (*Opt. de Smith*). D'après cette règle, M. Huygens avoit donné une table des ouvertures qui convenoient à chaque lunette, suivant la longueur du foyer de l'objectif: voici un extrait de cette table pour des lunettes de 3, 6, 9 & 18 pieds de foyer, qui sont les longueurs les plus employées dans l'usage de l'astronomie; ces nombres sont exprimés en pouces & dixièmes de pouces; la dernière colonne exprime la longueur des foyers d'oculaires, que M. Huygens conseilloit pour ces différentes lunettes.

Tables des ouvertures & des foyers d'oculaires.

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds	*pou.*	*pou.*
3	0, 97	1,07
6	1, 37	1,50
9	1, 67	1,83
18	2, 42	2,60

2291. M. le Gentil après avoir fait plusieurs expériences sur les lunettes, & sur le degré de netteté que procurent des ouvertures & des foyers différens, & ayant employé les nombres indiqués dans l'Optique de Newton, (*Liv. I. prop.* 7), a dressé une table pour des lunettes de différentes longueurs; en voici l'extrait pour les longueurs les plus ordinaires, qui sont de 3, 6, 9 & 18 pieds; les ouvertures des objectifs & les foyers des oculaires sont exprimés en lignes & dixièmes de lignes, (*Mém. ac.* 1755, *p.* 462).

Foyer.	Ouverture.	Oculaire.
pieds	*lig.*	*lig.*
3	6, 7	16, 9
6	9, 7	24, 1
9	12, 0	29, 0
18	16, 7	41, 0

2292. On ne doit consulter que l'expérience pour régler les ouvertures, les oculaires, & les diaphragmes des lunettes; parce que tout cela peut varier suivant la perfection de l'objectif, & l'usage qu'on se propose d'en faire. Avec un excellent objectif de 15 pieds, on peut employer un oculaire qui n'aura qu'un pouce & demi, pour voir un objet fort lumineux, parce que l'image étant parfaite on peut la regarder avec une loupe qui la grossisse beaucoup, sans qu'elle paroisse obscure ni mal terminée; mais il y faudra peut-être un

Tout cela varie beaucoup.

oculaire de 3 pouces, si l'objectif est d'une qualité médiocre ou si l'objet a peu de lumière.

Différences des lunettes de jour à celles de nuit.

2293. Il faudroit quand on observe pendant le jour employer des oculaires plus foibles ou d'un plus long foyer que la nuit, à cause de la grande lumière des objets environnans qui frappe & éblouit les yeux, rétrécit la prunelle, & rend l'œil moins sensible aux impressions d'une lumière trop foible. Lorsqu'on ne veut que rassembler une très-grande lumière sans s'occuper de rendre les objets bien terminés, on rend l'ouverture de l'objectif extrêmement grande, & le foyer de l'oculaire un peu long; c'est-là tout le secret des *lunettes de nuit* avec lesquelles on parvient à découvrir des comètes dans le ciel, & des vaisseaux sur mer pendant la nuit.

Avantages de deux oculaires

2294. Deux oculaires plans convexes, qui seroient, par exemple, de 3 pouces & de 1 pouce $\frac{1}{2}$ pour une lunette de 12 pieds, font souvent beaucoup mieux qu'un seul oculaire, ils procurent une plus grande ouverture de l'oculaire, & les astronomes trouvent de l'avantage dans cette méthode; on est même obligé d'y avoir recours lorsqu'on veut employer des oculaires d'un court foyer, & faire grossir considérablement une lunette (2304).

Lunettes à six verres convexes.

2295. Les lunettes astronomiques sont composées de deux verres seulement, mais elles ont l'inconvénient de renverser les objets; les lunettes ordinaires dont on se sert sur terre sont composées de quatre verres; mais on en fait quelquefois, sur-tout pour la Marine, qui sont à six verres convexes; elles ont le champ plus grand d'environ une moitié que les lunettes à quatre verres, & elles sont moins sujettes aux Iris: voyez M. Euler dans les mélanges de l'académie de Turin, *Tom. III*, & dans les mémoires de Berlin, *Tom. XIII.*

2296. Dans la disposition de ces lunettes, on observe de ne pas mettre les oculaires l'un au foyer de l'autre, on y verroit les taches & les poussières noires qui nuisent à la netteté de l'image, au lieu que quel-

ques lignes d'écartement suffisent pour empêcher qu'on ne distingue ces corps étrangers sur la surface d'un oculaire.

2297. Je n'entrerai pas dans le détail de la manière de travailler & de polir les verres avec le sable, & ensuite le tripoli ou la potée d'étain. Cet art aussi bien que celui de faire les instrumens d'astronomie, fera la matière d'une ample description que M. l'Abbé de Rochon se propose de publier à la suite des Arts que l'académie a déjà donnés (*Nov.* 1770) : en attendant l'on peut consulter Smith, Huygens, Molineux, le Pere d'Orléans. Hévélius cite un auteur nommé *Hieronymus Syrturus* qui avoit fort bien écrit sur cette matière; il y en a un autre nommé *Arshout*; M. Passemant en a dit quelque chose dans sa *construction d'un télescope*, imprimée en 1738, & M. l'Abbé de Rochon dans ses opuscules. Du travail des verres.

Des Lunettes Achromatiques ([a]).

2298. Un des plus grands obstacles qu'on ait trouvé jusqu'ici à la perfection des lunettes, est l'inégale réfrangibilité des rayons de différentes couleurs; il n'y a presque pas de lunette ordinaire dans laquelle on ne voie sur les bords plusieurs cercles colorés produits par les oculaires; les astres lorsqu'ils sont fort lumineux y paroissent également bordés des mêmes couleurs; cette différente réfrangibilité des rayons fait que le foyer des lunettes est incertain & variable; que la parallaxe optique des micromètres est sujette à changer (2599); que les objets sont mal terminés & qu'on ne peut donner aux objectifs qu'une très-petite ouverture. *Inconvéniens des couleurs dans les lunettes.*

Ces inconvéniens avoient fait desirer un moyen de *Idées de MM. Newton, Euler & Dollond.*

([a]) Χρῶμα, *color*; précédé d'un α privatif veut dire, *sans couleur*. Cependant les lunettes ainsi appellées n'ôtent pas les couleurs qu'on apperçoit ordinairement dans les lunettes & qui viennent des oculaires, mais elles ôtent la confusion de rayons qui a lieu au foyer des objectifs. Voyez le P. Boscovich, *Dissertatio* I, pag. 48.

réunir les rayons de différente espèce à un même foyer; & l'on y a réussi en grande partie. M. Euler en 1747 examina si l'on ne pourroit point y parvenir par un moyen que Newton avoit indiqué dans son optique pour corriger l'erreur de la sphéricité; il s'agissoit de faire des objectifs composés de deux couches de verre dont l'intervalle fût rempli d'eau. (*Mém. de Berlin*, *Tom. III*, *pag.* 274). M. de Maupertuis fit faire à Paris divers essais d'après la théorie de M. Euler; mais ils n'eurent pas le succès que cet illustre auteur avoit espéré. Dollond célèbre Opticien de Londres, voulut d'abord réfuter M. Euler qui avoit attaqué la loi de réfraction donnée par Newton dans cette théorie des couleurs; mais M. Klingenstierna ayant convaincu Dollond de l'erreur de Newton, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 524); celui-ci trouva en 1759 une méthode qui a très-bien réussi pour former des lunettes achromatiques : j'ai oui dire à Londres en 1763 à plusieurs personnes qu'un nommé Hall avoit eu, il y a bien des années, la même idée; mais Dollond le pere est du moins le premier qui nous ait fait jouir de cette belle invention & qui l'ait portée à un certain degré de perfection. (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 380).

2299. *Hévélius* avoit observé depuis long-temps que le crystal de roche avoit une réfraction plus grande que le verre de Venise, (*Selen. pag.* 9); mais ce qu'on n'avoit pas observé, c'est que la dispersion des couleurs prismatiques dans différens verres étoit fort différente, lors même qu'on supposoit un égal degré pour la réfraction moyenne, c'est-à-dire, pour celle des rayons verds, qui tiennent le milieu entre les extrêmes ou entre les violets & les rouges. Il y a des matières qui dispersent deux fois plus que d'autres les rayons colorés, & qui augmentent beaucoup la longueur du spectre coloré sous un même degré de réfraction moyenne; ensorte qu'on peut faire varier leurs angles réfringens jusqu'à obtenir un spectre coloré de même grandeur, une égale séparation des rayons extrêmes, sans que la réfraction moyenne soit égale.

2300.

2300. M. Dollond forma des prismes, ou de petits angles réfringens, premiérement avec un verre jaunâtre ou couleur de paille, appellé communément à Londres *verre de Venise*, 2°, avec le verre d'Angleterre, connu sous le nom de *Crown-glass* (a), dont on fait les vîtres à Londres, 3°, avec le crystal blanc, dont on fait à Londres les verres & les carafes, appellé *Flint-glass* (b); il trouva des prismes de Crown-glass & de Flint-glass, qui produisoient dans les couleurs une égale divergence de rayons, ou une égale étendue dans le spectre coloré, quoique la réfraction moyenne fût inégale; d'où il étoit aisé de conclure qu'un objectif composé de ces deux matières, réunies d'une manière convenable, n'auroit plus cette aberration de rayons qui produisoit la confusion des images. Matières des objectifs achromatiques.

Si l'on nomme 1 le sinus de l'angle de réfraction, on a le sinus de l'angle d'incidence dans le Crown-glass 1,5412 pour les rayons rouges, 1,5598 pour les rayons violets, suivant les expériences de M. Jeaurat; tandis que dans le Flint-glass on a 1,6092 & 1,6384; ainsi le rapport des dispersions est de 1 à 1,57 ou de 200 à 314, mais suivant M. Dollond, c'est de 200 à 300, & suivant M. l'Abbé de Rochon de 200 à 320; il y a apparence que cela varie un peu, même dans une seule espèce de verre.

2301. Ce nest pas ordinairement le poids des matières qui rend la réfraction plus forte; car l'esprit de térébenthine a presque autant de réfraction que le verre, quoiqu'il pese beaucoup moins; le tissu intérieur des parties y contribue certainement beaucoup; mais nous observons en général que le verre le plus pesant, est celui qui disperse le plus les rayons colorés, & qui produit le spectre le plus alongé. En effet, le *Flint-glass* donne trois pouces de couleurs, là où nos glaces

(a) C'est-à-dire, *Verre en couronne*, parce qu'on le travaille en rond par le moyen de la force centrifuge.

(b) *Flint* signifie *petit cailloux* ou *silex*; c'est la matière qui le compose jointe avec un tiers de plomb.

ordinaires ne donneroient que deux pouces, ensorte que la dispersion du crystal d'Angleterre est $\frac{3}{2}$ de celle de notre verre; & d'un autre côté, l'on trouve en pesant ces matières dans l'air & dans l'eau, que le Flint-glass pese un tiers de plus que notre verre commun.

Essais sur des verres de différens poids.

2302. Cet excès de pesanteur prouve bien qu'il entre beaucoup de plomb dans le verre dont la dispersion est si forte, aussi m'a-t-on assuré en Angleterre qu'il entroit en minium un tiers du poids total de la matière du *Flint-glass*; & M. Passemant est parvenu à faire des échantillons, qui donnoient la même dispersion, en faisant fondre six onces de sablon, quatre de potasse, cinq de minium, & huit grains de manganese (qui est, pour ainsi dire, le savon des Verreries), pour éclaircir la matière. Il est même parvenu à faire un verre, dont la dispersion étoit double de celle de nos glaces, & qui pesoit 1570 grains le pouce cube, en faisant fondre deux onces de sable, $3\frac{1}{2}$ de minium, une once de potasse & un gros de salpêtre. Les morceaux de composition de verre qui nous viennent d'Allemagne, & que les Bijoutiers, & sur-tout M. Strass, employent pour imiter les diamans, réussissent à merveille pour nos lunettes, parce qu'ils contiennent beaucoup de minium; *ils ont une qualité distractive double de celle du verre* commun; mais il est bien rare d'en trouver qui soit sans ondes; M. Bouriot a reconnu que le pouce cube pese 1440 grains, quelquefois même jusqu'à 1606; le Strass qu'on fait en France 1306, le Flint-glass 1202, les glaces d'Angleterre 1005, le verre ordinaire de France 940, le verre de Bohême 774; ensorte qu'on pourroit faire des lunettes achromatiques avec le verre de France & celui de Bohême. D'ailleurs M. Zeiher à Pétersbourg a trouvé qu'avec une certaine quantité d'alkali, on diminue la réfraction moyenne du verre, sans presque rien changer à la dispersion ou à l'étendue du spectre coloré, (*M. d'Alembert, opusc. Tom. III, pag.* 404). M. Bévis m'a dit qu'il avoit fait faire à Londres des essais de verre avec beaucoup de borax, & que la réfrangibilité étoit

aussi grande que celle du crystal blanc d'Angleterre ; tout cela fait voir qu'avec du temps & des expériences, on pourra varier & perfectionner beaucoup la composition de ces lunettes.

2303. M. Clairaut a donné une théorie très-détaillée des lunettes achromatiques (2308), dans laquelle on trouve un grand nombre de combinaisons différentes pour le choix des foyers, & la quantité des courbures propres à corriger tout à la fois & la réfrangibilité, & les aberrations de sphéricité, c'est-à-dire celles que la figure circulaire produit. D'après ces formules, M. Anthéaulme, connu par son habileté dans la Physique & dans les Arts, fit au mois de Septembre 1763 un très-bon objectif achromatique de sept pieds; le premier que l'on ait fait de cette force ; il produit beaucoup plus d'effet que la lunette de 34 pieds qui est à l'Observatoire, il a 34 lignes d'ouverture, & peut porter un oculaire de 3 lignes. M. Anthéaulme a centré ses verres, en faisant porter sur leur surface une des extrémités d'un niveau très-parfait (2399), & faisant tourner le verre entre trois entailles, où il tournoit sans changer de situation; la moindre inégalité d'épaisseur faisoit varier le niveau. Il l'a travaillé dans une forme qui n'étoit pas parfaite; mais y ayant ensuite collé du papier fort épais, & appliquant le verre dessus, il a vu les endroits où le papier étoit trop comprimé ; il les a usé avec la pierre-ponce, & il s'est procuré par-là un bassin de papier, très-exactement sphérique. Je vais rapporter ici les dimensions de cet objectif; étant déja consacrées par un entier succès, elles pourront servir de modèle à d'autres artistes.

Objectif de M. Anthéaulme.

2304. La partie *ABH* (*fig.* 144), qui est tournée du côté de l'œil, est de la matière la plus légère, de verre commun ou de Crown-glass. Sa courbure extérieure *AB* a 7 pieds $\frac{1}{2}$ ou 90 pouces de rayon ; la surface intérieure *AHB* a 18 pouces de rayon ; le verre *CEGD* qui est de la matière la plus pesante a le rayon de sa concavité *CD* de 17 $\frac{1}{4}$ pouces, ou 1 pied 5 pouces 3 lig.

Dimensions de cette lunette achromatique.

Fig. 144.

& ce ménisque a le rayon de la convexité *EG*, qui doit être tournée du côté de l'objet, de 7 pieds 6 pouces 8 lign. Ces deux matières différentes sont séparées l'une de l'autre sur les bords, par l'intervalle d'une carte à jouer; & forment par leur assemblage un objectif composé, qui a sept pieds de foyer. On est obligé d'employer pour cette lunette deux oculaires, afin d'avoir un champ plus considérable, malgré la force amplificative (2294): le grand oculaire, qui est le plus près de l'objectif a 18 lignes de foyer; le rayon de sa convexité tournée vers l'objectif est de 11 lignes $\frac{6}{10}$, celui de la convexité tournée du côté de l'œil est 7 pouces 1 ligne $\frac{9}{10}$; le petit oculaire a 5 lignes de foyer; c'est un *ménisque*, c'est-à-dire, qu'il est convexe du côté de l'objet, & concave du côté de l'œil; la convexité a 2 ligne $\frac{1}{4}$ de rayon; la concavité a 8 lignes: ce petit oculaire est placé à 9 lignes du premier, ou à la moitié seulement de la distance de son foyer. Le premier oculaire a 9 lignes d'ouverture, le second en a deux; mais le premier contribue sur-tout à l'étendue du champ de la lunette, & le second a sa force amplificative (2286).

Règle très-simple.

2305. Parmi les différentes formules que M. Clairaut a trouvées propres à former des objectifs achromatiques, il y en a une qui est fort simple, puisqu'elle ne consiste qu'à rendre le rayon des deux courbures intérieures, égal à un cinquième du rayon des deux courbures extérieures. Si *AB* (*fig.* 144) est un arc de 10 pieds de rayon aussi-bien que l'arc *EG*, & que les arcs intérieurs *CD* ayent deux pieds de rayon, la partie *ABH* étant de verre commun plus léger, on aura un objectif achromatique de 10 pieds de foyer, (*Mém.* 1757, *pag.* 532); cependant les dimensions rapportées ci-dessus (2304) paroissent donner encore plus de perfection.

2306. M. l'Abbé Bouriot a exécuté des lunettes achromatiques avec beaucoup d'intelligence & d'adresse, une entr'autres qui a 6 pieds 3 pouces de foyer, & peut grossir jusqu à 120 fois; le Flint-glass qui est en dehors a une surface convexe du côté de l'objet, & une concave

du côté des oculaires ; les surfaces extérieures ont 5 pieds 3 pouces de rayon ; les surfaces intérieures 14 pouces ; l'ouverture est de 28 lignes. Il emploie deux oculaires, le plus grand a 18 lignes de foyer, le plus petit 6 lignes, & celui-ci est placé aux deux tiers du foyer du grand oculaire, ou à 12 lignes de distance, ils sont tous les deux plans convexes ; la surface plane est tournée du côté de l'œil ; le premier oculaire a 10 lignes d'ouverture, le second 5 lignes, & l'œilleton, ou l'ouverture à laquelle on applique l'œil, a 3 lignes de diamètre. M. de l'Etang, autre amateur, en a fait aussi d'excellentes.

2307. Les lunettes les plus singulières que l'on ait faites, sont celles que M. Dollond exécute depuis 1765 ; la mienne a environ 43 pouces de foyer avec 40 lignes d'ouverture, elle force plus que les lunettes ordinaires de 20 pieds ; l'objectif est composé de trois verres, dont un est de Flint-glass concave des deux côtés, placé entre deux lentilles bi-convexes de verre commun ; les six rayons à commencer par celui de la surface extérieure sont de 315, 450, 235, 315, 320 & 320 lignes. Ces lunettes deviendront encore meilleures lorsqu'on y emploiera trois sortes de verres, au lieu de deux, qui à la rigueur ne réunissent que deux sortes de rayons. (Voyez le P. Boscovich, *Dissert. II*, *pag.* 101). Lunettes de Dollond.

2308. On peut voir sur la théorie des lunettes achromatiques, M. Clairaut, (*Mém. acad.* 1756, *pag.* 380 ; 1757, *pag.* 524 ; 1762, *pag.* 578. M. Euler, (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 555, *Mémoires de Berlin*, *Tom. XXII*, *pag.* 119. M. d'Alembert, Opuscules mathématiques, d'abord dans le *Tom. III*, publié en 1764, & ensuite dans le *Tom. IV*. M. Klingenstierna, dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762. M. de Rochon, dans ses Opuscules, publiés en 1768, *in*-8°. Le P. Boscovich, dans les cinq Dissertations Latines qu'il a publiées à Vienne en 1767, *in*-4°. Le P. Pézenas dans la nouvelle édition de l'Optique de Smith, qu'il a donnée à Avignon en 1767. M. Duval

le Roy, dans celle qu'il a donnée à Brest la même année.

Révolution arrivée en 1667, dans les instrumens.

2309. L'établissement de l'Académie Royale des Sciences de Paris, en 1666, forma une époque mémorable dans les Sciences, mais sur-tout dans celle des observations astronomiques; jusqu'alors Boulliaud & Gassendi, nos meilleurs observateurs, s'étoient contentés de faire des observations à l'estime, & avec des instrumens grossiers. Pour voir combien il y avoit jusqu'alors d'inexactitude dans les observations, il ne faut que jetter les yeux sur les variétés qu'il y a eu dans la latitude de Paris, déterminée en divers temps (2243). Auzout se plaignoit beaucoup de l'imperfection des instrumens, & souhaitoit ardemment de les perfectionner. Nous voyons qu'en 1664, dans une Epître au Roi, il lui disoit : *Mais*, SIRE, *c'est un malheur qu'il n'y a pas un instrument à Paris, ni, que je sache, dans tout votre Royaume auquel je voulusse m'assurer pour prendre précisément la hauteur du pole*; il auroit pu ajouter qu'il n'y en avoit pas plus en Angleterre, en Italie, &c.

Louis XIV, secondé par les soins du grand Colbert, ne tarda pas à y remédier; l'académie des Sciences fut établie; on jetta les fondemens de l'Observatoire royal; on rassembla les astronomes François; on en appella du dehors, & l'on fit construire les meilleurs instrumens. Les soins du Ministère furent heureusement secondés par l'habileté des astronomes. Auzout & Picard imaginèrent en 1667 de placer la lunette sur le quart-de-cercle (2312), au lieu des pinnules dont Tycho-Brahé se servoit.

Usage des lunettes sur le quart-de-cercle.

2310. On trouve dans l'histoire céleste de M. le Monnier, *pag.* 2 & 11, l'extrait d'un mémoire lu à l'académie par M. Picard, au mois de Décembre 1667; il rapporte des hauteurs méridiennes du soleil, observées au mois d'Octobre 1767, dans le Jardin de la Bibliothèque du Roi, avec un quart-de-cercle de 9 pieds 7 pouc. de rayon, & avec un sextant de 6 pieds, dans lesquels il y avoit des verres au lieu de pinnules; ce sont les premières observations où l'on ait appliqué des lunettes aux quarts-

de-cercle, & cette idée doit être regardée comme une de celles qui ont changé la face de l'astronomie ; on la verra employée dans tous les instrumens que nous allons décrire.

DESCRIPTION DU QUART-DE-CERCLE MOBILE.

2311. Le quart-de-cercle mobile est de tous les instrumens d'Astronomie, celui dont l'usage est le plus ancien, le plus général, le plus indispensable, le plus commode : c'est pourquoi je commencerai par celui-là ; on a déja vu la manière dont il faut concevoir l'usage du quart-de-cercle pour mesurer des hauteurs (23) : il ne s'agit plus que des détails de l'instrument, porté à sa dernière perfection.

Je suppose un quart-de-cercle de trois pieds de rayon, *CBA* (*Fig.* 149). Le limbe qui forme la circonférence *ADB* est assemblé avec le centre *C* par trois règles de fer *CA*, *CD*, *CB*, de deux pouces de large, fortifiées chacune par-derrière d'une règle de champ qui en empêche la flexion. Vers le centre de gravité *X* de la masse entière du quart-de-cercle, est fixé un axe ou cylindre de deux pouces de diamètre sur 5 à 6 pouces de long, perpendiculairement au plan de l'instrument ; ce cylindre entre dans une douille, c'est-à-dire, dans un cylindre creux *E* représenté séparément en *EE* (*Fig.* 153) ; cette pièce qu'on appelle *le genou*, est composée non-seulement d'une douille horizontale *EE*, mais d'un autre cylindre *e*, fondu tout d'une pièce avec la douille, & que l'on place verticalement en *n* sur le pied de l'instrument. Pour empêcher que le quart-de-cercle ne sorte de sa place, on applique derrière la douille ou le canon *E* (*Fig.* 149) une plaque de fer qui recouvre le tout ; cette plaque est arrêtée par une forte vis, qui pénétre dans l'axe du quart-de-cercle, & qui tourne avec lui, sans lui permettre de sortir de la douille.

Planche XVIII. Fig. 149. Axe. *Fig.* 153. Genou. *Fig.* 149.

Par le moyen de ce genou, le quart-de-cercle peut

Fig. 149. tourner verticalement & horizontalement ; il tourne verticalement, c'eſt-à-dire, ſans changer de vertical, lorſque le genou *EF* reſtant immobile, l'axe du quart-de-cercle tourne dans la douille à frottement dur ; il tourne horizontalement en ſe dirigeant ſucceſſivement vers tous les points de l'horizon, lorſqu'on fait tourner ſur ſon pied l'arbre *F* du genou. Il y a des vis de preſſion au-deſſus de la douille horizontale *E*, & à côté de la douille verticale *F*, comme on le voit au-deſſus de *p*, avec leſquelles on preſſe le canon dans ſa douille lorſqu'on veut fixer le quart-de-cercle à une hauteur donnée, ou dans un vertical déterminé.

Vis de preſſion.

Lunette. 2312. Vers l'un des rayons *CB* du quart-de-cercle on fixe une lunette *GM*; elle paſſe dans une douille de cuivre, fixée en *G* par des rebords ou empattemens, où paſſent de fortes vis qui l'aſſujétiſſent inébranlablement ſur la carcaſſe de l'inſtrument; à l'autre extrémité *M* eſt la boîte du micromètre, fixée auſſi par des empattemens. A l'égard du tuyau qui s'étend de *G* en *M*, il n'importe de quelle manière il ſoit fait, ce n'eſt que pour donner de l'obſcurité dans la lunette ; on le fait ordinairement de cuivre, il ſuffit qu'il ait 15 à 16 lignes de diamètre pour un quar-de-cercle de trois pieds, à moins que la lunette ne ſoit achromatique ; la ſolidité en eſt indifférente ; mais celle des deux pièces *G*, *M*, qui portent les verres, eſt eſſentielle, parce que leur ſolidité aſſure celle de l'axe optique de la lunette, qui doit être exactement parallèle au plan de l'inſtrument (2569), & au premier rayon qui paſſe par le point de 90°. Nous expliquerons la maniere de lui donner préciſément cette ſituation (2555).

Suſpenſion du fil. 2313. Au centre *C* de l'inſtrument, eſt un cylindre de cuivre exactement tourné, qui porte à ſon centre un point très-délicat & très-fin. Dans ce point, on place la pointe d'une aiguille, ſur laquelle on fait paſſer la boucle du fil à plomb ; on voit ſéparément en *AA* (Fig. 150) le cylindre, ainſi que l'aiguille placée au centre, qui y eſt ſupportée par une pièce d'acier *a* recourbée,

Fig. 150.

recourbée, & percée d'un trou, au travers duquel passe l'aiguille pour aller se loger au centre du cylindre. Quand elle y est bien placée, on a soin de la serrer dans le trou de la pièce *a* avec une vis de pression qui paroît au-dessus de *a*. Autour de l'aiguille *a*, l'on fait une boucle avec un cheveu, un fil de pite, ou un fil d'argent très-fin; à cette boucle placée tout contre le cylindre du centre, on suspend le fil-à-plomb chargé d'un poids que l'on voit en *q* (*Fig.* 149); ce fil marque sur la division du limbe le degré de la hauteur à laquelle est dirigée la lunette *MG*. L'extrémité du cylindre *AA* (*Fig.* 150), qui porte le point du centre & la pointe de l'aiguille, doit être un peu arrondie ou convexe, pour que le fil n'y éprouve pas un trop grand frottement (2386). On peut aussi mettre à la place de l'aiguille *a* une vis qui se termine en une pointe très-fine, & qui tourne dans la pièce *a*, comme dans une espèce de pont. *Fig.* 150.

2314. Autour du cylindre qui porte le centre du quart-de-cercle, il y a une plaque de cuivre plus large, ronde, fixée sur la charpente de l'instrument. Sur cette pièce est suspendu le *garde-filet C H* (*Fig.* 149); c'est une longue boîte de cuivre, mince, soutenue vers le centre, autour duquel elle tourne pour se mettre toujours d'à-plomb, & contenir le fil ou le cheveu qui pend du centre pour marquer la division. Ce garde-filet a une longue porte qui se ferme avec deux petits crochets, pour garantir mieux le fil de l'agitation de l'air; on la voit ouverte sur la gauche; à la partie inférieure *H* est une boite plus large. Il y a des astronomes qui y placent un vase d'eau où trempe le poids du fil à-plomb, afin que la résistance diminue les oscillations & en abrege la durée; j'ai toujours craint qu'elle ne diminuât aussi la liberté du poids, & je n'en ai jamais fait usage: j'ai reconnu par expérience qu'on peut fixer le plomb en le touchant légérement du bout du doigt, & quand ses oscillations sont très-petites, on peut les *Fig.* 149. Garde-filet.

Fig. 149, 151 & 152. anéantir en les contrariant à propos par un petit tour de la vis, qui fait faire une oscillation opposée, & arrête subitement le fil à-plomb : on a bientôt acquis cette habitude quand on observe souvent. La boîte inférieure a une porte *Z* où est attaché un microscope & une lampe à deux meches ; la lampe sert à éclairer le limbe & le fil à-plomb, pour voir sur quelle division il répond ; le microscope sert à grossir les points, pour mettre facilement & exactement le fil du quart-de-cercle sur le point que l'on veut (2578).

Verge de rappel. 2315. La verge de conduite ou *Verge de rappel* *LKI* est une addition très-utile que M. de Fouchy a introduite pour mettre le fil sur tel point du limbe que l'on veut ; on la voit représentée séparément en *I L* (*Fig.* 151 & 152), avec tous ses détails ; mais il faut supposer que la partie *L Fig.* 152, est placée au-dessus & sur le prolongement de la partie *I* (*Fig.* 151). La tringle a trois pieds de long, sept lignes de large & cinq d'épaisseur ; elle est logée par ses deux bouts dans deux boîtes de cuivre *I*, *L*. Quand elle est arrêtée en *I* (*Fig.* 149), au moyen de la vis de pression *c* qui l'empêche de glisser dans la boîte *I*, alors l'extrémité inférieure sert de point d'appui : en tournant l'écrou qui est en *B*, l'on fait monter la boîte *L*, qui est fixée par une pièce ou mâchoire *r*, derrière le quart-de-cercle, à la règle de champ du limbe, par le moyen d'une cheville qui traverse & la mâchoire & la règle de champ ; en faisant mouvoir ainsi la boîte *L*, on fait avancer le quart-de-cercle.

2316. La manière dont l'écrou *B* est tenu sur la boîte *L*, paroît assez dans la *Fig.* 152. Cette boîte est évidée par en haut ; à sa base supérieure est pratiquée une rainure dans laquelle tourne un écrou, qui y est retenu par le moyen d'un collet, ou qui est seulement rivé par-dessous au dedans de la boîte. Cet écrou, qui tient nécessairement à la boîte, avance quand on le tourne sur la vis *B* qui est à l'extrémité de la verge, parce que

celle-ci est fixée par son autre extrémité; l'écrou fait avancer aussi le quart-de-cercle qui est obligé de suivre la boîte *L*.

Pour produire ce mouvement avec plus d'exactitude, M. Canivet s'y prend de la manière suivante; à l'extrémité de la boîte *L*, est soudée une plaque de cuivre d'environ deux lignes d'épaisseur, ronde, dans l'épaisseur de laquelle on pratique une rainure circulaire de demi-ligne de profondeur : cette rainure reçoit la base de l'écrou qui tourne dans la rainure; la base de l'écrou est recouverte par deux demi-cercles d'une ligne d'épaisseur qui embrassent l'écrou, auquel on fait, si l'on veut, une rainure circulaire pour que les deux demi-cercles s'y engagent mieux. Ces demi-cercles sont attachés à la plaque supérieure de la boîte *L*, chacun avec deux vis; ils empêchent l'écrou de sortir de la rainure de la boîte, sans empêcher qu'il n'y tourne librement. La vis qui termine la verge de conduite passe au travers de l'écrou. Un écrou à tête ronde, qui a un grennetis *R* (*Fig.* 167), c'est-à-dire, qui est légérement dentelé sur les bords, est plus fort que n'est un écrou à oreille, tel que je l'ai représenté en *B*, & en *m*. *Fig.* 167.

A l'extrémité inférieure *I* de la verge de rappel, on a pratiqué un semblable mouvement, pour que l'observateur qui est occupé à regarder le fil à-plomb, puisse faire tourner le quart-de-cercle d'une petite quantité, & le mettre exactement sur celui des points de la division qui approche le plus de la hauteur de l'astre qu'on se propose d'observer. Pour cet effet, la boîte *I* (*Fig.* 151), est fixée sur une pièce de fer ou de cuivre, coudée *f*, qui passe dans une autre boîte *g*, & se termine par une autre vis *m*, qui est prise dans un écrou, arrêté par un collet sur la base de la boîte *g* dans laquelle il tourne librement; en faisant tourner l'écrou *m*, on fait avancer la vis, la pièce *f* & la boîte *I*, dans laquelle est serrée la verge de rappel, par une vis de pression *c* : cette verge est obligée d'avancer & de faire mouvoir avec elle le quart-de-cercle. *Fig.* 151.

La boîte *g m* aussi bien que la boîte *B L* doivent être mobiles autour d'un axe pour se prêter aux différentes inclinaisons de la verge de rappel; & la boîte *g* est montée sur un collet *N* (*Fig.* 149), qui embrasse le pied du quart-de-cercle, qui y tourne librement, & qu'on peut arrêter par une vis de pression, pour fixer le quart-de-cercle dans un vertical déterminé; mais cette vis de pression n'est pas absolument nécessaire.

Fig. 149.

Arbre du pied.

2317. Le montant *O N* ou pied du quart-de-cercle est un arbre de fer de deux pouces de diamètre sur 3 pieds & demi de hauteur, il se termine par un carré, qui passe au travers des barres *P*, *P*, qui font les traverses du pied. Dans ce carré l'on passe une clavette au-dessous de *Q*; aussi-tôt que les quatre arcs-boutans *R* ont été mis en place, on serre cette clavette *Q* à coups de marteau, cela fait descendre l'arbre *NO* sur les arcs-boutans, & forme un assemblage ferme & invariable de l'arbre avec ses arcs-boutans *R* & ses traverses *PP*. Le pied *O N* doit être assez long pour que le limbe *DA* soit à 2 pieds de terre, ou même 2 $\frac{1}{2}$ pour la commodité des Observateurs.

Arcs-boutans.

Vis & coquilles du pied.

2318. Pour caler l'instrument, on employe les 4 vis que l'on voit aux extrémités *P*, *P*, des traverses du pied; elles sont de cuivre, & ont un pouce de diamètre; elles servent à soutenir le pied de l'instrument, à l'incliner, à rendre son arbre *ON* exactement vertical, de manière qu'on puisse faire tourner le quart-de-cercle sur son pied sans que le plan cesse d'être vertical, du moins sensiblement. Ces vis portent sur des coquilles de fer, que M. le Cardinal de Luynes employa le premier, vers 1745, & qui servent par leur frottement à empêcher que le quart-de-cercle ne change de place quand on tourne la vis.

Cercle azimutal.

2319. Le cercle azimutal *p h*, a 6 pouces de diamètre; il est fixé à une douille de cuivre qui est attachée sur le pied de l'instrument; le canon *l* du genou porte à son extrémité inférieure une alidade *k*, qui

tourne avec le quart-de-cercle, tandis que la plaque azimutale est fixe; l'alidade marque par son mouvement le degré d'azimut, ou le point de l'horizon auquel le plan est dirigé.

L'usage de ce petit cercle azimutal, ne s'étend pas jusqu'à observer l'azimut avec précision, comme Tycho le faisoit autrefois; on a banni ce genre d'observations comme trop difficile à bien faire : cependant j'ai vu à Avignon, un quart-de-cercle fait sous les yeux du Pere Morand, dont l'axe exactement tourné portoit à sa partie inférieure, & entre les pieds du quart-de-cercle un grand cercle azimutal, avec lequel on pouvoit très-bien observer l'azimut; cela est souvent commode & utile, mais exige des vérifications particulières.

2320. Le limbe *ADB* du quart-de-cercle est la pièce la plus essentielle, il a deux pouces de large, son épaisseur qui est de quatre lignes est formée de deux lames, une de fer & l'autre de cuivre; il est important que le limbe de cuivre soit bien dressé, & que toutes ses parties soient dans un seul & même plan (1119) avec le point du centre. Pour parvenir à cette opération difficile, on se sert d'une règle qu'on fait tourner autour d'un grand axe, & l'on voit si malgré son mouvement l'extrémité de la règle est toujours également proche du limbe dans tous ses points. On peut aussi reconnoître si le limbe d'un instrument est dans un seul & unique plan, en établissant un canal plein d'eau qui parte du centre, & touche la circonférence; on y place une espèce de petite barque, dont le mat est un fil de fer recourbé, & qui touchant presque le centre & le limbe indique par sa distance en divers points si tous sont dans le même plan; c'est ainsi que l'on nivelle les grandes méridiennes des gnomons. C'est un usage trop répandu jusqu'ici, de former le limbe d'un quart-de-cercle avec du cuivre, tandis que l'assemblage est de fer; le cuivre se dilate plus par la chaleur, & cela peut changer l'arc de 90°. Il est vrai qu'on remédie presque entiérement à cet inconvénient par la force des rivets, ou

Limbe qui porte les divisions.

des clous qui attachent le cuivre sur le fer, car M. Bouguer ayant exposé un quart-de-cercle à une très-grande chaleur, ne trouva pas dans les angles de différence sensible (*Fig. de la Terr. pag.* 184); cependant on feroit encore mieux de n'employer que du cuivre dans la construction toute entière de l'instrument; cela se pratique depuis long temps en Angleterre, quoique la dépense soit un peu plus considérable, & M. Canivet en a fait plusieurs à Paris, de la même façon.

La manière de diviser un instrument est un objet qui devroit peut être nous occuper ici, mais l'ouvrage de M. le Duc de Chaulnes, & celui de M. Bird, publié en Angleterre, contiennent sur ce sujet des détails auxquels nous ne pouvons que renvoyer.

Divisions. C'est sur le limbe *ADB* que l'on place les divisions; quelquefois par transversales (2336); mais plus souvent avec de simples points, comme on le voit dans la *Fig.* 149; lorsque la lunette a un micromètre, comme on le voit en *M*, on n'a besoin que d'avoir des points de dix en dix minutes. Nous parlerons de la manière de vérifier ces divisions, (2562 & suiv.).

Méthode Angloise. 2321. En Angleterre tous les quarts-de-cercles mobiles ont une alidade ou lunette mobile, comme dans la *fig.* 155, avec un vernier (2343); ensorte que le limbe du quart-de-cercle ne change point, & que la lunette seule tourne autour du centre, comme dans un mural. On se contente d'employer un fil à-plomb, qui pend sur le dernier point de la division, ou du moins qui est parallèle au rayon vertical de 90°; quelquefois même on n'y emploie que le niveau (2398), dont l'usage est plus commode que celui du fil à-plomb, sans être moins exact quand le niveau est bienfait.

Pièce du doublegenou. *Fig.* 153. 2322. Le double genou représenté en *ST*, (*fig.* 153), ne sert que pour mettre le plan de l'instrument dans une situation horizontale. La partie *e* du premier genou étant toujours verticale, & la partie *EE* toujours horizontale; le cylindre *T* entre dans le canon *EE*, où il tourne à frottement; l'axe *V* qui porte le quart-de-

cercle, & qui est vertical quand le plan est dans une situation horizontale, entre dans la douille *S*; par ce moyen on donne au plan toutes les inclinaisons nécessaires (2583). Voyez les vérifications & les usages du quart-de-cercle, art. 2550 & suiv.

Sextant de Flamsteed pour mesurer les distances.

2323. PEU de temps après la perfection des instrumens à Paris (2310), Flamsteed entreprit d'observer en Angleterre, avec la même précision; vers la fin de 1671, il commençoit à mesurer des distances dans le Ciel avec des lunettes de 7 & de 15 pieds, à *Derby*; & il reconnut souvent que les tables de la lune, & les catalogues d'étoiles dont on se servoit alors étoient défectueux; les positions des étoiles marquées dans le catalogue de Tycho, s'écartoient souvent de 3, 4, ou 5′, & les lieux de la lune de 15 à 20′ de l'observation. Ce fut alors que le Chevalier MOOR, qui étoit à la tête de l'Artillerie, qui aimoit les Siences, & en particulier Flamsteed, lui fournit des instrumens, & détermina Charles II à faire bâtir l'Observatoire devenu si célèbre, de GRÉENWICH près de Londres, où Flamsteed entra au mois d'Août 1676. (*Hist. celest. Prolég. pag.* 103). Générosité du Chevalier Moor.

Au défaut d'un quart-de-cercle mural que Flamsteed ne put d'abord se procurer, il s'occupa pendant les douze premières années à mesurer les distances des étoiles entre elles & les distances des planètes aux étoiles, avec un sextant que le Chevalier Moor lui avoit donné; je vais le décrire ici pour faire connoître la manière dont les premières observations d'Angleterre ont été faites dans le dernier siècle, & le degré d'exactitude qu'on doit attendre de ces observations, qui seront toujours fort utiles pour les recherches des astronomes.

2324. Le sextant *CDB* (*fig.* 148) a 6 pieds 9 pouces $\frac{1}{4}$ de rayon mesure d'Angleterre (6 pieds 4 pouces 2 lignes mesure de Paris); il est divisé de 5 en 5′. Vers Structure du Sextant. *Fig.* 148.

Fig. 148. le centre de gravité, par lequel cet instrument est soutenu, l'on voit une plaque *A* de 9 pouces de large, & d'un pouce & demi d'épaisseur, de laquelle partent 10 lames de fer, qui assemblent les rayons *CB* & *CD*, avec le limbe *BD* de l'instrument. Le rayon *CB* porte 7 barreaux de fer *E*, *E*, d'environ 7 pouces, aux extrémités desquels est une règle *ET*, où sont portés les verres de la lunette fixe; par ce moyen l'espace *BT* est suffisant pour que deux observateurs puissent regarder à la fois par les deux lunettes lorsqu'elles approchent du parallélisme, ce qui arrive dans la mesure des petits angles.

Divisions du limbe. Le limbe *BD* est de fer, il a un pouce & demi de large, & il est couvert d'une lame de cuivre beaucoup plus large, qui a un quart de pouce d'épaisseur; le bord extérieur est denté, ou plutôt strié comme une vis, & il y a 17 filets dans un pouce; les révolutions, ou les valeurs de ces filets, ou stries, se comptent sur des cercles tracés sur le limbe de cuivre, tout près du bord; mais comme le sextant est vu par-dessous dans la *figure* 148, je n'ai pu y représenter les divisions. Il y a encore sur le limbe de cuivre des cercles divisés en degrés, & de 5 en 5′, les diagonales sont éloignées entre-elles de 5′, & la largeur du limbe est divisée en 5 parties sur le bord d'un carré de cuivre, qui sert d'index ou de ligne de foi, à peu-près comme dans la *figure* 145, & qui accompagne la lunette mobile; ces parties qui valent une minute chacune, sont encore subdivisées en six parties sensibles qui donnent 10″.

Manière de l'incliner. L'alidade, ou lunette mobile *CO*, qui tourne autour du centre *C* de l'instrument, porte une lunette à deux verres convexes, & au foyer commun deux fils à angles droits, pour la diriger exactement à l'étoile. On voit sur le revers de l'instrument entre le limbe & le rayon *CD*, une barre de fer *NN*, placée de champ, sur laquelle est ajusté le demi-cercle denté *NFF*. Les extrémités de la barre *NN* sont cylindriques, & reçues en *NN* dans deux colliers de cuivre, comme des pivots dans leurs trous, pour que le plan du Secteur puisse

s'incliner

s'incliner en tournant autour de l'axe *NN*. Cet axe *NN* est parallèle à la lunette fixe *TE*, par son moyen on tourne le sectant sans que la lunette fixe *EE* quitte l'étoile à laquelle elle étoit dirigée, & de manière que la lunette mobile *OC*, puisse parvenir dans la position nécessaire pour l'autre astre.

Une barre de fer *GG* perpendiculaire à la barre *NN*, & fixée également sur le plan du Secteur, porte un autre demi-cercle denté, *H*, dont le plan est perpendiculaire à celui du grand demi-cercle *FF*, & qui est plus petit & plus mince. Sur ce demi-cercle, & dans l'endroit où il touche le grand demi-cercle *NF*, il y a une vis sans fin avec un manche, qui sert à incliner le plan de l'instrument pour lui faire faire un angle quelconque, avec le plan du grand demi-cercle *FF*, qui est toujours dans le plan d'un cercle de déclinaison.

2325. L'axe *AQX* sur lequel tourne l'instrument est de fer, & a 3 pouces de diamètre, il est arrondi & conique à l'extrémité *X*, où il tourne dans un cone de cuivre; mais sa partie supérieure est écarrie & fendue pour recevoir le demi-cercle *FF*, dont le centre répond à l'extrémité *A* de l'axe. La circonférence de ce demi-cercle engrene dans un pignon en *I*, & ce pignon engrene dans une autre roue qui est conduite par une manivelle *M* & une vis sans fin, ce qui donne le mouvement à toute la machine, afin que la lunette fixe *ET* puisse se placer dans un parallèle quelconque : car elle seroit toujours dans le plan de l'équateur si elle restoit perpendiculaire à l'axe *AX*. Un peu au-dessous du milieu de l'arbre est une boîte *Q* de cuivre, qui est à l'extrémité d'un fort montant de chêne ; l'axe y est supporté & contenu dans le plan du méridien, de manière à se diriger toujours vers le pole du monde. Mouvement parallatique du Sextant.

Les deux demi-cercles *F* & *H* servent à placer l'instrument dans le plan de deux astres pour en mesurer la distance ; on commence par diriger la lunette fixe *ET* vers l'un des deux astres, par le moyen du seul

demi-cercle *FF*, après quoi sans quitter l'étoile on peut faire tourner le plan de l'instrument par le demi-cercle *H*, de manière que la lunette mobile *CO* étant placée sur quelque point du limbe soit dirigée vers l'autre astre.

Il y a actuellement à l'Observatoire Royal de Greenwich un très-beau quart-de-cercle mobile de trois pieds de rayon qui s'incline en tout sens par le moyen de deux axes & de deux demi-cercles dentés, à peu-près comme le sextant que je viens de décrire.

Il avoit demandé un mural.

2326. Avant que ce sextant mobile fût construit, Flamsteed avoit demandé qu'on fît faire un quart-de-cercle mural pour mesurer les hauteurs méridiennes des étoiles, & on le lui avoit promis; mais un des membres de la Société Royale ayant voulu le faire construire à sa manière, il se trouva hors d'état de servir, & Flamsteed se tourna du côté de l'observation des distances; dans le même temps qu'à l'Observatoire royal de Paris on observoit les hauteurs méridiennes, comme on le peut voir dans l'histoire céleste.

2327. Flamsteed essaya d'observer des hauteurs méridiennes avec le sextant que nous avons décrit; mais comme cela étoit fort difficile, il fit construire à ses frais en 1683 un instrument du même rayon, qu'il divisa lui-même, & dont il se servit plusieurs années.

Mural fait par Abraham Sharp.

En 1688, Abraham Sharp fut choisi pour aider Flamsteed dans ses observations; c'étoit un homme très-adroit, en même temps qu'il étoit fort instruit dans les Mathématiques; il fit lui-même un arc mural de 69 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon, (5 pieds, 5 pouces de Paris); avec lequel Flamsteed fit ensuite pendant 30 ans les observations qui ont servi à dresser le fameux Catalogue Britannique, & il commença le 19 Septembre 1689, (*Prolegom. pag.* 111). Cet instrument étoit si bien fait que les Artistes même l'admiroient; mais comme les muraux qui se font aujourd'hui sont encore plus parfaits, je me contenterai de les décrire.

Description du Quart-de-Cercle mural.

2328. Tycho-Brahé qui avoit beaucoup perfectionné le quart-de-cercle fut le premier qui imagina le quart-de-cercle MURAL, c'est-à-dire, celui dont le plan est fixé contre un mur, & dont l'alidade parcourt le plan du méridien, pour observer les passages & mesurer les hauteurs méridiennes; il donna à cet instrument le nom de *Quadrans Tychonicus*, (*Astron. Inst. Mecan. pag.* 21) en qualité d'inventeur, & il s'en servit beaucoup pour déterminer la théorie du soleil; c'est véritablement l'instrument le plus commode & celui avec lequel on peut faire en peu de temps le plus grand nombre de bonnes observations.

Le mural que l'on voit dans la *fig.* 155 fut fait à Londres en 1742 par Jonathas Sisson, sous la direction de M. Graham; M. le Monnier s'en servit à Paris jusqu'en 1751 qu'il fut transporté à Berlin, pour mes observations (*Hist. de l'acad. de Berlin, T. VI, an.* 1750, *pag.* 255. *Smith Optique art.* 853). *Fig.* 155.

2329. Ce mural est entièrement de cuivre, il a environ 5 pieds de rayon, le chassis en est formé par des règles plates de cuivre fortifiées par des règles de champ. Les rayons *HB*, *HA* étant divisés chacun en quatre parties égales servent à trouver les points *D* & *E* par lesquels le quart-de-cercle est suspendu librement sur des appuis ou supports de fer, qui font saillie sur le nud du mur. Mural de cuivre de 5 pieds.

L'un des supports *E* est représenté séparément en *e* à côté du quart-de-cercle; il est mobile au moyen d'une tringle *EF* ou *ef* qui passe dans un écrou, pour rétablir l'instrument dans sa situation, lorsqu'on voit qu'il en est un peu dérangé; cela se reconnoît par le moyen du fil perpendiculaire *HA* qui doit toujours répondre sur le même point *A* du limbe, & qu'on a soin d'examiner avec un microscope à chaque observation. Suspendu librement.

Pour empêcher la vacillation d'une aussi grande machi-

Fig. 155. ne on a placé derrière le limbe 4 oreilles de cuivre avec de doubles équerres *I*, *K*, *l*, *K*; il y en a d'autres le long du rayon *HA* & du rayon *HB*; chacune de ces équerres porte deux vis entre lesquelles on arrête les oreilles qui sont fixées derrière le quart-de-cercle.

Ces équerres sont scellées dans le mur ou dans la pierre qui porte l'instrument, & le contiennent dans le plan du méridien, sans s'opposer à la dilatation ou à la contraction des règles de cuivre dont est composé le mural; cette liberté qu'a l'instrument de s'étendre en tout sens, fait que la dilatation causée par la chaleur, ne change rien aux angles qu'on mesure par ce moyen (2320).

Contre poids de la lunette. 2330. Au-dessus de la pierre qui porte l'instrument & à la même hauteur que le centre, on place horizontalement un axe *PO*, qui est perpendiculaire au plan du quart-de-cercle & qui passeroit par le centre *c* s'il étoit prolongé. Cet axe tourne sur deux pivots *P*; sur cet axe est fixée à angles droits une autre branche *ON* chargée à son extrémité d'un poids *N*, capable de faire équilibre avec la pesanteur de la lunette *LM*; tandis que l'axe par son extrémité voisine du quart-de-cercle conduit le chassis de bois *PRM* qui tient à la lunette en *M*. Le contre-poids dispense l'Observateur de soutenir le poids de la lunette quand il s'agit de l'élever, & empêche qu'elle ne charge & ne fatigue le limbe de l'instrument.

2331. L'extrémité inférieure *V* de la lunette est garnie de deux petites roulettes qui prennent le limbe du quart-de-cercle des deux côtés; la lunette ne touche presque le limbe que par ces deux roulettes qui en rendent le mouvement si doux, qu'en lui donnant de la main un assez petit mouvement, la lunette parcourt toute seule une grande partie du limbe du quart-de-cercle, emportée par le contre-poids *N* (2330).

2332. Lorsqu'on veut arrêter la lunette à une certaine hauteur, on se sert d'une main de cuivre *T* qui embrasse le limbe, & qui fait ressort par dessous; elle

se fixe par une vis de pression qui la serre sur le limbe; alors en tournant la vis de rappel on fait avancer la lunette jusqu'à ce que l'astre dont on observe la hauteur soit sur le fil horizontal de la lunette; on voit alors sur une plaque *X* qui tient à la lunette, & qui porte un vernier (2343), le nombre de degrés & de minutes & même les quarts-de-minutes, le reste s'estime facilement à 2 ou 3″ près (2345).

Instrumens faits par M. Bird & Canivet.

2333. M. Bird, célebre artiste de Londres, a fait trois quarts-de-cercle de 8 pieds de rayon, pour Greenwich, Paris & Péterſbourg, & deux de 6 pieds pour Gottingen & pour Cadix; ils sont d'une si grande perfection que le gouvernement d'Angleterre a acheté sa méthode, & l'a publiée en 1767 (*The method of dividing, &c. London by John Nourse*, 1767, *in*-4°). Dans quelques uns de ces quarts-de-cercle on a deux divisions par lignes (2345), avec une division par points entre les deux autres, & l'alidade qui est en *X* (*fig.* 155) est percée vers le milieu pour qu'on ait la facilité d'y tendre un fil qui se place sur les points. Après qu'on a observé une étoile on emploie le micromètre extérieur pour trouver le chemin qu'il faut faire faire à la lunette pour qu'elle parvienne sur le point, & l'on ajoute cette quantité à celle qui est indiquée par le point, pour avoir la hauteur de l'étoile. M. Sisson a fait aussi à Londres plusieurs muraux; M. Canivet, ingénieur pour les instrumens de Mathématiques à Paris, a fait un mural de 6 pieds pour l'observatoire de Milan, & plusieurs sextans de 6 pieds de rayon pour différens Observatoires de l'Europe; mais ce sont des instrumens mobiles (2559), à deux lunettes, faits sur le principe du quart-de-cercle de la *figure* 149.

Des différentes divisions du Quart-de-Cercle.

2334. Il y a quatre méthodes pour subdiviser dans un quart-de-cercle l'intervalle d'une division à l'autre, qui est ordinairement de 5 ou de 10′: 1°, le

micromètre; 2°, la vis extérieure; 3°, les tranversales avec une alidade divisée; 4°, la division de Vernier.

Le micromètre d'un quart-de-cercle mural est le même que pour un quart-de-cercle mobile, & nous en donnerons la description (2366); on l'a employé en France dans quatre quarts-de-cercles muraux, dont trois sont à l'Observatoire royal & un dans la maison de M. de Fouchy, rue des Postes; ce dernier y fut placé dans le temps que M. Godin & M. de Fouchy y observoient ensemble.

Usage de la vis extérieure.

2335. La vis extérieure a été employée en Angleterre dans les muraux de 8 pieds & dans les grands secteurs semblables à celui de l'art. 2381. La vis *T* (*fig.* 155), destinée à mouvoir la lunette porte un petit cercle ou cadran de laiton divisé, qui est fixé sur la vis, & qui tourne avec elle. Il y a un index qui est placé à frottement dur sur la monture & qui ne tourne point avec le cadran & avec la vis; quand on a observé la hauteur d'une étoile en la mettant exactement sur le fil de la lunette, & qu'on veut savoir le nombre de secondes qui y répond, on place l'index sur le chiffre zéro ou sur le commencement de la division du cadran; l'on fait tourner la vis avec son cadran jusqu'à ce que l'alidade *X* ou le Vernier tombe exactement sur un des points de la division, & le nombre de secondes qui a passé sur le cadran, en le faisant ainsi mouvoir, s'ajoute avec les degrés & minutes qui répondent au point de la division; si les pas de la vis ne sont pas tels qu'un tour fasse exactement une minute, on divise le cadran en conséquence des filets de la vis.

Fig. 155.

Transversales.

2336. La division par transversales droites est fort ancienne, elle tire son origine de l'échelle géométrique dont on ignore l'auteur; Tycho-Brahé nous apprend qu'avant lui on s'en servoit pour diviser les flèches, arbalêtes, ou bâtons de Jacob. Thomas Digges, (*Alæ seu Scalæ mathem.* 1573), l'attribue à un nommé Cantzler; Tycho qui en parla pour la première fois dans son Traité sur la comète de 1577, dit qu'il la tenoit d'un

habile Professeur de Leipsick, nommé Homélius, qui l'employoit dans son échelle géométrique. Tycho s'en servit dans presque tous ses instrumens, mais en 1672, il ne l'avoit pas encore employée.

2337. Quand aux transversales circulaires Hévélius attribuoit cette invention à Benoît *Hedræus*, auteur Suédois qui la donna en 1643, dans un livre intitulé : *Nova & accurata astrolabii geometrici structura*, imprimé à Leyde ; mais Morin dans son livre intitulé : *Longitudinum cœlestium atque terrestrium scientia*, imprimé dès 1634, l'avoit attribué à Jean Ferrier, artiste industrieux, on ne sait pas si c'est le même dont parle Clavius dans la préface d'un petit Traité qui est à la fin des huit livres de sa Gnomonique ; celui-ci étoit Espagnol, & avoit imaginé une méthode nouvelle & très-ingénieuse pour tracer les cadrans solaires.

2338. Quoi qu'il en soit, la méthode des transversales s'emploie encore dans quelques muraux, & dans les quarts-de-cercles mobiles lorsqu'on n'a ni alidade ni micromètre. Soit *ALDE* (*fig.* 145), une portion du limbe d'un quart-de-cercle ; *AL* une portion du rayon, ou de l'alidade qui porte la lunette du mural ; *LB* un arc de 5′ qu'il s'agit de diviser de 10 en 10″, c'est-à-dire, en 30 parties ; on voit assez qu'en divisant la diagonale ou transversale *AB* en 30 parties, à commencer du point *A*, l'alidade *AL* tombera sur la première division lorsque le point *L* aura parcouru la trentième partie de l'arc *LB* ou 10″, & ainsi des autres. *Fig.* 145.

2339. Ce que nous disons de l'alidade *AL* se doit dire du fil à-plomb dans un quart-de-cercle mobile ; ce fil qui tombe d'abord sur 4° 0′, c'est-à-dire, sur les points *A* & *L*, en supposant le quart-de-cercle dirigé à 4° de hauteur, coupera la transversale *AB* sur le milieu *H* de sa hauteur quand le fil à-plomb *AL* sera sur le milieu de l'arc *LB* ou *AC* ; c'est ainsi qu'on substitue les divisions d'une ligne *AB* qui a deux pouces de long, à celles d'une petite ligne *LB*, qui à cause de son extrême petitesse, ne pourroit se diviser facilement.

Des cercles concentriques.

2340. La hauteur *AB* devant être divisée en parties égales aussi bien que tous les rayons, tels que *ED*, &c. on se sert dans les quarts-de-cercles mobiles de plusieurs cercles concentriques & parallèles à *CE* & à *BD*; mais dans les muraux il est bien plus commode de ne diviser que la seule alidade *AL*, comme on le voit dans la *fig.* 145; elle peut être divisée sur sa hauteur en 30 parties, ce qui est très-facile en lui donnant 15 à 20 lignes de hauteur, ainsi qu'au limbe du quart-de-cercle; les transversales *AB* de l'instrument étant tirées de 5 en 5', l'alidade *AL* en parcourant l'espace *LB* de 5', rencontrera la transversale *AB* successivement dans les points marquées 1, 2, 3, 4.; lorsqu'elle sera au point 1, elle aura fait une minute ou un cinquième de l'espace qu'il y a de *L* en *B*, & ainsi des autres minutes; on voit même que chaque intervalle d'une minute étant divisé en 6 parties égales sur l'alidade, on pourra appercevoir si l'alidade *AL* au lieu de rencontrer la transversale *AB* au point 1, ne la rencontre qu'à un sixième de l'intervalle qu'il y a depuis *A* jusqu'en 1, & si elle est à $\frac{1}{30}$ de l'intervalle qu'il y a de *A* en *C*.

Inégalités des transversales.

2341. Les transversales *AB* à la rigueur ne doivent pas être divisées en parties égales, parce que *AC* est plus petit que *LB*, étant une partie d'un cercle de moindre rayon; cette inégalité est insensible dans la pratique; car si le point *H* de la ligne *AB* est celui qui répond à la moitié de *LB*, la partie *AH* doit être plus petite que *HB* d'une quantité égale seulement à la moitié de *AB* multipliée par $\frac{LB - AC}{LB + AC}$, ce qui seroit aisé à démontrer.

Division de Nonnius, ou de Vernier.

2342. La division qui est aujourd'hui la plus employée est appellée dans plusieurs auteurs *division de Nonnius*, quoique Nonnius n'en soit pas tout-à-fait l'auteur; mais il en avoit imaginé une autre qui eut beaucoup de célébrité, & qui pouvoit conduire à celle que nous avons aujourd'hui. Voyez son traité *de Crepusculis*, imprimé en 1542. Le véritable auteur de la nôtre dans son

son état actuel fut Pierre VERNIER, Châtelain de Dornans en Franche-Comté, qui la publia dans un petit Ouvrage imprimé à Bruxelles en 1631, intitulé : *La construction, l'usage & les propriétés du cadran nouveau.* Voyez une dissertation du P. Pézenas qui renferme beaucoup de choses curieuses sur les instrumens de mathématiques. (*Mémoires rédigés à l'Observatoire de Marseille, année* 1755, seconde Partie, *pag.* 8 *& suiv.*), & les notes de Benjamin Robins sur l'Optique de Smith ; je crois donc qu'il est juste de rétablir le véritable auteur dans ses droits & d'appeller *Vernier* au lieu de Nonnius, la pièce qui forme la division dont il s'agit.

Explication du Vernier.

2343. Le VERNIER est une pièce de cuivre *CDAB* (*fig.* 156), (c'est la petite portion *X* de la *figure* 155 représentée séparément) ; on voit que la longueur *CD* du Vernier est divisée en 20 parties égales ; mais elle est placée sous une portion du limbe qui contient 21 divisions, c'est-à-dire, qu'on a pris la longueur de 21 divisions du quart-de-cercle, & qu'on a divisé cette longueur en 20 parties seulement ; ainsi la première division de la pièce de Vernier qui est marquée 15, en commençant au point *D*, est un peu en arrière ou à la gauche de la première division du limbe, & cela de la vingtième partie d'une des divisions du limbe, ce qui fait 15″. La seconde division du Vernier est à gauche de la seconde division du limbe, & cela du double de la première différence ou de 30″, & ainsi de suite, jusqu'à la 20e & dernière division à gauche de la pièce du Vernier, ou les 20 différences étant accumulées, chacune de la vingtième partie d'une division du limbe, cette division se trouve exactement d'accord avec la 21e ligne du limbe du quart-de-cercle. *Fig.* 156.

2344. Il faudra donc pousser l'alidade d'une vingtième partie de division ou de 15″ à droite, pour faire concourir la seconde division du Vernier avec une des divisions du limbe ; de même en la poussant de deux vingtièmes ou de 30″, il faudra regarder la seconde division de l'alidade, & ce sera celle qui concourra avec

une division du limbe. Ainsi l'on jugera que le commencement *D* du Vernier qui est toujours l'index ou la ligne de foi a avancé de 2 divisions ou de 30″ à droite, quand on verra que c'est la seconde division marquée 30 sur le Vernier, qui correspond exactement à une des lignes du quart-de-cercle.

Utilité de cette méthode.

2345. Par le moyen d'un Vernier fait avec soin, l'on distingue aisément un centième de ligne; & sur le limbe d'un quart-de-cercle de 5 pieds divisé de 5 en 5′ l'on voit immédiatement 15″, l'on estime ensuite jusqu'à 2 ou 3″, à la vue; cette méthode est aujourd'hui généralement adoptée, comme la plus parfaite de toutes, & on l'emploie en Angleterre, même pour les quarts-de-cercles mobiles, à la place du micromètre dont on se sert en France (2366).

Fig. 156.

J'ai placé à côté du quart-de-cercle & dans sa grandeur naturelle. (*fig.* 156), la plaque de cuivre qui est portée par la lunette. Cette plaque de cuivre porte deux verniers; la ligne supérieure *CD* divise les cinq minutes en 20 parties, c'est-à-dire, de 15 en 15″; la ligne inférieure *AB* répond aux parties d'une autre division qui n'est pas de 90°, mais de 96 parties pour le quart-de-cercle; elle a été quelquefois employée en Angleterre à cause de la facilité des subdivisions. Chacune des 96 portions du quart-de-cercle vaut 56′ 15″ de la division ordinaire; elle est divisée sur le limbe en 16 parties, & l'arc de Vernier *AB* occupant 25 de ces divisions & étant divisé lui-même en 24, donne immédiatement des parties dont la valeur est de 8″ 47‴ $\frac{1}{3}$. De cette manière on peut facilement construire une table de réduction qui serve à trouver par le moyen de cette seconde division les degrés, minutes & secondes, comptés à la manière ordinaire, & avoir une même hauteur de deux manières différentes, ce qui fait une excellente vérification des divisions du quart-de-cercle, & des hauteurs estimées sur le vernier.

Division en 96 parties.

DESCRIPTION DU MICROMETRE.

2346. LE MICROMÈTRE (a) est un instrument composé de plusieurs fils placés au foyer d'une lunette, pour mesurer par leur intervalle la grandeur de l'image qu'on y apperçoit; il y a plusieurs sortes de micromètres que je décrirai séparément, en commençant par les plus simples.

2347. La première idée du micromètre fut donnée par M. Huygens en 1659 (*Systema Saturnium*, *pag.* 82). Après avoir parlé des diamètres des planètes qu'il avoit observés, il dit que Riccioli avoit trouvé le diamètre de Vénus trois fois plus grand que lui; & pour justifier sa détermination, il rend compte de la manière dont il s'y est pris pour mesurer les diamètres des planètes : voici à peu-près ce qu'il en dit.

2348. « Dans les lunettes formées de deux verres » convexes il y a un endroit où l'on peut placer un » objet aussi petit & aussi fin qu'on voudra; il y paroî- » tra très-distinct, très-bien terminé..... Si à ce foyer » l'on place d'abord un anneau dont l'ouverture soit un » peu plus petite que celle de l'oculaire, on verra par » cet anneau tout le champ de la lunette, c'est-à-dire, » tout l'espace circulaire qu'on apperçoit dans le ciel en » regardant par cette lunette, & cet espace sera ter- » miné par une circonférence exacte dont le diamètre » est facile à mesurer. L'horloge oscillatoire que nous » avons imaginée depuis peu est très-propre à cet effet; » on sait qu'il passe un degré de la sphère en 4 mi- » nutes de temps, ou une minute en 4 secondes de temps; » si donc une étoile a employé 69″ à parcourir le champ » de la lunette, on sera sûr que cette lunette occupe » $17' \frac{1}{4}$, & telle est celle dont nous nous servons. On » prendra alors une ou deux petites plaques ou lames

Invention du Micromètre.

(a) Μικρὸς, *parvus*, parce qu'il sert à mesurer de petits angles qui ne passent guère un degré.

» dont la largeur aille en diminuant; on percera le tube » de la lunette de chaque côté à l'endroit dont nous » avons parlé, pour y placer les petites lames en tra- » vers (a). Lorsque l'on voudra mesurer le diamètre d'une » planète on examinera quelle largeur doit avoir cette » lame pour cacher entiérement la planète, & cette lar- » geur étant comparée au diamètre entier de l'ouver- » ture de l'anneau, par le moyen d'un compas très-fin, » fera connoître le diamètre de la planète en minutes & » en secondes ».

2349. Ainsi le micromètre de M. Huygens ne consistoit qu'en une petite lame qu'il faisoit glisser sur le diaphragme, ou petit anneau qui circonscrit l'ouverture; cette lame cachoit par sa largeur l'image qu'on vouloit mesurer, & en donnoit ainsi le diamètre. M. Auzout imagina le premier en 1666 de renfermer l'image entre deux fils qu'on rapprochoit l'un de l'autre; les premières observations faites avec ce nouvel instrument furent imprimées en Angleterre même. (*Phil. Transf. n°.* 21), M. Townley écrivit ensuite qu'il avoit trouvé une semblable invention dans les papiers de M. Gascoigne: (*Phil. Transf. n°.* 25), & M. Bevis assure qu'il en a trouvé la preuve dans une lettre écrite par M. Gascoigne en 1641, dont l'original étoit dans la Bibliothéque de Milord Maclesfield. Quoi qu'il en soit de l'inventeur secret que nous oppose l'Angleterre, il est sûr que M. Auzout inventa, & qu'il connut le mérite de l'invention; il en fit usage, il la publia, & en enrichit l'astronomie.

M. Auzout imagine les fils mobiles.

2350. Avant que de donner la description des micromètres, il faut parler des *réticules*, qui sont l'espèce la plus simple de micromètres; il y en a deux sortes principales: sçavoir, le réticule de 45°, & le réticule rhomboïde. Le champ d'une lunette simple, tel que le cercle *ACBE* (*fig.* 138), est ordinairement garni d'un chassis, dans lequel il y a quatre cheveux, ou 4 fils tendus. Le fil *AB* est destiné à représenter le parallèle

Réticule de 45°.

Fig. 138.

(a) *Virgulæ*; petites lames de cuivre, ou d'une autre matière.

à l'équateur ou la direction du mouvement diurne des astres; le fil horaire *CE*, qui lui est perpendiculaire, représente un méridien ou cercle de déclinaison; & les fils obliques *NO*, *LM*, font des angles de 45° avec les deux premiers. *Fig.* 138.

2351. Lorsqu'on veut mesurer la différence d'ascension droite, entre deux astres, pour connoître la position d'une planète par le moyen de celle d'une étoile, on incline le fil *AB*, de manière que le premier des deux astres le suive & le parcoure exactement; & l'on observe l'heure, la minute, & la seconde où l'astre passe au centre *P*, ou à l'intersection des fils. Quand le second astre vient à traverser la lunette à son tour, il décrit une autre ligne *VFDGR*, parallèle à *APB*; on compte l'instant où il arrive en *D*, c'est-à-dire, sur le même cercle de déclinaison *CDPE*, où l'on a observé le premier astre en *P*, & la différence des temps donne celle des ascensions droites (2505). Différence d'ascension droite.

2352. Pour trouver la différence de déclinaison, des deux astres ou la perpendiculaire *PD*, comprise entre *AB* & *VR*, on compte le moment où le second astre passe en *F* & en *G*; l'intervalle de temps converti en degrés, & multiplié par le cosinus de la déclinaison de l'astre (892) donne l'arc *FDG*, dont la moitié *FD* est égale à *DP*, à cause de l'angle *FPD* supposé de 45° (2507). Différence de déclinaison.

2353. M. Bradley a substitué le réticule rhomboïde au réticule de 45°, & c'est aujourd'hui le plus usité parmi les Astronomes. Le réticule de 45° a deux inconvéniens que M. Bradley a voulu éviter; c'est 1°. de rendre inutile une partie du champ de la lunette; savoir, les deux segmens *NCL*, *MEO*, qui se trouvent en haut & en bas; 2°. d'embarrasser considérablement le centre de la lunette par l'intersection de plusieurs fils, l'astre peut y passer quelquefois sans être apperçu. Réticule rhomboïde.

Le réticule de M. Bradley est formé d'un rhombe *BEDF* (*fig.* 147), tel que l'une des diagonales soit *Fig.* 147.

Fig. 147. double de l'autre. Pour le tracer, nous supposerons un carré *AGHC*, dont les côtés *AC* & *GH* soient divisés chacun en deux parties égales, en *D* & en *B*. Du point *B*, l'on tire aux angles *A* & *C* les lignes *BA*, *BC*, & du point *D* aux angles *G* & *H*, les lignes *DG*, *DH*; ces quatre lignes formeront par leurs intersections le rhombe *BEDF*; *EF* est la moitié de *AC*, & par conséquent la moitié de *BD*; si en quelque endroit de ce réticule on tire une ligne *ef* parallèle à la base *EF*, la perpendiculaire *Bd* sera égale à la base *ef*, comme *BD* est égale à *AC*, c'est-à-dire, que la largeur d'une partie de ce rhombe est toujours égale à la hauteur.

Propriété de ce réticule.

2354. Lorsqu'on veut comparer avec ce réticule une planète à une étoile, on fait ensorte que le premier des deux astres parcoure dans son mouvement diurne l'espace *EF*; & comme l'on connoît la valeur du réticule en degrés & en minutes, on sait combien le point *B* est éloigné du milieu du fil *EF*, ou du centre de la lunette. Le second astre venant à traverser aussi la lunette, on compte exactement le temps qu'il a employé à passer de *e* en *f*, on convertit le temps en degrés, minutes & secondes : on diminue ces degrés, en les multipliant par le cosinus de la déclinaison de cet astre (892), & l'on a la grandeur de *ef*, ou *Bd*, & par conséquent *Md*, qui est la différence en déclinaison des deux astres. (Voyez *l'exemple art.* 2518).

2355. Ce réticule sert à comparer les planètes, & les comètes aux étoiles fixes, qui ont à peu-près la même déclinaison, ou bien à comparer les petites étoiles, dont on veut dresser un Catalogue, à quelque étoile principale, qui est à peu-près sur leur parallèle. M. de la Caille, qui s'en est servi au Cap de Bonne-Espérance en 1751, pour dresser un Catalogue de près de dix mille étoiles dans la partie australe du Ciel, l'avoit fixé dans la lunette d'un quart-de-cercle; on peut également le placer dans une lunette méridienne (2391), ou dans une lunette parallatique (2407).

2356. Pour pouvoir distinguer dans l'obscurité si l'étoile a passé au-dessus ou au-dessous de la ligne *EF* du milieu, on a l'attention de conserver une largeur considérable à la partie *ELB* du réticule, tandis que les trois autres côtés sont les plus minces & les plus évidés qu'il soit possible; lorsque l'étoile, après s'être cachée derrière une des lames du réticule, reparoît aussitôt de l'autre côté, l'on est assuré qu'elle est dans la partie inférieure *EDF*; mais s'il s'écoule plusieurs secondes sans qu'on l'apperçoive, on juge qu'elle est dans le segment supérieur *EB*, dont la lame est beaucoup plus large que les autres; M. de la Caille étoit même dans l'usage de réserver pleine toute la partie *BLE*, qui est ombrée ou teintée dans la figure. *Fig.* 147.

Toutes les lignes ponctuées *GA*, *GH*, ne sont que des lignes auxiliaires & accessoires, que l'on trace sur une platine ronde de cuivre destinée à former le réticule; & lorsqu'il est tracé, l'on abat toutes les parties inutiles, on ne conserve qu'un anneau circulaire *BLDK*, de la grandeur du champ de la lunette, ou de l'ouverture qu'on veut donner à l'oculaire, & la partie rhomboïde *BEDF*; celle-ci ne fait avec cet anneau circulaire *BLDK* qu'une seule pièce, qui se place au foyer commun des deux verres. On y met, si l'on veut, deux fils *BD*, *LK*, quoiqu'à la rigueur on puisse très-bien s'en passer.

2357. M. Romer imagina dans le dernier siècle une espèce de micromètre propre à observer les éclipses, c'est-à-dire, à diviser en 12 parties égales les diamètres du soleil & de la lune, malgré leurs changemens (*Hist. acad. pag.* 145). Cette lunette, dit M. Horrebow, est composée de deux objectifs qu'on peut éloigner l'un de l'autre : *Elongato objectivo interiori à cratula* (a), *& contrahendo tubum videbitur filaris cratulæ quadratum esse auctius.* (Horrebow *Basis astron. pag.* 88). On trouve dans le même livre de M. Horrebow, la description de plusieurs instrumens de M. Romer, & en particulier de Micromètre de M. Romer.

(a) *Cratula*, c'est la boîte qui contient le réticule.

la lunette double, *Tubus reciprocus*, (*Ib. pag.* 97); on peut l'employer à corriger les divisions des instrumens, à observer les équinoxes, & à trouver deux points qui soient opposés, & en ligne droite avec l'axe d'une lunette, comme M. de la Condamine l'a remarqué; on le peut faire avec la lunette d'épreuve (2503); au reste, les bornes de ce livre n'admettent que la description des instruments les plus usités.

Micromètre simple à grande vis.

2358. Les micromètres sont de deux sortes : le micromètre qu'on applique à une lunette mobile de 7 à 8 pieds pour mesurer des diamètres, ou des différences d'ascension droite & de déclinaison, est plus simple que celui du quart-de-cercle; je commencerai donc par le premier; je décrirai le micromètre dont je me sers depuis 1753, il est presque semblable à celui qui avoit été décrit en 1738 dans l'Optique de Smith *art.* 877 : c'est la meilleure construction que je connoisse.

Fig. 157.

Le micromètre est représenté dans les *figures* 157 & 158, vu des deux faces; *AB fig.* 157, est une platine de 8 pouces de longueur, sur environ quatre pouces de large. *CD* est une vis de 5 pouces de long, sur 4 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre, qui porte 48 filets sur chaque pouce; c'est la partie essentielle du micromètre. Cette vis *CD* passe dans un écrou *EF* d'environ trois pouces de long, & dans le milieu on réserve une moitié d'écrou *G*, qui fait ressort contre la vis, pour en diminuer le jeu, & pour la nettoyer. L'écrou *EF* porte le chassis mobile *HIKL*, qui a deux pouces 8 lignes de large, & autant de hauteur; il est contenu & guidé par le côté *IK*, dans une coulisse formée par une règle de cuivre *AN*, qui recouvre la platine du micromètre.

La vis est la partie essentielle.

Chassis du curseur.

2359. A l'extrémité du chassis *HIKL*, on place une petite lame *mn*, fixée sur le chassis, avec deux vis, & qui porte deux petits bras, pour tendre le fil mobile ou le curseur. Sur l'extrémité des deux petits bras, il y a deux autres pièces *K* & *L*, de 3 lignes de large sur 2 lignes de hauteur, qui serrent les extrémités

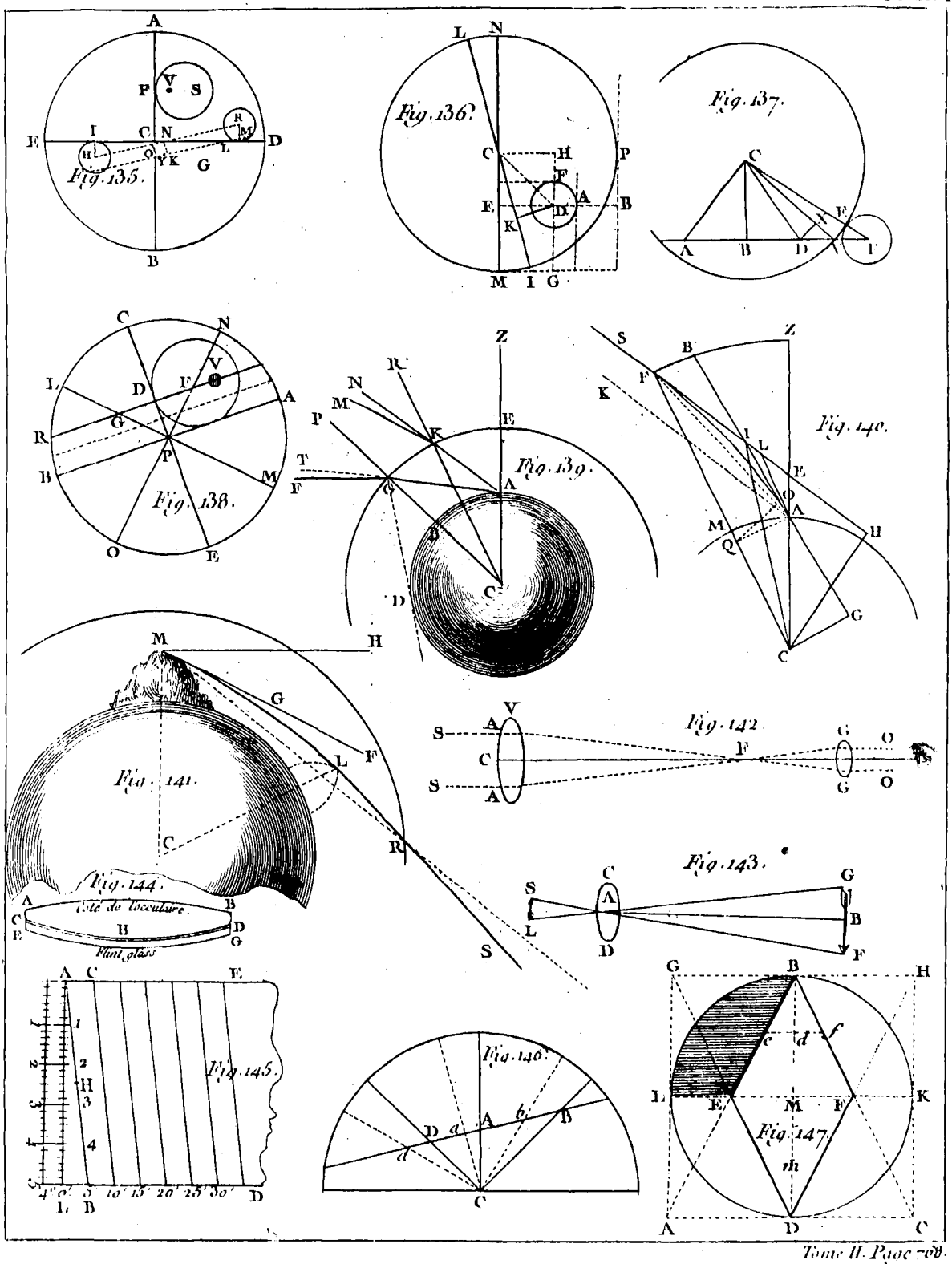
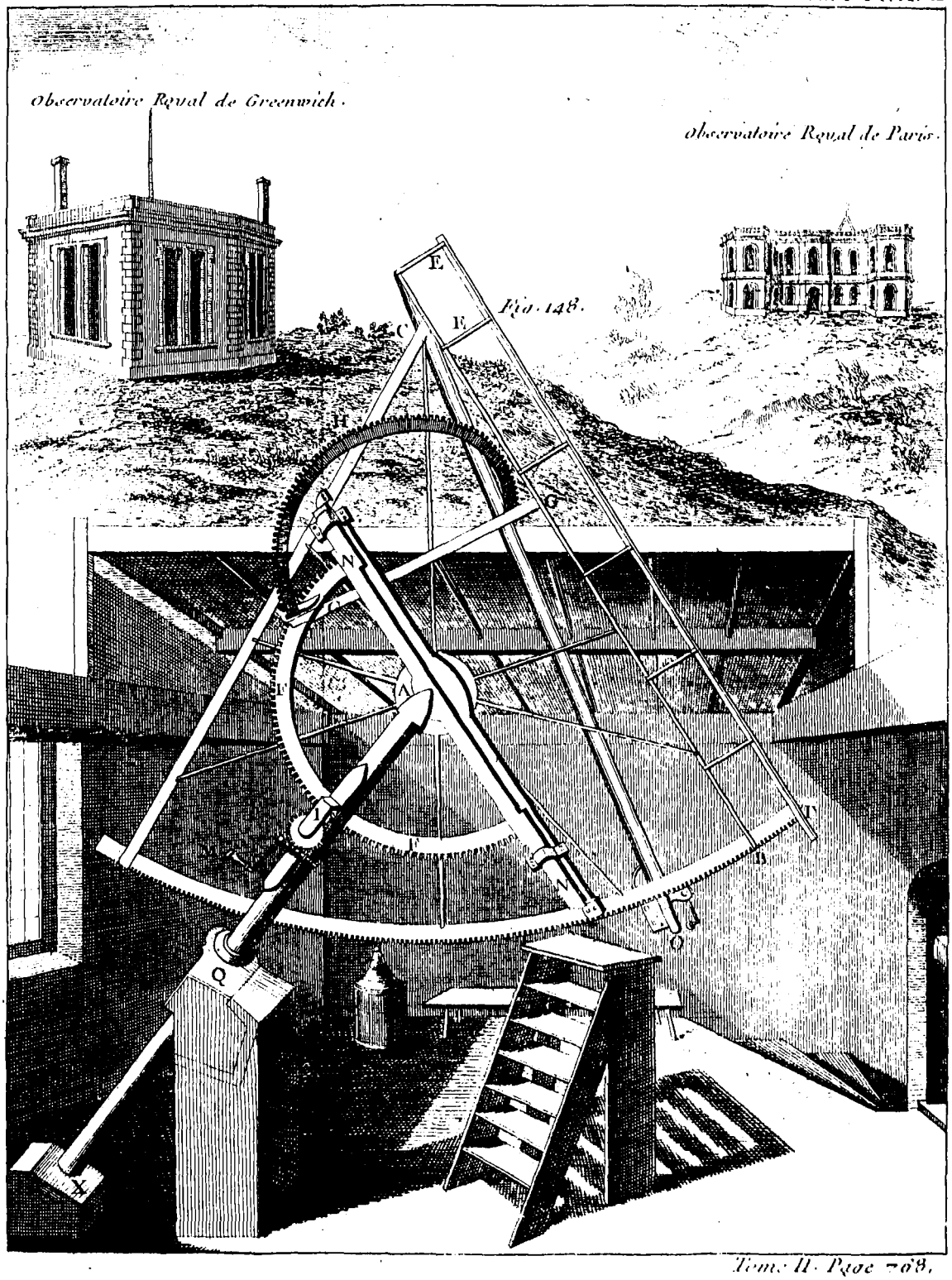


Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Côté de l'oculaire.
Flint glass
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.


Observatoire Royal de Greenwich.
Observatoire Royal de Paris.
Fig. 148.
E
F
C
H
G
N
A
T
Y
B
Q
X

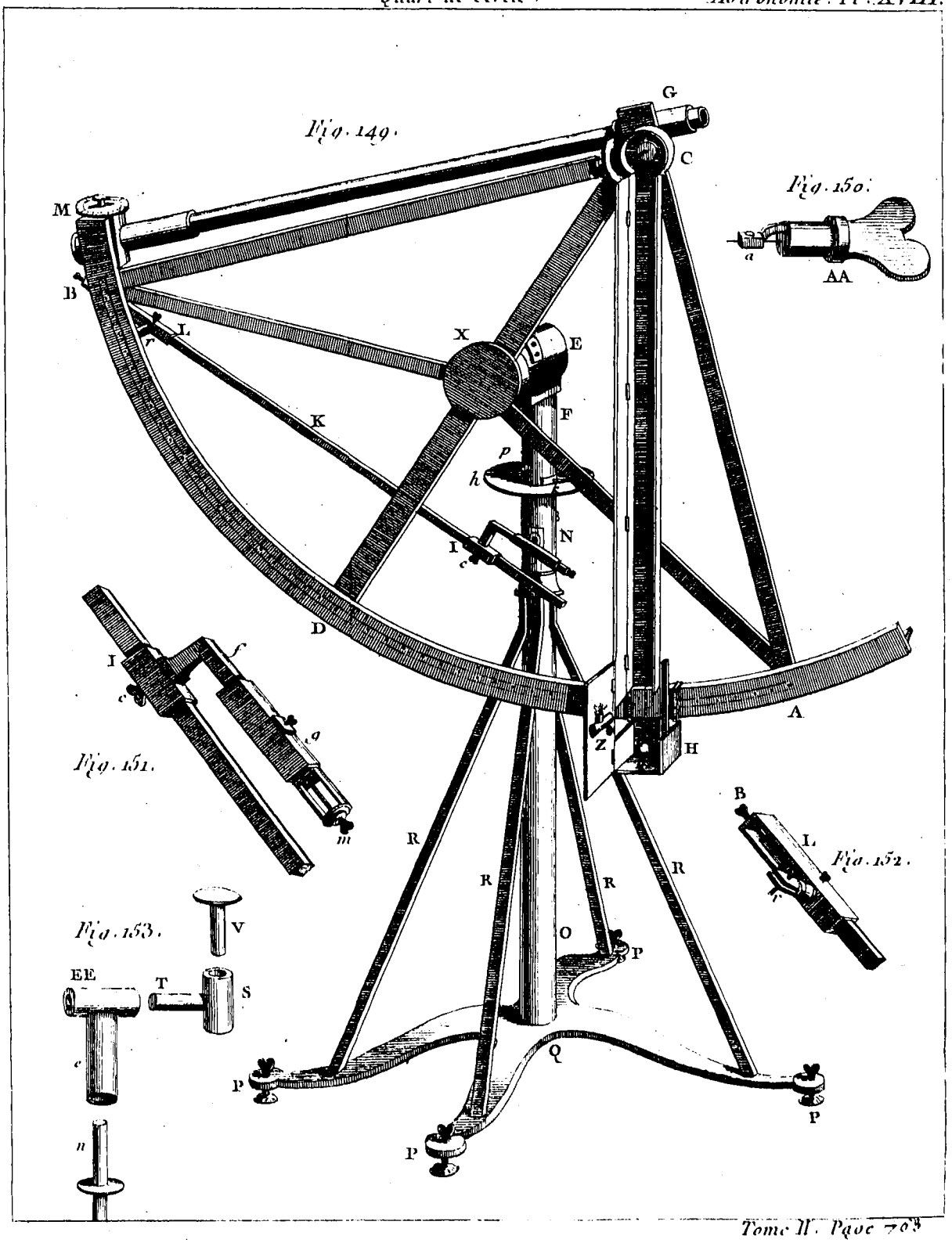


Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
G
C
M
B
L
r
X
E
K
F
p
h
N
I
c
D
A
Z
H
f
g
m
R
O
P
Q
V
EE
T
S
e
n
a
AA

Fig. 154.

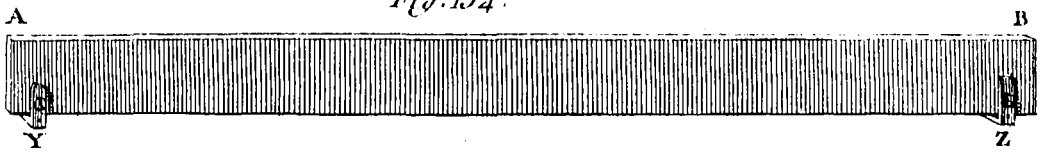
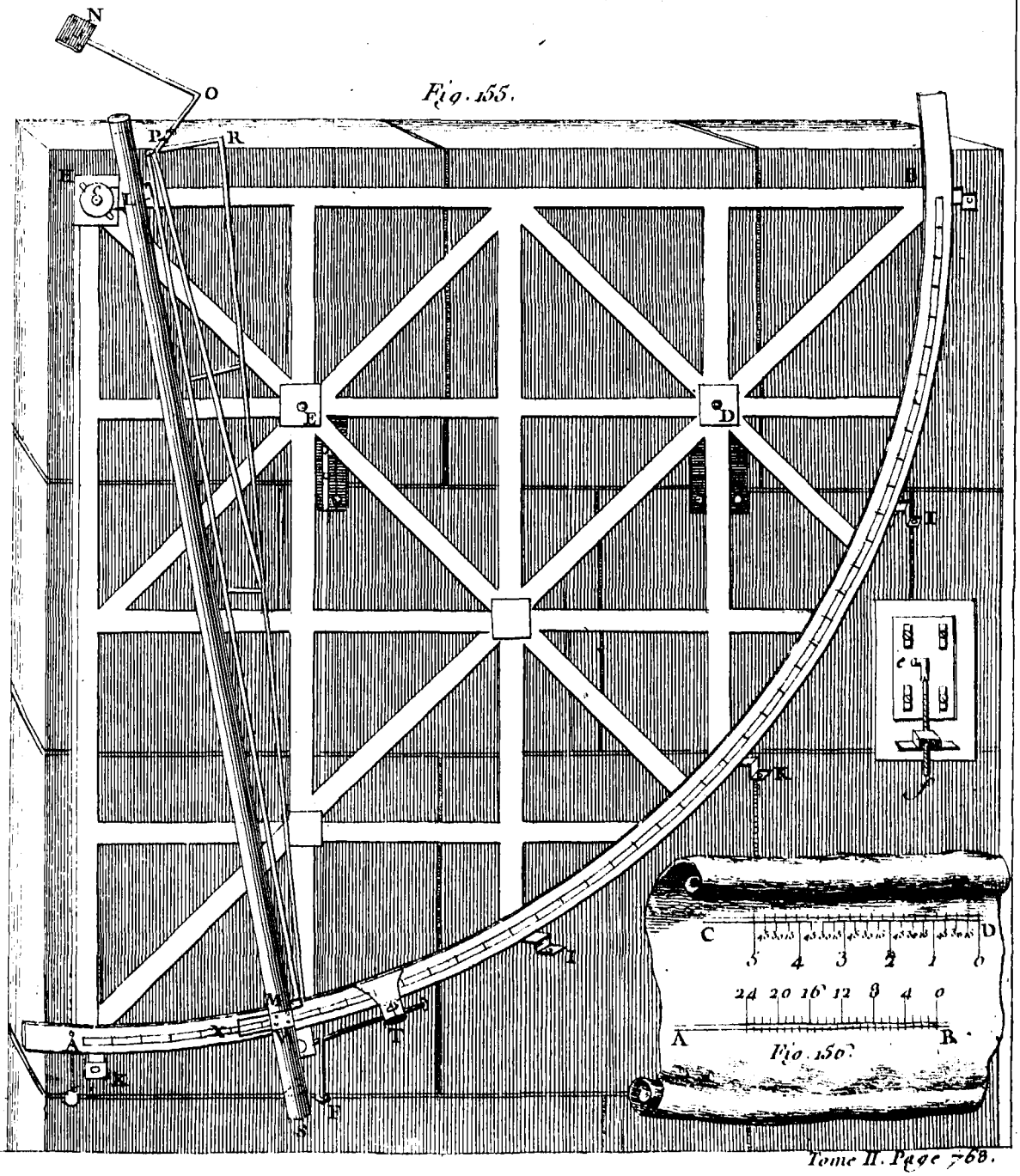


Fig. 155.



mités du fil; les deux pièces *mn* portent le curseur dans des entailles très-fines, faites à leur extrémité & sur leur épaisseur, afin que le fil *K L* puisse venir s'appliquer immédiatement contre le fil fixe *PO*. Le curseur *K L* est à l'extrémité du chassis mobile, il rase la platine du micromètre; car dans ce micromètre, les fils ne passent point l'un devant l'autre, comme dans celui du quart-de-cercle (2375); ils sont seulement dans un simple contact, quand l'index marque zéro, & commence la numération. Le fil fixe *OP* est aussi porté sur une petite lame *QR*, dont les deux bras ont à leur dernière extrémité & sur leur épaisseur, une très petite rainure, pour recevoir seulement l'épaisseur du fil d'argent qui est $\frac{1}{560}$ de pouce; de cette manière le fil fixe regarde précisément le fil mobile, & peut en être touché immédiatement, sans qu'il y ait aucun jour entre deux.

Quant on veut placer les fils sur le micromètre, on dévisse la lame *n m*; on la courbe tant soit peu, on serre la vis *L* qui presse le fil; la lame se redresse ensuite par son élasticité, & opère une tension suffisante dans le fil. Il en est de même du fil fixe *O P*.

2360. La vis *CD* est une pièce très-difficile à faire, on exige que son diamètre soit très-gros pour qu'elle ne se fausse pas en la taraudant, que les filets soient très-fins pour qu'ils soient plus égaux. Un seul taraud ne suffit pas pour avoir une excellente vis; il faut pour bien corriger les inégalités des pas de vis, qu'un taraud serve à faire un écrou, ou des coussinets de filière: ces coussinets formeront un second écrou, cet écrou formera d'autre coussinets; par ce progrès, les inégalités des pas de vis vont toujours en diminuant, & le diamètre de la vis grossit de plus en plus. Quand la vis est faite, on doit la vérifier encore (2535), pour en connoître jusqu'aux moindres inégalités. Attentions pour la vis.

2361. Cette vis *C D* est reçue en *E* sur la pointe d'une grosse vis, qui passe au travers du tassau *E*, &

qui contient la vis *CD* dans une ſituation toujours conſtante. La grande vis *CD* eſt reçue par ſa partie ſupérieure dans un collet de cuivre, fixé à l'angle de la platine, la tête de la vis paſſe au travers de la boîte *cd*, qui renferme la cadrature, & porte carrément une aiguille *S*, & un bouton *b*, ou roſette en grenetis, qui ſert à faire tourner la vis.

Cadrature pour compter les tours de vis.

2362. La boîte *cd* contient une cadrature compoſée de 3 roues & de 3 pignons, pour faire marquer les tours de vis que l'on voit au travers de l'ouverture *e* faite ſur la boîte. La grande vis porte un pignon de 16, qui engrène dans une roue de 40 dents, laquelle a un pouce de diamètre, & porte ſur un pivot fixé dans le fond de la boîte. Cette roue de 40, porte un pignon de 10, qui engrène dans une roue de 50, portée également ſur un pivot, fixé dans le fond de la boîte; cette roue de 50 porte un autre pignon de 10, celui-ci conduit une roue de 80, qui eſt dans le milieu du cadran, & au travers de laquelle paſſe la tête de la vis. Sur cette roue de 80, eſt fixé un cadran qui a 2 $\frac{3}{4}$ pouces de diamètre, dont la circonférence eſt diviſée en 100 parties, & dont les chiffres paroiſſent au travers de l'ouverture *e* pour marquer les tours de vis; ce cadran ne fait qu'un tour, tandis que la vis en fait 100.

2363. Cette manière de marquer les tours de vis eſt plus commode que celle de la *fig.* 159 (2367); car lorſque les pas de vis ſont très-fins, comme d'un quart-de-ligne, il eſt difficile de les voir facilement, au lieu que ſur le cadran chaque diviſion eſt très-ſenſible, & le ſeroit encore davantage, ſi au lieu de diviſer le cadran en 100, on le diviſoit ſeulement en 50 parties, en lui donnant la 50e partie du mouvement de la vis : il ſuffiroit pour cela de réduire à 40 dents, la roue de 80.

Mouvemens d'inclinaiſon.

2364. Le micromètre entier, c'eſt-à-dire, la vis *CD*, les fils, & la boîte *dc* ſont portés ſur une platine,

à laquelle on ménage un petit mouvement d'inclinaison ([a]), représenté dans la *fig.* 158. Le micromètre y paroît dans l'autre sens, c'est-à-dire, par le côté de la platine fixe qui doit tenir au tuyau de la lunette, & qui regarde l'objectif; *AB* & *CD* sont deux plaques repliées, dont les ailes glissent dans les coulisses du porte-micromètre (*fig.* 194), pour soutenir le micromètre; *EPF* est une pièce en demi-cercle, dont le centre *G* est à l'intersection des fils fixes. Ce demi-cercle est fixé par des vis *E* & *F* sur la platine mobile du micromètre; mais il a un rebord qui s'applique sur la platine fixe pour la contenir par son frottement; il empêche aussi que la platine mobile ne descende vers *K*, tandis qu'une pièce *H* empêche qu'elle ne s'élève, au moyen de la vis *H*, qui passe au travers d'une longue rainure pratiquée dans la platine fixe *CDBA*, mais recouverte par la pièce *H*; cette rainure laisse à la platine mobile tout son mouvement latéral, la vis ne fait que passer au travers de la platine fixe pour entrer dans la platine mobile qui est au-delà. *Fig.* 158.

La vis sans fin *ON*, portée sur la platine mobile, engrène dans une pièce dentée *L*, qui est portée sur la platine fixe; & tandis que cette partie *L* est immobile sur la lunette, la vis *NO* incline le micromètre de quelques degrés. La partie dentée étant de 16 à 17 lignes, elle donne environ 18° de mouvement, c'est-à-dire, 9° de chaque côté; & cela est plus que suffisant pour faire parcourir exactement à un astre le fil du micromètre, quand on s'apperçoit que la direction du fil s'écarte de celle du parallèle.

2365. Ce micromètre se conserve dans une boîte, & lorsqu'on veut en faire usage, on le place dans le porte-oculaire (*fig.* 194). Le bout du tuyau *AA* entre dans le tube de la lunette; il porte une plaque de cuivre *BB*, qui a deux coulisses *BC*, *BC*, dans lesquelles s'en- Porte-tuyau de l'oculaire. *Fig.* 194.

([a]) J'ai vu à Londres, entre les mains de M. le Docteur Bévis, un très-ancien micromètre d'Hévélius, qui avoit un pareil mouvement d'inclinaison.

gagent les deux rebords, ou les ailes des plaques repliées, qu'on a vues sur le micromètre en *AB* & *CD*, *fig.* 158 : elles y entrent à frottement dur, pour que le micromètre ne glisse pas. Le tube conique *O* (*fig.* 194), est celui qui porte l'oculaire; il se termine par un petit œilleton *E*, c'est-à-dire, un petit trou auquel on applique l'œil, lequel doit entrer en *E*, dans un petit hémisphère concave. Ce tube *O* porte le verre oculaire, qui y est logé & recouvert sur les bords par une vis circulaire, & ce tube est vissé sur la traverse *DD*, qui a dans le milieu une ouverture circulaire. Cette traverse *DD* porte deux petites règles de cuivre, qui glissent dans deux coulisses *CD*, *CD*, afin qu'en plaçant des oculaires de différens foyers, on puisse toujours mettre le tube *O* de l'oculaire à la distance convenable par rapport aux fils du micromètre; les différentes vues des observateurs, qui peuvent regarder dans une même lunette, exigeroient seules cette attention, de rendre mobile le tuyau des oculaires.

Les usages du micromètre seront expliqués dans le livre XIV, art. 2519 & suiv.

Micromètre du quart-de-cercle.

2366. Après avoir décrit le plus simple & le plus parfait de tous les micromètres, je passe à la description de ceux qu'on applique aux quarts-de-cercles, & aux secteurs astronomiques (2380), du moins suivant la méthode Françoise. Cette méthode imaginée en 1714, par M. le Chevalier de Louville, a été perfectionnée successivement par différens astronomes de l'académie. Le micromètre que je vais décrire fait partie d'un sextant de 6 pieds, dont M. de la Caille se servoit avant moi, & avec lequel ce grand astronome a fait pendant dix ans ses meilleures observations.

Boîte du micromètre. Planche XXI. Fig. 159.

Le micromètre est représenté séparément en *AB* (*fig.* 159), avec toutes ses parties extérieures; la boîte porte deux bouts de tubes *C* & *D*, l'un du côté de l'œil *O*, l'autre du côté de la lunette. Le premier a 3 pouces $\frac{1}{2}$, il sert à recevoir le tuyau de l'oculaire; cette alonge du micromètre se termine par un rebord *EF*, ou platine

carrée, dont les quatre oreilles sont percées, & se fixent sur le micromètre, avec quatre vis aux coins de cette embase; le bout de tuyau *D* a 2 pouces $\frac{1}{2}$ seulement de longueur, plus ou moins; il est destiné à entrer dans la lunette du sextant pour l'assujétir derrière le limbe; il tient à la boîte du micromètre, aussi bien que l'autre bout de tube, par une embase & par quatre vis; il a un pouce & demi de diamètre; c'est l'ouverture qu'exige une lunette ordinaire de six pieds; mais elle seroit plus considérable si l'on employoit une lunette achromatique (2298), & j'espère qu'on le fera, quand ces lunettes seront devenues plus communes. *Fig.* 159.

2367. La boîte du micromètre a 5 pouces 5 lignes de hauteur de *G* en *H*, 2 pouces 4 lignes de largeur, & 1 pouce 3 lignes d'épaisseur *HH*: elle se termine en haut & en bas par deux petites boîtes *GP* & *HH*, qui embrassent de tout côté le haut & le bas de la boîte principale, & qui y sont fixées par des vis: on voit une de ces vis en *B*. La partie du haut, où le dessus du micromètre est représentée séparément en *V* dans la *fig.* 162, à côté du cadran *R* (*fig.* 161), que l'on attache sur cette boîte. Le fond du micromètre est la pièce sur laquelle portent les ressorts (2378).

On voit en *I* la plaque de l'index, qui porte vers son milieu une pointe, un trait, une fleur-de-lys, ou un index pour marquer l'élévation du fil mobile. Cette plaque tient au moyen d'une vis, sur le chassis intérieur & mobile (2378); elle monte & descend avec lui, & l'on voit une rainure sur le côté *MI* de la boîte, où la plaque de l'index a la liberté de se mouvoir. Index.

A côté de la plaque d'index *I*, on voit une autre plaque *KK*, fixée en dehors sur le côté de la boîte par deux vis; elle porte des divisions, qui sont de la même grandeur que les filets de la grande vis intérieure du micromètre, par exemple de 35 sur un espace de dix lignes; & l'index *I* qui monte & descend vis-à-vis de ces divisions, y fait voir le nombre des tours de vis. Les trous de cette plaque *KK* doivent avoir un peu plus Divisions pour les tours de vis.

de diamètre que les vis qui y entrent, afin qu'on puisse donner du jeu à cette plaque, & faire correspondre exactement le milieu des divisions avec le concours des fils.

2368. On voit en *L* un trou, dans lequel on passe une clef pour incliner le fil fixe du micromètre (2377), & le rendre parallèle à l'horizon; on voit en *M* un autre trou par lequel on incline le fil mobile, pour le rendre parallèle au fil fixe (2378); & au-dessus de la boîte en *N*, il y en a un troisième, par lequel on élève le fil fixe, ou on l'abaisse (2376).

Cadran des divisions.

2369. La boîte du micromètre est surmontée d'un cadran ou cercle de deux pouces & demi de diamètre, divisé en 100 parties, pour marquer les centièmes parties d'un tour de vis, au moyen de l'aiguille qui tourne avec la grande vis du micromètre; le cadran est représenté séparément dans la *fig.* 161 en *R*, on y voit des trous en *S* pour la grande vis, en *T* pour la vis qui élève le chassis fixe, & en *t t* pour les vis qui attachent le cadran sur le haut de la boîte. L'aiguille qui paroît sur le cadran dans la *figure* 159 a la facilité de se mouvoir par un frottement dur sur l'arbre de la vis, afin qu'on puisse la mettre sur le commencement de la division quand les fils sont exactement d'accord; mais pour qu'ensuite elle soit obligée de tourner avec la vis, on l'affermit contre la tête de cette grande vis par une autre petite vis de pression que l'on voit en *H* (*fig.* 166); le frottement entretient ainsi le collet *G* de l'aiguille assujéti sur la grande vis.

Fig. 161.

Fig. 166.

Au-dessus de la boîte en *A* on voit une rosette ou tête de cuivre en grenetis, qui entre carrément sur l'arbre de la grande vis & sert à la faire tourner; cette rosette est contenue sur l'arbre par une petite vis qui se voit au-dessus & qui l'empêche de sortir; la rosette est représentée séparément en *R* dans la *fig.* 167 au-dessus de l'aiguille.

Fig. 167.

2370. La boîte du micromètre qui est destinée à s'attacher derrière le limbe d'un sextant ou d'un quart-de-cercle, se termine en avant & en arrière par deux

rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large, on en voit une en *PP* (*fig.* 159); elle est percée de deux trous dans lesquels entrent les vis qui assujétissent sur l'instrument l'assemblage total du micromètre; on voit encore ces deux rebords en *DD fig.* 160. *Fig.* 159.

On voit en *Q* à 2 pouces environ du milieu de la boîte la trace de l'oculaire, porté dans un tuyau mobile qui entre dans le tube *C* du micromètre.

2371. La boîte du micromètre est destinée à contenir les deux fils qui doivent mesurer les intervalles célestes, le fil fixe & le fil mobile ou curseur; ils sont portés sur deux chassis différens, & pour cet effet, l'épaisseur intérieure de la boîte est divisée en deux parties ou deux loges par des languettes latérales qui occupent toute sa hauteur, & dont on voit la coupe en *E*, *E*, (*fig.* 160). Cette figure contient le plan du micromètre, & de sa boîte qui est découverte par le haut; *AA* est le tube qui entre dans la lunette, *BB* celui qui reçoit le porte-oculaire, *CC* le tube de l'oculaire qui glisse dans le tube *BB* pour mettre l'oculaire à la distance convenable des fils; *DD* sont les deux rebords ou plaques de 6 à 7 lignes de large au travers desquelles passent des vis pour attacher le micromètre au sextant (2370); *EE* sont les deux languettes intérieures qui divisent en deux parties l'épaisseur *FG* de la boîte; la partie *F* de la capacité du micromètre qui est du côté de l'objectif reçoit le chassis fixe, & la partie *G* qui est vers l'oculaire, est pour le chassis du curseur; *Q* marque la place de l'oculaire, *ffff* sont les vis qui tiennent les bouts de tubes fixés sur la boîte du micromètre par leurs embases (2366). *Fig.* 160.

2372. Au fond de cette boîte on place un quadruple ressort qui repousse continuellement en haut le chassis du curseur, & empêche le jeu de la vis. Pour former la pièce du ressort double on prend une plaque de cuivre *HH* (*fig.* 164), de 26 lignes de long sur 5 lignes de large, pour remplir exactement la largeur & l'épaisseur d'une des loges de la boîte (2371); elle porte sur chacune de ses faces deux ressorts *HR* qui

Ressort quadruple.

Fig. 164.

se croisent sans se toucher; chaque ressort est rivé par sa base sur la plaque *HH*, & l'autre l'extrémité est arrondie à l'extérieur pour soutenir & élever le chassis, sans que le frottement en soit dur & difficile; cette extrémité de chaque ressort s'élargit en *R* en forme de cuilleron pour occuper la largeur entière de la coulisse, afin d'éviter le jeu ou le balottement de ces ressorts; il en est de même des deux ressorts inférieurs qui portent sur le fond de la boîte, ils sont creusés en cuillerons & leur convexité seule porte sur une plaque d'acier qui tapisse le fond de la loge.

M. Canivet est dans l'usage d'égaliser ces 4 ressorts par le moyen d'un poids qu'on leur fait supporter horizontalement, & l'on affoiblit celui des deux ressorts qui en résistant trop d'un côté, feroit prendre une direction oblique au chassis du micromètre; par ce moyen le ressort pousse le chassis de bas en haut toujours verticalement.

2373. Il faut que ces ressorts soient doux & plians; & l'on ne doit jamais faire parcourir au curseur que quelques minutes; car le P. Liesganig croit avoir observé qu'il faut plus de parties de la vis pour un même nombre de secondes, quand le ressort est parvenu à sa plus forte tension qu'il n'en faut vers l'endroit de son relâchement, à cause de la trop grande résistance: il se contente de mettre sur une des faces du chassis mobile deux ressorts qui fassent un frottement latéral toujours uniforme dans la boîte, & il ne met point de ressorts au-dessous, à cause de l'inconvénient que je viens d'exposer.

Chassis du fil fixe. *Fig.* 163.

2374. Le chassis qui porte le fil fixe du micromètre est représenté en *AA* (*fig.* 163); il a 4 pouces 4 lignes de hauteur de *A* en *B*, 2 pouces 1 ligne $\frac{1}{2}$ de largeur *AA*; il porte par en bas un ressort courbé *CDC* qui s'appuyant sur un ressort semblable *CEC* mis au fond de la boîte du micromètre, repousse continuellement ce chassis vers le haut, tandis que la partie supérieure du chassis est retenue en *f* ou par le cadran seul,

Fig. 157.

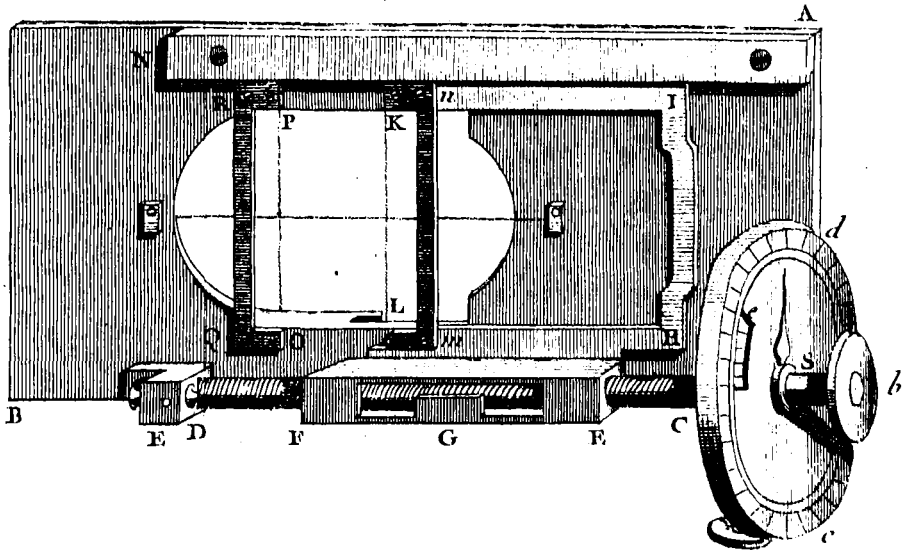
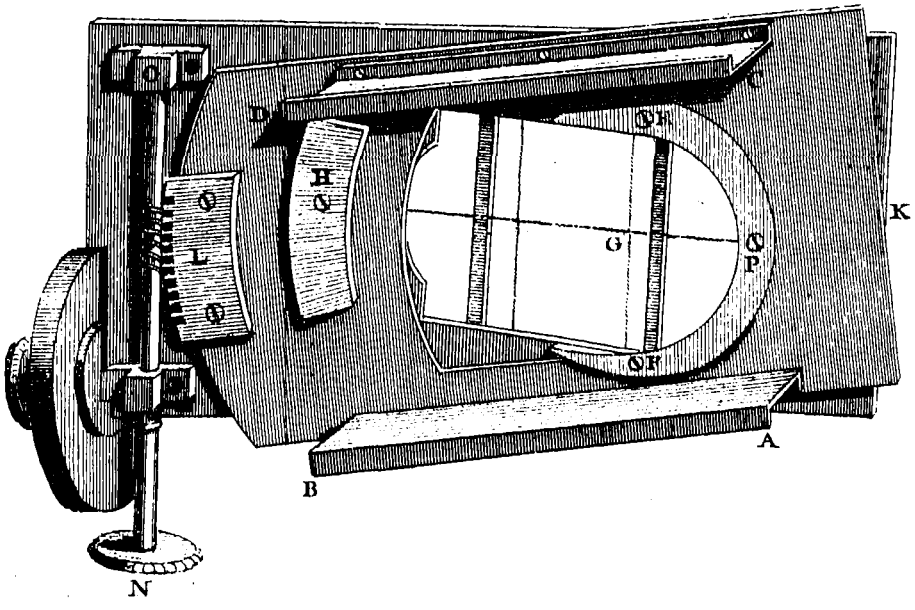


Fig. 158.



seul ; ou par une plaque en équerre fixée sur la boîte du micromètre, & qui se replie sur la base de la vis pour empêcher qu'elle ne s'élève & ne sorte par l'action du ressort *CDC* qui la repousse vers le haut. Cette vis *fg* passe dans une espèce d'équerre *h* qui tient sur le chassis avec un étoteau & une vis.

La vis supérieure *fg* sert à élever ou abaisser d'une petite quantité le chassis fixe & par conséquent le fil horizontal fixe *HH*, lorsque par la vérification du quart-de-cercle (2552), on a trouvé que l'axe de la lunette ne fait pas un angle droit avec le rayon du commencement de la division. C'est pour cela que nous avons fait remarquer un trou *N* (*fig.* 159), au-dessus du cadran (2368). *Fig.* 159.

2375. Vers le milieu du chassis on voit le réticule ; c'est un anneau de cuivre dont le diamètre extérieur *RR* est de 2 pouces, l'ouverture *HH* de 14 lignes, & qui porte deux fils à angles droits, un fil horizontal *HH*, & un fil vertical *VV*. Cet anneau de cuivre qui porte les fils, a une épaisseur assez considérable pour passer au-delà de la surface du chassis fixe *AABB*, afin que ces fils soient placés tout près du chassis mobile qui porte le curseur ; il ne doit y avoir qu'un intervalle suffisant pour que le curseur n'accroche pas le fil fixe en passant près de lui ; & pour cet effet, les fils doivent être presque noyés dans les rainures où ils sont placés. Réticule fixe.

Le fil vertical *VV* est placé à la surface de l'anneau la plus voisine de l'oculaire (c'est le côté opposé à celui que montre la figure) ; il passe par les trous *u u* pour être serré par ses extrémités sous les pièces de cuivre *F* & *G* qui sont elles-mêmes serrées avec des vis contre le cercle du réticule ; c'est la pression de ces vis qui tient le fil tendu : à l'égard du fil horizontal *HH* il passe aussi par les trous *K* & *L*, & ses extrémités sont reprises & arrêtées sous les mêmes pièces de cuivre qui sont serrées avec d'autres vis en *O* & en *P* ; mais on a une attention de plus à l'égard du fil horizontal qui est le plus

Manière de tendre le fil.

important dans un micromètre ; il faut que ce fil soit tendu très-exactement & d'une maniere invariable ; pour cela on le fait passer aussi par le trou *i* d'une autre pièce de cuivre *QL* fixée en *Q* & qui fait ressort par son extrémité ; le fil ayant passé sur ce ressort est arrêté en *P*, & le ressort qui tend à s'élever au-dessus du chassis, retire le fil & le maintient toujours tendu.

2376. Le réticule entier *RR* a la liberté de tourner un peu sur la plaque du chassis fixe ; il est retenu seulement par deux pièces *dd* qui appuient sur le réticule sans l'empêcher de tourner ; on peut y substituer deux vis qui traverseroient l'épaisseur de l'anneau vers *dd* dans des trous allongés ; il est aussi contenu par un écrou *e* qui appuie sur sa partie inférieure ; mais en même temps cet écrou *e* porte un étoteau ou une cheville de cuivre qui entre dans une petite rainure faite de haut en bas sur le bord du réticule ; l'écrou *e* est mis en mouvement par la vis *ST* qui est tangente au réticule, & il oblige le réticule à tourner de quelques lignes. C'est ainsi qu'on redresse le fil *HH*, s'il se trouve n'être pas bien horizontal, ce qui doit se vérifier avec soin (2550).

2377. La vis *ST* tangente du réticule est arrêtée par son pied en *T* dans une base ou espèce de crapaudine sur laquelle elle tourne ; & par sa tête en *S* au moyen d'une embase *c* qui est arrêtée contre la paroi *AB* du grand chassis, renforcée dans cet endroit d'une petite épaisseur de cuivre. Quand le chassis est dans la boîte du micromètre & qu'on veut incliner le réticule par le moyen de cette vis *ST*, on passe une clef ou un carré de fer par un trou marqué *L* dans la *fig.* 159, sur le côté de la boîte du micromètre & qui répond à la tête de cette vis dans laquelle il y a un trou carré pour y introduire la clef (2368).

Chassis du curseur. *Fig.* 165.

2378. Le chassis mobile, ou le chassis du curseur se voit de grandeur naturelle dans la *fig.* 165. Il est percé à jour, parce qu'il ne porte qu'un fil destiné à monter & à descendre, & qu'il ne doit point embar-

rasser l'ouverture du réticule de la *fig.* 163. Le chassis du curseur à 3 pouces $\frac{1}{4}$ de hauteur de *C* en *D*, 2 pouces 2 lignes de largeur de *D* en *E*, 15 lignes d'ouverture de *H* en *K*, & 5 lignes d'épaisseur; le dessus est renforcé par un groupe *mn*, qui est une pièce soudée sous le chassis, & qui a 3 lignes d'épaisseur, pour recevoir la grande vis *VS* du micromètre, destinée à mouvoir le curseur : cette vis a une embase *f* qui l'empêche de sortir de la boîte, une partie arrondie *F* qui reçoit l'index représenté dans la *fig.* 166, & une tête carrée *V*, qui reçoit la rosette *R* de la *fig.* 167, pour mouvoir le curseur. Le chassis du curseur est encore garni par en-bas d'une semelle ou plaque d'acier poli *ED* sur laquelle agissent les ressorts de la *fig.* 164, afin qu'ils ne se gripent pas sur le cuivre; le bas de la boîte est également tapissé d'une semelle d'acier poli sur laquelle portent les ressorts. Au dedans du grand chassis *CDE* il y a un autre chassis *MNOP* qui porte le curseur, & qu'on incline un peu lorsqu'il est nécessaire, pour rendre le curseur horizontal & parallèle au fil fixe (2550); ce chassis intérieur & mobile tourne autour d'une vis *Q*; il est continuellement poussé vers la gauche par un ressort coudé *PM*, qui appuie contre une goupille, ou sur une pièce de cuivre *p* fixée sur le chassis mobile; il porte sur la gauche un écrou *N* qui est mobile dans son trou ou sur son axe; une vis *sr* qui passe dans cet écrou, repousse le chassis vers la droite pour incliner le curseur *HK*; cette vis a une embase qui l'arrête contre la paroi *CD* du chassis; pour la faire jouer on se sert d'une clef qui passe dans un trou, dont nous avons parlé (2368), ce trou est à côté de la boîte du micromètre en *M* (*fig.* 159). Il faut qu'il y ait aussi une vis *p* qui assujétisse le second chassis sur le premier, sans l'empêcher de tourner par l'effet de la vis *sr*. *Fig.* 165.

2379. Le fil horizontal *HK* est porté sur deux petites plaques qui font une épaisseur au chassis intérieur *MNOP*, & qui font saillie d'une ou de deux lignes du côté de l'objectif, (nous regardons ce chassis

mobile par le côté de l'oculaire), pour aller joindre de plus près les fils du réticule qui font aussi saillie du côté de l'oculaire (2375): par ce moyen le curseur glisse très-près de la surface des fils fixes, quoique les chassis qui les portent, soient séparés par des languettes assez épaisses (2371). Les deux extrémités du curseur *HK* passent dans des trous *a* & *b* du chassis, pour venir s'arrêter sous les pièces de cuivre serrées par des vis *a* & *u*; mais l'une des extrémités du fil passe en *t* dans le trou d'une pièce de cuivre qui fait ressort, & de-là va passer sous la pièce *u* où elle est arrêtée, tandis que le ressort *t* élève sans cesse la boucle *b t u*, & exerce sur le fil une tension qui lui est nécessaire : nous l'avons déja remarqué (2375), en parlant du fil horizontal fixe de la *fig.* 163; mais tout cela suppose que l'on emploie des fils d'argent; car si l'on emploie des fils de soye pris sur les cocons, il suffit de les tendre avec de la cire.

Fils de soie ou d'argent.

Le chassis mobile est aussi percé sur le côté de trois petits trous, pour recevoir les vis qui tiennent la pièce de l'index représentée en *I* (*fig.* 159).

On verra les vérifications & l'usage du micromètre que nous venons de décrire, dans le Livre suivant (2550 *& suiv.*).

Description d'un grand Secteur.

2380. Les observations exactes & scrupuleuses qui ont été faites depuis 1725, pour l'aberration & pour la figure de la terre (2651), exigeoient des instrumens qui pussent faire distinguer une seconde avec certitude, c'est-à-dire, des instrumens de 10 ou 12 pieds de rayon; & comme ces observations se font toujours à 3 ou 4 degrés du zénit tout au plus, on n'a besoin dans ces sortes d'instrumens que d'un très-petit arc, c'est pourquoi on les appelle *Secteurs*.

Des plus grands secteurs qu'on ait fait.

Le premier secteur qui ait été fait de la grandeur & de la bonté nécessaires pour des observations aussi déli-

cates, est celui que M. Graham fit en 1725, pour M. Molyneux, (2792) : il fut suivi bientôt après d'un autre pour M. Bradley, avec lequel ce grand astronome découvrit l'aberration & la nutation ; ce secteur est à l'Observatoire de Greenwich. En 1735, M. Graham en fit faire un autre pour la mesure de la terre en Laponie, M. de Maupertuis en a donné la description en 1740, dans son Livre intitulé : *Degré du Méridien* entre Paris & Amiens. Ce secteur est actuellement dans l'Observatoire de M. le Monnier à Paris.

2381. Entre les différens secteurs qui ont été construits, celui dont M. de la Condamine nous donne la description, (*Mesure des trois prem. deg.* 1751, *pag.* 110), est des plus simples, il a servi pour une des plus grandes opérations qu'on ait jamais faites avec un pareil instrument ; cela me suffit pour le préférer à celui qui est décrit dans le Livre de M. de Maupertuis : dans ce dernier on trouve plus d'art, un plus grand nombre de pièces, peut-être plus de commodités pour les observateurs, mais puisque l'on peut s'en passer, ce que nous allons dire est suffisant pour les besoins de l'astronomie. On peut consulter encore à ce sujet les ouvrages sur la figure de la terre de M. Bouguer, & de M. Cassini, celui du P. Boscovich, imprimé à Rome en 1755, & à Paris en 1770, & celui du P. Liesganig, imprimé à Vienne en 1770. Auteurs qui en ont parlé.

2382. Le secteur que l'on voit dans la *fig.* 168, est composé de trois pièces principales, assemblées étroitement l'une avec l'autre ; savoir, un grand rayon vertical, un limbe placé horizontalement au bas de ce rayon, & une pièce qui sert à la suspension, en même temps qu'elle porte le centre de l'instrument. Le limbe ou l'arc du secteur est une règle de cuivre *AB*, qui a 2 pieds, sur un pouce & demi de hauteur & 3 lignes d'épaisseur ; elle est appliquée avec des clous de cuivre sur une bande de fer, garnie & fortifiée par derrière d'une règle de champ *ab* ; on peut se dispenser de donner au limbe une courbure circulaire, pourvu que sa *Planche XXII. Fig.* 168. Limbe du secteur.

Fig. 168. largeur du haut en bas soit suffisante pour contenir la courbure d'un arc de cercle de 7 à 8 degrés.

Ce limbe du secteur est attaché par le milieu avec des tenons & des vis, sur l'extrémité inférieure *C* d'une règle plate *CD* de 12 pieds de long, large de 3 pouces, épaisse de 2 lignes; la figure est brisée dans le milieu, & l'on doit suppléer d'imagination une longueur trois fois aussi grande que celle de la planche, pour que toutes les parties de la figure soient proportionnées. La règle *CD* est de 2 pièces, chacune de plus de six pieds, qui sont unies l'une sur l'autre dans une longueur de quelques pouces, avec des tenons ou espèces de pieds carrés, fixés sur l'une des barres, & qui passent au travers de l'autre pour recevoir par derrière des clavettes chassées à coups de marteau. Cette règle de fer qui forme le rayon de l'instrument, a par derrière une autre règle de champ, c'est-à-dire, qui lui est perpendiculairement adossée, & unie par plusieurs équerres de fer, pour en prévenir la flexion qui est d'une très-grande conséquence (2597).

Suspension du secteur. 2383. La barre de fer qui forme le rayon s'élargit vers le haut, & reçoit sur sa face antérieure, limée en retraite, c'est-à-dire, diminuée d'épaisseur, une pièce de cuivre *EFG*, qui y est appliquée avec trois fortes vis que l'on voit en *e*; cette pièce de cuivre est percée vers *E* d'un trou rond, disposé pour recevoir un cylindre de cuivre, tourné avec soin, & qui sert de centre à l'instrument; il est semblable à celui de la *fig.* 150.

La tête *G* de la pièce de suspension est arrondie en forme de globe, & porte dans un collier de fer attaché à une forte poutre au plancher de l'observatoire, de manière cependant que la lunette du secteur n'en soit pas embarrassée au zénit; ce collier peut être mis à l'extrémité d'une potence de fer, ou traverser d'une poutre à l'autre; il porte l'instrument, en lui conservant la liberté de se mouvoir en *G*, comme le graphomètre d'un arpenteur tourne sur son genou.

2384. La règle de fer sur laquelle le limbe *AB*

est rivé, porte à sa partie inférieure deux oreilles, ou pièces en saillie *MM*, comme des tenons plats qui servent à retenir le secteur dans une situation fixe, & non pas à le porter; ces deux oreilles sont reçues librement dans les raînures ou coulisses de deux tasseaux de fer *mm*, enchâssés dans un fort madrier de bois *OO*; & lorsque cette pièce de bois est à peu-près dans la situation convenable, on peut, avec les vis qui sont dans les tasseaux, faire avancer tant soit peu le limbe de l'instrument, & l'arrêter sur le point qui est nécessaire pour observer une étoile donnée.

Le madrier ou la poutre *OO* doit avoir un mouvement du nord au sud, pour qu'on puisse changer la direction de la lunette, & l'incliner à 4 degrés de chaque côté du zénit; mais lorsqu'elle est à la place nécessaire pour une observation, elle doit être arrêtée avec des crampons de fer *RS*, *BS*, en forme d'étriers ou d'équerres doubles, sur un banc ou établi *QQ* fixé en terre, ou arrêté d'une manière inébranlable.

Chacun de ces étriers *RS*, *BS*, a trois vis, une pardessus en *r*, pour comprimer & arrêter la pièce de bois *OO*, les deux autres devant & derrière, pour la mouvoir en avant & en arrière, afin de bien caler l'instrument, & le mettre dans le méridien (2598) : on voit en *SS* les vis de régie qui sont à la partie antérieure de chacun des deux étriers.

La lunette *TV* du secteur est attachée derrière le limbe, parallèlement au rayon *DC*; elle est embrassée par des fourchettes de fer *XX*, rivées sur le rayon *DC*; au bas de la lunette est le micromètre *V*, semblable à celui dont on vient de voir la description (2366 *& suiv.*).

Sur le limbe *AB*, M. de la Condamine avoit fait tracer en 1739 un arc, dont le centre étoit en *E*, & sur cet arc on avoit porté une ouverture de compas égale à la dix-septième partie du rayon, ce qui faisoit $3^\circ\ 22'\ 15''$, parce qu'on n'avoit besoin que d'observer l'étoile ε d'Orion qui étoit à $1^\circ\ 40' \frac{1}{2}$ du zénit de Tar- Division du limbe.

qui. En prenant de la même manière d'autres parties aliquotes du rayon comme un vingtième, &c. suivant les arcs qu'on vouloit observer dans le Ciel, on faisoit la même chose qu'avec un instrument qui eût été bien divisé en minutes; l'opération étoit plus facile & plus exacte; mais le limbe *AB* doit être divisé en minutes, lorsqu'on en a la facilité; cela est plus commode pour observer en général différentes étoiles.

Suspension du fil à-plomb.

2385. C'est une chose très-essentielle & très-délicate que la suspension du fil dans un secteur, tel que nous venons de le décrire: la suspension qui se fait avec une boucle qui passe sur une aiguille (*fig.* 150), est la plus simple, mais il est dangereux que le frottement du fil sur l'aiguille, ou contre le cylindre du centre, ne gêne la liberté du fil à-plomb; on en a vu des exemples fâcheux dans des observations importantes, comme dans celles qui furent faites en 1761, à Sainte Hélene.

Dans le secteur de M. Bradley qui est à l'observatoire de Gréenwich, il y a une plaque au centre, dans laquelle est une légere entaille, & le fil à-plomb se loge dans l'entaille qui est le centre même de la division; mais il est à craindre qu'un tel centre ne soit sujet à varier; & que cette entaille faite dans une plaque très-mince, ne soit pas constamment & exactement à sa véritable place; & cela est difficile à vérifier, quand on n'a pas un point dans lequel on puisse placer une des pointes du compas. Il est aussi dangereux que le fil à-plomb ne soit gêné dans cette entaille, & qu'il n'y prenne une courbure, qui causeroit de l'erreur dans la mesure des angles.

Méthode la plus exacte.

2386. La meilleure suspension pour le fil d'un secteur est celle où le fil ne touche point au centre, mais où le centre tourne, sans cesser de répondre au fil; c'est ainsi que M. Bird l'a pratiquée dans un très-beau secteur que j'ai vu à Londres en 1763, destiné pour les observations qui devoient régler les limites du Maryland & de la Pensilvanie; dans ce secteur de M. Bird, la pièce

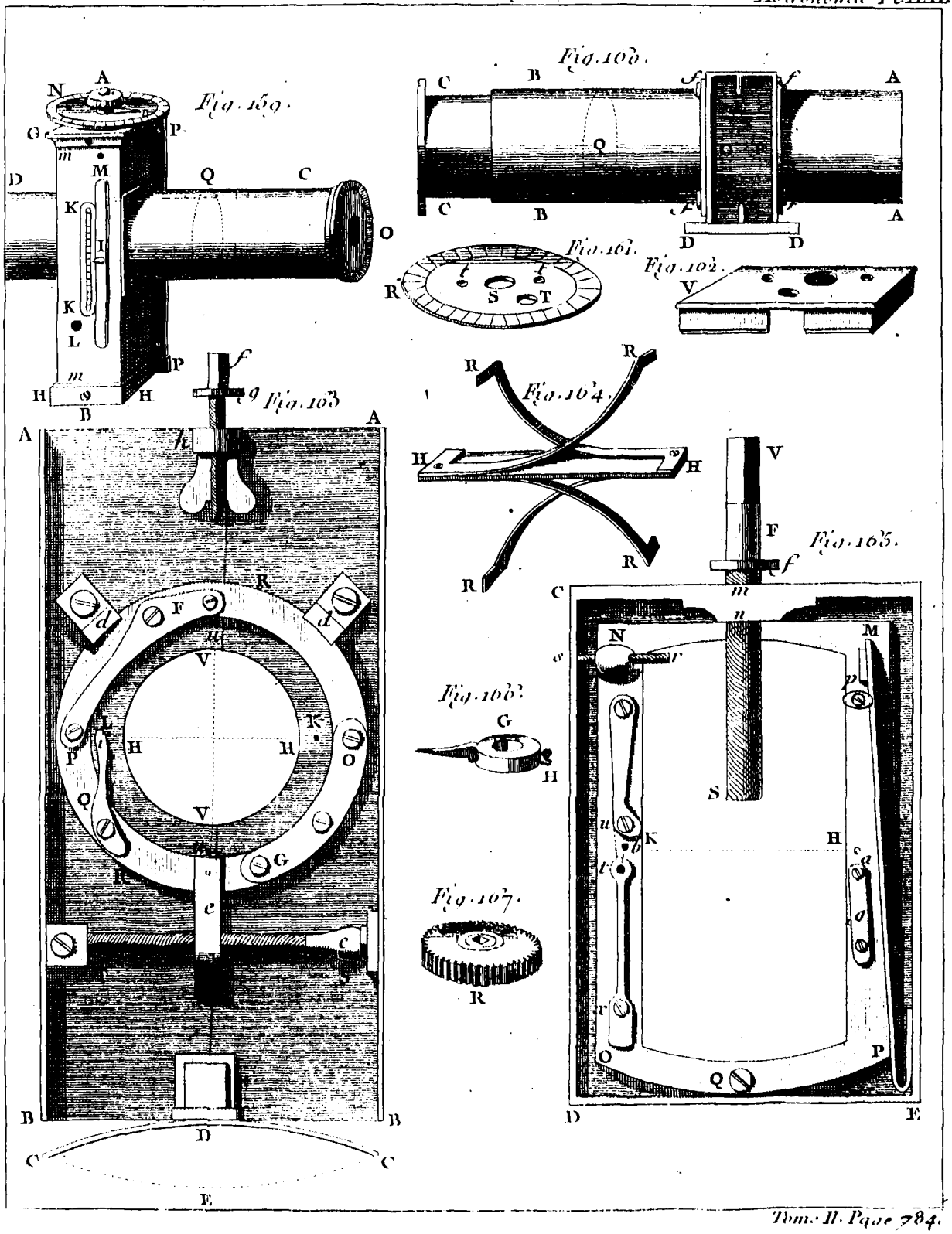


Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.

pièce de ſuſpenſion *S* (*fig.* 170) reſtant immobile, le limbe & le corps entier du ſecteur tournent ſur un axe qui forme le centre; on voit en *A*, l'un des pivots de cet axe; au centre de ce pivot eſt un point qui eſt le centre même de la diviſion du limbe du ſecteur; ce pivot tourne ſur des couſſinets *BB*, à peu-près comme une lunette méridienne (2389); le fil à-plomb *SP* eſt ſuſpendu en *S*, où il eſt ſerré ſous une vis de preſſion, & il paſſe ſur le centre *A*, dont il eſt extrêmement proche, ſans le toucher; l'inſtrument tourne ſur ſon pivot, ſans que le centre *A* ceſſe de répondre au fil à-plomb, & l'on a ſoin d'examiner avec un microſcope, à chaque obſervation, ſi le fil répond exactement au centre. La pièce de cuivre qui porte le fil en *S*, eſt mobile dans une couliſſe, au moyen d'une vis *V* qui ſert à conduire le fil vis-à-vis du centre *A*, ſi l'on apperçoit qu'il n'y réponde pas exactement.

La vérification d'un ſecteur ſe fait comme celle du quart-de-cercle (2556), les uſages en ſeront expliqués, art. 2596 & ſuiv., & les avantages que l'on en a retirés, art. 2652 & 2792.

DESCRIPTION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE.

2387. La néceſſité où ſont les aſtronomes d'obſerver ſans ceſſe les différences d'aſcenſion droite entre les planètes & les étoiles, leur a fait chercher un inſtrument qui pût être placé bien exactement dans le méridien; le quart-de-cercle mural (2328), quelque ſoin qu'on prenne à le dreſſer exactement, ne ſauroit avoir un plan aſſez régulier & aſſez parfait, pour que la lunette décrive le méridien à 2″ près, depuis le zénit juſqu'à l'horizon; pour obtenir cette préciſion dans les paſſages au méridien, il faut recourir à une lunette montée ſur un axe qui ſoit tourné avec grand ſoin; c'eſt ce que nous appellons Lunette méridienne, ou inſtrument des paſſages.

M. Romer en fut le premier Auteur.

2388. Le premier dont on ait parlé, ce me semble, est celui de M. Romer, (Horrebow, *Basis astronomiæ*, 1735, *pag.* 49). Romer s'étoit fait en 1689, à son retour en Dannemarck, un observatoire, dans lequel il avoit placé plusieurs instrumens, & entr'autres, une lunette fixée à angles droits sur un axe de 5 pieds de long & d'un pouce de diamètre; il y avoit un arc pour indiquer les hauteurs, & un poids qui soutenoit le milieu de l'axe pour empêcher la flexion (2396). Halley fit faire dans la suite un pareil instrument, que l'on conserve encore dans un petit cabinet qui donne sur la terrasse de l'observatoire royal de Gréenwich; mais Graham, vers l'an 1735, en ayant fait construire de plus parfaits, M. le Monnier en donna la description dans son histoire céleste en 1741. Celui que je vais décrire, & dont je me sers habituellement, avoit été construit en 1760, pour M. de la Caille, qui s'en est servi pendant deux ans. Il y en a un à l'observatoire de Gréenwich, qui est beaucoup plus considérable, mais celui que je vais décrire est d'une exactitude suffisante.

Dimensions de l'instrument. *Planc.XXIII. Fig.* 174.

2389. L'axe *AB* (*fig.* 174), a 2 pieds & demi de long, la lunette *CD* a 4 pieds de long sur 18 lignes de diamètre. Les deux pivots *A* & *B*, sur lesquels tourne l'axe, sont deux cylindres de 9 lignes de diamètre sur autant de longueur; ils sont formés d'une composition de cuivre & d'étain, plus dure que les métaux naturels, & moins sujette à être rongée par le frottement & par la rouille; l'axe est formé de deux cones de cuivre *AE*; *FB*, qui ont chacun 13 pouces de longueur, & dont le diamètre décroît depuis 28 lignes jusqu'à 11 lignes, c'est-à-dire, que près des pivots l'axe n'a que 11 lignes de diamètre. Ces deux cones sont assemblés à vis & soudés dans un noyau ou forte pièce de cuivre *G*, qui a deux pouces & demi de large & trois pouces de long, cette pièce est percée pour laisser passer la lunette au travers.

2390. Le dé ou la masse *G* de forme à peu-près cubique, sert de noyau à toute la machine; non-seulement elle assemble les deux cones *AE*, *BF* qui compo-

ſent l'axe, elle tient encore les deux porte-lunettes ou les deux canons *S*, *T*, de 15 à 16 pouces, dont chacun a une baſe carrée, fixée par 4 vis ſur le dé; ces canons ſont fendus de deux côtés ſur un eſpace de 8 pouces, pour laiſſer paſſer plus aiſément le tuyau de la lunette; mais lorſque le tuyau eſt entré, on reſſerre l'extrémité de chacun des porte-lunettes avec un braſſelet ou collier de cuivre, qui ſe ſerre par des vis en *K* & en *H*. Ces porte-lunettes ſervent à empêcher que la lunette ne vacille dans le dé, & qu'elle ne ſe courbe ſur ſa longueur. *Fig.* 174.

2391. Si la lunette n'étoit pas bien en équilibre ſur le milieu de ſon axe, enſorte qu'elle fût plus peſante par une extrémité que par l'autre, on deſſerreroit les vis des porte-lunettes, & on repouſſeroit le tuyau vers le côté trop léger: de même, ſi le fil vertical de la lunette ſe trouvoit un peu oblique à la verticale, on ſeroit obligé de deſſerrer les vis & de tourner un peu le tuyau, juſqu'à ce que le fil fût exactement vertical.

On place dans cette lunette, au foyer des deux verres, un réticule compoſé de deux fils qui ſe croiſent à angles droits, ou bien un réticule de 45° (2350), ou enfin un réticule rhomboïde (2353); celui-ci eſt le plus commode en pluſieurs occaſions.

Pour diriger la lunette méridienne à la hauteur donnée où l'on veut obſerver un aſtre, on a fixé un demi-cercle *AN* ſur l'un des ſupports; ce demi-cercle a 8 pouces & demi de diamètre, & il eſt diviſé en degrés; l'alidade *O* fixée ſur l'axe *MQ*, ſe termine par un vernier qui ſous-diviſe le degré en douze parties, & nous fait diſtinguer cinq minutes; cette alidade eſt ſerrée ſur l'axe par une vis de preſſion, que l'on peut lâcher, ſi l'on eſt obligé de mettre cette alidade plus exactement ſur la diviſion.

2392. Les couſſinets ou ſupports, dans leſquels tourne l'axe de la lunette, ſont quelquefois compoſés de deux plans, quelquefois circulaires, ainſi que les pivots; ils ſont faits d'une compoſition d'étain & d'an- Supports de l'axe.

Fig. 174. timoine, plus douce que celle des pivots; on y met une goutte d'huile, ou un peu de suif, pour adoucir le frottement.

On observe de donner à l'un des supports *B* un petit mouvement du haut en bas, dans une coulisse, au moyen d'une vis *V* qui peut élever & abaisser la pièce où porte le pivot de l'axe, afin de placer cet axe dans une situation parfaitement horizontale, & de l'y ramener lorsqu'il a pu s'en écarter par le mouvement des bois ou des murs qui portent l'instrument.

Mouvement vertical. *Fig.* 172. On voit séparément dans la *fig.* 172, le mouvement vertical du coussinet; la vis *VR* passe dans un écrou *T* qui est fixé au support; elle passe dans un collet *X* qui est percé cylindriquement de la grosseur de la vis; sous le collet *X* il y a une base fixée à la vis, & qui oblige le collet *X* de monter avec la vis. Pour obliger le collet *X* de descendre aussi avec la vis, il y a un canon de cuivre chaussé carrément sur la tige de la vis, dont la base s'appuie sur *X*, & qui est arrêté en *V* au-dessus de la tige par une vis de pression qui entre dans la tige.

Le collet *X* est fixé sur une pièce de cuivre qui glisse de haut en bas, dans la grande pièce du support où elle est logée, le long d'une rainure en queue d'aronde; c'est-à-dire, dont les deux faces sont entaillées en sens contraire; cette pièce de cuivre porte le coussinet de métal qui est engagé fixement dans une autre rainure faite dans cette pièce de cuivre qui porte le collet *X* du support.

Mouvement horizontal. *Fig.* 173. 2393. Il faut aussi qu'un des supports ait la facilité de se mouvoir horizontalement d'une petite quantité, en avant ou en arrière, comme on le voit dans la *fig.* 173, où l'on voit la base d'un des pivots placée horizontalement. La vis horizontale *A* est destinée à ramener la lunette dans le plan du méridien; car elle s'en écarte souvent par l'action de la chaleur sur les pièces de maçonnerie ou de charpente qui portent la machine (2609): mais pour ne pas nuire à l'immobilité que doivent avoir les supports, on a recours à la pratique suivante : on

compose la base du support de deux plaques, dont l'une peut glisser horizontalement sur l'autre; la plaque horizontale mobile *F*, dont le plan est *FG*, est arrêtée sur l'autre par quatre vis qui passent dans des trous ovales, ensorte qu'elle ait la liberté d'avancer ou de reculer d'une ligne, lorsqu'on lâche les 4 vis de chaque côté, mais en même temps qu'elle puisse être assujétie & fixée, en resserrant les vis qui la tiennent sur la plaque immobile *BCDE*; celle-ci est scellée en plomb, ou arrêtée fixement dans la base de pierre ou de fer qui porte tout l'intrument; un ressort placé en *F* repousse sans cesse la platine *FG*, pour l'appliquer contre la tête de la vis *AG*, qui sert à la repousser en arrière lorsque cela est nécessaire: à la place du ressort *F* on peut mettre en *F* une vis opposée à la vis *A*, & qui pousse dans une direction contraire; alors on est obligé de faire jouer à la fois les deux vis *G* & *F*, pour rétablir l'instrument dans le méridien: il ne faut faire ce changement que dans le cas où il est devenu nécessaire par une variation de 5 à 6″ de temps; car si le changement est plus petit, il vaut mieux le calculer, & en tenir compte dans les observations (2610).

Lorsqu'on place l'instrument dans le méridien pour la première fois, il faut que les deux supports *P* & *R*, (*fig.* 174) soient assemblés par une règle de fer, qui sera fixée par des vis à l'un & à l'autre; & quand l'on aura un mouvement un peu considérable à donner au support mobile *P*, il faudra y remettre la règle de fer, pour que les deux supports marchent ensemble, & soient toujours perpendiculaires à l'axe. *Fig.* 174.

2394. Pour pouvoir fixer la lunette à une hauteur invariable pendant la durée d'une observation, on employe quelquefois une vis de pression avec un collet qui embrasse l'axe près d'un de ses supports, mais tout ce qui peut forcer l'axe étant d'une conséquence dangereuse, j'aime mieux la méthode suivante. Au-dessous de l'axe de la lunette méridienne, on place un autre axe ou rouleau qui peut n'être qu'en bois, & qui tient

ſur un chaſſis horizontal que l'on peut avancer ou reculer; on met perpendiculairement à ce rouleau une verge ou tringle de bois qui vient joindre la lunette près des oculaires où elle entre dans un carré fixé ſur la lunette; on peut la contenir dans le carré avec une vis de preſſion; où bien on fera ſeulement repoſer la lunette ſur l'extrémité de la tringle de bois; & cette tringle ſera mobile dans le rouleau de bois, & pourra s'y arrêter par une vis de preſſion.

Trappe dans le méridien.

La partie d'un obſervatoire qui répond au-deſſus de la lunette méridienne doit être ouverte dans le ſens du méridien, & l'ouverture fermée par une trappe. Afin d'ouvrir aiſément cette trappe, elle peut être ſoutenue par une tringle dont l'extrémité inférieure porte ſur un levier, fort près du point d'appui autour duquel ce levier tourne dans la muraille; ce levier *l e* étant relevé & accroché contre le mur, la tringle s'élève & tient la trappe *t* ouverte; on en aura une idée dans la Planche XXIII, au-deſſus de la lunette.

Machine pour éclairer les fils.

2395. On ajoute quelquefois à la lunette méridienne une machine pour éclairer les fils; c'eſt un collet de bois qui environne l'axe vers *Q* ou *F* ſans y toucher, & qui eſt porté par un bras de fer qui part de terre ou du mur voiſin; autour de ce collet tourne un autre cercle ou collet de bois qui porte un bras aſſez long pour atteindre l'objectif *C* de la lunette; à l'extrémité de ce bras on met une lanterne, & l'on adapte à l'extrémité de la lunette un carton ou une plaque de cuivre, blanchie, qui réfléchiſſe la lumière ſur l'objectif; le carton doit être percé d'un trou ſuffiſant pour admettre les rayons de lumière & s'incliner à volonté pour donner à l'objectif plus ou moins de lumière.

Méthode pour diminuer le frottement des pivots.

2396. Lorſqu'une lunette méridienne n'a que 4 pieds & l'axe $2\frac{1}{2}$, comme dans la deſcription précédente, le poids n'eſt pas conſidérable, il n'y a pas d'inconvénient ſenſible dans le frottement des pivots ſur leurs couſſinets. Mais dans un grand inſtrument tel que celui de l'obſervatoire de Gréenwich dont la lunette a près

de 8 pieds; le poids, le frottement & l'usure méritent une attention : on suspend l'axe en *M* & en *Q* vers le milieu des deux bras, par des crochets de bois qui portent l'axe de l'instrument; chacun de ces crochets est attaché supérieurement à l'extrémité d'un levier mobile dont l'autre extrémité est chargée d'un poids, ces deux poids ne font pas tout à fait équilibre avec l'instrument, mais quelques onces de plus suffiroient pour le tenir en l'air; par ce moyen les pivots ne portent sur leurs coussinets qu'avec une force de quelques onces, & ces parties délicates qu'il importe de conserver avec soin dans toute leur intégrité ne sont exposées presque à aucun frottement; M. Bradley qui a employé cet artifice à l'imitation de M. Romer (2388), l'a appliqué même à l'instrument de M. Halley qui se conserve à Gréenwich.

2397. Quand on veut faire servir une lunette méridienne en voyage, on place la pièce de fer où tiennent les supports sur un axe vertical; cet axe tourne en bas dans une crapaudine, & en haut dans un collet mobile, qui donne la facilité de le placer; on en trouvera la figure dans l'histoire céleste de M. le Monnier.

2398. La nécessité de rendre l'axe de la lunette méridienne exactement horizontal, exige que nous parlions ici du niveau qu'on emploie à cet usage. On peut se servir d'un fil à-plomb suspendu en *C* (*fig.* 174), à une petite tête de cuivre fixée au haut de la lunette, on fait tomber le fil vis-à-vis d'un point placé au bas de la lunette, sur une autre petite tête de cuivre en *L*. On peut aussi employer un niveau formé par un fil à-plomb avec 2 pieds qu'on place sur les pivots *A* & *B*; mais si l'on considère qu'un cheveu, qui est à peu-près la 35e. partie d'une ligne, occupe 8″ sur un rayon de 5 pieds : on verra qu'il est bien difficile de placer un axe à 3 ou 4″ près, avec le fil à-plomb. Niveau pour vérifier l'instrument. *Fig.* 174.

Le niveau à bulle d'air, représenté dans la *fig* 175 est un instrument plus commode & qui peut être plus exact; mais il est aussi très-difficile à bien faire. La Niveau à bulle d'air. *Fig.* 175.

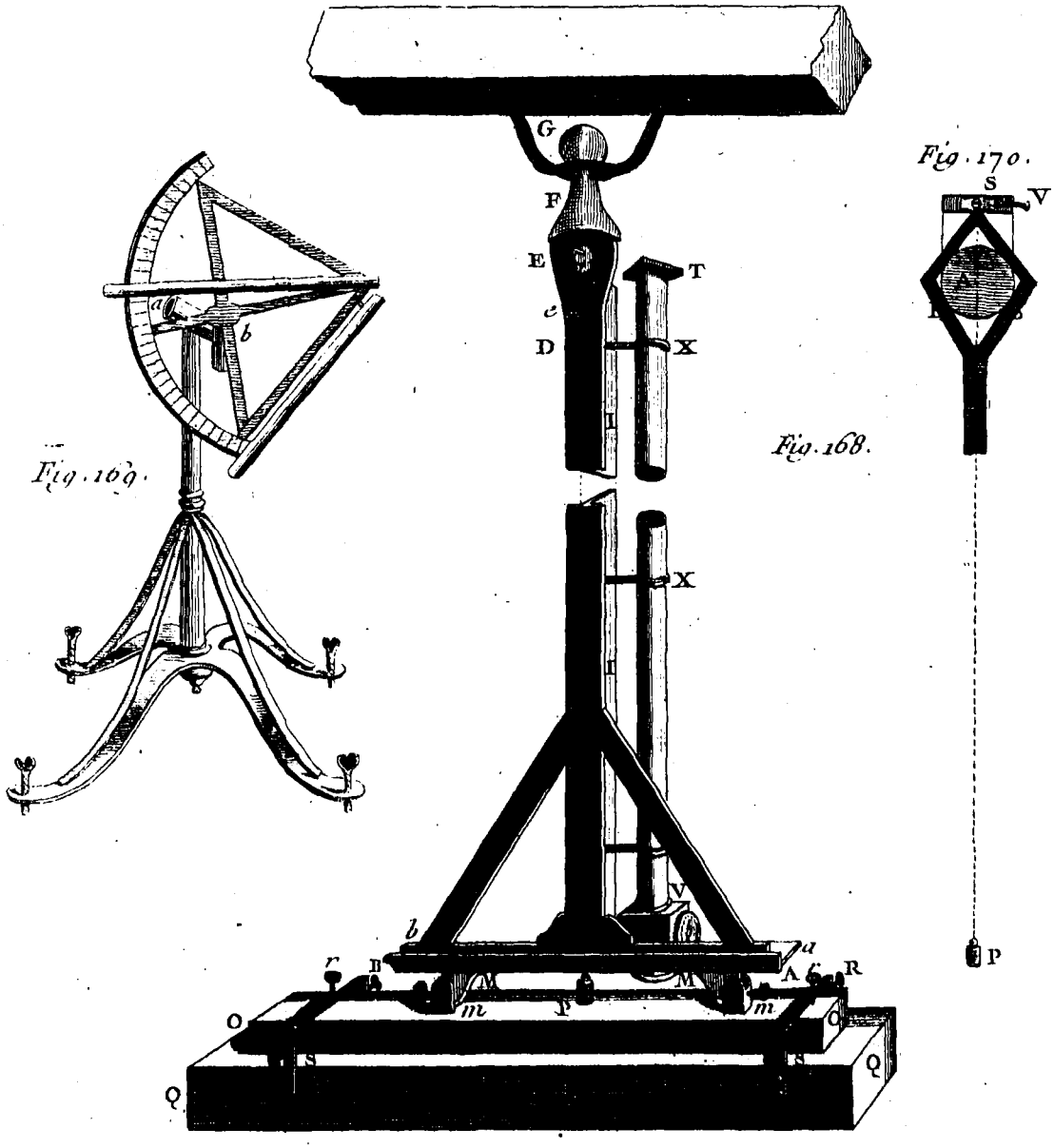
règle de bois *BA* est destinée à s'appuyer sur les pivots de l'instrument ; pour cela les pieds *B* & *A* sont garnis de cuivre, arrondis comme les tourillons de l'axe, pour s'y appuyer. Un tube de cuivre *FE*, qui renferme un tube de verre, est retenu en *D* & en *C* dans deux pièces de cuivre, dont l'une fait charnière en *D* tandis que l'autre *C* est percée pour introduire une vis qui entre dans la règle inférieure ; la tête de la vis quand on la tourne, fait baisser la partie *C* du niveau, tandis qu'un ressort placé dessous le tube tend à l'élever, & l'applique sans cesse contre la tête de la vis.

Difficultés à les bien faire.

2399. Dans les niveaux à bulle d'air, plus la bulle est longue, plus elle est sensible, & plus son mouvement est prompt. M. Chezy a observé dans un niveau fait par Langlois, que la bulle changeoit de longueur lorsqu'il faisoit plus ou moins chaud, & que sa marche devenoit différente, à cause des irrégularités intérieures du tube ; il a cherché les moyens de dresser la surface intérieure du tube ; il y a réussi avec un cylindre de verre, dressé & arrondi dans un demi-cylindre de cuivre ; il fait tourner ce cylindre de verre dans le tube qui doit servir de niveau, avec de l'émeril très-fin qui ait emploié une minute à descendre dans l'eau, de trois pouces de hauteur. M. Chezy emploie de l'émeril de plus en plus fin, & quand le tube est adouci il colle du papier sur le cylindre de verre, & avec du tripoli il achève de polir l'intérieur du tube. Par ce moyen il est parvenu à faire un niveau d'un pied, dont la bulle d'air a 9 pouces & un tiers, & parcourt uniformément une ligne pour chaque seconde d'inclinaison, il l'auroit fait encore plus sensible s'il eût voulu ; mais il a mieux aimé ne lui donner que ce degré de sensibilité. Il travaille ses tubes avec un cylindre de verre plus court que le tube ; & c'est ce qui donne une courbure longitudinale à l'intérieur du tube, parce qu'alors le tube est plus usé vers le milieu que vers les bords. (*Mém. présentés à l'acad. Tom. V, pag.* 254).

Niveau d'une extrême sensibilité.

Pour être sûr qu'un niveau est bien sensible & qu'il est


G
F
E
T
e
D
X
I
X
I
V
b
a
r
B
A
M
A
R
O
m
P
m
C
S
S
Q
Q
a
b
S
V
P
Fig. 169.
Fig. 168.
Fig. 170.

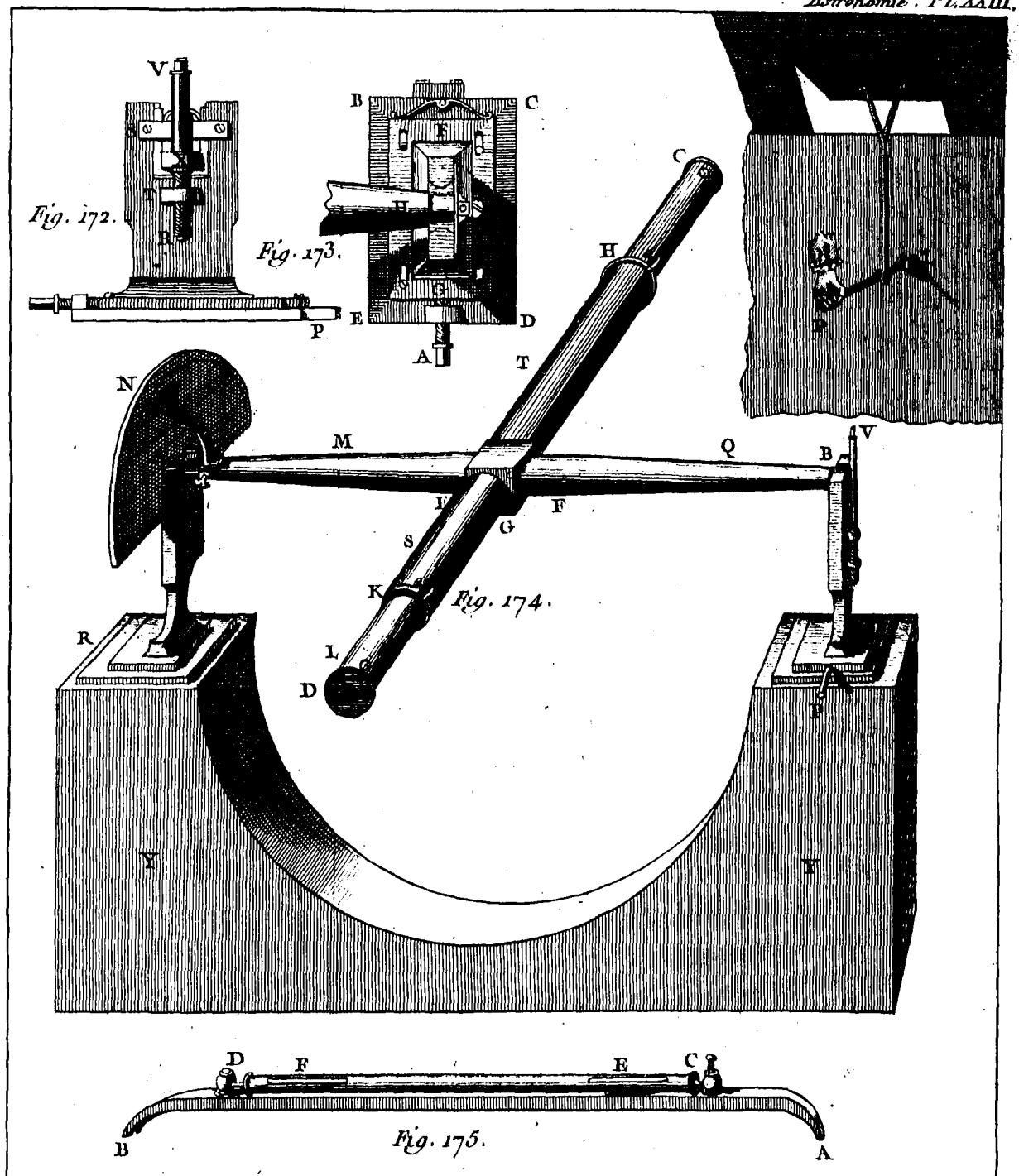


Fig. 172.

Fig. 173.

Fig. 174.

Fig. 175.

eſt bien régulier, on place le tube, auſſi-tôt qu'il eſt rempli, ſur des ſupports fixés dans une règle que l'on peut incliner par le moyen d'une vis, dont la régularité ſoit éprouvée (2360); on fait tourner la vis lentement & par degrés égaux, & l'on voit ſi la marche de la bulle eſt uniforme, ſi elle ne va point d'un mouvement accéléré & par ſoubreſauts; quand le tube eſt inégal, on le tourne ſur différens points de ſa ſurface, & l'on choiſit le côté le plus régulier : c'eſt tout ce qu'on peut faire de mieux lorſqu'on eſt forcé d'employer de mauvais tubes.

Il importe, que l'éther qu'on emploie dans les niveaux, ſoit très-bien rectifié, ſans cela il eſt ſujet à deux inconvéniens, que j'ai remarqués de même que M. Chezy : premiérement, quand on agite le tube, l'éther ſe diviſe en pluſieurs bulles qui ne ſe réuniſſent enſuite que difficilement : ſecondement, l'éther ſe décompoſe avec le temps, & produit de très-petites gouttes d'une ſubſtance huileuſe qui s'attachent au tube, & arrêtent la marche de la bulle : ces inconvéniens me feroient choiſir l'eſprit-de-vin par préférence à l'éther. Voyez l'uſage & les vérifications du niveau (2615).

DESCRIPTION DE LA LUNETTE PARALLATIQUE.

2400. La Lunette parallatique, appellée auſſi *Machine parallatique*, eſt deſtinée à ſuivre le parallèle d'un aſtre, ou ſon mouvement diurne d'orient en occident, en décrivant le même *parallèle*; lorſque l'aſtre eſt placé une fois ſur le fil de la lunette, il le décrit ſans s'en écarter, & à quelque heure du jour qu'on dirige la lunette vers l'aſtre, on voit toujours celui-ci parcourir le fil de la lunette. Pour remplir cet objet, il ne s'agit que de placer la lunette ſur un axe qui ſoit parallèle à l'axe du monde, & qui tourne ſur lui-même dans le ſens & dans la poſition du globe de la terre; lorſque cet axe tourne, il emporte avec lui la lunette,

Ancienneté de cette machine.

& par ce moyen il accompagne l'astre dans son mouvement qui se fait autour du même axe. La plus ancienne que je connoisse, est celle que décrivoit en 1626 le Pere Scheiner (*Rosa Ursina*, *pag.* 347); il l'appelle *Instrumentum Telioscopicum*, & en attribue l'invention au Pere Gruenberger; elle fut d'un très-grand usage pour observer les taches du soleil; M. Cassini le pere s'en servit beaucoup; M. Cassini le fils la perfectionna, & en donna la description dans les *Mémoires de* 1721, *pag.* 18.

Cet instrument s'appelle *parallatique*, parce qu'il est destiné à suivre le parallèle d'un astre, & non point parallactique, car ce dernier nom est consacré à l'instrument dont se servit Ptolomée pour observer les parallaxes (2275). Je vais décrire une lunette parallatique, de la grandeur & de la forme la plus usitée aujourd'hui parmi les astronomes de Paris, avec tous les détails nécessaires pour qu'on puisse l'exécuter ailleurs; mais on peut bien en faire de plus grandes, & il n'y a point de Charpentier qui ne fît une machine parallatique de 6 pieds de haut, dont on se serviroit avec avantage pour porter une lunette de dix pieds avec son micromètre.

Fig. 176.

2401. Le pied est formé de 3 pièces de bois; d'abord un montant *AB* placé verticalement, d'environ 2 pieds de haut, 2 pouces & demi de largeur & 18 lignes d'épaisseur, est assemblé d'équerre avec une traverse *DE*, de 22 pouces de long sur 2 pouces & demi de largeur & 15 lignes d'épaisseur; cet assemblage est maintenu par deux arcs-boutans *FE*, *FD*, de 15 à 16 pouces de long sur 15 lignes d'écarrissage.

Une autre pièce *BK*, est encore assemblée d'équerre à tenon & à mortaise, dans la traverse *DE*, & maintenue par un autre arc-boutant qui va de *G* en *H*, mais qui est masqué dans la figure par la pièce *FE*; la partie *BKN* a 20 pouces de long sur 10 lignes d'écarrissage. Cet assemblage composé des trois pièces *AB*, *BK*, *DE*, avec leurs arcs-boutans, forme le pied de la machine;

la règle *BKN* est destinée à être mise le long d'une ligne méridienne. *Fig.* 176.

L'axe *CYS* est la partie essentielle de l'instrument ; il fait avec la base *BKN* un angle égal à la hauteur du pole ; l'extrémité supérieure *A* de la règle verticale *BA* porte un coussinet en forme de demi-cylindre concave, de cuivre, incliné dans la direction de l'axe, pour recevoir le collet *Y* qui est logé dans la concavité de ce coussinet ; le collet *Y* de l'axe est recouvert d'un autre demi-cylindre de cuivre qui l'embrasse exactement ; celui-ci porte deux oreilles que l'on fixe par 4 vis sur les oreilles du coussinet inférieur ; ces deux gouttières ou demi-cylindres de cuivre forment un collet de deux ou trois pouces de long, dans lequel l'axe tourne à frottement. Il importe que cette partie soit bien faite, que le frottement soit doux, que les pièces ne grippent point & que la lunette ne fasse point de soubresauts, comme cela arriveroit si tout étoit en bois ; il faut que le frottement soit assez fort pour que la lunette reste en place sans tourner autour de l'axe, ou par son poids ou par les petits coups de vent. A l'autre extrémité de l'axe il y a une crapaudine *C* ou concavité hémisphérique pour recevoir le pivot de l'axe, qui se termine ordinairement par une tétine, ou espèce de petite boule, de matière dure, qui tourne facilement.

2402. Au-delà du collet *Y*, par lequel l'axe repose sur le montant *BA*, ce même axe porte deux renforts ou platines de cuivre, qui font comme une mâchoire, de 3 pouces de long, pour recevoir & serrer le demi-cercle *VZ* qui doit servir de charnière, en même temps qu'il représentera le cercle horaire. Le centre *S* du demi-cercle *VZ* est traversé par un axe ou petit cylindre de cuivre, portant une rosette qui en fait la tête ou la base, & dont l'autre extrémité se termine en vis ; on serre cette vis par un écrou, en mettant une platine entre deux, pour fixer le demi-cercle, & l'arrêter entre les deux plaques ou mâchoires qui terminent l'axe *CS* de la machine ; à mesure qu'on serre cette vis les deux Cercle de déclinaison.

plaques de la mâchoire sont poussées en sens contraire entre les deux rosettes, & contre le plan du demi-cercle, ce qui sert à le fixer plus ou moins fortement suivant le besoin. On peut aussi rendre le cylindre du centre plus court que l'épaisseur des mâchoires, en lui laissant un quart de ligne de tirage; alors on introduit une vis dans son extrémité, la tête de la vis sert de rosette, & presse le centre contre la mâchoire. Pour que la rosette ne se dévisse pas, on ajuste un pied ou une goupille contre la tête de l'axe *S*, pour entrer dans la mâchoire. Le diamètre *VT* du demi-cercle entre dans une coulisse de cuivre, où il est pris par deux vis *T* & *V*, & cette coulisse forme par-dessus une gouttière de cuivre de 8 pouces, qui est fixée par 4 vis sur la gouttière de bois *LI*, qui doit recevoir la lunette; cette gouttière est taillée en-dedans en forme d'angle droit, pour admettre les lunettes de différentes grosseurs, dont les tuyaux sont carrés.

On divise en degrés le demi-cercle *TZV* qui n'a que deux pouces un quart de rayon; mais on place vis-à-vis de sa division un arc *Z* qui forme un vernier; il embrasse 11° du demi-cercle & il est divisé en 12 parties (2344), de sorte qu'on apperçoit aisément les minutes de cinq en cinq; le demi-cercle *TZV* est évidé ou creusé circulairement en forme de rainure à jour, comme on le voit en *Z*, pour avoir la liberté de tourner, malgré la vis de pression, qui traverse son plan pour l'arrêter entre les pièces de la mâchoire.

Cercle équatorial.

2403. L'extrémité inférieure de l'axe *YC*, avant que d'être reçue dans la règle *BK*, traverse par le centre un cercle *OC*, de trois pouces de rayon, destiné à représenter l'équateur, & à marquer l'ascension droite de l'étoile qu'on observe. Ce cercle équinoxial est de cuivre, son plan est perpendiculaire à l'axe; il est soutenu en *K* sur les deux côtés de la règle *BK*, par deux supports de cuivre coudés, qui tiennent avec des vis sur la règle *BK*, & sur lesquels le cercle est arrêté par six vis; ces supports ont deux empattemens chacun, pour

se visser sur la règle *NB*, & trois empattemens pour s'appliquer contre le plan de l'équateur, & le contenir exactement.

On divise ce petit cercle équinoxial en degrés; mais on y marque les heures à la place des degrés, c'est-à-dire qu'on met 0^h à la partie supérieure du cercle; on met 1 heure à 15° de-là, tant à droite qu'à gauche, 2^h à 30°, &c. ainsi le temps y est marqué de 4 en 4 minutes; mais au moyen d'un vernier qui est sur l'alidade *CO*, on y apperçoit aisément un tiers de minute, c'est-à-dire, 20″ de temps. Pour cet effet, on prend sur l'alidade une portion de cercle, qui embrasse 11 divisions de l'équateur, & l'on divise cet arc en douze parties; cela forme un vernier (2344) qui marque les 20″.

Quand la lunette parallatique est dirigée dans le méridien, l'index de l'alidade *O* répond à la partie supérieure du cercle inférieur qui représente l'équateur, & marque zéro pour l'angle horaire, ou pour la distance au méridien, parce qu'il marque le point ou l'équateur représenté par le cercle *C* est coupé par le méridien du lieu; mais si l'on fait faire un quart-de-tour à l'axe *CY*, & par conséquent à la lunette, l'index *O* marquera 6 heures sur le même cercle; il en est ainsi des autres angles horaires. Ce cercle équatorial est fort commode pour trouver les astres dans le crépuscule, & même pendant le jour (2622). Mesure des angles horaires.

2404. Sur la règle *DE*, l'on ajoute aussi deux pièces de bois *EN*, *DN*, en retour d'équerre, de cinq pouces de long, qui servent à empêcher le déversement de la machine. Ces deux alonges sont traversées par des vis *N*, *N*, qui sont nécessaires pour *caler* la machine, c'est-à-dire, pour remettre la règle *AB* dans une position exactement verticale; on est obligé d'appliquer aussi pour le même effet une troisième vis à caler, à l'extrémité méridionale de la règle *BKN*, pour redresser la machine du nord au sud, quand l'axe est trop ou trop peu incliné, & ne se dirige pas à la hauteur du pole; les deux autres vis ne servent qu'à Vis à caler.

redresser l'axe d'orient en occident, pour qu'il soit exactement dans le plan du méridien. Ces vis doivent se terminer en pointes, ou porter sur des coquilles, pour que la machine ne charie pas quand on les tourne.

Niveaux à bulle d'air.

2405. On ajoute quelquefois deux niveaux à bulle d'air *P*, *Q* (2398); le premier sert à reconnoître si la règle qui doit être verticale *AB*, n'incline point vers l'orient, ou vers l'occident. Le niveau *Q* sert à reconnoître & à corriger l'inclinaison qu'elle pourroit avoir du nord au sud; mais on y supplée facilement avec un niveau ordinaire en forme d'équerre, qui porte un fil à-plomb, & qu'on présente sur les deux règles *DE* & *BK*, lorsqu'on veut disposer une lunette parallatique; on suppose que ces règles sont bien d'équerre avec la pièce verticale *AB*.

Placer la machine sous d'autres latitudes.

2406. La règle *BK* étant placée sur une méridienne, & *AB* étant exactement verticale; si l'angle *ACB* est parfaitement égal à la hauteur du pole; par exemple, de 48° 50′ pour Paris, l'axe *CY* se trouve dirigé vers le pole du monde, & représente l'axe de la terre. Delà il suit que si l'on transportoit cette machine à 25 lieues de Paris, du côté du nord, il faudroit relever d'un degré l'axe *CY*, c'est-à-dire, éloigner la règle *AB* de la verticale du côté du midi. Pour se ménager cette facilité, on adapte au bas de la règle *AB* un arc de cuivre *R*, de quelques degrés; on place en haut une petite pièce de cuivre *r*, de laquelle pend un fil à-plomb sur les divisions de l'arc *R*; ensorte que le point de suspension de ce fil soit en même temps le centre de ces divisions); lorsque ce fil à-plomb marque zéro sur l'arc *R*, la règle *AB* lui est parallèle, & se trouve être verticale; mais il marque 1 ou 2 degrés, lorsque la règle *AB* est inclinée de la même quantité: alors l'axe *AC* est disposé pour une latitude différente. Le niveau *Q* ne peut servir dans ce cas-là; mais le fil à-plomb *rR* en tient lieu.

2407. Quelquefois une vis *I*, engrène dans les dentelures du demi-cercle *TZV*, qui pour lors est taraudé,

ou ſtrié ſur ſa circonférence ; cette vis ſert à donner un petit mouvement lent à la lunette *LL* ; mais on ſe paſſe aiſement de cette vis. La règle *LX* ſert à maintenir la lunette dans la ſituation qu'elle doit avoir par rapport à l'axe ; & la vis que l'on voit au milieu de la mâchoire *S* ſur le demi-cercle *VZ*, ſert auſſi à preſſer le demi-cercle entre les deux pièces de la mâchoire *S*, pour fixer la lunette quand elle eſt miſe ſur un certain degré de déclinaiſon.

On place enſuite une lunette de 4 à 5 pieds ſur la machine que nous venons de décrire ; on aſſujettit cette lunette ſur la gouttière *L L*, avec des brides ou colliers. Le tuyau eſt de bois, ordinairement carré, terminé aux deux extrémités par des frètes de cuivre, ou boîtes carrées, qui aſſemblent & fortifient les pièces de bois, & qui portent les verres. Quand la lunette eſt perpendiculaire à l'axe *SYC*, elle décrit un cercle perpendiculaire à l'axe du monde, c'eſt-à-dire, l'équateur ; ainſi dans ce cas-là on ſuivroit un aſtre qui ſeroit dans l'équateur, avec la lunette arrêtée à angles droits ſur ſon axe *SC*. Si l'aſtre eſt plus près du pole boréal, ou qu'il ait, par exemple, 30° de déclinaiſon boréale, on incline la lunette en la faiſant tourner ſur ſon centre *S*, juſqu'à ce qu'elle ſe dirige à 60° du pole, ou qu'elle faſſe avec *SC* un angle de 60° du côté de *L* ; ainſi de quelque côté que tourne l'axe avec ſa lunette, celle-ci étant toujours à 30° de l'équateur, ou à 60° du pole, décrira néceſſairement le parallèle d'une étoile qui auroit 30° de déclinaiſon ; alors le demi-cercle marquera en *Z* 30°, de la même manière qu'il marquoit zéro dans le cas où la lunette étoit perpendiculaire à ſon axe, & qu'elle ſe dirigeoit dans l'équateur. Les vérifications & l'uſage de la lunette parallatique ſe trouveront dans le Livre ſuivant (2618). *Uſage.*

DESCRIPTION DU TELESCOPE.

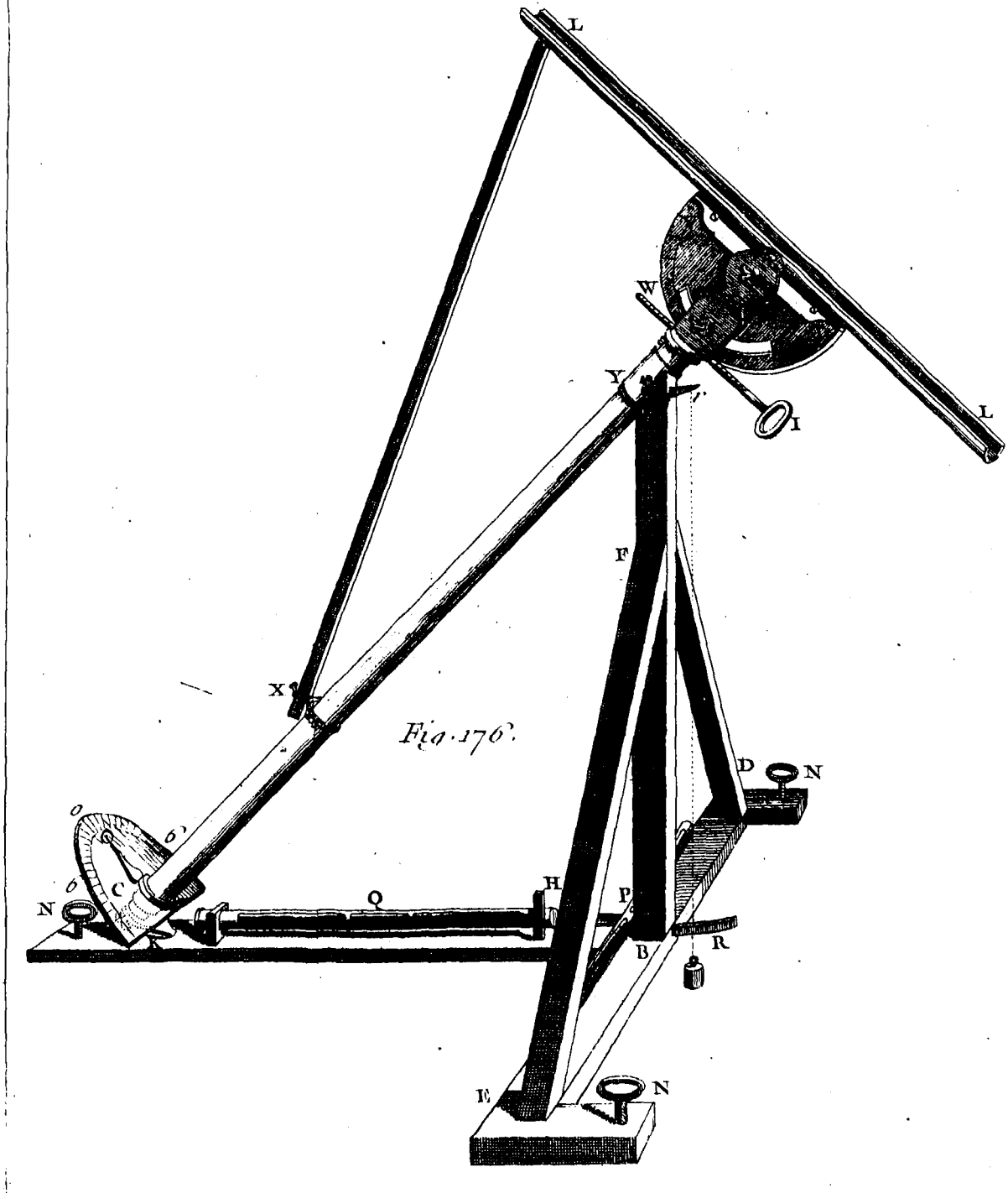
2408. Le Télescope (a) est un instrument composé de deux miroirs de métal & d'un oculaire à réfraction, disposés pour bien voir les objets éloignés. Quoiqu'en Latin le mot de *Telescopium* s'applique également aux lunettes d'approche, sa signification est bornée en François aux instrumens à réflexion, ou aux lunettes catoptriques. La première invention du télescope est de Jacques Gregori, (*Opt. promota*, *Londini*, 1663). Newton perfectionna cette invention, plusieurs années après, comme on le voit dans son optique.

Planche XXV. Fig. 177. Un miroir concave *RR*, (*fig.* 177), dont la courbure fait partie d'une sphère de 4 pieds de rayon, a son foyer *F*, éloigné de 2 pieds de la surface du miroir; les rayons parallèles *SR*, *SR*, qui arrivent d'un astre ou d'un point lumineux, sont réfléchis de *R* en *F*, & ils se réunissent au point *F*; au-delà de ce point de réunion ils vont en divergeant; on les reçoit sur un petit miroir concave *HH* de 3 pouces de foyer, dont le foyer *G* soit éloigné du foyer *F* d'une quantité qui se trouve par cette proportion: le foyer du grand miroir est à celui du petit, comme ce dernier est à l'intervalle *FG* qu'il doit y avoir entre les deux miroirs: dans notre exemple on dira, 24 pouces sont à 3, comme 3 sont à $\frac{3}{8}$ de pouce, qui est l'intervalle *FG*: dans cet état les rayons tombant en *H* sur le petit miroir, vont se réunir au point *C*, où est placé le foyer de l'oculaire *D*; en supposant qu'il n'y ait qu'un seul oculaire. Ces rayons partant du point *C*, traversent l'oculaire *D*, & arrivent à l'œil *O* parallèles entre eux; c'est ce qui est nécessaire à un œil bien constitué pour voir distinctement un point lumineux. Dans les télescopes ordinaires, il y a deux oculaires dont le premier reçoit les rayons du petit miroir avant leur réunion, & les rassemble au foyer *C* du second oculaire.

Effet du Télescope Grégorien.

(a) Τῆλε, *procul*, σκοπέω, *video*.

2409.


L
W
Y
I
L
F
X
Fig. 176.
D
N
O
C
N
Q
H
P
B
R
E
N

2409. Dans les télescopes Newtoniens le petit miroir *HH* est un miroir plan, incliné de 45° & qui réfléchit les rayons à l'œil placé sur le côté du télescope; on voit le miroir en *M* (*fig.* 183), & l'oculaire dans le tube *O L*. Télescopes Newtoniens. *Fig.* 183.

2410. La quantité dont le télescope grossit, est exprimée par le carré du foyer du grand miroir, divisé par le produit des foyers du petit miroir & de l'oculaire; ainsi dans l'exemple précédent si l'on suppose en *D* un oculaire de 2 pouces de foyer, on divisera le carré de 24 par le produit de 3 & de 2, l'on aura 96; & ce télescope grossira 96 fois le diamètre de l'objet, le fera paroître sous un angle 96 fois plus grand qu'à l'œil nud, ou de la grandeur dont on le verroit s'il étoit 96 fois plus près de nous; s'il y a deux oculaires il faut une formule plus compliquée pour calculer l'amplification. Combien grossissent les Télescopes Grégoriens.

Dans le télescope Newtonien on divise simplement le foyer du grand miroir par le foyer de l'oculaire, comme dans les lunettes ordinaires (2286), & l'on a la force amplificative.

2411. On se sert ordinairement de deux oculaires dans un télescope, pour être en état d'avoir plus d'ouverture; l'oculaire qui est du côté de l'objet, est large & d'un plus long foyer, il rassemble dans un plus petit espace les rayons venus de divers points de l'objet, tandis que ceux qui viennent d'un seul & même point de l'objet, sont rassemblés en un point au foyer d'un second oculaire plus petit, qui les transforme en autant de faisceaux de rayons parallèles entre eux qu'il y a de points dans l'objet: quand aux rayons venus de divers points, le petit oculaire fait converger ces divers faisceaux sous un plus grand angle, d'ou résulte l'amplification ou le grossissement. On choisit pour oculaire un ménisque, ou un verre concave du côté de l'œil, & convexe du côté de l'objet, parce que les rayons qui passent sur ses bords, sont moins obliques à sa surface, qu'ils ne le seroient dans une lentille biconvexe. Des deux oculaires.

Champ du Télescope.

2412. Pour connoître le champ d'un téleſcope Newtonien, ou l'étendue de l'objet qu'il embraſſe, il faut ſavoir combien la largeur du petit miroir occupe de minutes de degré par rapport au milieu du grand miroir, & l'on dira pour cet effet. La diſtance du grand miroir au petit, eſt à la largeur du petit miroir, comme le rayon eſt à la tangente de l'angle qui exprime le champ du téleſcope. Je ſuppoſé que l'ouverture des oculaires n'eſt pas moindre que la largeur du petit miroir, car cela reſtreindroit le champ, c'eſt ce qui arrive dans les téleſcopes Grégoriens, le trou du grand miroir ne pouvant être fort large, le champ du téleſcope eſt limité par les oculaires.

Téleſcope monté. Fig. 178.

2413. Le téleſcope Grégorien eſt repréſenté avec ſa monture & ſon pied dans la *fig.* 178; *ABCD* eſt un tuyau de cuivre ou de bois, *AB* la place du grand miroir, *CD* l'ouverture qui reçoit les rayons; *E* la place du petit miroir qui eſt au-dedans du tube; *EFG* la tringle qui ſert à rapprocher le petit miroir du grand pour mettre le téleſcope à l'uſage de ceux qui ont la vue baſſe; *P* le tuyau des oculaires qui entre à vis dans la baſe *AB* du grand tuyau; *O* la place de l'œil. *HH* eſt une pièce de cuivre qui eſt repréſentée ſéparément en *hh* (*fig.* 182); elle ſe termine par deux rainures dans leſquelles paſſent des vis qui la fixent ſur le tuyau du téleſcope; cette pièce porte une petite boule de cuivre *I* qui eſt ſerrée dans la concavité *KK* du genou (*fig.* 178), recouverte d'une calotte de cuivre qui eſt ſeulement percée pour laiſſer paſſer & mouvoir la tige *I*; cette calotte eſt ſerrée par trois vis dont deux paroiſſent en *K* & donnent un frottement dur à la boule qui porte le téleſcope. La tige du pied ſe termine en bas par une vis *N* que l'on ſerre en-deſſous, au moyen d'un écrou, ou que l'on viſſe dans la baſe *LL* du pied. Sur cette baſe il y a 3 pieds *LM*, *LM*, qui tournent à charnière pour pouvoir ſe rapprocher de la tige *N*, & ſe placer commodément dans une boîte. On verra dans la figure 188 une monture plus com-

posée pour le pied d'un télescope (2417).

2414. Le petit miroir du télescope est représenté séparément en *Q* (*fig.* 181), porté à l'extrémité d'une tige de cuivre, pour le faire mouvoir quand on veut ajuster le télescope pour des vues courtes, ou pour des objets plus voisins; cette tige passe dans un écrou, auquel tient une pièce de cuivre *SR* qui s'applique contre la paroi intérieure du télescope où elle glisse dans une rainure ou coulisse faite en queue d'aronde; elle reçoit son mouvement par la tringle extérieure *EFG* (*fig.* 178) au moyen d'un écrou qui sort du tuyau vers le point *E* (*fig.* 178), & que l'on voit encore mieux en *G* (*fig.* 184). Cet écrou passe au travers de la pièce *SR* *fig.* 181, & au-dedans du télescope, il se termine par un collet dans lequel on fait passer une pince *X* qui l'empêche de quitter le trou de la pièce *SR*. *Fig.* 178, 181 & 184.

Dans les télescopes qui portent un micromètre objectif (2434), on est obligé d'avoir en *E* une division de vernier (2343) pour reconnoître facilement & en tout temps la situation du petit miroir; cette division est représentée dans la figure 184, de la grandeur convenable à un télescope d'un pied. *AB* est une pièce de cuivre fixée à l'extérieur du tuyau, à l'endroit où répond le petit miroir; elle est divisée sur un espace de deux pouces, en vingtièmes de pouce; pour subdiviser ces 20es. de pouce chacune en 25 parties, on a pris 24 divisions sur *AB* qu'on a partagées en 25, comme on le voit de *C* en *D* sur une pièce de cuivre qui se meut avec le petit miroir, par le moyen de l'écrou *G* qui passe au travers du tuyau & de la plaque qui porte le petit miroir, pour l'obliger de monter & de descendre quand la tringle tourne dans son écrou. *HI* marque une rainure pratiquée dans le tube du télescope pour le mouvement de l'écrou *G*. Afin d'empêcher que cet écrou ne vacille, on le fait passer au travers d'une pièce *KL* qui recouvre la largeur de la rainure, & sur laquelle est fixé par deux vis le vernier *CD*. Dans les petits télescopes à la main, on produit le mouve- Divisions du vernier dans le télescope.

ment par une pièce en spirale qui se voit dans la figure 179.

2415. Le grand miroir du télescope est contenu dans la culasse du tuyau par un couvercle de cuivre vissé, & par une pièce de cuivre *T* (*fig.* 180), triangulaire & un peu convexe, qui fait ressort sur le miroir sans le gêner dans sa situation; quelquefois aussi l'on fixe dans l'intérieur du couvercle, 3 petits ressorts qui pressent le miroir quand on ferme le tuyau; autrefois on y mettoit des vis de pression qui passoient au travers du couvercle; mais on a reconnu que ces vis pouvoient quelquefois forcer le miroir, lui faire prendre une situation gênée, & rendre les objets confus.

Œilleton. 2416. A l'extrémité du tuyau des oculaires on place un petit œilleton, ou une pièce concave, dans laquelle se loge le globe de l'œil, percée au centre d'un très-petit trou; cet œilleton empêche que l'œil ne reçoive les rayons extérieurs, & l'oblige de se placer toujours sur l'axe du télescope où la vision est plus distincte: on voit en *OL* (*fig.* 183) le tube des oculaires sur un télescope Newtonien avec son œilleton; on y voit aussi la vis *V* qui fait mouvoir le petit miroir *M* (2414).

Télescope Newtonien. *Fig.* 183.

Autre pied plus composé pour les grands Télescope.

2417. Dans les télescopes de 3 à 4 pieds l'on pratique souvent une autre espèce de pied ou de support destiné à leur donner des mouvemens doux & réglés par le moyen des vis de rappel; on en voit le dessein dans la *fig.* 188. *RR* est un demi-cercle de cuivre fixé sur le tuyau du télescope par 4 bras perpendiculaires au plan du demi-cercle, qui reçoivent chacun une vis pour les fixer contre le tuyau; ce demi-cercle tourne sur un axe *X*, & il est reçu dans l'épaisseur d'un mâchoire double *XZ* qui forme une charnière, après quoi elle se termine par une tige qui descend jusques dans celle du pied, c'est-à-dire, de *X* en *Y*; la base *ef* est d'une seule pièce avec la tige *XZ*. Le demi-cercle *RR* est garni sur l'épaisseur de sa circonférence de filets égaux à ceux de la vis *V*, qui engrene dans cette circonférence & l'oblige à tourner lentement, ce qui fait

Pl. XXVII. Fig. 188.

mouvoir verticalement le télescope, pour suivre les astres qui montent ou qui descendent. *Fig.* 188.

2418. Outre le mouvement lent que cette vis *V* procure au demi-cercle *RR* & par conséquent au télescope, on est maître de donner un mouvement prompt au télescope en faisant désengrener la vis *V*; pour cela on desserre la vis *a*, on l'élève au-dessus de son point d'appui *e*; cette vis demeurant ainsi sans action, le chassis *c b d* qui porte l'autre vis *V* n'est plus pressé contre le demi-cercle; & parce que le même chassis n'est plus soutenu alors que par une charnière portée par la base *ef*, & dans laquelle il tourne à frottement dur, on l'abaisse facilement avec la main; la vis *V* se trouve ainsi totalement désengrenée, & le télescope en état de tourner à la main aussi promptement que l'on veut. Mouvement lent ou prompt.

2419. Pour pouvoir donner au télescope un mouvement horizontal, on se sert d'un autre canon qui entre dans le pied *Y* du télescope & qui porte une base *ghk*: ce canon intérieur reçoit la tige *XZ* dont nous avons parlé, & il est reçu lui-même dans le pied de l'instrument, où on l'arrête par le moyen d'une vis de pression *m*. L'extrémité de la base *k h g* porte un écrou cylindrique *g* mobile autour d'un axe; au travers de l'écrou passe une vis de rappel *g f* fixée en *f* dans un petit cylindre qui tourne sur la pièce *e f* à cause des différentes inclinaisons de la vis *g f*. Cette vis de rappel en tournant dans l'écrou *g* oblige l'extrémité *f* de la pièce *ef*, de se rapprocher du point *g* en tournant dans le canon intérieur de la pièce *g h k*, & celle-ci est arrêtée & immobile dans le pied *Y* du télescope par la vis *m*, lorsqu'on veut donner le mouvement lent par le moyen de la vis *gf*. Si l'on veut donner un mouvement prompt à tout le télescope horizontalement, on lâche la vis de pression *m*, alors le canon de la pièce *g h k* tourne librement dans le pied *Y*, & emporte avec lui le pivot ou la tige *XZ* liée à ce canon par la vis *fg*, & par conséquent obligée d'en suivre les mouvemens. Mouvement horizontal.

2420. Le sieur Navarre a exécuté des télescopes où l'on peut donner le mouvement prompt par un simple cercle qui est à frottement dur, & le mouvement lent par le moyen d'une vis, mais cela n'est guère pratiquable dans de grands télescopes.

Dimensions d'un Télescope de 2 pieds de foyer.

2421. Les télescopes de 32 pouces de longueur qui sont ceux dont on fait le plus d'usage, ont le foyer du grand miroir de deux pieds, le diamètre 5 pouces; le foyer du petit miroir concave 3 pouces, ou 1 pouce $\frac{1}{2}$, suivant que l'on veut faire grossir plus ou moins; le diamètre du petit miroir, qui est égal au diamètre du trou fait dans le grand miroir, a ordinairement un pouce; le tuyau des oculaires en renferme deux, l'un de 4 pouces & l'autre de 2 pouces de foyer, placés à 3 pouces l'un de l'autre; mais quand on veut grossir davantage les objets on a un plus fort équipage ou un tuyau de rechange, dont les deux oculaires sont de 3 pouces, & de 14 lignes de foyer, placés à 2 pouces l'un de l'autre; l'œil se place environ à 6 lignes du dernier oculaire.

Equipages plus ou moins forts.

2422. On verra dans la table ci jointe les ouvertures que le célèbre Short donnoit en 1763 à ses télescopes, depuis qu'il étoit parvenu à leur donner une forme assez approchante de la parabole, pour que les aberrations fussent insensibles malgré ces grandes ouvertures; ces dimensions sont en pouces & en centièmes de pouces, mesure d'Angleterre (a); la troisième colonne de cette table fait voir quel foyer Short avoit coutume de donner aux petits miroirs de ses télescopes Grégoriens. Le télescope de 144 pouces, ou 12 pieds de

Dimensions de Short.

Foyer du Miroir.	Ouverture du grand Miroir.	Foyer du petit Miroir.
pouces.	*pouces.*	*pouces.*
12	3, 30	1 & 2
24	5, 57	2 & $4\frac{1}{2}$
36	7, 70	$2\frac{1}{2}$ & 6
48	9, 50	3 & 7
144	21, 50	$4\frac{1}{2}$ & 12

Télescope de 12 pieds.

(a) Le pied d'Angleterre est à celui de France à peu-près comme 15 est à 16, plus exactement comme 4000 est à 4263. (*Phil. transf.* 1768, *pag.* 326).

foyer, n'a jamais été exécuté qu'une fois; ce télescope le plus grand & le meilleur qui ait jamais été fait, étoit en 1763 à Londres à l'hôtel de Malboroug, mais il étoit démonté, & personne n'en faisoit usage. Depuis la mort de ce célèbre artiste, la construction des télescope est un peu négligée.

2423. Un télescope Grégorien peut se mettre sous la forme Newtonnienne (2409), en y substituant un petit miroir plan, & faisant au tuyau une ouverture latérale; alors on voit les objets plus clairs, parce qu'on diminue la dispersion des rayons qui se fait sur le petit miroir; mais le télescope grossit moins (2410).

2424. La force du petit miroir & des oculaires d'un télescope consiste à grossir les objets, mais la partie essentielle du télescope consiste dans la quantité de rayons que reçoit le grand miroir, ainsi c'est l'ouverture du télescope qui décide principalement de sa force & de sa perfection, d'où il suit que plus on augmentera les ouvertures, plus on perfectionnera le télescope (2431). Il est inutile de faire grossir beaucoup un télescope; celui de 7 à 8 pieds qui pourroit grossir mille fois en y mettant un petit miroir & des oculaires d'un court foyer, fait mieux, donne plus de distinction & de clarté quand on se contente de le faire grossir 100 fois. Il est inutile de faire grossir un télescope.

2425. Quelquefois on emploie un petit miroir convexe au lieu du miroir concave *HH* (*fig.* 177), & c'est ce qu'on appelle télescope de *Cassegrain*; on met le petit miroir *HH* plus près de l'œil que n'est le foyer *F* du grand miroir; les rayons réfléchis *RF* atteignent le petit miroir avant leur réunion; ils sont réfléchis & deviennent convergens; on les arrête avant leur réunion par le grand oculaire placé en *D*; les rayons qui arrivent à cet oculaire en convergeant se réunissent (avant que d'être à son foyer) en un point *E*, où l'on place le foyer du petit ménisque ou du dernier oculaire, ensorte que les rayons en sortent parallèles pour arriver à l'œil. Télescope de Cassegrain. *Fig.* 177.

Les télescopes dont le petit miroir est convexe ont Force de cette espèce de télescope.

Fig. 177. l'avantage sur les télescopes Grégoriens d'être plus courts du double du foyer du petit miroir; dans un télescope de 3 pieds de foyer, dont l'ouverture est de 6 pouces $\frac{1}{2}$, la convexité du petit miroir peut être de $3^{p}\frac{1}{4}$ de rayon, & il grossira 173 fois (Smith *tom. II*, *pag.* 151, édit. du P. Pézenas): dans un télescope Grégorien de même foyer, le petit miroir auroit $3\frac{1}{2}$ de foyer, & le télescope grossiroit 165 fois: un télescope de 15 $\frac{1}{2}$ pouces de foyer dont le petit miroir est convexe, grossit 92 fois, & un télescope de 5 pieds, environ 243 fois.

2426. Pour juger de la bonté d'un télescope on y met un oculaire d'un très-court foyer, c'est-à-dire, on le force, autant qu'il est possible, pourvu qu'on voie distinctement la lune, Saturne & Jupiter, & qu'on leur trouve assez de lumière lorsque l'air est pur & tranquille; on cherche alors par expérience (2427) combien le télescope amplifie ou grossit les objets; & l'on voit par-là s'il approche beaucoup de la perfection des bons télescopes que nous avons cités (2421, 2425).

Si plusieurs télescopes de même sorte ont à peu-près la même longueur, ou s'ils sont de différentes espèces & qu'ils grossissent également, on jugera de l'avantage qu'ils peuvent avoir l'un sur l'autre en lisant la même écriture avec les différens télescopes. On voit dans l'Optique de Smith qu'avec les télescopes de 4 pouces de foyer on voyoit les satellites de Jupiter, & on lisoit les Transactions Philosophiques dont le caractère est le même que celui de cet ouvrage, à 125 pieds de distance; on les lisoit à 160 pieds avec 6 pouces, à 220 avec 9 pouces, à 500 pieds avec 15 pouces; & M. Maclaurin assure qu'on avoit vu plusieurs fois les 5 satellites de Saturne ensemble, avec ce télescope de 15 pouces de foyer, comme M. Cassini les avoit vus quelquefois avec une lunette de 17 pieds.

A quelle distance on doit lire avec des télescopes.

Expérience pour l'amplification d'un télescope.

2427. Le moyen dont Hauksbée se servoit pour déterminer par expérience la force amplificative de son télescope, & qu'il éprouva conjointement avec Folkes, &

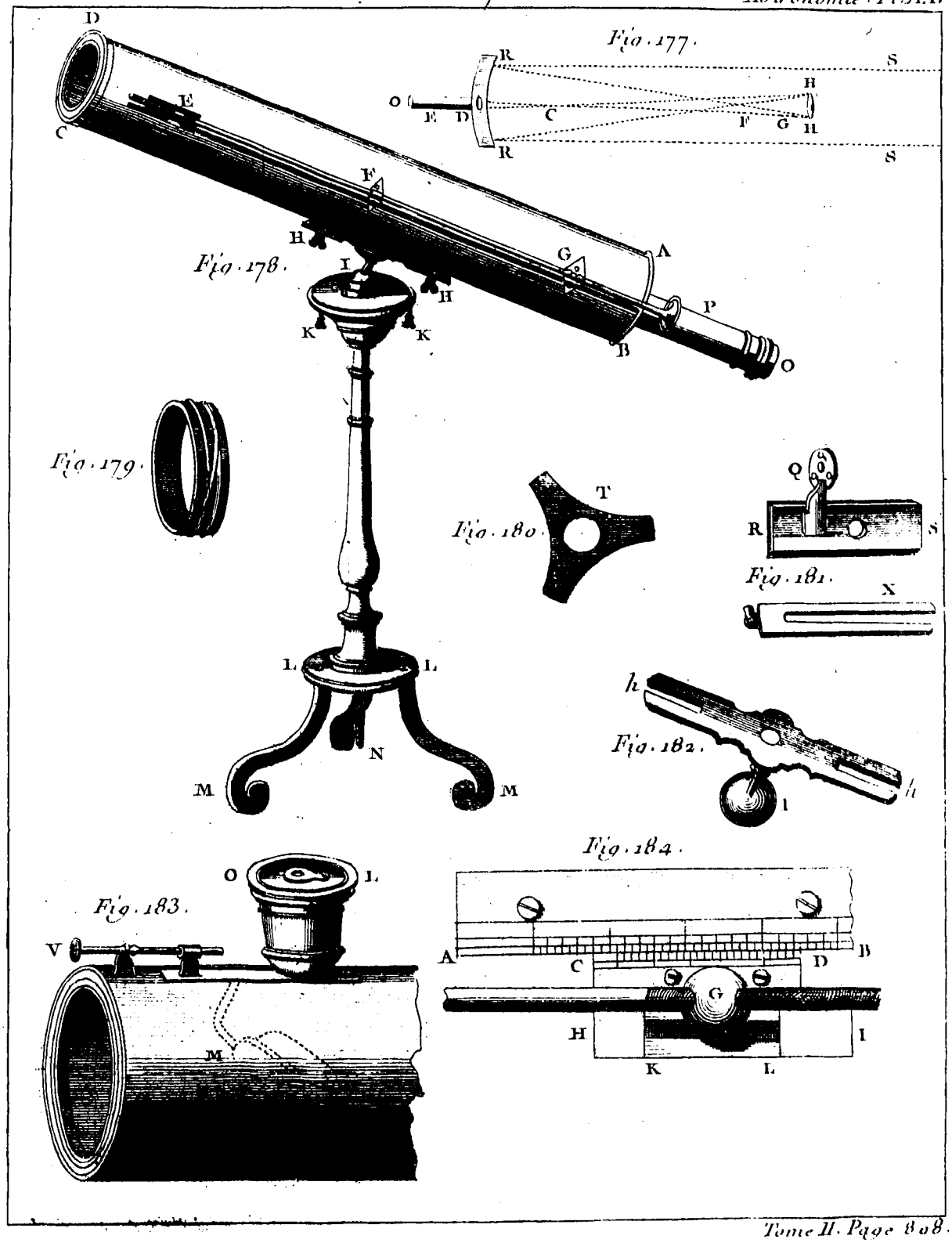


Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.

& Jurin, est rapporté dans Smith, & il suffit réellement pour ces sortes d'expériences. Ayant placé un cercle de papier d'un pouce de diamètre à la distance de 2674 pouces de l'oculaire dans la direction du télescope, on tire 2 lignes parallèles sur un papier à un pied d'intervalle l'une de l'autre, on place ces 2 lignes à côté du télescope, on les regarde à la fois des deux yeux, un œil dans le télescope & l'autre en dehors, on fait rapprocher peu-à-peu les deux lignes de l'œil jusqu'à ce qu'elles paroissent toucher les deux bords du cercle d'un pouce, c'est-à-dire, que les 12 pouces vus à l'œil nud, paroissent de la même grandeur qu'un pouce vu dans le télescope; & dans cet état l'on mesure la distance des deux parallèles à l'œil; si elle se trouve de 142 pouces seulement, l'angle visuel du télescope est réellement augmenté dans le rapport composé de 12 à 1, & de 2674 à 142, c'est-à-dire, 226 fois, c'est ainsi que Hauksbée reconnut que son télescope de 3 $\frac{1}{4}$ pieds de foyer augmentoit 226 fois le diamètre des objets.

2428. M. Pound raconte (*Phil. transf. n°.* 378), qu'il avoit comparé conjointement avec M. Bradley un télescope de M. Halley, dont le foyer n'avoit pas 5 pieds $\frac{1}{4}$, avec le fameux objectif d'Huygens, qui avoit 123 pieds de foyer; ils trouverent que le télescope grossissoit autant de fois & rendoit les objets aussi distincts, quoiqu'ils ne fussent pas aussi clairs & aussi lumineux que dans la lunette; ils attribuoient cette différence en partie à l'ouverture qui étoit plus petite dans le télescope que dans la lunette d'Huygens, & en partie à certaines petites taches du miroir qui n'avoient pu se polir aussi bien que le reste. Malgré cette différence de lumière dans les objets, ils voyoient avec le télescope tout ce qu'ils avoient vu avec la lunette d'Huygens. Comparaison avec la lunette de 123 pieds.

2429. Le télescope qui avoit été travaillé par *Hauksbée*, quoiqu'il eût 3 pieds $\frac{1}{4}$ de foyer, grossissoit 226 fois, & par conséquent différoit peu de celui de

Halley, quoique celui-ci eût près de 5 pieds $\frac{1}{4}$ de foyer; en employant l'oculaire qui le faisoit grossir 226 fois, on voyoit avec une clarté parfaite les plus petites taches de la lune dans son premier croissant, les bandes de Jupiter & le trait noir de l'anneau de Saturne : pour voir ce dernier objet on lui donnoit une ouverture de 3 pouces $\frac{1}{4}$ ou 4 pouces; mais lorsque le temps étoit obscur il falloit, pour mieux voir les objets terrestres, laisser à découvert la surface entière du miroir qui avoit quatre pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre mesure d'Angleterre.

2430. Dans un miroir exactement sphérique il n'y a que les rayons voisins du centre qui se réunissent exactement à un même foyer, les rayons des bords s'en écartent sensiblement; c'est ce qui fait qu'un miroir de 2 pieds de foyer ne peut pas avoir plus de 5 $\frac{1}{2}$ pouces de diamètre. Short est celui qui est parvenu à donner à ses télescopes la plus grande ouverture (2422); mais la figure de ses miroirs ne doit pas être sphérique; ils ne supporteroient pas des ouvertures aussi larges, ils auroient des aberrations & une confusion trop sensibles.

2431. ~~Il est possible d'étendre cet~~ art beaucoup plus loin, il n'est pas encore à sa perfection, & probablement la force des télescopes augmentera de plus en plus; si jamais l'industrie des artistes, la curiosité des savans, & la puissance des Souverains vont assez loin pour faire entreprendre un télescope qui ait quelques pieds de diamètre & qu'on y réussisse, nous verrons peut-être dans le ciel des choses toutes nouvelles.

Polémoscope. 2432. On peut regarder comme une dépendance du télescope le *polémoscope* d'Hévélius, (*Selenog. pag.* 28); c'est un instrument qui a deux réflexions & deux réfractions, il sert à observer les objets situés derrière l'observateur ou de côté; on en applique quelquefois à des instrumens d'astronomie pour observer au zénit d'une manière plus commode, comme on emploie des miroirs plans dans l'octant des marins, pour faire toucher en

apparence les images des deux objets dont on obſerve la diſtance (2458).

HÉLIOMÉTRE OU MICROMÉTRE OBJECTIF.

2433. L'HÉLIOMÈTRE ou micromètre objectif eſt une des plus belles inventions modernes, & des plus utiles pour l'aſtronomie, auſſi bien que celle des verres achromatiques ; on n'auroit pas cru il y a 30 ans qu'il reſtoit à trouver deux choſes auſſi curieuſes & auſſi importantes, & qu'on les trouveroit ſitôt. M. Bouguer eſt le premier qui nous ait appris la manière de faire un micromètre objectif, (*Mém. acad.* 1748, *pag.* 11). Il l'appella HÉLIOMÈTRE ou ASTROMÈTRE, parce que cet inſtrument lui ſervit d'abord à meſurer exactement le diamètre du ſoleil.

2434. On voit dans la *fig.* 186 un héliomètre monté ſur un bout de tuyau *A* qui fait l'extrémité d'une lunette de 18 pieds, dont je me ſers depuis 1753 ; *B* eſt un des deux objectifs de 18 pieds de foyer, il eſt logé dans une feuillure circulaire de cuivre, collé avec du maſtic & recouvert par deux têtes de vis *C* & *D* ; le verre mobile *E* qui eſt égal à l'autre, de même ouverture & de même foyer, eſt porté dans un chaſſis *FGHI* mobile entre deux couliſſes *K* & *K*, formées en queue d'aronde ; ce chaſſis eſt taraudé en *L* & reçoit une vis *NMLO* dont la tête eſt arrêtée en *M* ſur la platine fixe. Lorſqu'on tourne la tête de la vis par le moyen de la roſette *N*, le chaſſis qui porte le verre *E* eſt obligé de s'approcher du verre dormant *B*, ou de remonter vers *L* juſqu'à ce qu'il rencontre l'extrémité de la vis en *O* ; c'eſt le terme de ſon plus grand écartement. Le chaſſis mobile porte ſur le côté en *I* un trait de burin qui ſert d'index, & qui marque ſur une petite échelle *P* les tours de la vis, & l'écartement des deux objectifs. *Pl. XXVI. Fig. 186.*

Le chaſſis mobile eſt évidé entre *L* & *O* pour qu'il ſoit plus léger ; mais afin que la vis ne ſe rouille pas à

Fig. 186. l'humidité de l'air, on la recouvre d'une plaque de cuivre qui tient avec deux vis sur les coulisses *K*, *K*; on doit aussi recouvrir l'intervalle *EB* qui est entre les deux verres avec un papier noir ou un morceau de drap, pour empêcher l'introduction des rayons, qui ne passeroient point au travers des objectifs.

2435. L'effet du micromètre objectif consiste à donner deux lunettes dans un seul tuyau & avec un seul oculaire; le cercle *RRR* marque la largeur du tuyau de la lunette vers l'objectif, ce tuyau va en diminuant vers l'oculaire, où l'on peut le rétrecir à volonté; car l'on n'a pas besoin d'avoir un grand champ dans cette sorte de lunette.

Fig. 185. On voit dans la *fig.* 185 un cercle *AAA* qui représente le champ de la lunette ou le cercle visible au foyer commun des deux objectifs & de l'oculaire; *ST* est un cercle qui représente l'image du soleil formée par l'un des objectifs de l'héliomètre; *RV* est l'image que donne l'autre objectif. Quand on veut mesurer le diamètre du soleil on approche les deux verres jusqu'à ce que les deux images se touchent en un point *T*; & l'écartement des deux objectifs, évalué en secondes (2532), donne la distance des deux centres *C* & *B*, c'est-à-dire, le diamètre du soleil; cet écartement des objectifs est toujours égal au diamètre de l'image qui se forme à leur foyer.

Lorsqu'un héliomètre est fort long il seroit très-utile de pouvoir approcher ou éloigner les objectifs l'un de l'autre, sans cesser de regarder dans la lunette; cela se peut faire avec une tringle qui se termineroit par un pignon & qui engrèneroit dans une roue de champ fixée sur la tête de la vis; j'en ai donné la figure dans les *Mém. de l'acad.* 1754, *pag.* 597.

Avantages de l'héliomètre. 2436. L'invention de M. Bouguer a trois avantages considérables sur les micromètres ordinaires (2358); il donne un moyen d'observer le diamètre d'un astre malgré le mouvement diurne; en effet, un astre qui est sur les fils d'un micromètre n'y reste qu'un instant, & il

faudroit pouvoir obſerver les deux bords & les deux fils à la fois, ce qui eſt très-difficile, au lieu qu'avec l'héliomètre quand les deux images ſe touchent, elles reſtent toujours en contact, quel que ſoit le mouvement de la ſphère, celui de la lunette, ou de l'œil, & l'on a tout le temps de vérifier & de conſtater l'exactitude de la meſure. Les micromètres ordinaires ne peuvent s'appliquer à de grandes lunettes pour meſurer les diamètres du ſoleil ou de la lune, parce que le champ de ces lunettes ne peut contenir 30′ de diamètre; mais le micromètre objectif meſure les aſtres lors même que le champ de la lunette n'en contient qu'une petite partie. Enfin les micromètres nous font voir les deux bords du ſoleil ou de la lune ſur les bords de la lunette, au lieu que le micromètre objectif nous les donne toujours au centre & ſur l'axe même de la lunette, où l'on peut faire toucher les deux images. On verra la vérification & l'uſage de cet héliomètre avec ceux des micromètres ordinaires, 2519 & ſuiv.

Héliomètre appliqué au Téleſcope.

2437. L'INVENTION de l'héliomètre faite par M. Bouguer, fut appliquée en Angleterre aux téleſcopes, comme je le ſus par une lettre de Short à Don Georges Juan, écrite au mois de Janvier 1754; mais ce fut d'une manière un peu différente; elle conſiſte à partager un objectif en deux parties égales, que l'on fait mouvoir en ſens contraire, & que l'on place à l'extrémité d'un téleſcope; Short & Dollond furent les premiers qui en firent conſtruire, & ils en attribuèrent la première invention à Savery; Short aſſure que cette invention avoit été dépoſée en 1743 à la ſociété royale, (*Philoſ. tranſ. tom.* 48. *Mémoires de Marſeille année* 1755); mais du moins cette invention ne fut répandue & employée en Angleterre qu'après M. Bouguer, à peu-près comme il étoit arrivé à l'occaſion du micromètre de M. Auzout (2349).

Deux moitiés d'objectif. Fig. 187.

2438. Les demi-cercles *ABC*, *DEF* (*fig.* 187), répréſentent les deux moitiés de l'objectif, qui ſe meuvent parallèlement, le long de la ligne *AF*; le ſegment *ABC* eſt fixé ſur une platine de cuivre *AGHI*, & le ſegment *DEF* ſur une autre platine *KLMN*; ces deux platines ſe terminent chacune par une crémaillere *HI* & *MN* dont les dentures ſe regardent : un pignon fixé vers *P*, ſous un coq à l'extrémité de la monture de l'héliomètre ou de la platine qui lui ſert de baſe, engrène dans les deux crémailleres, en ſorte que l'une montant l'autre eſt forcée de deſcendre, pour qu'elles ayent des mouvemens égaux, en ſens contraire, & que les centres des deux portions d'objectifs ſoient toujours l'un & l'autre à même diſtance de l'axe du téleſcope. On fait tourner le pignon *P* par le moyen d'une tringle *Q* (*fig.* 188).

2439. Les deux platines *AGH*, *KLM* qui portent les verres, gliſſent ſur une platine fixe & plus grande *OSSQQRRO*, qui forme l'aſſemblage de la pièce entière & qui s'adapte au téleſcope; cette platine du fond porte deux couliſſes *RR*, *SS*, entre leſquelles ſe meuvent les deux platines mobiles; ces deux couliſſes doivent être parfaitement parallèles à la ligne *AF* ſur laquelle ſe meuvent les deux verres. Afin que les centres des verres ſoient toujours maintenus ſur cette même ligne *AF*, le coq ou la chappe de cuivre *TT* fixée ſur la grande platine, & qui porte le pignon *P*, reçoit auſſi les crémailleres des deux platines & les aſſujétit contre le pignon, pour empêcher qu'elles ne s'écartent l'une de l'autre. Le mouvement ſe communique aux deux crémailleres par le moyen du pignon qui eſt en *P*. Les deux crémailleres tiennent aux platines des verres, & ont le même mouvement; c'eſt pourquoi les diviſions qu'on y voit marquent le mouvement des verres; la règle *Y* eſt diviſée en pouces & dixièmes de pouces Anglois; chaque trait qu'on voit ſur le bord de cette règle marque un vingtième de pouce, la règle *X* doit occuper 24 diviſions de la règle *Y*,

Meſure de leur diſtance.

& être diviſée en 25 parties, ſuivant la méthode de Vernier (2343); par ce moyen elle ſubdiviſe en 25 parties chaque vingtième de pouce, c'eſt-à-dire; qu'elle donne en cinq centièmes parties de pouce, la diſtance d'un verre à l'autre.

2440. L'arc de Vernier *X*, eſt attaché ſur l'une des platines mobiles *XAGHI* par deux vis *g g*, qui paſſent dans des ouvertures ovales, pour avoir la facilité de faire concourir & coincider les diviſions, quand les verres ſont bien d'accord & ne donnent qu'une ſeule image de l'objet; mais ces vis *gg* doivent être ſerrées dans l'uſage ordinaire du micromètre objectif. Le vernier porte auſſi une oreille *h*, perpendiculaire à ſon plan, qui ſert d'écrou à la vis *V*; celle-ci tourne dans une oreille *k*, fixée à la platine mobile & qui arrête le collet de la vis, de ſorte que quand la vis tourne, l'écrou *h* eſt obligé de ſe mouvoir & entraîne avec lui l'arc de Vernier, lorſqu'on eſt obligé de lui donner un petit mouvement pour accorder l'index avec la réunion des images (2455).

Lorſque les deux ſegmens de verre concourent enſemble pour ne former qu'un ſeul verre, un ſeul centre, une ſeule image, ils ſont compris l'un & l'autre dans la circonférence *LaBGf*, qui déſigne l'ouverture du téleſcope, & celle de la grande platine fixe *OOQQ*, ſur laquelle gliſſent les deux platines des verres. Quand les deux verres ſont éloignés du centre du téleſcope, comme on le voit dans la figure, il n'y a plus qu'une portion *CBa*, *DEf*, de chaque verre qui réponde à l'ouverture du téleſcope, & par laquelle on puiſſe voir les objets; ce ſont ces deux parties de chaque demicercle qu'on a teinté plus fortement dans la figure, pour indiquer l'obſcurité de l'intérieur du tuyau; le reſte des verres, c'eſt-à-dire, les ſegmens *ABa* & *FEf* portent ſur le cuivre de la grande platine & ne peuvent ſervir à la viſion.

2441. Les verres ſont arrêtés ſur leurs platines, chacun par trois petites équerres doubles, de cuivre, Comment on aſſujétit les verres.

où il y a des vis & un reſſort à chacune : une des vis de chaque équerre telle que *e d*, ſert à la fixer ſur la platine ; la ſeconde *e*, ſert à contenir le verre horizontalement, la troiſième *d* à preſſer ſur le verre pour l'aſſujétir ſur la platine ; les vis qui retiennent les verres horizontalement, c'eſt-à-dire, parallèlement à la platine, telles que *e e*, buttent contre des reſſorts tels que *m m* qui entourent la circonférence des verres & les retiennent par leur épaiſſeur ; ces reſſorts font une preſſion modérée & conſtante, qui ne gêne point les verres. Les équerres *A* & *F*, n'ont point de vis pour preſſer horizontalement, parce qu'il ſuffit que les verres ſoient preſſés d'un côté par les équerres *C* & *D*, qui ont chacune dans leur montant une vis horizontale ou parallèle aux platines, & qui preſſe auſſi contre des reſſorts, comme les vis des équerres *B* & *E*.

2442. Les verres ſont appuyés le long de leur diamètre ou de la ligne *YF* contre de petites lames de cuivre miſes de champ & ſoudées ſur le bord intérieur de chacune des platines mobiles ; pour que cette épaiſſeur de deux petites lames, ne forme pas une diſtance entre les centres des deux verres, on peut les uſer chacun de l'épaiſſeur d'une de ces lames, afin qu'étant l'un vis-à-vis de l'autre, quoique ſéparés par l'épaiſſeur des deux lames ils ne faſſent qu'un ſeul objectif : il eſt vrai qu'une petite partie de cet objectif eſt interceptée le long du diamètre, mais les objets ne ſont pas moins viſibles & moins diſtincts.

Héliomètre monté. *Pl. XXVII. Fig.* 188.

2443. Le téleſcope garni de ſon micromètre objectif, eſt repréſenté dans la *fig.* 188 ; *AB* eſt le tuyau du téleſcope, *CD* eſt la platine fixe du micromètre (2439), vue par deſſous ; *EE* eſt un *chercheur* ou une petite lunette qui a un grand champ & qui eſt deſtinée à trouver plus facilement les objets que l'on veut obſerver ; *F* eſt le tuyau des oculaires, *G* la vis qui ſert à changer la diſtance du petit miroir ſuivant la vue de l'obſervateur ou la diſtance de l'objet (2414) ; *HH* eſt la circonférence de l'extrémité du tube du téleſcope, qui

Fig. 185.

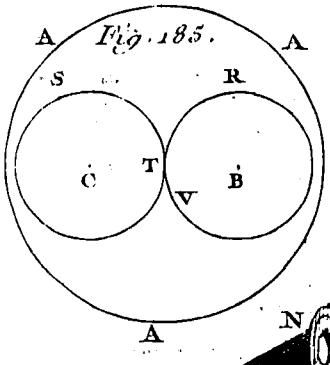


Fig. 186.

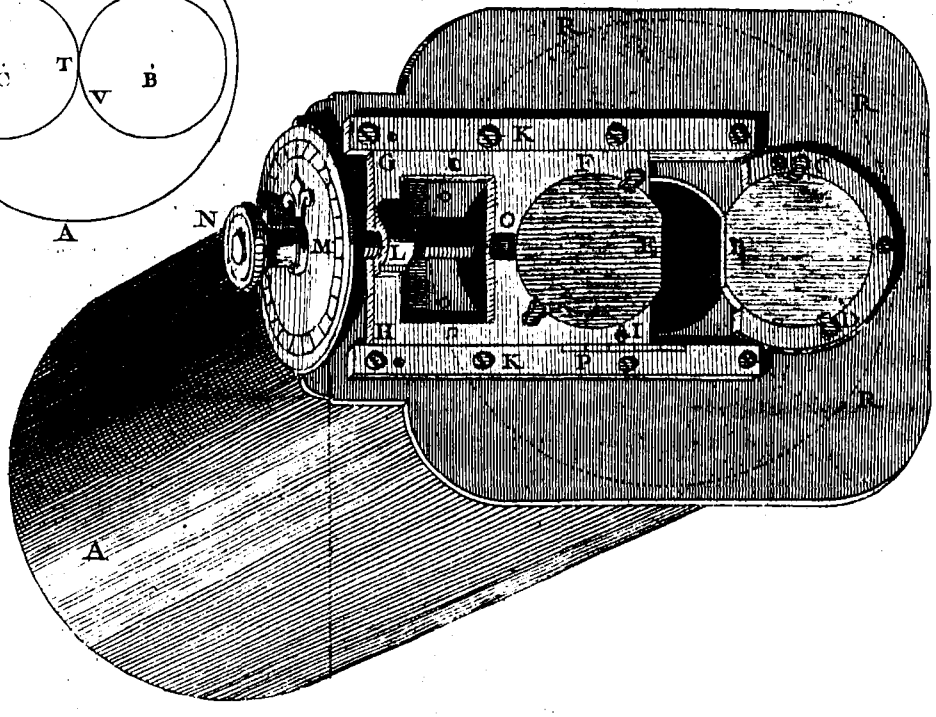
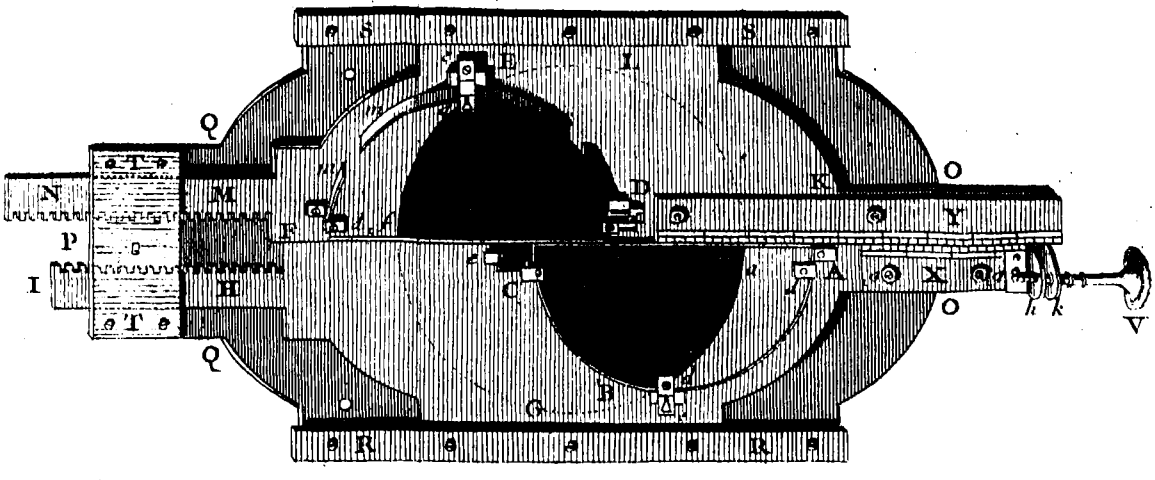


Fig. 187.



qui eſt dentée pour procurer le mouvement de rotation du micromètre. La platine du micromètre porte un collet circulaire ou un bout de tuyau qui eſt ſoudé de champ, & que l'on inſère dans l'extrémité *B* du téleſcope; ce collet répond exactement à l'ouverture circulaire *fLaG* de la *fig.* 187 : il y a un autre collet *H* qui embraſſe le tuyau du téleſcope à quelques lignes de ſon extrémité, il y eſt fixé par des vis & il porte un cercle, ou eſpèce de roue dont une partie eſt dentée & le reſte ſolide; cette roue ſert à retenir le micromètre par le moyen de trois crochets comme *L*, *K*, qui ſont fixés à la grande platine du micromètre & viennent reprendre pardeſſous la roue dentée en tournant librement ſur ſa circonférence; il y a deux de ces crochets qui comme *L*, ſont arrêtés par leur baſe à la platine du micromètre, chacun au moyen d'une vis *M*, qui paſſe dans la platine du micromètre, & par leur rebord *N* viennent embraſſer la roue dentée qui eſt fixée au tube du téleſcope.

2444. Le troiſième crochet en double équerre que l'on voit en *K*, eſt plus compoſé parce qu'il ſert au mouvement de rotation que doit avoir le micromètre; il renferme une petite roue ou pignon, dont un pivot eſt arrêté dans la platine du micromètre, l'autre pivot ſe termine par une tige d'acier taillée carrément, qui paſſe hors de la chappe ou du tenon, ſur laquelle on place une clef *O*, dont le trou carré s'engage ſur la tige & qui ſert à faire tourner la petite roue au moyen d'une tringle *PQ*. Mouvement de rotation.

2445. La chape qui eſt repréſentée en *K* dans la *fig.* 188, ſe voit ſéparément en *R* (*fig.* 189). La partie *S* eſt celle qui tient à la platine du micromètre; la partie *R* contient le pignon, & la tige *T* eſt celle où l'on place la clef; la clef briſée qui ſert à donner le mouvement eſt auſſi exprimée à part dans la *fig.* 190; c'eſt une eſpèce de charnière double formée par deux axes qui ſe croiſent à angles droits & qui ſont mobiles chacun ſur ſes pivots; c'eſt ainſi que l'on ſuſpend

les boussoles pour leur donner la liberté de se mouvoir en tout sens, & c'est ce qu'on appelle lampe de cardan. Le premier de ces deux axes *AX*, sert à faire tourner le micromètre, & l'autre axe qui lui est perpendiculaire sert au mouvement de la clef & de la tige qui s'étend jusqu'à la portée de la main de l'observateur. Lorsqu'on tourne la clef & qu'on fait tourner le pignon contenu dans la chappe *R* (*fig.* 189), la roue dentée *VX*, étant arrêtée sur le télescope & ne pouvant avoir aucun mouvement, le pignon est obligé de changer de place en roulant sur la circonférence *VX*, & il fait tourner la platine entière du micromètre sur laquelle le pignon est fixé; par ce moyen l'on place la ligne des centres sur laquelle se meuvent les deux verres, dans la direction de l'objet que l'on veut mesurer, à quelle inclinaison que ce soit, par exemple, pour mesurer la distance de Vénus au bord du soleil, qui en est le plus proche (2131).

Fig. 189.

Mesure de l'inclinaison. *Fig.* 189.

2446. Pour connoître l'inclinaison que donne au micromètre le mouvement du pignon *R* (*fig.* 189), sur la circonférence dentée *VX*, le bord de l'équerre se termine en bizeau & porte un trait qui sert d'index & marque sur les divisions de la circonférence *VX* les degrés d'inclinaison; on marque zéro sur cette circonférence quand la platine est située verticalement & que les deux verres ont leurs centres sur une ligne perpendiculaire à l'horizon; car alors les distances que l'on mesure avec ce micromètre sont des portions du vertical; au contraire on marque 90° sur la roue dentée lorsque les deux règles mobiles sont situées horizontalement ou font avec le vertical un angle droit; car alors les lignes qu'on mesure avec le micromètre sont parallèles à l'horizon; on est obligé de connoître cette inclinaison quand on mesure les diamètres de la lune, parce que la ligne des cornes est plus ou moins inclinée à l'horizon, ce qui produit une réfraction plus ou moins grande sur le diamètre de la lune (2246).

2447. Le télescope que nous venons de décrire

avec ſon micromètre objectif, eſt celui que le P. Pezenas fit faire à Londres vers 1755, pour l'obſervatoire de la marine à Marſeille ; il a deux pieds de foyer, & l'objectif en a 40 ; nous allons en décrire un autre de Dollond, qui n'a qu'un pied de foyer, & dont la ſtructure eſt un peu différente, il eſt de 1760 ; nous abrégerons la deſcription, dont on doit avoir une idée par celle qui précède.

Le micromètre objectif que Dollond avoit coutume d'appliquer à ſes téleſcopes d'un pied eſt repréſenté dans la *fig.* 193, il eſt vu dans une ſituation renverſée ; ce qui fait qu'on ne diſtingue pas les deux platines mobiles. Le cercle *AB* a 2 pouces 5 lignes de diamètre, meſure de Paris, & les verres *C*, *D*, 1 pouce 11 lignes d'ouverture lorſqu'ils ſont réunis. Le cercle de cuivre *ES* a 4 lig. de hauteur pour s'ajuſter dans le tuyau du téleſcope, & la platine fixe du micromètre eſt arrêtée par pluſieurs vis ſur ce bout de tuyau qui s'ajuſte au téleſcope. Héliomètre d'un pied. *Fig.* 193.

Les deux vis *G*, *H*, ſont à 14 lignes de diſtance l'une de l'autre, elles ont 18 lignes de longueur & 3 lignes de diamètre, & elles portent 42 pas ou filets ſur chaque pouce. Ces vis ſont appuyées par leur baſe ſur deux pointes *I* & *K*, fixées dans des tenons qui tiennent ſur la plaque fixe du micromètre : elles paſſent enſuite dans des écrous *L*, *M*, mobiles, qui conduiſent chacun une des deux platines mobiles du micromètre au travers d'une longue ouverture pratiquée dans la platine fixe pour laiſſer paſſer les écrous ; ces deux vis tournent à contre-ſens pour qu'un des écrous puiſſe monter pendant que l'autre deſcend.

2448. Chaque tour de vis eſt diviſé en 35 parties par le moyen de l'aiguille qui tourne ſur le cadran *N* & qui eſt fixée carrément ſur la tête d'une des vis *X*. Au-dedans de la boîte *OP*, chaque vis porte une roue dentée de 54 dents ; ces roues ont 13 lig. de diamètre, elles engrènent l'une dans l'autre, afin qu'une vis ne puiſſe tourner ſans l'autre, & que les deux mouvemens ſoient contraires, mais égaux.

Pour pouvoir faire marquer les tours de vis sur le cadran *Q*, tandis que l'aiguille *N* divise chaque tour en 35 parties, la tige de la vis *HX* porte un pignon de 14 qui engrène dans une roue de 35, portée sur un pont entre les deux vis; cette roue de renvoi porte un pignon de 5, & engrène dans une roue de 50 dont on voit une portion en *Q*, par une ouverture de la boîte; cette roue fait un tour quand l'aiguille *N* en fait 25; & comme la roue qui paroît en *Q* a sa circonférence divisée en 25 parties, chacune marque un tour des vis *G* & *H*: chaque écrou *L*, *M*, est précédé par une lame en forme de petit écrou plus mince, qui sert à nettoyer la vis, & à diminuer le jeu, en faisant ressort contre les pas de la vis.

2449. Lorsque les verres *CD* sont d'accord dans le centre de l'ouverture *AB*, l'une des platines mobiles qui porte le verre *C*, tombe sur l'extrémité *V* de la platine fixe, & l'autre en est éloignée de 13 lignes; mais à mesure qu'on éloigne les verres, la platine du verre *C* remonte, comme l'indique la ligne ponctuée *RS*, & la platine du verre *D* descend pour concourir avec le bord *TV* de la platine fixe.

Les vis *G* & *H* que nous avons représentées à découvert, pour en faire voir la situation & le jeu, sont recouvertes chacune par une petite boîte de cuivre représentée séparément en *X* (*fig.* 191), qui tient avec plusieurs vis sur le tenon *I* ou *K*, & sur la boîte *OP*, qui renferme la cadrature.

Fig. 191.

Dimensions de cet héliomètre.

2450. Le grand miroir du télescope a 8 pouces $\frac{2}{3}$ de foyer, 2 pouces $\frac{1}{3}$ d'ouverture, & un trou de 9 lig.; le petit miroir a 9 lignes de diamètre, 18 lignes de foyer, il est à 10 pouces $\frac{1}{4}$ du grand miroir, quand on regarde sans héliomètre, & 5 lignes plus près quand le micromètre y est. L'oculaire a 3 pouces 7 lignes de foyer, il est placé 9 lignes en-deçà de la surface du grand miroir, du côté de l'œil; le diaphragme est placé 17 lignes plus loin, il a 6 lignes d'ouverture; le petit oculaire qui a 9 lig. de foyer, est à 2 pouces $\frac{1}{3}$ de l'autre oculaire,

il a 7 lignes d'ouverture ; les deux oculaires enſemble équivalent à un ſeul qui auroit ſix lignes de foyer. L'équipage le plus fort a deux oculaires de 2 pouces 4 lig. & de 10 lig. $\frac{1}{2}$ de foyer, à 25 lig. l'un de l'autre ; ils équivalent enſemble à un oculaire de 3 lig. de foyer. L'œilleton eſt à 9 lig. du dernier oculaire dans l'équipage le plus foible, & a 6 lig. dans l'équipage le plus fort. L'objectif qui ſert de micromètre, a 10 ou 12 pieds de foyer environ.

2451. L'objectif que l'on applique au téleſcope, & qui en forme le micromètre, détermine ſeul la valeur des angles que l'on meſure, par la diſtance des deux moitiés d'objectif comparée à la longueur focale de cet objectif ; il eſt vrai que les miroirs accourciſſent cette longueur du foyer, puiſqu'un objectif de 40 pieds ſe réduit à un téleſcope de 2 pieds ; mais les miroirs ne font qu'abréger le chemin que les rayons ont à faire pour ſe réunir, ſans changer l'angle que les rayons font entre eux ; ainſi l'écartement des deux moitiés d'objecjectif ſera exactement le même pour meſurer le diamètre du ſoleil, que ſi ces verres étoient employés à former un ſimple héliomètre en forme de lunette ordinaire (2435). (*Mém. de Marſeille* 1755, *pag.* 93).

2452. En effet les miroirs du téleſcope, auſſi bien que les oculaires d'une lunette ordinaire, contribuent à groſſir, à étendre les images, mais ils ne changent rien à la meſure des angles compris entre les différentes parties de l'objet ; on a vu (2435) que dans l'héliomètre ſimple l'écartement des objectifs, néceſſaire pour meſurer le diamètre du ſoleil, eſt égal à l'eſpace même qu'occupe au foyer du verre le diamètre du ſoleil : quelque nombre d'oculaires qu'on applique à ce foyer pour rendre les rayons plus convergens, on ne change point cet eſpace abſolu, on le voit ſeulement ſous un plus grand angle ; il en eſt de même de ceux qu'on applique au téleſcope ; les deux rayons venus parallèlement par les centres des objectifs, détermineront encore l'angle ſous lequel doit paroître la diſtance

de ces deux rayons ; les miroirs & les oculaires ne feront qu'en dilater les différentes parties, ſans en changer l'angle viſuel.

2453. De-là vient l'avantage d'appliquer à l'héliomètre un objectif d'un très-long foyer ; les images y ſont plus grandes plus diſtinctes, plus lumineuſes, & par conſéquent plus aiſées à meſurer exactement ; la diſtance des objectifs étant plus grande, ils auront plus d'eſpace à parcourir pour meſurer les angles ; un cinq centième de pouce qui eſt à peu-près la plus petite quantité dont on puiſſe s'aſſurer ſur une diviſion, ne répond qu'à 51''' avec un objectif de 40 pieds (2447).

Méthode pour eſſayer des verres.

2454. Comme il eſt extrêmement difficile d'employer, de faire mouvoir & d'eſſayer une lunette de 40 pieds, M. Short ſe ſervoit d'un téleſcope ; en effet les objectifs étant adaptés à un téleſcope qui en raccourcit le foyer, on juge de la bonté du verre par la netteté avec laquelle on voit l'objet, & l'on eſtime la longueur de ſon foyer par la quantité dont il faut rapprocher le petit miroir du grand, pour voir diſtinctement, lorſque l'objectif y eſt adapté.

Attentions néceſſaires.

2455. Pour reconnoître ſi les deux moitiés d'objectif ſont bien diſpoſées ſur leurs platines, ſi elles ſont bien dans le même plan, ſi elles ne ſont ni trop éloignées ni trop voiſines de l'axe du mouvement ; il faut voir ſi quand elles ſont réunies en un ſeul objectif elles forment une ſeule image, ſans aucune duplicité ni confuſion ; pour cela on regarde une petite étoile, les deux verres étant d'abord écartés, on la voit auſſitôt double ; mais en rapprochant les deux verres, les deux étoiles doivent ſe réunir en une ſeule, qui eſt exactement de même grandeur que chacune des deux étoiles que l'on voyoit auparavant ; ſi on les apperçoit paſſer l'une à côté de l'autre ſans ſe toucher ou ſans ſe confondre parfaitement, on en conclud que les verres ont beſoin d'être un peu changés par le moyen des vis de preſſion : on verra par diverſes épreuves, s'il faut les ſerrer ou les relacher, les éloigner ou les rapprocher ;

peut-être ſera-t-on obligé d'uſer les verres pour pouvoir les approcher l'un de l'autre, ou d'augmenter l'épaiſſeur des lames qui les ſéparent pour écarter leurs centres, ce qui ſeroit néceſſaire ſi l'on avoit trouvé que les images ſe croiſent & ſe débordent, enſorte que l'image rendue par le verre ſupérieur, ſoit plus baſſe que celle du verre inférieur; mais avant que de recourir à ces remèdes qui ſont plus difficiles, il faudra s'aſſurer parfaitement que la duplicité d'image ne vient pas du plan dans lequel ſont les verres, car on pourroit la corriger en lâchant les vis de preſſion, ou en éloignant de la platine un des côtés du verre, par l'épaiſſeur d'un papier ou d'un corps encore plus mince.

2456. Le plus grand inconvénient du micromètre objectif dans le téleſcope, eſt la parallaxe optique des objets que l'on regarde : je ſuppoſe que les deux images du ſoleil ſe touchent parfaitement lorſqu'elles ſont au milieu du champ, & ſur l'axe même du téleſcope; les deux bords ſe quitteront lorſque le ſoleil s'éloignera du milieu, ou que l'œil de l'obſervateur changera, parce que le rayon viſuel paſſera entre les deux images; quelquefois même il arrive que ſans changer la ſituation de l'œil ni de l'objet, on voit les deux bords de l'objet ſe mordre & ſe quitter alternativement. Pour éviter, autant qu'il eſt poſſible, le danger de cette parallaxe, il faut avoir une croiſée de fils au foyer des verres, & n'obſerver le contact des objets que quand on les voit ſur cette croiſée, c'eſt-à-dire, au milieu du champ du téleſcope; il faut auſſi mettre à l'extrémité du tuyau des oculaires un *œilleton* ou un très-petit trou qui aſſujétiſſe tellement l'œil au même point, qu'on ne puiſſe jamais voir l'objet obliquement. Parallaxe optique. Le réticule & l'œilleton y remédient.

2457. Il arrive auſſi par l'effet de la chaleur ſur le tuyau que le diamètre du ſoleil paroît plus grand le ſoir que le matin, & l'on eſt obligé alors de rapprocher le petit miroir du grand pour rendre les images plus nettes, & retrouver dans le diamètre du ſoleil les mêmes parties. Ainſi le même nombre de parties ne

vaut pas toujours le même nombre de secondes, & il faut tenir compte de cette différence dans les comparaisons que l'on fait entre le diamètre du soleil & les autres quantités mesurées, ou ne comparer entre elles que des mesures faites à un même degré de chaleur. *Mém. présentés à l'acad.* V. 375.

2458. J'aurois souhaité de parler ici des instrumens propres à observer sur mer, & sur-tout de l'octant à réflexion; mais ce livre n'est déja que trop long: voyez le Traité de Navigation de M. Bouguer, édition de M. de la Caille, l'Optique de Smith, & le P. Pezenas, (*Mém. de Math. & de Phys. redigés à l'observatoire de Marseille année* 1755, *première partie*; *à Avignon*).

DES HORLOGES ASTRONOMIQUES.

2459. Pour connoître le temps vrai d'une observation (960), l'on n'avoit autrefois d'autre moyen que d'observer la hauteur du soleil ou d'une étoile (1030). Ce fut vers l'an 1300 que commença l'usage des horloges à roues dentées, (voyez *le Traité d'Horlogerie* de M. le Paute, 1755 *in*-4°. chez Samson); mais ce ne fut que deux siècles après qu'elles furent assez communes pour être employées par des astronomes.

2460. Dans les observations de Waltherus faites vers l'an 1500 & publiées par Schoner en 1544, on lit, (*pag.* 50) que l'horloge dont il se servoit étoit très-bien réglée, que d'un midi à l'autre elle se retrouvoit parfaitement d'accord avec le soleil, & que les temps marqués sur l'horloge étoient presque les mêmes que ceux qu'on tiroit du calcul. Je crois qu'il ne faut entendre ceci que de la précision d'environ une minute.

Tycho-Brahé avoit 4 horloges qui marquoient les minutes & les secondes de temps; la plus grosse n'avoit que trois roues; dont la première & la plus grande avoit 3 pieds de diamètre, & 1200 dents; on se servoit toujours de deux horloges à la fois. Hévélius employa aussi les meilleures horloges de son temps; mais

ces

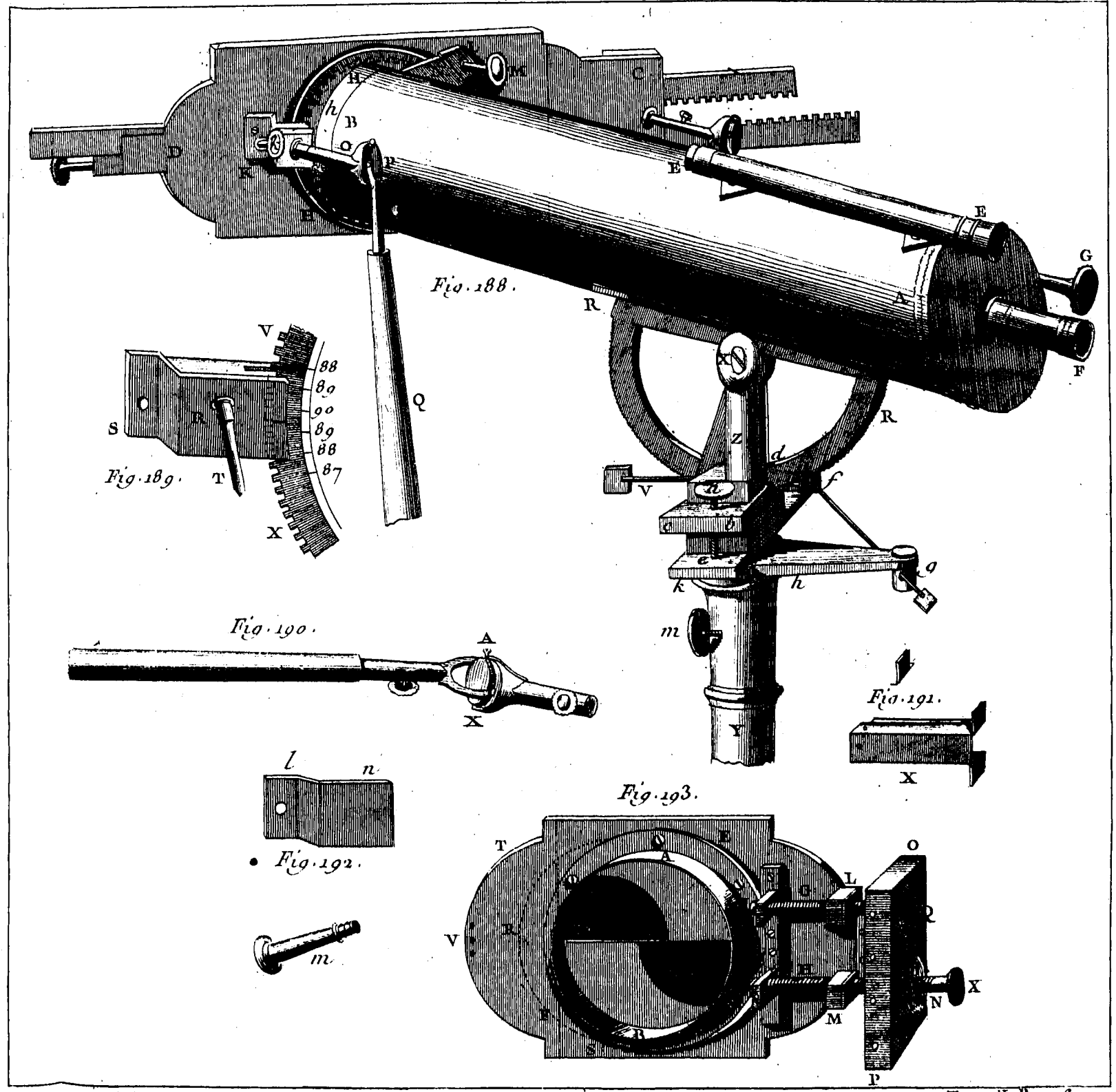


Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
88
89
90
89
88
87

ces machines étoient bien imparfaites avant que M. Huygens eût imaginé en 1656 d'y appliquer le ſeul régulateur fixe qu'il y ait dans la nature ; je veux dire les oſcillations du pendule, (voyez *Horologium oſcillatorium* 1673, *& le Traité d'Horlogerie de M.* Lepaute, *pag.* 273).

2461. Je n'entrerai pas ici dans le détail de la conſtruction des horloges à pendule (a), il faut en voir la deſcription dans les Traités d'horlogerie de M. Thiouſt, du Pere Alexandre, de M. Lepaute, de M. Berthoud. Je dirai ſeulement que pour avoir une bonne horloge à ſecondes, la plus ſimple de toutes, on peut ſe contenter de 4 roues, de 120, 100, 60, 30 dents, & de 3 pignons de 10 ailes chacun. L'échappement de Graham eſt celui que je conſeillerois, parce qu'il a la propriété de conſerver l'huile ; encore eſt-il néceſſaire de lui en donner tous les trois ans, ou à peu-près.

2462. Les verges de pendule qui ne ſont compoſées que d'une ſimple règle de fer, s'allongent d'environ un cinquième de ligne pour 30 degrés du thermomètre, en ſorte qu'étant réglées en été elles peuvent avancer en hiver de 20″ par jour; il eſt donc important pour un aſtronome d'avoir une verge de pendule qui ſoit compoſée de manière à corriger cette dilatation des métaux ; on trouvera pluſieurs méthodes pour cet effet dans les livres que je viens de citer ; voici celle que Harriſon imagina dès 1726 & qui eſt ſans contredit la plus ſûre de toutes celles qui ont été propoſées. M. Graham l'exécuta en 1740 pour Milord Macleſield : toutes les horloges de l'obſervatoire royal d'Angleterre & des meilleurs aſtronomes de Londres, ſont compoſées ſur ce principe ; M. Lepaute, Horloger

Compoſition du pendule.

(a) Bien des perſonnes les appellent ſimplement des *Pendules*, en prenant la partie pour le tout ; mais le pendule n'eſt que le régulateur de l'horloge, (*fig.* 197) ; & les aſtronomes plus exacts dans l'uſage des termes, diſent ſouvent une *Horloge à pendule*, & non pas ſimplement une *Pendule*.

du Roi, & M. Berthoud, à Paris, en ont fait pour un grand nombre d'astronomes & de curieux; elles réussissent de la manière la plus complette (2465).

Dimensions du pendule composé. Fig. 197.

2463. Le pendule composé de 9 verges est représenté dans la figure 197, ou il est supposé coupé par le milieu à cause de sa trop grande hauteur; le ressort de suspension *SR* a 27 lignes depuis la goupille *R* jusqu'à la goupille *S*; mais le point où est serré le ressort dans une pince de la cage du mouvement est 5 lignes $\frac{1}{2}$ plus bas que la goupille *R*. La traverse *AA* étant de cuivre & les verges de fer *AB* arrêtées chacune par un écrou au-dessus de la traverse de cuivre, il y a 5 lignes $\frac{1}{2}$ de cuivre depuis la goupille *S* jusqu'au dessus de la traverse *AA*. De-là il se trouve 33 pouces 2 lignes de fer jusqu'au bas de la traverse inférieure de cuivre *BB* où les verges de fer sont également arrêtées; le chassis extérieur *AABB* est suspendu au ressort *BS*. Les verges de cuivre 1, 1, sont assemblées en *DD* par une traverse de cuivre qui porte simplement sur la première traverse *BB*; depuis le dessous de la traverse inférieure de cuivre *BB* jusqu'au sommet des verges de cuivre, 1, 1, il y a 32 pouces 3 lignes; c'est sur le sommet ou à l'extrémité supérieure de ces premières verges qu'est appuié le dessous de la traverse de cuivre *FF* qui assemble le second chassis de fer; le sommet de ces verges n'est point arrêté dans la traverse; il est reçu seulement dans deux petites concavités pratiquées dans son épaisseur. Les 2 verges de fer marquées 2, 2, sont vissées & goupillées dans la traverse *FF*, de même que dans la traverse inférieure de cuivre *OO*. A compter du dessous de cette traverse *FF* il y a 31 pouces 7 lignes de fer jusqu'au milieu de la traverse inférieure *OO* où elles sont goupillées pour former avec la traverse supérieure un second chassis, au dedans du premier. Depuis le milieu de l'épaisseur de la traverse inférieure *OO* jusqu'au milieu de la troisième traverse supérieure *GG* qui est appuyée sur les verges de cuivre 3, 3, & qui porte la lentille, il y a 31 pouces 5 lignes

de cuivre; les ſecondes verges de cuivre 3, 3, ſont goupillées dans leur baſe *OO*, & elles ſupportent en haut le deſſous de la traverſe *GG*, où elles entrent dans deux petites cavités. A cette même traverſe *GG* eſt goupillée la verge de fer *PE* qui deſcend en paſſant librement dans les traverſes inférieures & qui porte la lentille; elle a 39 pouces $\frac{1}{4}$ juſqu'au bord inférieur de la lentille; mais ſur cette longueur il y a 35 $\frac{3}{4}$ pouces de fer, & 3 $\frac{1}{2}$ de cuivre, à cauſe d'une pièce de cuivre *LLMM*, dont nous allons parler. Le diamètre *E* de la lentille eſt de 6 pouces 11 lignes, ſon épaiſſeur 1 pouce 10 lignes $\frac{1}{2}$; elle pèſe 14 livres $\frac{1}{2}$ & la verge compoſée en pèſe 5 $\frac{1}{2}$, le total eſt de de 20 livres.

2464. Suivant les expériences de M. Berthoud, (*Eſſai ſur l'Horlogerie* 1763, 2 *vol. in*-4°), la dilatation du cuivre eſt à celle de l'acier, comme 121 eſt à 74; en conſéquence de ce rapport il compoſoit des pendules ſemblables avec 1297 lignes d'acier & 293 de cuivre; mais les proportions deviennent différentes dans la deſcription que j'ai donnée (2463). Dans celle-ci la lentille eſt tenue par deſſous & a la liberté de ſe dilater vers le haut, ce qui exige une compenſation; il y a de plus un reſſort de ſuſpenſion *RS* dont il faut corriger la dilatation; c'eſt par expérience qu'il a fallu trouver les dimenſions précédentes; mais elles peuvent varier un peu à cauſe de l'épaiſſeur ou du diamètre de la lentille, ou parce que le métal des verges ſera plus ou moins forgé & plus ou moins dilatable; il faudra donc mettre en expérience un pendule conſtruit ſur ces principes pour être aſſuré de ſon exactitude, ou par le moyen d'une étuve, ou par un examen fait en hiver & en été. On peut rendre d'abord les chaſſis plus longs que je ne l'ai dit, & diminuer enſuite les verges intérieures de cuivre 3, 3, ſi l'on trouve que la correction ſoit trop forte & que le pendule avance quand il fait chaud. Lorſque la différence n'eſt plus que d'environ 1'' par jour, on acheve de règler la compenſation par la pièce ſuivante.

Dilatation du cuivre & de l'acier.

La verge de fer *PE* qui porte la lentille est terminée par une chappe de cuivre qui la reçoit, & s'y adapte avec une goupille *CC*, ou *LL*; cette chappe de cuivre est taraudée en *E* & supporte la lentille; lorsqu'on observe que le pendule composé s'allonge en été, ou, dans une étuve d'expérience, on en est quitte pour mettre la goupille *CC* un peu plus bas, par exemple, en *MM*; alors la verge qui porte la lentille se trouve avoir une partie *CM* en fer, laquelle auparavant étoit de cuivre, par conséquent la dilatation totale devient un peu moindre; cette dernière partie de la correction est extrêmement sensible : car en élevant de 3 pouces la place de la goupille on ne fera retarder que d'une seconde par jour le pendule de l'hiver à l'été; ainsi l'on corrigera facilement une erreur d'un dixième de seconde.

De la précision des horloges.

2465. M. Short, à l'occasion du passage de Mercure observé en 1754, assure qu'il avoit trouvé par plusieurs observations que son horloge n'avoit pas varié de plus d'une seconde depuis le 22 Février jusqu'au 6 Mai jour de l'observation (*Philos. transf.* 1753), ensorte qu'avec un pendule semblable il est possible d'avoir une exactitude qui jusqu'alors paroissoit incroyable. Les astronomes d'Angleterre m'ont assuré plusieurs fois qu'on faisoit par ce moyen des horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5″ par année; on doit tout espérer des ressources de l'art, sur-tout après avoir vu la montre marine de M. Harrison ne varier que de 2′ en 147 jours de navigation, (*Connoiss. des mouv. cél.* 1765, *pag.* 240). M. Berthoud & M. le Roi ont exécuté à Paris de semblables ouvrages, & soutiennent la gloire de l'horlogerie en France. Nous voyons que M. Picard en 1672 avoit une horloge qui ne varioit pas de 1″ en deux mois, (*Voyage d'Uranibourg*, art. VII). Mais quelle que fut dès ce temps-là l'habilité des horlogers de Paris, on ne pouvoit avoir une semblable exactitude que par un hazard bien singulier, ou une égalité de température qui est fort rare; actuellement

l'exactitude de nos horloges eſt une ſuite néceſſaire des principes ſur leſquels elles ſont conſtruites.

2466. Lorſqu'on aura perfectionné les horloges à pendule, au point d'être aſſuré d'une ou deux ſecondes par année, on aura peut-être un moyen de rechercher les petites inégalités de la rotation de la terre (951). Elles feront connoître les inégalités de la rotation.

2467. Lorſqu'un aſtronome eſt ſeul pour compter les ſecondes en obſervant, il eſt bon, pour ne pas ſe tromper, de regarder le cadran des ſecondes avant & après l'obſervation. Il eſt encore important de s'accoutumer à compter ſi aiſément, qu'on puiſſe marcher, obſerver, écrire, & même parler, ſans ceſſer de compter les ſecondes, & ſans s'y tromper.

2468. Lorſqu'on a une horloge dont l'échappement a peu de chûte, & qui fait trop peu de bruit pour qu'on puiſſe en entendre les vibrations d'un peu loin, il faut néceſſairement avoir un *compteur* ou *valet*, c'eſt-à-dire, une eſpèce d'horloge à timbre, compoſée groſſiérement d'un pendule à ſecondes & de trois roues. La roue qui porte la poulie du poids engrène dans la roue d'échappement; l'arbre de l'échappement porte une autre roue garnie de chevilles des deux côtés, ces chevilles levent alternativement de chaque côté la queue d'un des marteaux des ſecondes; cette roue porte ſur ſon plan un coq ou un bras, qui à chaque tour, c'eſt-à-dire, à chaque minute, rencontre la queue du marteau des minutes qui frappe ſur un ſecond timbre, & par ce coup double avertit que la minute commence: c'eſt ainſi que l'on peut entendre de loin les vibrations de l'horloge aſtronomique, auſſi-tôt que le compteur eſt d'accord avec l'horloge à pendule. Compteur.

2469. On a ſouvent propoſé de faire ſervir les horloges à conduire une lunette pour ſuivre les aſtres aiſément malgré le mouvement diurne; cela ſeroit très-utile pour deſſiner la figure des taches de la lune, pour avoir toujours un aſtre au centre même de la lunette,

&c. M. Passemant a exécuté plusieurs instrumens semblables, on les appelle HÉLIOSTATES; & il y en a un dans le cabinet de Physique du Roi, près le château de la Meute.

Héliostate.

Je finis ici la description des instrumens d'astronomie; il me suffit d'avoir fait connoître ceux qui sont usités actuellement parmi les astronomes; la manière de les construire sera détaillée par celui qui fera la description de l'art des instrumens de mathématiques. Il me reste à expliquer les différentes vérifications qu'on est obligé de faire avant que d'employer ces instrumens, avec leur usage dans l'astronomie, pour donner une connoissance exacte de la pratique des observations; ce sera l'objet du Livre XIV.

FIN DU TOME SECOND.

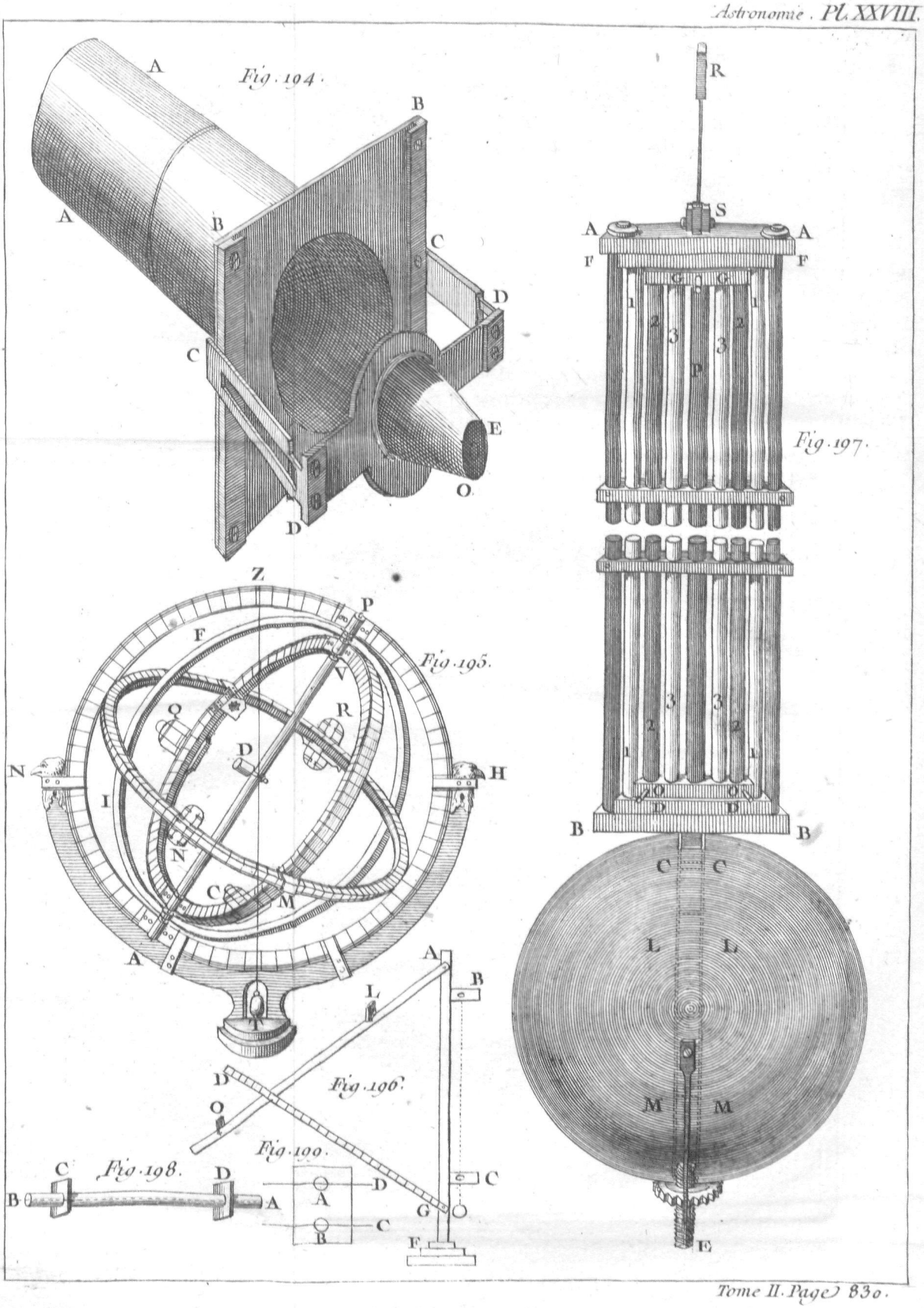


Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.

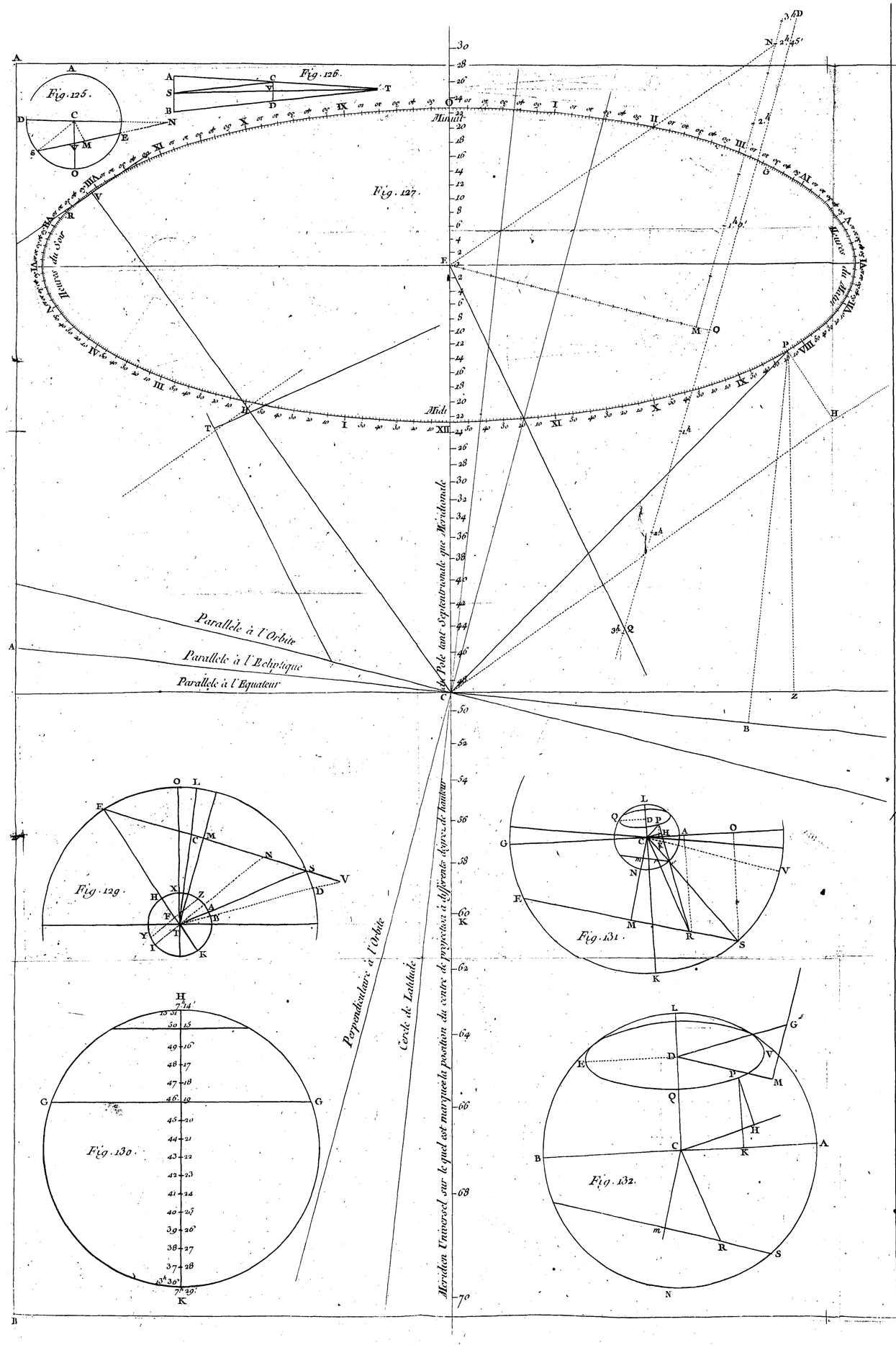


Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Minuit
Midi
Heure du Jour
Heure de la Nuit
Parallele à l'Orbite
Parallele à l'Ecliptique
Parallele à l'Equateur
Meridien Universel sur lequel est marqué la position du centre de projection à différents degrez de hauteur du Pole tant Septentrionale que Meridionale
Cercle de Latitude
Perpendiculaire à l'Orbite
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.

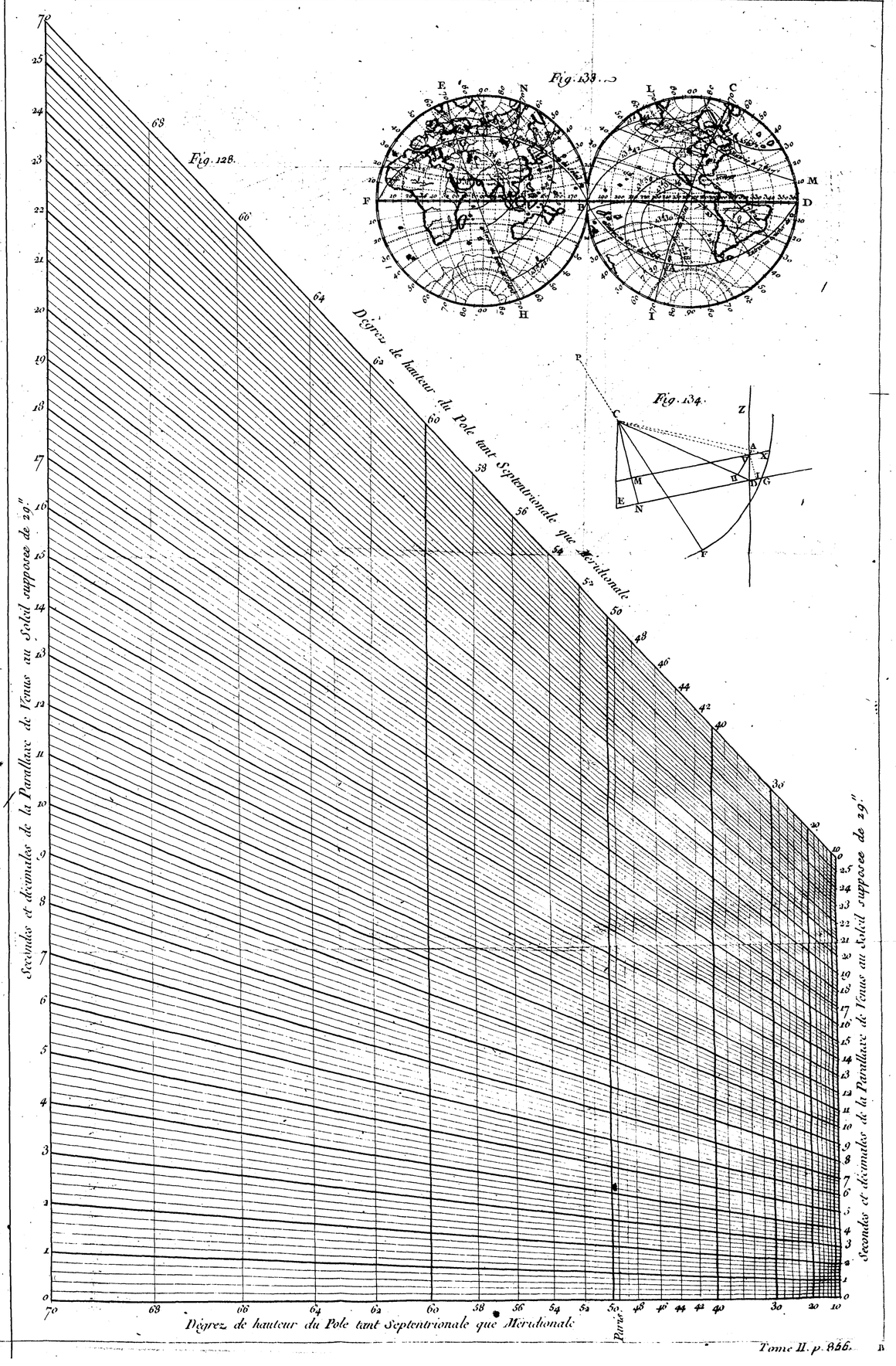


Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 128.
Degrez de hauteur du Pole tant Septentrionale que Meridionale
Secondes et decimales de la Parallaxe de Venus au Soleil supposee de 29."
Secondes et decimales de la Parallaxe de Venus au Soleil supposee de 29."
Degrez de hauteur du Pole tant Septentrionale que Meridionale