TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

PAR J.-B. BIOT,

Membre de l'Institut de France, etc.,

AVEC DES ADDITIONS RELATIVES A L'ASTRONOMIE NAUTIQUE,

PAR M. DE ROSSEL,

Membre du Bureau des Longitudes de France, ancien Capitaine de vaisseau, rédacteur et coopérateur du Voyage de d'Entrecasteaux.

SECONDE ÉDITION,

Destinée à l'enseignement dans les Lycées impériaux et les Écoles secondaires.

Omnium rerum principia parva sunt,
Sed suis progressionibus usa augentur.

CIC. de Fin., lib. V.

PARIS,

J. KLOSTERMANN fils, acquéreur du fonds de Mad. V^e. BERNARD, rue du Jardinet, n°. 13, quartier St.-André-des-Arts;

SAINT-PETERSBOURG,

KLOSTERMANN père et fils, Libraires.

M. DCCC. XI.

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

TOME SECOND.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.

TABLE

DES CHAPITRES.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIÈME.

NOTES DU TROISIÈME LIVRE.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

Fautes essentielles à corriger.

Page 53, ligne	6	$0''.847222$, *lisez :* $0^\circ.847222$.
71,	5,	$26^\circ.0776$, *lisez :* $26^\circ.0812$.
Id.	12,	$26^\circ.0776$, *lisez :* $26^\circ.0812$.
141,	1re.	planche 3, *lisez :* planche 2.
216,	13,	midi moyen, *lisez :* minuit moyen.
226,	2	en remontant, méridien, *lisez :* méridien moyen.
255,	18,	$R \sin l$, *lisez :* $R \sin L$.
256,	7,	$\cos(L - L)$, *lisez :* $\cos(L - l)$.
279,	4	en remontant, Pp', *lisez :* Pp.
320,	7,	l'élévation, *lisez :* l'observation.
337,	3,	$\sin^2 \frac{1}{2} 4'$, *lisez :* $\sin^2 \frac{1}{2} L'$.
433,	10,	rayon, *lisez :* rayon terrestre.
477,	2	en remontant, t', *lisez :* t.
478,	8,	t, *lisez :* t'.

Addition à l'Erratum du tome premier.

Page 20, ligne dernière, $2^m,864$, ou environ 8 pieds, *lisez :* $1^m,989$, ou environ 6 pieds.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

LIVRE SECOND.

THÉORIE DU SOLEIL.

CHAPITRE PREMIER.

Des Mouvemens propres des Astres, et des moyens de les déterminer.

DANS le premier livre nous avons déterminé, d'après des faits certains, la forme de la terre; ses dimensions et la place qu'elle occupe dans l'espace. Nous avons trouvé dans sa configuration des données fixes pour faire reconnaître exactement la position des points du ciel. Munis de ces résultats, nous pouvons suivre, par l'observation, tous les mouvemens des astres et en déterminer très-exactement les lois. Mais il n'y a qu'une marche sûre pour parvenir à ce but, et comme il importe de la bien connaître d'avance, je vais brièvement l'indiquer.

Lorsqu'un corps se meut rapidement près de la terre, nous pouvons, si nous l'avons observé, reconnaître à-peu-près sa direction et la route qu'il a suivie. Mais à la distance où les astres sont placés, leurs mouvemens sont trop lents pour que nos yeux puissent les appercevoir. Nous ne pouvons les découvrir qu'en comparant leurs positions, observées à des époques différentes, car nous trouvons alors qu'elles ont changé de place dans le ciel.

Et de même que lorsqu'on veut tracer une ligne courbe dont on ignore la forme et la loi, on détermine par observation quelques-uns de ses points, que l'on unit ensuite par un trait continu ; de même pour déterminer les mouvemens des astres, on observe chaque jour le point où ils se trouvent sur la sphère céleste, et l'on cherche ensuite la forme de la trajectoire, d'après la condition *que l'astre ait passé successivement par toutes ces positions dans l'ordre où on les a observées.*

On trouve le lieu de l'astre pour chaque jour, en observant sa hauteur méridienne et l'instant de son passage au méridien. La hauteur fait connaître sa déclinaison ; l'instant du passage fait connaître son ascension droite, par rapport au point de l'équateur que l'on choisit pour origine. Ces données déterminent le point où l'astre s'est trouvé sur la sphère céleste.

Si l'on marquait tous ces points sur un globe, où l'on aurait tracé à angles droits deux grands cercles pour représenter l'équateur et le premier méridien, leur réunion formerait sur le globe la représentation de la marche de l'astre dans le ciel, voy. *fig.* 1. Le calcul permet de faire cette opération avec une exactitude beaucoup plus grande : il fournit les moyens de tracer la véritable courbe que l'astre décrit, et c'est ainsi que l'on fixe par la pensée la trace des astres sur la sphère céleste.

Il ne reste plus alors qu'à déterminer les variations de leurs distances, qui sont nécessaires pour compléter la connaissance de leurs mouvemens. On y emploie les observations de leur diamètre apparent, qui augmente à mesure qu'ils s'approchent, et diminue quand ils s'éloignent. Ou, si leur diamètre est trop petit, comme cela a lieu pour les comètes et la plupart des planètes, on les compare avec des objets célestes, comme le soleil, dont on a, préalablement, déterminé la marche par ces procédés.

A mesure que ces observations s'accumulent, on les rapproche les unes des autres. On les corrige, en saisissant pour chacune d'elles, les époques les plus favorables, celles où les quantités que l'on cherche, se montrent isolées et dans leur plus grand accroissement. On parvient enfin à connaître très-exactement *l'état du ciel*, à savoir ce qui y demeure constant, et ce qui y change chaque jour, chaque année, ou dans des intervalles de tems plus considérables.

Alors la tâche de l'astronomie observatrice est terminée, et celle de l'astronomie théorique commence. On rapproche les phénomènes semblables afin de découvrir leurs rapports, c'est-à-dire, les grandes lois auxquelles ils sont soumis, et qui sont comme la source commune de laquelle ils dérivent, en sorte qu'ils s'y trouvent tous compris implicitement. On cherche ensuite, d'après les règles de la mécanique, quelle doit être la force qui agit sur les corps célestes, pour que ces lois existent, et que les mouvemens soient tels qu'on les observe réellement. On parvient ainsi à déterminer cette force, et on voit qu'il n'y en a qu'une seule, unique pour tous les astres, qui les pousse les uns vers les autres, en raison inverse du carré des distances, et qu'en conséquence on a nommée *attraction* : non pas qu'on veuille par là exprimer sa nature ; mais seulement pour indiquer la manière dont elle agit. Les effets de cette force, modifiés par l'éloignement des différens corps célestes, produisent tous les phénomènes astronomiques, qui se trouvent ainsi expliqués dans leurs moindres détails ; et l'astronomie devient un grand problême de mécanique, dont les élémens sont donnés par l'observation.

C'est alors que l'on peut revenir sur ses pas, réduire en nombres les formules des mouvemens célestes, déduites de la connaissance de leur cause, et former ce que l'on appelle des *tables astronomiques*. Par ces tables, on sait précisément quel sera l'état du ciel dans les siècles futurs, quel il était dans les siècles passés. Elles fournissent aux navigateurs des moyens de reconnaître leur route, aux géographes, des signaux pour déterminer la position des lieux, aux cultivateurs, des procédés pour règler leurs travaux, aux nations, des époques pour fixer leur histoire. L'astronomie parvient ainsi à son résultat définitif, qui est, comme pour toutes les sciences, l'utilité générale et le perfectionnement de la société. Mais pour atteindre complètement ce but, elle a besoin de la dernière exactitude ; c'est l'objet constant des travaux des astronomes. On imagine difficilement le degré de précision où ils sont arrivés, mais on peut en juger par ce seul fait : si l'on dirige aujourd'hui une lunette vers un point déterminé du ciel, on peut prévoir plusieurs années d'avance le jour, l'heure, la minute, la seconde à laquelle un astre désigné viendra se placer exactement au centre de la lunette, et y couvrir un fil plus fin qu'un cheveu. Les erreurs des tables actuelles sont comprises dans l'épaisseur de ce fil.

CHAPITRE II.

Application au Soleil, théorie de son mouvement circulaire.

1. SUIVONS le plan que nous venons de tracer, et appliquons-le d'abord à la recherche des mouvemens du soleil.

Pour mesurer exactement la déclinaison et l'ascension droite du centre de cet astre, on emploie les procédés d'observation que nous avons expliqués avec détail dans le premier livre : nous ne ferons ici que les rappeler. La déclinaison du soleil s'obtient en observant la distance méridienne du bord supérieur de cet astre au zénith, et celle de son bord inférieur. On ajoute à ces valeurs, l'effet de la réfraction, et la demi-somme est la distance vraie du zénith, au centre du soleil. Enfin, de ce résultat on retranche la parallaxe, et l'on a la distance telle qu'on l'aurait observée du centre de la terre. D'ailleurs la distance de l'équateur au zénith est connue par des observations précédentes; c'est la latitude de l'Observatoire. La différence de ces distances est la déclinaison du soleil. Je prendrai pour exemple les observations suivantes, faites par Piazzi, à Palerme, le 7 décembre 1791 (*). J'en ai converti tous les résultats en parties de la division décimale du cercle.

(*) Les astronomes sont dans l'usage de désigner, pour abréger, le soleil par le caractère ☉. Ainsi, dans un registre astronomique, au lieu de cette phrase : Distance du bord supérieur du soleil au zénith, on écrirait, en abrégé, ☉ *bord supérieur*.

	Bord supérieur.	Bord inférieur.
Distance du bord du soleil au zénith. .	67°,1938	67°,7999
Réfraction.	0°,0308	0°,0314
Distance vraie du bord du soleil au zénith.	67°,2246	67°,8313
Demi-somme ou distance du zénith au centre du soleil.		67°,5279
Parallaxe.		0°,0023
Distance vraie du zénith au centre du soleil. . .		67°,5256
Distance du zénith à l'équateur, ou latitude de l'observatoire de Palerme.		42°,3469
Déclinaison du soleil ; australe		25°,1787
Les distances vraies des deux bords du soleil au zénith, étant retranchées l'une de l'autre, leur différence donnera le diamètre apparent du soleil pour le 7 décembre 1791, qui sera égal à		0°,6067

Pour faire ces observations, on observe le contact des deux bords du soleil à un fil tendu horisontalement dans l'intérieur de la lunette et perpendiculaire à son axe. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard à l'épaisseur de ce fil ; mais à parler exactement, la distance observée du bord supérieur au zénith, est trop petite d'une quantité égale au demi-diamètre du fil ; la distance du bord inférieur est trop forte de la même quantité. Ces erreurs se compensent dans le calcul de la distance moyenne du centre du soleil ; elles s'ajoutent dans la mesure de son diamètre apparent. Il faut donc retrancher du résultat l'épaisseur du fil. Piazzi l'évalue à 28″ décimales, dans la lunette, ce qui donne 6039″, décimales pour le diamètre véritable. C'est 32′,37″, en mesures sexagésimales.

En prenant ainsi, jour par jour, les hauteurs méridiennes du soleil, et les comparant entre elles, on connaîtra le mouvement de cet astre en déclinaison.

2. Pour avoir *son mouvement en ascension droite*, on observe chaque jour l'instant de son passage au méridien, et on le compare à celui d'une étoile connue. Cela se fait en observant le contact de son bord antérieur et celui de son bord postérieur, aux fils verticaux de la lunette méridienne, et prenant une moyenne arithmétique entre ces instans. L'erreur qui provient de l'épaisseur du fil, se compense ici, comme dans la mesure des distances au zenith, et il est inutile d'y avoir égard. Le tems qui s'écoule entre les passages de l'étoile et du soleil, fait connaître la différence de leurs méridiens. Cette différence, *calculée jour par jour*, *donne le mouvement du soleil*, *en ascension droite*.

En réunissant les résultats de ces deux genres d'observations nous aurons tout ce qu'il faut pour déterminer la loi des mouvemens du soleil, et tracer sa route sur la sphère céleste. Tel est l'objet du tableau suivant, dans lequel les lettres *A* et *B* sont employées pour indiquer si les déclinaisons sont australes ou boréales. Je dois aussi prévenir que désormais, afin de rendre les calculs plus simples, je n'emploierai jamais plus que des mesures décimales pour la division du cercle et du jour. Si l'on a besoin de convertir nos résultats en mesures sexagésimales, il sera facile de le faire d'après les rapports qu'ont entre elles ces deux espèces de divisions; rapports que nous avons donnés dans le livre précédent.

Dates des observat.	Distances du centre du ☉ au zénith.	Diamètre apparent du ☉.	Déclinaison du ☉.	Tems écoulé depuis le pas. de la Lyre au mér. jusqu'au pas. suiv. du ☉.
Déc. 1806.	gr	gr	gr	h
18	80,26553	0,60327	26,00195 A	9,66654
20	80,31938	0,60339	26,05580	9,72820
22	80,33570	0,60358	26,07212	9,78990
27	80,22443	0,603[illegible]	25,96085	9,94413
Janv. 1807.				
1er.	79,89685	0,60358	25,63328	0,09796
2	79,80503	0,60358	25,54145	0,12864
9	78,93162	0,60346	24,66804	0,34217
10	78,77373	0,60346	24,51015	0,37245
11	78,60771	0,60340	24,34413	0,40266
25	75,50265	0,60260	21,23908	0,81729
28	73,54879	0,60241	19,28521	0,90438
Février.				
5	72,81919	0,60185	18,55562	1,07452
7	71,47855	0,60142	17,21497	1,18642
11	70,06419	. . . . .	15,80061	1,29683
13	69,32823	0,60074	15,06465	1,35148
15	68,57743	0,60049	14,31385	1,40589
16	68,19588	0,60037	13,93230	1,43277
26	64,20185	0,59895	9,93827	1,69845
Mars.				
1er.	62,94865	0,59872	8,68508	1,77677
3	62,10350	0,59821	7,83992	1,82870
17	56,03196	0,59593	1,76838	2,18699
19	55,15451	0,59543	0,89093	2,23761
20	54,71562	0,59531	0,45204	2,26289
21	54,27915	0,59525	0,01557 A	2,28815
22	53,83982	0,59512	0,42375 B	2,31339
23	53,40102	0,59494	0,86256	2,33862
25	52,52645	0,59457	1,73713	2,38907
Avril.				
8	46,62128	0,59222	7,64230	2,74274
9	46,10423	0,59204	8,15935	2,76811
25	39,84884	0,58944	14,41474	3,17940
Mai.				
1er.	37,73571	. . . . .	16,52787	3,33695
2	37,40009	0,58840	16,86349	3,36342
16	33,02902	0,58654	21,05456	3,74093
17	32,95230	0,58642	21,31128	3,76839
25	31,11454	0,58556	23,14904	3,99026
27	30,71881	0,58531	23,54477	4,04632

DATES des observat.	DISTANCES du centre du ⊙ au zénith.	DIAMÈTRE apparent du ⊙.	DÉCLINAISON du ⊙.	TEMS ÉCOULÉ depuis le pas. de la Lyre au mér. jusqu'au pas. suiv. du ⊙.
Juin 1807.	gr	gr	gr	h
12	28,56958	0,58420	25,69400	4,50225
13	28,49815	0,58414	25,76543	4,53104
20	28,20467	0,58383	26,05891	4,73312
22	28,19159	0,58383	26,07199	4,79066
24	28,20822	0,58377	26,05536	4,84842
Juillet.				
9	29,29340	0,58370	24,97015	5,27919
10	29,42631	0,58377	24,83727	5,30762
11	29,56420	. . . . .	24,69938	5,33601
22	31,54352	0,58420	22,72006	5,64452
25	32,21426	0,58438	22,04932	5,72736
28	. . . . . .	. . . . .	. . . . . .	5,80960
Août.				
10	36,71062	0,58562	17,55296	6,15892
11	37,03412	0,58574	17,22946	6,18531
12	37,36312	0,58586	17,90046	6,21162
20	40,14870	0,58679	14,11488	6,41981
23	41,25785	0,58722	13,00573	6,49692
Septembre.				
1er.	. . . . . .	. . . . .	. . . . . .	6,72590
3	45,57087	0,58870	8,69271	6,77622
4	45,97935	0,58889	8,28423	6,80139
16	51,02079	0,59123	3,24279	7,10153
17	51,45029	0,59154	2,81329	7,12646
21	53,17293	0,59179	1,09065	7,22618
22	53,60617	. . . . .	0,65741	7,25112
23	54,03951	. . . . .	0,22407 B	7,27608
Octobre.				
3	58,37610	0,59358	4,11252 A	7,52691
4	58,80646	0,59370	4,54288	7,55216
19	65,09719	0,59630	10,83361	7,93663
20	65,49976	0,59648	11,23618	7,96275
25	67,46993	0,59728	13,20635	8,09455
Novembre.				
2	70,44074	. . . . .	16,17719	8,30986
3	70,79413	. . . . .	16,53055	8,33718
Décembre.				
3	. . . . . .	. . . . .	. . . . . .	9,20099
8	79,45958	0,60265	25,19600	9,35238
10	79,68376	0,60265	25,42018	9,41334
17	80,21513	0,60321	25,95155	9,62810
28	80,25738	0,60327	25,99380	9,65889
Janv. 1808.				
4	79,62339	0,60346	25,35981	0,18251
6	79,38572	0,60346	25,12214	0,24358

3. On a réuni dans le tableau précédent un grand nombre d'observations du soleil, faites à Paris à l'Observatoire, par MM. Bouvard et Mathieu, pendant le cours de l'année 1807. Les passages du soleil au méridien y sont rapportés à l'étoile α de la constellation de la Lyre, qui, étant très-brillante, et placée loin de l'équateur, bien au-delà des parallèles que le soleil atteint, peut être observée en toute saison dans nos lunettes méridiennes, même lorsqu'elle passe au méridien en même tems que le soleil (*). Les intervalles des passages de l'étoile et du soleil sont comptés en tems sydéral décimal, depuis 0^h jusqu'à 10^h, d'occident en orient, et ils expriment les tems écoulés depuis le passage de la Lyre au méridien jusqu'au passage suivant du soleil. Pour avoir toujours un point de départ fixe, on a tout rapporté au passage de la Lyre, tel qu'il a eu lieu le 1er. janvier 1807, et l'on a supposé qu'à partir de cette époque, la position de l'étoile sur le ciel restait invariablement la même, c'est-à-dire, que l'on a corrigé les effets de ses petites variations. Si l'on voulait suivre rigoureusement la marche d'invention, il aurait fallu rapporter chaque jour le passage du soleil au passage apparent de l'étoile, tel qu'on l'observe en réalité, c'est-à-dire

(*) Avec une bonne lunette astronomique, on voit en plein jour les étoiles les plus brillantes; mais il faut pour cela connaître d'avance la direction dans laquelle on doit les trouver. On a cet avantage avec les lunettes méridiennes, parce que l'on sait toujours à fort peu près l'instant du passage de l'étoile au méridien et sa hauteur; de sorte qu'en dirigeant la lunette quelques instans d'avance, on peut attendre et saisir avec exactitude l'instant où elle doit y passer. Outre ces précautions, il faut encore que l'étoile ne soit pas trop voisine du soleil, car alors l'éclat de cet astre l'affaiblit tellement, qu'il empêche de la distinguer.

affecté de la précession, de l'aberration et de la nutation. Mais alors les petits déplacemens éprouvés par l'étoile en vertu de ces trois causes, pendant la durée des observations qui est d'une année, se reporteraient tout entiers sur le soleil dont le mouvement paraîtrait affecté de ces petites irrégularités. Cependant cette marche finirait aussi par conduire aux mêmes résultats que l'autre, et c'est réellement celle qu'ont suivie les astronomes. Car l'effet de ces déplacemens, presque imperceptibles dans l'intervalle d'une année, deviendrait très-sensible après de longs intervalles de tems; et lorsque les erreurs se seraient ainsi accumulées, l'application même des premiers résultats suffirait pour les redresser et pour indiquer les corrections qu'ils nécessitent. Mais en employant d'abord ces légères corrections pour réduire nos observations à des termes comparables, nous avons l'avantage d'obtenir les résultats définitifs dès la première approximation, au lieu que nous aurions été forcés d'y revenir à plusieurs reprises en suivant pas à pas la marche des inventeurs. Cette anticipation n'altérera point la rigueur du raisonnement, car elle n'influera nullement sur les considérations par lesquelles nous découvrirons l'existence et la mesure des petits mouvemens apparens auxquels toutes les étoiles sont soumises.

4. Après cette explication nécessaire, considérons d'abord les déclinaisons du soleil, rapportées dans notre tableau, et examinons suivant quelles lois elles varient. Si nous suivons l'ordre dans lequel elles sont observées, nous voyons qu'elles ont commencé par être australes dans le mois de décembre 1806 : elles ont atteint leur plus grande valeur vers le 22 de ce même mois. Alors la déclinaison du soleil était 26°.0721. Depuis cette époque, elles ont été en diminuant, le soleil s'est

rapproché de l'équateur; et enfin le changement des déclinaisons australes en boréales montre qu'il a passé dans ce plan vers le 21 mars. C'était l'instant de l'*équinoxe*, c'est-à-dire qu'alors la durée du jour était égale à celle de la nuit par toute la terre. La marche du soleil continuant toujours dans le même sens, il commence à s'éloigner de l'équateur en s'approchant du pôle nord : les déclinaisons boréales augmentent ; enfin elles atteignent leur *maximum* vers le 22 juin, et ce *maximum* est encore à fort peu près de 26°.0721 comme pour les déclinaisons australes. A partir de cette époque, le soleil commence à redescendre vers l'équateur : les déclinaisons diminuent. Cet astre revient dans l'équateur vers le 24 septembre, ce qui produit un second *équinoxe*. Alors il continue à redescendre, les déclinaisons redeviennent australes et croissantes, jusqu'à leur limite accoutumée, qu'elles atteignent de nouveau comme la première fois vers le 22 décembre. Arrivées à ce terme elles recommencent à diminuer de la même manière, et le mouvement du soleil, vers l'équateur recommence aussi par les mêmes degrés. Ces phénomènes se reproduisent constamment toutes les années suivant les mêmes lois.

5. Si l'on prend les différences des déclinaisons consécutives, on voit que leurs variations se font d'une manière régulière et symétrique de part et d'autre de l'équateur ; mais la marche de ces variations est inégale. Elles sont les plus rapides quand le soleil approche du plan de l'équateur, et c'est là que leur valeur est la plus grande. Elles diminuent à mesure que le soleil s'éloigne de ce plan, et deviennent insensibles vers les plus grandes déclinaisons. Alors les hauteurs méridiennes de cet astre changent très-peu d'un jour à l'autre, et il paraît comme stationnaire. Aussi a-t-on nommé *solstices* les parallèles

qu'il décrit dans le ciel à cette époque. On les appelle aussi *tropiques*, d'un mot grec qui signifie *retour*, parce que le soleil, parvenu à ce terme, semble retourner sur ses pas. Celui qui est au nord, s'appelle le *tropique du cancer*; l'autre est le *tropique du capricorne*. Ces dénominations paraissent avoir été données par des peuples situés au nord de l'équateur, qui, voyant le soleil reculer vers le midi, après son passage au tropique boréal, ont attribué à ce parallèle le signe du cancer ou de l'écrevisse, animal qui marche souvent en arrière. Au contraire, le soleil leur paraissant s'élancer du tropique austral pour remonter vers l'équateur, ils ont affecté à ce parallèle le signe du capricorne, parce que le capricorne ou la chèvre est un animal grimpant. Quoi qu'il en soit, ces deux parallèles sont situés à égale distance de l'équateur, et cette distance en 1807 était de $26^{\circ}.0721$, comme on le voit par les observations contenues dans le tableau que nous avons rapporté.

6. Venons au mouvement en ascension droite. Si le soleil a d'abord passé au méridien en même tems que l'étoile à laquelle on le compare, le lendemain il y revient plus tard, et il s'éloigne ainsi d'elle de jour en jour, en allant d'occident en orient. C'est ce que prouvent les intervalles des passages, qui surpassent toujours la durée d'un jour sydéral. Mais la marche du soleil à cet égard n'est point uniforme. Elle est tantôt plus lente, tantôt plus rapide comme on peut aisément s'en convaincre en prenant, dans notre tableau, la différence des époques des passages consécutifs.

Cette comparaison faite dans les différens tems de l'année donne les valeurs suivantes pour le retard diurne du passage du soleil sur celui de l'étoile, abstraction faite des petites irrégularités accidentelles dues aux observations.

22 décembre.	$0^h,03085$
11 février	0,02732
26 mars.	0,02527
15 mai	0,02746
23 juin	0,02788
28 juillet	0,02748
16 septembre	0,02493
1er. novembre.	0,02732

La plus petite de ces valeurs est $0^h,02493$; la plus grande est $0^h,03085$. Entre ces deux extrêmes, on voit souvent revenir, à quelques dixièmes de seconde près, la valeur $0^h,02739$, qui est comme le terme moyen autour duquel oscille le retard diurne. Cette quantité évaluée en tems sexagésimal vaudrait $236'',65$, et comme elle représente un intervalle de tems sydéral, si on la convertissait en tems moyen solaire, d'après la définition que nous avons donnée de cette période dans le premier livre, page 198, en la multipliant par $\frac{86164,09}{86400}$, elle se réduirait à $236''$. C'est, à $\frac{9}{10}$ de seconde près, la différence que nous avons annoncée entre la durée du jour sydéral et celle du jour moyen solaire.

Le soleil s'avançant tous les jours vers l'orient d'une quantité exprimée par son retard diurne, passe ainsi successivement par toutes les valeurs de l'ascension droite. Après avoir fait le tour entier du ciel, il rejoint de nouveau l'étoile, que nous supposons être immobile; alors ses retards journaliers recommencent dans le même ordre. Le mouvement de cet astre, parallèlement à l'équateur, se fait ainsi d'occident en orient, d'une manière régulière, mais inégale, et dans l'intervalle d'une année.

7. En réunissant ces considérations, on est conduit à reconnaître dans le soleil deux mouvemens propres, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à l'équateur ; ou, ce qui revient au même, il faut lui supposer un seul mouvement, oblique aux méridiens et aux parallèles, qui produise à-la-fois ces deux effets.

8. Si l'on porte chaque jour sur un globe les ascensions droites et les déclinaisons de cet astre, on trouve qu'il décrit ainsi un grand cercle de la sphère céleste. On a représenté ce résultat dans la *fig.* 2, où EAA' désigne l'équateur; AA', AA''... les ascensions droites, comptées du point A comme origine; et AS, $A'S'$, $A''S''$... les déclinaisons observées du point O. La suite des points S, S', S''......, détermine le grand cercle, oblique à l'équateur, que le soleil décrit sur la sphère céleste. Le calcul infiniment plus exact que toutes les constructions graphiques confirme parfaitement ce résultat, lorsque l'on détermine par la trigonométrie sphérique les positions successives du soleil (*).

(*) Pour vérifier ce résultat par le calcul, supposons-le véritable. Admettons, pour un moment, que la marche du soleil suit réellement un grand cercle de la sphère céleste, et voyons si cette hypothèse satisfait aux observations.

Soit donc, *fig.* 3, ESS' ce grand cercle, EQQ' l'équateur. Le centre de la terre, qui est aussi le centre de la sphère céleste, sera placé en C, centre commun de ces deux cercles ; et CS', CS'' représenteront les rayons visuels menés à chacune des positions successives du soleil. Nous supposerons encore pour fixer les idées, que le mouvement de cet astre est dirigé dans le sens $ES'S''$, en s'éloignant du point E. Maintenant, la position de l'orbite serait connue, si l'on connaissait la ligne Ee, intersection des deux plans, et l'angle dièdre

Le cercle décrit par cet astre est borné au nord et au midi, par les deux tropiques. On lui a donné le nom d'*écliptique*, parce que la lune se trouve toujours dans ce plan ou près de ce plan, lorsqu'elle est éclipsée. En effet, ce phénomène étant produit par l'ombre de la terre, ne peut arriver que dans la direction de cette ombre, c'est-à-dire dans le plan de l'orbite du soleil. Par une

---

SEQ, qui est leur inclinaison commune : nommons cet angle ω. Dans le triangle sphérique $S'EQ'$, on aura, par les règles de la trigonométrie,

$$\text{tang}\, S'Q' = \sin EQ'.\, \text{tang}\, \omega.$$

$S'Q'$ est la déclinaison du soleil le jour de l'observation ; nous la nommerons d. Quant à EQ', c'est la différence des ascensions droites des points E et Q', ces ascensions droites étant comptées dans le sens EQ' du mouvement du soleil, et à partir d'un point quelconque fixe de l'équateur, par exemple, du méridien de la Lyre dans les observations que nous avons rapportées. Puis donc que la position du point E sur l'équateur est inconnue, nommons α son ascension droite, comptée comme nous venons de le dire, et désignons par a celle du point Q' ou du soleil comptée de la même origine et dans le même sens. Nous aurons alors $EQ' = a - \alpha$; et en substituant ces notations dans notre équation, il viendra

$$\text{tang}\, d = \sin \{a - \alpha\}\, \text{tang}\, \omega.$$

Nous avons donc ainsi une relation entre les inconnues α et ω ; car les quantités d et a sont connues par l'observation des hauteurs et des passages. Deux observations faites à différens jours suffiront donc pour déterminer nos deux inconnues. Quand on connaîtra leurs valeurs, on pourra se donner a et en déduire d, c'est-à-dire, calculer la déclinaison du soleil d'après son ascension droite ; ou réciproquement, on pourra se donner la déclinaison, et calculer l'ascension droite. En comparant le résultat du calcul à celui qu'a donné l'observation, leur accord montrera si l'orbite du soleil est réellement un grand cercle de la sphère céleste.

La détermination de α et de ω par deux observations, n'offre pas un calcul bien difficile ; car en nommant d' et a' les nouvelles raison semblable, les éclipses du soleil par la lune se font aussi dans ce plan ou à une distance assez petite pour que l'ombre de la lune puisse encore renoncer la terre. De là est venu le nom d'écliptique.

9. Si l'écliptique est réellement un grand cercle de la sphère céleste, elle doit couper l'équateur qui est aussi un grand cercle en deux points opposés, c'est-à-dire dont les ascensions droites diffèrent d'une demi-circonférence. Examinons, d'après le tableau d'observations, si cette condition est remplie. Nous voyons d'abord

---

quantités observées, on aura encore

$$\text{tang}\, d' = \sin\left\{a' - \alpha\right\} \text{tang}\, \omega :$$

éliminant tang ω, il vient

$$\text{tang}\, d \,.\, \sin\left\{a' - \alpha\right\} = \text{tang}\, d' \,.\, \sin\left\{a - \alpha\right\},$$

ou, en développant les sinus et divisant par cos α,

$$\text{tang}\, d \sin a' - \text{tang}\, d \,.\cos a' \,\text{tang}\, \alpha = \text{tang}\, d' \sin a - \text{tang}\, d' \cos a \,\text{tang}\, \alpha,$$

et enfin

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{\text{tang}\, d' \sin a - \text{tang}\, d \sin a'}{\text{tang}\, d' \cos a - \text{tang}\, d \cos a'};$$

après quoi α étant connu, on déterminera facilement tang ω; mais pour une simple vérification comme celle que l'on se propose ici, il sera bien plus simple de déterminer d'abord α directement, comme nous allons le faire dans le texte, en discutant les observations où le soleil s'est trouvé très-près de l'équateur; et au contraire, pour déterminer ω, on prendra celles où il s'est trouvé le plus éloigné de ce plan : on aura ainsi $\alpha = 2^h,28904$, en tems; ou en grades $91^\circ,5616$; et $\omega = 26^\circ.0721$. Avec ces valeurs, on pourra se donner a arbitrairement et calculer d. Or, si l'on effectue ce calcul pour tel jour que l'on voudra, la valeur de d s'accordera toujours avec la déclinaison du soleil rapportée dans notre tableau d'observations, ou du moins les écarts, si l'on en trouve, seront presque infiniment petits. Cette comparaison prouvera de la manière la plus rigoureuse que l'orbite décrite par le soleil est réellement un grand cercle de la sphère céleste, et le grand cercle que nous venons d'assigner.

que le 21 mars à midi, la déclinaison du soleil a été de $0^\circ,01557$ australe, et le lendemain elle s'est trouvée de $0^\circ,42375$ boréale. C'est donc entre ces deux instans que le soleil a dû percer le plan de l'équateur et beaucoup plus près du premier que du second. L'époque précise de ce phénomène est facile à déterminer; car en prenant l'intervalle des deux midis en tems sydéral, on voit qu'il a été de $10^h,02524$ et pendant ce tems, la déclinaison du soleil a changé de $0^\circ,01557 + 0^\circ,42375$ ou $0^\circ.43932$; ainsi, en supposant que ce changement se soit fait d'une manière uniforme, ce qui, pour un tems si court, s'écarte peu de la vérité, on en conclura par une simple proportion l'intervalle de tems nécessaire pour compléter les $0,01557$ qui restaient encore à décrire le 21 mars. Ce sera $\dfrac{10^h.02524.\ 0^\circ,01557}{0^\circ,43932}$ ou $0^h.35531$. Cette quantité ajoutée au midi du 21 mars donnera l'heure à laquelle le soleil a dû se trouver dans le plan de l'équateur. Maintenant puisque, dans l'intervalle de deux midis, l'ascension droite du soleil relativement à la Lyre change vers cette époque de $0^h,02524$, il est clair qu'en $0^h,35531$, elle changera de $\dfrac{0^h,02524.\ 0^h.35531}{10^h,02524}$ ou $0^h,00089$ cette quantité étant ajoutée à $2^h,28815$ donnera $2^h,28904$ pour la différence des ascensions droites du soleil et de la Lyre à l'instant de l'équinoxe.

On serait arrivé plus directement à ce résultat, en établissant tout de suite la proportionnalité entre les changemens correspondans de déclinaison et d'ascension droite; car alors depuis le midi du 21 mars jusqu'à l'instant de l'équinoxe, le changement de l'ascension droite serait égal à $\dfrac{0^h,02524.\ 0^\circ,01557}{0^\circ,43932.}$ ou $0^h,00089$, comme nous venons de le trouver par une marche plus détournée.

Si l'on répète un calcul analogue sur les déclinaisons observées les 22 et 23 septembre, pour lesquelles la variation diurne est, en déclinaison $0^{\circ},43334$, en ascension droite $0^{h},02496$, l'intervalle de deux midis étant $10^{h},02496$, on trouvera que le soleil a dû entrer dans le plan de l'équateur à $5^{h},18368$ après le midi du 23 septembre, c'est-à-dire le 24 à $0^{h},18368$ après minuit; et la différence d'ascension droite du soleil et de la Lyre à la même époque était $7^{h},27608 + 0^{h},01291$ ou $7^{h}28899$.

En comparant ce résultat à celui du 21 mars, on voit que l'ascension droite du soleil a varié dans l'intervalle de $4^{h},99995$ ou à fort peu près de cinq heures décimales, c'est-à-dire d'une demi-circonférence. En négligeant la petite différence $0^{h},00005$, qui peut être attribuée aux erreurs des observations, on voit que les deux points où l'orbite du soleil rencontre l'équateur, sont diamétralement opposés comme ils doivent l'être en effet, l'orbite étant plane.

On peut répéter la même épreuve sur deux points quelconques de l'orbite, opposés en ascension droite, c'est-à-dire, dont les ascensions droites diffèrent de cinq heures décimales, et l'on trouvera toujours qu'ils répondent à des déclinaisons égales et opposées de part et d'autre de l'équateur. On peut en particulier effectuer aisément cette comparaison sur les observations des 9 janvier et 11 juillet; 7 février et 11 août; 1er. mai et 3 novembre, qui sont déja à très-peu de chose près, dans le cas dont nous parlons; et qui peuvent s'y réduire exactement, d'après le calcul de la marche diurne du soleil à chacune de ces époques. Cette opposition montre la symétrie parfaite du plan de l'orbite de part et d'autre de l'équateur.

10. Les deux intersections de l'équateur avec l'écliptique se nomment *équinoxes* ou *points équinoxiaux* parce que, quand le soleil y passe, le jour est égal à la nuit, par toute la terre. En effet, cet astre se trouve alors dans le plan de l'équateur, qui coupe la terre en deux parties égales. Ainsi en considérant les rayons qu'il nous envoie comme parallèles entre eux, ce qui s'écarte bien peu de la vérité, la terre se trouve alors éclairée d'un pôle à l'autre, voyez *fig.* 4, et le cercle qui sépare sur sa surface la lumière de l'ombre, est un méridien dont le plan est perpendiculaire aux rayons solaires. Ce méridien tourne avec le soleil par l'effet du mouvement diurne, et chaque parallèle se trouve éclairé pendant une demi-révolution du ciel.

Les plans de l'équateur et de l'écliptique se coupent, suivant une ligne droite qui passe par les points équinoxiaux, et que l'on nomme pour cette raison, *la ligne des équinoxes*. Il ne faut pas la confondre avec la trace de l'équateur sur la terre, trace que les navigateurs appellent *la ligne équinoxiale*, ou simplement *la ligne*.

Celui des deux équinoxes par lequel le soleil passe en remontant du tropique austral vers le nord, s'appelle l'*équinoxe du printems*, et on le désigne ordinairement en astronomie par le signe ♈. Le second équinoxe, par lequel le soleil passe en redescendant du tropique boréal vers le sud, s'appelle l'*équinoxe d'automne*, et se désigne par le caractère ♎. Ces dénominations sont tirées des divisions de l'année auxquelles ces points servent d'origine : nous en reparlerons plus loin.

11. Les astronomes sont dans l'usage de prendre le point ♈ de l'équateur, ou l'équinoxe du printems, pour l'origine d'où ils comptent les ascensions droites du soleil et de tous les astres. Ils y placent le premier point du signe astro-

nomique, appelé le *belier* ou *aries*, qu'ils désignent par le caractère ♈. Au moyen des résultats que nous venons d'obtenir, il nous devient facile de nous conformer à cet usage. Car nous avons trouvé par les observations du 21 mars, que l'équinoxe du printems, rapporté au méridien de la Lyre, avait pour ascension droite $2^h,28904$. Si nous voulons que ce point devienne l'origine des ascensions droites, il n'y a qu'à retrancher $2^h,28904$ de toutes les ascensions droites du soleil, rapportées au méridien de la Lyre. Par conséquent l'ascension droite de la Lyre ellemême rapportée à cet équinoxe, et comptée dans le même sens que les autres, sera le complément de cette quantité à 10^h ou $7^h,71096$. On trouverait également celle de toutes les autres étoiles, dont on connaîtrait la différence d'ascension droite avec le soleil ou avec la Lyre. Les résultats précédens sont exprimés en tems; mais si on voulait les convertir en arcs, il suffirait de les multiplier par 40, puisque une heure décimale vaut quarante grades.

Les astronomes ayant choisi le point ♈ pour l'origine des ascensions droites, devaient naturellement choisir ce même point de l'équateur, pour mesurer par son mouvement le *tems sydéral absolu*, dont l'origine est arbitraire. C'est ce qu'ils ont fait; et dans chaque lieu le tems sydéral absolu est mesuré, à chaque instant, par l'angle horaire de l'équinoxe du printems avec le plan du méridien. Mais il y a une discordance sur le commencement du jour sydéral. Les uns en placent l'origine à l'instant du passage du point équinoxial au méridien supérieur, et ils comptent alors 0^h de tems sydéral. C'est l'usage adopté dans les anciennes tables astronomiques. Les autres pensent qu'il vaut mieux faire commencer le jour sydéral à l'instant du passage du point équinoxial au méridien inférieur; ce qui est conforme à l'usage général de la société, où le jour commence à minuit. Ce changement a été introduit dans les nouvelles tables astronomiques, publiées par le Bureau des longitudes de France.

12. Pour achever de déterminer dans le ciel la position du plan de l'écliptique, il ne nous reste plus qu'à connaître l'angle dièdre qu'il fait avec le plan de l'équateur; car la position d'un plan est déterminée quand on connaît sa trace et son inclinaison sur un plan fixe. Dans cette recherche, nous pouvons faire abstraction du mouvement diurne de la sphère céleste qui, étant commun à l'équateur et à l'écliptique, n'a aucune influence sur leurs positions respectives. Soit C, *fig.* 3, le centre de la terre, $EQ'Q''$ l'équateur, ESe l'écliptique, Ee la commune section de ces deux plans, ou la ligne des équinoxes. Menons un méridien PSQ, dont le plan soit perpendiculaire à cette commune section. Ce méridien coupera le plan de l'équateur suivant la droite CQ, l'écliptique suivant CS, et l'angle SCQ sera l'obliquité de l'écliptique, qu'il s'agit de déterminer.

Or, de tous les rayons visuels CS, CS', CS'', que l'on peut mener successivement du centre de la terre au soleil, dans les différens tems de l'année, CS est celui qui fait avec l'équateur le plus grand angle : par conséquent *l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur est égale à la plus grande déclinaison du soleil.*

13. Pour la connaître avec la dernière exactitude, il suffirait d'observer la hauteur méridienne du soleil, le jour du solstice, si le solstice arrivait à midi. Cette circonstance n'ayant jamais lieu que pour un seul méridien terrestre, il serait comme impossible de s'y astreindre. Mais on doit remarquer que, lorsque le soleil approche du tropique, ses hauteurs méridiennes varient très-peu d'un jour à l'autre, et le jour qu'il est dans son dernier paral-

lèle, il reste presque constamment à la même distance de l'équateur. Ainsi, dans quelque lieu que l'on ait observé la plus grande déclinaison du soleil, on pourra, dans une première approximation, la considérer comme égale à l'obliquité de l'écliptique; je dis dans une première approximation, parce que l'on verra bientôt qu'il existe des méthodes, au moyen desquelles on peut calculer ce qu'il faut ajouter au résultat de l'observation directe, pour le ramener à ce qu'il aurait été si l'on eût observé à l'instant précis du solstice.

Dans notre tableau d'observations, les plus grandes déclinaisons du soleil sont 26°,07212 et 26,07199. L'obliquité de l'écliptique, peut donc être considérée, dans une première approximation, comme égale à 26°,07205, pour l'année 1807.

On obtiendrait de même l'obliquité de l'écliptique, sans connaître la latitude, en observant les distances méridiennes du soleil au zénith, dans les deux solstices, et prenant la moitié de leur différence. Car les rayons visuels, menés du centre de la terre aux deux solstices, étant dirigés suivant une même ligne droite, doivent faire avec l'équateur des angles égaux.

Par exemple, dans notre tableau d'observations, les distances du soleil au zénith dans les deux solstices sont 80°,33570 le 22 décembre 1806; et 28,19159 le 22 juin 1807. Leur différence est 52°,14411, dont la moitié 26°,07205 est la valeur très-approchée de l'obliquité en 1807.

14. Quand on connaît l'obliquité de l'écliptique, il suffit d'observer une seule déclinaison du soleil pour trouver la position des points équinoxiaux. En effet, en reprenant la *fig.* 3, si S' est la position méridienne du soleil pour un certain jour, on connaîtra par l'observation la déclinaison $S'Q'$.

Alors dans le triangle sphérique $S'Q'E$ rectangle en Q', on aura le côté $S'Q'$ et l'angle opposé $S'EQ'$, égal à l'obliquité de l'écliptique. On pourra donc par les règles de la trigonométrie sphérique calculer le côté EQ' qui est l'ascension droite du soleil par rapport au point équinoxial E (*).

Si de plus on observe, le même jour, la différence d'ascension droite entre le soleil et une étoile, qui passe au méridien après lui, et qu'on ajoute au résultat l'arc $Q'E$; on aura l'ascension droite de l'étoile, par rapport au point équinoxial E. La position de ce point sur l'équateur sera donc très-rigoureusement déterminée, ainsi que celle de l'équinoxe opposé e, qui en est à $200°$ de distance. On répétera cette opération un grand nombre de fois, pour les mêmes étoiles, afin d'éviter les petites erreurs que les observations comportent; puis, prenant une moyenne entre tous les résultats, on connaîtra la distance de l'équinoxe à chaque étoile, et par conséquent la position de la ligne des équinoxes avec une extrême précision.

15. Une ligne droite perpendiculaire au plan de l'écliptique et menée par le centre de la terre, s'appelle *l'axe de l'écliptique*, par analogie avec l'axe de l'équateur. Les deux points opposés, où cette droite prolongée perce la sphère céleste, s'appellent les *pôles de l'écliptique.* On appelle *pôle boréal* celui qui est situé du côté boréal de l'équateur, l'autre s'appelle le *pôle austral.*

Les axes de l'équateur et de l'écliptique étant tous deux perpendiculaires à leurs plans respectifs, l'angle qu'ils forment entre eux est égal à l'inclinaison de ces plans ou à $26°,0720$ en l'an 1807. Ainsi, la distance angulaire

(*) Soit ω l'obliquité de l'écliptique, d la déclinaison du soleil, a son ascension droite. D'après la note de la page 16, la formule est

$$\sin a = \frac{\tang d}{\tang \omega}.$$

des pôles de l'écliptique au plan de l'équateur, est égale à 100° — 26°,0720, ou à 73°,9280.

Les deux parallèles célestes qui ont cette déclinaison de part et d'autre de l'équateur, se nomment pour cette raison *cercles polaires*.

Il est facile de trouver le lieu des pôles de l'écliptique dans le ciel ; car on connaît déja les parallèles, sur lesquels ils sont placés. On sait de plus qu'ils sont dans un même plan, perpendiculaire à l'équateur et à l'écliptique, par conséquent aussi perpendiculaire à la ligne des équinoxes. La trace de ce plan sur l'équateur sera donc à 100° de distance des points équinoxiaux ; ainsi l'ascension droite du pôle austral de l'écliptique sera de 100°, celle du pôle boréal de 300° ; ces ascensions droites étant comptées depuis l'équinoxe du printems, et d'occident en orient, dans le sens du mouvement propre du soleil (*).

Le pôle boréal de l'écliptique est le seul que nous puissions appercevoir en Europe. Il est maintenant situé dans la constellation du Dragon, entre deux étoiles que l'on

---

(*) Ces résultats sont encore représentés dans la *fig.* 3. CP est l'axe de l'équateur, P son pôle boréal que nous voyons en Europe : de même $P'CP''$ est l'axe perpendiculaire à l'écliptique, dont P' est le pôle boréal et P'' le pôle austral. Le point E représente l'équinoxe du printems, et le point e l'équinoxe d'automne. Cela posé, si l'on conçoit le méridien qui passe par les deux axes CP, CP', il est évident qu'il coupera l'équateur suivant la ligne Qq perpendiculaire à la ligne des équinoxes ; et en projetant les points P', P'' sur l'équateur, par le moyen des cercles horaires qui leur correspondent, il est visible que l'ascension droite du point P'' ou du pôle austral de l'écliptique comptée du point E, sera égale à l'arc QE ou à 100°, tandis que l'ascension droite du point opposé P', c'est-à-dire, du pôle boréal, comptée du même équinoxe, sera égale à $EQeq$, ou 300°.

nomme ζ et δ. Il est un peu plus près de la dernière étoile.

16. La position de l'orbe solaire étant ainsi complètement déterminée, on peut calculer le lieu du soleil dans l'écliptique, d'après la seule connaissance de sa déclinaison ou de son ascension droite. En effet, considérons de nouveau le triangle sphérique $S'EQ'$ *fig.* 3. La position du soleil est déterminée par l'angle $S'CE$ que forme le rayon visuel $S'C$ avec le signe des équinoxes. C'est ce que l'on nomme la *longitude du soleil.* Or, cet angle ou l'arc ES' qui le mesure est facile à calculer, lorsque l'on connaît l'obliquité de l'écliptique et la déclinaison ou l'ascension droite du soleil (*).

17. En répétant chaque jour la même observation et le même calcul, on connaîtra successivement les angles décrits par le soleil sur l'écliptique, à partir de l'équinoxe, ou les longitudes du soleil.

Ces longitudes se comptent, comme les ascensions droites, depuis l'équinoxe du printems, et de 0° à 400°, dans le sens du mouvement du soleil. En prenant leur différence d'un jour à l'autre, on connaîtra la marche diurne de cet astre sur le plan de l'écliptique.

Quand on aura réuni un grand nombre d'observations de ce genre, on pourra en former des tables qui indiqueront d'avance, pour chaque jour et chaque instant du jour, la longitude du soleil, à partir de l'équinoxe, et sa déclinaison. Ce seront des *tables du soleil.* On pourra, si l'on

---

(*) Soit ω l'obliquité de l'écliptique, a l'ascension droite, d la déclinaison observée, l la longitude du soleil que l'on cherche. Selon qu'on voudra la déduire de la déclinaison ou de l'ascension droite, on emploiera l'une ou l'autre de ces formules

$$\sin l = \frac{\sin d}{\sin \omega}, \qquad \tang l = \frac{\tang a}{\cos \omega}.$$

veut, les calculer en tems sydéral compté depuis le passage du point équinoxial au méridien d'un lieu déterminé. Ou bien si l'on veut on peut les calculer en tems moyen, en fixant l'origine de ce tems à un phénomène astronomique connu. C'est ce que font les astronomes, comme nous l'avons déja annoncé. Dans ces tables, les différences des longitudes, d'un jour à l'autre, pourront être très-exactes, parce qu'elles redeviennent les mêmes chaque année, et qu'elles se reproduisent dans le même ordre, ce qui permet de les corriger avec le tems. S'il reste quelqu'incertitude, elle portera donc sur l'*époque* à laquelle le soleil aura eu telle longitude; par exemple, sur l'instant de l'équinoxe. Il pourra aussi rester quelque doute sur la véritable valeur de l'obliquité. Ainsi, pour perfectionner les tables, il faudra s'attacher à rectifier ces deux élémens.

La recherche des mouvemens du soleil a donc, comme tous les problêmes d'astronomie, deux parties très-distinctes : la formation des tables, d'après les premiers résultats observés; la correction de ces tables, en supposant leurs élémens à-peu-près connus.

18. Le premier que l'on cherche à bien déterminer est l'obliquité de l'écliptique. Quinze jours avant et après le solstice, l'astronome commence à observer les hauteurs méridiennes du soleil avec le mural, ou mieux encore avec le cercle répétiteur, pour en conclure les déclinaisons. Celle qu'il observe le jour du solstice, serait la plus grande possible, si le solstice arrivait à midi; mais il peut arriver un demi-jour plutôt ou plus tard : dans cet intervalle la longitude change d'environ $0°,55$, en supposant le mouvement du soleil de $1°,1$ par jour, ce qui est à-peu-près sa valeur moyenne. Or, $0°,55$ d'erreur sur la longitude ne donnent que $0°,0020$ d'erreur sur la déclinaison solsticiale, parce que très-près du solstice, les déclinaisons du soleil devenant perpendiculaires à l'écliptique, un petit

changement sur la longitude en produit un beaucoup plus faible sur la déclinaison. Telle est donc la plus grande erreur que l'on puisse commettre en déterminant directement la déclinaison solsticiale par une observation faite le jour *même du solstice* (*).

Mais on peut corriger cette erreur en calculant, d'après les tables déja faites, la quantité dont le soleil est encore éloigné du solstice à l'instant où on l'a observé; car de là on peut conclure avec beaucoup d'exactitude ce qui manque à sa déclinaison pour atteindre la déclinaison solsticiale. En ajoutant cette quantité à la déclinaison observée le jour même du solstice on aura la déclinaison solsticiale, c'est-à-dire, l'obliquité de l'écliptique, avec toute l'exactitude qu'on peut attendre de l'observation; avec la même précision que si le *solstice fût arrivé* à midi même. Le calcul de cette réduction, comme celui des hauteurs observées près du méridien, n'exige pas des données bien précises: il suffit que l'on connaisse approximativement l'obliquité de l'écliptique et la longitude du soleil.

On peut faire un semblable calcul pour les jours qui précèdent et pour ceux qui suivent; toujours avec la même exactitude. On peut donc ainsi réunir les observations de 20 et 30 jours, les ***réduire au solstice***, par le secours des tables; et le résultat moyen déduit de leur ensemble, donnera la déclinaison solsticiale avec la dernière précision, sur-tout en calculant les réductions au solstice par les tables modernes qui sont déja si parfaites.

L'obliquité de l'écliptique, déduite de ces observations, est encore assujétie à une cause d'erreur extrêmement petite à la vérité, mais dont il faut toutefois la dépouiller pour obtenir la dernière exactitude. Cette

(*) *Cette proposition sera démontrée dans la note de la page 30.*

erreur tient à ce que la route du soleil dans le ciel, ou l'écliptique, n'est pas tout-à-fait plane. Cependant comme cet écart est extrêmement petit, les astronomes conservent, pour plus de simplicité, l'idée d'une orbite plane, et ils regardent les écarts du soleil au-dessus et au-dessous de ce plan, comme de petites inégalités dont ils tiennent compte, de manière à ramener toujours cet astre par le calcul dans le plan de l'écliptique. En effet, cette réduction rend toutes les observations comparables. La théorie de l'attraction a fait connaître que ces petites oscillations sont dues à l'action de la lune et des planètes qui, déplaçant un peu le centre de la terre, le font sortir du plan de l'écliptique, et y causent les petits dérangemens que nous reportons au soleil, parce que nous nous croyons immobiles, de sorte que cet astre nous semble les éprouver en sens contraire. En même tems, la théorie a donné la loi de ces dérangemens, et on les trouve dans les tables du soleil, sous le titre de *mouvement du soleil en latitude*. Comme ils affectent la déclinaison de cet astre, leur effet se porterait en entier sur l'obliquité conclue des déclinaisons solsticiales, et par conséquent il faut d'abord en dépouiller ces dernières pour obtenir l'obliquité véritable.

Enfin, pour ramener tous les résultats à des termes exactement comparables, il faut encore les corriger des petites variations périodiques que l'obliquité subit, et qui tantôt l'augmentent, tantôt la diminuent. Nous parlerons plus loin de ces petites oscillations. En attendant, on peut concevoir qu'il faut en tenir compte pour avoir les valeurs de l'*obliquité moyenne*, qui seules sont comparables entre elles.

C'est par cette méthode, ainsi corrigée, et appliquée avec tout le soin imaginable, que M. Delambre a trouvé l'obliquité moyenne de l'écliptique pour 1800, égale à 26°.07315. C'est 23°.27'.57'' en mesures sexagésimales (*).

19. Passons maintenant aux équinoxes : pendant un mois entier, moitié avant, moitié après l'équinoxe, on observe

---

(*) Soit D la déclinaison du soleil déduite de sa hauteur méridienne observée à une époque peu distante du solstice ; soit ω l'obliquité de l'écliptique, et L la longitude du soleil correspondante à la déclinaison D. Cela posé, dans le triangle sphérique rectangle formé par la longitude L, la déclinaison D et l'ascension droite, la proportionnalité des sinus des angles à ceux des côtés opposés donnera, comme dans la note de la page 26,

$$\sin D = \sin \omega \sin L.$$

Si l'observation tombait à l'instant même du solstice, la déclinaison du soleil serait exactement égale à l'obliquité de l'écliptique, et sa longitude serait égale à un angle droit ; on aurait donc alors $D = \omega$ et $L = 100^\circ$; mais puisque, par supposition, l'observation est faite très-près de cette époque, on aura

$$D = \omega - D', \quad L = 100^\circ - L',$$

D' et L' étant de très-petites quantités. En substituant ces valeurs dans la relation précédente, elle devient

$$\sin \omega \cos D' - \cos \omega \,.\, \sin D' = \sin \omega \,.\, \cos L'.$$

En mettant pour $\cos D'$ et $\cos L'$ les valeurs équivalentes $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} D'$, $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} L'$, le terme $\sin \omega$ se détruit dans les deux membres ; et en changeant tous les signes de l'équation et divisant par $\cos \omega$, il reste

$$2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} D' + \sin D' = 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L'.$$

A l'inspection de cette équation, on voit que $\sin D'$ est une fraction très-petite de l'ordre de $\sin^2 \frac{1}{2} L'$; par conséquent, $\sin^2 \frac{1}{2} D'$ est une fraction encore bien plus petite. En la négligeant par rapport à la première, nous aurons d'une manière fort approchée

$$\sin D' = 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L'.$$

Mais veut-on pousser plus loin l'approximation, ce qui est quelque-chaque jour la hauteur du soleil aux environs du méridien avec le cercle répétiteur, et l'on en conclut la déclinaison méridienne pour chaque jour. Avec cette déclinaison et l'obliquité connue, on calcule la longitude du soleil.

Cette longitude, étant comparée avec celle que don-

---

fois nécessaire quand la déclinaison observée est éloignée de 8 ou 10° du solstice? Il n'y a qu'à considérer que la valeur exacte de sin D' est

$$\sin D' = 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L' - 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} D'.$$

Si la valeur de sin D', donnée par le premier terme seul, n'est pas tout-à-fait exacte, du moins elle le sera assez pour qu'on puisse la substituer dans le dernier terme $2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \frac{1}{2} D'$, qui est bien plus petit que le premier. On pourra même, dans cette substitution, prendre pour $\sin \frac{1}{2} D'$ la valeur $\frac{1}{2} \sin D'$, ce qui revient à substituer le rapport des arcs à celui des sinus : on aura donc aussi, relativement à ce dernier terme, $\sin \frac{1}{2} D' = \operatorname{tang} \omega \sin^2 \frac{1}{2} L'$; et cette valeur étant en effet substituée dans l'équation précédente, on a, par cette seconde approximation,

$$\sin D' = 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L' - 2 \operatorname{tang}^3 \omega \sin^4 \tfrac{1}{2} L'.$$

Cette valeur de sin D' sera suffisamment exacte, même à 20° du solstice, c'est-à-dire, quand même on aurait $L' = 20°$.

Au moyen de cette formule, on peut aisément *réduire au solstice* une observation de hauteur méridienne du soleil faite avant ou après cette époque, mais toujours à un intervalle peu éloigné. Pour cela, on calculera par les tables astronomiques déjà formées, quelle a dû être la longitude du soleil à l'époque de l'observation; ce sera la valeur de L : on la retranchera de 100°, et le reste sera L', ou la distance du soleil au solstice à l'époque de l'observation. Connaissant L', on aura tout de suite D' par la formule précédente; et D' ajouté à la déclinaison observée D, donnera la déclinaison solsticiale $D + D'$, précisément comme si on l'eût observée à l'instant du solstice même.

Il est évident que, dans cette manière d'opérer, il ne peut y avoir d'incertitude que sur la valeur de L' donnée par les tables que nous supposons imparfaites. Supposons donc que cette valeur nent les tables, fait connaître l'erreur dont ces tables sont affectées. Or, d'après l'ensemble d'observations sur lesquelles elles sont construites, sur-tout d'après la régu-

---

au lieu d'être L' soit $L'+e=L''$, e étant l'erreur que les tables comportent; et pour voir l'altération qui en résultera sur D', bornons-nous au premier terme de sin D' qui donne

$$\sin D' = 2 \tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L'.$$

Maintenant, si l'on suppose que la substitution de L'' pour L' change D' en D'', on aura de même

$$\sin D'' = 2 \tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L''.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, et mettant pour les différences des sinus leurs valeurs en fonctions de la différence des arcs, on trouve

$$\sin \tfrac{1}{2}(D''-D') \cos \tfrac{1}{2}(D''+D') = \tang \omega \sin \tfrac{1}{2}(L''-L') \sin \tfrac{1}{2}(L''+L').$$

$D''-D'$ est l'erreur de la déclinaison solsticiale correspondante à l'erreur $L''-L'$ de la longitude. Si nous nous bornons aux premières puissances de ces petits arcs, on pourra substituer leur rapport à celui de leurs sinus. On pourra ensuite faire $L''=L'$ et $D''=D'$ dans les autres termes de l'équation; on aura ainsi

$$D''-D' = \frac{e \tang \omega \sin L''}{\cos D''}.$$

On peut encore simplifier un peu cette expression en substituant l'unité au dénominateur cos D''; car dans ce calcul nous nous bornons à la première puissance de sin D'', et comme . . . . $\cos D'' = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} D''$, on voit que la différence de cos D'' à l'unité est de l'ordre des termes que nous négligeons. On aura donc ainsi, par une approximation suffisante,

$$D''-D' = e \tang \omega \,.\, \sin L''.$$

On voit par cette formule que l'erreur de la déclinaison est bien moindre que l'erreur e de la longitude, puisque celle-ci est multipliée par le facteur sin L'', qui est très-petit dans les observations faites à peu de distance du solstice, et qui devient nul au solstice même. Pour en apprécier l'influence, supposons que larité des formules algébriques, sur lesquelles elles sont calculées, il est évident que l'erreur qu'elles comportent ne peut pas varier brusquement d'un jour à

---

l'on n'ait, pour évaluer L'', que des tables imparfaites, qui puissent donner une erreur d'un demi-jour sur l'instant du solstice, et par conséquent, une erreur de 0°.55 sur la longitude; de sorte qu'on ait $c = 0°.55$: alors il faudrait se borner à observer le plus près possible du solstice, par exemple, le jour du solstice même. Dans ce cas la distance au solstice étant au plus d'un demi-jour, il est clair que L'' serait au plus égal à 0°.55, en supposant le mouvement diurne du soleil égal à 1°,1 comme nous l'avons fait dans le texte. Dans ces suppositions exagérées, on aurait

$$D'' - D' = 0°.55 \cdot \sin \cdot 0°.55 \cdot \text{tang}\ 26°.0720,$$

en prenant 26°.0720 pour l'obliquité de l'écliptique. Cette formule, évaluée numériquement, par les tables trigonométriques, donne $D'' - D' = 0°,00206$, ou 6″,7 en mesures sexagésimales.

Mais si au lieu d'employer de pareilles tables pour calculer L'', on en emploie d'autres moins imparfaites, dont l'erreur soit 100 fois plus petite et ne s'élève qu'à 0°,0055, l'erreur de la déclinaison solsticiale, conclue d'une observation faite le jour même du solstice, deviendra aussi 100 fois moindre, et sera réduite à 0°0000206, ou 0″,067 en mesures sexagésimales, quantité déja presqu'insensible.

Une erreur de 0°,0055 sur la longitude du soleil répond à 5′ de tems décimal, ou à $0^h.0500$, à raison de 1°,1 pour un jour. Dans nos tables astronomiques actuelles, l'erreur en tems s'élève bien rarement à $0^h\ 0050$, ce qui réduit proportionnellement l'erreur c de la longitude à 0°.000055, en sorte qu'à distance égale du solstice, elle est 100 fois moindre que la précédente. L'erreur correspondante de la déclinaison solsticiale deviendra donc aussi 100 fois plus petite, c'est-à-dire, qu'elle se trouvera réduite à 0°.000000206, quantité tout-à-fait insensible. En raison de cette petitesse, on peut ne pas borner les observations au jour même du solstice, comme nous venons de le supposer. On peut les étendre jusqu'à quinze jours avant et après le solstice, sans que l'erreur des tables devienne sensible par la réduction.

On trouvera à la fin de ce livre un exemple numérique de ces réductions au solstice.

l'autre, et qu'elle doit ainsi rester à-peu-près la même pendant le court intervalle de quelques jours consécutifs. Si donc l'observation de hauteur méridienne à laquelle on compare les tables pouvait être supposée tout-à-fait exacte, la correction qui s'en déduirait pourrait être encore appliquée à tous les jours suivans; et avec les tables ainsi corrigées, on pourrait calculer exactement l'instant de l'équinoxe. Mais comme on ne peut pas espérer qu'une seule observation de hauteur donne l'erreur des tables avec toute la précision requise, on répète les observations de hauteur plusieurs jours avant et après l'équinoxe, comme nous l'avons dit; et chaque observation étant calculée à part, donne une valeur de l'erreur des tables solaires. On a ainsi 20 ou 30 observations de cette erreur, qui s'accordent à très-peu-près, et l'on prend une moyenne arithmétique entre elles. Avec les tables, corrigées de cette erreur moyenne en longitude, on calcule l'instant de l'équinoxe, ce qui est facile, puisqu'à cet instant la longitude doit être o dans un équinoxe de printems, ou 200°. dans un équinoxe d'automne Dans ce calcul, il faut entendre que les tables ont égard aux petites perturbations qui écartent le soleil de sa marche uniforme, et particulièrement à la petite inégalité qui le fait osciller de part et d'autre du plan de l'écliptique, comme nous l'avons dit en parlant de l'obliquité.

Si l'on ne veut pas se servir des tables, on verra par la comparaison des distances au zénith observées chaque jour, à quelle heure, de quel jour, la distance du soleil au zénith aura été égale à la hauteur du pôle. Ce sera l'instant de l'équinoxe. C'est ainsi que nous en avons usé plus haut. Mais cette méthode pour être tout-à-fait admissible, exigerait une interpolation fort exacte, qui serait peut-être moins commode que le calcul rigoureux fondé sur les tables, et les astronomes ne s'en servent point.

20. Ces méthodes supposent toujours que l'on connaît exactement la distance de l'équateur au zénith du lieu où l'on observe, c'est-à-dire, la latitude. Cependant on pourrait craindre qu'il ne restât encore à cet égard quelque incertitude. Pour la faire disparaître, on observe de même l'équinoxe opposé, et on prend un milieu entre les erreurs des tables qui en résultent. Il est visible, en effet, que l'erreur de la latitude étant la même dans les deux équinoxes, a sur la longitude du soleil une influence contraire selon que cet astre monte ou descend vers l'équateur.

21. Maintenant que nous savons déterminer avec la plus grande exactitude la position des équinoxes et des solstices, nous pouvons considérer l'arrivée du soleil dans ces points du ciel, comme des phénomènes astronomiques propres à établir de grandes divisions du tems, qui se subdivisant elles-mêmes en périodes plus petites, permettent de fixer facilement les époques des événemens historiques, et de désigner commodément tous les instans de la durée. Cette belle application de l'astronomie va nous occuper dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Du Calendrier.

22. C'EST le mouvement du soleil qui détermine les diverses périodes employées dans la société pour la distribution du tems. Le choix de ces périodes et l'ordre de cette distribution composent ce que l'on appelle le *calendrier*.

23. Le tems que le soleil emploie à revenir au même équinoxe, ou en général au même point de l'écliptique, forme *l'année tropique*. Sa durée a de tout tems intéressé les hommes. C'était, en effet, une mesure naturelle des travaux qui demandent de longs intervalles, et qui dépendent du changement des saisons : sa connaissance était nécessaire pour l'agriculture, le commerce et les voyages; aussi a-t-on mis beaucoup de soin à la déterminer.

Ce qui se présente d'abord de plus simple, c'est de savoir combien l'année contient de jours solaires, sans avoir égard à leur inégalité. Pour le connaître, il suffirait de tracer sur un plan horisontal une méridienne, d'y planter un style vertical de longueur invariable, et d'examiner tous les jours, à midi, la longueur de l'ombre. Le jour où elle atteint sa plus petite longueur serait celui du solstice d'été, et le nombre de jours écoulés entre deux retours consécutifs du soleil au même solstice, donnerait la durée entière de sa révolution. On trouverait ainsi que l'année tropique contient environ trois cent soixante cinq jours, et c'est par cette méthode que les premiers astronomes paraissent l'avoir observée.

On a pu se borner d'abord à ce résultat, mais son inexactitude n'a pas dû tarder à devenir sensible, par l'accumulation des erreurs. En observant le même solstice pendant plusieurs années consécutives, on le voit arriver plus tard qu'il ne devrait, si l'année était exactement de 365 jours; l'erreur est de quinze jours en soixante ans. On a connu par là, que l'année était plus grande d'un quart de jour qu'on ne l'avait faite d'abord, et l'on a pris pour sa durée $365^j,25$.

Cette valeur, beaucoup plus approchée que la précédente, est encore bien loin d'être exacte. Hipparque, en comparant une observation de solstice faite par lui-même, avec une autre faite par Aristarque, cent quarante-cinq ans auparavant, trouva que le dernier solstice était arrivé un demi-jour plutôt qu'il n'aurait dû, si l'année eût été de $365^j,25$; c'était donc $0^j,5$ d'erreur en cent quarante-cinq ans, ou $0^j 00345$ par année; de là résulte la longueur de l'année, égale à $365^j,24655$.

24. Cette valeur elle-même a besoin de corrections, et la véritable année moyenne, telle que la donnent les dernières tables de M. Delambre est égale à $365^j,242264$. L'erreur des anciennes évaluations tient sur-tout à l'inexactitude des observations des solstices. En effet, les hauteurs méridiennes du soleil, croissant, vers cette époque, par des degrés insensibles; l'ombre du style suit les mêmes périodes, et il est impossible de reconnaître exactement l'instant où le soleil doit arriver au solstice. On évite cet inconvénient en déterminant, par observation, deux époques dans lesquelles la hauteur méridienne du soleil est exactement la même, et toujours croissante ou décroissante également.

L'intervalle de ces deux époques donne la durée moyenne de la révolution entière du soleil. C'est sur-tout vers les équinoxes que ce genre d'observation se fait avec le plus d'avantage, parce qu'alors les hauteurs méridiennes du soleil changent très-sensiblement d'un jour à l'autre. Aussi Hipparque observa-t-il plusieurs équinoxes dans cette intention. Mais l'imperfection de ses instrumens était trop grande pour qu'il pût conclure la longueur de l'année par des observations aussi rapprochées les unes des autres; et il fallait attendre un grand nombre de siècles pour que leur incertitude fût compensée par l'éloignement. Aujourd'hui que la perfection des instrumens a rendu les observations beaucoup plus sûres, cette méthode est encore celle que les astronomes mettent en usage, pour déterminer la vraie longueur de l'année tropique.

25. Si le mouvement propre du soleil était parfaitement uniforme, il suffirait d'observer deux équinoxes avec toute la précision des procédés que nous avons décrits; et en comptant le nombre de jours, et de fractions de jours solaires, qui se seraient écoulés entre ces deux époques, ce nombre serait la vraie longueur de l'année. Mais les inégalités du mouvement propre du soleil altèrent cette simplicité, et rendent le problême beaucoup plus difficile. Car il en résulte que cet astre ne revient pas toujours aux mêmes équinoxes, après des intervalles de tems exactement égaux; et comme les causes et les effets de ces variations ne peuvent être appréciés que par la théorie de la *pesanteur universelle; on voit qu'il faut s'élever jusque* là avant de pouvoir dépouiller complètement le mouvement du soleil de ces irrégularités, et par conséquent aussi avant de déterminer avec la dernière précision la durée moyenne de l'année tropique. Ceci est encore un nouvel exemple des

approximations successives auxquelles l'astronomie est sans cesse obligée d'avoir recours.

Nous pouvons toutefois éluder une partie de ces difficultés, et trouver dès à-présent, sans aucune pétition de principes, une valeur très-approchée de l'année moyenne. En effet, on verra par la suite, que les inégalités du mouvement du soleil sont de deux sortes. Les unes que l'on appelle *périodiques*, se développent tout entières dans l'intervalle d'une année ou d'un petit nombre d'années; et après cet intervalle de tems, elles se compensent d'elles-mêmes, en repassant par les mêmes valeurs; de sorte qu'elles font osciller continuellement le soleil autour d'un état moyen dont il s'écarte peu. Les autres inégalités au contraire sont comprises dans des périodes si longues, qu'on les a nommées *séculaires*, et elles ont été continuellement croissantes ou décroissantes depuis les plus anciens astronomes jusqu'à nous. Leurs effets accumulés doivent donc inévitablement se faire sentir dans la comparaison des anciennes observations avec les nôtres. Mais il n'en est pas de même des inégalités périodiques; celles-ci ont dû se compenser d'autant plus de fois, qu'il s'est écoulé plus de tems entre les époques que l'on compare. Par conséquent, tous leurs effets intermédiaires doivent disparaître quand on compare des équinoxes fort éloignés; et il ne doit rester de leur influence que ce qui appartient à la première époque et à la dernière. Or cette influence s'affaiblit beaucoup dans le résultat moyen où elle est divisée par le nombre des années comprises entre les observations que l'on compare; et l'on pourrait imaginer des observations assez éloignées les unes des autres, pour que l'effet des erreurs extrêmes fût tout-à-fait insensible. C'est absolument ce même principe qui fait que dans les observations au cercle répétiteur, l'arc moyen n'est affecté que des erreurs extrêmes et nullement des défauts intermédiaires de la division.

L'année moyenne conclue de cette manière, par la comparaison d'un de nos équinoxes avec un ancien équinoxe, observé, par exemple, par Hipparque, pourrait donc être regardée comme indépendante des inégalités périodiques du mouvement du soleil, et affectée seulement par les inégalités séculaires. Mais outre que celles-ci sont fort petites, on conçoit qu'elles n'ont pu être déterminées et corrigées que dans une seconde approximation. Par conséquent il ne faut pas espérer de les éviter d'une autre manière. Seulement après avoir prévenu de leur existence, nous supposerons pour abréger qu'on y a eu égard, et nous emploierons dès à présent la durée définitive de l'année moyenne $365^j,242264$. Cette espèce d'anticipation dont nous avons déja fait plusieurs fois usage, n'ôte rien à la rigueur des raisonnemens, quand on en conçoit bien l'esprit ; et qu'on y voit seulement un moyen d'éviter la nécessité de revenir sur ses pas, pour effectuer les approximations successives que les astronomes ont employées et dont il suffit de bien sentir la nécessité.

26. Pour appliquer ces résultats à la vie civile, et rendre leur usage vulgaire, il faut les présenter dégagés des fractions qui les accompagnent et qui les rendraient trop difficiles à retenir.

La première idée qui se présente, c'est de négliger ces fractions. On a dès-lors des années de trois cent soixante-cinq jours. Elles ont été autrefois en usage, comme nous l'avons dit précédemment; mais leur inexactitude, devenant sensible après de très-petits intervalles, les a fait abandonner, lorsqu'on a été plus instruit en astronomie.

Leur principal inconvénient était de porter successivement l'origine de l'année dans les diverses saisons ; car la petite différence $0^j,242264$ produit, à très-peu près, un jour en quatre ans, et une année de trois cent soixante-cinq jours un quart, en 1508 ans, de sorte qu'après cet intervalle, on aurait une année en arrière, et l'on se retrouverait dans la même saison.

Les Égyptiens paraissent avoir connu cette période, mais ils la faisaient de 1460 ans, parce qu'ils supposaient l'année de $365^j,25$. C'est ce que l'on nomme la *période sothiaque*.

27. On pourrait encore faire abstraction du nombre de jours que contient l'année, et en regarder le commencement et la fin, comme des phénomènes astronomiques, que l'on fixerait par les retours du soleil à un même équinoxe. Telle a été pendant quelque tems en France l'année prescrite par la loi. Elle commençait à minuit, avec le jour dans lequel arrivait l'équinoxe vrai d'automne, à Paris. Chaque année était divisée en douze *mois* de trente jours, après lesquels on plaçait cinq jours, que l'on nommait *complémentaires*. Cette manière de compter les années, avait pour *ère*, c'est-à-dire, pour origine, le 22 septembre 1792, jour de la fondation de la république. Mais comme les retours du soleil au même équinoxe ne comprennent pas un nombre entier de jours, et qu'il s'y joint une fraction, on voit qu'en adoptant cette méthode, les années ne sont plus des périodes de tems faciles à décomposer en jours ; ce qui est un très-grand défaut pour la chronologie, déjà embarrassée par tant d'autres incertitudes.

28. Pour éviter ces inconvéniens, on a imaginé la méthode des *intercalations*. Elle consiste à donner à l'année civile 365 jours, en prenant soin de corriger la petite erreur annuelle, avant qu'elle se soit accumulée, et lorsqu'elle s'élève seulement à un jour. De cette manière,

les corrections sont assez fréquentes ; mais aussi *l'année civile* ne fait qu'osciller dans des limites peu étendues, autour de l'année moyenne véritable, et l'influence de cette erreur sur les travaux de la société, est tout-à-fait insensible. On sent d'ailleurs qu'il ne faut s'occuper ici que de l'année moyenne; car pour les usages civils, on n'a pas besoin de tenir compte des petites inégalités périodiques qui font varier les retours du soleil à un même équinoxe, tantôt en plus, tantôt en moins.

L'intercalation la plus simple est celle d'un jour tous les quatre ans. Elle suppose l'année moyenne de $365^j,25$ ou 365 jours un quart, ce qui est peu différent de la vérité. Cette intercalation fut prescrite par *Jules César*, et prit, de lui, le nom de *correction julienne*. Suivant cette manière de compter, les *années communes* sont de 365 jours ; elles sont partagées en douze mois de trente ou de trente-un jours, à l'exception de février qui n'en a que vingt-huit. Le jour intercalaire se place, tous les quatre ans, à la fin de février. L'année a alors 366 jours, et prend le nom de *bissextile* : en sorte que, suivant cette règle, il y a toujours trois années communes entre deux bissextiles. L'assemblage de cent années juliennes de $365^j,25$ forme le *siècle*, qui est la plus longue des périodes employées dans la société pour mesurer le tems, et qui suffit jusqu'à présent à la chronologie (*).

29. Il ne faut pas confondre la correction julienne avec la *période julienne*, inventée par Scaliger : celle-ci est une période artificielle qui sert à fixer la date des événemens historiques, d'après les positions simultanées du soleil et de la lune ; nous en parlerons plus loin.

(*) Quoique la division des mois en jours soit connue de tout le monde, cependant, comme on a souvent besoin, dans les calculs astronomiques, de connaître le nombre précis de jours compris entre

30. L'intercalation julienne s'est transmise à tous les peuples de l'Europe, mais leur ère est différente de celle des Romains, qui comptaient depuis la fondation de Rome. Dans l'*ère chrétienne*, on compte les années depuis la naissance de Jésus-Christ, ou plutôt depuis une certaine année fixée astronomiquement par rapport à nous, et à laquelle on rapporte cet événement, dont l'époque précise est incertaine, comme on le voit par les opinions diverses des chronologistes (*). Mais cela est indifférent pour la progression successive des années; et l'origine de l'ère est tout-à-fait arbitraire. Il suffit qu'on ait fixé une seule des années, par l'observation de quelque phénomène astronomique. Or, on sait que, lors de la tenue du concile de Nicée, l'équinoxe arrivait le 21 mars, et, suivant les calculs des chronologistes, il devait, à l'instant de cet équinoxe, s'être écoulé depuis l'ère chrétienne 325 ans. Il n'en faut pas davantage pour rattacher toute la chronologie à cette époque, et rapporter toutes les ères à l'ère chrétienne.

---

deux dates prises en différens mois, je rapporterai ici les nombres de jours de chaque mois dans le tableau suivant :

ANNÉE COMMUNE.

	jours.		jours.
Janvier.	31	Juillet.	31
Février	28	Août	31
Mars	31	Septembre	30
Avril.	30	Octobre	31
Mai.	31	Novembre	30
Juin.	30	Décembre	31

Si l'année est bissextile, ajoutez un jour au mois de février.

(*) D. Petav. *ration. temp. pars secunda*, page 16. Paris, 1652, in-12.

31. On continua à compter de cette manière jusqu'en 1582; mais comme on supposait l'année de 365 ,25, tandis qu'elle n'est réellement que de $365^j,242264$, la petite différence annuelle $0^j,007736$, s'était accumulée, et avait produit en 1257 ans, $9^j,72415$, c'est-à-dire, environ dix jours dont on était en retard sur l'année solaire. Les équinoxes s'éloignaient donc successivement de l'instant de l'année auquel le concile de Nicée les avait rapportés, et la différence était à-peu-près d'un jour en 132 ans. Ce fut ce qui porta le pape Grégoire XIII à faire, dans le calendrier, un nouveau changement auquel on donna le nom de *réforme grégorienne.*

On commença par réparer le retard des dix jours, en ordonnant que le lendemain du 4 octobre 1582 s'appellerait, non le 5, mais le 15 octobre. On continua ensuite à employer l'intercalation julienne, d'un jour tous les quatre ans; en sorte que *toutes les années dont le nombre est divisible par quatre sont bissextiles.* Mais on convint de supprimer ce jour intercalaire dans les années séculaires 1700, 1800 et 1900, en le laissant subsister dans l'an 2000, et ainsi de suite à perpétuité, de sorte que *trois années séculaires communes sont toujours suivies d'une année bissextile.* Cette intercalation très-simple est en même tems très-approchée de l'exactitude, car la différence annuelle 0 ,007736 de l'intercalation julienne, donne après quatre cents ans $3^j,0944$, c'est-à-dire, à peu près, trois jours, qu'il faut ajouter. L'erreur de l'intercalation séculaire n'est donc que de $0^j,0944$, en 400 ans; ou de $0^j,944$ en 4000 ans. Elle est donc plus que suffisante pour tous les besoins de l'histoire, et en convenant de retrancher encore une bissextile tous les quatre mille ans, elle sera longtems suffisante pour les siècles à venir.

La manière précédente de compter les années, forme ce qu'on appelle le *calendrier grégorien*, suivant lequel l'équinoxe du printems arrive toujours du 19 au 21 mars. Ce calendrier n'a pas été adopté dans son origine par tous les états de l'Europe, ce qui occasionnait une différence dans la manière de dater. Ceux qui conservaient le calendrier julien, comptaient dix jours de moins que les autres, depuis 1582 jusqu'à 1700, onze jours depuis 1700 jusqu'à 1800, et ainsi de suite. Mais, à l'exception de la Russie, qui conserve encore le style julien, le calendrier grégorien est maintenant employé dans tous les états de la Chrétienté.

Nous donnerons plus tard quelques détails sur les principaux calendriers usités chez les anciens peuples, sur les principales périodes astronomiques qu'ils avaient imaginées, et enfin sur les *ères* les plus célèbres dans l'histoire. Mais pour pouvoir apprécier aisément les rapports de ces périodes entre elles, et le degré d'exactitude qu'elles comportent, il faut attendre que nous connoissions exactement les mouvemens du soleil et de la lune qui s'y trouvent souvent combinés. Notre objet dans ces commencemens était seulement de profiter des premiers résultats obtenus pour dater et mettre en ordre les observations ; et c'est ainsi que les premiers astronomes ont dû faire.

32. On a partagé l'année en quatre *saisons* analogues aux travaux de l'agriculture : ce sont, le *printems*, l'*été*, l'*automne* et l'*hiver*. Le printems se compte depuis l'entrée du soleil dans l'équateur, jusqu'à son arrivée au tropique boréal ; l'équinoxe qui lui sert d'origine, s'appelle l'équinoxe du printems. Le tems qui s'écoule ensuite jusqu'au retour du soleil à l'équateur, forme l'été, et se termine par un nouvel équinoxe qui est l'équinoxe d'automne. Cette saison s'étend jusqu'à l'arrivée du

soleil au tropique austral ; et son retour de ce point à l'équateur forme l'hiver, qui ferme le cercle de l'année tropique.

33. Chacune de ces saisons ramène, dans les productions de la nature, un nouvel ordre de phénomènes, analogue aux divers degrés d'intensité de la chaleur solaire. A mesure que les hauteurs méridiennes du soleil augmentent, ses rayons tombent plus à-plomb sur l'horison, et la terre en retient mieux la chaleur. Mais lorsque cet astre s'abaisse, ses rayons obliques, déja affaiblis par l'atmosphère, se réfléchissent en grande partie, et vont se perdre dans l'espace.

Les hauteurs du soleil ont donc une influence marquée sur la température. Cependant elles redeviennent successivement les mêmes pendant le printems et pendant l'été, quoique la chaleur ne soit pas la même dans ces deux saisons. Cela vient de ce que l'impression produite par le soleil, résulte à-la-fois de l'intensité de sa lumière et de la durée de sa présence. Lorsque le soleil s'avance dans l'hémisphère boréal, son action ne fait que commencer à s'exercer sur nous, et la terre commence à s'échauffer. Mais lorsque cet astre a quitté le tropique, la terre a éprouvé plusieurs mois de chaleur. Chaque jour un nouveau degré s'ajoute à ce qu'elle avait déja ; c'est alors que les effets de l'astre qui la réchauffe, deviennent sur-tout sensibles par leur accumulation. On observe de même que la plus grande chaleur du jour n'a pas lieu à midi, mais environ deux ou trois heures après.

Il en faut dire autant de l'automne et de l'hiver. Dans ces deux saisons la chaleur envoyée par le soleil est égale ; mais la terre est différemment disposée à la recevoir. En automne, sa surface conserve quelque chose de la chaleur de l'été, qu'elle ne perd que peu-à-peu ; mais lorsque l'hiver arrive, la terre, refroidie, est couverte de neige et de glace. Elle ne peut se réchauffer que lentement, par l'action prolongée des rayons du soleil.

Ceci doit s'entendre seulement de la surface de la terre. La couche qui est au-dessous du sol, à quelque profondeur, ne participe point à ces variations. Lorsque le soleil passe, l'été, au-dessus d'elle, il s'écoule un tems considérable avant qu'elle ressente sa chaleur; réciproquement, cet astre peut faire sa révolution entière, avant que son départ lui soit sensible. Il doit donc s'établir dans l'intérieur du sol un état moyen, proportionné à l'exposition de la surface extérieure, et intermédiaire entre les plus grands froids de l'hiver et les plus grandes chaleurs de l'été. L'expérience confirme ce résultat. Si l'on prend une moyenne arithmétique entre les hauteurs du thermomètre, observées dans un même pays, pendant une longue suite d'années, ce sera pour ce pays la température constante des souterrains. J'aurai occasion de revenir sur cet objet quand nous comparerons les températures des divers pays, d'après leur position sur la surface du globe.

34. Les notions que nous venons d'acquérir sur la longueur de l'année, peuvent servir à trouver le *moyen mouvement* du soleil dans l'écliptique, c'est-à-dire, l'arc moyen qu'il décrit sur ce cercle dans l'intervalle d'un jour. Car sa révolution annuelle comprenant 400°, sa marche, en la supposant uniforme seroit, pour un jour $\frac{400^{\circ}.1}{365,242264}$ ou $1^{\circ},0951635$. Ce résultat sera tantôt trop fort, tantôt trop faible, et quelquefois exact; mais au bout de l'année tout se trouvera compensé. Il est fort ordinaire aux géomètres et aux astronomes d'accommoder ainsi les choses irrégulières à des règles exactes, qui en approchent

autant qu'il est possible, et que l'on modifie ensuite par des corrections, de manière à les plier de plus en plus à la vérité.

La même méthode nous fera connaître le moyen mouvement du soleil parallèlement à l'équateur, et puisque cet astre fait ainsi le tour du ciel dans l'intervalle d'une année, sa marche moyenne en ascension droite sera encore pour un jour $1^\circ,0951635$, comme tout-à-l'heure.

35. Les astronomes sont dans l'usage de rapporter tous les mouvemens des astres à celui d'un soleil fictif, qui aurait précisément la marche uniforme que nous venons de déterminer. Ils appellent *jour moyen solaire*, l'intervalle de tems qui s'écoule entre deux retours consécutifs de ce soleil fictif au méridien; et ils nomment en général *tems moyen*, les instans de la durée marqués par ses positions successives. D'après les résultats que nous venons d'obtenir, il est facile de trouver le rapport du jour moyen solaire au jour sydéral, que nous avons adopté jusqu'ici pour unité de tems. Car le mouvement propre $1^\circ,0951635$, étant dirigé d'occident en orient en sens contraire du mouvement diurne du ciel, cet arc s'ajoute à la rotation de la sphère céleste; et le soleil moyen ne revient au méridien d'un jour à l'autre, qu'après avoir décrit parallèlement à l'équateur $401^\circ,0951635$. Si donc la durée d'un jour solaire moyen est représentée par 10^h, le tems que cet astre emploie à décrire l'arc diurne $1^\circ,0951635$, sera $\frac{10^h \cdot 1^\circ,0951635}{401^\circ,0951635}$ ou $0^{j.\,sol.},00273043$. Cette quantité retranchée de dix heures moyennes, donne $9^h,9726957$ pour le tems de la rotation diurne de la sphère céleste, exprimée en tems moyen solaire. La petite différence $0^{j.\,sol.},00273043$ est l'excès du jour moyen solaire sur le

sydéral, exprimée aussi en tems moyen. C'est $3',55'',9091$, quand on adopte la division sexagésimale du jour.

36. Si l'on voulait prendre le jour sydéral pour unité, ce que l'on fait souvent en astronomie, le jour moyen solaire serait exprimé par $\frac{1}{0,99726957}$ ou $1^{j\ syd.},00273791$. La petite différence $0^{j.\ syd.},00273791$ ou $0^{h},0273791$, est l'excès moyen du jour solaire sur le jour sydéral, cet excès étant exprimé en tems sydéral. Ce serait $3',56'',5554$ en adoptant la division sexagésimale du jour. C'est la quantité dont une horloge réglée sur le mouvement des étoiles, doit avancer d'un jour à l'autre sur le soleil, en n'ayant égard qu'au mouvement moyen de cet astre. Cette avance étant de $3',56'',5554$ sydérales dans un jour sydéral, est pour une heure $9'',8565$, et pour $\frac{1}{10}$ d'heure $0'',98565$. C'est donc à très-peu-près $1''$ pour six minutes sexagésimales de tems sydéral.

Le nombre $0^{j},00273791$ diffère peu de $0^{j},00273043$ qui représente le même arc $1^{\circ},0951635$ compté en tems moyen solaire. Cela tient au peu de différence qui existe entre le jour moyen solaire et le jour sydéral, différence qui devient presque insensible sur le petit arc $1^{\circ},0951635$, qu'il s'agit d'évaluer. Cependant la première de ces deux périodes est un peu plus grande que la seconde; voilà pourquoi le même intervalle est représenté par un nombre plus petit en tems moyen solaire qu'en tems sydéral.

37. Les comparaisons que nous venons de faire entre le jour moyen et le jour sydéral, ne donnent que la durée absolue du jour moyen. Mais elles ne déterminent pas une position absolue du *soleil moyen*, et par conséquent elles ne font pas connaître le *tems moyen absolu*. En effet, il reste encore ici une quantité arbitraire, c'est l'époque

à partir de laquelle on veut commencer à compter en tems moyen. Quand on se sera donné une seule position du soleil moyen, on en déduira ensuite toutes ses positions passées et futures, puisque l'on connaît son mouvement; et l'on sera en état d'assigner son angle horaire à un instant quelconque, relativement à tel méridien terrestre que l'on voudra. Mais le premier angle horaire, d'où l'on part, est absolument arbitraire. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de supposer qu'à une époque connue et déterminée par un phénomène astronomique, le soleil moyen coïncidait avec le soleil véritable. C'est aussi ce qu'ont fait les astronomes. Mais le phénomène astronomique qu'ils ont pris pour origine, ne peut être expliqué qu'après que l'on connaît les lois du mouvement du soleil vrai. C'est pourquoi nous sommes forcés de remettre plus loin la définition du tems moyen absolu, et jusque là nous continuerons à fixer les dates et les instans des observations en tems sydéral, compté depuis le passage de l'équinoxe du printems à un méridien connu. Mais j'ai cru devoir dès à présent insister sur ce point, afin que l'on voie bien la différence qui existe entre la détermination des périodes de tems, qui sont données par la nature, et celle du tems absolu, dont l'origine est arbitraire.

38. Il est visible qu'une petite erreur sur la longueur de l'année, n'aurait qu'une influence presque insensible sur les arcs diurnes que nous venons de calculer, à cause du grand nombre de jours entre lesquels l'erreur totale se trouverait répartie. Tel est l'avantage que présentent les résultats moyens, lorsqu'on les conclut d'observations très-distantes les unes des autres.

39. Après avoir établi ces résultats dans l'ordre naturel, suivant lequel ils auraient pu être inventés, et sans

anticiper sur les découvertes postérieures, nous pouvons maintenant indiquer les méthodes modernes que l'on emploie pour les rectifier, et les porter au dernier degré de précision.

Aujourd'hui que les observations se font avec une extrême exactitude; aujourd'hui que l'on connaît toutes les inégalités du mouvement du soleil, qu'on les a réduites en tables, et qu'on n'a plus à corriger que des erreurs presque insensibles; on peut douter si les équinoxes observés par les anciens astronomes valent la peine d'être calculés. La manière dont ils les ont observés était fort grossière, et ne peut tirer quelque précision que de son éloignement. Ces observations se faisaient avec des *armilles:* c'étaient des cercles de cuivre dirigés dans le plan des cercles célestes. Pour déterminer les équinoxes, les astronomes observaient le tems où l'ombre du cercle qui représentait l'équateur, était renfermée toute entière dans le plan de ce cercle; mais il est évident que la réfraction altérait plus ou moins le résultat, suivant la hauteur où se trouvait le soleil à l'instant de l'équinoxe. Le changement de réfraction, plus rapide vers l'horison que le mouvement en déclinaison, leur a fait quelquefois observer deux équinoxes le même jour. En effet, si le soleil se lève le matin fort près de l'équinoxe, la réfraction très-forte à l'horison pourra compenser son éloignement, et le faire paraître dans le plan de l'équateur. Mais à mesure que les astres s'élèvent, la réfraction diminue avec rapidité; le soleil plus élevé sur l'horison, paraîtra donc plus près de son véritable lieu, et, si son mouvement en déclinaison n'a pas compensé cet abaissement, il reparaîtra au-dessous de l'équinoxe, où il pourra passer dans la journée.

Si l'on veut cependant tirer parti des anciens équinoxes pour déterminer la longueur de l'année, la méthode la plus simple est de regarder chacun de ces équinoxes comme une longitude observée, qui est de 0° au printems, et de 200° en automne. On calculera le lieu du soleil par les tables, pour la même époque. Si la longitude vraie est autre que 0° ou 200°, la différence sera l'erreur du mouvement moyen des tables, pour le tems écoulé depuis l'ancien équinoxe jusqu'à nous. Cette erreur divisée par le nombre de jours écoulés, donnera la correction du mouvement moyen employé dans les tables : ce mouvement étant ainsi rectifié, on en conclura la longueur de l'année par une simple proportion (*).

40. Il n'y a pas beaucoup d'avantage à rechercher ces anciennes observations, sur lesquelles on ne peut compter à un demi-jour près, ce qui fait 0°,55 sur la longitude observée. En effet, 0°,55 divisées par 2000 ans, donnent 0°,00027 (0″,9 sex.) par année. Une observation de Bradley ou de Lacaille, faite il y a cinquante ans, ne comporte pas une erreur de 0°,0015 (5″ sex.), qui, répartis sur cet intervalle, ne font que 0°,00003 (0″,1 sex.) par année. Telle est donc la petite incertitude qui peut rester sur le mouvement moyen du soleil, en le concluant des observations modernes. Celui que M. Delambre avait adopté pour ses premières tables, imprimées dans l'astronomie de Lalande, était 40000°,851851 pour 100 années juliennes de $365^j,25$ ou simplement 0°,851851 (46′ sex.), en omettant les 100 circonférences entières, qui ne peuvent occasionner aucun doute : c'est ce que l'on nomme le *mouvement séculaire* du soleil. On en déduit par une simple proportion le tems d'une révolution complette,

(*) Le mouvement diurne corrigé est à un jour comme 400° à la longueur totale de l'année.

qui est $\frac{400.36525_j}{40000,851851}$ ou $365_j,2422221$. Telle était la longueur de l'année tropique jusqu'à présent adoptée. Mais, d'après un nouveau travail, M. Delambre a trouvé ce mouvement séculaire trop fort de $0^\circ,004629$; ce qui le réduit à $40000^\circ,847222$, ou simplement à $0'',847222$ ($45'.45''$), et la vraie valeur de l'année tropique, qui en résulte, est $365_j,242264$ ou $365_j,5_h48'51'',6$ en mesures sexagésimales. Cette valeur est celle que nous avons rapportée dans le chapitre précédent.

Quoique cet excellent astronome ait calculé plus de 1200 observations pour arriver à ce résultat, il a desiré que l'on observât encore de nouveaux équinoxes pour le confirmer. Il en est de même de l'obliquité de l'écliptique : quoiqu'elle soit aujourd'hui fort bien connue, cependant les astronomes ne manquent jamais l'occasion de l'observer à chaque solstice. C'est par cette continuité d'observations et de vérifications qu'ils s'assurent de la bonté de leurs tables, qu'ils les rectifient et qu'ils les portent enfin à un point de précision presque incroyable.

41. On voit encore ici se vérifier la remarque que nous avons souvent faite sur la marche, tour-à-tour progressive et rétrograde, par laquelle l'astronome arrive aux résultats les plus exacts, par des approximations successives. La simple observation des mouvemens diurnes du soleil en déclinaison et en ascension droite, nous a fait découvrir qu'il décrit annuellement un grand cercle de la sphère céleste. Ces premières observations nous ont fait connaître d'une manière approchée, la position des solstices et des équinoxes. A l'aide de ces résultats imparfaits et d'une longue série d'observations, nous avons conçu que l'on pouvait parvenir à connaître la marche du soleil sur son grand cercle et son mouvement, tantôt plus lent, tantôt

plus rapide, avec une approximation suffisante pour en prédire à-peu-près les variations régulières, qui reviennent dans le même ordre chaque année. Ces résultats nous ont servi de base pour en trouver d'autres plus parfaits; et pour déterminer avec plus d'exactitude l'obliquité de l'écliptique, et la position des équinoxes, par des observations correspondantes réduites à l'aide des tables à une époque commune. Ces nouveaux résultats à leur tour serviraient donc de base à de nouvelles tables plus exactes que les premières; et ainsi d'approximation en approximation, on s'éleverait jusqu'à la perfection des tables modernes, qui sont des modèles de précision et d'exactitude. Mais cette marche a été singulièrement éclairée et accélérée par la théorie de l'attraction universelle, dont nous avons donné une idée dans le premier livre, et dont nous avons dès-lors indiqué l'application. Cette théorie déduite des observations nombreuses, mais encore imparfaites, des premiers astronomes, a découvert le secret de toutes les inégalités du mouvement du soleil. Elle en a indiqué l'époque et la marche. Elle a montré comment on pouvait conclure leurs valeurs des observations. Alors on a pu former des tables du soleil où rien n'est oublié. On s'est servi de ces tables pour réduire les observations d'équinoxes et de solstices à une même époque; et l'on a dû ainsi obtenir ces divers élémens avec une extrême précision. Telle est, en effet, la marche que les astronomes ont suivie; et c'est aussi celle qu'ils suivent encore aujourd'hui pour perfectionner, par de nouvelles observations, leurs tables déja si parfaites.

CHAPITRE IV.

Manière de rapporter la position des Astres au plan de l'Écliptique.

42. POUR déterminer la position des divers points du ciel, nous les avons d'abord rapportés à deux plans, l'horison et le méridien, qui sont fixes, pour chaque lieu de la surface terrestre. Le besoin de comparer facilement les observations faites en différens lieux, nous a fait chercher d'autres plans indépendans de la position des observateurs et même de la figure de la terre. Lorsque nous avons connu le lieu de l'équateur céleste, et la manière d'évaluer les angles des méridiens par la mesure du tems, nous nous sommes servis de ces données pour déterminer la position des astres, au moyen de leur ascension droite et de leur déclinaison observées.

Enfin, comme une grande partie des phénomènes célestes, relatifs à notre système planétaire, se passent sur le plan de l'écliptique, ou dans des plans qui lui sont peu inclinés, nous allons y rapporter les astres de la même manière, ce qui est d'un usage continuel en astronomie.

Pour cela, on conçoit, par chaque point du ciel, un grand cercle perpendiculaire au plan de l'écliptique; c'est ce que l'on nomme le *cercle de latitude.* Alors la position d'un astre se détermine par deux élémens.

Le premier est l'arc de grand cercle compris entre l'écliptique et l'astre. Cet arc s'appelle *la latitude de l'astre.*

Le second est l'arc de l'écliptique compris depuis l'équinoxe du printems jusqu'au cercle de latitude. Cet arc se compte comme l'ascension droite, d'occident en orient, dans le sens du mouvement propre du soleil ; et on le nomme *la longitude de l'astre*, par analogie avec la longitude du soleil.

Dans la *fig.* 5, C est le centre de la sphère céleste. $\Upsilon Q \simeq$ représente l'équateur, $\Upsilon E \simeq$ l'écliptique, $\Upsilon \simeq$ la ligne des équinoxes, SA la déclinaison d'un astre S ; ΥA son ascension droite ; SL sa latitude ; ΥL sa longitude. La latitude est *boréale* quand l'astre est situé au nord de l'écliptique, *australe* quand il est au sud.

43. On n'observe pas immédiatement la latitude et la longitude des astres, parce que l'instrument qui les donnerait serait trop difficile à vérifier ; mais on les déduit, par le calcul, de la déclinaison et de l'ascension droite observées. Il ne faut pour cela que résoudre un triangle sphérique.

En effet, par le centre de la sphère céleste, menez les deux rayons visuels CP, CP' ; le premier au pôle de l'équateur, le second au pôle de l'écliptique. L'angle $P'CP$ sera égal à l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur, § 14. Prolongez indéfiniment le cercle de déclinaison AS, et le cercle de latitude SL. Le premier ira passer par le pôle P, le second par le pôle P' ; en sorte que dans le triangle sphérique $P'PS$, $P'P$ sera l'obliquité de l'écliptique, PS le complément de la déclinaison, $P'S$ le complément de la latitude ; car les arcs PA, $P'L$, sont chacun de 100°. Examinons maintenant les angles en P et en P'. Si l'on mène par le pôle P le cercle de déclinaison $P\Upsilon$ qui passe par l'équinoxe, l'angle $\Upsilon PP'$ sera droit ; car le plan du cercle $P'P$

ou $CP'P$ étant perpendiculaire à la ligne des équinoxes, réciproquement tous les plans qui passent par cette ligne lui sont perpendiculaires. De plus, les arcs $P\Upsilon$, PA étant de $100°$, l'angle ΥPA aura pour mesure l'arc ΥA, et sera par conséquent égal à l'ascension droite de l'astre : ainsi l'angle total $P'PS$ sera égal à $100° + \Upsilon A$. De même, si par le pôle P', on mène le cercle de latitude $P'\Upsilon$, l'angle $\Upsilon P'P$ sera droit, et les arcs $P'\Upsilon$, $P'L$ seront de $100°$. L'angle $\Upsilon P'L$ aura donc pour mesure l'arc ΥL compté sur l'écliptique, et sera égal à la longitude de l'astre. Par conséquent l'angle $SP'P$ sera égal à $100° - \Upsilon L$, c'est-à-dire qu'il sera le complément de la longitude. Ainsi les élémens du triangle $SP'P$ sont l'obliquité de l'écliptique, l'ascension droite de l'astre, sa déclinaison, sa longitude et sa latitude. Les formules de la trigonométrie sphérique étant appliquées à ce triangle, offrent le moyen le plus simple de déterminer les rapports de toutes ces quantités (*).

44. Veut-on, par exemple, déterminer la longitude et la latitude, en supposant l'ascension droite et la déclinaison connues. Alors dans le triangle SPP', on connaîtra les côtés PP', SP, et l'angle $P'PS$; c'est-à-dire deux côtés et l'angle compris. On pourra donc aisément trouver le troisième côté $P'S$ complément de la latitude, l'angle $PP'S$

(*) Afin que l'on ne soit pas embarrassé dans l'interprétation de quelques termes usités dans les anciens ouvrages d'astronomie, j'ajouterai ici que le grand cercle PP' qui passe par les pôles de l'équateur et de l'écliptique, et qui contient les points solsticiaux, a été nommé *colure des solstices*. De même le grand cercle $P\Upsilon$ qui passe par les pôles de l'équateur et par la ligne des équinoxes, a été nommé par eux *colure des équinoxes*. La raison de ces dénominations n'est pas bien connue ; mais ce qui est très-certain, c'est qu'elles sont fort inutiles.

complément de la longitude, et même si l'on veut l'angle *PSP'*, que l'on nomme *l'angle de position de l'astre.*

45. Au contraire se donne-t-on la latitude et la longitude, et veut-on déterminer l'ascension droite et la déclinaison. Alors dans le triangle *SPP'*, ce seront les côtés *P'P*, *P'S*, qui seront connus, avec l'angle *PP'S*. On aura donc encore deux côtés, et l'angle compris. On pourra donc aisément déterminer le troisième côté *PS*, complément de la déclinaison ; l'angle *P'PS* égal à $100° +$ l'ascension droite, et même si l'on veut l'angle de position *S* (*).

46. La détermination des latitudes et longitudes des astres, telles que nous venons de les exposer, suppose un observateur placé au centre de la terre. Mais comme nous nous trouvons toujours à sa surface ; il en résulte dans les

---

(*) Soit ω l'obliquité de l'écliptique, d la déclinaison de l'astre, a son ascension droite, λ sa latitude, l sa longitude. Cela posé, si c'est l'ascension droite et la déclinaison qui sont connues, on aura la longitude et la latitude par les formules suivantes, tirées de la trigonométrie sphérique,

$$\cos P'S = \sin P'P \sin SP \cos P'PS + \cos P'P \cdot \cos SP,$$

$$\cot PP'S = \frac{\cot SP \cdot \sin P'P - \cos P'PS \cdot \cos P'P}{\sin P'PS}.$$

En adoptant les dénominations que nous venons d'établir, et observant que $\cos P'PS = \cos(100° + a) = -\sin a$, il vient

$$\sin \lambda = -\sin \omega \cos d \sin a + \cos \omega \sin d,$$

$$\operatorname{tang} l = \frac{\operatorname{tang} d \cdot \sin \omega + \sin a \cos \omega}{\cos a}.$$

Ces deux formules peuvent s'accommoder au calcul logarithmique, en prenant un angle auxiliaire φ, tel qu'on ait

$$(1) \quad \ldots \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} d};$$

valeurs des latitudes et longitudes apparentes, des corrections tout-à-fait analogues aux parallaxes de déclinaison et d'ascension droite. Cette analogie est tellement complète que les mêmes formules que nous avons trouvées alors, serviront encore dans le cas actuel, comme on va le voir.

Pour cela nous ferons une construction tout-à-fait semblable à celle que nous avons employée pour la paral-

---

car alors en éliminant $\sin a$ de la première et $\operatorname{tang} d$ de la seconde elles deviennent

$$(2) \ldots \sin \lambda = \sin d \, \frac{\cos(\varphi + \omega)}{\cos \varphi},$$

$$(3) \ldots \operatorname{tang} l = \operatorname{tang} a \, \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin \varphi};$$

au contraire, si l'on se donne la latitude et la longitude, on aura la déclinaison et l'ascension droite par les formules

$$\cos PS = \sin P'P \sin P'S \cos PP'S + \cos P'P \cos P'S,$$

$$\cot P'PS = \frac{\cot P'S \,.\, \sin P'P - \cos PP'S \cos P'P}{\sin PP'S}.$$

ou en mettant pour ces quantités leurs valeurs, et observant que $\cot P'PS = -\operatorname{tang} a$

$$\sin d = \sin \omega \cos \lambda \sin l + \cos \omega \sin \lambda$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{-\operatorname{tang} \lambda \sin \omega + \sin l \cos \omega}{\cos l}.$$

Ces équations ressemblent à celles qui nous ont donné d'abord la latitude et la longitude. La latitude répond à la déclinaison, et la longitude à l'ascension droite ; il n'y a de différence que dans l'obliquité ω, qui prend ici une valeur négative. En suivant cette analogie, les nouvelles équations pourront se résoudre par un angle auxiliaire φ', tel qu'on ait

$$[1] \ldots \operatorname{tang} \varphi' = \frac{\sin l}{\operatorname{tang} \lambda};$$

laxe de hauteur, tom. 1er., page 254. Soit, *fig.* 6, C le centre de la terre supposée elliptique, COZ un rayon terrestre, O l'observateur, Z le zénith vrai. Soit P' le pôle de l'écliptique, et supposons que le plan du tableau passe par les lignes CP' et CZ. Alors le plan de l'écliptique qui doit être perpendiculaire à la ligne CP', sera projeté dans la figure suivant une ligne droite CE. L'arc ZP' sera la distance du zénith au pôle

---

et en éliminant sin l de la première et tang λ de la seconde, elles deviendront

$$[2] \ldots \sin d = \frac{\sin\lambda \cos(\varphi' - \omega)}{\cos\varphi'},$$

$$[3] \ldots \operatorname{tang} a = \operatorname{tang} l \frac{\sin(\varphi' - \omega)}{\sin\varphi'}.$$

Si l'on voulait l'angle de position PSP', que nous nommerons S on l'aurait aisément en observant que dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés, ce qui donnerait

$$\sin S = \frac{\sin\omega \cos a}{\cos\lambda}, \quad \text{ou} \quad \sin S = \frac{\sin\omega \cos l}{\cos d}.$$

Les formules précédentes ont été calculées en supposant l'astre dans le premier quart de l'écliptique à partir de l'équinoxe du printems; mais pour les étendre à toutes les autres positions, il suffit d'observer fidèlement le jeu des signes algébriques, en faisant les sinus, cosinus et tangentes positifs ou négatifs, selon la valeur des arcs auxquels ils répondent. Cela ne fait aucune difficulté pour l'ascension droite et la longitude, qui sont toutes deux comptées à partir d'un même point de leur cercle, et toujours dans le même sens de 0 à 400°; mais relativement à la déclinaison et à la latitude qui sont comptées chacune à partir d'un plan, comme elles ont été prises positivement d'un côté, il faut les prendre négatives de l'autre. Ainsi, puisque nous avons regardé comme positives les déclinaisons et les latitudes boréales, il faut regarder les australes comme négatives. Le seul jeu des signes algébriques appliqué aux lignes trigonométriques fera le reste.

de l'écliptique, et l'arc ZE, complément de cette distance, sera la *latitude du zénith.* J'entends ici la *latitude céleste* rapportée au plan de l'écliptique, et non pas la *latitude géographique.*

Maintenant, si l'observateur O mène un rayon visuel à l'astre L, il le verra en S sur la sphère céleste. L'arc ZS sera la distance apparente de l'astre au zénith vrai. L'arc $P'S$ sera sa distance au pôle de l'écliptique, ou le complément de sa latitude apparente; enfin l'angle au pôle $SP'Z$ compris entre les cercles de latitude, menés par le zénith et par l'astre, sera la différence apparente des longitudes de l'astre et du zénith. J'entends toujours ici les *longitudes célestes* comptées sur l'écliptique et non pas les *longitudes géographiques.*

Mais si du centre C de la terre on mène au même astre le rayon visuel CLS', qui le projète en S' sur la sphère céleste, S' sera le lieu vrai de l'astre; ZS' sa distance vraie au zénith; $P'S'$ sa distance vraie au pôle de l'écliptique, ou le complément de sa latitude vraie; enfin l'angle au pôle $SP'Z$ sera la différence des longitudes vraies de l'astre et du zénith. Les différences de ces élémens avec ceux du lieu apparent, seront les parallaxes correspondantes. Ainsi la différence SS' des distances zénithales sera la parallaxe de hauteur; la différence des distances polaires $P'S$, $P'S'$ sera la *parallaxe de latitude;* enfin l'angle $SP'S'$ sera *la parallaxe de longitude.*

Or, l'analogie que nous avons annoncée se montre ici avec la plus parfaite évidence. Car la figure dont nous faisons usage n'est que celle qui nous a servi pour les déclinaisons et les ascensions droites dans la page 254 du premier livre. Le systême des coordonnées en latitudes et longitudes est absolument de la même nature; les conséquences sont donc pareilles. Qui ne voit que la parallaxe de latitude, répond à la parallaxe de déclinaison, et la parallaxe de longitude à la parallaxe d'angle horaire ou d'ascension droite? Pour appliquer ici les formules trouvées alors, il suffit évidemment de donner aux lettres qu'elles renferment, la signification que nous voulons leur attribuer ici. On aura donc ainsi, sans aucun calcul nouveau, les expressions des parallaxes de longitude et de latitude (*).

(*) Soit L la longitude du zénith, Λ sa latitude rapportée au plan de l'écliptique; soient l et λ les quantités analogues pour l'astre observé, ces quantités étant prises de dessus la surface terrestre Si l'on suppose que, dans la figure, l'astre est à l'occident du zénith au-delà du plan EZP', et que le point équinoxial ♈ se trouve aussi au-delà de ce même plan à l'occident de l'astre, la différence des longitudes $L - l$ représentera l'angle ♈$P'Z$, compté du méridien apparent et d'orient en occident, comme les angles horaires. Cet angle est analogue à l'angle horaire apparent P; dans le cas où il s'agissait de déclinaison et d'ascension droite. Pour compléter l'analogie, soit D' la distance du zénith au pôle de l'écliptique, P la différence des longitudes apparentes $L - l$, et Δ la distance apparente de l'astre à ce même pôle, ce qui donne $D' = 100° - \Lambda$, $\Delta = 100° - \lambda$. Il suffira de substituer ces quantités à leurs analogues dans les formules de la page 256 du premier livre, et marquant d'un accent les élémens du lieu vrai, comme nous l'avons fait alors, on aura, par approximation,

Parallaxe de longitude $P - P' = \dfrac{\Pi . \sin D' . \sin P'}{\sin \Delta'}$,

Parallaxe de latitude $\Delta - \Delta' = \Pi \left\{ \sin \Delta \cos D' - \cos \Delta' \sin D' \cos P' \right\}$,

et comme $P - P' = L - l - (L - l') = l' - l$, on aura la longitude apparente l et la distance apparente de l'astre au pôle de l'écliptique ou Δ, par les formules suivantes :

$$l = l' \mp \frac{\Pi . \sin D' . \sin (L - l')}{\sin \Delta'},$$

$$\Delta = \Delta' + \Pi \left\{ \sin \Delta' \cos D' - \cos \Delta' . \sin D' . \cos (L - l') \right\}.$$

Π est la parallaxe horisontale relative au rayon terrestre qui passe

Seulement comme l'angle $SP'Z$ qui répond à l'angle horaire est ici la différence des longitudes du zénith et de l'astre, il nous devient nécessaire de savoir déterminer la longitude du zénith. Pour cela il n'y a rien de plus simple que de chercher d'abord la déclinaison du zénith, rapportée au plan de l'équateur et à son ascension droite, relativement au point équinoxial. Après quoi on convertira ces coordonnées en longitude et latitude, relatives au plan de l'écliptique, comme on convertirait celles d'un astre, par les formules que nous avons déja données pour cet objet.

---

par l'observateur. Pour la simplicité du calcul, j'ai conservé dans les formules les distances polaires Δ, Δ' qui, pouvant se compter de 0° à 100°, n'exigent, *dans les différens cas*, *aucun soin particulier*, si ce n'est d'observer le jeu des signes algébriques dans les expressions trigonométriques. Sous ce rapport, elles sont beaucoup plus commodes que les déclinaisons et les latitudes qui, comptées à partir d'un plan, exigent qu'on ait soin de les faire positives *d'un côté et négatives de l'autre*. *Quant à la différence* des longitudes $l' - L$, son emploi n'offrira non plus aucune difficulté et n'exigera aucune construction particulière, pourvu qu'on s'astreigne toujours à compter les longitudes l' et L de la même manière, d'occident en orient, à partir du même point équinoxial, comme on compte les *ascensions droites sur l'équateur*. *Enfin* la distance D du zénith au pôle de l'écliptique ne doit pas être comptée à partir de la verticale; mais à partir du zénith vrai déterminé par le prolongement du rayon terrestre, comme nous l'avons fait pour les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison.

En restant *fidèle* à ces conventions *générales*, *il* n'y aura *aucun* autre soin à avoir dans chaque cas particulier. On voit aussi, par ces expressions, que la parallaxe doit s'ajouter aux élémens du lieu vrai avec le signe que lui donne la formule, pour avoir les élémens du lieu apparent. N'oublions pas que les formules précédentes ne sont qu'*approchées*, et qu'*il* faut recourir aux *séries* pour avoir *les* formules exactes.

La déclinaison du zénith est très-facile à obtenir, c'est la distance du zénith à l'équateur ou la latitude géographique du lieu de l'observation Comme *CZ* est le rayon terrestre, qui diffère de la verticale, il faudra employer la déclinaison du zénith vrai, c'est-à-dire retrancher de la latitude terrestre l'angle du rayon avec la verticale

Quant à l'ascension droite du zénith, elle est évidemment mesurée par l'angle horaire variable, que forme le point équinoxial ♈ avec le plan fixe du méridien du lieu C'est le tems syderal converti en degrés de l'équateur Pour l'obtenir on suivra le procédé enseigné dans la page 127 du premier livre On cherchera l'angle horaire d'une étoile connue, d'après l'observation de la hauteur, cet angle étant supposé compté du méridien supérieur, et de 0° à 400° dans le sens du mouvement diurne On y ajoutera l'ascension droite de l'étoile, et retranchant de la somme les circonférences entières, s'il y en a, le reste sera le tems syderal ou la distance du point équinoxial ♈ au plan du méridien.

Cette distance sera l'ascension droite du zénith C'est ce que les astronomes appellent *l'ascension droite du milieu du ciel* On l'obtiendrait plus simplement encore en observant des passages d'étoiles ou du soleil à la lunette méridienne, et calculant l'ascension droite de ces astres pour l'instant de l'observation Car puisqu'ils se trouvaient alors dans le méridien, leur ascension droite était celle du méridien même.

Connaissant la déclinaison du zénith et son ascension droite, on calculera aisément sa longitude et sa latitude. Et comme l'une des deux premières coordonnées, savoir l'ascension droite, est variable à chaque instant par l'effet du mouvement diurne, on voit que les deux autres, qui toutes deux la contiennent, seront variables aussi La latitude et la longitude du zenith changent donc à chaque instant Cela etait facile à prévoir d'apres la direction oblique du plan de l'ecliptique, relativement au mouvement diurne Mais on a par ce qui précède, le moyen d'obtenir à chaque instant les valeurs de ces coordonnees variables.

47 Il a plû aux astronomes d'appeler *nonagésime* le point *E* de l'ecliptique, où ce plan est rencontré par le cercle de latitude *ZP'* qui passe par le zénith Le mot de *nonagésime* signifie quatre-vingt-dixième Cette dénomination paraît venir de ce que le point *E* se trouve à 90° sexagésimaux du point de l'écliptique qui se trouve au même instant dans l'horison En effet, si par le cercle *C* de la terre, on mène un plan perpendiculaire au rayon *CZ*, et par conséquent horisontal, ce plan sera représente dans la figure par la ligne droite *CH*, comme l'écliptique l'est par la ligne droite *CE* L'intersection de ces deux plans sera donc une ligne droite, menee par le point *C* perpendiculairement au plan de la figure Par consequent l'angle de cette droite avec *CE* et *CH* sera un angle droit

Ce point de l'écliptique, situé ainsi dans l'horison, à 90° du point *E*, ou du nonagésime, s'appelait anciennement l'*horoscope*, et l'espèce de superstition appelée l'*astrologie judiciaire*, consistait à croire que le point de l'ecliptique qui se levait ainsi au moment ou un évènement etait arrivé, avait sur lui une influence favorable ou funeste On calculait donc la position de ce point dans l'écliptique, et selon qu'il appartenait à telle partie ou à telle autre, on en tirait des présages heureux ou malheureux c'est ce que l'on appelait *tirer l'horoscope* Il suffit d'enoncer cette superstitieuse pratique pour en faire sentir l'absurdite

48. D'après les définitions précédentes, la distance angulaire du point E au plan de l'horison, ou l'angle ECH, s'appelle en astronomie la *hauteur du nonagésime.* Cette distance est évidemment égale à l'angle $P'CZ$ distance du pôle de l'écliptique au zénith vrai. Ces dénominations étant fort employées en astronomie, il est utile de savoir ce qu'elles signifient. Mais il est évident qu'elles sont aussi peu caractéristiques que peu nécessaires, et que les expressions générales de *longitude et latitude du zénith* sont bien plus convenables ; nous les emploierons toujours dans la suite de cet ouvrage, car il ne faut pas multiplier les termes techniques sans nécessité.

CHAPITRE V.

Diminution progressive de l'obliquité de l'Écliptique. Mouvement général des Étoiles parallèlement à l'Écliptique, d'où résulte la précession des Équinoxes.

49. Les valeurs assignées à l'obliquité de l'écliptique par les astronomes des différens siècles, ne s'accordent point entre elles. Elles vont toujours en diminuant depuis les plus anciens astronomes jusqu'à nous. Ces différences ne peuvent pas être entièrement attribuées à l'imperfection des instrumens et des observations; car en vertu de cette imperfection même, les résultats obtenus auraient dû se trouver tantôt trop forts tantôt trop foibles, et il serait infiniment peu probable qu'ils s'accordassent tous pour indiquer une diminution progressive de l'obliquité de l'écliptique, si cette diminution n'était pas réelle. En effet la théorie de l'attraction a confirmé complètement ce résultat. Elle a prouvé que l'attraction des diverses planètes qui composent notre système planétaire, doit nécessairement déplacer peu-à-peu le plan de l'écliptique dans le ciel et selon la disposition actuelle du système, diminuer son inclinaison sur l'équateur d'une quantité à-peu-près égale à 160″,83 par siècle, ce qui fait par année 1″,6083 (0″,52109 sex.). Voici sur ce point les résultats comparés de la théorie et des observations, telles qu'ils se trouvent dans un Mémoire de M. Laplace inséré dans la Connaissance des tems de 1811.

Observations antérieures à l'ère chrétienne.

Époques des observat.	NOMS des OBSERVATEURS.	Lieu de l'observat.	Obliquité observée.	Obliquité calculée.	Excès de l'observat.
1100	TCHEOU-KOUNG.	Chine.....	26°,55617	26°,51792	+0,03825
350	PYTHEAS.......	Marseille...	26,46913	26,40957	+0,05956
250	ERATOSTHÈNE...	Alexandrie.	26,40092	26,39475	+0,00617
50	LIEOU-HIANG...	Chine.....	26,40092	26,37142	+0,02950

Observations postérieures à notre ère.

173	....	Chine.....	26,32499	26,33858	−0,01359
461	TSOU-CHOUG....	Chine.....	26 27542	26,29415	−0,01873
629	LITCHOU-FOUNG.	Chine.....	26,29756	26,26450	+0,03306
880	ALBATENIUS....	Arabie....	26,21635	26,20771	+0,00864
1000	EBN-JOUNIS....	Le Caire...	26,19321	26,20063	−0,00742
1279	COCHEOU-KING .	Pékin.....	26,14889	26,15509	−0,00620
1437	ULUGBEY.......	Samarkande	26,14444	26,13117	+0,01327

L'ensemble de ces observations établit d'une manière incontestable la diminution successive de l'obliquité de l'écliptique. Leur accord avec les formules déduites de la théorie, dont elles s'écartent tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, ne laisse aucun lieu de douter qu'en effet cette diminution est uniquement due, comme la théorie l'indique, à l'attraction des planètes, les unes sur les autres et sur le soleil.

On reconnaît encore les effets de cette diminution, en comparant les positions des mêmes étoiles relativement à l'écliptique, à des époques très-éloignées. C'est ce que l'on remarque principalement sur les étoiles voisines des solstices d'été et d'hiver. Celles qui étaient autrefois au nord de l'écliptique près du solstice d'été, sont maintenant remontées plus au nord en s'éloignant de ce plan. Au contraire les étoiles qui, suivant le témoignage des anciens astronomes, étaient autrefois situées au midi de l'écliptique près du solstice d'été, se sont rapprochées de ce plan, et quelques-unes s'y trouvent maintenant comprises ou même l'ont dépassé en se portant vers le nord. Des changemens analogues ont eu lieu vers le solstice d'hiver. Toutes les étoiles participent à ce mouvement, mais diversement et d'autant moins qu'elles sont plus voisines de la ligne des équinoxes. De sorte que cette ligne semble être comme une charnière autour de laquelle cette rotation paraît s'exécuter. Il est naturel de conclure de ces phénomènes que le plan de l'écliptique se déplace réellement dans le ciel, et produit en sens contraire, relativement aux étoiles, les apparences que nous observons. Car de supposer que ces mouvemens appartiennent réellement aux étoiles, cela serait presque impossible, puisqu'il faudrait pour cela imaginer entre tous les corps célestes un accord inconcevable.

50. Mais ce qu'il est important de savoir, et ce que la théorie a également prouvé, la diminution de l'obliquité de l'écliptique ne sera pas toujours progressive. Il arrivera un tems où ce mouvement commencera à se ralentir; puis il cessera entièrement, et alors l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur paraîtra constante. Après quoi le déplacement de ce plan recommencera en sens contraire. Il s'éloignera peu-à-peu de l'équateur suivant les mêmes périodes par lesquelles il s'en était approché; et ces états alternatifs produiront une oscillation

éternelle, comprise entre des limites fixes. La théorie n'a pas encore pu parvenir à déterminer ces limites, mais d'après la constitution du système planétaire, elle a démontré qu'elles existent et qu'elles sont très-peu étendues. Ainsi, à ne considérer que le seul effet des causes constantes qui agissent actuellement sur le système du monde, on peut affirmer que le plan de l'écliptique n'a jamais coïncidé et ne coïncidera jamais avec le plan de l'équateur: phénomène qui, s'il arrivait, produirait sur la terre un printems perpétuel.

51. Nous n'avons parlé ici que de la diminution lente et séculaire de l'obliquité de l'écliptique. Cette obliquité éprouve, en outre, de petites oscillations qui tour-à-tour l'écartent de sa valeur moyenne, dans des sens opposés. Parmi ces oscillations la plus considérable est soumise à une période de 18 ans, c'est-à-dire qu'au bout de 18 ans, tout ce qui dépend de cette inégalité se trouve compensé, et il ne reste plus que l'effet général et constant de la diminution progressive. L'observation a fait connaître la loi de ces petites oscillations, et la théorie en a fait connaître la cause. Elles sont produites par l'action de la lune, et font partie du phénomène nommé *nutation*. Mais comme leur valeur et leur période dépendent du mouvement de cet astre, j'en dois retarder encore l'exposition. Il nous suffira ici d'être prévenu de leur effet sur l'obliquité (*). Il y a aussi un

---

(*) Pour exprimer la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique, nous partirons du commencement de l'année 1750, que les travaux de Lacaille ont rendue célèbre, et qui est devenue, par cette raison, l'origine de presque toutes les déterminations astronomiques. L'obliquité moyenne de l'écliptique, c'est-à-dire, l'obliquité corrigée de toutes les petites oscillations comprises dans de courtes périodes, petit effet du même genre produit par le soleil, mais il est beaucoup moins considérable, sa période est d'une demi-année tropique.

En avancant dans l'astronomie, nous verrons que tous

était alors 26°.0776. Soit V' cette même valeur après un nombre t d'années juliennes comptées depuis cette époque, t devant être supposé négatif pour les années antérieures; cela posé, en n'ayant égard qu'au changement séculaire de l'obliquité, on aura, suivant les formules de la Mécanique céleste, tom. 3, pag. 158,

$$V' = 26^\circ.0812 - 1^\circ.03304 \sin t.99''.1227 - 0^\circ,73532 \sin^2 t\,21'',5223.$$

A l'époque de 1750, on avait $t = 0$. Tous les termes s'évanouissent excepté le premier, et il reste $V' = 26^\circ.0776$. Cela devait être, puisque cette époque est prise pour origine. Au tems d'Hipparque, 128 ans avant l'ère chrétienne, on avait . . . .
$t = -\left\{1750 + 128\right\} = -1878$. En employant cette valeur, on trouve

$$V' = 26^\circ.0812 + 0^\circ.29482.$$

L'obliquité moyenne qui avait lieu alors surpassait donc celle de 1750 de 0°,29482.

En faisant varier t d'une unité dans l'expression de V', on aura le changement annuel de l'obliquité moyenne dans les différens siècles, qui sera

$$-0''.2486 \sin t . 43''.0446 - 1''.6083 \cos t . 99''.1227.$$

Cette expression étant négative quand t est positif, indique une diminution de l'obliquité. Au commencement de 1750, on avait $t = 0$. La formule précédente donne, pour la diminution annuelle, 1''.6083, ou 160''.83 par siècle, comme on l'a vu dans le texte.

Venons maintenant aux inégalités périodiques. Soit V' la valeur de l'obliquité au commencement d'une année quelconque, et D' la diminution annuelle pour cette même année, V' et D' étant les élémens du système du monde sont soumis, de même que l'obliquité, à des variations de deux sortes. Les unes si lentes dans leur cours que la marche en paraît progressive, depuis les plus anciens astronomes jusqu'à nous. On les a nommées pour cette raison *inégalités séculaires*. Les autres, plus rapides dans leur marche, redeviennent les mêmes après des intervalles de tems qui ne sont pas très-considérables, et les astronomes ont déja observé plusieurs de leurs révolutions. On les a nommées *inégalités*

---

calculées d'après les formules précédentes. Cela posé, après un nombre n de jours écoulés, l'obliquité apparente E' sera

$$E' = V' - \frac{D'.n}{365,25} + 1''.3411 \cos 2L + 29''.7222 \cos N,$$

L étant la longitude du soleil et N la longitude du *nœud ascendant de la lune*, c'est-à-dire du point de son orbite où elle perce l'écliptique, quand elle s'élève au-dessus de ce plan du côté du nord. Ce point, ou nœud de la lune est mobile sur l'écliptique, et il fait le tour entier de ce cercle en dix-huit ans : voila ce qui fait la période de la *nutation lunaire*, car on appelle ainsi l'effet de cette oscillation. On voit que l'obliquité contient encore une autre petite oscillation dépendante de la position du soleil sur l'écliptique. La période de celle-ci est évidemment d'une demi-année, puisqu'après cet intervalle de tems, la longitude du soleil ayant augmenté de 200°, l'arc $2L$ a augmenté de 400°; d'où il suit que $\cos 2L$ reprend périodiquement les mêmes valeurs. Cette seconde inégalité vient de ce que l'action du soleil produit sur l'équateur un balancement analogue à celui que produit l'action de la lune : on le nomme, par analogie, *nutation solaire*, comme on nomme l'autre *nutation lunaire*. Nous ne plaçons ici ces explications et ces formules que pour ne rien laisser de vague relativement aux inégalités dont nous parlons ; et afin que par la suite quand nous en aurons développé les lois par l'observation, on en puisse retrouver les expressions aux endroits où elles se rapportent naturellement.

périodiques pour les distinguer des précédentes, qui pourtant sont aussi périodiques, mais comprises entre des limites incomparablement plus étendues.

52. Nous avons vu plus haut que lorsqu'on avait déterminé par observation, pour une certaine époque, l'instant du passage du soleil par l'équinoxe du printems, rien n'était plus facile que de rapporter à ce point les ascensions droites de toutes les étoiles. Il suffit à cet effet d'observer ou de calculer la différence de l'ascension droite comprise entre chaque étoile et le point équinoxial, différence que nous avons appris à déterminer, § 13. Or, en répétant cette observation sur les mêmes étoiles à différentes époques, même après des intervalles d'un petit nombre d'années, on y trouve des changemens très-sensibles, dont le résultat général est que toutes les ascensions droites des étoiles vont en augmentant, en sorte que leurs méridiens semblent continuellement s'éloigner de celui de l'équinoxe, dans le sens du mouvement propre du soleil. En même tems les déclinaisons des étoiles changent aussi ; de sorte que l'équateur cesse de passer par les mêmes étoiles ; et ce déplacement progressif est tellement sensible que la situation des diverses constellations relativement à l'équateur et aux équinoxes, est tout-à-fait différente de celle que les anciens astronomes ont décrite.

53. Ces mouvemens n'offrent pas au premier coup-d'œil une loi bien évidente, lorsqu'on les rapporte au plan de l'équateur ; mais si on les rapporte au plan de l'écliptique par longitude et latitude, et si l'on compare ainsi les positions actuelles des étoiles avec celles que les anciens astronomes nous ont transmises, et qu'ils disent avoir observées, on y découvre tout-à-coup un accord merveilleux. On voit tout de suite que les latitudes des étoiles n'éprouvent que des variations nulles ou très-

petites, par exemple, celle qui résulte naturellement de la diminution séculaire de l'obliquité ; tandis que tous les changemens se portent sur les longitudes, qui vont sans cesse en augmentant pour toutes les étoiles; et pour toutes d'une égale quantité. De sorte que ces astres semblent ainsi se mouvoir dans le ciel, parallèlement au plan de l'écliptique ; ou, pour s'exprimer d'une manière rigoureuse et géométrique, les phénomènes se passent comme si la sphère céleste tournait autour de l'axe de l'écliptique, avec un mouvement très-lent, dirigé d'occident en orient, dans le même sens que celui du soleil.

54. Pour mesurer ce mouvement, il suffit de comparer entre elles les longitudes d'une même étoile, observées à deux époques différentes; l'effet étant le même pour toutes les étoiles, il importe peu laquelle on choisit.

Par exemple, suivant les observations de Bradley, l'étoile que l'on nomme l'*Epi de la vierge*, avait pour longitude, au commencement de 1760, 222°,7716.

Suivant les observations de Maskeline, au commencement de 1802, la même étoile avait pour longitude 223°,4201.

La différence est 0°,6485 en quarante-deux ans, ce qui donne 154″,42 par année. La discussion d'un grand nombre d'observations donne 154″,63 (50″,10 sex.). On sent en effet qu'un élément aussi délicat ne peut être établi avec certitude que par une moyenne entre un grand nombre de résultats observés.

55. Par suite de ce mouvement, les points équinoxiaux ne répondent pas toujours aux mêmes points de la sphère céleste ; et le soleil emploie un peu moins de tems pour revenir à l'équateur, que pour revenir aux mêmes

étoiles. C'est en cela que consiste la *précession des équinoxes.*

Pour calculer ce retard, il faut remarquer que lorsque le soleil moyen est revenu à l'équinoxe, après une révolution tropique de $365^{j},242264$, il lui reste encore à décrire sur l'écliptique le petit arc $154'',63$, avant d'avoir rejoint le point de la sphère des étoiles qui avait passé l'année précédente à l'équinoxe, en même tems que lui. A la vérité, ce point est lui-même en mouvement sur l'écliptique en vertu de la précession, et il s'éloigne un peu du soleil pendant que cet astre le rejoint; mais sa marche annuelle n'étant que de $154'',63$, la quantité dont il s'avance depuis l'instant de l'équinoxe jusqu'au moment où il est atteint par le soleil, est tout-à-fait insensible, en sorte qu'on peut le supposer immobile dans cet intervalle (*). Ainsi, pour connaître ce retard annuel du soleil sur les étoiles, il suffit de réduire en tems ce petit arc $154'',63$, à raison de la circonférence entière pour une année tropique, le résultat est $\dfrac{154'',63 \,.\, 365^{j},242264}{400^{\circ}}$ ou $0^{j},014119$. En l'ajoutant à l'année tropique, on aura la durée d'une révolution entière du soleil, par rapport aux étoiles, exprimée en jours moyens solaires. C'est ce que l'on nomme l'*année sydérale* : elle est de 365j,256383.

(*) Pour faire le calcul sans rien négliger, soit T la révolution tropique qui est donnée, S la révolution sydérale qui est inconnue. Puisque les équinoxes rétrogradent de $154'',63$ pendant une année tropique, leur mouvement en une année sydérale, sera proportionnellement $154'',63 \,.\, \dfrac{S}{T}$. Tel est donc l'arc que le soleil aura à parcourir au-delà de 400° pour compléter l'année sydérale. Le tems qu'il emploiera pour cela, en vertu de son mouvement moyen sera exprimé

56. D'après ces résultats, il est aisé de voir que la ligne des équinoxes rétrograde sur l'écliptique d'un grade en $64^{ans},7$, ou d'un degré de l'ancienne division en $71^{ans},6$.

Il est également facile, en supposant ce mouvement uniforme, de calculer le tems que les équinoxes emploieront à faire le tour de l'écliptique; car s'il faut une année pour $154'',63$, le tems nécessaire pour décrire $400°$ sera $\dfrac{400°}{154'',63}\,1^{an}$, ou 25868 années, c'est-à-dire, environ *vingt-six mille ans.* Mais le *mouvement de précession* éprouve dans les différens siècles des inégalités qui probablement changeraient un peu l'étendue de cette période.

57. La découverte de la précession ne remonte qu'au tems d'Hipparque. Avant cette époque, on croyait que le soleil, en revenant au même équinoxe, rejoignait aussi les mêmes étoiles; et comme la présence de cet astre

---

par $154''.63.\ \dfrac{S}{T}\cdot\dfrac{T}{400.°}$ ou simplement $\dfrac{154''.63}{400°}\cdot S$. L'année sydérale S sera donc égale à une année tropique plus cette quantité, c'est-à-dire que l'on aura

$$S = T + \frac{154''.63}{400°}\,S;\quad \text{donc } S = \frac{T}{1 - \dfrac{154''.63}{400°}}.$$

En développant le second membre en série, il vient

$$S = T + \frac{T.164''.63}{400°} + T\left\{\frac{154'',63}{400°}\right\}^2 \text{ etc.}$$

Les deux premiers termes forment la valeur que nous avons rapportée dans le texte. Le troisième ne donnerait pas une unité de plus sur la sixième décimale du jour.

dans les diverses parties du ciel déterminait et réglait les travaux de l'agriculture, on avait, dès la plus haute antiquité, divisé l'écliptique, à partir de l'équinoxe du printems, en douze portions égales, que l'on avait nommées *signes*, sans doute à cause des travaux qu'elles indiquaient; car on leur avait donné des noms analogues à ces travaux. Le passage du soleil dans ces différens signes, était facile à reconnaître par l'observation des étoiles qui composent l'écliptique, et que l'on avait aussi partagées en douze groupes, ou constellations. Mais depuis cette ancienne époque, l'état du ciel a beaucoup changé. Les équinoxes ont rétrogradé sur l'écliptique, par l'effet de la précession, et les mêmes étoiles ne répondent plus aux mêmes travaux. Cependant on a conservé en astronomie cette ancienne division, et même les noms des douze signes, avec les caractères qui les représentent; mais on les compte sur l'écliptique à partir de l'équinoxe variable du printems.

Ce sont : le *bélier* ♈, le *taureau* ♉, les *gémeaux* ♊, le *cancer* ♋, le *lion* ♌, la *vierge* ♍, la *balance* ♎, le *scorpion* ♏, le *sagittaire* ♐, le *capricorne* ♑, le *verseau* ♒, les *poissons* ♓.

Ils sont compris, par ordre, dans les deux vers suivans, faciles à graver dans la mémoire :

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Chaque signe est la douzième partie de la circonférence, et vaut 30 degrés de l'ancienne division sexagésimale. L'assemblage de ces signes forme ce que l'on nomme un *zodiaque*.

D'après une convention généralement adoptée par tous les astronomes, le premier point du signe du *bélier* ou d'*aries*, répond toujours à l'équinoxe du printems ;

Le premier point du *cancer* ou de l'écrevisse, au solstice d'été ;

Le premier point de la *balance* à l'équinoxe d'automne ;

Le premier point du *capricorne*, au solstice d'hiver.

58. Du tems d'Hipparque, ou plus exactement à une époque un peu antérieure, les constellations du bélier, du cancer, de la balance et du capricorne, se trouvaient réellement dans ces quatre points de l'orbite du soleil, mais elles s'en sont éloignées depuis d'environ 30° sexagésimaux par l'effet de la précession (*).

L'équinoxe du printems arrive aujourd'hui dans la constellation des poissons ; le solstice d'été dans la constellation des gémeaux ; l'équinoxe d'automne dans la constellation de la vierge ; le solstice d'hiver dans la constellation du sagittaire : tout a rétrogradé d'un signe.

On voit donc qu'il faut soigneusement distinguer les *signes du zodiaque*, qui sont fixes par rapport aux équinoxes, et les *constellations* qui sont mobiles par rapport à ces mêmes points.

59. Au reste, on ignore à quelle époque le zodiaque a été inventé. On ne sait s'il a été imaginé par parties ou tout à-la-fois ; on n'est pas même bien sûr qu'il ait toujours contenu le même nombre de constellations qu'aujourd'hui. On a cependant cherché à prouver par son ancienneté la longue présence du genre humain sur la terre.

(*) En calculant la précession d'après les formules plus approchées qui seront rapportées plus bas, on trouve que la coïncidence exacte des constellations avec les signes du zodiaque, a dû avoir lieu 289 ans avant Hipparque, c'est-à-dire 417 ans avant l'ère chrétienne.

Les hypothèses que l'on a formées sur ce point se trouvent réunies et discutées dans l'Histoire de l'astronomie de Bailly (*). Mais un examen plus approfondi des anciennes tables astronomiques, et en particulier de celles des Indiens, rend ces inductions fort douteuses (**). D'ailleurs, la conséquence que l'on a voulu en déduire, est infirmée par les traditions de tous les peuples, et paraît contraire à un grand nombre de faits d'histoire naturelle qui ramènent l'état actuel du globe à une époque beaucoup plus récente. On ne trouve dans l'intérieur de la terre aucun ossement fossile qui appartienne à l'homme, et on en trouve très-peu qui puissent être rapportés à des espèces d'animaux existantes actuellement. Presque tous ceux qui s'y sont conservés, appartiennent à des espèces inconnues, et différentes de celles que nous voyons aujourd'hui; pourquoi, si ces dernières subsistaient alors, n'en est-il resté aucune trace, et quelle preuve plus frappante d'un ancien état de choses, dans lequel l'homme n'existait pas?

60. Dans tout ce qui précède, nous avons attribué aux étoiles ce mouvement de précession progressif, et parallèle à l'écliptique qui les déplace toutes ensemble, et qui change continuellement leurs positions relativement à l'équateur. Mais, si nous avons considéré ces déplacemens comme réels, c'est uniquement parce que nous sommes convenus de considérer l'équateur comme un plan fixe et immobile, auquel nous rapportons les positions de tous les astres, au moyen de leurs ascensions droites et de leurs déclinaisons. Car les apparences seraient absolument les

(*) Bailly, Hist. de l'astronomie, tom. III, pag. 278 et suiv.

(**) Système du Monde, troisième édition, pag. 274. Paris, 1808, in-8°.

mêmes, si au lieu d'attribuer ces mouvemens à toutes les étoiles, nous les donnions à la terre en sens contraire. Dans cette supposition, ce serait l'équateur céleste, qui se déplaçant avec la terre, rétrograderait le long de l'écliptique contre l'ordre des signes, de manière que l'intersection commune de ces plans, ou la ligne des équinoxes, décrirait annuellement sur l'écliptique un arc de 154″,63, en sens contraire du mouvement propre du soleil. Alors les étoiles seraient réellement immobiles, et la terre seule serait en mouvement. L'équateur céleste se déplacerait parmi les étoiles, et non pas les étoiles par rapport à lui. A la vérité, pour admettre cette manière de voir, il faudrait supposer aussi que l'axe du mouvement diurne se déplace en même tems que le plan de l'équateur, auquel il reste toujours perpendiculaire; car la hauteur du pôle, dans chaque lieu, reste invariablement la même, quoiqu'elle ne réponde pas toujours aux mêmes étoiles; et par conséquent la direction du mouvement diurne restant constamment la même, relativement à chaque horison, doit se déplacer avec eux. Mais ce déplacement de l'axe de rotation du ciel, bien loin de paraître extraordinaire, n'est qu'une induction de plus, tendant à confirmer le soupçon que le mouvement diurne du ciel n'est qu'apparent, et qu'il est réellement causé par celui de la terre en sens contraire. Si l'on se rappelle ce que nous avons dit dans le chapitre 16 du premier livre, sur les illusions que produisent les mouvemens relatifs d'un système dont on fait partie, l'idée de donner à la terre un mouvement de rotation sur elle-même, autour d'un axe fixe sur sa surface, et à cet axe un mouvement de précession dans le ciel, ne comporte rien d'impossible ni même d'étrange. Et, après tout, cette manière d'expliquer les apparences est encore plus simple que d'aller suppóser dans tout le système des corps célestes, autant de mouvemens généraux et communs de rotation diurne et de précession, qui, vu la multitude de ces corps et la variété de leurs distances, supposeraient dans leurs mouvemens particuliers un accord réellement inconcevable. Aussi tous les phénomènes que nous avons à découvrir en poursuivant l'étude de l'astronomie, s'accordent-ils pour montrer que cette supposition n'est pas la vraie. Mais en attendant que leur développement nous offre un ensemble d'inductions irrécusable, il est utile que nous soyons prévenus sur la possibilité de cette double explication.

61. La théorie de l'attraction universelle a fait connaître que le phénomène de la précession des équinoxes est causé par l'attraction de la lune et du soleil sur le sphéroïde applati de la terre. Cette attraction étant inégale sur les diverses portions du sphéroïde à cause de l'applatissement, détourne continuellement le plan de l'équateur terrestre de sa direction, et le force de rétrograder sur l'écliptique, conformément aux lois que nous venons de tirer des observations. Si la terre était sphérique, cet effet n'aurait pas lieu; il n'y aurait point de précession, et les équinoxes répondraient toujours aux mêmes points de l'écliptique, du moins en n'ayant égard qu'au genre d'action que nous venons de considérer.

Les attractions exercées par le soleil et la lune sur le sphéroïde terrestre, variant avec la position de ces astres; il en résulte dans la précession des équinoxes de petites oscillations, qui tantôt l'augmentent et tantôt la diminuent. Les périodes de ces oscillations sont différentes pour le soleil et pour la lune; elles dépendent du tems nécessaire pour que l'astre revienne à une position où il ait la même influence. Les inégalités de ce genre produites par l'action du soleil, ont pour période une demi-année tropique ; celles qui sont produites par la lune ont une période de 18 ans. Les unes et les autres sont liées avec les oscillations analogues de l'obliquité de l'écliptique, dont nous avons parlé dans la page 70 ; et elles font partie du phénomène de la nutation, dont nous expliquerons plus loin les lois.

Ce n'est pas tout, le mouvement des équinoxes est encore modifié par une autre cause. Nous avons déja annoncé que l'attraction des planètes les unes sur les autres et sur le soleil, change peu-à-peu la direction du plan de l'écliptique dans l'espace. Ce déplacement fait varier l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, comme nous l'avons déja remarqué. En même tems il fait varier aussi les points d'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la position de la ligne des équinoxes, suivant laquelle ils se coupent. Ce *mouvement étranger* se combine avec celui que les attractions du soleil et de la lune produiraient, si elles étaient seules agissantes. Dans la position actuelle du système planétaire, le déplacement de l'écliptique donne aux équinoxes un mouvement annuel de $0'',9655$. Ce mouvement est *direct*, c'est-à-dire, dirigé dans le même sens que celui du soleil en longitude. Il est par conséquent contraire au mouvement *rétrograde*, causé par le soleil et la lune. D'où l'on voit que la précession annuelle que nous observons et qui est de $154'',6272$, n'est réellement que la différence de ces deux mouvemens contraires ; et, sans le déplacement de l'écliptique, celle que l'on observerait serait égale à $154'',6272+0'',9655$ ou $155'',5927$. Ces effets de l'action des planètes sont, par eux-mêmes, indépendans de la figure de la terre. Mais ils ont cependant une influence indirecte qui est liée à cette figure. Car comme ils déplacent le plan de l'écliptique qui est l'orbite du soleil, ils amènent cet astre dans des positions différentes relativement au sphéroïde terrestre, et changent ainsi l'action qu'il exerce sur ce sphéroïde en vertu de l'aplatissement. La position de l'orbite de la lune qui accompagne toujours l'écliptique se trouve changée de la même manière, et par la même cause; l'action de la lune change donc aussi. De là résultent dans le mouvement des points équinoxiaux, et dans l'obliquité de l'écliptique de nouvelles modifications. Ces effets secondaires altèrent considérablement les résultats qui auraient lieu par les seules actions du soleil et de la lune sur le sphéroïde terrestre, si le plan de l'écliptique était immobile.

Ces variations qu'éprouve l'action du soleil par suite du déplacement de l'écliptique, sont périodiques comme ce déplacement lui-même. Les *inégalités* qui en résultent dans le mouvement des équinoxes et dans l'obliquité de l'écliptique sont donc périodiques aussi. Ces inégalités sont analogues à la *nutation lunaire*, mais beaucoup plus lentes. On pourrait les appeler la *nutation séculaire*. Comme elles ne sont point proportionnelles au tems, elles rendent la précession *inégale* dans les différens siècles. Mais ces variations sont si lentes que les observations seules n'auraient pas suffi pour les découvrir, sur-tout à cause de l'imperfection des observations anciennes dont il eût fallu se servir pour évaluer et comparer la précession des équinoxes à différentes époques. En vertu de cette cause, la rétrogradation annuelle des points équinoxiaux est maintenant plus forte de $1'',4040$, qu'elle ne l'était au tems d'Hipparque. Par conséquent l'année tropique moyenne est aujourd'hui plus courte de $12'',820$ qu'elle ne l'était alors. Car puisque la rétrogradation des points équinoxiaux est plus grande aujourd'hui qu'autrefois, le soleil a chaque année 1″,4040 de moins à parcourir dans l'écliptique pour rejoindre le plan de l'équateur. L'annee tropique moyenne qui se mesure par les intervalles de ses retours au même équinoxe, est donc aujourd'hui plus courte de tout le tems qu'il faut au soleil pour parcourir un arc de 1″,4040 sur l'écliptique, par son mouvement moyen; ce qui produit un retard de 12″820, comme on peut s'en assurer par une simple proportion. Ce retard exprimé en tems sexagésimal serait de 11″,076. Pour que cette diminution de l'année tropique soit réelle, il faut admettre que l'année sydérale à laquelle on la compare, et le jour sydéral par lequel on la mesure, sont des périodes constantes. En effet, leur invariabilité est démontrée par la théorie, comme nous l'avons annoncé plus haut.

Ces résultats de la théorie, en donnant aux observations et aux calculs une exactitude qu'ils ne sauraient atteindre sans ce secours, éclairent en même tems l'esprit sur les véritables lois des phénomènes ; c'est pourquoi j'ai cru avantageux de les exposer ici par anticipation (*).

62. Les changemens progressifs que la précession produit sur la longitude des astres, se reportent sur la déclinaison, sur l'ascension droite, et altèrent ces deux élémens.

(*) Pour avoir le mouvement des équinoxes sur l'écliptique, il faut les rapporter à une ligne fixe prise dans ce plan. Prenons pour cette origine la position du point équinoxial ♈, au commencement de 1750, et nommons $+\Psi'$ la quantité dont l'équinoxe aura rétrogradé sur l'écliptique à partir de ce point, après un nombre t d'années; t devant être supposé négatif pour les années antérieures. Cela posé, en n'ayant égard qu'à la partie séculaire de la précession, on aura, d'après les formules de la Mécanique céleste, tom. 3, pag. 158, Mais on a vu précédemment que les arcs qui les expriment sont liés avec la longitude et la latitude par des triangles sphériques, au moyen desquels on parvient à les

---

$\Psi' = t.155''.5927 - 1^{\circ}.42823.\sin t.43''.0446, + 6^{\circ}.22038, \sin^2 t.49'',56135.$

en faisant $t = 0$, Ψ' est zéro comme cela doit être. En faisant $t = -1878$, ce qui remonte à l'époque d'Hipparque, 128 ans avant l'ère chrétienne, on trouve

$$\Psi' = -29^{\circ}, 22032 + 0^{\circ},18087 + 0^{\circ},13201 = -28^{\circ},90743.$$

Ce résultat étant négatif, indique que le point équinoxial était alors à l'orient de l'équinoxe de 1750, et il montre que les équinoxes ont rétrogradé de 28°,90743 depuis cette ancienne époque, jusqu'à 1750. C'est 26°. 1'.0", en mesures sexagésimales.

La valeur annuelle de la précession moyenne dans les différens siècles est, d'après les mêmes formules,

$$154''.6272 + 4''.8435 \sin t . 99''.1227 + 1''.93104 \sin^2 t . 21''.5223.$$

C'est la quantité dont ψ' varie quand t augmente d'une unité. En 1750, on avait $t = 0$, la précession était alors 154",6272. Le changement de la précession annuelle depuis 1750, est exprimé par les autres termes de la formule. Il est donc égal à

$$4''.8435 . \sin t . 99''.1227 + 1'',93104 . \sin^2 t . 21'', 5223.$$

Les deux termes de cette expression sont positifs quand t est positif. La précession annuelle augmente donc continuellement de siècle en siècle; d'où il suit que l'année tropique diminue. Pour évaluer cette diminution, il faut réduire l'expression précédente en tems, à raison de la circonférence entière pour une année tropique, c'est-à-dire, qu'il faut la multiplier par $\frac{365^{j}.242264}{400^{\circ}}$; alors elle se trouvera exprimée en jours, et sa valeur sera

$$0^{j}.000442 . \sin t . 99''.1227 + 0^{j}.00017632 \sin^2 t . 21'',5223.$$

Pour les années antérieures à 1750, t changeant de signe, la valeur de cette expression devient négative, et alors elle exprime l'accroisen déduire. On peut donc déduire aussi des mêmes triangles l'expression de l'effet qu'un petit changement de la longitude peut produire sur l'ascension droite et sur la

---

sement de l'année. En faisant ainsi $t = -1878$, ce qui répond à l'époque d'Hipparque, on trouvera $12''.820$ pour l'excès de l'année tropique à cette époque sur celle de 1750 : c'est $11''.076$ en tems sexagésimal. En faisant la même supposition dans la formule qui exprime le changement de la précession annuelle en arc, on trouvera $1''.4040$ pour l'arc correspondant ; c'est la quantité dont la précession annuelle, en 1750, surpasse celle qui avait lieu à l'époque d'Hipparque. Celle-ci était donc alors $153''.2232$.

Puisque nous avons dit que l'étendue des oscillations de l'écliptique n'est pas encore exactement assignée, on conçoit que les formules précédentes ne peuvent être qu'approchées. Mais cette approximation s'étend jusqu'à 2000 ans avant et après l'époque de 1750 qui leur sert d'origine.

Venons maintenant aux inégalités périodiques. Soit Ψ' la rétrogradation moyenne du point équinoxial Υ depuis 1750 jusqu'au commencement d'une année quelconque, et M la valeur de la précession annuelle à cette même époque, Ψ' et M étant calculés par les formules précédentes. Cela posé, après un nombre n de jours écoulés, la rétrogradation du point équinoxial sera

$$\Psi' + \frac{Mn}{365,25} - \frac{1''.3411}{\tang \omega} \cdot \sin 2L - \frac{59''.4444}{\tang 2\omega} \cdot \sin N :$$

ω est l'obliquité de l'écliptique, L la longitude du soleil, N *le nœud ascendant de l'orbe lunaire*. Les deux dernières inégalités proviennent du phénomène de la nutation lunaire et solaire. On a déjà vu leur influence sur l'obliquité de l'écliptique ; seulement elles étaient alors exprimées par les cosinus de $2L$ et de N, au lieu qu'elles le sont ici par les sinus des mêmes arcs. Quant à leurs coefficiens numériques, le premier est celui de $\cos 2L$ divisé par $\tang \omega$; le second est celui de $\cos N$ multiplié par $\frac{2}{\tang 2\omega}$: on peut aisément le vérifier sur les expressions précédentes. Ces rapports dépendent des lois suivant lesquelles agit le phénomène de la nutadéclinaison. On obtient ainsi la *précession en déclinaison et en ascension droite* (*).

63. Si le plan de l'écliptique était immobile dans le

---

tion. Ils ne peuvent se démontrer que par la théorie de l'attraction qui en a fait connaître la cause. Nous les donnons ici comme de simples faits d'observation. Si, dans ces expressions, l'on met pour ω sa valeur relative à l'obliquité actuelle, afin de réduire tous les coefficiens en nombres, on aura, pour la rétrogradation du point équinoxial après n jours écoulés depuis le commencement d'une année quelconque,

$$\Psi' + \frac{Mn}{365.25} - 3''.0894 \sin 2L + 55''.5655 . \sin N.$$

Quand cette expression deviendra négative, cela signifiera que le point équinoxial au lieu d'être plus occidental qu'au commencement de l'année est au contraire plus oriental ; de sorte qu'il aura été ramené en sens contraire de son mouvement moyen, par l'effet des perturbations périodiques qu'il éprouve. Dans la réduction des coefficiens en nombres, on a employé pour ω la valeur $26°.07315$, qui était celle de l'obliquité au commencement de l'année 1800. Mais comme ces coefficiens sont fort petits, cette même valeur suffira pour leur réduction, pendant plusieurs siècles, sans qu'il soit nécessaire d'avoir égard à la variation séculaire de l'obliquité. Ainsi, dans tous les calculs d'observations modernes, on pourra toujours employer la formule numérique que nous venons de déterminer.

(*) Ces résultats sont faciles à déduire des équations que nous avons données dans la note de la page 58. En nommant ω l'obliquité de l'écliptique, l la longitude, λ la latitude, a l'ascension droite, et d la déclinaison, nous avons trouvé alors

$$\sin d = \sin\omega \cos\lambda \sin l + \cos\omega \sin\lambda \quad \text{et} \quad \tang a = \frac{-\tang\lambda \sin\omega + \sin l \cos\omega}{\cos l}.$$

Traitons d'abord la première. Par l'effet de la précession, la longitude l change et devient, par exemple, l'. Supposons que la latitude et l'obliquité de l'écliptique ne changent pas, et nommons d' la nouciel, et si son inclinaison sur l'équateur restait constante, les considérations précédentes suffiraient pour retrouver à une époque quelconque la position d'une étoile relative-

---

velle valeur de la déclinaison correspondante à la longitude l': nous aurons encore

$$\sin d' = \sin \omega . \cos \lambda \sin l' + \cos \omega \sin \lambda.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire

$$\sin d' - \sin d = \sin \omega \cos \lambda \left\{ \sin l' - \sin l \right\};$$

ou, en exprimant la différence des sinus par la différence des arcs,

$$\sin \tfrac{1}{2} \left\{ d' - d \right\} \cos \tfrac{1}{2} \left\{ d' + d \right\} = \sin \omega \cos \lambda . \sin \tfrac{1}{2} \left\{ l' - l \right\} \cos \tfrac{1}{2} \left\{ l' + l \right\}.$$

La différence des longitudes $l' - l$ est égale à la précession en longitude; nous la nommerons p: la différence des déclinaisons $d' - d$ est la précession en déclinaison; nous la nommerons δ, et ainsi l'on aura $\sin \frac{1}{2} . \delta . \cos \left\{ d + \frac{1}{2} \delta \right\} = \sin \omega \cos \lambda . \sin \frac{1}{2} p \cos \left\{ l + \frac{1}{2} p \right\}$.

Cette formule est rigoureuse, et l'on en tirerait δ, par les séries, d'une manière analogue à celle que nous avons indiquée dans le premier livre, pour le calcul des parallaxes. Mais à cause de la petitesse des arcs p et δ, on peut se borner à leur première puissance; et de plus, en substituant leur rapport à celui de leurs sinus, on a, par approximation, $\delta = p \dfrac{\sin \omega \cos \lambda \cos l}{\cos d}$.

Cette formule peut encore être simplifiée; car si l'on se rappelle le triangle sphérique SPP' *fig.* 5, que nous avons considéré dans la pag. 57, et qui est formé par trois rayons visuels menés au pôle de l'écliptique, au pôle de l'équateur et à l'astre, on a évidemment, dans ce triangle: le côté $P'S$, complément de la latitude, opposé à l'angle $P'PS$, ou $90 + a$; et le côté PS, complément de la déclinaison opposé à l'angle $PP'S$, ou $90 - l$; et comme dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés, cette proportionnalité donnera, dans le cas actuel,

$$\cos a = \frac{\cos \lambda . \cos l}{\cos d};$$

de sorte qu'en substituant cette valeur on a simplement

(1) . . . . Précession en déclinaison $\delta = p \sin \omega \cos a$,

ment à ces deux plans, en supposant que cette position eût été une seule fois observée. On se bornerait à faire dans la longitude de l'astre le changement que la préces-

---

C'est l'expression très-simple mais seulement approchée de δ et comme on a supposé $\delta = d' - d$, on en tire

$$d' = d + p \sin \omega \cos a.$$

En introduisant au lieu des déclinaisons les distances Δ, Δ' de l'astre au pôle boréal de l'équateur, ce qui est toujours plus simple, à cause des signes, on aura $\Delta = 100^\circ - d$; $\Delta' = 100^\circ - d'$, De là on tire $d' - d = \Delta - \Delta'$, et par conséquent

$$\Delta' = \Delta - p \sin \omega \cos a.$$

L'effet de la précession en déclinaison change donc de signe en même tems que cos a. En suivant les variations de ce terme, on voit que si l'on conçoit le plan du grand cercle qui passe par les pôles de l'équateur et de l'écliptique, et que l'on nomme le *colure des solstices*, la précession rapproche du pôle boréal de l'équateur les astres situés par rapport à ce *colure* du même côté que l'équinoxe du printems, et éloigne au contraire du même pôle les astres situés du côté de l'équinoxe d'automne, ce qui est en effet visiblement conforme à ce qui devait résulter d'un mouvement parallèle à l'écliptique tel que celui de la précession.

Cherchons maintenant la précession en ascension droite; et pour cela, reprenons la seconde formule.

$$\tang a = \frac{-\tang \lambda \sin \omega + \sin l \cos \omega}{\cos l}.$$

En nommant a' l'ascension droite changée par la précession, on aura de même

$$\tang a' = \frac{-\tang \lambda \sin \omega + \sin l' \cos \omega}{\cos l'};$$

et en retranchant ces deux équations l'une de l'autre,

$$\tang a' - \tang a = \frac{-\tang \lambda \sin \omega . \{\cos l - \cos l'\} + \sin (l' - l) \cos \omega}{\cos l \cos l'};$$

sion exige, et avec cette longitude corrigée, la latitude restant la même, on calculerait l'ascension droite et la déclinaison.

---

ou, en mettant pour $\cos l - \cos l'$ sa valeur

$$\frac{\sin(a'-a)}{\cos a \cos a'} = \frac{-2\tang\lambda\sin\omega.\sin\frac{1}{2}(l'+l)\sin\frac{1}{2}\{l'-l\}+\sin(l'-l)\cos\omega}{\cos l \cos l'}.$$

$a'-a$ est la précession en ascension droite. D'après l'expression précédente, sa valeur est fort petite, du même ordre que $l'-l$ ou p. Ainsi, en se bornant aux premières puissances de ces quantités, on pourra substituer le rapport des petits arcs $a'-a$ et $l'-l$ à celui de leurs sinus. On pourra de plus supposer $l=l'$ et $a=a'$ dans tous les autres termes qui ont déja ces petits arcs pour facteurs, et il viendra ainsi

$$a'-a = \frac{p\cos^2 a\{-\tang\lambda\sin\omega\sin l+\cos\omega\}}{\cos^2 l}.$$

Il faut maintenant éliminer de cette expression λ et l, afin d'avoir $a'-a$ exprimé en fonction de la déclinaison et de l'ascension droite. Pour cela, mettez dans le dénominateur du second membre au lieu de $\cos l$ sa valeur $\frac{\cos a \cos d}{\cos\lambda}$, l'équation deviendra

$$a'-a = \frac{p\{-\sin\lambda\cos\lambda\sin\omega\sin l+\cos^2\lambda\cos\omega\}}{\cos^2 d}.$$

Maintenant l'équation fondamentale qui exprime la valeur de $\sin d$ pag. 87, donnera.

$$\sin\omega\cos\lambda\sin l = \sin d - \cos\omega\sin\lambda;$$

et en substituant cette valeur dans $a'-a$, il vient

$$a'-a = \frac{p\{-\sin\lambda\sin d+\cos\omega\}}{\cos^2 d}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $\sin\lambda$ par sa valeur en fonction de

Mais puisque l'écliptique se déplace aussi dans le ciel, les latitudes des étoiles ne peuvent point demeurer constantes. Leurs variations se combinent donc avec celles que la longitude éprouve, par suite de la précession des equinoxes ; et ainsi pour retrouver la position des astres à

---

la déclinaison et de l'ascension droite, laquelle, d'après les formules fondamentales de la page 58, est

$$\sin \lambda = \cos \omega \sin d - \sin \omega \cos d \sin a\,;$$

et l'on trouve, après les réductions,

(2).... Précession en ascension droite $a' - a = p \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a \tang d \right\}$;

Par conséquent en introduisant au lieu de d la distance polaire $\Delta = 100^\circ - d$, on aura

$$a' = a + p \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a \cot \Delta \right\}.$$

Dans ce siècle, la précession annuelle en longitude $= 154'' 6272$. C'est la valeur de p qu'il faut employer pour transporter les déclinaisons et les ascensions d'une année à une autre consécutive. Mais si l'on voulait calculer la variation de la déclinaison et de l'ascension droite pour plusieurs années, il faudrait prendre au lieu de.... $p = 154'',6272$ la valeur $2p$, $3p$, etc., et on aurait pour $d' - d$: $\Delta - \Delta'$ et $a' - a$ des valeurs doubles, triples, etc. ; mais en prolongeant trop loin cette proportionnalité, elle finirait par devenir inexacte, principalement pour les étoiles voisines des pôles de l'équateur, et pour lesquelles d est peu différent de 100°. En effet, pour ces étoiles, un petit changement dans la déclinaison d, en produit un fort considérable sur la valeur de tang d, parce que tang d devant être infini quand $d = 100^\circ$, croît très-rapidement en approchant de cette limite ; de sorte que les petites variations produites dans d par la précession, deviendraient sensibles sur $a' - a$. Ainsi, pour les étoiles circompolaires, il faut recourir à la méthode rigoureuse que j'ai expliquée dans le n°. 64 du texte, ou bien si l'on veut employer les formules précédentes il ne faut calculer les variations de l'ascension droite que pour des intervalles de tems très-rapprochés.

Rappelons-nous que dans ces formules nous avons supposé l'obliquité des époques quelconques, il faut avoir égard à ces changemens simultanés.

Nous avons déja annoncé que la théorie de l'attraction explique de la manière la plus précise les lois de ces phénomènes. Quoique nous ne puissions pas exposer ici les preuves sur lesquelles ces explications sont appuyées, nous en ferons cependant connaître les principaux résultats, car c'est là le seul moyen de se former des idées nettes et exactes sur le déplacement de l'écliptique et sur le mouvement des points équinoxiaux.

64. Soit fig. 7, $E\gamma\gamma'$ la position de l'écliptique à une époque fixe, par exemple, au commencement de l'année 1750, que les travaux de Lacaille ont rendue célèbre, et que l'on a prise pour l'origine de plusieurs déterminations astronomiques. Soit à cette même époque γQ l'équateur, et γ le point équinoxial; en sorte que les longitudes se compteront de γ vers E, et les ascensions droites de γ vers Q. Considérons maintenant une autre époque postérieure à la précédente. L'équateur aura rétrogradé en vertu de la précession. Soit donc $\gamma'Q'$ sa nouvelle position à cette époque, et γ' son intersection avec l'écliptique fixe de 1750; l'angle sphérique $E\gamma'Q'$ sera son inclinaison sur cette écliptique. Mais alors l'écliptique vraie se sera déplacée dans le ciel; elle aura pris, par exemple, la direction NE', faisant avec la précédente un angle

---

» constante. Or elle varie dans la réalité, comme nous l'avons prouvé plus haut. De plus, le point équinoxial n'est pas fixe sur l'équateur, comme nous le prouverons bientôt : le déplacement de l'écliptique dans l'espace le fait marcher d'occident en orient. Les formules que nous venons d'obtenir ne sont donc pas complettes. Nous verrons tout-à-l'heure ce qu'il y faut ajouter.

sphérique ENE'. Par l'effet de ce déplacement, elle coupera la nouvelle position de l'équateur en γ''; et le point γ'' sera la nouvelle position du point équinoxial vrai. De sorte que l'on comptera les longitudes de γ'' vers E', et les ascensions droites de γ'' vers Q'.

Maintenant il faut savoir qu'en supposant l'obliquité de l'écliptique observée à la première époque, la théorie de l'attraction fait connaître pour une autre époque quelconque, 1°. l'arc $\gamma\gamma'$ ou la précession du point équinoxial sur l'écliptique fixe de 1750; 2°. l'angle $E\gamma'Q'$, obliquité de l'équateur sur cette même écliptique; 3°. l'arc $\gamma'\gamma''$ ou *le mouvement du point équinoxial en ascension droite*; 4°. enfin, l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique mobile ou l'angle $E'\gamma''Q'$. Avec ces données, rien n'est plus facile que de transporter les catalogues des astres d'une position à l'autre, et de calculer quelles seront ou quelles ont dû être les longitudes, latitudes, ascensions droites et déclinaisons. Cette recherche n'est exactement qu'une simple transformation de coordonnées.

En effet, connaissant les longitudes l et les latitudes λ rapportées à la position primitive de 1750, on ajoutera aux longitudes l'arc de précession $\gamma\gamma'$ sur l'écliptique fixe, arc que nous nommerons ψ; les longitudes $l+\psi$ et les latitudes λ détermineront la position des astres sur l'écliptique fixe pour la nouvelle époque que l'on aura considérée. Comme on connaît aussi l'angle $E\gamma'Q'$, obliquité de l'équateur sur cette écliptique à la même époque, on pourra calculer avec ces données les ascensions droites et les déclinaisons relativement à la nouvelle position $\gamma'Q'$ de l'équateur. Nous les nommerons a' et d'. Pour les obtenir, il suffira d'appliquer les formules de la pag. 58.

Mais ces arcs sont comptés à partir du point équinoxial

Υ' : pour les ramener à l'équinoxe vrai Υ'', il suffit de retrancher de toutes les ascensions droites, l'arc $\Upsilon'\Upsilon''$, ou le mouvement du point équinoxial en ascension droite. Soit α' cet arc. Alors les ascensions droites $a' - \alpha'$ et les déclinaisons d' seront les élémens de l'astre relativement à la nouvelle position de l'équateur et du point équinoxial vrai Υ''; et comme on connaît aussi l'angle $E'\Upsilon''Q'$, obliquité apparente de l'écliptique sur l'équateur pour la nouvelle époque, on pourra aisément calculer les longitudes et les latitudes pour cette même époque, relativement à l'écliptique mobile. Ce sera encore une application très-simple des formules de la page 58. Par ce moyen on aura les ascensions droites des astres, leurs déclinaisons, leurs longitudes et leurs latitudes, rapportées à la nouvelle position de l'équateur, de l'écliptique et du point équinoxial Υ''.

Nous avons supposé la nouvelle époque postérieure à 1750. Si elle était antérieure, les raisonnemens seraient les mêmes, le signe seul des quantités changerait. La précession $\Upsilon\Upsilon'$, au lieu d'être ajoutée aux longitudes, devrait en être retranchée, et le mouvement du point équinoxial, au lieu d'être soustrait de l'ascension droite a', s'y ajouterait. Tout cela va de soi-même dans les formules, en y supposant le tems positif pour les époques postérieures à 1750, et négatif pour les autres (*).

La nécessité de ces réductions se fait sentir quand on

(*) Prenons toujours pour origine l'équinoxe de 1750, et nommons $+\psi$ la rétrogradation du point équinoxial sur l'écliptique fixe, jusqu'après un nombre t d'années comptées depuis cette époque, t devant être supposé négatif pour les années antérieures; désignons aussi par V l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe, on aura, par les formules de la Mécanique céleste, veut calculer des positions d'étoiles très-anciennement observées par les astronomes, et l'accord des observations avec les résultats des formules en démontre la rigueur.

$$\Psi = t.155''.5927 + 3^{\circ}.11019 + 4^{\circ}.25562 \sin\left\{t.155''.5927 + 95^{\circ}.0733\right\}$$
$$-7^{\circ}.55308 \cos t.99''.1227 - 1^{\circ}.7572 \sin t.43''.0446,$$

$$V = 26.0812 - 0^{\circ}.36766 - 1^{\circ}.81876 \cos\left\{t.155''.5927 + 95^{\circ}.0733\right\}$$
$$+ 0^{\circ}.50827 \cos t.43''.0446 - 2^{\circ}.84636.\sin t.99''.1227.$$

On a vu d'ailleurs précédemment qu'en nommant Ψ' la rétrogradation correspondante des équinoxes sur l'écliptique mobile, et désignant par V' l'obliquité apparente de l'équateur sur l'écliptique mobile, on a pour une époque quelconque, à partir de 1750,

$$\Psi' = t.155''.5927 - 1^{\circ}.42823 \sin t.43''.0446, + 6^{\circ},22038 \sin^2 t.49'',5613$$

$$V' = 26^{\circ}.0812 - 1^{\circ}.03304 \sin t.99''.1227. - 0^{\circ},73532.\sin^2 t.21'',5223.$$

Quand on aura calculé Ψ, Ψ' et V, on aura $\dfrac{\Psi - \Psi'}{\cos V}$ pour le mouvement du point équinoxial en ascension droite $\Upsilon'\Upsilon''$; et en suivant la marche que nous avons indiquée dans le texte, on aura, d'après ces valeurs, tous les changemens nécessaires pour réduire les positions apparentes des astres de l'époque de 1750 à une autre époque quelconque antérieure ou postérieure, même de deux mille ans, ce qui suffit aux besoins de l'astronomie.

D'après la valeur précédente de Ψ, en faisant varier t d'une unité, on trouve le mouvement annuel des équinoxes sur l'écliptique fixe égal à

$$155'',5927 + 10'',4001 \cos\left\{t.155'',5927 + 95^{\circ},0733\right\}$$
$$+ 11'',4487 \sin.\ t.99'',1227 - 1''.1881 \cos t\ 43'',0446$$

pour 1750 on a $t = 0$, et cette expression devient

$$155'',5927 + 0'',8034 - 1'',1881 = 155'',2080,$$

De même en faisant varier t d'une unité dans la valeur de V, on trouve le changement annuel d'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe de 1750 égal à

Nous nous occuperons plus tard de ces applications, et nous en montrerons l'usage, soit pour vérifier la vérité de quelques observations fort anciennes, soit même pour fixer l'époque de quelques événemens historiques.

$$4'',4445 \sin \left\{t\,.\,155'',5927 + 95^{\circ},0733\right\} - 0'',3437 \sin t\,.\,43''0446$$
$$- 4''.4318 \cos t\,.\,96'', 1227$$

En développant le premier terme, cette expression prend la forme suivante

$$0'',3437\left\{\sin t.155'',5927 - \sin t.43'',0446\right\} + 4'',4318\left\{\cos t.155'',5927 - \cos t.99'',1227\right\}$$

Sous cette forme on voit qu'elle est nulle quand $t = 0$, positive quand t est positif, et négative quand t est négatif. La variation annuelle de l'équateur sur l'écliptique fixe ne commence donc point par être constante. Elle est d'abord nulle, et ensuite elle s'accélère proportionnellement au tems; car si on développait l'expression précédente suivant les puissances du tems, en se bornant à la première, les termes affectés de cosinus se détruiraient mutuellement, et les autres se réduiraient à

$$t.0'',3437\left\{\sin 155'',5927 - \sin 43'',0446\right\}$$

résultat qui, étant évalué numériquement, deviendrait . . . . $+ t.0'',00006074$. D'après la théorie des mouvemens uniformément accélérés, il s'ensuit que le changement total d'obliquité après le tems t serait égal au produit de l'accélération annuelle par la moitié de t, c'est-à-dire qu'après le tems t l'obliquité V deviendrait

$$V + t^2.0'',00003037.$$

C'est ainsi que dans la chûte des corps graves l'accélération étant proportionnelle au tems, les espaces parcourus sont proportionnels au carré du tems.

Ces résultats diffèrent beaucoup de ceux que nous avons obtenus pour le changement annuel de l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique mobile, alors l'expression de ce changement était

$$- 0',2486 \sin t.43'',0446 - 1'',6083 \cos t.99''1227.$$

65. Pour le moment, nous nous contenterons de faire remarquer les conséquences qui résultent de la mobilité de l'écliptique, relativement à la mesure du tems. Nous avons dit que le *jour sydéral* avait pour mesure l'intervalle de tems compris entre deux retours consécutifs d'une même étoile au méridien, cet intervalle étant supposé corrigé des effets de la précession, de l'aberration et de la nutation. En d'autres termes, cela revenait à rapporter

---

ou bien en transformant le dernier terme pour mettre en évidence la partie constante

$$-1'',6083 - 0'',2486 \sin t.43'',0446 + 3'',2166.\sin^2 t.49'',5613\,;$$

ainsi, outre les termes proportionnels au tems et aux diverses puissances du tems, elle contenait le terme constant $-1'',6083$, dont nous ne retrouvons plus l'analogue dans les variations d'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe.

La raison de cette différence tient à celle des causes qui produisent ces deux phénomènes. L'attraction du soleil et de la lune, si elle agissait seule, produirait une précession constante égale à 155'',5927, et elle ne changerait point l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, qui alors serait fixe. Mais par l'effet de l'attraction des planètes, l'écliptique vraie se déplace dans le ciel, et entraîne ces deux astres avec elle. Alors leur action change et produit une petite variation dans l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe. Cette variation, d'abord insensible, s'accélère proportionnellement au tems, et le changement absolu d'obliquité qui en résulte est proportionnel au carré du tems. Mais, en outre, l'attraction des planètes qui déplace l'écliptique vraie l'incline aussi sur l'écliptique fixe. Cette autre variation annuelle est d'abord constante, et son effet est proportionnel au tems. Or l'obliquité apparente que nous observons est la différence des deux inclinaisons de l'équateur et de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe. C'est l'excès de la première sur la seconde; c'est donc la différence des deux résultats précédens, et voilà pourquoi son expression, que nous venons de développer, contient les deux genres de variations qui les caractérisent.

l'étoile à l'équinoxe moyen Υ'' et à la rendre immobile relativement à ce point dans l'intervalle d'un jour. Par conséquent la durée du jour sydéral se trouvait réellement mesurée par les retours consécutifs du point équinoxial moyen Υ'' au méridien. J'appelle ici ce point Υ'' *équinoxe moyen*, pour le distinguer de l'équinoxe vrai, qui oscille autour de lui en vertu de la nutation.

Mais, d'après ce que nous venons de découvrir sur le déplacement séculaire de l'écliptique, le point équinoxial Υ'' ne répond pas toujours au même point physique de l'équateur. Il est au contraire mobile sur ce grand cercle, et son déplacement après un intervalle de tems donné, est mesuré par l'arc $\Upsilon'\Upsilon''$; comme nous venons de le voir dans la fig. 7. La petite portion de ce mouvement propre, qui répond à une rotation du ciel, fait donc réellement partie du jour sydéral; de même que les arcs diurnes décrits sur l'équateur par le soleil, en vertu de son mouvement propre, font partie de la durée des jours solaires. Si le mouvement du point équinoxial Υ'' était sensiblement inégal, les durées des jours sydéraux seraient inégales comme le sont celles des jours solaires. Mais la lenteur de ce mouvement est telle, que l'effet de ses variations produirait à peine quelques minutes sur la durée totale de plusieurs millions d'années. L'influence de ces variations sur la détermination du tems absolu, est donc tout-à-fait insensible, dans l'intervalle des époques que les astronomes ont jusqu'à présent besoin de considérer. Ainsi, en les négligeant, on peut toujours considérer le jour sydéral comme une période de tems constante, dont la durée est mesurée par l'intervalle que l'équinoxe uniformément mobile Υ'' emploie pour revenir au méridien.

A la seule inspection de la *fig.* 7, on peut facilement se rendre compte d'un phénomène que j'ai annoncé précédemment. C'est que le déplacement de l'écliptique causé par l'attraction des planètes, modifie un peu la précession que nous observons, et la rend un peu plus petite que celle qui a lieu sur l'écliptique fixe. Pour nous en assurer, nommons $\Upsilon_{\prime}$ le point physique de l'écliptique mobile, qui, à l'époque de 1750, coïncidait avec le point Υ de l'écliptique fixe. Lorsque, après un certain laps de tems, ces deux plans se sont détachés l'un de l'autre, l'équinoxe vrai vient en Υ'', et l'arc $\Upsilon_{\prime}\Upsilon''$ compté sur l'écliptique mobile est la précession apparente que nous observons (*). Il reste à prouver que cet arc est moindre

---

(*) Comme le point $\Upsilon_{\prime}$ qui sert ici d'origine sur l'écliptique mobile ne laisse point de trace sur cette écliptique, on se demandera peut-être comment il se fait que l'arc $\Upsilon_{\prime}\Upsilon''$ soit la précession apparente que l'on observe. Pour le concevoir, rappelons-nous ce que c'est que la précession apparente : c'est la différence de longitude d'un même point du ciel, par exemple d'une même étoile, sur l'écliptique mobile, à deux époques différentes. Supposons que dans la première position de l'écliptique il se trouvât une étoile précisément au point équinoxial Υ. La longitude et la déclinaison de cette étoile seraient nulles à cette époque. Mais l'écliptique venant à se déplacer, le point équinoxial se déplace et passe en Υ''. Alors les coordonnées de l'étoile Υ rapportées à l'équinoxe vrai ne sont plus nulles. Si de cette étoile on mène l'arc $\Upsilon P'$ perpendiculaire à la nouvelle écliptique, cet arc sera la latitude apparente de l'étoile Υ, et l'arc $\Upsilon'' P'$ sera sa longitude apparente. Or dans le triangle sphérique $N\Upsilon P'$ qui est rectangle en P', si l'on nomme $N\Upsilon = h$ $NP' = c$ et l'angle $N = n$, on aura

$$\text{tang } c = \text{tang } h \cos n,$$

ou

$$\text{tang } h - \text{tang } c = 2 \text{ tang } h \sin^2 \tfrac{1}{2} n,$$

ou enfin

$$\sin (h - c) = 2 \cos c \sin h \cdot \sin^2 \tfrac{1}{2} n.$$

que $\Upsilon\Upsilon'$, qui est la précession sur l'écliptique fixe dans le même intervalle. Or, cela est très-facile, car puisque Υ, et $\Upsilon_{,}$ répondaient originairement aux mêmes points physiques sur les deux écliptiques, les arcs $N\Upsilon$, $N\Upsilon_{,}$ comptés depuis le point N où ces deux plans se coupent, sont égaux entre eux. Maintenant la partie $N\Upsilon''$ du premier est évidemment plus grande que l'arc $N\Upsilon'$ de l'autre, puisque l'angle aigu $N\Upsilon''\Upsilon'$, obliquité de l'équateur sur l'écliptique mobile, est moindre que l'angle obtus $N\Upsilon'\Upsilon''$, qui est le supplément de l'obliquité du même équateur sur l'écliptique fixe. Il faut donc, par compensation, que $\Upsilon_{,}\Upsilon''$ soit moindre que $\Upsilon'\Upsilon$, c'est-à-dire que la précession apparente soit moindre que celle qui a lieu sur l'écliptique fixe. Dans tout ceci nous regardons le point Υ'' comme l'équinoxe vrai, parce que nous faisons abstraction de la nutation.

Si de l'équinoxe vrai Υ'' on mène l'arc de grand cercle $\Upsilon''P$ perpendiculaire à l'écliptique fixe, il résulte de la petitesse de l'angle N que les arcs ΥP, $\Upsilon_{,}\Upsilon''$ seront à fort peu-près égaux entre eux (*). Ainsi en nommant ψ

On voit donc que si l'angle n formé par les deux écliptiques est très-petit, le sinus de $h - c$, et par conséquent la différence $h - c$ des côtés $N\Upsilon$ et NP' sera encore bien plus petite, parce que $\sin^2 \frac{1}{2} n$ est une fraction bien plus petite que $\sin n$. On peut donc, en négligeant les quantités de cet ordre, supposer ces cotés égaux; et comme, par construction $N\Upsilon = N\Upsilon_{,}$, on aura $NP' = N\Upsilon_{,}$, c'est-à-dire que le point P' coïncidera avec le point $\Upsilon_{,}$; par conséquent $\Upsilon\Upsilon_{,}$ sera la différence de longitude apparente de l'étoile Υ dans les deux époques que l'on considère. *Ce sera donc la précession apparente dans l'intervalle.*

(*) En effet, on a déja par construction $N\Upsilon = N\Upsilon_{,}$; on démontrera, comme tout-à-l'heure, que dans le triangle sphérique $N\Upsilon''P$ rectangle en P, le coté NP''' diffère extrêmement peu de l'hypothéla précession sur l'écliptique fixe, et ψ' la précession sur l'écliptique mobile, l'arc $\Upsilon' P$ sera à fort peu-près égal à $\psi-\psi'$. De plus, dans ce même triangle $\Upsilon' P \Upsilon''$, on connaît encore l'angle $P \Upsilon' \Upsilon''$, obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe. Avec ces données, on peut calculer le côté $\Upsilon' \Upsilon''$, qui est *le mouvement séculaire du point équinoxial en ascension droite*, et $P\Upsilon''$ qui est son *mouvement séculaire en latitude*. Mais comme ces arcs sont encore fort petits, même quand on remonte aux observations les plus anciennes, il suffit de résoudre le petit triangle $\Upsilon' \Upsilon'' P$ comme s'il était rectiligne. On trouve ainsi $\Upsilon' \Upsilon'' = \frac{\psi-\psi'}{\cos V}$; $\Upsilon'' P = \{\psi - \psi'\} \operatorname{tang} V$; en nommant V l'angle $\Upsilon \Upsilon' \Upsilon''$, c'est-à-dire l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe. On voit par là que ces quantités sont liées au mouvement en longitude, et l'on voit de plus comment elles en dépendent (*). Remarquons que le mouvement du point équinoxial en ascension droite est dirigé d'occident en orient, et que son mouvement en latitude l'est du nord au sud de l'écliptique fixe.

66. J'ai rapporté plus haut, dans les notes, les formules rigoureuses que la théorie donne pour calculer ces valeurs

---

nuse $N\Upsilon''$ et peut lui être supposé égal quand on néglige les quantités de l'ordre du carré de $\sin \frac{1}{2} n$. Or, si des arcs égaux $N\Upsilon$, $N\Upsilon_{,}$ on retranche les arcs égaux NP, $N\Upsilon''$ les restes seront aussi égaux, c'est-à-dire que l'on aura $\Upsilon P = \Upsilon_{,} \Upsilon''$. C'est la proposition énoncée dans le texte.

(*) Si je propose de résoudre ce petit triangle comme rectiligne, ce n'est que pour plus de brièveté. On parvient ainsi aux mêmes résultats que l'on obtiendrait en le résolvant comme sphérique, et ayant ensuite égard à la petitesse de l'angle n.

relativement à une époque quelconque, et pour déterminer tous les autres élémens du lieu apparent des astres. L'opération se réduit à un simple changement de coordonnées. Mais lorsqu'on se borne à un petit nombre de siècles, avant ou après l'époque de 1750, que nous avons choisie pour point de départ, comme les variations, que ces coordonnées éprouvent, deviennent très-peu considérables, le calcul se simplifie par cette considération; et l'on peut exprimer, par des formules générales et fort simples, les petites corrections qu'il faut faire aux élémens primitifs, pour les transporter à l'époque que l'on a choisie. C'est ainsi que nous en avons usé dans la pag. 87, relativement aux effets de la précession sur l'ascension droite et la déclinaison des astres, dans un court espace de tems (*) : et en général cette méthode approximative

(*) Comme dans ces réductions, que nous exposerons tout-à-l'heure, il est nécessaire d'avoir égard à la variation d'obliquité produite par le déplacement de l'équateur et de l'écliptique, il nous sera dès à présent utile de calculer les variations que de semblables changemens peuvent produire sur les coordonnées angulaires par lesquelles la position des astres est déterminée.

Supposons d'abord l'écliptique fixe; donnons à l'équateur un petit mouvement de rotation autour de la ligne des équinoxes, de manière à augmenter l'obliquité d'une petite quantité ω'; il n'en résultera aucun changement dans les longitudes et les latitudes, puisque le plan de l'écliptique et la ligne des équinoxes, d'où ces arcs se comptent, ne sont point déplacés; mais les déclinaisons et les ascensions droites changeront d'une petite quantité. Pour apprécier l'effet qu'elles éprouveront, reprenons les formules de la page 58, qui donnent leurs valeurs en fonctions des longitudes et latitudes. Nous aurons, en conservant les mêmes dénominations,

$$\sin d = \frac{\sin \lambda . \cos \{\varphi' - \omega\}}{\cos \varphi'}, \quad \text{tang}\, a = \text{tang}\, l . \frac{\sin (\varphi' - \omega)}{\sin \varphi'},$$

est d'un usage continuel en astronomie, pour réduire les observations des astres à une même position de l'équateur et du point équinoxial, afin de les rendre comparables entre elles.

---

où φ' est un angle auxiliaire tel qu'on ait

$$\text{tang}\,\varphi' = \frac{\sin l}{\text{tang}\,\lambda}.$$

Maintenant, si l'obliquité augmente de la petite quantité ω', l et λ restant les mêmes, l'angle φ' ne variera point, mais d et a changeront, et en représentant par d' et a' leurs nouvelles valeurs, on aura

$$\sin d' = \frac{\sin\lambda\cos\{\varphi' - \omega - \omega'\}}{\cos\varphi'},\quad \text{tang}\,a' = \text{tang}\,l\,\frac{\sin\{\varphi' - \omega - \omega'\}}{\sin\varphi'},$$

l'angle φ' étant le même qu'auparavant. Retranchant de ces équations les précédentes, il vient

$$\sin d' - \sin d = \sin\lambda\,.\left\{\frac{\cos\{\varphi' - \omega - \omega'\} - \cos\{\varphi' - \omega\}}{\cos\varphi'}\right\},$$

$$\text{tang}\,a' - \text{tang}\,a = \text{tang}\,l\,.\left\{\frac{\sin(\varphi' - \omega - \omega') - \sin(\varphi' - \omega)}{\sin\varphi'}\right\};$$

ou, en employant nos transformations accoutumées,

$$\sin\tfrac{1}{2}(d' - d)\cos\tfrac{1}{2}(d' + d) = \frac{\sin\lambda\sin\tfrac{1}{2}\omega'\sin(\varphi' - \omega - \tfrac{1}{2}\omega')}{\cos\varphi'},$$

$$\sin\{a' - a\} = \frac{-2\,\text{tang}\,l\cos a\cos a'\sin\tfrac{1}{2}\omega'\cos(\varphi' - \omega - \tfrac{1}{2}\omega')}{\sin\varphi'}.$$

Ce sont les formules rigoureuses, et l'on en tirerait $d' - d$ par des séries analogues à celles qui nous ont servi dans le premier livre, pour les parallaxes ; mais puisque nous supposons ω' fort petit, on voit que les variations $d' - d$, $a' - a$ de la déclinaison et de l'ascension droite sont très-petites du même ordre. Si l'on se borne aux premières puissances de ces variations, on pourra subs-

Cette simplification est fondée sur un principe d'analyse qui peut être utile dans beaucoup de circonstances. Quand on examine les effets simultanées de plusieurs causes de variations fort petites, on peut dans l'approximation

---

tituer leur rapport à celui de leurs sinus; on pourra, de plus, supposer $d = d'$, $a = a'$ et $\omega' = 0$ dans les autres termes de l'équation. On a ainsi, par approximation,

$$d' - d = \frac{\omega' \sin\lambda \sin\{\varphi' - \omega\}}{\cos d \cos\varphi'}, \quad a' - a = \frac{-\omega' \operatorname{tang} l \cos^2 a \cos\{\varphi' - \omega\}}{\sin\varphi'}.$$

On peut éliminer de la première valeur $\sin(\varphi' - \omega)$, et de la seconde $\cos(\varphi' - \omega)$ au moyen de leurs valeurs tirées des premières équations d'où nous sommes partis; on aura ainsi

$$d' - d = \frac{\omega' \operatorname{tang} \omega . \sin\lambda \operatorname{tang}\varphi'}{\cos d \operatorname{tang} l}, \quad a' - a = \frac{\omega' \cos^2 a \sin d . \operatorname{tang} l}{\sin\lambda \operatorname{tang}\varphi'},$$

ou, en substituant pour $\sin\lambda \operatorname{tang}\varphi'$ sa valeur $\sin l \cos\lambda$,

$$d' - d = \frac{\omega' \operatorname{tang} a}{\cos d} . \cos\lambda \cos l, \quad a' - a = \frac{-\omega' \cos^2 a \sin d}{\cos\lambda . \cos l}.$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à remarquer que dans le triangle sphérique formé par le pôle de l'écliptique, le pôle de l'équateur et l'astre, on a, comme nous l'avons déja souvent employé,

$$\frac{\cos a}{\cos l} = \frac{\cos\lambda}{\cos d},$$

ce qui donne

$$\cos a \cos d = \cos\lambda \cos l.$$

Eliminant donc $\cos\lambda \cos l$ par cette valeur, il reste

$$d' - d = \omega' \sin a, \qquad a' - a = -\omega' \cos a \operatorname{tang} d,$$

d'où l'on tire

$$d' = d + \omega' \sin a, \qquad a' = a - \omega' \cos a \operatorname{tang} d.$$

On voit que la variation de la déclinaison est nulle sur le point se borner à évaluer chaque effet séparément, et regarder l'effet total comme la somme de ces résultats partiels. C'est ainsi que plusieurs sons simultanées peuvent ébranler l'air à-la-fois et rester distincts ; c'est ainsi que sur la surface d'une eau tranquille, lorsque de petite ondes s'y propagent circulairement, si l'on vient à exciter une nouvelle agitation dans un autre point, les ondes qui en résultent se répandent sur la surface, comme si elles n'avait point été troublée, et dans les points où elles se croisent, l'élévation totale de la petite vague ne diffère pas sensiblement de leur somme. Il en est de même de tous les mouvemens très-petits, et c'est là le principe qui en facilite l'approximation.

équinoxial, et qu'elle est la plus grande possible quand l'ascension droite est de 100 grades ; alors on a $d' = d + \omega'$, et tout l'effet de la variation de l'obliquité se porte sur la déclinaison.

Supposons maintenant l'équateur fixe, et faisons tourner l'écliptique autour de la ligne des équinoxes, de manière à augmenter l'obliquité d'une petite quantité ω'' ; alors l'ascension droite et la déclinaison resteront les mêmes, mais les latitudes et longitudes changeront. On calculerait ces variations par la méthode précédente, mais on peut obtenir tout de suite leurs valeurs d'après une remarque que nous avons déja faite plusieurs fois, c'est que la latitude est tout-à-fait analogue à la déclinaison, et la longitude à l'ascension droite, de sorte que ces quantités sont exprimées les unes par les autres de la même manière, en changeant seulement le signe de l'obliquité ω. Puis donc que nous supposons ici une augmentation de l'obliquité comme dans le cas précédent, on aura par analogie

$$\lambda' = \lambda - \omega'' \sin l, \qquad l' = l + \omega'' \cos l \operatorname{tang} \lambda,$$

qui donneront les nouvelles valeurs de la latitude et de la longitude. Nous avons supposé un accroissement de l'obliquité ; si l'on voulait que ce fût une diminution, il n'y aurait qu'à faire ω' et ω'' négatifs dans les résultats,

67. Lorsqu'on se borne à transporter les positions des astres d'une époque à une autre peu éloignée, le déplacement de l'équateur, celui de l'écliptique, et le changement d'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe, et sur l'écliptique mobile, sont des mouvemens très-petits auxquels on peut appliquer le principe que nous venons d'exposer. Ainsi, quand on aura calculé les valeurs absolues de ces changemens dans l'intervalle des époques que l'on considère, il suffira d'évaluer séparément l'effet que chacun d'eux peut produire sur les coordonnées des astres. La somme de ces effets partiels exprimera la variation totale que ces coordonnées éprouvent. Par ce moyen le calcul devient plus court et plus facile; et il offre encore une approximation suffisante, lorsqu'elle n'embrasse qu'un intervalle de deux ou trois siècles (*).

(*) Pour obtenir ces formules approchées, nommons l et λ les longitudes et latitudes des astres à la première des deux époques que l'on considère, et proposons-nous de les calculer pour une autre époque postérieure d'un nombre t d'années. Selon ce qui a été dit dans le texte, et conformément à la *fig.* 7 il faudra d'abord ajouter à l le mouvement du point équinoxial sur l'écliptique fixe pendant l'intervalle que l'on considère. On aura ainsi les longitudes $l+\psi$ et les latitudes λ rapportées au nouveau point équinoxial γ' sur l'écliptique fixe. Dans cette nouvelle position, l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe sera devenue $\omega+\omega'$, ω étant cette obliquité à la première époque. Avec ces données, on calculera les déclinaisons d' et les ascensions droites a' rapportées au point équinoxial γ', et d'après les formules générales de la page 58, leurs valeurs seront

$$\sin d' = \sin\{\omega+\omega'\}\cos\lambda\sin\{l+\psi\} + \cos\{\omega+\omega'\}\sin\lambda,$$

$$\tang a' = \frac{-\tang\lambda\sin\{\omega+\omega'\}+\sin(l+\psi)\cos(\omega+\omega')}{\cos(l+\psi)}.$$

Mais qui ne voit, d'après ces formules, que le problème revient à

Les mouvemens de l'équateur et de l'écliptique, qui sont les données fondamentales de ces calculs, peuvent s'obtenir rigoureusement au moyen des formules que

---

augmenter les longitudes de la quantité ψ et l'obliquité de la quantité ω', cette augmentation étant produite par un déplacement de l'équateur. Puisque ces variations sont supposées fort petites, on pourra les effectuer séparément et les ajouter ensemble. Alors il n'y a qu'à appliquer ici les formules approchées trouvées précédemment pour l'effet de la précession et du changement de l'obliquité ; par ce moyen, on aura tout de suite

$$d' = d + \psi \sin \omega \cos a + \omega' \sin a,$$

$$a' = a + \psi \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a \operatorname{tang} d \right\} - \omega' \cos a \operatorname{tang} d.$$

Les coordonnées a' et d' ont pour origine le point équinoxial Υ' sur l'écliptique fixe : pour les ramener à l'équinoxe vrai Υ'', il suffit de retrancher de a' le mouvement du point équinoxial en ascension droite, que nous appellerons μ : par conséquent, si nous appelons d'' et a'' les déclinaisons et les ascensions droites rapportées à la nouvelle position de l'équateur et à l'équinoxe vrai Υ'', nous aurons

$$d'' = d + \psi \sin \omega \cos a + \omega' \sin a,$$

$$a'' = a - \mu + \psi \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a \operatorname{tang} d \right\} - \omega' \cos a \operatorname{tang} d.$$

Ici, comme dans la page 100, nous appelons Υ'' l'équinoxe vrai, parce que nous faisons abstraction des déplacemens périodiques causés par la nutation.

Il est bon de faire ici une remarque qui est propre à augmenter la précision de ces formules. Lorsque nous avons calculé, par approximation, les différens termes qui composent les valeurs de d' et de a', nous avons supposé $a = a'$, $d = d'$ dans tous les termes qui étaient déja multipliés par les petites quantités ψ et ω'. Cela revenait à négliger les puissances de ψ et de ω' supérieures à la première. Mais dans la réalité, les termes dont il s'agit contenaient $\frac{a + a'}{2}$, $\frac{d + d'}{2}$, $\frac{2\omega + \omega'}{2}$; ils se rapportaient donc à la j'ai rapportées dans les notes de la page 94. Mais lorsqu'*il ne s'agit que d'un intervalle de deux ou trois* siècles, avant ou après l'époque de 1750, qui sert d'origine

---

valeur moyenne de ces quantités; ainsi, on pourra leur conserver cette exactitude en prenant pour a, d et ω les valeurs correspondantes à l'époque moyenne entre celles que l'on considère. Mais comme *on ne connaîtra pas d'abord ces valeurs moyennes*, on commencera par déduire approximativement a' et d' des valeurs de a et de d, au moyen des formules précédentes, après quoi, lorsqu'on les connaîtra, on mettra $\frac{a+a'}{2}$ à la place de a et $\frac{d+d'}{2}$ à la place de d dans ces mêmes formules, et en recommençant le calcul avec ces nouveaux élémens, on aura les valeurs de a'' et de d'' avec une approximation plus exacte. L'avantage de ce procédé consiste à faire porter l'approximation sur un plus petit intervalle de tems.

Connaissant l'ascension droite et la déclinaison pour la nouvelle époque, avec l'*obliquité apparente de l'équateur sur* l'écliptique mobile, obliquité que nous représenterons en général par $\omega + \omega''$, il est bien facile d'en déduire les longitudes l'' et les latitudes λ'' relatives à cette même époque; car d'après les formules de la page 58, on aura évidemment

$$\sin\lambda'' = \frac{\sin d'' \cos\{\varphi + \omega + \omega''\}}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang} l'' = \frac{\operatorname{tang} a''.\sin(\varphi + \omega + \omega'')}{\sin\varphi},$$

φ étant un angle auxiliaire tel qu'on ait

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin a''}{\operatorname{tang} d''}.$$

Quant aux valeurs des variations ψ, μ, ω', ω'' qui entrent comme données dans les formules; en voici les valeurs déduites des formules rigoureuses que j'ai rapportées plus haut.

En représentant par t, un nombre d'années comptées à partir de 1750,

Rétrogradation du point équinoxial sur l'écliptique fixe de 1750, après t d'années. . . . . $\psi = t.155'',2080$.

à ces formules, on peut, en les développant en séries et se bornant à leurs premiers termes, en tirer des expressions beaucoup plus simples, qui offriront une approximation

---

Rétrogradation du point équinoxial sur l'écliptique vraie. . . . . $\psi' = t . 154,6272.$

Différence de ces valeurs, ou mouvement direct du point équinoxial en longitude, occasionné par le déplacement de l'écliptique . . . . $\psi - \psi' = t.\ 0'',5808.$

De là, en employant l'obliquité moyenne $V = 26^{\circ},0812$, qui avait lieu en 1750, on déduit la rétrogradation du point équinoxial en ascension droite qui a pour expression $\dfrac{\psi - \psi'}{\cos V}$; et en la désignant par μ, on trouve. . . . $\mu = t.\ 0'',6332.$

Le mouvement du point équinoxial en latitude, dirigé vers le pôle austral de l'écliptique de 1750, sera . . . . . . $(\psi - \psi')$ tang. V. en le désignant par ν, on trouve. . . . . $\nu = t.\ 0'',2522.$

Changement d'obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe de 1750 . . . $\omega' = + t^2.\ 0'',00003037.$

Changement de l'obliquité apparente de l'équateur sur l'écliptique mobile. . $\omega'' = - t.\ 1'',6083.$

On prendra les différences de ces valeurs pour les deux époques que l'on veut considérer, et on substituera ces différences dans les formules qui expriment les réductions correspondantes des coordonnées. Comme toutes ces quantités, excepté ω, sont proportionnelles au tems, on formera tout de suite leurs différences, en multipliant le coefficient numérique, qui exprime leur variation annuelle, par le nombre d'années compris entre les époques que l'on considère. Mais pour ω, qui est proportionnel au carré du tems, il faudra multiplier son coefficient numérique par la différence des carrés de tems écoulés depuis 1750. Au reste, la variation ω' est si petite, suffisante pour le cas dont nous parlons. C'est l'objet des résultats que j'ai exposés ici dans les notes.

---

qu'elle ne ferait que 0",3037 en un siècle, et par conséquent, elle pourra, le plus souvent, être négligée, quand on comparera des intervalles peu éloignés. C'est ce que font les astronomes; mais comme l'introduction de cette correction ne complique pas du tout les formules, nous l'avons conservée, afin de laisser au raisonnement toute sa généralité, sauf à la négliger, quand on croira pouvoir se le permettre.

Il faut toujours se souvenir que dans ces résultats t doit être supposé positif après 1750, et négatif avant cette époque.

CHAPITRE VI.

De la Nutation.

68. Le phénomène de la nutation étant lié avec les positions de la lune, il semble que nous n'en devrions pas expliquer les lois avant d'avoir parlé des mouvemens de cet astre. Mais comme l'effet de la nutation se réduit à causer, dans la précession des équinoxes et dans l'obliquité de l'écliptique, de petites variations périodiques, il m'a paru convenable d'en joindre l'exposé à ce que nous venons de dire sur les mouvemens de l'obliquité de l'équateur; sauf à donner, dès à présent, sur les mouvemens de la lune, le très-petit nombre de notions nécessaires pour l'intelligence de ces phénomènes; notions que l'on peut d'abord admettre comme des faits observés, comme des données provisoires dont nous devrons vérifier plus tard l'exactitude.

Dans le chapitre précédent, nous avons examiné toutes les variations lentes et séculaires qui affectent l'obliquité de l'écliptique et la position des points équinoxiaux. Nous avons vu comment on pouvait calculer les effets que ces variations produisent sur les ascensions droites et sur les déclinaisons de tous les astres. Ainsi, en tenant compte de ces effets, en les retranchant des déclinaisons et des ascensions droites observées à différentes époques, on ramène les choses au même point que si l'équateur et l'écliptique étaient immobiles. Par conséquent, si ces plans et les astres que l'on y rapporte n'ont pas d'autres mouvemens que ceux dont nous venons de parler, on doit trouver que l'ascension droite et la déclinaison d'un même astre, ainsi corrigées, conservent toujours exactement les mêmes valeurs, à quelque époque qu'on les observe.

Or, c'est ce qui n'a pas lieu exactement, et il reste encore quelques petites variations périodiques dont il faut dépouiller les positions des astres pour obtenir des coordonnées constantes. C'est Bradley qui a fait cette découverte.

La première de ces variations, celle qu'il découvrit d'abord, se nomme l'*aberration de la lumière*. Elle consiste, en effet, dans une aberration des rayons lumineux, causée par le mouvement de la terre, qui nous faisant choquer, en sens contraire, les molécules lumineuses émanées des astres, nous donne une sensation composée de ce mouvement et du mouvement propre de la lumière, qui, bien que très-rapide, n'est pourtant pas instantanée. Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer les lois de ce phénomène, que nous étudierons plus tard avec détail. Il nous suffira de savoir qu'il nous empêche de voir les astres à leur véritable place, mais que l'on sait corriger cette illusion par le calcul, d'après les lois auxquelles le phénomène est assujéti ; de sorte qu'en y ayant égard, on ramène les choses au même point que s'il n'existait pas.

69. Cette correction n'est pas encore suffisante pour rendre les ascensions droites et les déclinaisons constantes. Elles éprouvent encore des changemens. Ce qui se présente de plus simple, c'est de voir si ces changemens peuvent être attribués à une petite variation dans l'obliquité de l'écliptique et dans la position des points équinoxiaux. Or, nous avons examiné, dans le chapitre précédent,

les effets des variations indéterminées de ces deux élémens, et nous avons donné des formules pour calculer le changement qu'elles peuvent produire sur la déclinaison et l'ascension droite. Puisqu'ici ces changemens sont donnés, il n'y a qu'à introduire leurs valeurs dans nos formules, et prendre pour inconnues les petites variations de l'écliptique et des équinoxes. Nous calculerons ces inconnues par nos formules, et si toutes les étoiles s'accordent à leur assigner la même valeur, nous en conclurons qu'en effet les petits mouvemens observés dans les étoiles sont dus à une semblable cause. C'est ce qu'a fait Bradley, et il a montré, par un grand nombre d'exemples, que cet accord était aussi exact que l'on pouvait le desirer.

Il était prouvé par là que le phénomène était commun à toutes les étoiles, et ne dépendait plus que des variations des deux élémens que nous venons de considérer; mais cela ne suffisait pas encore pour avoir la loi complète du phénomène; il restait à découvrir si ces variations de l'obliquité et de la précession étaient indéfiniment progressives, ou si elles étaient périodiques; et dans ce cas, il fallait déterminer leur période : c'est encore ce que fit Bradley. Il s'apperçut que ces variations avaient un rapport marqué avec les positions *du nœud ascendant de la lune* sur l'écliptique; il vit qu'elles suivaient les mêmes périodes, et enfin il parvint à trouver comment elles en dépendaient.

Pour comprendre cette dépendance, il faut savoir, ce qui sera démontré plus loin, que la lune, comme le soleil, se meut dans une orbite plane, dont le plan passe par le centre de la terre. Ce plan, ou plutôt le grand cercle de la sphère céleste qui le représente, coupe l'écliptique, qui est aussi un grand cercle, en deux points opposés, que l'on nomme les *nœuds de la lune.* Ils sont pour l'orbite de cet astre, ce que sont les équinoxes pour le plan de l'équateur. Ces nœuds ne répondent pas toujours aux mêmes points de l'écliptique. Ils ont, sur ce grand cercle, un mouvement rétrograde, comme les équinoxes, mais beaucoup plus rapide, car ils font le tour de l'écliptique en 18 ans et 214 jours à-peu-près, au lieu que les équinoxes n'achèvent cette révolution qu'en 26000 ans. On appelle *nœud ascendant* celui où la lune passe quand elle s'élève au-dessus de l'écliptique en allant vers le nord, et *nœud descendant* celui où elle passe quand elle redescend vers le sud : le premier est analogue à l'équinoxe du printems, le second à l'équinoxe d'automne.

La théorie de l'attraction universelle a fait connaître *pourquoi* les variations périodiques observées par Bradley dans l'obliquité de l'écliptique et dans la position des équinoxes, sont en rapport avec la position des nœuds de la lune. Nous avons déja annoncé qu'elles sont produites par l'attraction de cet astre, qui fait osciller ainsi l'équateur de la terre : par là on a pu voir aussi pourquoi les deux mouvemens de l'obliquité et des équinoxes sont liés entre eux, liaison que l'observation seule avait déja découverte, mais qu'elle ne pouvait établir que d'une manière expérimentale, sans qu'on pût savoir si les rapports qu'elle indiquait étaient rigoureux, ou s'ils avaient lieu simplement par approximation. C'est à d'Alembert que l'on doit cette importante confirmation de la théorie de l'attraction universelle. On a trouvé aussi que l'attraction du soleil produit un effet semblable, mais beaucoup plus faible (*).

(*) Nous avons donné ces valeurs dans les expressions générales de la précession et de la variation d'obliquité, pag. 72 et 85.

Le phénomène de la nutation se trouvant ainsi réduit à un petit changement dans l'obliquité de l'écliptique et dans la position des équinoxes, causé par un dérangement de l'équateur, rien n'est plus facile que de calculer les effets qui doivent en résulter sur les déclinaisons et sur les ascensions droites des étoiles : il suffit d'introduire les valeurs de ces dérangemens dans les formules que nous avons données au chapitre précédent; on aura ainsi les lois mathématiques et les résultats de ce phénomène (*).

(*) La question est ici absolument la même que dans la note de la page 104. Il s'agit de calculer l'effet produit sur la déclinaison moyenne d et l'ascension droite moyenne a par un petit accroissement ω' de l'obliquité de l'écliptique et par un petit accroissement ψ de la longitude; ainsi, en nommant d' et a' les valeurs de la déclinaison et de l'ascension droite après ces changemens, on aura, comme nous l'avons vu alors,

$$\sin d' = \sin\left\{\omega + \omega'\right\} \cos\lambda \sin\left\{l + \psi\right\} + \cos\left\{\omega + \omega'\right\} \sin\lambda,$$

$$\text{tang}\, a' = \frac{-\text{tang}\,\lambda \sin\left\{\omega + \omega'\right\} + \sin(l + \psi)\cos(\omega + \omega')}{\cos(l + \psi)},$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique, λ la latitude de l'astre, l sa longitude. Ces formules sont rigoureuses, et n'expriment qu'une simple transformation de coordonnées; mais si l'on veut considérer les variations ω' et ψ comme très-petites, et se borner à leur première puissance, on aura, comme nous l'avons trouvé alors, ces valeurs approchées de d' et de a',

$$d' = d + \psi \sin\omega \cos a + \omega' \sin a,$$

$$a' = a + \psi\left\{\cos\omega + \sin\omega \sin a\, \text{tang}\, d\right\} - \omega' \cos a\, \text{tang}\, d.$$

d et a sont les coordonnées rapportées au point équinoxial moyen; d' et a' sont les coordonnées rapportées au point équinoxial variable par l'effet de la nutation. Si les premières sont données, on trouvera tout de suite les secondes par ces formules; mais si les coordonnées

70. Mais pourquoi a-t-il été nommé nutation? Cela tient à une construction géométrique par laquelle on peut représenter ses effets. Soit, *fig.* 8, C le centre de

---

apparenetes d' et a' étaient données, et que l'on voulût déduire les coordonnées moyennes, il n'y aurait qu'à tirer de ces équations les valeurs de d et de a, qui seraient

$$d = d' - \psi \sin \omega \cos a - \omega' \sin a,$$
$$a = a' - \psi \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a \tang d \right\} + \omega' \cos a \tang d.$$

A la vérité, le second membre contient encore les quantités a et d que l'on cherche; mais à cause du peu de différence de ces coordonnées avec a' et d', on peut substituer ces dernières aux autres dans le second membre, dont tous les termes sont déja multipliés par les petites quantités ω' et ψ; on aura, de cette manière,

$$d = d' - \psi \sin \omega \cos a' - \omega' \sin a',$$
$$a = a' - \psi \left\{ \cos \omega + \sin \omega \sin a' \tang d' \right\} + \omega' \cos a' \tang d'.$$

Ces formules donneront le lieu moyen de l'astre quand on connaîtra son lieu vrai.

Il ne reste plus qu'à substituer, dans ces expressions, pour ω' et ψ, leurs valeurs telles qu'elles résultent des observations et de la théorie; or, ces valeurs sont

$$\omega' = 29'',7222 \cdot \cos N, \quad \psi = -\frac{2.29'',7222}{\tang 2\omega} \cdot \sin N,$$

N étant la longitude du nœud ascendant de la lune. L'opposition de signe de ψ et de ω' est facile à concevoir d'après la construction que nous avons rapportée dans le texte; car lorsque le nœud N se trouve dans le premier quart de l'écliptique depuis le premier point d'aries jusqu'au premier point du cancer, le pôle vrai se trouve dans le quadrans suivant de son ellipse, c'est-à-dire, entre le cancer et la balance. Dans cette position, l'obliquité apparente est plus grande que l'obliquité moyenne, et l'équinoxe se trouve ramené vers le signe du taureau, c'est-à-dire, que les longitudes qui se la terre et de la sphère céleste, $\Upsilon Q \triangleq$ l'équateur, $\Upsilon E \triangleq$ l'écliptique, P le pôle boréal du premier de ces deux cercles, P' le pôle boréal du second; le point Υ sera

---

comptent de cet équinoxe, dans le sens des signes, sont diminuées : c'est ce qu'indiquent les valeurs de ω' et de ψ; car sin N et cos N étant tous deux positifs dans cette partie de l'écliptique, ces valeurs indiquent un accroissement de l'obliquité et une diminution de la longitude. On pourrait de même suivre, dans les autres quadrans, le jeu des signes algébriques de sin N et cos N; on le trouverait toujours conforme à l'espèce d'oscillation que nous avons attribuée au pôle; il ne reste donc plus qu'à substituer ces valeurs numériques de ω' et de ψ dans les valeurs précédentes de d' ou de d. En faisant ces substitutions, il faut prendre pour ω l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'époque pour laquelle on calcule; mais à cause de l'extrême petitesse de ψ et de ω', les variations séculaires de ω ont ici très-peu d'influence, et les résultats, calculés avec l'obliquité d'une année, sont encore très-suffisamment exacts, pour bien des années avant et après : par cette raison, nous adopterons, dans notre calcul numérique, l'obliquité moyenne qui a lieu en 1810, c'est-à-dire, 26,07154 (23°.27'.51",79 sex.), et avec ces valeurs nous trouverons

$$\omega' = 29'',7222 \cos N, \qquad \psi = -55'',5655 \sin N.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions générales de d', et de a', et effectuant numériquement les multiplications par sin ω et cos ω, nous aurons

$$d' = d - 22'',125 \sin N \cos a + 29'',722 \cos N \sin a,$$
$$a' = a - 50'',972 \sin N - \left\{22'',125 \sin N \sin a + 29'',722 \cos N . \cos a\right\} \operatorname{tang} d,$$

valeurs qui peuvent être mises sous cette forme plus commode pour le calcul logarithmique,

$$d' = d + 25'',924 \sin\left\{a - N\right\} + 3'',799 \sin\left\{a + N\right\},$$
$$a' = a - 50'',972 \sin N - \left\{25'',924 \cos(a - N) + 3'',794 \cos(a + N)\right\}:$$

ces résultats sont exprimés en secondes décimales; si on voulait les l'équinoxe du printems, ♎ l'équinoxe d'automne, et l'angle PCP' sera l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur. Cela posé, si, sans changer cet angle, on fait décrire à l'axe

---

obtenir en secondes sexagésimales, ce qui est fréquemment nécessaire, parce que les tables sont encore construites sur cette division, il faudrait les convertir de cette manière; on trouverait ainsi

$$\omega' = 9'',63 \cos N, \qquad \psi = -18'',00 \sin N;$$

et ensuite

$$d' = d + 8'',399 \cdot \sin(a - N) + 1'',230 \sin(a + N),$$
$$a' = a - 16'',514 \sin N - \{8'',399 \cos(a - N) + 1'',230 \cos(a + N)\} \tang d.$$

Ces variations de d et de a s'appellent la *nutation lunaire en déclinaison* et la *nutation lunaire en ascension droite.* Il est clair que la nutation solaire donnera des valeurs analogues, car les variations qu'elle produit sur l'obliquité et sur la longitude sont de même forme que les précédentes, et leurs valeurs sont

$$\omega' = \quad 1''.3411 \cdot \cos 2L,$$
$$\psi = -\frac{1''.3411}{\tang \omega} \cdot \sin 2L,$$

L étant la longitude du soleil. En prenant toujours $\omega = 26^\circ,07154$, ce qui est la valeur de l'obliquité en 1810, et effectuant de même les substitutions de ω' et ψ dans nos formules générales, on trouve qu'elles produisent les termes suivans, analogues à ceux que nous venons de calculer,

Sur la déclinaison vraie,

$$+ 1'',286 \sin(a - 2L) + 0'',055 \sin(a + 2L),$$

Sur l'ascension droite vraie,

$$-2'',834 \sin 2L - \{1'',286 \cos(a - 2L) + 0'',055 \cos(a + 2L)\} \tang d;$$

en secondes sexagésimales, ce serait

CP une surface conique autour de l'axe CP', en sorte que le pôle P décrive une circonférence de cercle perpendiculaire à cet axe, ce mouvement transportera l'intersection γ de ces deux plans dans toute les parties de

---

$$+ 0'',417 \sin(a - 2L) + 0'',018 \sin(a + 2L),$$
$$- 0'',918 \sin 2L - \{0'',417 \cos(a - 2L) + 0'',018 \cos(a + 2L)\} \tang d.$$

Ces termes qui composent la *nutation solaire en déclinaison et en ascension droite*, s'ajoutent à ceux qui composent la nutation lunaire, et l'ensemble forme ce que l'on appelle la *nutation luni-solaire*. On peut remarquer que les valeurs de ω' et de ψ n'ont pas entre elles le même rapport dans les deux nutations, tant à cause du coefficient dépendant de l'angle $2L$, qu'à cause du dénominateur, qui est tang 2ω dans la première, et simplement tang ω dans la seconde. Cette différence est un résultat de la théorie que nous nous contentons d'indiquer, de peur qu'en se laissant guider par l'analogie des formules, on ne soit tenté de le regarder comme une erreur.

Lorsqu'on voudra faire usage de ces formules, il suffira d'y mettre pour a et d les valeurs de l'ascension droite et de la déclinaison moyennes du point que l'on considère, et l'on connaîtra les variations que ces deux élémens éprouvent par l'effet de la nutation luni-solaire.

Par exemple, si l'on suppose $a = 0$, $d = 0$, qui sont les coordonnées de l'équinoxe moyen du printems, la formule donnera les mouvemens de cet équinoxe autour de l'équinoxe vrai; on trouvera ainsi

$$d' = - 22'',125 \sin N - 1'',250 \sin 2L,$$
$$a' = - 50'',972 \sin N - 2'',834 \sin 2L;$$

en secondes sexagésimales, ce serait

$$d' = - 7'',169 \sin N - 0'',397 \sin 2L,$$
$$a' = - 16'',514 \sin N - 0'',918 \sin 2L.$$

d' et a' sont les coordonnées de l'équinoxe moyen du printems la circonférence de l'écliptique, sans changer leur inclinaison mutuelle. Par conséquent, si l'on dirige cette rotation dans le sens ♈ ♓ ♒, contre l'ordre des signes,

---

rapportées à l'équinoxe vrai, en n'ayant égard qu'aux dérangemens périodiques causés par la nutation luni-solaire. Pour avoir les valeurs complettes de d' et de a', il faut y ajouter aussi leurs variations séculaires, dont nous avons donné les valeurs à la fin du chapitre précédent, page 105. Ces résultats sont d'un usage continuel en astronomie.

Il ne me reste plus qu'à déduire de nos formules générales la construction géométrique dont nous avons fait usage dans le texte, et suivant laquelle le pôle apparent de l'équateur décrit une petite ellipse autour du pôle moyen. Cela est extrêmement facile. On peut même généraliser le problème, et chercher l'orbite apparente que chaque point de la sphère céleste décrit ainsi autour de son lieu moyen par l'effet de la nutation.

Cette recherche se simplifiera beaucoup, si l'on remarque que la courbe cherchée devant avoir une étendue très-petite, peut se projeter sur la surface concave du ciel comme sur une surface plane; et de plus, l'oscillation se faisant autour du lieu moyen, comme centre, il convient de prendre ce point pour origine des coordonnées. Alors, ce qui se présente de plus simple, c'est de mener par le lieu moyen un arc de grand cercle perpendiculaire au méridien, et des prendre ces deux cercles, ou plutôt leurs tangentes, pour axes des coordonnées rectangulaires; car à cause de la petitesse de l'orbite, les arcs et les tangentes se confondront. Nos deux coordonnées seront donc les différences de déclinaison $d'-d$, comptées sur le méridien, et les différences d'ascension droite $a'-a$ reportées à la hauteur du lieu moyen, sur le grand cercle perpendiculaire au méridien, c'est-à-dire, multipliées par le cosinus de la déclinaison du lieu moyen; de cette manière, en faisant

$$X = d' - d, \qquad Y = (a' - a) \cos d,$$

les coordonnées X et Y partiront d'un même point, seront rectangulaires entre elles, et, vu la petitesse de l'orbite, pourront être et si l'on donne au pôle P, sur son cercle, le mouvement annuel des équinoxes, l'intersection ♈ rétrogradera sur l'écliptique de la même manière, et cette construction représentera parfaitement la *précession moyenne.*

---

considérées comme rectilignes. Maintenant, si nous substituons ces valeurs dans nos formules générales, nous trouverons, en multipliant $a' - a$ par $\cos d$,

$$X = -22'',13 \sin N \cos a + 29'',72 \cos N \sin a,$$

$$Y = -50'',97 \sin N \cos d - \left\{22'',13 \sin N \sin a + 29'',72 \cos N \cos a\right\} \sin d.$$

Si, entre ces deux équations, on élimine l'angle N, on aura l'équation de l'orbite décrite par le lieu apparent autour du lieu moyen. Nous nous sommes bornés aux centièmes de seconde dans les coefficiens numériques, et cela suffit pour l'objet que nous nous proposons.

Si l'on veut que ce lieu apparent soit le pôle boréal de l'équateur il n'y a qu'à supposer $d = +100^\circ$, ce qui donne $\cos d = 0$, et.... $\sin d = +1$; alors, les valeurs de X et de Y deviendront

$$X = -22'',13 \sin N \cos a + 29'',72 \cos N \sin a,$$

$$Y = -22'',13 \sin N \sin a - 29'',72 \cos N \cos a;$$

l'ascension droite a reste encore indéterminée, parce que tous les méridiens passent par le pôle de l'équateur. La valeur de a dépendra du choix que nous ferons de tel ou tel méridien pour axe des y. Les équations précédentes donnent

$$X \cos a + Y \sin a = -22'',13 \sin N,$$

$$X \sin a - Y \cos a = +29'',72 \cos N;$$

par conséquent,

$$\left\{\frac{X \cos a + Y \sin a}{22'',13}\right\}^2 + \left\{\frac{X \sin a - Y \cos a}{29'',72}\right\}^2 = 1.$$

Cette équation est celle d'une ellipse rapportée à son centre, mais

Mais à cause que l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique n'est pas tout-à-fait constante dans les différens siècles, il faudra faire varier l'angle PCP' au centre du

---

non pas à ses axes. Pour la ramener à ce système de coordonnées, il faut faire $a = 100°$, c'est-à-dire, prendre pour méridien central celui qui passe par les pôles de l'équateur et de l'écliptique ; alors, en effet, on aura $\sin a = 1$, et l'équation précédente deviendra

$$Y^2 . \{29'',72\}^2 + X^2 . \{22'',13\}^2 = \{22'',13\}^2 \{29''72\}$$

qui est celle d'une ellipse dont le grand axe est dirigé suivant les coordonnées X tangentiellement au méridien central, et le petit axe suivant les coordonnées Y, perpendiculairement à ce premier : le premier a pour longueur $59'',44$, le second $44'',26$. Ces longueurs sont toutes deux exprimées en parties de grand cercle de la sphère céleste. Si l'on veut compter la seconde sur le parallèle à l'écliptique qui passe par le pôle moyen de l'équateur, et auquel le petit axe de notre ellipse se trouve tangent, il n'y a qu'à diviser $44'',26$ par le cosinus de la distance de ce parallèle au pôle de l'écliptique, c'est-à-dire, par le sinus de l'obliquité ω. Le petit axe, ainsi exprimé, aura pour valeur $111'',14$ du parallèle à l'écliptique sur lequel il se trouve. C'est la valeur que nous lui avons donnée dans le texte.

On voit aussi, par le calcul que nous venons de faire, que l'ellipse de nutation a son grand axe situé dans le plan du grand cercle qui passe par les pôles moyens de l'équateur et de l'écliptique ; car nous avons trouvé que pour rapporter les Y à cet axe, il fallait faire $a = 100°$. Ici, nous pouvions disposer arbitrairement de a, parce que tous les méridiens passant par le pôle de l'équateur, nous pouvions choisir à volonté celui que nous voulions prendre pour origine des Y.

Déterminons maintenant la position du pôle vrai sur cette ellipse à un instant quelconque. Elle sera donnée par les valeurs simultanées de X et de Y, qui, en faisant $\cos a = 0$, $\sin a = 1$, deviennent

$$X = +\,29'',72 \cos N, \qquad Y = -\,22'',13 \sin N.$$

cône, de manière à suivre et à représenter ces changemens; ou, ce qui est plus simple, il n'y a qu'à considérer les points P et P' comme les *pôles moyens* de

---

Quand le nœud de la lune coïncide avec l'équinoxe du printems, sa longitude est nulle; on a donc alors $\sin N = 0$, $\cos N = 1$; par conséquent,

$$X = +29'',72, \qquad Y = 0.$$

Le pôle apparent se trouve alors dans le méridien central, sur l'axe des X, et au sommet de l'ellipse le plus rapproché de l'équateur, c'est-à-dire au point ϖ, *fig.* 9 et 10.

A mesure que la longitude N augmente, Y augmente en restant négatif; en même tems X diminue et reste positif: le pôle apparent se trouve donc compris dans le premier quadrans de son ellipse, du côté de l'équinoxe d'automne, par exemple, en ϖ''', *fig.* 10.

En général, il est facile de voir que les valeurs de X et de Y achèveront les périodes de leurs valeurs en même tems que l'angle N achèvera la circonférence entière, c'est-à-dire, que le pôle tournera sur son ellipse dans le même tems que le nœud de la lune tourne sur l'écliptique.

Autour du pôle moyen comme centre, et avec un rayon égal au demi-grand axe de l'ellipse, décrivons une circonférence de cercle $\varpi K \varpi''$, *fig.* 10. Sur cette circonférence, concevons un point K uniformément mobile, qui en fasse le tour dans le même tems que le nœud fait sa révolution sur l'écliptique, et qui de plus se meuve comme lui, d'orient en occident, c'est-à dire dans le sens $\varpi \varpi' \varpi''$. Si du centre du cercle, qui est aussi celui de l'ellipse, on mène un rayon PK au point mobile à un instant quelconque, l'angle $KP\varpi$, formé par ce rayon avec l'axe des X positifs $P\varpi$, sera toujours égal à l'angle N, c'est-à-dire, à la longitude du nœud de la lune sur l'écliptique; de sorte que si l'on nomme X' l'abscisse PR du point mobile K à un instant quelconque, on aura

$$X' = 29'',72 \cos N, \qquad Y' = -29'',72 \sin N;$$

l'abscisse de ce point sera donc la même que celle du pôle vrai. Par conséquent, ce pôle se trouvera sur l'ellipse au point ϖ''' où cette l'équateur et de l'écliptique, et supposer que les pôles vrais se meuvent autour de ceux-là, en s'écartant et se rapprochant tour-à-tour comme le veulent les inégalités auxquelles ils sont soumis.

Soient maintenant, *fig.* 9, P, P' les pôles de l'équateur et de l'écliptique, déterminés pour une certaine époque, comme nous venons de le dire, en n'ayant égard qu'aux inégalités séculaires. Pour représenter les inégalités périodiques de la nutation, il faudra mettre le *pôle vrai* ϖ de l'équateur en mouvement autour du pôle P, conformément aux lois que l'observation assigne. Suivant ces lois, quand le nœud ascendant de la lune est en ♈ sur l'écliptique, c'est-à-dire quand il répond à l'équinoxe du printems, le pôle apparent ϖ se trouve répondre au solstice d'été, à 100° en arrière. A mesure que le nœud rétrograde sur l'écliptique, le pôle apparent ϖ suit son mouvement, et tourne ainsi autour du pôle vrai P pendant que le nœud fait le tour de l'écliptique. Son orbite est une petite ellipse dont le grand axe $\varpi\varpi''$ reste toujours tangent au cercle de la latitude PP', mené par les pôles de l'équateur et de l'écliptique, et occupe sur ce cercle un arc de 59″,44. Le petit axe de cette ellipse étant perpendiculaire au grand axe, se trouve tangent au cercle $PP_{/}P_{//}$, sur lequel le pôle de l'équateur se meut parallèlement à l'écliptique ; et même comme il est fort petit, on peut le considérer comme faisant partie de ce parallèle, sur lequel il occupe un arc de 111°.14. Pour avoir, à un instant quelconque, la position du pôle apparent ϖ sur cette ellipse, voici

---

courbe est coupée par l'ordonnée KP'. C'est la construction que nous avons énoncée dans le texte.

la construction que le calcul indique. Concevez, *fig.* 10, une circonférence de cercle $\varpi K \varpi''$ concentrique à l'ellipse de nutation, et ayant son grand axe pour diamètre : concevez, dans cette circonférence, un rayon ϖP, qui se trouve d'abord en ϖ sur l'extrémité du grand axe la plus voisine de l'écliptique lorsque le nœud ascendant de la lune se trouve dans l'équinoxe du printems ; puis faites mouvoir ce rayon circulairement avec un mouvement rétrograde égal à celui du nœud sur l'écliptique. Si, dans chaque position de ce rayon, vous menez, par son extrémité K, une ordonnée KR au cercle, le point ϖ''', où cette ordonnée rencontrera l'ellipse de nutation, sera, pour le même instant, le lieu du pôle apparent. Cette construction n'est que l'énoncé des résultats que le calcul donne et que l'on trouvera ici dans les notes.

Ce mouvement oscillatoire du pôle a été désigné d'une manière très-expressive par le mot de *nutation*. Nous avons dit que le soleil produit aussi une oscillation semblable, mais beaucoup plus faible ; on pourrait donc la représenter géométriquement de la même manière ; l'ensemble de ces deux effets compose ce que l'on appelle la nutation *luni-solaire*. Enfin l'attraction de la lune produit encore une autre inégalité du même genre dont la période est d'un demi-mois, mais elle est si faible qu'il est inutile d'en tenir compte. Maintenant que nous connaissons les lois de ces oscillations, nous pourrons toujours supposer que l'on y a eu égard, pour ramener les positions des astres à des termes comparables ; et si nous avons quelquefois anticipé sur cette connaissance, afin d'obtenir, de premier abord, les résultats définitifs des observations, on voit que nous n'avons fait que prévenir ce que nous aurions dû faire par un plus long détour, quand nous aurions obtenu la connaissance de ces phénomènes, à laquelle nous n'aurions pas manqué d'arriver de la même manière et par les mêmes raisonnemens.

Je terminerai ce chapitre en prévenant que le phénomène de la nutation n'est pas réglé par le mouvement du *nœud apparent* de la lune, dont le mouvement sur l'écliptique est variable, mais par le mouvement du *nœud moyen*, c'est-à-dire, dégagé de ses inégalités périodiques. Ceci est un résultat de la théorie, que l'on ne saurait expliquer ici. Quelques astronomes n'ayant pas fait cette remarque, ont cru trouver une erreur dans les formules jusqu'à présent usitées pour calculer la nutation, formules qui sont réglées sur le nœud moyen, mais cette erreur n'existe pas.

CHAPITRE VII.

Seconde approximation des Mouvemens du Soleil. Théorie de son mouvement elliptique.

71. DANS ce qui précède, nous avons considéré le soleil comme parcourant chaque année un grand cercle de la sphère céleste ; nous avons fixé la position de ce cercle, nous avons donné les moyens de reconnaître les déplacemens qu'il éprouve, et nous avons rapporté par anticipation les formules numériques par lesquelles ces déplacemens peuvent se prévoir et se calculer. Il faut maintenant examiner avec un nouveau soin le mouvement du soleil dans ce plan. A la vérité, nous savons déja déterminer par observation l'étendue des arcs qu'il y décrit chaque jour ; nous avons même remarqué comment on pourrait rassembler ces résultats, et en former des tables, afin de prévoir d'avance les positions successives de cet astre sur la sphère céleste. Mais les résultats ainsi isolés, ne seraient jamais exempts d'erreurs ou d'incertitude, et leurs changemens, s'ils en éprouvent, ne pourraient être corrigés qu'en les comparant sans cesse à de nouvelles observations. Pour les rectifier plus sûrement et avec plus de facilité, il devient nécessaire de chercher la loi rigoureuse qui les enchaîne, ou au moins quelque forme géométrique et calculable qui en approche le plus possible ;

car la dépendance mutuelle des résultats étant une fois connue, leur exactitude ne tiendra plus qu'à la détermination précise d'un petit nombre d'élémens.

Cette dépendance est évidemment liée au mouvement réel du soleil dans l'espace ; cherchons donc à en déterminer les lois.

72. Pour cela il faut réunir deux sortes de données : le mouvement angulaire du soleil, déduit de la mesure de ses hauteurs ; les variations de sa distance, déduites des observations de son diamètre apparent. Rapprochons les conséquences qui en résultent.

En premier lieu, le mouvement angulaire du soleil sur son orbite, dans l'écliptique, n'est pas uniforme ; il est tantôt plus lent, tantôt plus rapide. Cela se voit en calculant jour par jour la longitude de cet astre, pour l'instant de son passage au méridien, d'après sa déclinaison ou son ascension droite observées. Car ces longitudes méridiennes ne croissent pas uniformément, et leurs différences d'un jour à l'autre ne sont pas proportionnelles aux intervalles de tems, qui séparent les passages consécutifs du soleil au méridien. Des observations multipliées ont fait connaître que la plus grande de ces différences a lieu dans deux points de l'écliptique, situés l'un vers le solstice d'hiver, l'autre vers le solstice d'été.

Dans le premier, le soleil décrit sur l'écliptique $1^\circ{,}1327$, pendant la durée d'un jour moyen ; c'est alors que sa vîtesse est la plus grande. Cela arrive à présent vers le 31 décembre.

Dans le second, il décrit seulement $1^\circ{,}0591$, dans un jour moyen ; c'est alors que sa vîtesse est la plus petite. Cela arrive à présent vers le 1er. juillet.

La vîtesse moyenne, entre ces deux extrêmes, est $\frac{1^{\circ},1327 + 1^{\circ},0591}{2}$ ou $1^{\circ},0959$.

Ces deux points répondent à des déclinaisons égales de part et d'autre de l'équateur, et leurs ascensions droites diffèrent de 200°. Ils sont donc situés sur une même ligne droite, menée par le centre de la terre et de la sphère céleste. Leur longitude varie un peu avec le tems, ce qui prouve *qu'ils sont en mouvement par rapport aux équinoxes* ; mais nous ferons d'abord abstraction de ce déplacement.

73. Venons au diamètre apparent : il suit les mêmes périodes que la vîtesse angulaire, c'est-à-dire, qu'il augmente et diminue avec elle, quoique dans un moindre rapport. Il est à son *maximum* au point où la vîtesse est la plus grande, et on l'observe alors de 6035″,7. Il est à son *minimum* au point où la vîtesse est la plus petite, et *il est alors de* 5836″,3 ; *la moyenne est* 5936″. Ces mesures devroient être diminuées de quelques secondes à cause de l'irradiation, qui dilate un peu les diamètres apparens des objets ; mais la quantité exacte de cette dilatation n'est pas encore bien connue (*).

(*) Pour déterminer le diamètre apparent avec une précision égale à celle que nous supposons ici, il ne suffirait pas de l'observer une seule fois au mural, il faudrait se servir de la machine parallactique de la manière qui a été enseignée page 129 du premier livre. Le moyen le plus exact serait d'y employer le cercle répétiteur, et M. Delambre se propose d'en faire usage. En se servant d'un cercle de réflexion, et prenant 1000 fois le diamètre du soleil, M. Quesnot a trouvé 5836″,4, ce qui diffère extrêmement peu de la valeur que j'ai rapportée. Ces mesures ne sont encore que relatives. Pour en obtenir d'absolues, il faudrait savoir les dépouiller de l'irra-

74. On peut, d'après ces observations, calculer la plus grande et la plus petite distance du soleil à la terre, ou au moins évaluer leur rapport; car on sait que les distances d'un même objet sont réciproques à ses diamètres apparens. Si nous comparons ainsi le plus grand et le plus petit diamètre apparent du soleil, leur rapport sera $\frac{6035'',7}{5836'',3}$ ou 1,03416; c'est-à-dire, que si l'on représente par l'unité ou 1 la plus petite distance du soleil à la terre, la plus grande aura pour expression 1,03416. La moyenne arithmétique entre ces distance est 1,01708. Si on veut la prendre pour unité, selon l'usage des astronomes, la plus petite aura pour expression $\frac{1}{1,01708}$, ou $1-\frac{0,01708}{1,01708}$ et la plus grande $\frac{1,03416}{1,01708}$, ou $1+\frac{0,01708}{1,01708}$ ce qui revient à $1-0,01679$ ou 0,98321 et 1,01679. *La distance du soleil à la terre varie donc annuellement, en plus et en moins, d'une quantité à-peu-près égale à la cent soixante-huit dix-millième partie de sa valeur moyenne* (*).

---

diation, ce qui exigerait que l'on fît exprès des mesures de diamètres apparens sur des objets lumineux d'un diamètre connu, et d'une intensité de lumière graduée à volonté. En général, pour avoir avec exactitude le plus grand et le plus petit diamètre apparent d'un astre, il faut les conclure d'un grand nombre d'observations. On ne doit donc pas s'étonner si les valeurs exactes qu'on leur donne ici diffèrent un peu de celle que nous avons trouvée plus haut par une seule observation de Piazzi.

(*) On se tromperait si l'on croyait que le diamètre apparent qui répond à la distance moyenne, intermédiaire entre les distances extrêmes, est le diamètre moyen. En effet, calculons ce diamètre. Si nous le représentons par D, comme il est réciproque à la

75. Les points de l'orbe solaire qui répondent à la plus petite et à la plus grande distance du soleil à la terre, se nomment le *périgée* et l'*apogée*, de deux mots

---

distance, nous aurons en le comparant au plus petit diamètre apparent.

$$\frac{D}{5836'',3} = \frac{1,01679}{1},$$

ce qui donne

$$D = 5934'',29.$$

Le diamètre qui répond à la distance moyenne est donc plus petit de $1'',71$ que le diamètre moyen que nous avons trouvé égal à $5936''$.

Cela peut se prouver, en général d'une manière très-facile. En effet, soit r' la plus petite distance, r'' la plus grande, D', D'' les diamètres apparens correspondans, on aura

$$\frac{r''}{r'} = \frac{D'}{D''}, \text{ par conséquent } r'' = \frac{r'.D'}{D''}.$$

Si l'on représente par r la moyenne distance, intermédiaire entre r' et r'', on aura

$$r = \frac{r'+r''}{2} = \frac{r'.(D''+D')}{2D''};$$

c'est la valeur de la distance moyenne. Si l'on représente par D le diamètre correspondant, on aura, en le comparant au plus petit diamètre,

$$\frac{D}{D'} = \frac{r'}{r}, \text{ par conséquent } D = \frac{r'.D'}{r},$$

ou, en substituant pour r sa valeur

$$D = \frac{2D'D''}{D''+D'};$$

c'est la grandeur du diamètre apparent qui correspond à la distance moyenne. Cette expression peut se mettre sous la forme suivante

$$D = \frac{D'+D''}{2} - \frac{(D'-D'')^2}{2(D'+D'')};$$

grecs qui signifient *près* et *loin de la terre*. On les désigne aussi conjointement par le nom d'*absides*.

76. En rapprochant ces résultats, on voit que la vîtesse du soleil semble augmenter quand il s'approche de la terre, et diminuer quand il s'éloigne. Mais nous ne savons pas encore si ces variations sont réelles ou apparentes; car, par cela seul que le soleil s'approche, les arcs qu'il décrit dans son orbite doivent nous paraître plus grands; quand il s'éloigne, ils doivent nous paraître plus petits. Pour les comparer avec exactitude, il faut les ramener à un même éloignement. L'arc qui a pour mesure $1^\circ,0591$, et que le soleil décrit dans son apogée, aurait paru plus grand s'il eût été observé au périgée. Pour l'y ramener, il suffit de le multiplier par le rapport inverse des rayons dans ces deux points, c'est-à-dire, par $\frac{1,01679}{0,98321}$ ou $1,03416$; car ses grandeurs apparentes se-

---

et comme le second terme de la valeur qui en résulte est toujours négatif, il s'ensuit que le diamètre qui répond à la moyenne distance, est toujours moindre que le diamètre moyen.

Pour la lune, on a, comme nous le verrons par la suite,

$$D' = 6207''$$

$$D'' = 5438,$$

ce qui donne $\frac{D' + D''}{2} = 5822,5$, $\quad D' - D'' = 769''$,

d'où l'on tire $\quad D = 5822'',5 - 25'',4 = 5797,1$;

c'est la grandeur du diamètre apparent de la lune, qui correspond à sa distance moyenne de la terre. Il est très-sensiblement moindre que le diamètre moyen, et la différence est plus forte que pour le soleil, parce que $D'-D''$ est beaucoup plus considérable, tandis que $D'+D''$ est un peu moindre.

raient réciproques à son éloignement (*). On trouve ainsi 1°,0953 pour la mesure de cet arc, vu à la distance périgée. Or, l'arc décrit réellement dans ce point par le soleil, est 1°,1327, comme on l'a vu plus haut, et il surpasse encore le précédent de 0°,0374 ; ainsi la diminution apparente du mouvement du soleil à l'apogée n'est pas purement optique, et due à l'accroissement de sa distance ; elle provient aussi d'un ralentissement réel, qui se fait dans la marche de cet astre, à mesure qu'il s'éloigne de la terre.

77. En comparant de la même manière, pour d'autres époques de l'année, le mouvement angulaire du soleil et son diamètre apparent, on trouve cette loi générale : *l'angle décrit chaque jour, étant multiplié par le carré de la distance, donne un produit à fort peu près constant.* Il en résulte que le mouvement angulaire se ralentit à fort peu près comme le carré de la distance augmente (**).

(*) Soit r' la distance périgée du soleil, r'' sa distance apogée, x la grandeur apparente de l'arc 1°,0591, ramené au périgée : on aura $\frac{x}{1^\circ{,}0591} = \frac{r''}{r'}$, d'où $x = \frac{r''}{r'} \cdot 1^\circ{,}0591$.

Or $\frac{r''}{r'} = 1{,}03416$ d'après ce qu'on a vu précédemment, donc

$$x = 1^\circ{,}0591 \cdot 1{,}03416 = 1^\circ{,}09528.$$

(**) En effet, soit r la distance du soleil à la terre, ν sa vitesse angulaire diurne, c'est-à-dire, l'angle qu'il décrit dans un jour, enfin A une constante. La loi qui résulte des observations est

$$r^2 \nu = A.$$

Supposons que r^2 devienne $r^2(1+u)$, u étant une très-petite quantité qui représentera les variations du carré de la distance ; soit de plus, ν' l'accroissement correspondant de ν. Les quantités

78. Lorsqu'on a ainsi découvert une loi simple qui s'étend, avec des erreurs très-petites et irrégulières, à un très-grand nombre d'observations éloignées, et indépendantes, on peut la regarder comme plus exacte que les observations mêmes; car si elle n'était pas réellement la loi de la

---

$r^2 + r^2u$, et $\nu + \nu'$ qui se correspondent, devront être liées entre elles par la formule précédente, ce qui donne

$$\nu + \nu' = \frac{A}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + u}.$$

Or, en développant $\frac{1}{1+u}$ par la division, on trouve

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - u + u^2 - u^3 \; . \; . \; . \; . \text{ etc.}$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, et ôtant les termes ν et $\frac{A}{r^2}$ qui s'entredétruisent, il reste

$$\nu' = -\frac{Au}{r^2} + \frac{Au^2}{r^2} - \frac{Au^3}{r^2} \; . \; . \; . \; . \text{ etc.}$$

Dans ce résultat, si l'on a pris pour u une fraction fort petite, comme nous l'avons supposé, on pourra négliger les puissances de u supérieures à la première, car tous les termes de la série seront incomparablement plus petits que le premier. On aura ainsi simplement

$$\nu' = -\frac{Au}{r^2}.$$

on voit que ν est négatif quand u est positif, et positif quand u est négatif; par conséquent, la vitesse angulaire diminue quand la distance augmente, et réciproquement.

De plus, ν' est proportionnel à u, c'est-à-dire, à l'accroissement du carré de la distance; par conséquent, la vitesse angulaire décroît, à fort peu près, comme le carré de la distance augmente; ce qui est la propriété énoncée dans le texte.

On voit aussi que cela n'est vrai que par approximation, en sup-nature, il faudrait un grand hasard pour qu'elle représentât aussi bien les observations, et il est au contraire extrêmement probable qu'elle s'en écarterait de plus en plus. La probabilité se change en certitude quand le nombre des essais est extrêmement multiplié. C'est le cas actuel de l'astronomie.

79. En partant de ce dernier résultat, on peut calculer les rapports des distances du soleil à la terre, dans deux points quelconques de son orbite, sans recourir aux observations de son diamètre apparent; car ces distances seront réciproques aux racines carrées des angles diurnes décrits sur l'écliptique (*). Par exemple, la distance périgée étant supposée égale à 1, la distance apogée sera $\frac{\sqrt{1^\circ,1327}}{\sqrt{1^\circ,0591}}$ ou 1,0341; telle qu'on la déduirait des valeurs 1,01679; 0,98321, qui représentent ces distances, comme nous l'avons trouvé plus haut.

Ceci étant traduit en géométrie, fait connaître une loi

posant que ν et r varient très-peu l'un et l'autre. Or cette condition est toujours satisfaite dans le mouvement du soleil, puisque les distances apogée et périgée, qui sont les plus différentes de toutes, sont encore presque égales, aussi bien que les vitesses diurnes dans ces deux points.

(*) En effet, soient r, r' deux distances du soleil à la terre, ν, ν' les angles diurnes qui leur correspondent, on aura

$$r^2\nu = A, \qquad r'^2\nu' = A;$$

A étant une constante, par conséquent

$$r'^2\nu' = r^2\nu,$$

ce qui donne

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu'}}.$$

très-remarquable du mouvement du soleil. Menons du centre de la terre à cet astre, une ligne droite, que nous nommerons *rayon vecteur.* Cette droite décrira chaque jour sur l'orbe solaire un petit secteur dont l'aire sera, à fort peu près, égale à la moitié du produit de l'angle diurne, par le carré du rayon vecteur (*). Cette

---

(*) Soit C, *fig.* 11, le centre de la terre, CS, CS' les rayons vecteurs, menés aux extrémités de l'arc diurne; CSS' le secteur décrit. L'aire de ce secteur sera comprise entre celles des secteurs circulaires CSP, $CS'Q$, décrits du point C comme centre, avec CS et CS' pour rayons. Supposons le petit angle $SCS' = \alpha$, $CS = r$, et. . . . $CS' = r(1+\delta)$, δ étant une très-petite quantité qui est l'accroissement de r, on aura

$$\text{secteur } CSP = \frac{r^2\alpha}{2}, \text{ secteur } CS'Q = \frac{r^2\alpha}{2}(1+\delta)^2,$$

$$\text{secteur } CS'Q - \text{sect } CSP = \frac{r^2\alpha}{2}(1+2\delta+\delta^2-1)$$

$$= \frac{r^2\alpha}{2}(2\delta+\delta^2) = \text{sect } CSP.(2\delta+\delta^2).$$

La différence ne dépend donc que de la quantité δ, qui représente l'accroissement du rayon vecteur du soleil. Or en prenant pour unité la distance périgée, cet accroissement total est de 0,03416, depuis le périgée jusqu'à l'apogée, c'est-à-dire, dans l'intervalle d'une demi-année. Il est donc moindre que 0,00019 dans l'intervalle d'un jour. Ainsi la différence des secteurs $CS'Q$, CSP devient à fort peu près égale à sect CSP. 0,00038, c'est-à-dire, qu'elle ne s'élève pas à $\frac{38}{100000}$ du secteur CSP. Cette différence est donc presque nulle, et les secteurs CSP, CSQ sont à fort peu près égaux entre eux. Or, le petit secteur elliptique CSS' est plus grand que le premier, et plus petit que le second, par conséquent sa surface est aussi très-peu différente de $\frac{r^2\alpha}{2}$, c'est-à-dire, que, *dans l'intervalle d'un jour*, elle est à très-aire est donc constante, et l'aire totale tracée, à partir d'un point fixe, croît comme le nombre des jours écoulés. Ce résultat se confirme de la manière la plus rigoureuse lorsque l'on calcule exactement les secteurs elliptiques par l'analyse, et qu'on les compare aux tems employés pour les décrire. De là résulte cette conséquence : *les aires décrites par le rayon vecteur du soleil sont proportionnelles aux tems.* C'est une des grandes lois découvertes par Kepler : elle sert de base à la théorie du soleil et des planètes.

80. En suivant cette loi et y joignant les observations des angles diurnes, on peut tracer la courbe que décrit le soleil sur le plan de l'écliptique. Pour cela, d'un point donné, qui représente le centre de la terre et de la sphère céleste, menons sur un plan, des droites dont la distance angulaire soit égale au mouvement angulaire du soleil dans l'intervalle d'un jour. Ces droites représenteront les rayons visuels menés chaque jour à cet astre. Portons sur leur direction, à partir du point fixe, les distances correspondantes du soleil à la terre, calculées d'après le mouvement diurne, en prenant une d'entre elles pour unité. Les points déterminés de cette manière

---

peu près égale à la moitié du produit de l'angle diurne par l carré du rayon vecteur.

Cette égalité devient d'autant plus exacte, que l'intervalle de tem compris entre les rayons vecteurs est moindre ; en sorte qu'o pourra toujours prendre cet intervalle assez petit pour que l'erreu résultante de cette supposition soit moindre qu'une quantité quelconqu donnée.

Ces rapports se confirment très-exactement quand on évalue les aire des secteurs elliptiques, par le moyen des formules rigoureuses qu l'analyse fournit pour cet objet, et quand on compare ensuite ces aire avec les tems employés à les décrire.

indiqueront, pour chaque jour, le lieu du soleil, et la courbe qui les unira sera l'orbite de cet astre.

81. Prenons pour exemple les vingt-quatre observations suivantes, faites à Greenwich, par M. Maskeline, elles font partie de celles du même astronome, que M. Delambre a employées pour établir ses premières tables du soleil.

DATES des OBSERVATIONS. 1775.		TEMS sydéral à GREENWICH.	LONGITUDES observées.	DIFFÉRENCE des tems.	DIFFÉRENCE des longitudes.
		h	°	h	°
Janvier	12	8,16699	324,6965	10,03000	1,1317
	13	8,19699	325,8282		
Février	17	9,19107	365,2553	10,02678	1,1191
	18	9,21785	366,3744		
Mars	14	9,84099	393,0707	10,02536	1,1040
	15	9,86635	394,1747		
Avril	28	0,98842	42,1708	10,02635	1,0785
	29	1,01477	43,2493		
Mai	15	1,44487	60,4293	10,02729	1,0694
	16	1,47216	61,4933		
Juin	17	2,37845	95,5386	10,02889	1,0607
	18	2,40734	96,5993		
Juillet	18	3,26473	128,3926	10,02786	1,0605
	19	3,29259	129,4531		
Août	26	4,30141	169,8852	10,02543	1,0732
	27	4,32684	170,9584		
Septembre	22	4,98087	199,1657	10,02496	1,0893
	23	5,00583	200,2550		
Octobre	24	5,82588	235,4519	10,02670	1,1113
	25	5,85258	236,5632		
Novembre	18	6,52053	263,3717	20,05820	2,2482
	20	6,57873	265,6199		
Décembre	17	7,36289	294,9673	10,03082	1,1319
	18	7,39371	296,0992		

82. Ces longitudes sont comptées sur l'écliptique à partir d'une même ligne droite, menée du centre de la terre à l'équinoxe du printems, conformément à l'usage

général des astronomes. La différence des observations relatives aux jours consécutifs, donne les angles diurnes, et les racines carrées des rapports de ces angles, font connaître les distances du soleil à la terre, à ces diverses époques. En rapportant ces distances à l'instant intermédiaire entre les deux observations de chaque mois, on a formé la table suivante, dans laquelle on a pris pour unité la distance du soleil qui correspond à la vîtesse angulaire moyenne 1°,0959 (*). Du reste on a employé les observations telles qu'elles ont été faites sans aucune modification, afin d'obtenir des résultats exempts de toute connaissance anticipée.

(*) *Cette table est calculée par la formule suivante* : soit ν le mouvement pour 10 heures moyennes, r la distance à la terre, on a

$$r = \sqrt{\frac{1^\circ 0959}{\nu}}.$$

Pour avoir ν, on remarquera que 10h solaires moyennes étant converties en tems sydéral, valent $10^h,027379$; § 36. Par conséquent si l est la différence des longitudes, et t la différence des tems écoulés entre deux observations consécutives, comme, dans un petit intervalle de *quelques minutes*, le *mouvement du soleil sur son orbite* peut être supposé uniforme, on aura, par une simple proportion,

$$\nu = \frac{l \,.\, 10^h,027379}{t},$$

et alors la formule qui donne r devient

$$\nu = \sqrt{\frac{1^\circ,0959 \cdot t}{l \,.\, 10^h,027379}}.$$

C'est ainsi que l'on a calculé la table qui est rapportée dans la page suivante.

Du reste, j'ai employé les observations telles qu'elles se trouvent

DATES des OBSERVATIONS.		LONGITUDES DU SOLEIL.	DISTANCES à LA TERRE.
Janvier	12 à 13	325°,2624	0,98448
Février	17 à 18	365,8143	0,98950
Mars	14 à 15	393,5520	0,99622
Avril	28 à 29	42,7101	1,00800
Mai	15 à 16	60,9586	1,01234
Juin	17 à 18	96,0689	1,01654
Juillet	1 à 9	128,9228	1,01658
Août	26 à 27	170,4218	1,01042
Septembre	22 à 23	199,7104	1,00283
Octobre	24 à 25	236,0076	0,99303
Novembre	18 à 20	264,4958	0,98746
Décembre	17 à 18	295,5333	0,98415

rapportées et sans y faire aucune correction. Il est, par conséquent, possible que ces résultats s'écartent, dans leurs dernières décimales, de ceux dont on fait usage dans les tables astronomiques, ces dernières étant liées par la théorie, et déduites d'un si grand nombre d'observations, que les plus petites erreurs s'y compensent mutuellement.

Je dois encore faire remarquer que la distance, qui est ici prise pour unité dans notre tableau et à laquelle répond la vitesse angulaire moyenne $1°,0959$, n'est pas la distance moyenne du soleil à la terre, mais une quantité un peu plus petite. En effet, si l'on prend la distance moyenne pour unité, et que l'on nomme y, celle qui répond à la vitesse angulaire $1°,0959$, on aura, en la comparant avec la

Ces données ont servi à construire la *fig.* 12, pl. 3, qui représente l'orbite annuelle du soleil.

83. Cette courbe est un peu alongée dans le sens de la droite qui joint les observations des mois de décembre et de juin; par conséquent c'est vers ces points que se trouvent le périgée et l'apogée. La ressemblance de cette orbite avec une ellipse a donné lieu de les comparer par

---

distance apogée,

$$\frac{y}{1{,}0168} = \sqrt{\frac{1°{,}0591}{1{,}0959}};$$

Ce qui donne $y = 0{,}99958$, valeur un peu moindre que l'unité. Mais on voit en même tems que la différence est extrêmement petite, ce qui tient à ce que *les distances périgée et apogée du soleil sont presque* égales. Réciproquement, si l'on veut prendre pour unité la distance y qui correspond à la vîtesse angulaire moyenne, alors la distance moyenne *entre les distances extrêmes sera exprimée par* $\frac{1}{0{,}99958}$, *ou* 1,00041.

Pour montrer que ceci tient au peu de différence des distances périgée et apogée, soient v' v'' les vîtesses périgée et apogée, r' r'', les rayons correspondans, on aura par la loi des aires,

$$r''^2 v'' = r'^2 v', \quad \text{par conséquent} \quad v'' = \frac{v' r'^2}{r''^2}.$$

Soit maintenant v la vîtesse angulaire, qui est moyenne arithmétique entre les vitesses extrêmes, on aura

$$v = \frac{v' + v''}{2};$$

ou, en mettant pour v'' sa valeur et réduisant,

$$\frac{v}{v'} = \frac{r''^2 + r'^2}{2 r''^2};$$

le calcul, et l'on a reconnu qu'en effet *l'orbe solaire est une ellipse dont la terre occupe un des foyers.* Nous allons nous occuper de cette comparaison; mais auparavant nous rappellerons en peu de mots la nature de l'ellipse et ses principales propriétés.

84. L'ellipse est une courbe plane, telle que la somme des distances d'un quelconque de ses points à deux points fixes, que l'on nomme *foyers*, est toujours la même. Pour la décrire, on fixe aux foyers les extrémités d'un fil que l'on tend par le moyen d'un style. On fait mouvoir ce

---

or, en nommant r la distance correspondante à la vitesse v, on aura de même, par la loi des aires,

$$r^2 v = r'^2 v', \quad \text{et, par conséquent,} \quad \frac{v}{v'} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

ces deux valeurs de $\frac{v}{v'}$ étant égales entre elles, donnent

$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{r'^2 + r''^2}{2 r''^2}, \quad \text{ou} \quad r^2 = \frac{2 r'^2 r''^2}{r'^2 + r''^2}.$$

Cette expression peut être mise sous la forme suivante :

$$r^2 = \left(\frac{r'' + r'}{2}\right)^2 - \frac{(r''^2 - r'^2)^2 + 2 r' r'' (r'' - r')^2}{4 \{ r'^2 + r''^2 \}},$$

ou bien

$$r^2 = \left(\frac{r + r'}{2}\right)^2 - (r'' - r')^2 \left\{ \frac{(r'' + r')^2 + 2 r' r''}{4 \{ r'^2 + r''^2 \}} \right\}.$$

Sous cette forme on voit que r ne diffère de $\frac{r + r}{2}$ que par une quantité qui a pour facteur $(r'' - r')^2$, c'est-à-dire, le carré de la différence des distances périgée et apogée, différence extrêmement petite, par la nature de l'orbe solaire.

style de manière que le fil soit toujours tendu, et la courbe est tracée quand il a fait une révolution entière. Voyez *fig.* 13. La droite menée par les deux foyers et terminée à la courbe, se nomme le ***grand axe*** de l'ellipse. Le milieu de cet axe se nomme *centre* : il est également éloigné des deux foyers, et sa distance à un quelconque d'entre eux, se nomme l'*excentricité*, parce qu'en effet si les deux foyers se réunissaient au centre, l'ellipse se changerait en une circonférence de cercle, et elle n'en diffère qu'à raison de son excentricité. Enfin, une droite menée par le centre, perpendiculairement au grand axe, s'appelle le *petit axe* de l'ellipse ; et la distance des extrémités de ce petit axe aux foyers, se nomme *distance moyenne*, parce qu'en effet elle est moyenne arithmétique entre les distances apogée et périgée. Dans la figure, les points F, F' sont les foyers de l'ellipse ; le point C en est le centre, AP le grand axe; BF ou BF' la distance moyenne; CF ou CF' l'excentricité.

85. Maintenant pour savoir si la courbe indiquée par les observations du soleil, que nous venons de calculer, est réellement et exactement une ellipse, il faut prendre l'équation indéterminée d'une ellipse quelconque, l'assujétir à satisfaire à quelques-unes de ces observations, et après que ses élémens auront été déterminés par cette condition, nous verrons si elle représente également les autres observations, c'est-à-dire, si elle donne pour la distance du soleil à la terre, dans les différentes longitudes, des valeurs égales à celles que nous avons rapportées dans le tableau précédent.

Cette recherche peut être rendue plus facile en profitant des indications données par les observations elles-mêmes relativement à la position de l'apogée et du périgée. Il est visible que l'apogée doit se trouver entre les observations de juin et de juillet, qui, dans notre tableau de la page 140, ont donné les plus grandes distances du soleil à la terre. De plus, comme ces valeurs sont presque égales, l'apogée doit se trouver à-peu-près au milieu des longitudes qui s'y rapportent. Dans cette supposition, la longitude de ce point serait 112°,4958, et par conséquent celle du périgée serait 312°,4958, puisque ces deux points sont opposés dans l'ellipse. En effet, si l'on considère les observations de décembre et de janvier, qui donnent les plus petites valeurs de la distance, et qui, par cette raison doivent contenir le périgée, la moyenne des longitudes qui s'y rapportent est 310°,3978, valeur peu différente de celle que nous venons de calculer.

On voit donc que si nous avions des observations faites précisément vers ces deux longitudes, les distances du soleil à la terre, que l'on en déduirait, seraient précisément les distances apogée et périgée. Or, en examinant sous ce point de vue le catalogue des observations publiées par M. Maskeline, d'où sont déja extraites celles dont nous venons de faire usage, j'y trouve les suivantes, qui nous conviennent parfaitement.

Dates des observations. 1775.		Tems sydéral à Greenwich.	Longitudes observées.	Différence des tems.	Différence des longitudes.	Longitude intermédiaire.	Distances à la terre.
Juin	30	h 2,75365	109,3195	h 10,02871	° 1,0583	109,8486	1,01767
Juillet	1	2,78236	110,3778				
Décemb.	30	7,76386	309,6956	10,03071	1,1343	310,2626	0,98309
	31	7,79457	310,8299				

L'arc de longitude compris entre ces observations n'est pas encore exactement égal à une demi-circonférence, comme cela devrait être si les points auxquels elles se rapportent, étaient exactement opposés dans l'orbite sur la même ligne droite ; mais la différence étant fort petite et seulement égale à 0°,4140, nous la négligerons dans une première approximation. Alors les distances données par ces observations seront censées être les distances apogée et périgée. Leur demi-somme 1,00038 sera donc la distance moyenne ou le demi grand axe de l'ellipse (*). Leur demi-différence 0,01729 sera l'excentricité ; et en divisant ce dernier nombre par l'autre, on aura 0,01728 pour le rapport de l'excentricité au demi grand axe. Enfin en prenant une moyenne arithmétique entre les observations de longitude, on aura 110°,0556 pour la longitude de l'apogée en 1775, et par conséquent 310°,0556 pour la longitude du périgée.

86. Nous n'avons employé ici que quatre observations pour déterminer ces élémens ; encore ces observations ne sont-elles pas exactement opposées sur l'orbite. D'ailleurs l'apogée et le périgée que nous supposons fixes dans notre

---

(*) On se rappelle que, dans tous ces calculs, nous avons pris pour unité la distance du soleil à la terre, qui correspond à la vîtesse angulaire moyenne 1°,0959. Cette distance diffère un peu du demi grand axe, et c'est pourquoi la valeur 1,00038, que nous venons de trouver pour le demi grand axe, diffère un peu de l'unité. Nous avions déja fait cette remarque dans la note de la page 140 ; et en partant des valeurs exactes de l'excentricité et des vîtesses diurnes, nous avons trouvé que le demi grand axe devait être exprimé par 1,00041 : nous trouvons ici 1,00038 par les quatre observations de M. Maskeline, que nous avons combinées. La différence de ces résultats est extrêmement petite, et telle que les observations et sur-tout nos calculs la comportent.

calcul, sont réellement mobiles dans le ciel, comme on le verra bientôt, et l'on sent qu'il faut avoir égard à ce déplacement dans la comparaison des observations. Enfin la méthode que nous venons d'employer pour déterminer les distances apogée et périgée, n'est pas, à beaucoup près, la plus exacte de toutes celles que l'on peut employer, et nous en donnerons bientôt une autre qui lui est bien préférable. On doit donc regarder ce que nous venons de faire ici comme une simple approximation, et l'on peut facilement imaginer qu'en employant des méthodes plus précises, et combinant un plus grand nombre d'observations, on doit arriver à des résultats qui méritent plus de confiance. En effet, en employant tous ces soins, M. Delambre a trouvé pour la fin de 1775 le demi grand axe de l'ellipse solaire égal à 1,00041, le rapport de l'excentricité au demi grand axe égal à 0,0168, et la longitude du périgée égale à 310°,0608. Ces valeurs diffèrent bien peu de celles que nous venons de rapporter, mais pourtant on conçoit qu'il faut les employer de préférence, comme plus exactes.

87. Maintenant pour s'assurer que l'orbe solaire est réellement une ellipse, et une ellipse telle que nous venons de la déterminer, il n'y a qu'à chercher par le calcul dans une pareille ellipse, les valeurs des distances du soleil à la terre pour chacune des longitudes rapportées dans notre tableau, et voir ensuite si ces valeurs s'accordent ou non avec celles que les observations nous ont données. C'est ce que j'ai fait, et j'ai rapporté les résultats de cette comparaison dans le tableau suivant (*).

(*) Soit a le demi grand axe d'une ellipse, e le rapport de l'excentricité au demi grand axe, r le rayon vecteur mené du foyer à un point quelconque de l'ellipse. Soit ν l'angle formé par le rayon

LONGITUDES observées.	DISTANCES déduites des observations.	DISTANCES calculées.	EXCÈS des observations.
325°,2624	0,98448	0,98406	+ 0,00042
365,8143	0,98950	0,98949	+ 0,00001
393,5520	0,99622	0,99585	+ 0,00037
42,7101	1,00800	1,00845	— 0,00045
60,9586	1,01234	1,01233	+ 0,00001
96,0689	1,01654	1,01680	— 0,00026
109,8486	1,01767	1,01722	+ 0,00045
128,9228	1,01658	1,01647	+ 0,00011
170,4218	1,01042	1,01003	+ 0,00039
199,7104	1,00283	1,00286	— 0,00003
236,0076	0,99303	0,99352	— 0,00049
264,4958	0,98746	0,98762	— 0,00016
295,5333	0,98415	0,98403	+ 0,00012
310,2626	0,98309	0,98349	— 0,00040

vecteur avec la distance périgée, angle que les astronomes appellent l'*anomalie*. L'équation polaire de l'ellipse entre le rayon vecteur r et l'angle v sera (Géom. analyt., 4e. édit., pag. 166)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Pour appliquer ces résultats à l'orbe solaire, soit, *fig.* 14, T la terre, $PSEA$ l'ellipse solaire, P le périgée, A l'apogée, S une position quelconque du soleil. L'angle STP sera égal à v. Main-

Les différences entre les résultats calculés et les resultats observés sont si petites et si peu régulières, qu'on peut sans crainte en attribuer une partie aux erreurs des observations. Mais on doit aussi en mettre quelque chose sur le compte de l'hypothèse elliptique, ou de la manière dont nous l'avons employée. C'est ce qui s'éclaircira par la suite. En attendant nous pouvons toujours conclure de cet accord que l'orbe solaire est à très-peu-près une ellipse dont la terre occupe un des foyers.

88. Nous avons vu que la distance moyenne du soleil à la terre étant 1, l'excentricité est 0,0168. Cette excentricité ne serait donc pas de 17 millimètres sur une ellipse dont le demi grand axe aurait 1000 millimètres ou un mètre de longueur. C'est pour cela qu'elle est si peu sensible dans la *fig.* 12; mais, dans le ciel, où la distance

---

tenant, soit $ET\sigma$ la ligne des équinoxes, d'où l'on compte les longitudes. Dans la position actuelle de l'orbe solaire, E est l'équinoxe du printems; car la longitude de l'apogée, ou du point A, est entre 100° et 200°; celle du périgée, ou du point P, entre 300° et 400°. En nommant donc l la longitude du soleil comptée de l'équinoxe E dans le sens EAS', qui est celui du mouvement propre de cet astre, et désignant par ϖ la longitude du périgée comptée du même équinoxe, on aura évidemment $\nu = l - \varpi$; et en mettant cette valeur pour ν dans l'équation de l'ellipse, elle deviendra

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(l - \varpi)}.$$

D'après les résultats de M. Delambre, que nous venons d'adopter, on a

$$A = 1{,}00041, \quad e = 0{,}0168, \quad \varpi = 310^\circ.0608;$$

ainsi, en se donnant l on aura r en nombres : c'est de cette manière que j'ai calculé les distances rapportées dans le tableau précédent.

moyenne du soleil à la terre excède 34 millions de lieues, comme on le verra par la suite, cette excentricité a plus de 500 mille lieues de longueur.

Maintenant que nous connaissons déja d'une manière approchée les élémens de l'orbe solaire, examinons les méthodes que les astronomes emploient pour trouver les valeurs exactes de ces élémens avec la dernière précision.

CHAPITRE VIII.

Manière de déterminer exactement la position de l'Ellipse solaire sur le plan de l'écliptique. Origine du Tems moyen.

89. POUR déterminer exactement la position de l'ellipse solaire, il faut fixer avec précision sur l'écliptique le lieu de l'apogée et du périgée. Ces points sont déja connus d'une manière approchée, comme nous venons de le voir, d'après les observations diurnes, parce que la vîtesse angulaire dans l'orbite y est la plus petite ou la plus grande. Mais il peut rester encore une indétermination d'un demi-jour sur l'instant précis auquel le soleil y passe. Pour les obtenir plus exactement, on remarque que le soleil doit employer une demi-année, pour aller d'un de ces points à l'autre, et que la différence des longitudes de cet astre y est de 200°. La réunion de ces propriétés appartient exclusivement au grand axe de l'orbe solaire, car si l'on mène par le centre de la terre une autre ligne droite qui coupe cette orbite en deux points, la différence de longitude de ces deux points sera bien égale à 200°; mais le tems employé par le soleil pour aller de l'un à l'autre, différera d'une demi-révolution tropique. Il sera plus grand si l'arc décrit contient l'apogée, où le mouvement est plus lent; moindre s'il contient le périgée, où le mouvement est plus rapide.

Ce serait un hasard extraordinaire que l'on eût des observations qui différassent exactement de 200°, et dont l'intervalle fût précisément une demi-révolution annuelle mais lorsqu'on a trouvé les observations qui satisfont le mieux aux conditions exigées, on y fait, d'après le mouvement connu du soleil, les petites corrections nécessaires pour avoir *les tems et les longitudes véritables* (*). *Nous donnerons plus loin les formules nécessaires pour cet objet.*

En appliquant ces considérations aux observations de M. Maskeline, M. Delambre a trouvé, comme nous l'avons dit, la longitude du périgée égale à 310°,0608 pour la fin de l'année 1775.

90. Comparons ce résultat à des observations plus anciennes. En 1690, Flamsteed avait trouvé la longitude du périgée égale à 308°,4355. Ce point de l'orbite du soleil s'est donc avancé de 1°,6253, en 85 ans, ce qui fait 191″,21 par année. La théorie de l'attraction donne 191″,0668 (**), et l'on doit la regarder comme plus sûre que l'observation, lorsqu'il s'agit de si petites quantités.

Le grand axe de l'orbe solaire n'est donc pas fixe dans le ciel, il s'avance annuellement de 191″,0668 *dans le sens du mouvement du soleil* (***).

(*) On trouvera ces formules dans les notes de la page 153.

(**) Mécanique céleste, tom. III.

(***) Il est évident que ce déplacement de l'ellipse solaire a dû influer sur le calcul des observations par lesquelles nous avons reconnu l'ellipticité de *l'orbite du soleil dans la page 145.* Cette influence était, à la vérité, fort peu sensible, parce que nous ne cherchions que les valeurs des rayons vecteurs de l'ellipse ; et comme ils varient très-peu, une petite erreur sur la longitude à laquelle ils répondent ne les altère pas beaucoup ; mais l'erreur serait devenue *beaucoup* plus sensible, si *nous eussions calculé la longitude* du soleil d'après

Lorsque cet astre est revenu au point de l'écliptique à le périgée se trouvait l'année précédente, le périgée s'en est éloigné, et le soleil doit encore décrire $191'',0668$ avant de le rejoindre. Le tems nécessaire pour cela est, $\frac{191'',0668 \cdot 365^j,242264}{400^o}$ ou $0^j,017446$, à raison de la circonférence entière pour une année. A la vérité l'ellipse solaire ne reste pas tout-à-fait immobile dans cet intervalle, et le périgée s'éloigne un peu du soleil pendant que cet astre le rejoint, mais son mouvement est si lent, que l'on peut le négliger pendant un tems si court, et en effet en $0^j,017446$, il ne décrirait que $\frac{0,017446 \cdot 191'',0668}{365,242264}$ quantité qui est au-dessous d'un centième de seconde décimale. Au reste, si l'on voulait en faire le calcul rigoureux, il n'y aurait qu'à employer la méthode dont nous avons fait usage dans la page 75, pour trouver la valeur exacte de l'excès de l'année sydérale sur l'année tropique.

91. Par une suite nécessaire de ces phénomènes, le soleil emploie un peu plus d'une année tropique pour revenir à l'apogée ou au périgée de son orbite. La différence

---

le tems écoulé depuis une époque donnée, par exemple, depuis l'équinoxe. Maintenant que nous connaissons la mobilité de l'ellipse solaire, les observations de la page 141 ont besoin d'être reprises et calculées de nouveau, en tenant compte des corrections que ce mouvement nécessite. Telle est en effet la marche que les astronomes ont été obligés de suivre; mais maintenant il suffit de concevoir la nécessité de ces approximations successives, et la manière dont on les a pu faire. L'exactitude des résultats qu'elles ont donnés se vérifie ensuite par la comparaison avec le ciel, sans qu'il soit nécessaire de repasser par ces mêmes essais.

est égale à $0^{j},017446$, et la durée de la révolution, par rapport aux absides, est $365^{j},242264 + 0,017446$ ou $365^{j},259710$. C'est ce que l'on nomme la *révolution anomalistique*, parce que l'on appelle *anomalie* du soleil la distance angulaire de cet astre au *périgée de son orbite*.

92. Cette période diffère sensiblement de la révolution tropique; c'est donc elle qu'il faut employer pour reconnaître l'opposition des observations annuelles faites au périgée et à l'apogée. On conçoit, en effet, qu'il faut avoir égard au déplacement du périgée pendant l'intervalle des observations que l'on compare. Ces conditions forment la base de la méthode par laquelle on réduit à l'apogée et au périgée les observations qui sont faites très-près de ces points (*).

(*) Les réductions dont il s'agit ici, se déduisent des lois suivant lesquelles le soleil circule dans son ellipse, lois que la théorie de l'attraction a fait connaître, ou plutôt qu'elle a tirées des observations et réduites en formules. Les résultats en sont renfermés dans les trois équations suivantes qui ont également lieu pour les planètes, comme on le verra par la suite, et que j'emploierai comme les données fondamentales du problème.

$$(1)\ldots t = \frac{T}{2\pi}\left\{u - e\sin u\right\};\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v-\varpi)\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u;\ r = a\left\{1 - e\cos u\right\}$$

a est le demi grand axe de l'ellipse, e est le rapport de l'excentricité au demi grand axe, π est la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, ϖ est la longitude du périgée, v est la longitude de l'astre comptée de la même origine, et r est le rayon vecteur; l'un et l'autre correspondent au tems exprimé par t. Le tems est compté à partir du passage de l'astre au périgée; T est le tems d'une révolution de l'astre par rapport à ce point; enfin u est un angle auxiliaire qui, s'il était éliminé, réduirait ces trois équations à deux, entre le tems t, Le mouvement que nous venons de calculer, est celui du périgée par rapport à l'équinoxe du printems; et nous voyons que sa longitude croît sans cesse. Mais nous avons vu

---

la longitude ν et le rayon vecteur; mais comme l'élimination de u n'est possible que par des séries, il est plus simple de conserver le système des trois équations, et cela suffira pour l'objet que nous nous proposons ici.

Au premier coup d'œil, on serait tenté de croire que l'équation qui donne t, n'est point homogène, parce qu'elle contient l'arc u et son sinus; mais on remarquera que, dans ces formules, le rayon des tables est pris pour unité, de sorte que l'arc u, son sinus et la quantité 2π sont toutes trois censées exprimées en parties de ce même rayon, ce qui conserve l'homogénéité, et permet de traiter ces quantités comme des nombres abstraits.

En effet, sous cette forme on peut également tirer les valeurs de la longitude et du rayon vecteur par le tems; seulement, pour les obtenir, il faut donner à l'angle u des valeurs arbitraires, qui détermineront simultanément ces trois variables. Soit, par exemple, $u = 0$, nos trois équations donneront

$$t = 0, \quad \nu = \varpi, \quad r = a(1 - e),$$

alors la longitude de l'astre est égale à celle du périgée, le rayon vecteur est la distance périgée elle-même, et le tems est zéro. Nous avons donc eu raison de dire que le tems, dans ces formules, était compté à partir du passage de l'astre au périgée de son orbite.

Maintenant, supposez u égal à la demi-circonférence, c'est-à-dire, à π, vous aurez alors $\sin u = 0$, $\cos u = -1$, $\tang \frac{1}{2} u$ infinie aussi bien que $\tang \frac{1}{2}(\nu - \varpi)$; par conséquent, on aura alors

$$t = \frac{T}{2}, \quad \nu = \pi + \varpi, \quad r = a(1 + e),$$

c'est-à-dire, qu'alors la longitude de l'astre est égale à celle du périgée augmentée d'une demi-circonférence; l'astre est donc à l'apogée de l'ellipse. En effet, le rayon vecteur est égal à la distance apogée;

précédemment que cet équinoxe a, lui-même, sur l'écliptique, un mouvement rétrograde, qui augmente chaque année les longitudes de tous les points du ciel, de $154'',6272$.

---

de plus, le tems est égal à $\frac{T}{2}$; ainsi T exprime le tems que l'astre emploie à revenir au périgée. C'est la révolution anomalistique.

Si le périgée est fixe par rapport à l'origine des angles ν et ϖ, l'astre, en revenant au périgée, revient aussi à la même longitude. Alors la révolution anomalistique est égale à la révolution de l'astre, par rapport à l'origine. Si le périgée est mobile relativement à cette origine, cette égalité n'aura plus lieu. Lorsque le mouvement du périgée sera direct, c'est-à-dire, augmentera sa longitude, T surpassera la révolution relative à l'origine; c'est le cas du soleil quand on le rapporte à l'équinoxe. Cela aurait encore lieu en comptant ses longitudes à partir d'un même point fixe de l'écliptique, puisqu'il a un mouvement sydéral direct de $36'',44$ par année. Le contraire arriverait si le mouvement du périgée était rétrograde, c'est-à-dire, tendait à diminuer sa longitude; alors, l'astre reviendrait au périgée avant de revenir à la même longitude, et la révolution anomalistique serait plus courte que la révolution relative à l'origine des angles ν et ϖ.

Ceci bien compris, nous allons en faire l'application au soleil. Nous compterons nos longitudes suivant la coutume ordinaire des astronomes, à partir de l'équinoxe moyen, c'est-à-dire, corrigé de la nutation; par conséquent, il faudra attribuer au périgée son mouvement annuel direct de $191'',0668$, relativement à cette origine. Comme les observations que l'on compare sont ordinairement séparées par de courts intervalles de tems, tout au plus par un petit nombre d'années, il nous suffira de considérer le mouvement du périgée comme uniforme, de sorte qu'en nommant (ϖ) sa longitude à l'instant qui est pris pour origine du tems t, nous aurons, à un instant quelconque, compris dans les observations que l'on compare,

$$\varpi = (\varpi) + mt,$$

m étant une quantité constante qui exprime l'accroissement de la longitude du périgée pendant l'unité de tems; par exemple, si l'on

Le déplacement absolu du périgée par rapport à un point fixe de l'écliptique, ou par rapport aux étoiles supposées immobiles, est donc égal à l'excès de son mouve-

---

veut exprimer t en jours solaires moyens, ce qui est l'usage ordinaire des astronomes, on aura $m = \frac{191'',0668}{365^{j},242264}$, parce qu'en effet, en faisant $t = 365^{j},242264$, la longitude du périgée, relativement au point équinoxial, doit être augmentée de $191'',0668$. En faisant t égal à deux années tropiques, l'augmentation sera double, et ainsi de suite.

Maintenant, il faut supposer que (ϖ) n'est point connu exactement, mais à-peu-près, et seulement assez pour distinguer les observations qui n'en sont pas éloignées. On suppose donc que l'on a fait de pareilles observations du soleil à peu de distance de la longitude (ϖ), ou du périgée, et d'autres peu distantes de la longitude $\pi + (\varpi)$, ou de l'apogée. On demande de réduire exactement ces observations aux longitudes (ϖ) et $\pi + (\varpi)$, et d'en déduire la valeur de (ϖ).

L'artifice par lequel on y parvient, consiste à développer les longitudes cherchées suivant les puissances de leur distance au périgée ou à l'apogée ; alors, leurs valeurs se réduisent à leurs deux premiers termes, et comme leur intervalle est donné, la condition d'y satisfaire détermine les corrections dont elles ont besoin.

Commençons par les observations faites près du périgée ; alors, $v - \varpi$ est une fort petite quantité ; ainsi, dans l'équation

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

on peut substituer le rapport des arcs $\frac{1}{2}(v - \varpi)$, $\frac{1}{2} u$ à celui de leurs tangentes, ce qui donne

$$u = (v - \varpi)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

La considération de la petitesse de u étant pareillement introduite dans l'équation

$$t = \frac{T}{2\pi}\left\{u - e \sin u\right\},$$

ment apparent sur celui des équinoxes, c'est-à-dire, $191'',0668 - 154'',6272 = 36''.4396$. C'est le *mouvement sydéral* du périgée solaire : on voit que le mouvement

---

permet de substituer l'arc u à son sinus, et cette équation se réduit à

$$t = \frac{T}{2\pi}\left\{1 - e\right\}u, \quad \text{ce qui donne} \quad u = \frac{2\pi t}{T(1-e)};$$

par conséquent, en égalant ces deux valeurs de u,

$$\frac{2\pi t}{T(1-e)} = (\nu - \varpi).\sqrt{\frac{1-e}{1+e}};$$

et en mettant pour ϖ sa valeur $(\varpi) + mt$, on aura enfin,

$$(2)\ldots\ t\left\{1 - \frac{mT\,(1-e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1+e}}\right\} = \frac{T(1-e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1+e}}\left\{\nu - (\varpi)\right\}$$

t est le tems écoulé depuis le passage à la longitude (ϖ) du périgée. Si cette longitude était connue, t serait aussitôt déterminé par cette équation. t doit être négatif pour les observations antérieures au passage de l'astre par le périgée.

Faisons le même développement pour les observations voisines de l'apogée. Les longitudes correspondantes à ces observations devront excéder les premières, et à fort peu près, d'une demi-circonférence; choisissons-en une qui corresponde ainsi à la longitude ν, en sorte qu'en la nommant ν', on ait

$$\nu' = \nu + \pi + \alpha,$$

α étant un fort petit angle. Dans l'intervalle des deux observations, la longitude du périgée aura changé, et sera devenue, par exemple, ϖ'; on aura donc

$$\nu' - \varpi' = \nu - \varpi' + \alpha + \pi,$$

et comme ϖ' est très-peu différent de ϖ, parce que les observations sont faites dans la même année, ou à peu d'années de distance, de sorte que le périgée a très-peu changé dans l'intervalle; on voit tropique du périgée excède le mouvement rétrograde des équinoxes ; ainsi le mouvement sydéral du périgée est direct. La théorie de l'attracion a fait voir qu'il est produit par l'attraction des planètes et du soleil sur

---

que $\nu - \varpi'$, α, et $\nu - \varpi' + \alpha$ sont encore de très-petits angles. Or, en prenant dans cette expression, la valeur de $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\nu' - \varpi')$, on voit qu'elle est égale à $\text{tang}\left\{\frac{1}{2}(\nu - \varpi' + \alpha) + \frac{1}{2}\pi\right\}$, ou $\dfrac{-1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\left\{\nu - \varpi' + \alpha\right\}}$; représentons de même par u' la valeur correspondante de u, et supposons $u' = \pi + u_{,}$, nous aurons . . . . $\text{tang}\,\frac{1}{2}u' = \dfrac{-1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}u_{,}}$; en substituant ces valeurs dans l'équation fondamentale

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(\nu' - \varpi') = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \text{tang}\,\frac{1}{2}u',$$

elle devient

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}u_{,} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \text{tang}\,\frac{1}{2}(\nu - \varpi' + \alpha),$$

et comme, par ce qui vient d'être dit, $u_{,}$ et $\nu - \varpi' + \alpha$ sont de fort petites quantités, on peut encore substituer le rapport des sinus à celui des arcs, ce qui donne

$$u_{,} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot (\nu - \varpi' + \alpha),$$

et puisque $u' = \pi + u_{,}$,

$$u' = \pi + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot (\nu - \varpi' + \alpha).$$

Si nous représentons maintenant par t' le tems qui correspond à cette observation, on aura, d'après les équations générales,

$$t' = \frac{T}{2\pi}(u' - e \sin u');$$

or, $\sin u' = \sin\left\{\pi + u_{,}\right\} = -\sin u_{,}$, ou simplement $\sin u' = -u$

la terre. Il est par conséquent soumis à des inégalités produites par le déplacement des orbites de ces astres. Mais la lenteur de ces variations permet de le représenter d'une manière suffisamment approchée par une

---

en substituant les arcs aux sinus, ce qui se peut dans ces très-petits angles; la valeur de t' deviendra donc

$$t' = \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1-e)}} (\nu - \varpi' + \alpha);$$

ou, en mettant pour ϖ' sa valeur $(\varpi) + mt'$,

$$t' \left\{ 1 + \frac{mT(1+e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1-e}} \right\} = \frac{T}{2} + \frac{T}{2\pi} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} \left\{ \nu - (\varpi) \right\} + \frac{\alpha T.(1+e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1-e}}.$$

C'est la valeur du tems t' écoulé depuis le passage à l'apogée jusqu'à l'instant de l'observation. Cette valeur serait connue si (ϖ) était connu.

Mais puisque (ϖ) n'est point connu, et qu'il n'entre que dans le terme $\nu - (\varpi)$, éliminons $\nu - (\varpi)$ entre cette et équation l'équation (2); cela est facile, puisqu'il n'entre qu'au premier degré dans les deux équations; nous aurons ainsi, par la première,

$$\nu - (\varpi) = \frac{2\pi t. \sqrt{1+e}}{T(1-e)^{\frac{3}{2}}} + mt;$$

et substituant dans la seconde, il viendra

$$t' = \frac{T}{2} + t\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} - \frac{mT}{2\pi} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} \cdot \left\{ t' - t \right\} + \frac{\alpha T(1+e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{1-e}}.$$

A la vérité, il entre ici deux inconnues t' et t; mais on connaît leur différence, car elle est égale au tems écoulé entre les deux observations. Nommons cet intervalle T', on aura $t' = t + T'$; et en éliminant t' par ce moyen, il restera

$$t\left\{(1+e)^2 - (1-e)^2\right\} = (1-e)^2 \left\{ T' - \frac{T}{2} \right\} + \frac{T\left\{1-e^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ mT' - \alpha \right\}}{2\pi},$$

expression composée de deux termes ; l'un proportionnel au tems, l'autre beaucoup plus petit et proportionnel au carré du tems. Je ne parle ici que du mouvement sydéral.

---

ou bien

$$t = \frac{(1-e)^2}{4e}\left\{T' - \frac{T}{2}\right\} + \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4e} \cdot \frac{T \cdot \{mT' - \alpha\}}{2\pi}.$$

C'est *la correction de la première observation faite vers le périgée.* Soit E l'époque de cette observation qui est connue, P celle du passage au périgée que l'on cherche, on aura

$$P = E - t.$$

Soit maintenant A l'époque du passage de l'astre à l'apogée, on aura $A = P + \frac{T}{2}$, puisque T est la révolution anomalistique. Mettant pour P sa valeur, il vient

$$A = E + \frac{T}{2} - t;$$

mais en nommant E' l'époque de la seconde observation, on a, par supposition, $E' = E + T''$, par conséquent, $E = E' - T'$; substituant cette valeur, il vient

$$A = E' - \left(T' - \frac{T}{2}\right) - t.$$

Les deux derniers termes sont donc la correction de l'époque E' pour la réduire à l'apogée. Si l'on veut substituer pour t sa valeur dans ces formules, et que l'on mette pour α sa valeur $\nu' - \nu - \pi$, on aura, pour P et A, les expressions suivantes :

$$P = E - \frac{(1-e)^2}{4e}\cdot\left\{T' - \frac{T}{2}\right\} - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4e}\cdot\frac{T\{\pi - (\nu' - \nu) + mT''\}}{2\pi},$$

$$A = E' - \frac{(1+e)^2}{4e}\cdot\left\{T' - \frac{T}{2}\right\} - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4e}\cdot\frac{T\{\pi - (\nu' - \nu) + mT'\}}{2\pi}.$$

Quand on rapporte ce mouvement à l'équinoxe mobile, les inégalités de la précession s'y introduisent et se composent avec lui (*).

93. J'ai annoncé que le soleil éprouve, en vertu de l'attraction des planètes, de petites perturbations périodiques, qui le font osciller autour de son lieu moyen. Par conséquent, si l'on calculait directement la longitude du périgée, d'après les longitudes du soleil vrai, telles que l'observation les donne, elle serait affectée

---

Ceci suppose que la première observation est faite vers le périgée, et la seconde vers l'apogée : si le contraire avait lieu, et si la première observation était faite vers l'apogée et la seconde vers le périgée, il faudrait faire e négatif; car en faisant cette supposition dans les équations fondamentales (1) rapportées au commencement de cette note, l'origine du tems et des arcs se trouve transportée à l'apogée.

Au moyen des réductions précédentes, on peut faire conspirer, pour la détermination du périgée et de l'apogée, un grand nombre d'observations faites près de ces points. Les résultats ainsi obtenus se rectifient encore simultanément avec tous les autres élémens de l'orbite, par la méthode *des équations de condition*, dont nous parlerons plus loin.

(*) Soit (ϖ) la longitude du périgée au commencement de 1750, cette longitude étant comptée à partir de l'équinoxe moyen de cette même année. Après un nombre t d'années juliennes, la longitude du périgée comptée du même équinoxe sera

$$(\varpi) + t.36'',443578 + t^2.0'',000252.$$

et son mouvement annuel sydéral sera

$$36'',443578 + t.0''000504$$

t. doit être supposé négatif pour les années antérieures à 1750. Ces formules sont tirées de la Mécanique céleste, tom. III, pag. 157.

de tout l'effet de ces petites perturbations; mais on les corrige avant d'établir le calcul; de plus on rapporte les observations à l'équinoxe moyen, en faisant, aux longitudes observées, les corrections que la nutation exige. Alors la longitude du périgée déduite des observations ainsi corrigées, est exempte de ces petites inégalités, et se rapporte à sa position moyenne.

J'ai dit aussi que nous appellerons *anomalie* l'angle formé par le rayon vecteur avec la distance périgée. Je dois prévenir que les astronomes ont pendant longtems compté les anomalies à partir de l'apogée de l'orbite. Cela n'a aucun avantage ni aucun inconvénient pour le soleil non plus que pour les planètes. Mais cela devient impraticable pour les comètes, qui ont, comme on le verra par la suite, des orbites si excessivement alongées, qu'on ne peut les voir et les observer que dans la partie de cette orbite, qui est la plus voisine du périhélie. Ces motifs ont déterminé l'auteur de la Mécanique céleste à compter l'anomalie à partir du périgée, et le Bureau des longitudes a suivi cet exemple dans ses nouvelles tables, ce qui les rendra uniformes pour tous les astres. J'ai dû me conformer à cet usage. Mais comme, malgré les avantages qu'il présente, il n'est pas encore généralement adopté, je préviens le lecteur qu'avant d'employer des anomalies rapportées dans d'autres ouvrages d'astronomie, il faut examiner attentivement le parti que l'auteur a embrassé, et faire ses calculs en conséquence; ce qui, au reste, n'a aucune difficulté, une fois que la convention est connue.

94. Le moment où le soleil passe au périgée de son orbite, est celui que les astronomes ont choisi pour fixer l'origine arbitraire du tems moyen absolu. Voici à cet

égard la convention qu'ils ont adoptée ; je dis la convention, puisqu'ils auraient pu également fixer cette origine de toute autre manière. Quand ils ont trouvé par les observations la longitude moyenne du périgée, avec toutes les corrections que nous avons décrites, ils la reportent dans le plan de l'équateur moyen (*), à partir de l'équinoxe moyen du printems, et d'occident en orient, comme si c'était une ascension droite; puis ils regardent cette longitude ainsi transposée comme l'ascension droite du soleil moyen, relativement à l'équinoxe moyen, à l'instant où le vrai soleil se trouvait au périgée de son orbite. La position du soleil moyen est complètement déterminée par cette construction, pour l'instant du passage au périgée ; et ainsi elle l'est pour toujours, puisque l'on sait que son mouvement est uniforme.

Veut-on calculer, pour cet instant, l'angle horaire moyen du soleil moyen pour un lieu déterminé ; pour Paris, par exemple. Il n'y a qu'à calculer quelle était alors la distance de l'équinoxe moyen au méridien moyen de Paris (**). Cette distance n'est autre chose que le tems sydéral moyen converti en arc : retranchons-en l'ascension droite du soleil moyen que nous venons de déterminer, et il est évident que la différence sera, pour le même instant, la distance du soleil moyen au méridien moyen de Paris, ou son angle horaire compté d'orient

(*) Par *équateur moyen*, j'entends ici l'équateur qui correspond au *pôle moyen* de la terre. Ce pôle reste constamment placé au centre de la petite ellipse de nutation, tandis que le pôle instantanée circule sur la circonférence de cette ellipse en entraînant avec lui l'équateur vrai.

(**) J'appelle ici *méridien moyen* celui qui passe par le zénith moyen de Paris, et par le pôle moyen de la terre, perpendiculairement à l'équateur moyen.

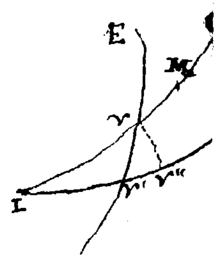
en occident, comme celui du soleil vrai (*). Si l'on convertit cet arc en tems moyen à raison de 10h moyennes pour 400°, on aura l'heure moyenne ou le tems moyen absolu à l'instant du vrai passage du soleil au périgée, et par suite on aura ce tems pour tous les instans, à cause de son uniformité. Cette méthode directe et rigoureuse peut se simplifier beaucoup dans les applications, en faisant attention que l'équateur et l'équinoxe vrai s'écartent toujours extrêmement peu de l'équateur et de l'équinoxe moyen.

Pour faire comprendre clairement cette simplification, je m'aiderai d'une figure. Soit donc, *fig.* 15, $\Upsilon\Upsilon'E$ l'écliptique, ΥQ l'équateur moyen, et Υ le point équinoxial moyen; $\Upsilon'Q'$ l'équateur vrai, et Υ' le point

---

(*) Ce raisonnement est absolument le même que celui dont nous avons fait usage dans la page 127 du 1er. volume pour trouver le tems sydéral, connaissant par observation l'angle horaire d'un astre et son ascension droite. La même figure pourra nous servir. Soit donc alors *pl.* 7, *fig.* 26, Υ l'équinoxe moyen, et S le soleil moyen à l'instant du passage du vrai soleil au périgée. ΥS sera son ascension droite moyenne, qui est donnée par notre construction, et égale à la longitude du périgée dans l'orbite, comptée du même équinoxe moyen. Or, si de l'arc $MS\Upsilon$, qui représente le tems sydéral ou l'angle horaire de l'équinoxe, on retranche ΥS ou l'ascension droite du soleil moyen, la différence MS est l'angle horaire du soleil moyen au même instant. On connaîtra donc cet angle horaire. On sait de plus que le soleil moyen décrit sur l'équateur moyen 400° en 10h moyennes; on pourra donc déterminer sa position sur ce plan et son angle horaire pour un instant quelconque. Mais cette uniformité n'a lieu que relativement à l'équateur et à l'équinoxe moyen. Elle n'existerait plus si l'on voulait employer les angles horaires du soleil moyen avec le méridien instantanée qui est perpendiculaire à l'équateur vrai; et généralement tout ce qui concerne le soleil moyen, doit se rapporter aux positions moyennes.

équinoxial vrai ; en sorte que les deux équateurs prolongés se coupent en I : l'angle en I sera la variation d'obliquité, et l'arc $\Upsilon\Upsilon'$ sera la variation de longitude occasionnées par la nutation. Je suppose maintenant qu'à l'instant pour lequel on veut calculer le tems moyen, l'arc $\Upsilon'M'$ soit l'ascension droite vraie du zénith du lieu où l'on observe, c'est-à-dire, le tems sydéral apparent converti en arc. Soit de même ΥM l'ascension droite moyenne du zénith moyen du même lieu, sur l'équateur moyen, en sorte que ΥM soit le tems sydéral moyen converti en arc. Toutes les questions que l'on peut se proposer relativement au tems moyen, se réduisent à calculer ΥM, connaissant $\Upsilon'M'$, ou réciproquement à trouver $\Upsilon'M'$, connaissant ΥM.



Pour y parvenir, on remarquera que, dans la nutation, les pôles et l'équateur de la terre se déplacent en même tems, de sorte que les points et les cercles qui font partie de ce système, se déplacent tous ensemble sans changer leurs positions respectives. D'après ce principe, évident par lui-même, il est clair que les deux points M et M' répondent toujours au même point physique de l'équateur, soit vrai, soit moyen ; car, étant l'intersection de ce plan par le méridien du lieu où l'on observe, ils se déplacent avec tout le système des cercles terrestres, et ne changent par conséquent point leur position respectivement à eux. Cela revient à dire que les points M et M' conservent toujours la même longitude géographique sur le globe. D'après cela, les distances MI, $M'I$ de ces points au *nœud* des deux équateurs, sont égales entre elles ; c'est-à-dire, que l'ascension vraie $\Upsilon'M'$ augmentée de l'arc $\Upsilon'I$, est égale à l'ascension droite moyenne ΥM augmentée de l'arc ΥI, ou, en d'autres termes, pour avoir l'ascension droite vraie du zénith d'un lieu, quand on connaît son ascension droite moyenne, il faut ajouter à cette dernière l'excès de l'arc ΥI sur l'arc $\Upsilon' I$.

Or, si du point équinoxial moyen, on mène un arc de grand cercle $\Upsilon \Upsilon''$ perpendiculaire à l'équateur vrai, et qui sera le méridien de Υ, il est facile de voir qu'à cause de l'extrême petitesse de l'angle I et de l'arc $\Upsilon \Upsilon'$ qui exprime la nutation en longitude, la différence des arcs ΥI, $\Upsilon' I$ est à fort peu près égale à l'arc $\Upsilon' \Upsilon''$ compris entre le point équinoxial vrai et le méridien de Υ. Cette distance $\Upsilon' \Upsilon''$ est réellement l'ascension droite apparente de l'équinoxe vrai. Ainsi, en s'en tenant à cette approximation, qui est toujours suffisante, on voit que *l'ascension droite moyenne du zénith est égale à son ascension droite apparente moins celle du point équinoxial moyen.* Cette dernière est bien facile à calculer; car, dans le triangle rectangle $\Upsilon \Upsilon' \Upsilon''$, on connaît l'angle Υ' égal à l'obliquité apparente de l'écliptique, et le côté $\Upsilon \Upsilon'$ égal à la nutation en longitude. Il est facile de voir que l'arc cherché $\Upsilon' \Upsilon''$ est égal à la nutation en longitude multipliée par le cosinus de l'obliquité apparente de l'écliptique. Dans tous ces calculs, on peut résoudre les triangles $I \Upsilon \Upsilon'$, $\Upsilon \Upsilon' \Upsilon''$, comme s'ils étaient rectilignes, à cause de la petitesse des arcs par lesquels ils sont formés (*).

(*) Conformément à la notation que nous avons jusqu'à présent adoptée, appelons ω' le changement d'obliquité, ou l'angle I, et appelons ψ le changement de longitude, ou l'arc $\psi\psi'$; cela posé, le triangle $I \Upsilon \Upsilon'$ étant considéré comme rectiligne, on aura

$$\Upsilon' I = \frac{\psi \sin(\omega - \omega')}{\sin \omega'}, \quad \Upsilon I = \frac{\psi \sin \omega}{\sin \omega'};$$

Réciproquement, *pour avoir l'ascension droite apparente du zénith d'un lieu, en supposant connue son ascension droite moyenne, il faudrait ajouter à cette dernière l'ascension droite apparente du point équinoxial moyen.*

---

par conséquent

$$\gamma I - \gamma' I = \frac{\psi.\{\sin\omega - \sin(\omega - \omega')\}}{\sin\omega'} = \psi\{\cos\omega + \sin\omega \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega'\}.$$

Cette expression peut être réduite à $\psi \cos\omega$, parce que le produit $\psi \sin\omega \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega'$ est tout-à-fait insensible. Ainsi, en nommant a l'ascension droite moyenne γM, du zénith et a' son ascension droite vraie $\gamma' M'$, on aura

$$a' - a = \psi\cos\omega, \quad \text{par conséquent}, \quad a = a' - \psi\cos\omega.$$

Soit ensuite A l'ascension droite moyenne du soleil moyen, on aura dans la division décimale du jour

$$\text{tems moyen} = \frac{a - A}{40};$$

par conséquent, en mettant pour a sa valeur,

$$\text{tems moyen} = \frac{a' - \psi\cos\omega - A}{40}.$$

De même, en nommant A' l'ascension droite du soleil vrai, relativement à l'équinoxe vrai, on aura

$$\text{tems vrai} = \frac{a' - A'}{40};$$

retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, il vient

$$\text{tems moyen} - \text{tems vrai} = \frac{A' - \psi\cos\omega - A}{40}.$$

Cette différence du tems moyen au tems vrai s'appelle l'équation du

Avec ces méthodes très-simples, rien n'est plus facile que de déterminer, pour un instant quelconque, le tems moyen absolu, lorsque l'on connaît, pour ce même lieu et pour ce même instant, l'ascension droite moyenne du soleil moyen sur son équateur et le tems sydéral apparent. Il suffit d'observer les règles que nous venons d'exposer.

Par exemple, en discutant un grand nombre d'observations du soleil faites par M. Maskeline, M. Delambre a trouvé que le soleil vrai, corrigé des petites perturbations qui l'affectent, et ramené ainsi au mouvement elliptique, a passé au périgée de son ellipse le 30 décembre 1780, à $4^h.19449$ de tems sydéral au méridien de Paris, ce tems étant compté du méridien supérieur et à partir de l'équinoxe vrai. La longitude du périgée rapportée à l'équinoxe moyen était à cet instant $310^\circ.17492$: c'était donc aussi l'ascension droite moyenne du soleil moyen d'après la définition que nous en avons donnée. Si on la réduit en tems décimal en la divisant par 40, elle deviendra $7^h.754373$; la nutation du point équinoxial moyen en ascension droite, ou son ascension droite apparente, était alors $-0^\circ.00331$, ou en tems, $-0^h.0000827$ elle était négative, parce que

---

tems. En formant son expression générale, elle sert à trouver l'un de ces tems, l'autre étant connu.

Dans toutes les relations précédentes, il faut mettre, pour ψ sa valeur numérique, telle que nous l'avons donnée dans le chapitre sur la nutation. En nommant, comme nous l'avons fait alors, N la longitude du nœud ascendant de la lune, et L la longitude du soleil, nous avons trouvé

$$\psi \cos \omega = -50'',972 \sin N - 2'',334 \sin 2L.$$

C'est l'ascension droite vraie du point équinoxial moyen, de même que $\Upsilon\Upsilon''$ est sa déclinaison vraie. Cette valeur de $\psi \cos \omega$ est donc celle qu'il faut employer dans les formules que nous venons d'exposer.

le nœud de la lune se trouvait dans les signes ascendans de l'écliptique entre ♈ et ♋. Ainsi en la retranchant du tems sydéral vrai $4^h.19449$, elle deviendra additive, et l'on aura $4^h.1945727$ pour l'ascension droite moyenne du zénith rapportée à l'équinoxe moyen. Si l'on en retranche l'ascension droite moyenne du soleil $7^h.754373$, en ajoutant, s'il le faut, 10^h pour rendre la soustraction possible, la différence 6^h4402 est l'angle horaire du soleil moyen à cette époque. Ainsi, l'on peut dire que le soleil vrai, dépouillé des perturbations et réduit au mouvement elliptique, a passé au périgée de son orbite le 29 décembre 1780, à $6^h.4402$ de tems moyen au méridien de Paris. J'ai retranché une unité du nombre de jours, parce que nous en avons converti un en heures pour rendre la soustraction possible.

95. Maintenant que l'origine d'où l'on compte le tems moyen nous est bien connue, revenons aux phénomènes que présente la mobilité de l'ellipse solaire. Le grand axe de cette ellipse ayant un mouvement progressif sur le plan de l'écliptique, il a dû, à une certaine époque, coïncider avec la ligne des équinoxes, et dans un autre tems il lui a été perpendiculaire. Ces époques sont faciles à déterminer, puisque nous connaissons par les observations la position actuelle de cet axe et son mouvement (*).

(*) Nous avons vu que le mouvement sydéral du périgée à partir de 1750 est

$$t.36'',443578 + t^2.0'',000252.$$

Soit Ψ' le mouvement du point équinoxial sur l'équateur vrai; mouvement dont nous avons donné l'expression générale pag. 85. En l'ajoutant au résultat précédent, nous aurons le mouvement du périgée relativement au point équinoxial de 1750. Si nous ajoutons encore à ce mouvement la longitude du périgée à cette époque, laquelle était

Suivant les observations de Lacaille, la longitude du périgée, en 1750, était 309°.5827.

Quand le grand axe était perpendiculaire à la ligne des équinoxes, cette longitude était de 300°.

La différence est 9°,5827, qui à raison de 191″,0668 par an, font un nombre d'années égal à $\frac{958270000}{1910668}$ ou environ 500 ans.

Ce phénomène est donc arrivé en l'an 1250. Alors le périgée du soleil coïncidait avec le solstice d'hiver, et l'apogée avec le solstice d'été. Voyez *fig.* 16.

De même, quand le grand axe coïncidait avec la ligne des équinoxes, la longitude du périgée était 200°.

Depuis cette époque jusqu'en 1750, il s'est avancé de 109°,5827.

Le nombre d'années nécessaire pour ce déplacement est $\frac{10958270000}{1910668}$ ou environ 5735, ce qui reporte ce phénomène à 4000 ans environ avant l'ère chrétienne. Par une rencontre assez singulière, c'est à-peu-près vers ce tems, selon la plupart des chronologistes, que remontent les premières traces du séjour de l'homme sur la terre, quoiqu'il paraisse d'ailleurs par un grand nombre de preuves physiques, que la terre elle-même est beaucoup plus ancienne.

96. On voit que le même phénomène arrivera encore lorsque le périgée solaire aura atteint 400°, c'est-à-dire, lorsqu'il aura décrit 100° — 9°,5827, depuis 1750; et en

---

de 309°,582716 (278°,37′,28″ sex.), nous aurons pour une époque quelconque cette longitude comptée de l'équinoxe de 1750, ce sera

$$309^\circ.582716 + \Upsilon' + t.36'',443578 + t^2.0'',000252.$$

partant des résultats précédens, on voit qu'il faut pour cela un nombre d'années exprimé par 5735 — 2.500 ou 4735, ce qui reporte ce phénomène à l'an 6485.

Alors le périgée solaire coïncidera avec l'équinoxe du printems, au lieu que dans la position opposée, il a coïncidé avec l'équinoxe d'automne. Dans ces deux cas la ligne des solstices qui est toujours perpendiculaire à celle des équinoxes, se confond avec le petit axe de l'ellipse solaire.

Généralement, on voit que cette ligne des solstices ne répond jamais pendant deux années consécutives aux mêmes points de l'orbite du soleil. Au reste, les résultats précédens ne sont qu'approchés, car on sent que l'on obtiendrait des valeurs un peu différentes en ayant égard à la variabilité du mouvement du périgée et des équinoxes, ce qui serait facile en employant les expressions exactes que nous avons données de ces mouvemens. Mais cette exactitude ne serait pas ici d'une grande utilité.

97. Lorsque le grand axe AP, *fig.* 16, est perpendiculaire à la ligne des équinoxes, l'équateur Ee partage cette ellipse en deux portions inégales, dont la plus petite est située du côté du périgée. Cette partie doit donc être décrite plus promptement que l'autre, puisque son étendue est moindre, et que les surfaces décrites sont proportionnelles aux tems. Cette circonstance, jointe au déplacement du grand axe, rend les durées des quatre saisons inégales entre elles, et variables dans les différens siècles.

Lors de cette position du soleil en 1250, le périgée coïncidait avec le solstice d'hiver. Alors, le tems écoulé depuis l'équinoxe du printems E jusqu'au solstice d'été, était égal à l'intervalle de ce solstice à l'équinoxe d'automne; le printems était donc égal à l'été et l'automme à l'hiver.

Du tems d'Hipparque, ou 128 ans avant l'ère chrétienne, l'apogée était moins avancé qu'en 1750 d'une quantité égale à 191″,0668.1878 ou 35°,8823. La longitude du périgée, à cette époque, était donc 273°,7004. L'ellipse se trouvait placée à-peu-près comme on le voit dans la *fig*. 17, et l'angle *PTS* était de 26°,2996. L'intervalle *EAS'*, de l'équinoxe du printems au solstice d'été était alors 94 jours et demi, et l'intervalle *S'e*, de ce solstice à l'équinoxe d'automne n'était que de 92 jours et demi, suivant les observations de ce grand astronome. Le printems était alors plus long que l'été, et l'hiver plus long que l'automne.

98. Maintenant la position de l'ellipse est telle que la représente la *fig*. 18. L'angle *PTS* était de 10°,5380 au commencement de l'année 1800, et l'on avait pour les intervalles des diverses saisons :

De l'équinoxe du printems au solstice d'été,	92ʲ.,90588.
Du solstice d'été à l'équinoxe d'automne,	93ʲ.,56584.
De l'équinoxe d'automne au solstice d'hiver,	89ʲ.,69954.
Du solstice d'hiver à l'équinoxe du printems,	89ʲ.,07110.

Le printems est donc maintenant plus court que l'été, et l'automne plus long que l'hiver (*).

Tant que le périgée solaire restera du côté de l'équateur, où il est maintenant, le printems et l'été pris ensemble, seront plus longs que l'automme et l'hiver. Dans

(*) On verra plus loin, dans une note, la manière dont on a calculé ces nombres. Il faut auparavant que nous ayons expliqué la construction des tables du soleil.

ce siècle, la différence est d'environ 7 jours, comme on le peut voir par les valeurs précédentes. Ces intervalles deviendront égaux vers l'an 6485, lorsque le périgée atteindra l'équinoxe du printems ; ensuite il le dépassera, et le printems et l'été pris ensemble deviendront plus courts que l'automne et l'hiver.

99. Ces phénomènes n'auraient pas lieu si le mouvement du soleil était circulaire et uniforme ; toutes les saisons seraient égales entre elles, et l'on n'y remarquerait jamais aucune différence. L'excentricité de l'orbite, quoique fort petite, a donc une influence sensible sur leur durée. Le déplacement du grand axe, quoique très-lent, produit les variétés observées dans les différens siècles, variétés que nous n'appercevons pas pendant la courte durée de notre vie, mais dont les générations successives éprouvent réellement les effets. Voici la seconde fois que nous avons occasion de démontrer l'application de l'astronomie à l'état passé du ciel et à son état futur. C'est pourquoi on me pardonnera d'être entré dans quelques détails sur ce sujet.

CHAPITRE IX.

Détermination exacte de l'Excentricité, d'après les observations de l'équation du Centre.

100. LA position de l'ellipse solaire et son excentricité sont connues par ce qui précède. Si elles l'étaient exactement, on en déduirait, par le calcul, la marche du soleil.

Mais il peut rester encore beaucoup d'incertitude sur l'excentricité. Nous l'avons d'abord conclue de la comparaison des diamètres périgée et apogée, et les observations de ces diamètres portent sur de petites quantités affectées de l'irradiation, dont on ne sait point les dépouiller. D'ailleurs, cette méthode ne serait plus praticable pour les planètes, dont le diamètre apparent est fort petit. Aussi, n'avons-nous employé cette méthode que pour démontrer l'ellipticité du mouvement du soleil ; et cette ellipticité une fois reconnue, nous avons calculé l'excentricité par les rapports des vitesses angulaires observées au périgée et à l'apogée. Mais pour obtenir cet élément avec toute la précision nécessaire, il faut chercher un résultat sur lequel il ait une influence plus continue et plus sensible. Nous le trouverons dans les variations du mouvement angulaire du soleil.

La loi fondamentale de ce mouvement est que les aires décrites par le rayon vecteur, sont proportionnelles au tems. Si l'orbite du soleil était circulaire et sans excentricité, les aires égales correspondraient à des angles égaux, et le mouvement de cet astre serait uniforme. Les inégalités périodiques que l'on y observe, sont donc l'effet nécessaire de l'excentricité de l'orbite. Elles sont liées à cette excentricité, et leur étendue dépend de sa grandeur. Or, on peut les observer très-exactement au moyen des excellentes horloges que nous avons aujourd'hui; on peut donc espérer de déterminer, par ce moyen, l'excentricité avec beaucoup plus de précision que par l'observation directe.

101. Pour avoir une idée nette de ces inégalités, il faut concevoir le mouvement du soleil comme composé d'un mouvement circulaire et uniforme, qui en fait la partie principale, et d'une correction dépendante de l'excentricité de l'ellipse, qui modifie cette première valeur.

Ou, si l'on veut peindre ces considérations par la géométrie, concevons un soleil fictif *s*, *fig.* 19, qui se meuve uniformément autour de la terre, sur une circonférence dont le rayon soit égal à la distance périgée. Donnons à cet astre fictif un mouvement moyen, égal à celui du vrai soleil; en sorte qu'étant partis ensemble du périgée *P*, ils y reviennent ensemble après une révolution entière, et suivons-les à partir de ce point. Tandis que le soleil fictif se meut d'une manière uniforme, le vrai soleil *S* se meut d'une manière inégale, en formant avec la distance périgée des secteurs d'ellipse proportionnels au tems. Comme il a, en partant, sa plus grande vitesse, il devance d'abord le soleil *s*; mais son mouvement se ralentit à mesure qu'il s'éloigne du périgée; il arrive un moment où sa marche est la même que celle du second soleil, après quoi celui-ci s'en rapproche, et l'atteint à l'apogée *A*, où ils arrivent en même tems. Le contraire a lieu en revenant vers le périgée. Alors c'est le soleil fictif *s*, qui devance le soleil véritable. Mais peu après celui-ci augmente de vîtesse, en se rapprochant du périgée. Il arrive un moment où leurs marches sont égales; ensuite celle du vrai soleil s'accélérant toujours, il suit l'autre de plus près; et enfin, les deux astres se rejoignent au périgée, où leurs moyens mouvemens tropiques les ramènent en même tems.

Par conséquent, si l'on conçoit deux rayons vecteurs, menés à un instant quelconque du centre de la terre aux deux soleils, l'angle formé par ces droites, sera d'abord nul au périgée; il augmentera ensuite jusqu'à un certain terme, où il atteindra sa plus grande valeur; puis diminuera jusqu'à l'apogée, où il redeviendra nul de nouveau; et de là jusqu'au périgée, il variera en sens contraire par les mêmes degrés. Cet angle est donc la correction qu'il faut faire au mouvement circulaire, pour avoir le mouvement elliptique du soleil : on le nomme *l'équation de l'orbite*, ou *l'équation du centre*, parce que l'on a coutume d'appeler *équation* en astronomie, les quantités qu'il faut ajouter ou ôter aux résultats moyens, pour les *égaler* aux résultats véritables.

102. Depuis le périgée jusqu'à l'apogée, l'équation du centre doit être ajoutée au moyen mouvement du soleil, pour avoir le mouvement vrai; depuis l'apogée jusqu'au périgée, elle en doit être retranchée. De plus, il y a deux points dans l'orbite, où elle atteint sa plus grande valeur. Le calcul fait voir que si cette valeur est connue, on en peut déduire immédiatement l'excentricité (*). Or il est facile de déterminer ce *maximum* par observation, comme on va le voir.

(*) Voici la formule. Soit E la plus grande équation du centre, En effet, dans ces points, les deux soleils se meuvent pendant quelques instans avec même vîtesse. Le mouvement du vrai soleil est donc alors égal à son moyen mouve-

---

e l'excentricité; que l'on fasse $\frac{E}{63^\circ,661977} = \alpha$, on aura l'excentricité par la série

$$e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3 - \frac{587}{983040}\alpha^5 - \frac{40583}{2642411520}\alpha^7 + \ldots.$$

La quantité α est toujours une fraction très-petite principalement pour le soleil. Si l'on suppose avec l'auteur de la Mécanique céleste, $E = 2^\circ,1409$, au commencement de 1750, on aura

$$\alpha = \frac{2^\circ,1409}{63^\circ,661977} = 0,033629,$$

ce qui donne $\frac{1}{2}.\alpha = 0,016814$.

Le second terme $\frac{11\,\alpha^3}{768}$ est au-dessous de 0,000001, et, par conséquent, insensible; on aura donc, en se bornant au premier,

$$e = 0,016814.$$

C'est le résultat adopté par l'auteur de la Mécanique céleste dans sa Table des élémens des planètes. Si l'on voulait au contraire déterminer les plus grandes équations par l'excentricité, il ne faudrait que retourner la série précédente, et l'on aurait

$$E = 63^\circ,661977 \left\{ 2e + \frac{88}{384} e^3 + \ldots \text{etc.} \right\}$$

ces séries sont faciles à déduire des équations du mouvement elliptique que nous avons donné page 153; il suffit d'exprimer dans ces équations que l'époque pour laquelle on calcule est celle à laquelle le mouvement vrai de l'astre égale son mouvement moyen. On trouvera la démonstration de ces résultats et de toutes ces formules relatives à la plus grande équation du centre, dans une note placée à la fin de ce chapitre.

ment tropique, ou à 1°,0951635. C'est le caractère auquel on reconnaît l'époque de la plus grande équation.

Il y a deux points semblables dans l'orbite; et comme sa figure est symétrique, il est de toute nécessité qu'ils soient placés symétriquement de part et d'autre du grand axe, comme dans la *fig.* 19, où ils sont désignés par S et S'. D'ailleurs avant le passage du soleil à l'apogée, l'équation du centre est additive au mouvement moyen; et après ce passage elle est soustractive : d'où il suit que, dans l'un et l'autre cas, le soleil vrai est plus près de l'apogée que le soleil fictif, comme le représente la *fig.* 19.

On voit donc, par la seule inspection de cette figure, que si l'on pouvait calculer les angles STS', sTs', leur différence serait égale à la somme des angles STs, $S'Ts'$, ou au double de la plus grande équation du centre, car à cause de la symétrie de l'orbite, les deux angles STs, $S'Ts'$ doivent être égaux.

Or, si l'on représente par Ee la ligne des équinoxes, l'angle STS' est facile à-calculer. C'est la différence des longitudes vraies ETS, ETS' du soleil, observées dans les points de la plus grande équation.

L'angle sTs' ne présente pas plus de difficulté. C'est l'angle que le soleil aurait décrit en vertu de son moyen mouvement tropique pendant le même intervalle de tems. Il est égal à la différence des *longitudes moyennes*, en désignant, par cette expression, les longitudes que le soleil aurait eues à ces deux époques, s'il avait marché uniformément depuis son passage au périgée.

Ainsi *lorsqu'on a deux longitudes vraies du soleil observées aux époques de la plus grande équation, l'excès du moyen mouvement tropique, sur le mouvement vrai en longitude, dans le même intervalle, est le double de l'équation du centre.*

103. Dans tout ceci nous n'avons pas eu égard au déplacement progressif de l'orbe solaire. Cependant il influe sur les positions du soleil, par rapport au grand axe de son ellipse. Par l'effet de ce déplacement, la longitude observée à la première époque, devient trop faible; et pour la ramener au même point de l'ellipse auquel elle répondait d'abord, il faudrait lui ajouter l'arc décrit par le périgée, pendant l'intervalle de la première à la seconde observation. Ainsi l'angle *STS'* déduit de la différence des longitudes vraies, est trop fort de la même quantité. Mais la différence des longitudes moyennes qui se calcule d'après le tems écoulé entre les deux observations se trouve augmentée de la même manière et d'une quantité exactement égale. L'erreur disparaît donc du résultat final, qui est la différence des deux précédens, et tout se réduit à la règle très-simple que nous avons donnée.

104. Par exemple, en discutant les observations de M. Maskeline pour l'année 1775, on trouve la longitude du soleil de 13°,9565 pour le 2 avril, à 0^h,0897 tems moyen à Paris (*). Le soleil, à cette époque, était fort près de sa plus grande équation, circonstance indiquée par son mouvement diurne.

Le 30 septembre suivant, à 9^h,9925, la longitude du soleil était 208°,9952, il se trouvait encore fort près de sa plus grande équation.

La différence des deux longitudes, est 195°,0387. Pour avoir celle des deux époques, il faut considérer que du 2 avril à 0^h au 30 septembre à 10^h, il y a 182 jours. La première observation est plus avancée de 0^h,0897; la

(*) Mémoires de Berlin pour l'année 1785.

seconde l'est moins de $0^{j},0075$; ce qui fait en tout $0^{h},0972$ ou $0^{j}00972$ à retrancher de 182 jours. Le reste est $181,99028$; c'est l'intervalle des observations.

Le moyen mouvement tropique, correspondant à cet intervalle, est... $\dfrac{400^{\circ}.181^{j},99028}{365,242264}$

Ou...................	$199^{\circ},3091$
Le mouvement vrai égale.	$195^{\circ},0387$
La différence est........	$4^{\circ},2704$
Ce qui donne pour la plus grande équation du centre.................	$2^{\circ},1352$

Pour que ce résultat fût tout-à-fait exact, il faudrait que les deux longitudes observées, l'eussent été précisément aux époques de la plus grande équation, ce qui est peu probable. Mais l'erreur est toujours fort légère, parce que vers cette époque, le soleil vrai et le soleil moyen se suivent à-peu-près avec la même vîtesse pendant l'intervalle de quelques jours, et l'équation du centre varie très-peu. Cependant pour obtenir un résultat plus exact, on opère ici comme dans les observations du solstice. On calcule, d'après les tables, ce qui manque à la longitude observée pour être celle de la plus grande équation, et c'est ce que l'on peut faire avec beaucoup d'exactitude, d'après la valeur à-peu-près connue de l'excentricité. On calcule également ce qui manque à l'équation du centre à l'instant de l'observation, pour être la plus grande de l'orbite, et c'est encore ce que l'on peut faire avec une très-grande exactitude, quoique l'excentricité ne soit connue qu'à-peu-près. Alors, en ajoutant à la longitude observée la réduction de la longitude, et de plus la réduction de l'équation du centre, on ramène les choses précisément au même état que si l'observation eût été faite immédiatement dans le point de la plus grande équation; et le calcu établi sur les observations ainsi réduites devient tout-à-fait rigoureux (*).

On peut même se dispenser d'avoir égard à la correction

(*) Pour pouvoir calculer la réduction de la longitude, il suffit de savoir calculer l'anomalie qui répond à la plus grande équation du centre; car cette anomalie étant ajoutée à la longitude du périgée, ou retranchée de cette longitude, donnera les deux longitudes du soleil qui correspondent aux points de la plus grande équation. Or cette anomalie peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances de l'excentricité. Soit e l'excentricité, v l'anomalie cherchée; la formule qui la donne est

$$v = 100^{\circ} + 63{,}661977 \left\{ \frac{3}{4} e + \frac{21}{128} e^3 + \frac{3409}{40960} e^5 + \frac{97875}{1835008} e^7 + \ldots \right\},$$

Pour le soleil on a

$$e = 0{,}0168.$$

Le terme $\frac{21}{128} e^3$ sera moindre que 0,000001, et le terme qui en résultera dans la valeur de v, sera au-dessous de 0,0001. Si l'on veut bien se permettre de le négliger, on aura simplement

$$v = 100^{\circ} + 63^{\circ}{,}661977 \cdot \frac{3e}{4},$$

ce qui donne, en mettant pour e sa valeur

$$v = 100^{\circ} + 0^{\circ}{,}8021 = 100^{\circ}{,}8021;$$

c'est l'anomalie du soleil qui répond à la plus grande équation du centre. Elle est plus grande que 100°, mais elle en diffère peu. Pour montrer qu'une valeur très-imparfaite de l'excentricité suffit pour déterminer l'époque de la plus grande équation avec une exactitude presque suffisante, employons la valeur de l'excentricité que nous avons déduite plus haut des observations de M. Maskeline, sans y de la longitude ; car, si l'on transporte la longitude vraie à l'époque de la plus grande équation, il faudra y transporter aussi la longitude moyenne, et pour cela il faudra lui faire subir une réduction pareille à celle de la longitude vraie. Mais non-seulement ces corrections sont pareilles, elles sont encore tout-à-fait égales, puisque vers l'époque de la plus grande équation, le mouvement vrai du soleil est égal au mouvement moyen. Ainsi, comme en définitif il faudra retrancher l'intervalle moyen de l'intervalle vrai, on voit que cette correction commune est parfaitement inutile pour le résultat, et par conséquent il faut se dispenser de la faire.

Ayant la possibilité de ramener les observations à l'époque de la plus grande équation, on sent qu'il ne faut pas se borner à en employer une seule, mais qu'il faut en faire concourir le plus grand nombre possible à la détermination de cet élément important. On réduit ainsi à cette époque plusieurs observations qui la précèdent et qui la suivent de peu de jours. Toutes ces observations donnent l'équation du

---

faire aucune modification : cette valeur était 0,01728. En l'employant au lieu de e dans notre formule, on trouve

$$\nu = 100^\circ + 0^\circ,825t.$$

Ce résultat diffère déja bien peu de celui que donne la valeur exacte de e ; mais pour apprécier l'influence que la différence peut produire sur la plus grande équation déduite des observations, il suffit d'ouvrir des tables du soleil ; on y verra que $2^\circ,2222$ de différence sur l'anomalie près de l'époque de la plus grande équation, ne produisent pas $0^\circ,0012$ sur l'équation du centre, et pour une différence moitié moindre l'erreur est quatre fois plus petite ; la valeur très-imparfaite de l'excentricité que nous avons trouvée, suffisait donc déja pour trouver à moins d'une seconde la plus grande équation du centre, et par suite pour obtenir exactement l'excentricité.

centre, telle qu'on aurait dû l'observer; et une moyenne arithmétique entre tous ces résultats, fait connaître très-exactement sa valeur. C'est à-peu-près de cette manière que M. Delambre l'a trouvée égale à $2°,1394$ pour l'année 1775. On en déduit immédiatement l'excentricité de 0,016803 à la même époque.

105. Les observations que nous venons de discuter, donnent lieu à une remarque intéressante. Les époques qui les séparent sont éloignées l'une de l'autre d'environ 182 jours, c'est-à-dire d'une demi-année. Il faut donc que les rayons vecteurs correspondans, se trouvent à-peu-près en ligne droite; et comme nous savons d'ailleurs qu'ils font des angles égaux avec le grand axe de l'orbite, il faut qu'ils soient à très-peu près perpendiculaires à cet axe. Ainsi l'anomalie qui répond à la plus grande équation diffère peu de l'angle droit. Le calcul fait voir que cette circonstance tient à la petitesse de l'excentricité (*).

106. La comparaison des observations prouve que l'équation du centre diminue à-peu-près uniformément. La théorie de l'attraction a confirmé cette diminution, et en a fait connaître la valeur plus exactement que les observations n'auraient pu faire. Elle est de $0°,0053$ par siècle pour la plus grande équation, et de là on peut aisément conclure la variation correspondante à chaque point de l'orbite (**).

(*) Voyez la note de la page précédente.

(**) Son expression générale est

$$- t.0'',530224 - t^2.0'',0000210474$$

t est le nombre d'années écoulées depuis 1750; et par conséquent l'on doit faire t négatif avant cette époque. V. la Mécanique céleste, tom. III, pag. 157.

107. Ce phénomène suppose une diminution analogue dans l'excentricité de l'orbe solaire, car ces deux quantités sont liées entre elles, et elles doivent croître et décroître en même tems, puisque si l'excentricité était nulle, l'équation du centre serait nulle aussi. La théorie, en montrant cette dépendance, a fait connaître la diminution correspondante de l'excentricité. Elle est de 0,0000416612 par siècle (*), le demi grand axe, ou la distance moyenne étant prise pour unité. C'est environ 1416 lieues en 100 ans, ou 14 lieues par année, en n'évaluant qu'à 34000000 de lieues la distance moyenne du soleil à la terre. On voit que des fractions qui paraissent presque insensibles dans le ciel, deviennent très-considérables quand nous les rapportons à nos mesures ordinaires et usuelles.

108. Si cette diminution était toujours progressive, l'ellipse solaire se changerait à la longue en une circonférence de cercle; et par suite, l'excentricité décroissant toujours, la terre, après un grand nombre de siècles, tomberait enfin sur le soleil. Mais la théorie de l'attraction a prouvé que les variations de l'excentricité et de l'équation du centre, sont périodiques; en sorte qu'après avoir diminué jusqu'à un certain terme, l'excentricité croîtra de nouveau, en reprenant successivement les

(*) On peut facilement la calculer par les formules de la pag. 177, car la diminution séculaire de l'équation du centre étant 0°,00530224, en n'ayant égard qu'à son premier terme, la diminution correspondante de l'excentricité est

$$\frac{1}{2}\ \frac{0{,}00530224}{63{,}661977},$$

ou

$$0{,}0000416612.$$

mêmes valeurs. Elle oscillera ainsi dans des limites dont la période n'est pas encore bien connue, mais que l'on sait pourtant devoir être fort resserrées ; et les choses se maintiendront ainsi éternellement, à moins que quelque cause extérieure et inconnue ne vienne changer l'état actuel du système du monde, et modifier les lois que nous y observons.

NOTE

Sur les rapports de l'Excentricité avec la plus grande équation du Centre.

J'ai promis de démontrer les séries qui donnent la plus grande équation du centre par l'excentricité, ou réciproquement l'excentricité par la plus grande équation du centre. Je le ferai d'autant plus volontiers, que l'on n'a jusqu'à présent, donné la démonstration de ces formules que par le calcul différentiel, ce qui les met hors de la portée des élémens.

Pour cela, il faut partir de cette condition fondamentale, qu'à l'époque de la plus grande équation du centre, le mouvement vrai du soleil égale son mouvement moyen. Cherchons donc l'expression du mouvement vrai dans un point quelconque de l'ellipse, et tâchons d'y introduire cette condition.

A cet effet, rappelons-nous le principe des aires. Soit r le rayon vecteur du soleil à un point quelconque de son ellipse, et α le petit mouvement angulaire de ce rayon vecteur un tems très-court, par exemple, dans une seconde de tems. Le petit secteur elliptique ainsi décrit sera, à fort peu près, exprimé par $\frac{r^2\alpha}{2}$, et cette expression sera d'autant plus exacte, que α sera moindre ; en sorte qu'en diminuant α de plus en plus, nous pourrions rendre l'erreur moindre qu'une quantité quelconque donnée ; or, nous avons trouvé, par les observations, que les surfaces des secteurs elliptiques sont proportionnelles aux tems employés à les décrire ; c'est une des lois fondamentales du mouvement du soleil. Par conséquent, si nous appelons

S la surface totale de l'ellipse, T le tems employé pour la décrire, et t le tems employé à décrire le petit secteur $\frac{r^2\alpha}{2}$, cette proportionnalité nous donnera

$$\frac{r^2\alpha}{2S} = \frac{t}{T}\,; \quad \text{par conséquent,} \quad \alpha = \frac{2St}{r^2T}.$$

Mais en nommant a le demi grand axe de l'ellipse, e le rapport de l'excentricité au demi grand axe, on démontre, dans les élémens, que la surface de l'ellipse est égale à $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. (*Voy.* Géom. analyt., 4e. édit.); ainsi, en substituant cette valeur au lieu de S, nous aurons

$$\alpha = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,t}{r^2T}.$$

α est le mouvement angulaire vrai du soleil pendant le tems t. Si cet astre se mouvait uniformément, son mouvement angulaire serait simplement proportionnel au tems t; et en le nommant ν, on aurait alors

$$\nu = 2\pi\cdot\frac{t}{T}.$$

Nous avons vu que ces deux mouvemens doivent être égaux à l'époque de la plus grande équation du centre; on a donc alors

$$\frac{2\pi.t}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}\,.\,t}{r^2T}.$$

Ou en supprimant les diviseurs communs

$$r^2 = a^2\sqrt{1-e^2},$$

et par conséquent,

$$r = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}.$$

C'est la valeur du rayon vecteur correspondant à la plus grande équation du centre. Puisque t a disparu, nous pouvons lui supposer telle valeur que nous voudrons, le résultat sera le même. Nous le supposerons si petit, que l'erreur de l'évaluation du secteur elliptique, par l'expression $\frac{r^2 \alpha}{2}$, soit moindre que toute quantité donnée, et le résultat sera encore le même; mais alors il s'ensuit que la condition à laquelle nous venons de parvenir pour r n'est pas seulement approchée, elle est rigoureusement exacte.

Il ne reste plus qu'à l'introduire dans les formules qui donnent le tems et l'anomalie. Ces formules sont

$$(1)\ldots nt = u - e\sin u,\quad r = a(1 - e\cos u),\quad \tang\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\tang\tfrac{1}{2}u.$$

Ce sont celles que j'ai déja données dans la page 153; je n'y ai fait d'autre changement que celui de supposer, pour plus de simplicité, $\frac{2\pi}{T} = n$, et de faire $\varpi = 0$, ce qui revient à compter les longitudes v du périgée. Il est visible que nt est le moyen mouvement du soleil depuis le périgée; c'est, par conséquent, son anomalie moyenne; v est son anomalie vraie, et la différence $v - nt$ est l'équation du centre, que nous nommerons généralement Q, pour un point quelconque de l'orbite.

Comme l'équation de l'ellipse entre r et v est

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v},$$

en égalant cette valeur de r à son expression en fonction de u, on aura

$$1 - e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos v}.$$

Cette équation n'est qu'une transformation de la dernière des équations (1), comme il est facile de s'en assurer; mais elle nous sera plus commode pour l'objet que nous nous proposons, et nous l'emploierons de préférence.

Si, dans ces équations, entre r et u, entre r et v, on introduit la valeur $r = a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$, qui a lieu lors de la plus grande équation du centre, on en tire

$$1 + e\cos v = (1-e^2)^{\frac{3}{4}},\quad 1 - e\cos u = (1-e^2)^{\frac{1}{4}},$$

par conséquent

$$(2)\ldots\cos\nu = -\frac{\left\{1-(1-e^2)^{\frac{3}{4}}\right\}}{e}, \quad \cos u = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{e}.$$

Ces équations développées en série par la formule du binome de Newton, donneront les angles u et ν en fonction de l'excentricité; ensuite on en déduira nt en fonction de la même quantité, et la différence $\nu - nt$ sera la plus grande équation du centre.

Si l'on développe les seconds membres des équations (2) en séries par la formule du binome, on voit que le terme indépendant de l'excentricité e disparaîtra, et les termes restans étant divisés par e, les valeurs de $\cos\nu$ et de $\cos u$ seront de l'ordre de l'excentricité, c'est-à-dire, fort petites. De plus la première sera négative, la seconde positive, c'est-à-dire, que ν sera plus grand et u moindre qu'un angle droit. Faisons donc, pour plus de simplicité,

$$\nu = 100^\circ + \nu', \quad u = 100^\circ - u',$$

les équations (2) deviendront

$$\sin\nu' = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}, \quad \sin u' = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{e};$$

et comme l'excentricité e est fort petite, on voit que les angles ν' et u' seront fort petits du même ordre. Si l'on effectue le développement des seconds membres en se bornant aux termes affectés des deux premières puissances de e, qui sont les plus sensibles, on aura

$$\sin\nu' = \tfrac{3}{4}\cdot e + \tfrac{3}{32}\cdot e^3, \quad \sin u' = \tfrac{1}{4}e + \tfrac{3}{32}\cdot e^3.$$

Maintenant, il faut savoir que la valeur d'un petit angle α peut toujours se développer en série suivant les puissances de son sinus, et les deux premiers termes de cette série, qui nous suffiront dans le cas actuel, sont

$$\frac{\alpha}{R} = \sin\alpha + \tfrac{1}{6}.\sin^3\alpha, \quad \text{ou} \quad \alpha = R\left\{\sin\alpha + \tfrac{1}{6}.\sin^3\alpha\right\},$$

R est le rayon qui avait été pris pour unité dans les formules analytiques, et qui se trouve ici reproduit sous sa désignation particulière, afin de donner la facilité d'exprimer l'arc α en parties d'une autre unité. Par exemple, si l'on veut exprimer α en secondes décimales, il faudra exprimer aussi R de la même manière, car les autres termes de l'équation étant des nombres abstraits, il faut que le rapport $\frac{\alpha}{R}$ soit aussi un nombre abstrait; on aura ainsi $R = 636619'',77$; c'est la valeur du rayon en secondes décimales. En appliquant ce développement aux expressions de $\sin \nu'$ et de $\sin u'$, et nous bornant toujours aux troisièmes puissances de e, nous aurons

$$\nu' = R\left\{\tfrac{3}{4}\,e + \tfrac{21}{128}\,e^3\right\},\quad u' = R\left\{\tfrac{1}{4}\,e + \tfrac{37}{384}\,e^3\right\}.$$

Maintenant, puisque l'équation du centre est $\nu - nt$, en mettant pour ν et u leurs valeurs $90 + \nu'$, $90 - u'$, et désignant, pour plus de simplicité, $\nu - nt$ par Q, on aura

$$Q = \nu' + u' + e\cos u';$$

mais ici comme les angles ν' et u' sont exprimés en secondes et non plus en parties du rayon pris pour unité, il faut faire subir le même changement au terme $e\cos u'$, qui se trouve encore ainsi exprimé, c'est-à-dire, qu'il faut le multiplier par le rayon réduit en secondes, et écrire

$$Q = \nu' + u' + R.e\cos u',\ \text{ou bien}\ Q = \nu' + u' + Re - 2Re\sin^2\tfrac{1}{2}u'.$$

Le terme $\sin\frac{1}{2}u'$ sera de l'ordre e; par conséquent, son carré sera de l'ordre e^2, et comme il se trouve déja multiplié par e dans la formule, *on voit que dans la valeur de* $\sin u'$, *on peut se borner* à la première puissance de e, c'est-à-dire, prendre . . . . . . $\sin\frac{1}{2}u' = \frac{1}{2}\sin u' = \frac{1}{8}e$; alors, en substituant dans (Q) cette valeur et celles de ν' et de u' trouvées plus haut, il vient

$$Q = R\left\{2e + \tfrac{11}{48}\,.\,e^3\right\};$$

et si l'on voulait en tirer e par le retour des suites, en faisant $\frac{Q}{R} = \alpha$, on aurait d'abord

$$e = \tfrac{1}{2}\,\alpha - \tfrac{11}{384}\,e^3;$$

et en substituant, dans le second terme, $\frac{1}{2}\alpha$ au lieu de e, ce qui borne le développement aux troisièmes puissances, il vient

$$e = \frac{1}{2}\alpha - \frac{11}{768}\alpha^3 :$$

ce sont les deux premiers termes de la série rapportée dans le texte, page 177.

Si l'on voulait trouver la valeur de nt qui répond à l'époque de la plus grande équation du centre, il suffirait de remarquer que l'on a en général, $Q = \nu - nt$; par conséquent, $nt = \nu - Q$, et les valeurs précédentes de ν et de Q donneraient

$$nt = 100^\circ - R\left\{\frac{5}{4}\cdot e + \frac{25}{384}e^3 + \text{etc.}\right\}.$$

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la plus grande équation du centre; *mais en partant des équations fondamentales du mouvement* elliptique, données au commencement de cette note, et réduisant ces équations en séries, ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, on peut en déduire généralement la valeur de $\nu - nt$, ou l'équation du centre qui convient à chaque valeur de t. On trouve ainsi la formule suivante, dont la démonstration doit être renvoyée à la Mécanique céleste,

$$\nu - nt = R\left\{2e - \frac{1}{4}e^3\right\}\sin nt + R\left\{\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right\}\sin 2nt + \ldots.$$

Les divers coefficiens de cette formule ne sont qu'approchés, car chacun d'eux doit contenir une infinité de termes; mais ceux que nous avons rapportés suffiront presque toujours. Dans les nouvelles tables publiées par le Bureau des longitudes, on trouve la même formule, développée, par M. Oriani, jusqu'aux douzièmes puissances de l'excentricité.

CHAPITRE X.

De l'usage des Équations de condition pour la détermination des élémens.

109. JUSQU'ICI nous avons considéré les élémens de l'orbe solaire, indépendamment les unes des autres; nous avons déterminé chacun d'eux en particulier, d'après les observations sur lesquelles il avait le plus d'influence. En répétant cette opération pour deux époques éloignées, nous avons réconnu, toujours d'après l'observation, les variations séculaires que chaque élément éprouve. Mais dans la réalité ces déterminations isolées ne peuvent être considérées que comme de premières approximations. Car les positions observées de l'astre qui sont ici les données du problême, sont amenées par l'effet simultané de tous les élémens de son orbite, qui y contribuent dans des proportions diverses; et quoique l'on choisisse pour déterminer chaque élément l'époque où l'influence de tous les autres est la moindre possible, cependant on ne peut pas la détruire entièrement, ou en dépouiller les observations, comme cela serait nécessaire pour obtenir celui que l'on cherche séparé de tous les autres. C'est ainsi, par exemple, que le lieu du périgée influe sur la recherche de la plus grande équation, de sorte qu'une petite erreur sur un de ces élémens se reporte nécessairement sur l'autre. Il est donc nécessaire d'avoir égard à cette influence réciproque pour obtenir

avec toute l'exactitude possible les valeurs absolues des élémens, et celles de leurs variations séculaires.

C'est l'analyse qui fait connaître cette dépendance, et les méthodes qu'elle emploie pour la découvrir sont trop élevées, pour que je puisse en parler ici ; mais en supposant la connaissance de ces rapports, on peut aisément concevoir la marche qu'il faut suivre pour y satisfaire, et je l'exposerai d'autant plus volontiers, qu'elle donne en quelque sorte le secret de l'exactitude actuelle des tables astronomiques, et de l'accord qui existe dans leurs résultats.

110. L'esprit de la méthode consiste à corriger les élémens d'un seul coup, et tous à-la-fois par un grand nombre d'observations, tel que 1000 à 1200. Pour cela, on regarde chaque observation comme une donnée que l'on compare aux tables astronomiques déja faites et que celles-ci doivent représenter. Le résultat des tables, comparé avec celui de l'observation fait connaître l'erreur dont les tables sont affectées dans cette partie de leur construction ; il est vrai que cela suppose les observations parfaitement exactes, et elles ne sauraient l'être toutes que par un hasard presque impossible : mais comme la méthode dont on fait usage permet de faire concourir un grand nombre d'observations, il est extrêmement probable que leurs erreurs devront se compenser en grande partie dans les résultats moyens déduits de leur ensemble, pourvu toutefois qu'elles ne renferment point de vice constant et commun, tel que pourrait le produire, par exemple, un défaut de construction dans quelque partie essentielle des instrumens dont on s'est servi, une méthode vicieuse d'observer, ou telle autre cause permanente et toujours dirigée dans le même sens. En supposant les observations exemptes de ces vices, et

on doit toujours s'assurer qu'elles en sont exemptes, on peut attribuer aux tables toute les différences des résultats calculés et des résultats observés. Ces différences sont donc *les erreurs des tables.*

Voyons maintenant d'où peuvent provenir ces erreurs. Ce n'est point de la forme même des tables ; car, dans l'état actuel de l'astronomie, cette forme se déduit de la théorie de l'attraction ; elle n'est que la représentation des formules analytiques, réduites en nombres et décomposées de manière à réduire les calculs à leur plus grand degré de simplicité. C'est donc évidemment sur les élémens des tables que le soupçon doit se porter ; j'entends par élémens le petit nombre de données particulières à chacun des corps célestes ; données qui doivent se tirer des observations, parce qu'elles sont, pour ainsi dire, individuelles ; ce sont les constantes arbitraires qui entrent dans les formules générales ; elles ne peuvent être tirées que de l'expérience.

Si l'on a commis quelque erreur en déterminant ces élémens, s'ils ne sont pas tout-à-fait exacts, il est sensible que cette erreur introduite dans les formules analytiques se perpétuera dans leurs résultats, et produira des différences entre les observations qui sont vraies et les quantités annoncées par les tables qui sont fausses. Or, il est presque impossible que l'on ne commette pas quelque petite erreur sur la première détermination des élémens; car on est d'abord obligé de les déterminer séparément, et cependant ils réagissent les uns sur les autres à cause des rapports par lesquels ils sont unis; l'évaluation de chacun d'eux ne saurait donc être définitivement exacte tant que tous les autres ne sont pas exactement connus. Ainsi, par exemple, le lieu du périgée ne peut pas être exactement connu si l'on ne connaît les dimensions de l'ellipse ; par conséquent l'excentricité à son tour influe sur l'équation du centre, et la recherche de cette dernière exige aussi que l'on connaisse le lieu du périgée. Cette réaction générale des élémens, les uns sur les autres, fait qu'en corrigeant un d'eux isolément d'après une observation, on ne serait pas sûr que cette correction fût juste ; il se pourrait même qu'elle devînt plus nuisible que favorable à l'exactitude, parce qu'en altérant la valeur d'un des élémens, on altère aussi tous ceux qui sont en rapport avec lui, sans connaître l'effet qu'on produit sur eux. Cette méthode de correction sisolées et partielles est donc essentiellement vicieuse. Lorsque chaque élément a été déterminé dans les circonstances qui lui sont les plus favorables, c'est-à-dire, dans celles où il a le plus d'influence, il faut, pour pousser plus loin l'exactitude, trouver un procédé qui permette de les corriger tous simultanément : c'est à quoi l'on parvient par la méthode *des équations de condition*.

Cette méthode repose sur un principe général qui nous a déja servi ; c'est que si plusieurs causes de variations très-petites influent sur un résultat, il suffit de calculer leurs effets isolément, et la somme de ces effets partiels composera l'effet total. C'est ainsi que, pour connaître les changemens de la déclinaison et de l'ascension droite des astres, par suite de la précession des équinoxes et de la variation d'obliquité, on calcule séparément les effets de ces deux causes et on en fait la somme : de même, dans le cas des tables astronomiques, l'erreur totale des tables est la somme des petites erreurs particulières produites par chacun des élémens. On calculera donc l'effet isolé que produirait une petite erreur indéterminée sur chacun d'eux, on en fera la somme, et en l'égalant à l'erreur des tables déduite de leur comparaison avec le ciel, on aura *une équation de condition* entre les erreurs, parce qu'en effet ce sera une condition à laquelle leurs valeurs simultanées devront satisfaire. Cette équation contiendra seulement les premières puissances des variations des élémens, car on peut négliger les autres comme fort petites, et cela est nécessaire pour n'avoir à traiter que des équations du premier degré. Les coefficiens des différens termes de ces équations contiennent les élémens eux-mêmes; mais comme ils sont tous multipliés par les erreurs des élémens qui sont nécessairement fort petites, il n'est pas nécessaire que les valeurs des élémens soient connues d'une manière bien exacte pour réduire les coefficiens en nombres, et les premières évaluations, qui ont servi à former les tables que l'on corrige, suffiront pour cet objet. Le résultat de tous les calculs sera donc une équation numérique et du premier degré entre l'erreur des tables dans chaque observation et les erreurs particulières de tous les élémens.

Si les observations étaient d'une exactitude géométrique, il suffirait de former autant de ces équations qu'il y a d'élémens à corriger. Mais comme elles comportent toujours quelques petites erreurs, on supplée à leur imperfection par leur nombre. On forme beaucoup plus d'équations de condition que l'on n'a d'élémens à déterminer; on en forme autant que l'on a d'observations, puis on les combine successivement de manière à en tirer d'autres qui soient les plus favorables que possible à la détermination de chaque élément, c'est-à-dire, qu'on les ajoute ensemble ou qu'on les soustrait les unes des autres, de manière à en tirer d'autres équations, où le coefficient numérique de l'erreur due à cet élément soit le plus grand possible, tandis que ceux des autres élémens sont les moins considérables. On sent en effet, que l'erreur cherchée étant égale à la somme des autres termes de l'équation, divisés par le coefficient numérique qui la multiplie, plus ce dénominateur sera grand par rapport aux autres termes, plus les erreurs de ceux-ci seront de peu d'importance. D'après cette remarque, le procédé analytique qu'il faut employer pour obtenir directement l'équation la plus favorable à chaque élément, se présente de lui-même. Disposez toutes les équations de manière que le coefficient de l'erreur due à cet élément soit positif dans toutes. Cela est toujours possible en changeant convenablement les signes de tous les termes qui les composent; puis faites la somme de toutes les équations ainsi préparées. Dans cette somme l'erreur de l'élément que vous avez favorisé a le plus grand coefficient possible, puisqu'elle est multipliée par la somme de tous les coefficiens particuliers qui l'affectent, au lieu que les coefficiens des autres erreurs se sont en partie ajoutés et en partie soustraits, suivant la disposition fortuite de leurs signes, de manière qu'il a dû s'en compenser une partie. Quand on a formé autant de ces équations spéciales que l'on a d'erreurs à déterminer, on détermine chacune de celles-ci par le procédé ordinaire de l'élimination. Il est facile de voir que, dans cette opération, chacune des inconnues conserve, dans son équation, l'avantage que son grand coefficient lui donne. Car si l'on prend la valeur d'une de ces inconnues, de x, par exemple, dans l'équation où elle est favorisée, les coefficiens numériques de cette valeur seront tous des fractions moindres que l'unité. Par conséquent, si on les substitue dans toutes les autres équations, ils affaibliront le coefficient que x avait dans chacune d'elles: et ainsi les termes qui en résulteront ne pourront pas détruire la supériorité qu'avait dans chaque équation le coefficient d'une des autres inconnues. On doit parvenir par ce procédé à connaître avec la plus grande exactitude les corrections simultanées des élémens, pour l'époque moyenne à laquelle se rapportent les observations dont on a fait usage. Ces corrections étant connues, on les applique aux élémens précédemment adoptés, et on a ainsi leurs valeurs définitives. En comparant ces valeurs à celles que l'on obtient par des calculs semblables pour une autre époque éloignée de la première, on parvient à trouver les variations très-lentes que les élémens éprouvent, et auxquelles on a donné le nom d'*inégalités séculaires* (*).

(*) Comme cette méthode est très-importante en astronomie, je l'appliquerai à un exemple.

Supposons que l'on ait un grand nombre d'observations du soleil que l'on puisse regarder comme très-exactes. On en déduira les longitudes du soleil, et en les comparant à celles que donnent les tables, les différences seront les erreurs de ces tables. Je les représenterai par C, C', C''.

Comme les perturbations peuvent être supposées exactement connues par la théorie, et qu'on a dû en tenir compte dans les calculs, les erreurs restantes doivent résulter de toutes celles que l'on a pu faire sur les élémens elliptiques; il faut y démêler ce qui appartient à chacun d'eux.

Considérons d'abord le lieu du périgée. On calculera l'effet qu'une *minute de changement dans sa position* produirait sur la longitude. Pour cela il faut avoir des tables du soleil. Prenons celles de M. Delambre, que le Bureau des longitudes a publiées, et qui sont calculées en mesures sexagésimales.

Dans ces tables on a donné au périgée une certaine position, d'après laquelle on a calculé les anomalies, en retranchant la longitude du périgée de la longitude du soleil. Par conséquent, une minute de changement sur le lieu du périgée, change d'une minute l'anomalie correspondante à chaque longitude. Supposons donc que la longitude qui a donné l'erreur C réponde, par exemple, à 198° sex. d'anomalie, comptée du *périgée*. Ce sera *six signes et dix-huit degrés*, ou 6^s, 18°, suivant la manière de compter des astronomes; chaque signe valant 30° sexagésimaux. On trouvera dans la table de l'équation du centre

La méthode que nous venons d'expliquer a été imaginée par le célèbre astronome Tobie Mayer, qui en a fait le premier usage pour la formation de ses tables de la lune. Elle a été depuis employée dans toutes les déter-

---

qu'à ce point de l'orbite, 10 minutes d'augmentation sur l'anomalie, produisent un accroissement de 18',8 sur l'équation du centre, d'où il suit qu'une minute produit 1'',88; et comme, à ce point, l'équation du centre $S'Ts'$, *fig.* 19, est soustractive, la longitude ETS' se trouve diminuée de la même quantité. Or, augmenter l'anomalie ou l'angle obtus ETs' d'une minute, c'est reculer le périgée d'autant, puisque la longitude ETS' du soleil doit rester la même. Par conséquent, la diminution d'une minute sur la longitude du périgée, produit, à ce degré d'anomalie, 1'',88 de diminution sur la longitude vraie du soleil.

On calculera de même l'effet d'un changement arbitraire dans la valeur de la plus grande équation du centre. Pour faciliter cette recherche, il convient de choisir la diminution séculaire 17'',18 (0°,0053) dont l'influence se trouve toute calculée dans la même table pour chaque degré d'anomalie. On supposera donc que la plus grande équation soit augmentée de 17'',18.

Il en résultera, à 198° d'anomalie, une augmentation de 5'',10 sur l'équation du centre, ce qui donnera encore 5'',10 de diminution sur la longitude.

Enfin, il pourra y avoir aussi quelque erreur sur la longitude moyenne du soleil indiquée par les tables pour un instant donné, par exemple, pour le premier janvier à minuit. Cette longitude moyenne, que les astronomes appellent *l'époque*; est aussi un des élémens que l'on emploie pour le calcul des observations relatives à un autre instant donné; car on part de là pour calculer quelle sera, pour ce nouvel instant, la longitude moyenne du soleil, et à cet effet, on ajoute à *l'époque* le moyen mouvement du soleil, depuis le premier janvier à minuit, jusqu'à l'instant de l'observation que l'on calcule. Il ne peut pas y avoir d'erreur dans cette réduction, parce que le moyen mouvement est parfaitement bien connu; c'est donc sur la longitude moyenne qui sert d'origine, c'est-à-dire, sur minations astronomiques où l'on a réussi à obtenir une grande exactitude, et il faut convenir qu'elle seule peut leur donner la dernière perfection. Cette méthode serait également applicable aux recherches de la physique et de

---

l'époque, que le soupçon doit se porter; supposons qu'elle ait besoin d'être augmentée d'un nombre z de secondes, en sorte que *son erreur*, exprimée en secondes, soit $+z$.

Désignons aussi par $+x$ l'augmentation qu'il faut faire à la longitude du périgée, et par $+y$ celle qu'il faut faire à la plus grande équation du centre; ces corrections étant aussi exprimées en secondes comme la première; et calculons l'effet qui en va résulter sur la longitude déduite des tables.

Puisqu'un accroissement d'une minute sur la longitude du périgée, en produit un de $1'',88$ sur la longitude, x secondes donneront $\frac{x \cdot 1'',88}{60}$ ou $x \cdot 0,3133$, car ces changemens étant très-petits, peuvent, sans erreur sensible, être supposés proportionnés entre eux.

De même, l'augmentation y de la plus grande équation donnera, dans l'expression de la longitude, la correction,

$$\frac{-y \cdot 5'',10}{17'',18} \text{ ou} -y \cdot 0,\ 2969.$$

Et comme les tables, si elles étaient parfaitement corrigées, devraient satisfaire aux observations, on aura

Longitude observée $=$ longitude calculée $+ x \cdot 0,3133 - y \cdot 0,2959 + z$.

Or, on a trouvé

$$\text{Longitude observée} - \text{longitude calculée} = C.$$

On aura donc l'équation

$$C = z + x \cdot 0,3133 - y \cdot 0,2969;$$

la chimie ; en général, elle peut servir toutes les fois qu'il s'agit de représenter un grand nombre d'observations par des formules analytiques dont la forme est donnée : mais, jusqu'ici, cette méthode si universellement utile étant

---

qui sera une *équation de condition*, entre les trois corrections x, y, z.

Si C était connu avec une rigueur géométrique, trois équations semblables suffiraient pour déterminer ces trois inconnues. Mais les erreurs inévitables des observations exigent qu'on en emploie un plus grand nombre. On les combine, comme nous l'avons enseigné dans le texte, de manière à en tirer trois équations où les coefficiens de x, y, z soient successivement aussi grands que possible comparativement à ceux des autres inconnues. Ces trois équations résultantes donnent les trois inconnues avec d'autant plus d'exactitude, qu'on a employé un plus grand nombre d'observations. On rapporte leurs valeurs au milieu de l'intervalle que les observations comprennent, ce qui suppose qu'elles ne sont pas trop éloignées les unes des autres, et que le moyen mouvement est assez exactement connu. Car cette connaissance est indispensable pour transporter les longitudes moyennes, depuis l'instant qui sert d'*époque* aux tables, jusqu'à ceux des différentes observations. Dans l'état actuel de l'astronomie, ces suppositions sont plus que permises; mais s'il s'agissait d'une nouvelle planète où l'on craindrait de les admettre, on introduirait, au lieu de z, une quantité variable

$$a + nt,$$

n étant la correction du mouvement annuel, et t le nombre d'années écoulées depuis une époque fixe, mais arbitraire que l'on prendrait pour origine.

En déterminant les valeurs de x, y, z pour deux époques éloignées, par exemple, vers 1756, par les observations de Bradley, et vers 1800 par celles de Maskeline, on verra si les moyens mouvemens du soleil, le déplacement de l'apogée et les variations de la plus grande équation, supposés dans les tables, s'accordent avec l'expérience.

En combinant les équations de condition, comme nous venons de restée entre les mains des savans, il ne paraît pas qu'on en ait jamais parlé avant nous dans aucun ouvrage élémentaire.

On peut encore combiner les équations de condition, d'après un autre principe qui a été employé pour la première fois par M. Legendre, et qu'il a nommé le principe des moindres carrés. Voici en quoi il consiste.

Si l'on cherchait à déterminer la position d'un point de l'espace, et que plusieurs observations eussent donné pour cette position diverses valeurs peu différentes les unes des autres, comment déterminerait-on la position moyenne? Ce qui se présente de plus simple et de plus naturel, serait de chercher une position qui s'écartât le moins possible, dans tous les sens, des positions observées; c'est-à-dire une position telle que la somme des carrés de ses distances aux positions observées fût la plus petite possible. Le problême est absolument pareil, quand on veut combiner plusieurs observations de quelque genre que ce soit. Les distances des points sont les différences des résultats particuliers au résultat moyen. Puisqu'il est

---

le dire, il se présente quelquefois un cas où l'on pourrait être embarrassé. C'est celui ou deux des inconnues auraient dans toutes les équations des coefficiens de même signes et proportionnels entre eux. Alors, en effet, on ne pourrait favoriser une de ces inconnues sans favoriser aussi l'autre. Dans cette circonstance, il n'y a qu'à considérer l'ensemble de ces deux termes comme une seule inconnue que l'on aura soin d'éliminer; puis quand les autres inconnues seront déterminées, on mettra leurs valeurs dans les premières équations de condition, tout y sera connu alors, excepté la somme des deux termes que l'on a réunis en un seul. Cela fait, on partagera la somme des équations de condition en deux groupes, à-peu-près également, on aura ainsi deux équations pour déterminer chaque terme en particulier.

impossible de les anéantir toutes, il faut choisir le résultat moyen, de manière que la somme des carrés de ces différences soit un *minimum.*

L'analyse fournit pour cela une règle fort simple. *Pour former l'équation du* minimum *par rapport à une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chacune des équations de condition par le coefficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faire une somme de tous les produits.* Si l'on effectue cette opération successivement sur chacune des inconnues, on en tirera pour chacune d'elles une équation différente. On aura donc ainsi autant d'équations que d'inconnues, et ces équations seront toutes du premier degré. On déterminera donc toutes les inconnues par le procédé ordinaire de l'élimination.

Cette méthode qui consiste en quelque sorte à prendre le centre de gravité des observations que l'on compare, a cela d'avantageux qu'elle conduit d'une manière directe et sans aucun tâtonnement aux équations résultantes, qui doivent donner les plus petites valeurs aux inconnues du problême. M. Laplace est parvenu à démontrer par la théorie des hasards, qu'elle devient nécessaire, dans le cas où l'on veut prendre le milieu entre un grand nombre d'observations d'un même résultat, obtenues par des moyens différens, par exemple, par des observations au mural et au cercle. Dans ce cas, elle est la seule que le calcul des probabilités permette d'employer pour avoir la plus grande chance possible d'exactitude. Son emploi forcé dans cette circonstance, et la sûreté du principe sur lequel elle repose, font penser qu'il convient de l'employer dans toutes les recherches de résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations, et qu'à cet égard il faut même lui donner la préférence sur la méthode, de Mayer qui a été jusqu'à présent la seule employée par les astronomes. Malheureusement elle exige beaucoup plus de calculs numériques pour la formation des équations spécialement relatives à chaque inconnue. Mais cet inconvénient réel ne doit pas empêcher d'en faire usage dans les recherches délicates où l'on aura besoin de la dernière exactitude (*).

Lorsqu'un art, une science ou une invention quel-

(*) Comme le principe des moindres carrés peut être d'une application très-utile dans beaucoup de circonstances, je vais donner la démonstration du procédé analytique auquel il conduit : pour cela, nommons x, y, z, etc., les corrections des élémens qui sont les inconnues du problême ; les diverses équations de condition seront en général de la forme

$$0 = a + bx + cy + dz + \ldots \text{ etc.},$$

en passant dans un seul membre tous les termes qui les composent; a, b, c, d, seront des coefficiens numériques déterminés. Si toutes ces équations pouvaient être satisfaites exactement par les valeurs de x, y, z, leurs premiers membres se réduiraient à zéro comme ils le doivent, lorsqu'on y substituerait pour x, y, z ces valeurs. Mais comme cette condition est impossible à remplir, vu le nombre des équations qui excède celui des inconnues, il y en aura toujours un certain nombre qui ne seront satisfaites qu'à-peu-près, et le plus souvent toutes seront dans ce cas. Ainsi, en représentant par E ce qui ne se détruit point après la substitution de x, y, z . . ., E sera l'erreur que les corrections ne peuvent anéantir ; et si l'on adopte une notation semblable pour toutes les équations de condition employées à la détermination de x, y, z, on aura

$$E = a + bx + cy + dz + \ldots . \text{ etc.},$$
$$E' = a' + b'x + c'y + d'z + \ldots . \text{ etc.},$$
$$E'' = a'' + b''x + c''y + d''z + \ldots . \text{ etc.},$$

et ainsi de suite : maintenant la somme des carrés de ces erreurs sera conque est arrivé presque tout-à-coup au plus haut degré de sa perfection, rien n'est plus intéressant que d'examiner les causes secrètes qui ont amené ces progrès. Pour l'astronomie observatrice, ces causes peuvent se réduire

---

$E^2 + E'^2 + E''^2 +$ etc., et en la représentant par S on aura

$$S = \{a + bx + cy + dz + \ldots\}^2 + (a' + b'x + c'y + d'z + \text{etc.})^2 + \text{etc.},$$

d'après le principe des moindres carrés, les valeurs de x, y, z doivent être choisies de manière que cette somme soit la plus petite possible. Il s'agit de les déterminer de manière que cette condition soit remplie.

Pour cela, supposons le problême résolu, et admettons qu'en effet x, y, z aient été déterminées de manière à satisfaire à cette condition. Il faudra qu'en donnant une autre valeur à une de ces inconnues, à x, par exemple, toutes les autres restant les mêmes, la somme S devienne plus grande qu'elle ne l'était d'abord. Exprimons cette condition analytiquement. Soit $x + x'$ la nouvelle valeur de x que l'on emploie; en la substituant au lieu de x dans l'expression précédente, on aura la nouvelle valeur de S qui en résulte et que je représenterai par S', ce sera

$$S' = \{bx' + a + bx + cy + \ldots\}^2 + \{b'x' + a' + b'x + c'y + \ldots\}^2 + \ldots\ldots$$

ou en développant les carrés compris entre les parenthèses

$$S' - S = 2x'\{b(a + bx + cy + \ldots) + b'(a' + b'x + c'y + \ldots) + \text{etc.}\}$$
$$+ x'^2\{b^2 + b'^2 + b''^2 + \text{etc.}\}.$$

Pour que S' surpasse S, il faut que la somme des termes du second membre soit toujours positive quel que soit x', et soit qu'on le prenne positif ou négatif; or, comme l'un de ces termes est multiplié par x', et le second par x'^2, si l'on prend pour x' une fraction moindre que l'unité, le second terme se trouvera plus affaibli que le premier, parce que le carré d'une fraction moindre que l'unité est toujours plus petit que cette fraction elle-même; et comme rien n'empêche de prendre x' aussi petit que l'on voudra, il s'ensuit que, à trois principales, l'extrême perfection des instrumens, la détermination des résultats particuliers par le concours d'un grand nombre d'observations voisines réduites par le calcul aux mêmes circonstances, enfin l'emploi des équa-

---

quels que soient les coefficiens numériques a, b, c, a', b', c', et les valeurs des inconnues x, y, z; on peut toujours faire en sorte que le terme affecté de x' l'emporte sur le terme affecté de x'^2; alors le signe du second membre dépendra donc absolument de celui de son premier terme. Or, quand on en sera venu à ce point, si l'on s'avise de changer $+x'$ en $-x'$, on changera donc aussi le signe du second membre, c'est-à-dire, que s'il était positif avec $+x'$ il deviendra négatif avec $-x'$, et réciproquement. Mais par une conséquence nécessaire, il y aura un des cas où S' surpassera S, et un autre où il sera moindre que S. Ce résultat est contraire à la supposition que S est un *minimum*; ainsi pour que cette supposition soit vraie, il faut que le changement de signe du second membre en plus et en moins soit impossible, quelque valeur et quelque signe que l'on veuille donner à x'. Il n'y a pour cela qu'un moyen, c'est de rendre nul le coefficient de x', afin de faire disparaître ce terme qui seul occasionne le changement de signe que l'on veut éviter. Pour cela, il faut qu'on ait

$$o = b(a + bx + cy + \ldots) + b'(a' + b'x + c'y + \ldots) + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, que les inconnues x, y, z doivent être déterminées de manière que cette condition soit remplie, alors, en effet on aura

$$S' = S + x'^2(b^2 + b'^2 + b''^2 \ldots)$$

et quelque valeur que l'on veuille donner à x', S' sera plus grand que S.

L'équation à laquelle nous venons de parvenir peut être mise sous la forme suivante qui est plus simple

$$(1) \ldots\ldots \quad o = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bd + \text{etc.},$$

en désignant par le signe $\int$ une somme de produits, telle que

$$\int ab = ab + a'b' + \ldots \text{etc.} \qquad \int bc = bc + b'c' + \ldots \text{etc.}$$

tions de condition pour la correction simultanée des élémens, en ayant égard à leur dépendance réciproque. Ces trois principes de perfectionnement seront également applicables à toutes les sciences d'observations dans lesquelles on parviendra à établir, par le calcul, les rapports des faits entre eux.

---

et ainsi de suite. On voit que cette équation en x, y, z, se déduit des équations de condition précisément suivant les règles que nous avons indiquées dans le texte.

Nous n'avons considéré qu'une des inconnues ; chacune d'elles, traitée de la même manière, conduirait à une condition analogue ; par exemple, en considérant y, la condition que S soit aussi un *minimum* relativement à cette inconnue, exigerait qu'on eût entre x, y, z la condition

$$(2) \ldots\ldots \quad 0 = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int cd + \text{etc.}$$

de même, la condition relative à z serait

$$(3) \ldots\ldots \quad 0 = \int ad + x\int bd + y\int cd + z\int d^2 + \text{etc.}$$

En appliquant successivement ce principe à toutes les inconnues x, y, z, on en tirera autant d'équations qu'il y a d'inconnues, et par l'élimination on pourra déterminer chacune d'elles.

Les valeurs de x, y, z, déterminées de cette manière seront telles que si l'on fait quelque changement en plus ou en moins à une quelconque d'entre elles, la somme des carrés des erreurs qui en résulteront sera plus grande qu'elle ne l'était auparavant. Ces valeurs ainsi déterminées seront donc propres à représenter le mieux possible les observations puisqu'elles donnent le système d'erreurs qui s'en écarte moins que ne ferait tout autre système.

CHAPITRE XI.

Construction des Tables du Soleil.

111. Les élémens de l'ellipse solaire étant bien déterminés, il ne reste plus qu'à construire les tables, c'est-à-dire à calculer d'avance pour chaque jour le lieu du soleil. L'analyse fournit pour cela des méthodes directes et rigoureuses, qui font connaître la valeur du rayon vecteur et de la longitude en fonction du tems, à partir d'une époque et d'une position données.

Il n'est pas possible d'exposer ici les calculs qui conduisent à ces valeurs générales ; je vais seulement donner une idée de leur forme et de l'usage qu'on en fait.

Nous avons reconnu précédemment que le mouvement du soleil peut être considéré comme composé d'un mouvement circulaire qui en fait la partie principale, et d'une correction dépendante de l'excentricité.

D'après cela, on conçoit que l'expression analytique du rayon vecteur doit être composée de deux parties ; la première constante, et égale au demi grand axe de l'ellipse, ou à la *distance moyenne* du soleil à la terre ; la seconde variable, et représentant les accroissemens ou les diminutions de cette distance dans les divers points de l'orbite.

De même, l'expression de la longitude doit contenir une partie proportionnelle au tems, et relative au mouvement circulaire : c'est la longitude moyenne ; avec une correction dépendante du mouvement elliptique, et qui est l'équation du centre.

Ces corrections du rayon vecteur et de la longitude, sont périodiques; et se renouvellent, par les mêmes degrés, à chaque révolution annuelle. L'analyse les représente par des sinus et des cosinus d'angles, qui croissent proportionnellement au tems. En effet, ces quantités sont également périodiques; car le sinus d'un angle, d'abord nul, quand l'angle est nul, croît ensuite jusqu'à 100°, où il atteint son *maximum*; de là, décroît de même jusqu'à 200°; ou il devient nul de nouveau, puis passe au-dessous du diamètre, où il reprend successivement les mêmes valeurs, en sens contraire. Les cosinus ont une marche analogue. Ces quantités sont donc propres à représenter des valeurs périodiques, et la théorie de l'attraction a fait voir qu'en effet l'on peut exprimer de cette manière toutes les inégalités des mouvemens célestes. L'expérience seule aurait conduit au même résultat, mais par une voie plus lente; car M. Lagrange a prouvé que si plusieurs quantités se suivent dans une marche régulière, on peut toujours en découvrir la loi; mais il faut pour cela que les observations soient tout-à-fait exactes, ou du moins qu'elles ne comportent que de très-petites erreurs (*). La théorie du mouvement elliptique fournit donc le moyen de prévenir, en cela, les observations, et d'anticiper sur la suite des tems.

Enfin, comme les corrections du mouvement circulaire du soleil sont toutes fort petites, puisqu'elles dépendent de l'excentricité, l'analyse les donne en *série*, c'est-à-dire, qu'elles sont exprimées par une suite de

---

(*) Mémoires de l'Académie, pour 1772, pag. 513.

termes, ordonnés suivant les puissances de l'excentricité, et par conséquent de plus en plus petits. Ces formules, fondées sur la théorie de l'attraction universelle, sont démontrées dans le premier volume de la Mécanique céleste. Nous ne pouvons que renvoyer à ce grand ouvrage.

Les valeurs absolues du rayon vecteur et de la longitude dépendent des élémens de l'ellipse, et comme ces élémens changent peu-à-peu avec le tems, en raison des inégalités séculaires, les tables construites sur leurs valeurs actuelles ne pourraient servir que pendant un tems assez court. Pour éviter cet inconvénient, on a joint aux tables les corrections que la variabilité des élémens doit y introduire à la longue, et de cette manière elles peuvent s'étendre à un grand nombre de siècles avant et après l'époque pour laquelle elles sont calculées.

112. En comparant les résultats de ces tables avec de longues suites d'observations très-exactes, on a reconnu que le mouvement elliptique du soleil ne suffit pas tout-à-fait pour les représenter. On a découvert ainsi dans ce mouvement de petites inégalités que l'on n'avait pas apperçues d'abord. Ce sont *les perturbations*. La théorie de l'attraction en a fait connaître les lois et même a donné la grandeur de quelques-unes. On a calculé les valeurs des autres par la méthode des équations de condition, et on joint ces résultats aux tables, comme autant de corrections à faire au mouvement elliptique.

113. On a donc ainsi toutes les données et toutes les formules nécessaires pour calculer la position actuelle du soleil dans son orbite à un instant quelconque donné. Il ne reste plus qu'à réduire ces calculs en tables, qui permettent de les exécuter facilement. C'est ce qui peut se faire de plusieurs manières plus ou moins commodes;

mais l'expérience a donné sur cela des règles dont on s'écarte peu. Ainsi, pour compléter les notions précédentes, il ne me reste plus qu'à faire connaître en peu de mots la construction de ces tables et la manière d'en faire usage.

Leur principe fondamental consiste à présenter d'abord les valeurs moyennes des principaux élémens toutes calculées pour le commencement de chaque année, et à donner ensuite les moyens d'en déduire pour un autre instant quelconque les nouvelles valeurs, soient vraies soient moyennes, de ces élemens. Dans tous ces calculs, la première chose à connaître, c'est la longitude moyenne du soleil, et celle de son périgée ou de son apogée pour l'instant qui sert d'origine aux tables. Car de là on peut conclure les valeurs de ces quantités pour un instant quelconque, et par suite, en vertu des lois du mouvement elliptique, on peut calculer l'anomalie, l'équation du centre, la longitude, l'ascension droite et la déclinaison du soleil. Aussi la longitude moyenne et la position du périgée ou de l'apogée pour l'origine de chaque année, sont-elles les premières données que les tables présentent, et ces valeurs initiales s'appellent l'*époque des tables astronomiques.*

114. Dans les tables publiées par le Bureau des longitudes de France, on a pris pour origine le 1er. janvier de chaque année, à minuit moyen au méridien moyen de Paris. Et les époques sont calculées pour cet instant.

Mais dans les anciennes tables astronomiques, où l'on s'embarrassait peu de se conformer à l'usage civil, l'origine est différente selon les années. C'est le 31 décembre à midi, tems moyen, pour les années communes, et le 1er. janvier à midi, tems moyen pour les années bissextiles. Cette différence a été introduite pour pouvoir transporter facilement d'une année à l'autre les lieux moyens calculés pour les différens jours de chaque mois. En effet, supposons-les calculés pour une année commune, et qu'on veuille les transporter à une année bissextile, pour laquelle on ait conservé la même époque du 31 décembre. Il n'y aura rien à changer dans les deux premiers mois, parce que les lieux moyens du soleil redeviennent les mêmes, aux mêmes jours, après une année. Mais à *la fin de février de l'année bissextile*, on devra ajouter le mouvement pour un jour, à cause du jour intercalaire qui se place à cette époque. La longitude du soleil se trouvera donc augmentée de cette quantité, et cette augmentation se perpétuant jusqu'à la fin de l'année, il faudra pour employer les résultats des années précédentes, les avancer tous, d'un jour, pendant les dix derniers mois. Au lieu de cela, si l'on prend le premier janvier pour l'époque de l'année bissextile, les mouvemens moyens de l'année précédente seront trop forts d'un jour pendant les deux premiers mois, et il faudra les diminuer de cette quantité pour les adapter à l'année bissextile; mais à la fin de février, l'addition du jour intercalaire supplée à ce retard, et l'on est d'accord pour le reste de l'année. Cette différence d'époques est donc utile pour simplifier le transport des tables d'une année à l'autre. C'est pourquoi on l'avait généralement adoptée. Mais le Bureau des longitudes a considéré qu'il est plus avantageux encore de rendre tous les calculs uniformes. On obtenait cet avantage en plaçant toujours l'époque au commencement de l'année, et c'est ce qu'on a fait dans les nouvelles tables. Il en résulte une colonne pour les années communes, une pour les années bissextiles; cela n'a aucun inconvénient.

Comme l'instant où l'on compte midi n'est pas le même dans les pays qui n'ont pas la même longitude, il fallait, pour lier les observations entre elles, convenir d'une époque commune, qui fût fixée par un phénomène astronomique instantané, et qui servît partout d'origine au tems moyen. On a choisi pour cela, comme nous l'avons dit plus haut, l'instant du passage du soleil au périgée ou à l'apogée de son orbite. C'est l'apogée que l'on emploie dans les anciennes tables qui sont encore les plus communes; c'est pourquoi, nous prendrons ce cas pour exemple.

115. Lorsque l'instant du passage du soleil à l'apogée est connu, ainsi que sa longitude comptée de l'équinoxe moyen pour le même instant, on ajoute à cette longitude moyenne le moyen mouvement du soleil, jusqu'au 31 décembre ou au 1er. janvier à midi, et l'on a la longitude moyenne du soleil pour cette époque, ou l'*époque des tables*. En effet, lorsque le soleil est apogée ou périgée, son lieu vrai dans l'ellipse, coïncide avec son lieu moyen, et la longitude vraie est la même que la longitude moyenne.

En ajoutant, jour par jour, à ce résultat le moyen mouvement diurne du soleil, on aura la longitude moyenne à midi pour tous les jours de l'année.

116. Par exemple, suivant les observations de M. Maskeline, calculées par M. Delambre, le soleil a passé à son apogée le 30 juin 1780 à $0^h,20'.24''$, tems moyen à Paris (*). Sa longitude exprimée en degrés sexagésimaux,

---

(*) J'emploie ici les anciennes divisions du cercle et du jour, parce qu'elles sont encore employées dans toutes les tables astronomiques dont cet article suppose l'usage; ainsi les heures y sont comptées à partir de midi. Quant aux données dont j'ai fait usage, on peut aisément les déduire de celles que j'ai rapportées plus haut relativement au périgée. J'ai dit que d'après les observations de M. Maskeet rapportée à l'équinoxe moyen, était alors égale à $99°8'55'',8$. C'était donc en même tems sa longitude moyenne.

Depuis cet instant jusqu'au 31 décembre 1780 à midi moyen, il s'est écoulé $183^j 23^h 39' 36''$; qui, à raison de 360° pour une année tropique, donnent $\frac{360° \, . \, 183,985833}{365,242564}$ ou $181°20'42'',4$ pour l'accroissement de la longitude moyenne dans cet intervalle.

Ajoutant ce résultat au précédent, on a $280°29'38'',2$.

C'est l'époque des anciennes tables du soleil pour l'année 1781,

L'apogée s'est déplacé dans cet intervalle d'une quantité égale à $\frac{61'',9 \, . \, 183,985833}{365,242264}$ ou $31'',2$. Il faut ajouter ce

---

line et les calculs de M. Delambre, le soleil avait passé au périgée le 29 décembre 1780 à $6^h,4402$ de tems moyen décimal compté de midi au méridien de Paris, et que sa longitude, relativement à l'équinoxe moyen, était alors $310°,17491$ de la division décimale. Puisque la longitude du périgée augmente annuellement de $0°,01910668$, elle a dû augmenter en une demi-année de la moitié de cette quantité, ou de 0,009553. Retranchant cette variation de la longitude du périgée *le 29 décembre*, *on aura la longitude qu'il a dû avoir six* mois auparavant; ce sera $310°,16538$; par conséquent, la longitude de l'apogée à la même époque aura pour valeur $110°,16536$ ou $99°.8'.55''.8$ en mesures sexagésimales. C'est la valeur que nous avons adoptée pour la longitude de l'apogée, le 30 juin 1780.

Quant à l'époque précise où le soleil a passé par ce point, on l'obtiendra de même en partant de l'époque de son passage au périgée le 29 décembre 1780, à $6^h,4402$ de tems moyen au méridien de Paris; car il suffit d'ôter de cette époque une demi-révolution anomalistique, c'est-à-dire, $182^j \, 629855$; et on trouve, pour différence, le 30 juin à $0^j,014165$, ou $0^h.20'.23''.86$ en mesures sexagésimales, comme nous l'avons adopté.

résultat à la longitude de l'apogée au 30 juin 1780. On aura ainsi $99.9'27''$, pour cette longitude. Cette quantité se trouve ainsi toute calculée dans les tables.

117. Quand on connaît l'époque pour une année, il est facile de l'obtenir pour l'année suivante. Il suffit d'ajouter le moyen mouvement du soleil pour 365 jours, si l'année à laquelle on veut transporter l'époque est une année commune, et pour 366, s'il s'agit d'une bissextile. Dans le premier cas, c'est $359°45'40'',4$; dans le second, c'est $360°44'48'',4$. En rejetant du résultat les circonférence entières, la somme est l'époque cherchée (*). On trouve ces époques toutes calculées dans les tables, pour un grand nombre d'années d'avance.

118. Supposons maintenant que l'on demande le lieu elliptique du soleil pour le 28 janvier 1781 à midi, tems moyen à Paris. L'intervalle de cet instant à l'époque est 28 jours, qui donnent $\dfrac{360°.28}{365,242264}$ ou.. $27°\ 35'\ 53'',2$.

Pour l'accroissement de la longitude moyenne.

Ajoutons la longitude de l'époque, qui est. . . . . $280°\ 29'\ 38'',2$.

(*) Cela se voit tout de suite en se rappelant que le *mouvement séculaire* du soleil, c'est-à-dire son mouvement pour 100 années juliennes de 365,25, est égal à 100 circonférences $+\ 45'.45''$ sex.; car, en prenant la centième partie de cette quantité, on a $360°.0'.27''.45$ pour le mouvement du soleil en 365j,25; d'où, retranchant $14'.47''$ pour le mouvement en $\frac{1}{4}$ de jour, à raison de $59'.8''$ en un jour entier, il reste $359°.45'.40''.4$ pour le mouvement en 365 jours comme nous l'avons adopté. En ajoutant $59'.8''$, on aura le mouvement pour un jour de plus, c'est-à-dire pour 366 jours; ce sera $360°.44'.48''.4$, comme nous l'avons employé.

On a la longitude moyenne du soleil pour l'instant demandé, égale à. . .	308° 5′ 31″, 4.

Venons maintenant aux inégalités.

La longitude de l'apogée à l'époque était	99° 9′ 27″, 0.
Son mouvement pour 28 jours est. . .	4″, 8.
Longitude de l'apogée à l'instant demandé.	99° 9′ 31″, 8.
Si l'on retranche ce résultat de la *longitude moyenne*, on aura la distance moyenne du soleil à l'apogée de son orbite, c'est-à-dire, l'anomalie qui aurait lieu si son mouvement eût été uniforme. C'est ce que l'on nomme l'*anomalie moyenne*; comptée de l'apogée, elle est de . .	208° 55′ 59″, 6.
Quand on connaît cette quantité, les tables donnent l'équation du centre qui y correspond ; elle est de	56′ 53″, 7.
Comme elle est additive dans cette partie de l'orbite, il faut l'ajouter à la longitude moyenne calculée pour le 28 janvier à midi, on aura ainsi. .	309° 2′ 25″, 1.

C'est le lieu elliptique du soleil à cette époque. En y ajoutant les perturbations, la nutation et l'aberration, *qui sont données par les tables pour chaque position de* l'astre, on aura la longitude vraie, ou le lieu apparent du soleil. Cette longitude étant trouvée, on en peut déduire aisément par le calcul l'ascension droite et la déclinaison, l'obliquité de l'écliptique étant connue. Les tables donnent encore pour le même instant le rayon vecteur du soleil, ou sa distance vraie à la terre exprimée en parties de sa distance moyenne, et par suite elle font connaître sa parallaxe horisontale et son diamètre apparent qui sont l'un et l'autre réciproques à la distance. Tous les élémens du lieu vrai de cet astre sont ainsi parfaitement déterminés.

119. Si l'on employait les nouvelles tables du soleil de M. Delambre, le calcul ne serait pas plus difficile. Seulement comme les anomalies y sont comptées à partir du périgée, c'est le lieu du périgée qui sert d'époque avec la longitude moyenne ; et ces élémens sont toujours calculés pour le 1er. janvier à midi moyen, comme nous l'avons dit plus haut.

CHAPITRE XII.

Sur l'Inégalité des jours solaires et sur l'équation du tems. Conversion du tems vrai en tems moyen ou en tems sydéral, et réciproquement.

120. MAINTENANT que nous connaissons, avec exactitude, la marche du soleil et les dimensions de son orbite, il doit être possible de calculer l'arc qu'il décrit, parallèlement à l'équateur, dans chaque jour de l'année. Si ces arcs diurnes étaient égaux entre eux, la durée des jours solaires serait constante; mais ils sont inégaux, et voilà pourquoi les jours solaires varient.

Pour comprendre nettement le principe et les lois de ces inégalités, faisons abstraction de la nutation, et supposons l'équateur et l'écliptique immobiles. Par le pôle de l'équateur, imaginons deux méridiens, menés aux deux extrémités de l'arc de l'écliptique que le soleil décrit dans un jour sydéral. L'arc de l'équateur que ces méridiens interceptent, représentera, pour cette époque, la différence du jour sydéral au jour solaire; car lorsque la rotation de la sphère céleste est terminée, il faut encore que ce petit arc de l'équateur traverse le plan du méridien, avant que le soleil y passe. Or, il est facile de voir que ces arcs diurnes ne sont pas de même longueur dans les différens tems de l'année.

D'abord on conçoit qu'ils doivent varier par le seul effet des inégalités du mouvement propre du soleil dans son orbite ; mais ce n'est pas là l'unique cause qui les rend inégaux. Ils le seraient encore, même quand le soleil parcourrait l'écliptique d'un mouvement uniforme, en y décrivant chaque jour des arcs égaux. En effet, à cause de l'obliquité de l'écliptique, ces arcs prennent successivement diverses inclinaisons, par rapport à l'équateur. Dans le tems des équinoxes, ils coupent ce plan sous un angle égal à l'obliquité de l'écliptique, parce que leur direction est alors perpendiculaire à la ligne des équinoxes, qui est la commune section de l'écliptique et de l'équateur. Au contraire, dans le tems des solstices, ils deviennent parallèles à cette même droite. Les méridiens menés par les extrémités des arcs diurnes, près du solstice, sont donc plus écartés qu'ils ne le seraient s'ils comprenaient le même arc de l'écliptique, près des équinoxes ; et comme l'écart de ces méridiens mesure, sur l'équateur, les retards successifs du soleil, ces retards sont inégaux et plus petits dans les équinoxes que dans les solstices (*).

Les variations journalières du mouvement du soleil,

(*) Lorsqu'on rapporte les arcs de l'écliptique au plan de l'équateur, en menant des méridiens, par leurs extrémités, on trouve que les arcs de l'équateur qui leur correspondent sont inégaux, et plus grands ou plus petits, suivant leur position. On peut facilement trouver par le calcul la mesure exacte de cette différence. Soit, comme dans la *fig.* 3, C le centre de la terre, $ES'S''$ l'écliptique, $EQ'Q''$ l'équateur, CP son axe qui lui est perpendiculaire : alors Ee sera la ligne des équinoxes ; et si ES' est l'arc décrit dans un jour sur l'écliptique par le soleil, à partir du point E, le méridien $PS'Q'$ déterminera l'arc EQ' de l'équateur, qui fait à cette époque, la différence du jour astronomique au jour sydéral. D'après cette construction, le triangle sphérique $ES'Q'$ sera rectangle en Q', et en nommant ω l'obliquité de dans son orbite, sont une autre cause d'inégalité ; car elles augmentent ou diminuent les arcs diurnes que le

---

l'écliptique, on aura, d'après les règles de la trigonométrie sphérique,

$$\tang EQ' = \cos \omega \,.\, \tang ES'.$$

Le cosinus d'un angle étant toujours moindre que l'unité, tang EQ' sera moindre que tang ES' ; par conséquent, l'arc diurne EQ' intercepté sur l'équateur, sera plus petit que l'arc ES' décrit sur l'écliptique.

Cette relation subsistera également pour tous les arcs de l'écliptique et de l'équateur, comptés de la même manière, à partir de l'équinoxe, en sorte que le soleil étant, par exemple, en S'', on aura encore

$$\tang EQ'' = \cos \omega \,.\, \tang ES''.$$

Si S est le lieu du solstice, les arcs ES, EQ sont égaux entre eux, et à 100°. Ainsi, puisque EQ'' est moindre que ES'', il faut, par compensation, que $Q''Q$ soit plus grand que $S''S$, c'est-à-dire, que l'arc intercepté sur l'équateur par les méridiens $PS''Q''$, PSQ, soit plus grand que l'arc de l'écliptique qui y correspond.

On peut aisément calculer leur différence, car $S''S = 100° - ES''$; $Q''Q = 100° - EQ''$; par conséquent,

$$\tang ES'' = \frac{1}{\tang SS''},$$

$$\tang EQ'' = \frac{1}{\tang QQ''}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation précédente, donneront

$$\tang S''S = \cos \omega \,.\, \tang Q''Q$$

c'est-à-dire, que le rapport des arcs diurnes qui se correspondent sur l'équateur et sur l'écliptique au solstice, est inverse de ce qu'il est à l'équinoxe. Ainsi, en supposant que l'arc diurne décrit par le soleil sur l'écliptique, fût toujours le même, les arcs correspondans de l'équateur seraient inégaux, plus grands que l'arc de l'écliptique dans les solstices, moindres dans les équinoxes.

soleil décrit sur l'écliptique, ce qui change encore l'écart des méridiens, et la longueur des arcs de l'équateur, qui sont compris entre eux.

121. On voit donc que l'inégalité des jours solaires est due à deux causes distinctes, l'obliquité de l'écliptique et l'inégalité du mouvement propre du soleil. Ces deux causes ont chacune leur action à part, de sorte qu'il faudrait les détruire toutes deux, pour que les jours solaires devinssent égaux; c'est-à-dire, qu'il faudrait que le mouvement du soleil, dans son orbite, devînt uniforme, et que le plan de l'écliptique coïncidât avec l'équateur. Or, on démontre, par la théorie de l'attraction, que cela n'arrivera jamais, du moins en vertu des causes permanentes qui agissent sur le système du monde.

122. D'après la discussion que nous venons d'établir, on voit que, pour calculer les inégalités des jours solaires, il faut calculer les arcs que le soleil décrit chaque jour sur l'écliptique, en vertu de son mouvement vrai en longitude; projeter ces arcs sur l'équateur, par des méridiens, et prendre les différences successives des angles horaires compris entre eux.

123. Ce sont ces inégalités inévitables du mouvement du soleil en ascension droite, qui ont empêché les astronomes de s'en servir pour la mesure du tems, dans leurs tables et dans leurs observations. Car ces perpétuelles variétés, dont il aurait fallu tenir compte, auraient excessivement multiplié les calculs, sans aucune utilité. Cet inconvénient n'a point lieu dans l'usage civil, où l'on n'a pas besoin d'une si grande exactitude, et aussi l'on y mesure le tems par le mouvement vrai du soleil, que l'on emploie comme uniforme, en négligeant ses inégalités qui ne sont d'aucune importance pour cet

usage. Cette manière d'agir est d'autant plus raisonnable que toute la distribution des travaux de la société, est en rapport avec le mouvement vrai du soleil, et non pas avec son mouvement moyen.

Mais pour les astronomes, auxquels l'uniformité était indispensable pour obtenir de la simplicité dans leurs calculs, l'usage civil n'était point praticable. D'un autre côté, la nécessité de dater leurs observations et d'en retrouver facilement les époques approchées, leur prescrivait de ne point s'éloigner trop de l'usage civil qui remplissait parfaitement ces conditions. C'est pourquoi ils ont adopté pour mesure du tems, le mouvement moyen du soleil, et ils ont placé l'origine de leur période de manière que le tems solaire moyen ne fit qu'osciller autour du tems solaire vrai, sans jamais beaucoup s'en écarter. C'est en effet ce qui résulte de la détermination du tems moyen, telle que nous l'avons expliquée plus haut; mais on comprendra mieux cette conséquence, en représentant les conventions que nous avons faites alors, au moyen d'une construction géométrique qui les rend sensibles Pour cela, il faut d'abord dépouiller le soleil vrai des perturbations qui l'affectent, afin de le ramener au mouvement elliptique, sans quoi il serait impossible de représenter ses irrégularités. On conçoit ensuite un soleil fictif qui décrit le grand cercle de l'écliptique, d'un mouvement uniforme, et qui passe au périgée et à l'apogée en même tems que le soleil véritable. Cet astre fictif est déja exempt des inégalités du mouvement elliptique. On conçoit ensuite un troisième soleil qui passe par les équinoxes moyens en même tems que le second, et qui se meut dans l'équateur moyen avec un mouvement uniforme, de manière que les distances angulaires de ces deux astres fictifs, à l'équinoxe moyen du printems, sont constamment égales entre elles. L'effet de l'obliquité de l'écliptique disparaît donc pour ce troisième soleil ; et, comme on a corrigé l'inégalité du mouvement propre, par la première supposition, sa marche n'est plus assujétie à aucune irrégularité : c'est elle qui mesure le *tems moyen* des astronomes. Le *jour moyen* est l'intervalle de tems compris entre deux passages consécutifs de ce soleil fictif au méridien moyen, et le *minuit* ou le *midi moyens* sont les instans de son passage dans ce plan.

124. Il est visible que cette construction satisfait pleinement aux conditions que nous avons posées dans la page 163, relativement à l'origine du tems moyen. En effet, suivant la définition que nous venons de donner, notre troisième soleil dont le mouvement en ascension droite est uniforme, passe aux équinoxes moyens en même tems que le second soleil. Il coïncide donc alors avec lui. De plus, à partir de ce point, ils ont un mouvement parfaitement égal, le second sur l'écliptique, le troisième sur l'équateur. Donc lorsque le second soleil arrivera à l'apogée ou au périgée de l'orbite, le troisième soleil aura son ascension droite égale à la longitude de l'apogée ou du périgée. C'est précisément la condition par laquelle nous avons déterminé l'origine du tems moyen, dans le passage cité plus haut.

Maintenant puisque vous connaissez l'ascension droite du soleil moyen à l'instant du passage au périgée ; si vous prenez le complément de cette ascension droite à 400°, vous aurez l'arc qui reste encore à parcourir au troisième soleil pour arriver à l'équinoxe moyen du printems. Comme vous connaissez aussi son mouvement propre qui est 1°,0951635 dans un jour moyen, vous pourrez facilement calculer le tems qu'il emploiera pour parvenir jusqu'à cet équinoxe ; cet intervalle ajouté à l'instant du passage au périgée ou à l'apogée, vous donnera l'instant auquel le soleil moyen doit passer à l'équinoxe. Cet instant s'appelle l'*équinoxe moyen.*

125. Le tems qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil moyen au même équinoxe moyen, forme l'*année moyenne tropique*, qui contient $365^j,242264$, comme nous l'avons déja plusieurs fois annoncé. Elle diffère un peu de l'année civile qui se règle sur les retours du vrai soleil à l'équinoxe vrai. Celle-ci éprouve des oscillations périodiques causées par la nutation, qui avançant et reculant tour-à-tour le point équinoxial, tantôt diminuent l'année et tantôt l'accroissent. Le déplacement progressif de l'orbe solaire y produit encore de légères variations, parce que la vîtesse du soleil est inégale dans les différens points de son ellipse, qui arrivent successivement à l'équinoxe (*).

(*) Nous avons maintenant toutes les données nécessaires pour expliquer comment on a calculé les durées des saisons rapportées dans la page 172. Pour trouver la durée des quatre saisons dans une année quelconque, il faut chercher les instans de cette année auxquels la longitude vraie du soleil devient 0°;100°;200°;300°, et compter le nombre de jours qui les séparent.

Cela se fait au moyen des tables du soleil. A la vérité, ces tables sont construites de manière à donner la longitude vraie du soleil, pour un instant connu ; au lieu que dans le cas actuel, c'est la longitude vraie qui est donnée, et il faut en déduire le tems. Mais il est facile d'éluder cette difficulté. En effet, on connaît à-peu-près, par les éphémérides, les jours des équinoxes et des solstices. On peut donc calculer, par les tables, les longitudes vraies du soleil, à midi, pour les jours qui précèdent et qui suivent ces phénomènes ; et comme on connaît aussi le mouvement du soleil d'un jour à l'autre, on trouve, par une simple proportion, les instans précis où les longitudes vraies atteignent les valeurs requises.

126. En général, il est facile de trouver le lieu du soleil moyen dans le plan de l'équateur moyen, à un instant quelconque donné; car il suffit de calculer,

---

Ces époques étant connues, on peut ensuite, pour plus d'exactitude, calculer rigoureusement par les tables, les longitudes correspondantes du soleil, et s'assurer qu'elles sont réellement . . . 0°;100°;200°;300°. Si l'on y trouve quelque différence, on verra facilement, d'après le mouvement du soleil, les petites corrections qui en résultent dans les époques adoptées, et après les avoir faites, on prendra un milieu entre les deux résultats. On conçoit que dans cette recherche il faut avoir égard à la nutation. Car la nutation déplaçant l'équateur sans déplacer le soleil, avance ou recule l'équinoxe vrai, d'où les longitudes vraies sont comptées. Par une conséquence nécessaire, les variations que la nutation éprouve dans l'intervalle d'une année à une autre, et même dans l'intervalle d'une seule année, doivent avoir aussi leur influence sur la durée des saisons. Elles y produisent en effet de petites variétés insensibles dans les usages civils, mais dont il faut tenir compte quand on veut avoir ces intervalles exactement; ce qui au reste est bien rarement nécessaire, puisque la division de l'année en saisons est purement civile. Si l'on veut se borner à connaître la durée moyenne des saisons dans l'état actuel de l'orbe solaire, il faut faire abstraction de la nutation, et calculer les longitudes vraies 0°.100°.200°.300° pour l'équinoxe moyen. C'est ainsi que l'on a calculé les nombres rapportés dans la page 172.

En ajoutant ces nombres, on trouve, pour la durée totale des quatre saisons, 365j,242364. Elle surpasse de 10″ la durée moyenne de l'année tropique. Cette légère différence tient à l'inégalité du mouvement du soleil dans les différens points de son orbite, qui arrivent successivement aux équinoxes et aux solstices, par suite du déplacement du grand axe, comme nous l'avons vu dans le texte.

Considérons, par exemple, l'équinoxe du printems : l'anomalie moyenne qui y répond, étant comptée du périgée, a pour valeur, suivant les tables, 87°,33458, en 1800, ce qui donne l'équation du centre égale à + 2°,10407. Après une année tropique moyenne, c'est-à-dire, après 365j,242264, la même anomalie et la même équation du centre auraient encore lieu, si le périgée était pour cet instant, par les tables astronomiques, la valeur de la longitude moyenne du soleil comptée de l'équinoxe moyen, et cette longitude, reportée dans le plan de l'équateur moyen, est l'ascension droite du soleil moyen, ou l'*ascension droite moyenne* du soleil.

S'il n'y avait pas de nutation, le pôle vrai coïnciderait avec le pôle moyen, et l'ascension droite vraie du soleil se mesurerait sur le même équateur que celle du soleil moyen. Ces deux ascensions droites différeraient en général l'une de l'autre, parce que la marche du vrai soleil en ascension droite est inégale, tandis que

---

immobile; mais comme il s'est déplacé de 191″,07 dans l'intervalle, l'anomalie moyenne ne sera plus que 87°,33458 — 0°,019107, ou 87°,31547, ce qui donne, pour l'équation du centre, 2°,10396, valeur plus petite de 0°,00011 que la précédente; ainsi la longitude vraie, après une année moyenne, ne sera pas encore 0°, comme elle l'était l'année précédente, et le soleil aura encore 0°,00011 à parcourir, avant d'arriver à l'équinoxe vrai. Il lui faut, pour cela, $\dfrac{10^h{,}0^o{,}00011}{1^o{,}0951635}$, ou $0^h{,}0010$. Cette quantité doit donc être ajoutée à une année tropique moyenne, pour avoir l'intervalle de tems compris entre deux retours consécutifs du soleil vrai à l'équinoxe moyen du printems. Par cette raison, l'intervalle des équinoxes vrais surpasse de 10″ celui des équinoxes moyens. On voit aussi que cette différence n'est pas constante pour toutes les années. Elle varie avec la position de l'ellipse solaire sur le plan de l'écliptique.

Si l'on voulait avoir égard à la nutation, la différence de deux équinoxes moyens de même dénomination pourrait être encore plus grande; car la nutation peut faire varier le point équinoxial de 0°,0018 sur l'écliptique dans l'intervalle d'une année, ce qui ajouterait encore $0^h{,}0164$ à l'intervalle des équinoxes vrais, qui pourrait ainsi surpasser de 174″ l'intervalle des équinoxes moyens. Cette différence varie d'une année à l'autre, parce que les changemens de la nutation en longitude ne sont pas les mêmes tous les ans.

celle du soleil moyen est uniforme. Leur différence réduite en tems à raison d'une heure décimale pour 40 grades, indiquerait l'intervalle de tems dont le vrai soleil suit ou précède l'autre, à l'instant que l'on a considéré.

Cet intervalle a été appelé par les astronomes *l'équation du tems;* parce qu'en effet, lorsque sa valeur est connue, en l'ajoutant au tems vrai, on a le tems moyen, et en la retranchant du tems moyen on a le tems vrai.

Ce résultat est bien facile à démontrer quand on fait abstraction de la nutation comme nous le supposons ici; car en désignant par A l'ascension droite du soleil vrai, par M celle du soleil moyen, et par a l'ascension droite du zénith, il est clair que $\frac{a-A}{40}$ sera le tems vrai, et $\frac{a-M}{40}$ sera le tems moyen. La différence entre le tems moyen et le tems vrai sera donc .... $\frac{a-M}{40}-\frac{a-A}{40}$ ou simplement $\frac{A-M}{40}$; de sorte que a disparaissant, il ne reste que la différence des ascensions droites des deux soleils.

La nutation modifie un peu ce résultat; parce qu'alors les deux ascensions droites A et M ne se mesurent ni sur le même équateur, ni à partir du même équinoxe. On peut toutefois, en ayant égard à cette circonstance, trouver par une marche analogue la différence du tems moyen et du tems vrai. Pour y parvenir, soit T le tems moyen, et T' le tems vrai que l'on compte à un même instant dans un lieu déterminé, à Paris, par exemple. En convertissant ces tems en arcs, $40\ T$ sera l'angle horaire du soleil moyen avec le méridien de Paris, et $40\ T'$ sera l'angle horaire du soleil vrai avec le méridien vrai du même lieu (*). Or, puisque l'on connaît le tems moyen T, on peut calculer pour ce même instant, par les tables astronomiques, l'ascension droite moyenne M du soleil moyen, comptée de l'équinoxe moyen, et en l'ajoutant à $40\,T$, l'arc $M + 40\,T$ sera, pour cet instant, l'ascension droite du zénith moyen, comptée du même équinoxe. Pour convertir cette quantité en ascension droite vraie, il suffit de lui ajouter l'ascension droite vraie du point équinoxial moyen, c'est-à-dire, $\psi \cos \omega$, en nommant ψ la nutation en longitude. Cette réduction a été démontrée dans la pag. 164. Elle tient à la petitesse de la nutation et au peu d'obliquité de l'équateur vrai sur l'équateur moyen. $M + 40\,T + \psi \cos \omega$ sera donc l'ascension droite vraie du zénith vrai comptée de l'équinoxe vrai. En la divisant par 40 pour la réduire en tems, on aurait le tems sydéral vrai, compté du même équinoxe.

Mais cette ascension droite peut s'obtenir encore d'une autre manière, en ajoutant à l'angle horaire vrai $40\,T'$ l'ascension droite vraie A' du soleil comptée de l'équinoxe vrai sur l'équateur vrai. L'arc $A' + 40\,T'$ devra donc égaler $M + 40\,T + \psi \cos \omega$, et de cette égalité l'on tire $T - T' = \frac{A' - \psi \cos \omega - M}{40}$; la quantité $\frac{A' - \psi \cos \omega - M}{40}$ est donc proprement *l'équation du tems*, car on voit qu'en

(*) Le méridien moyen est celui qui est mené par le zénith moyen, perpendiculairement à l'équateur moyen; le méridien vrai est celui qui est mené par le zénith vrai, perpendiculairement à l'équateur vrai; c'est le méridien moyen déplacé par la nutation avec tout le reste de la terre, et avec l'équateur même, qu'il coupe toujours au même point physique. En général, il faut concevoir les méridiens et l'équateur vrai comme formant, avec la terre, un système invariable qui oscille autour de sa position moyenne, conformément aux lois de la nutation.

l'ajoutant au tems vrai T' on aura le tems moyen T et qu'en la retranchant du tems moyen T, on aura T'.

Lorsque l'on a formé des tables du soleil pour le méridien d'un lieu déterminé, on conçoit qu'avec ces tables on peut calculer, pour un instant donné de tems moyen, l'ascension droite moyenne M, l'ascension vraie A' et la nutation $\psi \cos \omega$. On peut donc réduire la formule précédente en nombres; et c'est ainsi que sont construites *les tables de l'équation du tems* (*).

Ces tables donnent le tems vrai quand on connaît le tems moyen; mais on peut, par un artifice très-simple, renverser le problême et trouver le tems moyen par le tems vrai. La différence de l'un à l'autre étant toujours

(*) Pour ne laisser aucune obscurité sur cette matière importante, je vais montrer comment on peut calculer numériquement les diverses parties qui composent l'équation du tems. D'abord, pour l'ascension droite moyenne M, il n'y a aucune difficulté; elle est proportionnelle au tems. Cette même quantité M est aussi la longitude moyenne du soleil comptée de l'équinoxe moyen; ajoutons-y les perturbations planétaires P et l'équation du centre Q : la somme $M+P+Q$ sera la longitude du soleil vrai comptée de l'équinoxe moyen; ajoutons-y encore la nutation en longitude, ou ψ, la somme $M+P+Q+\psi$ sera la longitude vraie du soleil vrai comptée de l'équinoxe vrai.

Maintenant, avec cette longitude et l'obliquité vraie de l'écliptique ω, calculez l'ascension droite correspondante, vous aurez A'.

Mais comme ω n'est pas un très-grand angle, la réduction que la longitude éprouve ainsi, pour être réduite en ascension droite, est peu considérable, et s'obtient aisément par des séries; c'est même la manière la plus exacte de calculer l'ascension droite par la longitude. Soit donc R cette réduction, on aura

$$A' = M + P + Q + R + \psi.$$

Si nous substituons cette valeur de A' dans l'expression générale de peu considérable, puisqu'elle ne surpasse jamais $0^h.1134$, on se sert d'abord du tems vrai donné comme si c'était un tems moyen; on en déduit une valeur de l'équation du tems, qui, ajoutée au tems vrai, donne une valeur approchée du tems moyen : avec cette valeur approchée, on calcule de nouveau l'équation du tems qui se trouve alors avec une suffisante exactitude.

127. L'équation du tems est tantôt additive, tantôt soustractive ; *dans le premier cas, le vrai soleil précède en* ascension droite le soleil moyen ; dans le second cas,

---

l'équation du tems, qui est

$$T - T' = \frac{A' - \psi \cos \omega - M}{40},$$

M disparaît et il reste

$$T - T' = \frac{P + Q + R + 2\psi \sin^2 \frac{1}{2} \omega}{40}.$$

On voit maintenant pourquoi l'équation du tems est toujours peu considérable; c'est parce que M a disparu : les quantités restantes sont toutes resserrées dans des limites fort étroites; cela est évident pour P, Q, ψ; et quant à R, on peut aisément prouver qu'elle *reste toujours au-dessous de 2°,8, comme on le verra dans la page 234:* on met, pour ces quantités, leurs valeurs générales, qui sont données en fonctions du tems T par les formules analytiques fondées sur la théorie de l'attraction, et en effectuant le calcul numérique pour des valeurs de la longitude moyenne suffisamment rapprochées les unes des autres, on forme enfin les tables de l'équation du tems. On refait une seconde fois le même calcul pour une autre année éloignée d'un siècle, en donnant aux élémens elliptiques les valeurs qu'ils auront, la comparaison des résultats fait connaître la variation séculaire de l'équation du tems pour les divers degrés de longitude moyenne, ce qui permet de transporter la valeur de cette équation à une année quelconque différente de celle pour laquelle on a calculé.

c'est le vrai soleil qui reste en arrière. On conçoit que dans le passage d'un de ces états à l'autre, les deux soleils doivent se rencontrer sur le même méridien; alors l'équation du tems doit devenir nulle. En effet, par une propriété très-remarquable, elle devient ainsi nulle quatre fois dans chaque année.

Pour montrer clairement la raison de ce phénomène, nous ferons d'abord abstraction de la nutation. Nous examinerons ensuite les modifications qu'elle peut y apporter. Le principe fondamental dont il faut partir, c'est que, si l'on prend sur l'écliptique deux arcs égaux, le premier près de l'équinoxe, le second près du solstice, et qu'on les rapporte à l'équateur, en menant des méridiens par leurs extrémités, les arcs interceptés sur l'équateur, par ces méridiens, seront inégaux; le premier moindre, et le second plus grand que l'arc donné. Cette proposition a été démontrée § 120.

Concevons maintenant deux soleils S'' et S''', partis en même tems de l'équinoxe moyen du printems, et décrivant d'un mouvement égal et uniforme, le premier S'' l'écliptique, le second S''' l'équateur, *fig.* 20; et supposons qu'on rapporte leurs mouvemens à ce dernier plan. S''' devancera d'abord le méridien de S''; mais ensuite celui-ci s'en rapprochera, et ils arriveront ensemble au solstice. Alors ce sera le méridien de S'' qui devancera S''' jusqu'au second équinoxe, où ils arriveront en même tems. Les mêmes circonstances se reproduiront dans l'autre moitié de l'orbite, et les positions des deux astres, rapportées à l'équateur, coïncideront quatre fois dans l'année, aux deux équinoxes et aux deux solstices.

128. Dans la nature, le soleil moyen ne part pas de l'équinoxe moyen en même tems que le soleil vrai; ils ne

doivent donc plus se rencontrer aux mêmes points. L'inégalité du mouvement propre du soleil dans l'écliptique, altère encore cette différence ; mais ces causes réunies ne font que changer les époques des rencontres des deux soleils, le nombre de ces rencontres reste toujours le même. C'est ce que nous allons démontrer, en faisant d'abord abstraction des variations périodiques de la nutation.

En effet, en admettant la position actuelle de l'orbe solaire, considérons de nouveau les deux soleils S'', S''', *fig.* 20, partant ensemble de l'équinoxe d'automne pour aller vers le périgée. Le vrai soleil S' qui parcourt l'écliptique, étant rapporté par son méridien au plan de l'équateur, se trouve alors derrière eux, car il est précédé par S'' jusqu'au périgée, § 101. Voyons maintenant dans quel ordre s'exécute la marche de ces astres. Jusqu'au solstice, d'hiver S''' précède S'', et S'' précède S': leur ordre est donc S', S'', S''' d'hiver. Au solstice S'' rejoint S''', ensuite le dépasse, ce qui donne l'arrangement S', S''', S'' ; mais au périgée S' rejoint S'', et ensuite le précède. Pour cela il faut que S' et S''' se rencontrent *dans l'intervalle. La marche des* trois astres devient alors S''', S'', S'. Ainsi, entre le solstice d'hiver et le périgée, le méridien du vrai soleil S' rencontre le soleil moyen S''', et l'équation du tems devient nulle.

Depuis le périgée, jusqu'à l'équinoxe du printems, S', devance S'', et S'' devance S''' ; il ne se fait donc point de rencontre dans cet intervalle. A l'équinoxe du printems, S''' rejoint S'', ensuite le dépasse, et l'ordre des trois astres devient S'', S''', S' ; mais S''' ne peut pas rester longtems compris entre les deux autres ; car, dans chaque quart de cercle, l'écart de S''' et de S'' va jusqu'à 2°,7483, comme on peut le voir par le calcul (*) ; celui de S' et de S'' au contraire ne s'élève jamais, dans l'écliptique, qu'à 2°,1380 ; c'est présentement la plus grande équation du centre, et comme elle a lieu près des équinoxes, dans la position actuelle de

---

(*) Pour ne pas interrompre le raisonnement, je n'ai fait qu'indiquer le plus grand écart des trois soleils, S', S'' et S''' dans chaque quart de la circonférence ; mais il serait facile de le calculer avec exactitude. En effet, S'' et S''', *fig.* 20, ayant un mouvement égal, le premier sur l'écliptique, le second sur l'équateur, l'ascension droite de S''' égale toujours la distance de S'' à l'équinoxe ; ainsi, en nommant y cette ascension droite, et x la distance de l'équinoxe au méridien de S'', ou l'ascension droite de S'', on aura, d'après la note de la page 182,

$$\text{tang}\, y = \frac{\text{tang}\, x}{\cos \omega},$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique. Or, on a, par les formules trigonométriques,

$$\text{tang}\,(y - x) = \frac{\text{tang}\, y - \text{tang}\, x}{1 + \text{tang}\, y\, \text{tang}\, x}.$$

Mettant pour tang y sa valeur, il vient

$$\text{tang}\,(y - x) = \frac{(1 - \cos \omega)}{\cos \omega} \cdot \frac{\text{tang}\, x}{1 + \dfrac{\text{tang}^2 x}{\cos \omega}};$$

c'est en général la différence des ascensions droites de S'' et de S'''. Cette expression peut se mettre sous la forme suivante

$$\text{tang}\,(y - x) = \frac{(1 - \cos \omega)}{\sqrt{\cos \omega}} \cdot \frac{\dfrac{\text{tang}\, x}{\sqrt{\cos \omega}}}{1 + \dfrac{\text{tang}^2 x}{\cos \omega}}.$$

l'orbe solaire, l'arc qui lui correspond, sur l'équateur, est encore plus petit qu'elle. On conçoit donc qu'après l'équinoxe du printems, et avant le solstice d'été, il doit arriver un moment où le soleil moyen S''' atteint le mé-

---

Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\frac{\tang x}{\sqrt{\cos \omega}} = z,$$

la partie variable de cette expression deviendra

$$\frac{z}{1 + z^2},$$

et l'on aura

$$\tang(y - x) = \frac{(1 - \cos \omega)}{\sqrt{\cos \omega}} \cdot \frac{z}{1 + z^2}.$$

Or la quantité $\frac{z}{1 + z^2}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2} - \frac{(1 - z)^2}{2(1 + z^2)}.$$

Elle est donc constamment moindre que $\frac{1}{2}$, excepté dans le cas où $z = 1$; car elle égale alors $\frac{1}{2}$, et c'est là sa plus grande valeur. Ainsi la plus grande différence entre les ascensions droites de S'' et de S''', correspondra à l'angle x donné par l'équation

$$z = 1 \quad \text{ou} \quad \tang x = \sqrt{\cos \omega},$$

et cette plus grande différence $y - x$, le sera par l'équation

$$\tang(y - x) = \frac{1 - \cos \omega}{2\sqrt{\cos \omega}}.$$

Si l'on suppose $I = 26{,}0735$, ce qui est l'obliquité de l'écliptique, ridien de S', alors l'équation du tems est nulle pour la seconde fois.

De là, en allant vers le solstice d'été, la marche des trois soleils se fait dans l'ordre S'', S', S'''. Au solstice S'' rejoint S''' ensuite le dépasse. Cependant S' précède

---

vers 1800, on trouvera

$$x = 48^\circ{,}6260,$$
$$y - x = 2^\circ{,}7483,$$

et, par conséquent
$$y = 51^\circ{,}3743,$$

c'est-à-dire, que la plus grande différence entre les ascensions droites de S'' et de S''', est de $2^\circ{,}7483$; elle arrive lorsque l'ascension droite de S''' est de $51^\circ{,}3743$, celle de S'' étant alors $48^\circ{,}6260$. Cette différence réduite en tems, à raison de la circonférence entière, pour 10^h, donne $0^h{,}0687$, tems moyen décimal pour le plus grand retard de S'' au méridien, par rapport à S'''. C'est $9' \, 54''$ en tems vulgaire de 24 heures au jour.

On peut facilement s'assurer que l'équation du centre qui est maintenant $2^\circ{,}1380$ dans l'écliptique lorsqu'elle est la plus grande, ne peut jamais donner en ascension droite une différence égale à $2^\circ{,}7483$. En effet, supposons le cas le plus favorable, celui où elle atteindrait son *maximum* à l'instant du solstice; alors, en désignant par x l'arc qui lui correspondrait sur l'équateur, on aurait, suivant la note de la page 183,

$$\tang x = \frac{\tang 2^\circ{,}1380}{\cos \omega};$$

expression qui, étant calculée par le moyen des tables des logarithmes, donne

$$x = 2^\circ{,}3306.$$

Si l'on supposait que le milieu de l'arc $2^\circ{,}1380$ coïncidât avec le solstice, on aurait

$$x = 2^\circ{,}3307,$$

ce qui ferait $1''$ de plus. Dans ce cas, qui est de tous le plus favo-

S'' jusqu'à l'apogée ; par conséquent le méridien de S' rencontre encore, avant le solstice d'été, le soleil moyen S''' et l'équation du tems est nulle pour la troisième fois.

Depuis le solstice d'été jusqu'à l'apogée, la marche des trois astres se fait dans l'ordre S''', S'', S' ; à l'apogée S'' atteint S', ensuite le dépasse jusqu'au périgée, ce qui donne l'arrangement S''', S', S''. Or, à l'équinoxe d'automne, S''' rejoint S'' ; par conséquent, il rencontre dans l'intervalle le méridien de S', et l'équation du tems devient nulle une quatrième fois.

Alors l'ordre des trois soleils redevient S' S'' S''', et les mêmes apparences se reproduisent dans le même ordre, à chaque révolution.

---

rable, le résultat est encore beaucoup au-dessous de 2°,7483. On peut donc être assuré que, dans aucun cas, l'équation du centre, qui a lieu maintenant dans l'écliptique, ne peut donner sur l'équateur une différence d'ascension droite égale à 2°,7483 ; et comme tous ces élémens n'éprouvent que des variations périodiques très-lentes, renfermées dans des limites fort étroites, on peut en conclure que dans toutes les positions possibles de l'orbe solaire sur l'écliptique, le soleil vrai et le soleil moyen coïncideront toujours quatre fois chaque année.

L'arc 2°,3307 réduit en tems, à raison de la circonférence entière pour un jour, donne $0^h,0583$, tems moyen décimal, ou 8′24″ tems moyen vulgaire ; par conséquent, si la plus grande équation du centre coïncidait avec le plus grand écart de S'' et de S''', en sorte que les trois soleils fussent alors dans l'ordre S', S'', S''', ou S''', S'', S', la différence d'ascension droite entre le soleil vrai S' et le soleil moyen S''', serait moindre que 2°,3340 + 2°,7483, ou 5°,0823, ce qui donne, en tems décimal, $0^h,127$, ou 18′18″ en tems vulgaire. Or, cette disposition, la plus favorable de toutes, ne saurait avoir lieu dans la situation actuelle de l'orbe solaire ; ainsi la différence du tems moyen au tems vrai ne peut s'y élever à 13 minutes de tems décimal, ou à 18 minutes de tems sexagésimal.

129. On voit, par ce simple exposé, qu'en vertu de l'obliquité de l'écliptique, combinée avec le mouvement inégal du soleil, l'équation du tems devient nulle quatre fois dans l'année ; savoir : une fois entre le solstice d'hiver et le périgée, deux fois entre l'équinoxe du printems et le solstice d'été, et une dernière fois entre l'apogée et l'équinoxe d'automne. On voit aussi que les époques de ces phénomènes varient avec la position du grand axe de l'orbe solaire. Présentement elles se trouvent placées vers les 25 décembre, 16 avril, 16 juin et 1er. septembre. En général on conçoit que le déplacement progressif de ce grand axe, doit changer peu-à-peu la valeur absolue de l'équation du tems, qui convient à chaque longitude du soleil. Aussi a-t-on calculé par la théorie ces variations séculaires, et on les a jointes aux tables du soleil.

On conçoit également que les causes qui rendent l'équation du tems nulle doivent encore avoir leur effet, malgré les petites variations que la nutation occasionne dans la marche de nos trois soleils. Ces variations qui ne s'élèvent jamais qu'à quelques secondes, changent un peu les époques des quatre rencontres qui ont lieu chaque année, mais elles ne peuvent ni les détruire, ni les faire sortir des limites que nous leur avons assignées.

130. Si l'inclinaison de l'écliptique sur le plan de l'équateur était nulle, en sorte que ces deux plans coïncidassent toujours, la partie de l'équation du tems qui dépend de cette inclinaison, serait nulle aussi. Alors le mouvement moyen et le mouvement vrai ne différeraient l'un de l'autre que par l'équation du centre. Le soleil vrai et le soleil moyen ne se joindraient qu'au périgée et à l'apogée, et le tems vrai ne coïnciderait avec le tems moyen que deux fois dans l'année, lorsque le soleil se trouverait dans les absides.

131. D'après ce qu'on vient de dire, il est facile de sentir que l'instant du midi vrai, marqué sur une méridienne, par l'ombre d'un style, diffère en général du midi moyen. Mais comme on connaît, pour chaque jour, l'équation du tems, on peut marquer, pour chaque jour, de part et d'autre de la méridienne, la direction et la limite de l'ombre, à l'instant du midi moyen. On a ainsi une suite de points qui marquent, autour de la méridienne vraie, les méridiennes successives du soleil moyen. La courbe qui unit leurs extrémités doit évidemment rencontrer la méridienne vraie, en quatre points, correspondans aux quatre instans de l'année où l'équation du tems devient nulle. De plus, elle doit être fermée et rentrante sur elle-même, puisque l'équation du tems reprend les mêmes valeurs après chaque révolution: aussi cette courbe a-t-elle à-peu-près la forme du chiffre 8. Mais elle n'est pas symétrique, parce que les époques auxquelles l'équation du tems devient nulle, sont inégalement éloignées. On la nomme la *méridienne du tems moyen*, et lorsqu'on la trace, autour de la méridienne vraie, sur les cadrans solaires, on marque sur son contour, des signes correspondans aux diverses saisons, afin de reconnaître facilement la portion de la courbe qui convient à chaque partie de l'année.

Dans le petit abrégé de Gnomonique, placé à la fin de cet ouvrage, on trouvera l'exposition détaillée du procédé qu'il faut suivre pour tracer une méridienne du tems moyen, avec un exemple.

Il existe une méridienne de ce genre, tracée par M. Bouvard, sur le palais du Luxembourg, à Paris.

CHAPITRE XIII.

Des Taches du Soleil, de sa forme, de sa rotation.

132. NOUS venons de calculer, avec la dernière exactitude, les mouvemens du soleil : cherchons maintenant à acquérir quelques notions sur sa forme et sur sa nature.

A la vérité, nous sommes si éloignés de lui, que nos connaissances, sur ces deux points, semblent devoir toujours être fort incertaines ; mais on désespère moins du succès, quand on considère les résultats que nous avons déja obtenus ; et, quelque petites différences que puisse nous présenter cet astre, à la distance où il est placé, on peut être sûr qu'elles n'échapperont pas à des observations précises et multipliées.

Le soleil nous offre l'aspect d'un disque arrondi et lumineux ; mais il n'en faut pas conclure que sa surface est réellement plate ; car tous les corps arrondis, vus de très-loin, doivent présenter cette apparence. Le télescope a décidé la question, en montrant que le soleil tourne sur lui-même dans l'espace d'environ 25 jours et demi. En effet, il n'y a qu'un corps arrondi qui puisse, en se présentant sous toutes les faces, être toujours vu sous la forme d'un cercle.

Ces observations ont de plus appris, qu'il se fait, à la surface du soleil, d'énormes bouillonnemens, de vives effervescences. Tout s'accorde à faire considérer cet astre comme un immense globe enflammé, qui lance autour de lui des torrens de lumière, dont nous ressentons les effets à trente millions de lieues de distance.

Comme ces phénomènes sont aussi curieux par eux-mêmes qu'importans pour la connaissance du système du monde, je vais les exposer avec quelque détail.

133. On observe souvent sur le disque du soleil, des taches noires d'une forme irrégulière, qui traversent sa surface dans l'espace de quelques jours. Leur nombre, leur position, leur grandeur, sont extrêmement variables, on en a vu qui, à juger par l'espace qu'elles occupaient sur le diamètre apparent du soleil, devaient être cinq ou six fois plus larges que la terre entière (*). La vive lumière du soleil ne permet pas de les appercevoir à la vue simple; mais on les observe très-nettement avec des lunettes astronomiques, dans lesquelles le trop grand éclat de cet astre est adouci, et non pas effacé, par les verres colorés que l'on peut placer devant l'oculaire. Chaque tache noire est ordinairement environnée d'une pénombre autour de laquelle on remarque une bordure de lumière plus brillante que le reste du soleil. Quelquefois on apperçoit d'abord des nuages lumineux sur le bord du disque, sans voir de taches à leur centre; mais à mesure qu'ils s'avancent, les taches commencent à se former, ou du moins à devenir visibles, et ce phénomène est assez constant pour qu'on puisse prévoir, par là, leur apparition. Lorsque les taches commencent à paraître sur le bord du soleil, elles ressemblent à un trait delié. Peu-à-peu leur

(*) Telle fut la tache observée par Herschell en 1779. Sa largeur réelle, conclue de son diamètre apparent, surpassait 17000 lieues.

grandeur apparente augmente, à mesure qu'elles s'avancent vers le milieu du disque; ensuite elles diminuent par les mêmes périodes, et finissent par disparaître entièrement. Cependant la bordure lumineuse qui les environne est encore visible quelque tems après. Ces accroissemens et ces diminutions s'expliquent facilement, si l'on suppose les taches adhérentes à la surface arrondie du soleil; car alors, le seul mouvement de rotation doit nous les faire appercevoir sous divers degrés d'obliquité et de grandeur.

134. Pour observer les taches qui paraissent sur le disque du soleil, et pour déterminer exactement leurs positions successives sur ce disque, on emploie la machine parallactique, que nous avons décrite dans le premier livre. Elle est extrêmement propre à cette observation, puisqu'elle est destinée à mesurer les petites différences d'ascension droite et de déclinaison. On dirige la lunette de cet instrument sur le soleil, et après avoir mis à-peu-près le centre de cet astre sur le fil horisontal, on observe le tems qui s'écoule entre le passage du bord aux fils horaires, et celui de la tache que l'on veut observer. Cet intervalle donne la différence d'ascension droite, entre la tache et les bords; par conséquent, entre la tache et le centre, puisque la distance des bords au centre, ou le demi-diamètre apparent du soleil est connu par les observations. On mesure de même avec le fil équatorial mobile, la différence de déclinaison des bords et de la tache, et l'on en conclut la différence entre la tache et le centre. Ces résultats fixent la position de la tache sur le disque, et en l'observant ainsi pendant tous les jours de son apparition, on peut, si cette apparition est de quelque durée, tracer la route apparente de la tache sur le disque, avec beaucoup d'exactitude, soit par un dessin graphique, soit par le calcul, ce qui est beaucoup plus précis.

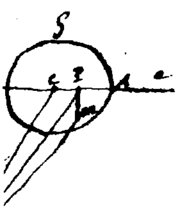
Lorsqu'on a observé, avec soin, une même tache, pendant tout le tems qu'elle emploie à traverser le disque du soleil, ce qui demande environ 14 jours, si l'on est assez heureux pour qu'elle dure, on la revoit encore après un intervalle de tems à-peu-près égal ; mais elle se trouve sur le bord du soleil opposé à celui où elle a disparu. Cette marche révolutive est commune à toutes les taches. Cependant, il arrive, pour l'ordinaire, qu'après quelques retours semblables, on cesse enfin de les revoir ; mais comme on sait aussi qu'elles se dissipent, et disparaissent quelquefois sur le disque même du soleil, on est fondé à croire que celles qui ne reviennent plus, se sont dissipées sur la surface opposée. En effet, leur nombre est extrêmement variable, et elles n'ont rien de régulier dans leurs apparitions. Il y a des années où l'on n'en voit aucune, d'autres où elles sont très-fréquentes.

135. Ces phénomènes ont conduit M. Herschell à penser, que le corps du soleil est un noyau solide et obscur, environné d'une immense atmosphère, presque toujours remplie de nuages lumineux. Selon lui, ces nuages flottans au hasard, s'entrouvrent quelquefois et nous découvrent le noyau obscur ; de même que du haut des montagnes qui s'élèvent à la surface de la terre, on peut quelquefois, à travers les interstices des nuages, découvrir le fond des vallées. M. Herschell croit aussi qu'il existe à la surface du soleil, des montagnes très-hautes, dont les sommets paraissant, par intervalles, au-dessus de la matière lumineuse, nous offrent l'apparence de taches noires. En effet, ces explications s'accordent assez bien avec les phénomènes observés. Mais on y satisferait encore en supposant avec l'auteur de la Mécanique céleste, que le corps même du soleil est embrâsé. Car le développement des fluides élastiques qui se formeraient

Cette opinion est
pas rendue exact

dans le sein de cette masse, devrait y exciter des bouleversemens terribles ; et, dans cette supposition, les taches pourraient être des cavités profondes, d'où sortiraient par intervalles de vastes éruptions de feux, faiblement représentées par les volcans terrestres.

136. Lorsqu'on eut découvert les taches du soleil, on s'empressa d'en suivre et d'en étudier les mouvemens. Le moyen le plus simple de les déterminer, est, comme nous l'avons dit, d'observer pendant plusieurs jours, les différences de déclinaison et d'ascension droite entre une même tache et le centre du soleil, pour en conclure les différences de longitude et de latitude, en calculant celle du centre et celle de la tache par les formules de la page 58.



Alors supposons que *T*, *fig.* 21, représente le centre de la terre. Soit *Ec* l'écliptique, ou le grand cercle de la sphère céleste décrit par le soleil, *ESA* le disque apparent de cet astre, *C* son centre, et *M* la position apparente de la tache, que je suppose au-dessous du plan de l'écliptique, du côté du Sud. L'angle *CTP* sera la différence de longitude ; l'angle *PTM* sera la différence de latitude (celle du centre du soleil est toujours nulle), et ces deux angles seront connus par l'observation, puisqu'on peut les conclure des différences de déclinaison et d'ascension droite observées.

Ces angles étant toujours très-petits, on peut, dans une première approximation considérer les arcs qui les mesurent, comme autant de petites lignes droites ; et si on les suppose, comme à l'ordinaire, mesurés sur la sphère céleste, dont le rayon est *CT*, l'angle *CTP* ou l'arc qui le mesure, sera représenté par la ligne *CP*, l'angle *PTM* par la ligne *PM*, et enfin le diamètre apparent du soleil par la ligne *BA*. Par conséquent, pour prendre une idée précise de la position de la tache, on pourra décrire à volonté un cercle *ASB*, *fig.* 22, dont le diamètre sera supposé contenir autant de parties de l'unité, que celui du soleil, donné par l'observation, contient de secondes de degrés. On prendra la ligne *CP* égale au nombre de secondes contenues dans la différence des longitudes; on fera, de même, la perpendiculaire *PM* égale au nombre de secondes que contient la latitude de la tache, et l'on aura ainsi la position de cette tache représentée sur le disque apparent du soleil.

En répétant la même opération pendant plusieurs jours consécutifs, on aura une suite de points tels que *M*, *M'*, *M''*, *M'''*, *fig.* 22, qui représenteront la route apparente de la tache sur le disque du soleil; ou, pour parler plus exactement, ce sera la projection de la courbe qu'elle décrit, exécutée sur un plan perpendiculaire au rayon visuel, mené de la terre au centre du soleil. Cette projection est en général une courbe ovale assez ressemblante à une ellipse, et toutes les taches que l'on peut observer en même tems suivent des courbes semblables et parallèles. La durée de leur révolution est aussi la même. Elles emploient toutes environ $27^j,3$ pour revenir à la même position apparente sur le disque du soleil.

137. La forme de ces ovales, leur courbure et leur inclinaison éprouvent des variations très-grandes. A la fin de novembre et au commencement de décembre, ce sont de simples lignes droites, comme *Mm*, *M'm'*, *M''m''*, *fig.* 23. Alors les taches vont de *M* en *m*, c'est-à-dire, de la partie australe de l'écliptique dans sa partie boréale. Les points *M*, *M'*, où elles commencent à paraître et que l'on pourrait appeler leur orient, sont moins élevés que les points *mm'm''*.... où elles disparaissent, et que l'on pourrait nommer leur occident. Peu-à-peu ces lignes

droites se courbent et forment des ovales comme dans la *fig.* 24. Pendant l'hiver et le printems, la convexité de ces ovales est tournée vers le pôle boréal de l'écliptique; mais en même tems leur inclinaison change, et, au commencement de mars, les points où les taches commencent à se montrer, sont aussi élevés sur l'écliptique que ceux où elles disparaissent. Voyez *fig.* 25. Depuis cet instant, le changement d'inclinaison continuant à se faire dans le même sens, la courbure des ovales diminue: ils se resserrent peu-à-peu, et à la fin de mai ou au commencement de juin, on les revoit de nouveau sous la forme de lignes droites, *fig.* 26; mais leur inclinaison sur l'écliptique est précisément contraire à ce qu'elle était six mois auparavant. Après cette époque, ils s'ouvrent de nouveau, comme dans la *fig.* 27, et leur convexité est dirigée vers la partie australe de l'écliptique; en même tems leur inclinaison change. Au commencement de septembre, on les voit sous la forme représentée *fig.* 28. Les points où les taches paraissent, sont aussi élevés que ceux où elles se couchent. Parvenus à ce terme, les ovales se resserrent, s'inclinent de nouveau sur l'écliptique, et enfin au mois de décembre, on les revoit sous la forme de lignes droites, tels qu'ils paraissaient un an auparavant.

138. Ces phénomènes se reproduisent chaque année dans le même ordre, en suivant les mêmes périodes d'accroissement et de diminution. On en doit conclure que la cause qui les produit est également uniforme et régulière. Il faut de plus qu'elle soit commune à toutes les taches, puisqu'elle leur fait décrire des orbites exactement parallèles et soumises aux mêmes variations, dans leurs apparences. Ce qui se présente de plus simple, c'est de supposer que ces taches sont adhérentes à la surface du

soleil, et qu'elles tournent avec cet astre dans l'espace de quelques jours.

De plus, les inflexions diverses et successives des lignes décrites par ces taches, indiquent un axe de rotation qui n'est pas perpendiculaire à l'écliptique. Car, s'il lui était perpendiculaire, toutes les taches devraient décrire des cercles parallèles à ce plan. Ces cercles, vus de la terre et dans l'éloignement, paraîtraient comme autant de lignes droites parallèles à l'écliptique ; et ces apparences resteraient constamment les mêmes, ce qui ne s'accorde point avec les observations.

Au contraire tous les phénomènes s'expliquent de la manière la plus simple, en admettant la rotation du soleil autour d'un axe incliné à l'écliptique, et qui reste constamment parallèle à lui-même pendant la révolution annuelle. Cet axe, emporté par le soleil, prend successivement des positions différentes par rapport à la terre, et nous présente sous des inclinaisons également variables, les cercles que les taches décrivent. De là les changemens que nous observons dans leur courbure apparente. Parmi toutes ces positions, il en est deux qui doivent offrir des lignes droites : ce sont celles où le plan mené par l'axe de rotation, perpendiculairement à l'écliptique, devient aussi perpendiculaire au rayon visuel mené de la terre au centre du soleil. Cela ne peut arriver que deux fois l'année, dans deux points opposés de l'écliptique, et à six mois de distance. Alors nous appercevons les deux *pôles de rotation du soleil*, c'est-à-dire, les deux points dans lesquels l'axe de rotation perce la surface de cet astre. Dans toute autre position, la route des taches doit paraître ovale ; mais lorsque nous découvrons le pôle supérieur ou boréal, la convexité des ovales est tournée vers la partie australe de l'écliptique ; et quand nous découvrons le pôle inférieur, cette convexité est tournée vers la partie boréale. La marche des taches se faisant toujours dans le même sens, et de gauche à droite ou d'orient en occident, les points du disque où elles se lèvent, doivent être, pendant six mois, plus élevés que ceux où elles se couchent. Le contraire arrivera pendant les six autres mois ; et il y aura deux époques de l'année où ces points se trouveront à égale hauteur au-dessus de l'écliptique. Après cet instant d'équilibre, l'inclinaison des ovales deviendra plus grande de jour en jour, elle parviendra en trois mois à sa plus grande obliquité ; et de là commençant à diminuer de nouveau jusqu'à un nouvel équilibre, il arrivera enfin que l'époque de la plus grande obliquité sera celle où le passage des taches sur le disque paraîtra se faire en ligne droite ; et, au contraire, dans le moment de l'équilibre, l'ouverture des ovales sera la plus grande. Dans tous les autres tems, lorsque l'inclinaison des ovales diminuera, leur courbure ira en augmentant.

On a essayé de représenter ces apparences dans la *fig.* 29, où *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sont des positions successives du soleil par rapport à la terre, figurée en *T*. *Pp* indique partout l'axe de rotation, et *Mm*, *M'm'*, *M''m''*, sont les routes des taches. Il faut suppléer à l'imperfection de la figure, où l'on n'a pas pu rendre l'extrême éloignement de la terre et du soleil. *B* est le lieu où l'axe de rotation devient parallèle au plan du disque solaire, et par conséquent perpendiculaire au rayon visuel *TB*. *A*, *C* sont les points où l'ouverture apparente des ovales est la plus grande. Quant aux points opposés, on n'a pas pu y figurer le globe du soleil, vu de la terre, mais il est sensible que les apparences y seraient contraires à celles des points *ABC*. Par exemple, le soleil étant parvenu en C, présente au spectateur, placé en T, le même aspect qu'il aurait offert en A six mois auparavant pour un spectateur placé en A'', du côté opposé à la terre ; c'est-à-dire, qu'on revoit alors les routes des taches sous la forme d'ovales dont les extrémités sont également élevées sur l'écliptique, mais elles se présentent dans le sens opposé. Une opposition semblable a lieu dans toutes les situations du soleil qui sont diamétralement opposées sur son orbite.

139. Toutes ces conséquences étant exactement conformes aux observations, on en peut conclure avec certitude, qu'en effet *le soleil tourne sur lui-même d'orient en occident autour d'un axe incliné à l'écliptique.*

Le plan mené par le centre du soleil, perpendiculairement à cet axe, se nomme l'*équateur du soleil.* Il coupe le plan de l'écliptique, suivant une ligne droite qui s'appelle la *ligne des nœuds* de cet équateur. Les *nœuds eux-mêmes sont* les points où cette droite prolongée indéfiniment, dans les deux sens, rencontre la sphère céleste.

140. Pour connaître la position de l'axe de rotation dans l'espace, il faut déterminer l'inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique, et l'angle que fait la ligne des nœuds avec une droite fixe menée sur le plan de l'écliptique ; par exemple, avec la ligne des équinoxes. Cet angle se nomme la *longitude du nœud.* Voici la méthode qui me paraît la plus simple et la plus exacte pour déterminer ces élémens.

Lorsqu'on a observé la position d'une tache sur le disque du soleil, et qu'on a calculé sa longitude et sa latitude, on connaît la direction du rayon visuel mené de la terre à cette tache, à l'instant de l'observation. On sait de plus quelle était, à la même époque, la longitude du soleil, sa distance à la terre, et son diamètre apparent. C'est donc un simple problême de géométrie, de trouver les intersections de sa surface supposée sphérique, avec le rayon visuel mené à la tache. Trois observations semblables, d'une même tache, déterminent trois points sur la surface du soleil, et ces points sont situés sur une même circonférence de cercle, parallèle à l'équateur solaire. Or, en général, la position d'un plan est fixée, lorsqu'on sait qu'il passe par trois points connus: le plan du cercle décrit par la tache, sera donc déterminé par ces trois observations, et l'on en pourra déduire la position de l'équateur solaire qui lui est parallèle.

141. Pour fixer les positions successives des taches sur la surface du soleil supposée sphérique, on conçoit, par le centre de cet astre, trois axes rectangulaires, menés dans des directions connues, et qui restent constamment parallèles à eux-mêmes, pendant la révolution annuelle. Le premier de ces axes est perpendiculaire à l'écliptique, les deux autres sont situés dans ce plan. L'un est parallèle à la ligne des équinoxes, l'autre lui est perpendiculaire. Ils sont représentés en *S*, *fig.* 30. On nomme *latitudes et longitudes héliocentriques*, les longitudes et les latitudes comptées du centre du soleil autour des trois axes précédens. Elles sont évidemment déterminées lorsqu'on a leurs analogues mesurées du centre de la terre, et que l'on nomme par opposition *longitudes et latitudes géocentriques*. La trigonométrie sphérique nous enseigne à trouver ces rapports; comme on le verra dans les notes placées à la suite de ce chapitre; mais il suffira pour le moment d'en avoir indiqué la possibilité.

En appliquant cette méthode, on trouve que l'équateur solaire est incliné à l'écliptique de $7°,0719$. Il paraît rester constamment parallèle à lui-même. Les points de cet équateur, en s'élevant par leur mouvement de rotation au-dessus de l'écliptique, vers le pôle boréal, traversent ce plan dans un point qui, vu du centre du soleil, se trouve à $78°,6062$ de l'équinoxe du printems; telle est donc *la longitude héliocentrique du nœud ascendant de l'équateur solaire.* Elle ne paraît pas éprouver de variations sensibles, si ce n'est celles qui résultent de la précession des équinoxes, effet général que nous avons déja indiqué.

142. J'ai dit que la durée moyenne de la rotation du soleil par rapport à un même point de la terre, est $27^j,31$. C'est le tems après lequel un même point de la surface de cet astre revient à la même distance de son centre apparent; mais ce n'est pas le tems de la rotation réelle. En effet, dans cet intervalle, le soleil décrit sur l'écliptique un arc égal à $1°,09516 . 27,31$, ou $29°,91$. En vertu de ce seul mouvement, il nous découvre chaque jour de nouveaux points de sa surface, dont il nous montre successivement toutes les parties dans le cours d'une année. De là résulte une rotation apparente, qui semble se faire annuellement autour d'un axe perpendiculaire à l'écliptique. L'effet de cette illusion optique se compose avec la rotation réelle, dans les résultats observés, et pour y démêler les influences particulières de ces deux causes, il faut les étudier séparément.

Faisons d'abord abstraction de la rotation réelle. Imaginons un rayon visuel mené de la terre au centre du soleil, et concevons, par ce centre, un plan perpendiculaire à ce rayon. Le disque du soleil n'est que la projection de tous les points de sa surface sur ce plan perpendiculaire. L'intersection du plan et du rayon visuel, forme ce que nous appelons le centre du disque. C'est à ce centre que nous rapportons le point de la surface du soleil qui est sur la direction du rayon visuel. Or, il n'est pas difficile de voir que ce point varie sur la surface du soleil, quand le soleil change de position sur le plan de l'écliptique. En effet, s'il se trouve, par exemple, en S, *fig.* 31, que T soit le centre de la terre, TS le rayon visuel mené au centre du soleil, C sera le point de la surface que nous verrons au centre du disque. Mais lorsque le soleil sera en S', le point C', qui sera parvenu au centre du disque apparent, différera du point C; et pour trouver l'arc décrit par ce dernier, il faut, par le point S, mener $S'T'$ parallèle à ST; le point C se trouvera en c. Ce point s'est donc éloigné du centre apparent du disque, par le seul effet de la révolution annuelle du soleil; il s'en est éloigné de l'angle $TS'T'$, qui est égal à $S'TS$, ou au mouvement du soleil dans son orbite, pendant l'intervalle des observations.

L'effet de la rotation réelle altère cette rotation apparente, parce qu'elle est dirigée en sens contraire. Si elle se faisait aussi autour d'un axe perpendiculaire à l'écliptique, il serait facile d'y avoir égard; car lorsqu'un même point de la surface du soleil serait revenu à la même distance de son centre apparent, ce qui se fait en $27^j,31$, il se trouverait avoir décrit réellement $429°,91$, c'est-à-dire, une circonférence entière, plus le mouvement angulaire du soleil dans cet intervalle; d'où il est facile de conclure, par une simple proportion, que le tems d'une rotation complète serait $25^j,4$.

L'axe réel de rotation du soleil étant oblique à l'écliptique, ce résultat n'est pas tout-à-fait exact, et les $49°,91$

décrits par les points de cet astre parallèlement à l'écliptique, ne produisent pas tout-à-fait le même angle sur l'équateur solaire. Mais comme l'inclinaison de ces deux plans est peu considérable, l'erreur qui en résulte est fort petite, et beaucoup au-dessous de celles que ce genre d'observation comporte. Au reste, la durée de la rotation réelle se trouve naturellement déterminée quand on calcule les positions successives d'une même tache par rapport à trois axes fixes menés par le centre du soleil, comme nous l'avons enseigné plus haut; car de cette manière, on connaît l'arc réellement décrit par la tache sur son parallèle entre les observations, et en comparant cet arc au tems employé à le parcourir, on en conclut la durée de la rotation totale.

143. En comparant, par des moyens très-précis, l'intensité de la lumière que nous envoient les bords du soleil, et celle qui vient du centre de son disque, Bouguer s'est assuré que celle-ci est la plus forte. Cependant le soleil étant un corps arrondi, ses bords s'offrent obliquement à nous, et présentent, sous le même angle, une plus grande surface. Leur lumière devrait donc nous sembler plus intense. S'il en est autrement, c'est qu'une cause plus forte vers les bords que vers le centre, en diminue graduellement l'intensité. Tel serait l'effet d'une épaisse atmosphère; car s'il en existe une autour du soleil, les rayons lumineux venus de ses bords la traversent dans une étendue beaucoup plus considérable que ceux qui partent du centre de son disque, et qui la traversent directement. C'est ainsi que notre atmosphère affaiblit beaucoup plus la lumière des astres à l'horison qu'au zénith. L'atmosphère solaire est donc indiquée par ce phénomène, avec beaucoup de vraisemblance.

144. On verra plus loin que la lune est aussi un corps arrondi, mais qui n'a point d'atmosphère sensible. Ce fait sera prouvé d'une manière très-rigoureuse; mais l'on peut déja en reconnaître la vérité, en observant avec soin les étoiles devant lesquelles la lune passe; car on ne voit pas leur lumière s'affaiblir peu-à-peu en approchant du disque de cet astre; elles brillent jusqu'auprès de ses bords, et s'éclipsent subitement. La lune n'a donc pas d'atmosphère sensible : aussi est-elle plus lumineuse vers les bords que vers le centre, comme Bouguer s'en est assuré. Ce rapprochement confirme très-bien la théorie précédente.

145. Un autre phénomène remarquable, qui tient, sans doute, à l'état actuel et à la nature même du soleil, c'est l'auréole lumineuse qui l'accompagne, et à laquelle l'on a donné le nom de *lumière zodiacale*. On l'observe le soir, lorsque le soleil vient de se coucher, et à l'endroit même où cet astre a quitté l'horison. Sa forme est celle d'une lentille très-applatie, placée obliquement sur l'horison, et dont la tranche aigue atteint très-loin dans le ciel; voy. *fig.* 32. Cette lumière est blanchâtre comme celle de *la voie lactée*. On s'est assuré qu'elle accompagne constamment le soleil, et dans les éclipses totales, on l'apperçoit autour de son disque comme une chevelure lumineuse. Elle est toujours dirigée dans le plan de l'équateur solaire, et c'est pour cela qu'on ne la voit pas également bien, le soir, dans toutes les saisons. Car cet équateur étant diversement incliné à l'horison, en raison des diverses positions du soleil dans l'écliptique, la lumière zodiacale s'incline avec lui, et se cache en grande partie sous l'horison; ou du moins son éclat est fort affaibli par les vapeurs qui s'élèvent près de la surface de la terre. Le tems le plus favorable pour l'observer dans nos climats est l'équinoxe du

printems, vers le mois de février ou de mars. Alors la ligne des équinoxes est le soir, dans l'horison, *fig.* 33. L'arc de l'écliptique SS', dans lequel le soleil va entrer, est plus élevé sur l'horison que l'équateur SEQ. La différence est égale à l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire à $26^{o},0740$. Ainsi la lumière zodiacale, toujours dirigée dans le plan de l'équateur solaire, qui est presque dans le plan de l'écliptique, se trouve alors plus élevé que l'équateur de toute cette quantité. Dans nos climats, aucune autre position du soleil n'est aussi favorable. Par exemple, au solstice d'été, l'arc $S''T$ de l'écliptique, est parallèle à l'arc EQ de l'équateur céleste. La pyramide lumineuse se trouve, le soir, parallèle à cet équateur, c'est-à-dire, beaucoup plus inclinée qu'au tems de l'équinoxe du printems : il en est de même dans toutes les autres positions.

146. On a formé plusieurs hypothèses sur la nature et la cause de cette lumière. On avait pensé d'abord qu'elle émane de l'atmosphère du soleil; mais l'auteur de la Mécanique céleste a prouvé, d'après sa forme et d'après sa grandeur, que cela est impossible. On a cru remarquer qu'elle s'affaiblit, quand le soleil a moins de taches, et qu'elle s'accroît quand il en a un plus grand nombre.

Au reste, quelle que soit la cause de cette lumière, il est certain que la matière qui nous la renvoie est extrêmement rare, car on voit les plus petites étoiles au travers.

147. Quant au nom de lumière zodiacale, il vient de ce que l'on appelle *zodiaque*, une zône d'environ 20° de largeur, dont l'écliptique occupe le milieu, et dans laquelle on croyait autrefois que toutes les orbites des planètes étaient renfermées. L'auréole lumineuse,

toujours comprise dans cette zône, en a reçu sa dénomination.

148. Je ne parlerai point ici de la grosseur du soleil, ni des moyens que l'on a employés pour évaluer sa densité. On ne peut parvenir à ces résultats que quand on connaît exactement la distance du soleil à la terre, et celle des autres corps célestes. Nous devons donc différer de nous en occuper, jusqu'à ce que nous ayons vu comment on a déterminé la parallaxe du soleil et les vraies dimensions des orbes planétaires.

NOTE.

Manière de trouver les coordonnées d'une tache du soleil, par rapport à trois axes fixes passant par le centre de cet astre. Détermination de l'équateur du soleil.

Soient X, Y, les deux coordonnées du soleil rapportées à deux axes fixes et rectangulaires menés par le centre de la terre dans le plan de l'écliptique; l'axe des X étant supposé passer par l'équinoxe du printems. Si l'on nomme L la longitude du soleil vue de la terre, et R la distance de cet astre; on aura

$$X = R \cos L, \quad Y = R \sin L.$$

Menons, par le centre de la terre, un troisième axe perpendiculaire au plan de l'écliptique, ce sera l'axe des Z, et nous supposerons les Z positifs dirigés vers le pôle boréal de ce plan. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une tache du soleil rapportée à ces axes à un instant donné; soient de plus, au même instant, l la longitude géocentrique de la tache, λ sa latitude géocentrique, et ρ la projection de son rayon vecteur sur le plan de l'écliptique, on aura évidemment

$$x = \rho \cos l, \quad y = \rho \sin l, \quad z = \rho \tan\!g\, \lambda;$$

or, si l'on représente par r la vraie distance de la tache au centre de la terre, on aura aussi

$$\rho = r \cos \lambda,$$

par conséquent, en éliminant ρ, les valeurs de x, y, z deviendront

$$x = r \cos \lambda \cos l, \quad y = r \cos \lambda \sin l, \quad z = r \sin \lambda.$$

Cette forme de valeurs est souvent employée dans l'astronomie. Maintenant, si nous appelons x', y', z' les trois coordonnées de cette même tache, rapportées à trois axes parallèles aux précédens et fixes au centre du soleil, nous aurons en général

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z,$$

et si l'on suppose que la surface du soleil soit sphérique et que son rayon soit r', on aura, entre les trois coordonnées x', y', z', la relation qui convient à la surface de la sphère, c'est-à-dire,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2;$$

les véritables inconnues du problème sont x', y', z': pour les déterminer, mettons-y d'abord à la place de x, y, z, X, Y leurs valeurs, elles deviendront

$$x' = r \cos \lambda \cos l - R \cos L, \; y' = r \cos \lambda \sin l - R \sin l, \; z' = r \sin \lambda;$$

substituons maintenant ces quantités dans l'équation de la surface du soleil et développons les carrés, nous trouverons

$$r^2 - 2Rr \cos \lambda . \cos (L - l) = r'^2 - R^2;$$

on peut à la place de R substituer sa valeur en fonction de r', car en nommant Δ le demi-diamètre apparent du soleil vu de la terre à l'instant que l'on considère, on aura évidemment

$$r' = R \sin \Delta,$$

et si, d'après cette relation, on élimine R, l'équation à résoudre devient

$$r^2 - 2\, rr' . \frac{\cos \lambda . \cos (L - l)}{\sin \Delta} = - \frac{r'^2 . \cos^2 \Delta}{\sin^2 \Delta};$$

d'où l'on tire pour r deux valeurs

$$r = r' \left\{ \frac{\cos\lambda \cdot \cos(L-l) \pm \sqrt{\cos^2\lambda \cos^2(L-l) - \cos^2\Delta}}{\sin\Delta} \right\}.$$

mais de ces deux valeurs il ne faut prendre que la plus petite ; car lorsque nous observons les taches, elles se trouvent toujours dans la partie de la sphère du soleil qui est la plus voisine de la terre. On aura donc simplement

$$r = r' \left\{ \frac{\cos\lambda \cos(L-l) - \sqrt{\cos^2\lambda \cdot \cos^2(L-l) - \cos^2\Delta}}{\sin\Delta} \right\}.$$

en substituant cette valeur de r dans les expressions générales de x', y', z', et y mettant aussi pour R sa valeur $\frac{r'}{\sin\Delta}$; on aura les coordonnées x', y', z', exprimées en fonction du rayon de la surface du soleil, et des longitudes et latitudes observées. Ainsi, géométriquement parlant, ces valeurs seront déterminées. Mais pour pouvoir les calculer numériquement avec beaucoup d'exactitude, il faut encore leur faire subir une préparation qui introduise les sinus des petits angles Δ et $L-l$ au lieu de leurs cosinus, et qui de plus introduise ces petits angles partout où il y a des différences de sinus et de cosinus. C'est à quoi l'on parviendra en prenant d'abord un angle auxiliaire ψ tel qu'on ait

$$\sin^2\psi = \cos^2\lambda \cos^2(L-l) - \cos^2\Delta,$$

cet angle ψ sera toujours fort petit, car l'équation qui le détermine peut être mise sous la forme suivante,

$$\sin^2\psi = \cos^2(L-l) - \cos^2\Delta - \sin^2\lambda \cos^2(L-l),$$

ou bien

$$\sin^2\psi = \sin.(\Delta + L - l)\sin(\Delta - L + l) - \sin^2\lambda \cos^2(L-l);$$

comme les angles Δ, $L-l$ et λ sont toujours extrêmement petits, chacun des termes de cette équation se calculera par les tables ordinaires de logarithmes avec une extrême exactitude, et la racine carrée de leur différence donnera sin ψ, et par conséquent ψ avec une exactitude pareille. Par le moyen de cette transformation la valeur de r devient

$$r = r'.\left\{\frac{\cos\lambda\cos(L-l)-\sin\psi}{\sin\Delta}\right\};$$

et en la substituant dans x', y', z', après y avoir mis pour R sa valeur $\frac{r'}{\sin\Delta}$ on trouve

$$x' = r'\left\{\frac{\cos^2\lambda\cos(L-l)\cos l - \cos L - \cos\lambda\cos l\sin\psi}{\sin\Delta}\right\}$$

$$y' = r'\left\{\frac{\cos^2\lambda\cos(L-l)\sin l - \sin L - \cos\lambda\sin l\sin\psi}{\sin\Delta}\right\}$$

$$z' = r'\sin\lambda\left\{\frac{\cos\lambda\cos(L-l)-\sin\psi}{\sin\Delta}\right\}.$$

la valeur de z' n'a besoin d'aucune autre préparation à cause du facteur très-petit sin λ qui la multiplie toute entière ; il n'en est pas ainsi de x' et de y'; mais il est facile de voir qu'en mettant pour $\cos^2\lambda$ sa valeur $1-\sin^2\lambda$, les termes indépendans de λ peuvent se transformer de manière à y introduire les sinus du petit arc $L-l$. On aura ainsi, pour x', y', z', les expressions suivantes :

$$x' = r'\left\{\frac{\sin(L-l)\sin l - \sin^2\lambda\cos(L-l)\cos l - \cos\lambda\cos l.\sin\psi}{\sin\Delta}\right\}$$

$$y' = r'\left\{\frac{-\sin(L-l)\cos l - \sin^2\lambda\cos(L-l)\sin l - \cos\lambda\sin l.\sin\psi}{\sin\Delta}\right\}$$

$$z' = r'\sin\lambda\left\{\frac{\cos\lambda\cos(L-l)-\sin\psi}{\sin\Delta}\right\};$$

à quoi il faut joindre l'équation auxiliaire

$$\sin^2\psi = \sin(\Delta+L-l).\sin(\Delta-L+l) - \sin^2\lambda\cos^2(L-l).$$

Ces expressions très-simples et très-symétriques donneront, avec la dernière exactitude, les valeurs de x', y', z', d'après les longitudes et latitudes conclues des observations. Quant au rayon r' de la surface du soleil, il disparaîtra de lui-même de tous les résultats calculés relativement au centre du soleil, de même que celui de la sphère céleste disparaît de tous les résultats géocentriques, c'est pourquoi il faut le conserver en facteur afin de le laisser en évidence : on verra plus loin que les observations introduites dans nos formules permettent de juger si ce rayon est constant, et par conséquent si la surface du soleil est réellement sphérique.

On pourrait aisément déduire de nos formules *les longitudes et latitudes héliocentriques*, c'est-à-dire, vues du centre du soleil, quantité dont les astronomes font un fréquent usage, tant pour le problême qui nous occupe que pour d'autres questions analogues. En nommant λ' et l' cette latitude et cette longitude, celle-ci étant toujours comptée dans le même sens que la longitude géocentrique à partir du même équinoxe, c'est-à-dire, du même point de la sphère céleste, on aurait évidemment

$$\tang l' = \frac{y'}{x'}, \quad \tang \lambda' = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

ce qui donnerait encore

$$x' = r' \cos\lambda' \cos l' \qquad y' = r' \cos\lambda' \sin l' \qquad z' = r' \sin\lambda',$$

mais ces expressions nous seront inutiles dans la recherche de l'équateur du soleil, et je ne les ai rapportées qu'à cause des applications que l'on en peut faire dans d'autres circonstances.

Revenons donc à nos valeurs de x', y', z'. On y introduira les valeurs numériques des longitudes et latitudes du centre du soleil et de la tache déduite des observations ; il n'y aura, dans cette substitution, d'autre attention à avoir que d'observer fidèlement les règles des sinus et cosinus, et de faire ensuite le calcul exactement. Pour s'assurer que l'on ne s'est pas trompé, il sera bon de faire la somme des trois carrés $x'^2 + y'^2 + z'^2$, et cette somme devra être égale à r'^2. On répétera ce calcul pour trois positions observées d'une même tache, et l'on aura ainsi les coordonnées héliocentriques correspondantes que je représenterai par

$$\begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''', \end{matrix}$$

ces calculs faits, le reste n'a plus aucune difficulté.

En effet, par ces trois positions successives de la tache, menons un plan : ce sera le parallèle à l'équateur solaire sur lequel la tache se meut. L'équation de ce parallèle, rapportée au même système de coordonnées que la tache, sera nécessairement de la forme

$$z = Ax + By + D,$$

A, B, D, étant trois coefficiens constans qui déterminent la position du plan cherché. Puisque ce plan contient les trois positions successives de la tache, les coordonnées de ces trois positions doivent y satisfaire; c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left.\begin{aligned} z' &= Ax' + By' + D \\ z'' &= Ax'' + By'' + D \\ z''' &= Ax''' + By''' + D \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

ces trois conditions suffisent pour déterminer A, B, D; en soustrayant successivement la seconde et la troisième de la première, D disparaît et il vient

$$\left.\begin{aligned} z' - z'' &= A(x' - x'') + B(y' - y'') \\ z' - z''' &= A(x' - x''') + B(y' - y''') \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

celles-ci déterminent A et B, mais maintenant, puisque le plan que nous venons de mener est un parallèle à l'équateur solaire, cet équateur qui passe par le centre du soleil aura évidemment son équation de la forme

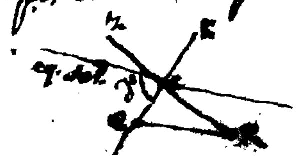
$$z = Ax + By,$$

A et B étant, à cause du parallélisme, les même que nous venons de déterminer. La position de cet équateur sera donc ainsi connue; et si l'on nomme I son inclinaison sur l'écliptique et N la longitude de son nœud aussi sur l'écliptique, on aura

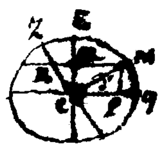
$$\text{tang}\, I = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{tang}\, N = -\frac{A}{B}.$$

Ces résultats étant connus, il est facile de trouver *la déclinaison solaire* de la tache. Par l'axe de l'écliptique et par l'axe de l'équateur solaire qui se croisent tous deux au centre du soleil; menons un plan ECZ *fig.* 34 + et soient CZ et CE ces deux axes; désignons maintenant par R le point où l'axe de l'écliptique est rencontré par le parallèle de la tache. Si de ce point nous menons une perpendiculaire sur l'axe de rotation CE, la distance CQ comprise entre le

+ cette figure n'est pas exacte ? voyez celle-ci



voici une figure peut-être plus naturelle. la circonf représente le soleil. c le centre, m une tache, cq l'equ. sol. mcq = d' sera la décl.



centre du soleil et cette perpendiculaire, exprimera la distance du parallèle de la tache au centre du soleil, et en la divisant par le rayon r' de la surface de cet astre, le rapport $\frac{CQ}{r'}$ sera le sinus de la déclinaison de la tache, relativement à l'équateur du soleil. Or, dans le triangle CQR, l'angle en C, formé par les deux axes de l'équateur solaire et de l'écliptique, est le même que l'angle des deux plans qui leur sont respectivement perpendiculaires, il est donc égal à I, puisque nous avons nommé I l'inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique. Dans ce même triangle, la distance CR est aussi connue ; c'est la valeur de z dans l'équation du parallèle, quand x et y sont nuls ; elle est par conséquent égale à D ou à $z'-Ax'-By'$. D'après cela, on aura $CQ = D \cos I$, et par conséquent, si l'on nomme d' la déclinaison solaire de la tache ; on aura cette expression très-simple

$$\sin d' = \frac{D \cos I}{r'} \quad \text{ou} \quad \sin d' = \frac{(z'-Ax'-By')}{r'} \cos I.$$

1 : sin d' :: r' : CQ

sin d' = CQ/r'

Lorsque A et B auront été déterminés par trois observations de la tache, on pourra calculer d'autres coordonnées x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, de cette même tache par des observations subséquentes, et comme elles devront satisfaire encore à l'équation du même parallèle on aura pareillement

$$D = z^{IV} - Ax^{IV} - By^{IV};$$

On verra donc si la valeur de D, ainsi déterminée, est ou n'est pas la même que précédemment, et par là, on jugera si la tache suit réellement un même parallèle solaire, ou si elle s'en écarte par l'effet de quelque cause de variation.

1 : cos d' :: r' : MQ

MQ = r' cos d'

Puisque nous connaissons la déclinaison d' du parallèle, son rayon sera $r' \cos d'$; il sera donc aussi connu.

La corde de l'arc de ce parallèle compris entre la première observation et la seconde, a pour expression . . . . $\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}$; la moitié de cette corde divisée par le rayon du parallèle exprime le sinus de la moitié de l'angle décrit par la tache entre les deux observations. Ainsi en nommant cet angle A' on aura

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{(x'-x'')^2+(y'-y'')+(z'-z'')^2}{4 r'^2 \cos^2 d'};$$

L'angle A' sera bien facile à calculer par cette formule. Si l'on nomme pareillement A'' l'angle décrit entre la première observation et la troisième, on aura de même

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A'' = \frac{(x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2}{4 r'^2 \cos^2 d'}.$$

Soient T', T'' les intervalles de tems correspondans écoulés entre la première et la seconde observation, ainsi qu'entre la première et la troisième. Si l'on nomme T le tems de la rotation totale, supposée uniforme, les tems étant proportionnels aux arcs décrits, on aura

$$T = \frac{400^\circ . T'}{A'}, \quad \text{ou bien} \quad T = \frac{400^\circ . T''}{A''}.$$

si la rotation est parfaitement uniforme, ces valeurs de T doivent s'accorder exactement; mais cela suppose aussi que les observations soient parfaitement exactes, et c'est ce qui n'a jamais lieu. Il y aura donc généralement une différence entre ces valeurs; on prendra une moyenne arithmétique entre elles, et on la regardera comme la valeur de T. Mais pour savoir jusqu'à quel point cette divergence est admissible et attribuable aux erreurs des observations, il faudra calculer les valeurs de T' et T'' qu'elles donnent comme correspondantes aux arcs A' et A''; puis en comparant ces intervalles à ceux qui ont été réellement observés, on verra en quoi ils diffèrent. Ensuite, d'après le mouvement apparent de la tache, relativement au centre du disque solaire, on pourra calculer le changement que l'erreur du tems aurait dû produire sur les différences de déclinaison ou d'ascension droite, observées entre le centre de la tache et celui du soleil, et l'on jugera si ces changemens sont assez faibles pour qu'on puisse les attribuer aux erreurs inévitables des observations.

Pour ne laisser aucun nuage relativement à l'emploi de ces formules, je les appliquerai à un exemple, et je choisirai pour cela les trois observations suivantes de M. Messier qui ont été déja calculées par Dionis-du-Séjour, au moyen d'une méthode indirecte et excessivement pénible. Je rapporte ces observations telles qu'elles ont été faites, en mesures sexagésimales.

Dates des observations.	Tems solaire apparent.	Différence en tems entre le passage du premier bord du soleil et la tache au fil horaire.	Différence des déclinaisons entre le bord boréal du soleil et la tache.
14 décembre 1777	$11^h.41'.33''$	$2'.11''.5$	$24'.28''$
17	$11^h.35'.46''$	$1'.51''.5$	$23'.15''$
22	$0^h.10'.18''$	$0'.43''.0$	$21'.3''$

En supposant l'obliquité de l'écliptique égale à $23^o.27'.47''$, à cette époque, les élémens du lieu du soleil aux trois instans des observations étaient :

	Longitude du centre du ☉.	Ascension droite du centre du ☉.	Déclinaison du centre du ☉ australe.
1re. observation.	$8^s.22^o.55'.10''$	$8^s.22^o.17'.19''$	$23^o.16'.25''$
2e. observation.	$8^s.25^o.58'.14''$	$8^s.25^o.36'.32''$	$23^o.41'.6''$
3e. observation.	$9^s.1^o.5'.36''$	$9^s.1^o.11'.31''$	$23^o.27'.31''$

Une erreur de quelques secondes sur ces longitudes et sur l'obliquité ne serait d'aucune conséquence, parce qu'elle se reporterait également sur les coordonnées de la tache ; de sorte que les différences de ces coordonnées à celles du centre du soleil resteraient les mêmes : or, c'est sur-tout de ces différences que dépend l'exactitude des coordonnées héliocentriques.

Maintenant, je trouve qu'aux trois instans des observations, le demi-diamètre du soleil avait les valeurs suivantes :

$$\Delta' = 16'.17''.11$$
$$\Delta'' = 16'.17''.34$$
$$\Delta''' = 16'.17''.62.$$

Ces valeurs sont exprimées en parties de grand cercle de la sphère céleste ; pour les transporter sur les parallèles où les observations ont été faites, on les divisera respectivement par les cosinus des déclinaisons correspondantes du centre du soleil, puis on les retranchera des différences d'ascension droite observées entre le bord antérieur et la tache, ces différences ayant été d'abord converties en arc. Le reste de la soustraction sera la différence d'ascension droite entre le centre de la tache et celui du soleil ; ces différences ajoutées aux ascensions droites absolues du soleil donneront celles de la tache. On opérera de même sur les différences de déclinaison ; mais comme l'observation les donne immédiatement en parties de grands cercles, il faudra employer dans la soustraction les valeurs de Δ', Δ'', Δ''' sans aucune réduction ; on aura ainsi, pour les ascensions droites et les déclinaisons successives de la tache, les valeurs suivantes :

	Ascension droite de la tache.	Déclinaisons de la tache.
1re. observation.	$8^s.22^\circ.32'.27''.84$	$23^\circ.24'.35''.89$
2e. observation.	$8^s.25^\circ.46'.45''.57$	$23^\circ.31'.\ 1''.66$
3e. observation.	$9^s.\ 1^\circ.41'.30''.30$	$23^\circ.32'.16''.38$

Avec ces valeurs et la même obliquité $23^\circ.27'.47''$ dont nous avons déja fait usage, on pourra, en employant les formules de la page 58, calculer les longitudes et latitudes géocentriques de la tache, c'est-à-dire, les valeurs de l et de λ dans les trois observations. On trouvera ainsi

	Longitudes géoc. de la tache, ou valeurs de l.	Excès de la longitude du soleil, ou $L - l$.	Latitudes de la tache, ou valeurs de λ, australes.
1re. observation.	$8^s.23^\circ.\ 9'.29''.151$	$-14'.19''.151$	$-7'.26''.622$
2e. observation.	$8^s.26^\circ.\ 7'.43''.592$	$-\ 9'.29''.592$	$-6'.41''.483$
3e. observation.	$9^s.\ 0^\circ.59'.\ 8''.256$	$+\ 6'.27''.744$	$-4'.42''.632$

En substituant ces valeurs et celles de Δ, Δ', Δ'' dans nos formules, nous aurons les coordonnées héliocentriques de la tache dans ses trois positions successives, on trouve ainsi

$$x' = +r'.0,889094109 \quad x'' = +r'.0,628876498 \quad x''' = -r'.0,411557018$$
$$y' = +r'.0,029245944 \quad y'' = +r'.0,661242838 \quad y''' = +r'.0,864712679$$
$$z' = -r'.0,456790925 \quad z'' = -r'.0,408982004 \quad z''' = -r'.0,287908420$$

En substituant ces valeurs dans l'équation du parallèle que décrit la tache, on trouve les deux conditions suivantes

$$-0,047808921 = A.0,260217611 - B\ 0,631996894$$
$$-0,168882504 = A.1,300651127 - B\ 0,835466735,$$

qui donnent pour A, B, D, les valeurs

$$A = -0,110469584 \quad B = +0,030162979 \quad D = -r'.0,359455268.$$

On aura ensuite la longitude du nœud de l'équateur solaire et son inclinaison sur l'écliptique par les formules

$$\text{tang}\, N = -\frac{A}{B}, \quad \text{tang}\, I = \sqrt{A^2 + B^2},$$

qui, dans le cas actuel donnent

$$N = 74^\circ.43'.41'', \quad I = 6^\circ.31'.57''.$$

Cette valeur de N est la longitude du nœud *ascendant*, c'est-à-dire, de celui par lequel les taches passent quand elles percent le plan de l'écli tique en montant vers le pôle boréal. Cela est facile à voir d'après l'équation de l'équateur solaire qui est en général

$$z = Ax + By,$$

car les valeurs précédentes de A et B donnent

$$A = -\text{tang}\, I \sin N, \quad B = +\text{tang}\, I \cos N.$$

en les substituant dans l'expression générale de z, elle devient

$$z = y\, \text{tang}\, I \cos N - x\, \text{tang}\, I \sin N.$$

Maintenant, supposons que x, y, z appartiennent à un point dont la longitude héliocentrique soit v, et dont la distance au centre du soleil, projetée sur le plan de l'écliptique, soit ϱ; dans cette supposition on aura

$$x = \rho \cos \nu, \quad y = \rho \sin \nu,$$

par conséquent

$$z = \rho \operatorname{tang} I \cdot \sin (\nu - N),$$

c'est-à-dire que z deviendra positive quand la longitude ν du point que l'on considère commencera à surpasser la longitude N du nœud. Dans ce cas, le point que l'on considère sera dans la partie boréale de l'écliptique ; au contraire, si ν est un peu plus petit que N, z sera négative et le point se trouvera dans la partie australe. Ce sont précisément là les caractères qui distinguent *le nœud ascendant.*

Les résultats précédens donneront la déclinaison solaire de la tache par la formule

$$\sin d' = \frac{D \cos I}{r'},$$

et l'on trouvera

$$d' = -20^\circ.55'.24''.$$

La valeur de sin d' étant négative, la déclinaison est australe ; c'est pourquoi je lui ai donné le signe négatif. On trouvera de même les angles A', A'', décrits par la tache autour de l'axe de rotation au moyen des formules

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}{4 r'^2 \cos^2 d'},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A'' = \frac{(x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2}{4 r'^2 \cos^2 d'},$$

qui donneront

$$A' = 43^\circ.1'.51'', \quad A'' = 112^\circ.39'.32''.$$

Les intervalles correspondans T' T'', déduits des observations et convertis en tems moyen sont

$$T' = 2^j.23^h.55'.43'', \quad T'' = 8^j,0^h.28'.45'';$$

ou en réduisant tout en fraction décimale de jour

$$T' = 2^j.99703, \quad T'' = 8^j.02275.$$

Pour obtenir ces intervalles exprimés ainsi en tems moyen, il faut prendre d'abord les intervalles de tems apparent qui sont donnés immédiatement par les observations, et les augmenter de $\frac{1}{2\,3\,6\,5}$ à raison de 30″ pour 24 heures, parce que, à cette époque, le jour solaire vrai était plus long de 30″ que le jour solaire moyen, avec ces valeurs on calculera le tems T de la rotation par les formules

$$T = \frac{360^\circ . T'}{A'} \quad \text{ou bien} \quad T = \frac{360^\circ . T''}{A''},$$

ce qui donnera

$$T = 25^j,0734, \quad \text{ou bien} \quad T = 25,6366.$$

Ces résultats diffèrent d'un demi-jour; mais le second mérite plus de confiance, comme étant déduit d'un plus grand arc; ainsi, pour en prendre la moyenne, il convient d'avoir égard à cette circonstance : à cet effet, je les ferai entrer dans le résultat moyen, proportionnellement à l'étendue des arcs A' A'', c'est-à-dire dans le rapport de 1 à $2\frac{1}{2}$, ou de 2 à 5. En multipliant ainsi le premier par 2, le second par 5, et divisant leur somme par 7, on aura le tems moyen de la rotation qui sera

$$T = 25^j,4756 = 25^j.11^h.24'.51''.$$

Il faudra maintenant examiner jusqu'à quel point ce résultat représente les observations; pour cela, on en déduira la valeur des tems T' T'', en le mettant dans les formules

$$T' = \frac{T \cdot A'}{360^\circ}, \quad T'' = \frac{T . A''}{360^\circ},$$

on trouvera ainsi

$$T' = 3^j.04510, \quad T'' = 7^j.97236;$$

et en les comparant aux intervalles observés que nous avons donnés plus haut, on verra que l'erreur du premier est $+ 0^j,04807$ ou $1^h.9'.13''$, et celle du second $- 0^j,05059$ ou $- 1^h.12'.34''$. Examinons l'effet que ces erreurs peuvent produire sur les différences d'ascension droite et de déclinaison observées entre le centre de la tache et celui du soleil. En comparant d'abord les deux premières observations qui sont séparées l'une de l'autre par un intervalle de trois jours, on voit que la différence d'ascension droite a varié dans l'intervalle, de 20″ de tems, et la différence de déclinaison a varié de 73″ de degré: ainsi proportionnellement pour $1^h.9.13''$; la première changerait de $0'',32$, et la seconde de $1'',17$, c'est-à-dire, qu'il aurait suffi de se tromper de ces quantités sur la première observation, ou sur la seconde, ou en partie sur l'une et en partie sur l'autre, pour avoir une erreur de $1^h.9'.13''$ sur la durée totale de la rotation de la tache dans l'intervalle des observations. En opérant de même sur l'intervalle de tems compris entre la première observation et la troisième, on trouvera que l'erreur $-1^h.12'.34''$ répond à une erreur de $0'',56$ en tems, sur la différence d'ascension droite et à $1'',29$ sur la différence de déclinaison observées. Ces quantités sont trop petites pour que l'on puisse en répondre, en observant des taches dont il faut déterminer le centre par estimation, et dont les contours, peu réguliers et mal terminés, éprouvent souvent des variations considérables d'un jour à l'autre. Les résultats auxquels nous sommes parvenus peuvent donc être regardés comme représentant bien les observations dont nous sommes partis, et la petitesse des erreurs qu'ils supposent dans ces observations prouve la bonté de ces dernières. Si l'on peut espérer de pousser plus loin l'exactitude, c'est en combinant un très-grand nombre d'observations d'une même tache ou de plusieurs taches différentes par la méthode des équations de condition.

En effet, pour donner encore ici un exemple de l'application de cette méthode féconde, supposons que l'on eût seulement deux autres observations d'une tache du soleil, soit de la précédente, soit de toute autre, on pourrait en déduire également les coordonnées héliocentriques $x_,$, $y_,$, $z_,$, $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, auxquelles je mets les accens en bas pour les distinguer de celles dont nous venons de faire usage. Maintenant, l'équation du plan décrit par cette tache parallèlement à l'équateur solaire serait nécessairement de la forme

$$z = Ax + By + D',$$

A et B seraient les mêmes que nous venons de déterminer, mais D' serait différent, puisqu'il dépendrait de la déclinaison solaire de la tache. Les coordonnées héliocentriques des deux positions observées devant satisfaire à cette équation, l'on aurait comme tout-à-l'heure

$$z_, = Ax_, + By_, + D';$$
$$z_{,,} = Ax_{,,} + By_{,,} + D';$$

par conséquent en éliminant D',

$$z_, - z_{,,} = A(x_, - x_{,,}) + B(y_, - y_{,,}).$$

Si les valeurs de A et B que nous avons trouvées plus haut étaient parfaitement exactes, et si les observations qui donnent les nouvelles coordonnées héliocentriques étaient parfaitement exactes aussi, cette équation se trouverait satisfaite, et la valeur numérique du premier membre se trouverait précisément égale à celle du second; mais cela ne saurait arriver ainsi que par un hasard extraordinaire et tout-à-fait invraisemblable. Ainsi l'on doit s'attendre en général, qu'en vertu de toutes les causes d'erreurs que nos élémens et les observations comportent, l'équation précédente ne sera satisfaite qu'à très-peu de chose près. Soient donc A' et B' les corrections que nos élémens comportent, en sorte que les vrais coefficiens de l'équation du plan de l'équateur solaire soient $A + A'$, $B + B'$ au lieu de A et B que nous avons trouvés d'abord. En substituant ces valeurs dans l'équation de condition précédente, elle pourra se mettre sous cette forme

$$A'(x_{,}-x_{,,})+B'(y_{,}-y_{,,})=z_{,}-z_{,,}-A(x_{,}-x_{,,})-B(y_{,}-y_{,,})\cdot$$

le second membre est tout connu, et peut se réduire en nombres. En le représentant par C, nous aurons simplement

$$A'(x_{,}-x_{,,})+B'(y_{,}-y_{,,})=C.$$

c'est *une équation de condition* entre les erreurs A', B' des deux élémens A et B que nous avons adoptés. Chaque couple d'observations d'une même tache donnera une équation de ce genre où A' et B' seront les mêmes. Quand on aura formé un très-grand nombre de ces équations, soit avec les observations d'une même tache, soit avec des observations de taches différentes, faites dans des positions diverses du soleil, de manière à donner aux coefficiens des erreurs des valeurs très-différentes; on combinera toutes ces équations par la méthode générale que nous avons expliquée plus haut dans le texte, page 191, et l'on obtiendra ainsi la position de l'équateur solaire avec toute la précision que sa détermination comporte.

Pour faire l'application de cette méthode à un exemple, je choisirai les deux observations suivantes de M. Messier, qui sont faites sur les mêmes taches que les précédentes.

Dates des observations.	Tems solaire apparent.	Différence en tems entre le passage du premier bord du soleil et la tache au fil horaire.	Différence des déclinaisons entre le bord boréal du soleil et la tache.
18 décembre 1777	11h.42'.10"	1'.39".0	22'.48"
24	0h.48'.27"	0'.19".0	20'.57"

En supposant toujours l'obliquité de l'écliptique égale à 23°.27'.47" comme dans les observations précédentes, on avait aux instans de ces observations

	Longitude du centre du ☉.	Ascension droite du centre du ☉.	Déclinaison du centre du ☉ australe.
Observ. du 18	8s.26°.59'.39"	8s.26°.43'.25".677	23°.25'.43".843
24	9s. 3°. 9'.30"	9s. 3°.26'.32".481	23°.25'.31".030

à ces mêmes instans, le demi-diamètre apparent du soleil avait pour valeur

Le 18 . . . 16'.17".42,
24 . . . 16'.17".71;

avec ces valeurs et les différences des déclinaisons et d'ascension droite observées, on peut calculer la déclinaison et l'ascension droite de la tache, on trouve ainsi

	Ascension droite de la tache.	Déclinaison de la tache australe.
Le 18	8s.26°.50'.25".437	23°.32'.14".423
24	9s. 3°.13'.31".941	23°.30'.10".320

Avec ces valeurs et l'obliquité $23^{\circ}.27'.47''$, on peut calculer les longitudes et latitudes de la tache, on trouvera

	LONGITUDE géocent. de la tache, ou valeur de l.	EXCÈS de la longitude du ☉, ou $L - l$.	LATITUDE de la tache, ou valeurs de λ, australe.
Le 18	$8^s.27^{\circ}.\ 6'.12''.609$	$-\ 6'.33''.609$	$-\ 6'.21''$
24	$9^s.\ 2^{\circ}.57'.27''.728$	$+\ 12'.\ 2''.272$	$-\ 4'.23''$

Avec ces données, on peut calculer les coordonnées héliocentriques de la tache pour ces deux positions; on trouvera ainsi

	x	y	z
Le 18	$+\ r'.0{,}444050560$	$+\ r'.0{,}807029791$	$-\ 0{,}389252016$
24	$-\ r'.0{,}769660310$	$+\ r'.0{,}579386905$	$-\ 0{,}268207088$

et en combinant successivement ces valeurs et les précédentes avec celles qui correspondent à la première position de la tache, on en tirera les quatre équations de condition suivantes, que je désignerai par les caractéristiques (1), (2), (3), (4),

$$(1)\ \ldots + A'.0{,}2602176105 - B'.0{,}6319968940 = 0\,,$$

$$(2)\ \ldots + A'.0{,}4450435485 - B'.0{,}7777838470 = +\ 0{,}005079994\,,$$

$$(3)\ \ldots + A'.1{,}3006511267 - B'.0{,}8354667353 = 0\,,$$

$$(4)\ \ldots + A'.1{,}6587544185 - B'.0{,}5501409605 = +\ 0{,}011252033\,,$$

A' et B' sont les erreurs de A et de B. On a employé pour ces coefficiens les valeurs

$$A = -\ 0{,}110469584\,, \quad B = +\ 0{,}030162979\,,$$

que nous avons déterminées plus haut par trois observations. C'est pour cela que les seconds membres des équations (1) et (3) sont nuls ; car ces équations viennent des mêmes observations qui ont déterminé A et B, et ainsi elles doivent être satisfaites par leurs valeurs. A' et B' sont supposés être additifs à A et à B, c'est-à-dire, que les vraies valeurs de ces coefficiens seront $A + A'$ et $B + B'$.

Puisque nous avons quatre équations de condition et seulement deux inconnues, il faut combiner nos équations de la manière la plus favorable à la détermination de ces inconnues.

Je remarque d'abord que B' a un coefficient presqu'égal dans les équations (1) et (4), tandis que celui de A' est fort petit dans la première et fort grand dans la seconde ; ainsi, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, le coefficient de B' deviendra fort petit, et celui de A' restera encore fort grand. Cette combinaison sera donc propre à déterminer A'. Je remarque que la même chose arrivera si j'ajoute ensemble les équations (3) et (4), et que je retranche de leur somme celle des équations (1) et (2) ; j'aurai donc ainsi les deux équations

$$(4)-(1)\ldots\ldots\ldots\ldots+A'.1{,}398536808+B'.0{,}081855934=+0{,}011252033$$

$$(3)+(4)-(1)-(2)\ldots+A'.2{,}254144386+B'.0{,}024173045=+0{,}006172090.$$

Cette combinaison sera très-propre à déterminer A' exactement ; mais elle serait très-peu propre à déterminer B'. Pour avoir cette dernière, j'ajoute ensemble les équations (2) et (3), et de leur somme je retranche l'équation (4) ; j'ai ainsi

$$(2)+(3)-(4)\ldots+A'.0{,}086940257-B'.1{,}063109622=-0{,}006172090.$$

Maintenant, je traite ces trois équations précisément comme celles qui nous ont servi, pag. 437 du premier volume, pour déterminer le coefficient de la réfraction. Je détermine d'abord A' et B' par les deux premières seulement, mais je ne compte que sur la valeur de A', à cause des petits coefficiens dont B' se trouve affecté, et qui, devenant diviseurs de la valeur qu'on en tire, aggrandissent considérablement les erreurs dont les autres termes de l'équation peuvent être affectés ; mais par une raison contraire, la valeur de A' doit être peu affectée de ces erreurs ; je la substitue donc dans la troisième équation qui doit déterminer B', et j'ai ainsi une valeur beaucoup plus exacte de cette quantité. C'est donc cette valeur qu'il faut employer dans les deux premières équations ; je l'y substitue, et j'en tire deux valeurs de A' qui ne s'accordent plus tout-à-fait ensemble ; mais j'en prends la moyenne, et avec cette moyenne, je calcule de nouveau B' : après deux approximations de ce genre, je m'arrête aux valeurs suivantes,

$$A' = +\,0{,}005162250\,,\quad B' = +\,0{,}006620920\,;$$

et en ajoutant ces valeurs à celles de A et de B que nous avons employées, j'en déduis les suivantes :

$$A = -\,0{,}105307080\,,\quad B = +\,0{,}036783898\,,$$

qui étant déduites de l'ensemble des observations, doivent être considérées comme plus exactes.

Avec ces valeurs et celles des coordonnées de la tache dans ses positions successives, rien n'est plus facile que de calculer le coefficient constant D qui détermine la déclinaison solaire du parallèle décrit par la tache ; car puisqu'on a, en général,

$$z = Ax + By + D\,,\quad \text{on aura}\quad D = z - Ax - By\,;$$

et en calculant successivement D par chacune des observations, on verra jusqu'à quel point elles s'accordent pour donner à la tache une orbite plane. On trouve ainsi les valeurs suivantes, que je désignerai par les numéros des observations dont elles dérivent.

Valeurs de D.	Excès des valeurs de D sur la moyenne.	Oscillations de la déclinaison solaire de la tache autour de la moyenne.
$D' = -\,0{,}364238804$	$-\,0{,}003187289$	$-\,11'.43''$
$D'' = -\,0{,}367079962$	$-\,0{,}000346091$	$-\,1'.17''$
$D''' = -\,0{,}372176058$	$+\,0{,}004749965$	$+\,17'.27''$
$D^{\text{IV}} = -\,0{,}363065770$	$-\,0{,}004360323$	$-\,16'.\,0''$
$D^{\text{V}} = -\,0{,}370569872$	$+\,0{,}003143779$	$+\,11'.32''$

Ces écarts n'ont rien de régulier, et ils sont de moitié plus petits que ceux que nous avons trouvés en calculant les observations du 18 et du 24, par nos premières déterminations. Par cette raison, nos dernières valeurs paraissent préférables : en les employant et les introduisant dans les formules données plus haut, on trouve

Longitude du nœud ascendant de l'équateur solaire.	$N =$	$70°.44'.44''$
Inclinaison sur l'écliptique.	$I =$	$6°.21'.53''$
Déclinaison solaire de la tache. . . .	$d' =$	$-21°.25'.3''$ australe.

On trouve ensuite les arcs décrits entre la première observation et les suivantes, qui auront pour valeurs

$$43°.10'.57''$$
$$57°.43'.5''$$
$$113°.14'.20''$$
$$141°.29'.34''.$$

Comme ces diverses positions de la tache, au moins telles que l'observation les donne, ne sont pas exactement dans le plan du parallèle, à cause des erreurs que les observations comportent, on doit s'attendre que ces différens arcs ne donneront pas exactement la même durée pour la rotation entière ; il faut donc employer de préférence les observations qui étant les plus éloignées, comprennent le plus grand intervalle, et peuvent donner la révolution entière plus exactement. Nous prendrons ainsi les arcs parcourus entre la première observation et chacune des deux dernières : ces arcs sont

$$113°.14'.20'', \quad 141°.29'.34'';$$

les intervalles de tems moyen qui y correspondent sont

$$8^j.0^h.28'.45'' = 8^j,02275, \quad 10^j.1^h.11'.55'' = 10^j,04994.$$

La durée de la rotation déduite du premier arc est. . . . $25^j.5053$
du second . . . . $25^j.5700$

En multipliant le premier résultat par 8, le second par 10, et divisant la somme par 18, on aura un résultat moyen, où chacun des deux arcs influera proportionnellement au nombre de jours qu'il comprend ; on trouve ainsi

$$T = 25^{j}.54127.$$

Sans doute, pour obtenir cette détermination avec toute l'exactitude desirable, il faudrait pouvoir observer encore de plus longs intervalles, revoir une même tache après une révolution entière, ou combiner ensemble un nombre très-considérable d'observations. On a cet avantage pour la lune, dont les taches sont fixes, et l'on peut avec succès employer la méthode précédente, pour déterminer la position de son équateur. Cette méthode peut également servir pour déterminer l'équateur des planètes sur lesquelles on peut observer des taches constantes ; il faut seulement faire aux formules quelques modifications légères, pour les appliquer à ce problème. Nous indiquerons plus tard ces modifications, ou plutôt elles se présenteront d'elles-mêmes, quand nous aurons expliqué les lois des mouvemens des planètes ; mais dès à présent, l'application que nous venons de faire nous a conduits à un résultat utile, et nous a offert un exemple de l'emploi des équations de condition. On verra bientôt que les formules établies dans cette note nous deviendront utiles dans beaucoup d'autres circonstances, et qu'elles serviront à rendres claires et évidentes des déterminations qu'il serait difficile de comprendre sans leur secours.

CHAPITRE XIV.

De l'Inégalité des jours et des saisons dans les différens pays de la Terre.

149. REVENONS maintenant sur la terre, et puisque la présence du soleil a tant d'influence sur ses productions, servons-nous des connaissances que nous venons d'acquérir pour l'étudier sous ce nouveau rapport. Comparons les divers aspects qu'elle présente à cet astre, dans ses différentes positions : peut-être cette comparaison nous conduira-t-elle à des rapprochemens curieux.

Remarquons d'abord que nous ne pouvons pas fixer la trace du plan de l'écliptique sur la surface terrestre, comme nous y avons déja marqué celle de l'équateur. L'équateur est perpendiculaire à l'axe de rotation de la sphère céleste : en tournant avec elle, il ne change pas de position par rapport à la terre, qu'il coupe toujours dans les mêmes points. L'écliptique, au contraire, est oblique à l'axe de l'équateur : il est fixe dans le ciel, mais mobile par rapport à la terre : en tournant avec la sphère céleste, il coupe nécessairement la terre dans des points différens, et la trace qu'il y forme est perpétuellement variable (*).

(* On décrit ordinairement la trace de l'écliptique sur les globes destinés à l'étude de la géographie, et on la fait passer par les points où l'équateur coupe le premier méridien. Cet usage a un très-grand

Cependant nous pouvons fixer la limite de cette trace, et déterminer la partie de la terre où elle reste toujours comprise pendant la rotation. Elle est bornée au midi et au nord par deux parallèles terrestres, correspondans aux tropiques du capricorne et du cancer. Si l'on conçoit une ligne droite, menée du centre de la terre à deux points opposés des tropiques célestes, et qu'on fasse tourner la terre sur son axe, cette droite restant fixe, elle tracera sur la surface terrestre les deux parallèles dont il s'agit, et auxquels on a conservé les noms qui leur correspondent dans le ciel. Tous les lieux qui y sont situés ont un des points des tropiques célestes à leur zénith, et leur latitude est égale à l'obliquité de l'écliptique, ou à 26°,07, en négligeant les décimales ultérieures. Ces conditions suffisent pour les reconnaître.

150. Le *tropique du cancer*, ou *tropique boréal*, traverse la partie septentrionale de l'Afrique, sort au sud du mont Atlas; passe à Syène en Éthiopie, traverse la Mer Rouge, passe au nord de la Mecque, entre dans l'Inde au sud du golfe Persique, la traverse, et sort du continent par les côtes de la Chine; de là, se prolongeant dans la mer du Sud, il vient retrouver l'Amérique septentrionale à l'extrémité australe de la Californie. Enfin, il sort dans le golfe du Mexique, et va se terminer sur la côte occidentale de l'Afrique, non loin des îles Canaries.

151. Le *tropique du capricorne*, ou *tropique austral*, coupe la pointe australe de l'Afrique et de l'île de Madagascar. Il traverse toute la mer des Indes, jusqu'à la Nouvelle-Hol-

---

inconvénient : l'élève peut croire qu'en effet la trace de l'écliptique est fixe aux points marqués sur le globe, tandis qu'elle est réellement variable.

lande. Après avoir quitté cette terre, il s'étend sur la mer du Sud, dans toute sa largeur, traverse l'Amérique méridionale au pays du Paraguay, et va rejoindre l'Afrique en passant sur l'Océan. La très-grande partie de ce tropique passe sur des mers. En général la partie australe du globe contient beaucoup moins de terres abandonnées par les eaux que n'en contient la partie septentrionale.

152. Il est encore utile pour la géographie physique, de distinguer sur la surface de la terre deux petits cercles analogues aux cercles polaires célestes. Si l'on fait tourner la terre sur elle-même, dans le sens du mouvement diurne, l'axe de l'écliptique restant fixe, cet axe tracera sur sa surface les parallèles dont il s'agit. Les lieux qui y sont situés ont un point des cercles polaires à leur zénith; leur latitude est donc égale à la déclinaison de ces cercles; ou à 73,93. C'est le complément de l'obliquité de l'écliptique à l'équateur.

153. Le *cercle polaire boréal* ou *arctique*, traverse l'Islande dans l'Océan septentrional; il s'étend sur cet océan vers l'est, entre dans la Norwège, passe à l'extrémité nord du golfe de Bothnie, de là traverse la Russie asiatique, le Détroit du nord; et après avoir passé sur des contrées inconnues de l'Amérique septentrionale, franchi le détroit de Davis, une partie du Groenland, il rentre en Islande sur lui-même.

154. Le *cercle polaire austral* ou *antarctique*, est défendu de tous côtés par des glaces perpétuelles, et l'on n'a pas pu, jusqu'à présent, en approcher.

155. Généralement, l'hémisphère austral de la terre paraît plus froid que l'hémisphère boréal. La ceinture

de glace qui environne le pôle arctique ne s'étend guère qu'à 10° de distance en latitude; celle du pôle antarctique, s'étend à plus de 20° ; et les énormes glaçons qui s'en détachent, voyagent jusqu'au 65e. degré et même jusqu'au 55e., ce qui est à-peu-près la latitude de Boulogne et d'Abbeville. La même proportion se soutient de part et d'autre pour les terres que les eaux ont abandonnées; et des contrées, telles que la Terre de Feu, situées dans l'hémisphère austral, à la même latitude que la France, y sont couvertes de neiges éternelles. Nous verrons, plus loin, ce que l'on a pensé sur la cause de cette différence.

Les deux cercles polaires et les deux tropiques partagent la surface de la terre en cinq bandes, que l'on nomme *zônes*, et qui sont aussi distinctes les unes des autres par leur position à l'égard du soleil, que par la variété de leurs productions et de leur température.

156. Pour bien saisir ces variétés, suivons la marche du soleil d'un tropique à l'autre, et comme la chaleur qu'il répand ne dépend que de son élévation et de la durée de sa présence, il nous suffira, dans cette recherche, d'avoir égard à son mouvement en déclinaison.

Le soleil, à cause de sa grandeur, éclaire à-la-fois plus de la moitié de la terre ; car on prouve, par les éclipses de lune, que l'ombre terrestre a la forme d'un cône très-alongé. Mais les rayons de ce cône se croisent sous un si petit angle, qu'on peut n'en pas tenir compte dans ces considérations générales, et regarder les rayons solaires comme absolument parallèles. Alors, si l'on conçoit une ligne droite, menée du centre de la terre au centre du soleil, le plan perpendiculaire à cette droite séparera, sur la surface terrestre, la partie éclairée de la partie obscure. Le cercle qui forme cette limite s'appelle le *cercle d'illumination*.

Supposons maintenant le soleil au tropique austral, en *S*, *fig*. 35. Alors le rayon *CS* fait avec l'équateur *CE* un angle de 26°,07 égal à l'obliquité de l'écliptique. Le cercle d'illumination *II'* fait, avec le même plan, un angle *ICE* de 100° — 26°,07 ou 73°,93, égal au complément de cette obliquité. Ainsi, le parallèle *IP* est le cercle polaire arctique, et *I'P'* est le cercle polaire antarctique. Maintenant, si l'on fait tourner la terre autour de l'axe *AB* de l'équateur, pour représenter l'effet du mouvement diurne, voici ce qui arrivera :

L'équateur *EQ* sera à moitié dans la lumière et à moitié dans l'ombre : la durée du jour y sera égale à celle de la nuit.

Tous les points situés depuis le pôle boréal *B* jusqu'au cercle polaire arctique *IP*, n'auront pas de jour.

Tous les points situés depuis le pôle austral *A* jusqu'au cercle polaire antarctique *I'P'*, n'auront pas de nuit.

Les parallèles intermédiaires entre ces deux extrêmes, auront la nuit plus longue que le jour, ou le jour plus long que la nuit, selon qu'ils seront situés au nord ou au midi de l'équateur.

Enfin, cette position du soleil sera le solstice d'hiver pour les parallèles du nord, situés au-delà des tropiques, ce sera le solstice d'été pour ceux du midi.

A mesure que le soleil s'avance vers l'équateur, *fig*. 36, le cercle d'illumination *II'* s'avance vers les pôles : il abandonne un peu le cercle polaire austral *P'p'*, dont une partie se trouve plongée dans l'ombre ; il découvre, au contraire, le cercle polaire boréal *Pp'*, qui commence à appercevoir le soleil. Par l'effet de ce changement, les jours croissent pour les peuples du nord, ils diminuent pour ceux du midi.

Généralement le parallèle boréal qui commence à voir le jour, a sa distance polaire égale à la déclinaison du bord supérieur du soleil, c'est-à-dire à la déclinaison du centre, moins le demi-diamètre apparent ; et le parallèle austral qui commence à voir la nuit, a sa distance polaire égale à celle du centre du soleil, plus le demi-diamètre apparent. Il est évident qu'il faut employer ici la déclinaison apparente, c'est-à-dire affectée de la réfraction moins la parallaxe à l'horison.

Parvenu dans le plan de l'équateur, *fig.* 37, le soleil éclaire la terre d'un pôle à l'autre, et les jours sont partout égaux aux nuits : c'est l'instant de l'équinoxe.

Bientôt cet astre, en s'avançant vers le tropique boréal, abandonne tout-à-fait le pôle austral, qui se trouve plongé dans l'ombre ; il éclaire entièrement le pôle boréal : alors celui-ci a des jours sans nuits, et l'autre des nuits sans jour : l'égalité se maintient constamment à l'équateur. Voy. *fig.* 38.

Cet état progressif continue jusqu'à ce que le soleil arrive au tropique boréal, *fig.* 39.

Alors tous les points situés depuis le pôle boréal jusqu'au cercle polaire arctique, ont des jours sans nuits.

Tous les points situés depuis le pôle austral jusqu'au cercle polaire antarctique, ont des nuits sans jour.

Les parallèles intermédiaires ont le jour plus long que la nuit, ou la nuit plus longue que le jour, selon qu'ils sont situés au nord ou au midi de l'équateur, qui conserve toujours l'égalité.

C'est l'instant du solstice d'été pour les parallèles du nord, situés au-delà du tropique ; c'est le solstice d'hiver pour ceux du midi.

Ces phénomènes sont opposés à ceux que présente la position du soleil, dans le tropique austral. En revenant vers ce tropique, les mêmes apparences se reproduisent en sens contraire, par les mêmes degrés (*).

La zône comprise entre les deux tropiques, a toujours le soleil presque à-plomb. La chaleur y est excessive, et c'est pour cela qu'on la nomme *zône torride*, c'est-à-dire, *brûlée.* C'est là que la nature déploie toutes ses

---

(*) Il est facile de calculer, en général, la durée du jour et celle de la nuit dans un lieu quelconque de la terre et pour un instant quelconque de l'année, quand on connaît la latitude du lieu et la déclinaison du soleil. En effet, considérons le triangle sphérique formé par trois rayons visuels menés de l'observateur au zénith, à l'astre et au pôle, à l'instant où l'astre paraît sur l'horison. Dans ce triangle, on connaît les trois côtés, savoir, la distance du pôle au zénith que je nomme D, la distance polaire de l'astre que je nomme Δ, enfin, la distance de l'astre au zénith à l'instant où il se lève, distance que je nommerai Z, et qui est égale à 100° + réfraction — parallaxe. Avec ces données, on peut calculer l'angle horaire P, opposé au côté Z, au moyen de la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(Z + \Delta - D) \sin \frac{1}{2}(Z + D - \Delta)}{\sin \Delta \cdot \sin D}}.$$

L'angle P réduit en tems, fera connaître le tems qui s'écoule depuis l'instant du lever de l'astre jusqu'à son passage au méridien. C'est la moitié du tems que l'astre reste au-dessus de l'horison; par cette raison, cet arc P est appelé, en astronomie, *l'arc semi-diurne.*

En mettant, dans cette formule, pour Z, Δ et D leurs valeurs, on trouvera la valeur de P, et, par conséquent, la durée du jour solaire dans le lieu et pour l'époque que l'on aura considérés. On trouverait, par la même formule, l'arc semi-diurne d'un astre quelconque.

Le même triangle sphérique que nous venons d'employer peut servir encore à déterminer le point de l'horison où le soleil se lève et se couche chaque jour dans un lieu donné; car puisque l'effet de la réfraction et de la parallaxe se porte tout entier dans les verticaux, l'angle formé au zénith, entre le plan du méridien et le richesses : les animaux, les plantes, et même les substances inorganiques, y sont douées des plus vives couleurs. On y trouve les fruits les plus savoureux.

Au contraire, les régions comprises depuis les pôles jusqu'aux cercles polaires, ne voient jamais le soleil que sous une très-grande obliquité. Elles ont de longs intervalles de jours et de nuits, et sous le pôle, il n'y a dans l'année qu'un jour et une nuit de six mois. Le froid est excessif dans ces contrées; elles sont stériles et presque inhabitables, même du côté du pôle boréal. On les nomme les *zônes glaciales*.

---

vertical de l'astre, à l'instant où il se lève, est précisément l'azimuth du point de l'horison où il semble se lever. Soit donc A cet azimuth, compté du nord : il est opposé au côté Δ dans notre triangle; ainsi on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\Delta + Z - D) \sin \frac{1}{2}(\Delta + D - Z)}{\sin Z \sin D}}.$$

Le complément de l'angle A s'appelle l'*amplitude ortive de l'astre*, quand on le compte vers le levant, et l'*amplitude occase*, quand on le compte vers le couchant Ce sont les distances du lever et du coucher de l'astre aux points d'est et d'ouest.

On pourrait trouver encore une expression plus simple de l'azimuth A en considérant le triangle sphérique rectangle formé par les trois rayons visuels menés à l'astre, au pôle et au point nord de la méridienne, à l'instant même où l'astre paraît sur l'horison. Car dans ce triangle, la distance polaire apparente Δ' sera l'hypothénuse, et l'azimuth A, ou l'arc de l'horison qui le mesure, sera un des côtés de l'angle droit; on aura donc ainsi

$$\cos A = \frac{\cos \Delta'}{\sin D}.$$

Mais pour employer cette expression, il faudrait corriger la distance polaire vraie Δ de l'effet que produit sur elle la réfraction et la parallaxe, afin d'obtenir la valeur de Δ'; de sorte que le calcul par l'autre formule devient encore plus simple.

Les pays, tels que notre Europe, intermédiaires entre les tropiques et les cercles polaires, ne recevant jamais le soleil sous une trop grande, ni sous une trop petite obliquité, et n'étant point exposés à de longues alternatives de jour et de nuit, conservent une température moyenne, qui leur a mérité le nom de *zônes tempérées*.

157. Il existe toutefois plusieurs causes qui tendent à diminuer la longue obscurité des régions polaires. D'abord la plus petite portion visible du disque du soleil suffit pour répandre le jour. Ainsi le jour commence lorsque le centre du disque du soleil est encore abaissé sous l'horison de 0°,29, c'est-à-dire, d'une quantité presque égale à son demi-diamètre. Cette circonstance ajoute plusieurs jours au tems où le soleil est visible, sous les cercles polaires. Les réfractions augmentent encore cet effet, et d'autant plus qu'elles sont considérables dans ces pays glacés, où l'air se trouve condensé par le froid. Une autre cause doit les accroître encore, c'est la congélation presque habituelle de la surface du sol, qui rend le décroissement de la densité de l'air très-rapide à de petites hauteurs. Ces circonstances réunies doivent souvent produire des réfractions extraordinaires qui rendent le soleil visible beaucoup plutôt. C'est ce qu'observèrent, en 1597, trois Hollandais qui, s'étant avancés jusqu'au 84° de latitude boréale, se trouvèrent pris par les glaces, et furent forcés de passer l'hiver à la Nouvelle-Zemble. Après trois mois d'une nuit continuelle, le froid étant devenu terrible, le soleil reparut un instant, à midi, sur l'horison, quatorze jours plutôt qu'ils ne l'attendaient à cette latitude, et il continua, depuis cette époque, à s'élever de plus en plus; relation qui, si elle est véritable, suppose une réfraction considérable, et pour le moins égale à 4°.

Le crépuscule, plus long dans ces contrées que dans les nôtres, y maintient encore une faible lueur, qui les garantit d'une obscurité totale. Pour concevoir cet effet, il faut savoir que le crépuscule ne cesse d'être sensible, que quand le soleil est abaissé sous l'horison d'environ 20°. On estime cette limite par expérience, en observant le tems qui s'écoule depuis le coucher du soleil jusqu'à l'instant où l'on peut voir les petites étoiles à la vue simple. Si donc on mène un plan parallèle à l'horison, et qui passe à 20° au-dessous du centre de la terre, le crépuscule sera sensible jusqu'à ce que le bord supérieur du soleil ait atteint ce plan. Supposons-nous maintenant placés au pôle boréal, désigné par *B*, *fig.* 40; nous avons l'équateur à l'horison : le soleil restera visible tant que son bord supérieur élevé par la réfraction moins la parallaxe sera au-dessus de ce plan, nous le perdrons de vue quand il passera au-dessous ; mais le crépuscule nous éclairera encore, tant que cet abaissement sera moindre que 20°. Or, le plus grand abaissement du soleil a lieu quand cet astre arrive au tropique austral, éloigné de 26°,07 de l'équateur. Ainsi en comptant seulement 1°,1 pour le demi-diamètre du soleil, plus la réfraction moins la parallaxe à l'horison, il n'y aura d'obscurité totale au pôle, que dans le tems employé par le soleil pour parcourir 26°,07—20°—1°,1 ou environ 5° avant et après le solstice, ce qui fait seulement 70 jours, au lieu des six mois de nuit qui auraient eu lieu sans cette circonstance. Cette durée sera beaucoup moindre, si, au lieu de nous supposer au pôle, nous nous plaçons sur quelque parallèle plus rapproché du cercle polaire, et sur lequel les hommes puissent habiter (*).

(*) Prenons pour exemple un parallèle boréal. Soit *D* sa distance au pôle boréal de l'équateur. S'il n'y avait ni réfraction ni parallaxe,

158. De plus, lorsque la lune passe au nord de l'équateur, elle tourne constamment autour du pôle, et les habitans des régions polaires l'apperçoivent toujours sur l'horison,

---

ce parallèle commencerait à être éclairé quand la déclinaison δ du soleil, supposée australe, diminuée de son demi-diamètre apparent d, égalerait la distance D du pôle au zénith, c'est-à-dire, quand on aurait

$$D = \delta - d, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \delta = D + d,$$

et il finirait d'être éclairé quand le soleil reprendrait cette même déclinaison. En cherchant dans les tables du soleil les deux époques de ce phénomène, et prenant leur différence, on aurait le tems de l'année pendant lequel ce parallèle se trouve éclairé. Le complément de cette quantité à la durée d'une année tropique, donnerait le tems pendant lequel le parallèle se trouve plongé dans la nuit.

Mais à cause de la réfraction et de la parallaxe, il faudra employer au lieu de δ, la déclinaison apparente δ — réf. + parall., ce qui donnera

$$D = \delta - d - \text{réf.} + \text{parall.}, \quad \text{par conséquent} \quad \delta = D + d + \text{réf} - \text{parall.};$$

enfin, si l'on veut tenir compte aussi du crépuscule, il faudra encore mettre $\delta - 20^\circ$ au lieu de δ dans l'équation précédente, et l'époque à laquelle la lumière du crépuscule commencera à devenir sensible à midi, sera donnée par l'équation

$$D = \delta - d - 20^\circ - \text{réf.} + \text{parall.}, \quad \text{par conséquent}, \quad \delta = D + d + 20^\circ + \text{réf.} - \text{parall.}$$

La réfraction augmente donc la valeur de δ, pour laquelle la nuit finit et le jour commence; elle accroît donc la durée du tems pendant lequel le parallèle se trouve éclairé; le crépuscule augmente encore cet effet, en ajoutant 20° à cette déclinaison.

Dans tous ces calculs, la réfraction et la parallaxe doivent être prises l'une et l'autre à l'horison; mais la valeur de la première, variant avec la température et la pression atmosphérique, peut accélérer ou retarder l'époque à laquelle le parallèle commence à revoir la lumière.

comme ils voient toujours le soleil quand il s'approche du tropique boréal.

Enfin, un grand nombre de météores ignés, tels que des aurores boréales et des globes de feu très-fréquens, jettent encore quelques lueurs sur ces contrées sauvages.

159. Puisque j'ai commencé à parler du crépuscule, il ne sera pas hors de propos de donner quelques détails sur ce sujet. Soit O, *fig.* 41, l'observateur placé sur la terre, et considéré comme étant au centre de la sphère céleste; soit ABH l'horison, EQ l'équateur, HEH' le méridien, et $A'B'C'$ le cercle crépusculaire, abaissé sous l'horison de 20°. Le crépuscule ne cessera que quand le soleil aura atteint cette limite; mais il ne l'atteindra pas toujours dans le même tems. En effet, en faisant abstraction des inégalités de son mouvement propre, qui sont ici de peu d'mportance, cet astre décrit le même nombre de degrés en tems égal, sur quelque parallèle qu'il se trouve. Or les arcs AA', BB', CC' contiennent des nombres de degrés différens; d'abord parce qu'ils sont inégaux en longueurs, et en second lieu parce que les longueurs des degrés y sont inégales. Ces deux causes se contrarient mutuellement : en effet, si l'on considère un parallèle austral situé très-près de l'équateur, il est facile de voir que l'accroissement de la déclinaison australe tend d'abord à diminuer la longueur de l'arc AA'. Car le parallèle devenant austral, les plans de l'horison et du cercle crépusculaire le coupent plus près de son centre que s'il était boréal. L'arc AA' intercepté par ces plans leur devient moins oblique, et comme leur plus courte distance est toujours la même, la longueur des arcs interceptés diminue avec leur obliquité. Mais d'un autre côté, à mesure que la décli-

naison augmente, le rayon du parallèle diminue, et le nombre de degrés devient plus grand sur la même longueur. On sent donc qu'il doit exister un parallèle sur lequel la compensation se fait de la manière la plus avantageuse ; c'est lui qui donne le plus court crépuscule. Le calcul fait voir que, pour Paris, ce parallèle est situé un peu au-delà de l'équateur, à $7^{\circ},61$ de déclinaison australe. Lorsque le soleil se trouve sur ce parallèle, le crépuscule est, à Paris, de $0^{j},0743$ ($1^{h},47'$ sex.). Cette durée varie pour les différens lieux. Mais le plus court de tous les crépuscules possibles a lieu à l'équateur au tems de l'équinoxe ; il est de $0^{j},050$ ($1^{h},12'$). Le plus long crépuscule, au contraire, a lieu au solstice d'été, pour tous les pays de la terre qui ont la *sphère oblique*, c'est-à-dire, pour lesquels l'axe de l'équateur est incliné à l'horison ; à Paris, sa durée est de $0^{\circ},1104$ ($2^{h},39'$).

Je ne puis donner ici la démonstration de ces résultats qui supposent l'usage de l'analyse infinitésimale ; d'ailleurs tous les problêmes que l'on peut se proposer sur la durée du crépuscule sont de pure curiosité, et ne sont susceptibles d'aucune exactitude. Sa durée même, élément principal de ces calculs, n'est qu'une évaluation arbitraire que chacun peut augmenter ou diminuer, selon la force de sa vue. Enfin les variations de température et de pression atmosphérique en condensant ou en dilatant l'atmosphère, y apportent de très-grandes variations, qui deviennent même sensibles dans l'intervalle d'un jour; car généralement le crépuscule du soir est plus long que le crépuscule du matin. Par toutes ces raisons, on doit peu regretter que nous ne soyons pas entrés dans de plus grands détails sur ce sujet.

160. Les observations du crépuscule font connaître la

hauteur de l'atmosphère, ou plutôt celle des particules d'air dont la densité est encore assez grande pour nous renvoyer une lumière sensible. En effet, soit C, *fig.* 42, le centre de la terre, O l'observateur placé à sa surface, et SH la direction des rayons solaires à la fin du crépuscule, c'est-à-dire, lorsque l'angle $S'CH'$, qu'ils forment avec l'horison, est de 20°. Alors, les dernières molécules de l'atmosphère qui nous renvoient la lumière, sont à l'horison en H; et le rayon lumineux SH, qui les éclaire, est tangent à la terre. Ainsi, en menant le rayon CO et la sécante CH, l'angle $O'CO$, égal à $H'CS'$, sera de 20°, et HCO sera de 10°. Or, si l'on cherche dans les tables trigonométriques la sécante de 10°, on la trouve égale à 1,01, le rayon étant pris pour unité. La flèche GH est donc égale à la centième partie du rayon terrestre, ou à 60000 mètres, en prenant simplement 6000000 mètres pour la longueur de ce rayon. Ainsi, les couches supérieures de l'atmosphère sont élevées au moins de 60000 mètres. Comme les observations sur lesquelles ce résultat repose ne comportent pas une grande exactitude, on ne peut le regarder que comme une limite. C'est pour cela que j'ai négligé les fractions dans le calcul, et par la même raison, je n'ai point eu égard aux réfractions atmosphériques, qui cependant influent sur la durée du crépuscule, et le prolongent de quelques instans.

161. Au reste, ce que nous venons de dire sur les limites du crépuscule, n'est applicable qu'aux plaines; il paraît que sur le sommet des hautes montagnes, la clarté réfléchie par l'atmosphère, est beaucoup plus longtems sensible; non pas à la vérité qu'elle vienne des couches mêmes où l'on est placé, car leur densité est au contraire très-faible à ces hauteurs : mais elle est réfléchie par la masse d'air, épaisse et profonde, qui borde l'horison de

toutes parts. Pendant plusieurs nuits que Saussure passa sur une montagne des Alpes, qui a 3435 mètres de hauteur, et que l'on nomme le *Col du Géant*, il vit tout le contour de l'horison ceint d'une lueur pâle, mais distincte, qui durait depuis le coucher jusqu'au lever du soleil; quoique cet astre, au milieu de la nuit, se trouvât abaissé bien au-dessous des limites ordinaires du crépuscule, puisqu'il se trouvait alors à plus de 50° sous l'horison. M. de Humboldt a observé une lueur semblable du haut du volcan d'Antisana. On a supposé que ce phénomène était produit par des vapeurs phosphoriques répandues dans l'air; mais dans le travail sur les réfractions extraordinaires dont j'ai parlé dans le premier livre, j'ai prouvé par le calcul qu'un décroissement de densité de l'air, un peu plus rapide que celui qui a lieu ordinairement dans les couches inférieures de l'atmosphère, suffit pour produire cet effet, et pourrait même ramener ainsi jusqu'à l'observateur, placé sur le sommet d'une montagne, la lumière infléchie de l'hémisphère opposé du ciel. Nous remarquerons plus loin un phénomène analogue produit par la même cause dans les éclipses de lune.

CHAPITRE XV.

De la Température de la Terre.

162. QUAND on réfléchit sur la diversité des êtres qui peuplent notre globe terrestre, et sur la multitude des végétaux qui y croissent, on est étonné que ces modifications infinies puissent résulter de la seule différence de la température dans les divers lieux. Aussi les physiciens se sont-ils beaucoup attachés à étudier une cause aussi étendue et aussi générale.

On ne fait d'abord aucun doute que le soleil ne soit la source de cette chaleur qui féconde la terre; cependant quelques phénomènes semblent indiquer au premier coup-d'œil que notre globe a aussi une chaleur propre, et indépendante de la présence du soleil. On sait que la température se maintient constamment la même dans les souterrains à 27 ou 30 mètres de profondeur (80 ou 100 pieds). Passé ce terme, on ne ressent ni les grands froids de l'hiver, ni les chaleurs brûlantes de l'été. On a aussi observé que les amas de glaces qui recouvrent certaines montagnes des Alpes, se fondent continuellement par le pied, lorsqu'elles sont assez épaisses pour préserver du froid extérieur le terrain sur lequel elles reposent; et de dessous ces glaciers sortent des courans d'eau vive qui coulent même pendant l'hiver.

Quelques physiciens ont cru voir dans ces phénomènes les traces d'un ancien état d'embrâsement. Selon eux, c'est par l'effet d'un refroidissement très-lent que la surface de la terre est parvenue à la température actuelle ; et l'intérieur de la masse, exposé à une déperdition moins considérable, a conservé une chaleur plus grande, qu'ils appellent la *chaleur centrale*, et à laquelle ils attribuent les effets que nous venons de rapporter.

D'autres philosophes, frappés de l'ordre qui règne dans l'univers, où tout paraît disposé pour un état durable, ont cherché la raison de ces mêmes faits dans une cause permanente, et ils ont vu qu'on peut également les expliquer par la seule action longtems prolongée de la chaleur solaire.

Chaque année, le soleil envoie à la terre une certaine quantité de feu. Si ce feu s'accumulait sans cesse, la température s'éleverait à proportion, et la terre serait depuis longtems embrâsée. Mais une grande partie se dissipe insensiblement dans l'espace ; car c'est un fait certain que l'air n'arrête pas la chaleur qui *rayonne* dans tous les sens, en s'exhalant des corps échauffés. La perte qui résulte de ce rayonnement, augmente avec la température, et lui est proportionnelle. Ces deux causes contraires, agissant peut-être depuis des milliers de siècles, ont dû porter, depuis longtems, la terre, au degré de température qu'elle pouvait atteindre. Alors il s'est établi un certain équilibre entre la chaleur qui vient annuellement du soleil, et celle qui se dissipe annuellement. De là l'état constant et durable de la température.

Tous les points de la surface terrestre ne sont pas placés dans des situations également favorables pour recevoir l'action du soleil. Par exemple, les pays qui se trouvent entre les tropiques, sont plus fortement échauffés que les pôles. La quantité de chaleur rayonnante qu'ils émettent dans l'espace, est donc également variable, puisqu'elle est proportionnelle à leur température. Il doit donc s'établir à la longue des différences dans la température de la surface de la terre pour ces différens points ; c'est ce que l'observation confirme. Il est connu que dans certains lieux de la Sibérie, la terre ne dégèle jamais ; et en Égypte, au contraire, à plus de 60 mètres de profondeur (200 pieds), la température a été trouvée de 22°,5 du thermomètre centigrade (*) : tandis qu'à Paris, qui se trouve intermédiaire entre ces deux extrêmes, la température des caves de l'Observatoire se maintient constamment à 12°. La table suivante montre avec un peu plus d'étendue la marche de ces résultats pour différentes latitudes (**).

LATITUDES.	NOMS DES VILLES.	TEMPERATURE MOYENNE.
77°,87	Wadso, en Laponie.	2°,2
66, 6	Pétersbourg........	4,2
54,26	Paris..............	12,0
46,54	Rome.............	15,9
33,04	Le Kaire..........	22,5
22,20	Dans l'Océan	26,0
00,00	Dans l'Océan.......	27,0

(*) Cette expérience a été faite au fond du puits de Joseph, par les membres de la Commission des arts et des sciences, attachés à l'expédition d'Égypte.

(**) Les deux dernières observations sont extraites du Voyage de M. de Humboldt.

Cette table, extraite des observations les plus exactes, prouve incontestablement que *la température du globe terrestre, observée près de sa surface, décroît de l'équateur aux pôles.* Mais la loi de ce décroissement n'est pas encore bien connue; c'est une question que les voyages décideront.

163. Au reste, on doit s'attendre à y découvrir de grandes irrégularités; car les circonstances locales ont une grande influence sur la température de chaque lieu, et les accidens naturels, ou les travaux des hommes en changeant ces circonstances, ont pu souvent la modifier.

Une des causes principales de ces différences, est l'élévation des lieux au-dessus du niveau de la mer.

On sait, par expérience, que la température de l'atmosphère n'est pas la même à toutes les hauteurs; elle *diminue à mesure que l'on s'éloigne de la surface terrestre.* Les physiciens ont fait beaucoup d'expériences pour déterminer la loi de ce décroissement; mais ils y ont trouvé de grandes irrégularités. On conçoit, en effet, qu'elle doit dépendre de la forme du terrain, de son exposition, de la faculté rayonnante qu'il possède : ainsi le décroissement de la température ne sera pas le même au-dessus d'une vaste plaine aride et sur le penchant d'un pic isolé. Cependant, au milieu de ces irrégularités, on est parvenu à fixer quelques limites extrêmes. Le décroissement de la température paraît dépendre de la température inférieure de la surface : il est plus rapide quand cette température est plus haute; plus lent quand elle est plus basse. Par exemple, en Europe, suivant les observations de Saussure, il faut, pendant l'été, s'élever de 160 mètres, pour que le thermomètre baisse de 1°. centésimal; en hiver, suivant le même observateur, il faut s'élever de 230 mètres, pour avoir le même abaissement. Le décroissement moyen de toute l'année doit donc généralement dépendre de la température moyenne du lieu, et par conséquent se rallentir à mesure que l'on va de l'équateur vers les pôles. Toutefois ce rallentissement même dans les cas extrêmes n'est pas très-considérable. Car dans les froids les plus rigoureux de la Laponie, le décroissement est au plus de 244 mètres pour un degré centésimal. Nous ne parlons ici que des couches inférieures de l'atmosphère, de celles qui sont assez voisines de la surface terrestre, pour éprouver sensiblement l'influence de sa température propre, soit par réflexion, soit par rayonnement. En effet cette influence doit s'affaiblir en s'étendant à mesure que l'élévation des couches augmente, et probablement à de grandes hauteurs dans l'atmosphère, la température de l'air est à fort peu près la même, la nuit, le jour, et dans toutes les saisons de l'année. Il est également probable qu'à ces élévations la température ne décroît plus en progression arithmétique, ou du moins cette progression ne doit pas y être la même que près de la surface. Plusieurs phénomènes, et particulièrement quelques accidens des réfractions extraordinaires, semblent indiquer que le décroissement de la température s'y fait avec plus de rapidité.

164. Par une suite de ce décroissement, il arrive que, dans tous les pays, même sous la zône torride, le sommet des hautes montagnes est couvert de neiges qui ne se fondent jamais. Cette ligne de neiges perpétuelles est placée à des élévations différentes, suivant les diverses latitudes. Sous l'équateur elle commence à 4800 mètres (2400 toises). On la rencontre à 2900 mètres (14 ou 1500 toises) vers le milieu des zônes tempérées, et elle s'abaisse ainsi graduellement jusqu'à la surface de la terre

qu'elle atteint dans le voisinage des pôles. Là, le sol est constamment dans l'état de congélation.

Voici un tableau de cette progression qui a été dressé par M. de Humboldt.

LATITUDES boréales exprimées en grades.	HAUTEURS de la limite inférieure des neiges perpétuelles au-dessus du niveau de la mer.	TEMPÉRATURE moyenne de la plaine aux mêmes latitudes.	NOMS des observateurs.
0°,00	4800m	27°	Bouguer. La Condamine. Humboldt.
22,22	4600	26	Humboldt.
50, 0	2550	12,7	Saussure. Ramond.
68,89	1750	4	Buch.
72,22	950	0	Ohlsen. Vetlafsen.

Il paraît, ajoute M. de Humboldt, qu'il ne faut pas confondre la limite inférieure des neiges perpétuelles avec la limite de la congélation. Les observations prouvent que la couche d'air, par laquelle passe la courbe des neiges perpétuelles, n'a pas la même température moyenne dans les différentes zônes du globe ; elle est *au-dessus* de zéro à l'équateur, *au-dessous* dans les régions boréales. Par exemple, le couvent du Saint-Gothard est à 600 mètres au-dessous des neiges perpétuelles, et pourtant la température moyenne y est déja de — 1°.

Ce grand froid que l'on éprouve sur les hautes montagnes, paraît dû à deux causes : d'abord au peu de densité de l'air, qui n'intercepte qu'une très-petite partie de la chaleur solaire; secondement, à la conformation même des montagnes; par exemple, à l'isolement des pics élevés, à leur éloignement du reste de la masse terrestre, à leur escarpement vertical, qui ne permet jamais au soleil de les éclairer que d'un seul côté à-la-fois, et qui leur fait toujours projeter leur ombre les uns sur les autres. Toutes ces circonstances diminuent considérablement la réverbération de la chaleur; or, c'est cette réverbération qui élève si fortement la température des plaines, et particulièrement celles de la zône torride, où le soleil donne toujours presque à-plomb.

Parmi les causes générales qui modifient la température des lieux, nous n'avons jusqu'ici considéré que la hauteur. Le voisinage des mers a aussi beaucoup d'influence, non pas peut-être pour élever ou pour abaisser la température annuelle, mais pour la rendre égale; car on a trouvé, par expérience, que la température de la mer, au large et loin des côtes, se maintient toujours à-peu-près constante et égale à la température moyenne de l'air pendant toute l'année. Cela vient sans doute de ce que la masse des eaux se mêle continuellement, par l'action des vents et des autres causes qui les agitent, et même par les variations continuelles qu'éprouve la température de leur surface; au lieu que la surface solide des terres s'échauffe davantage et se refroidit plus rapidement, sans pouvoir faire partager sa chaleur aux couches inférieures, ou en recevoir d'elles autrement que par une communication lente; partage qui, dans les fluides, se fait par le contact même des particules mélangées. Ainsi les mers doivent être, pour les lieux qu'elles avoisinent, comme de vastes réservoirs de température toujours égale, qui les réchauffent dans l'hiver, et les rafraîchissent dans l'été : aussi les bords de la mer sont-ils, en général, plus tempérés que l'intérieur des terres. Les effets de cette égalité se font sentir sur les végétaux qui y croissent. On voit vivre naturellement, et à l'air libre, sur les côtes de la Bretagne, des arbres que, dans les contrées beaucoup plus méridionales, mais aussi plus intérieures de la France, on est obligé d'abriter en orangerie pendant l'hiver, parce qu'ils ne pourraient point en supporter la rigueur. L'*arbutus unedo*, arbrisseau originaire des contrées méridionales, se voit dans l'Irlande en forêts.

Les courans constans qui existent à la surface de certaines mers, sont encore une cause de modification puissante pour les lieux qu'ils traversent; car, selon que les eaux qu'ils y portent, viennent d'une latitude plus chaude ou plus froide, la température propre des lieux en est élevée ou abaissée. Le plus remarquable de ces courans, est celui que l'on nomme le *Gulph Stream*, ou *Courant du Golphe*. Il est formé par les eaux de l'océan, comprises entre les tropiques, qui poussées continuellement d'orient en occident, par le souffle éternel des *vents alisés*, dont nous aurons occasion de parler tout-à-l'heure, vont s'engouffrer dans le golfe du Mexique; et de là, refluant vers le nord, forment comme un fleuve d'eau chaude qui traverse l'océan atlantique. Ces eaux de la zône torride, transportées dans des régions plus froides, exhalent d'abondantes vapeurs qui se condensent en épais brouillards : ces phénomènes sont tellement constans, qu'ils servent aux navigateurs pour leur indiquer la longitude. Le *Gulph Stream* remonte au-delà du banc de Terre-Neuve, et va jeter des fruits de la Jamaïque sur les côtes de l'Irlande et de la Norwège

Un autre phénomène bien curieux, et qui paraît également produit par des circonstances locales, c'est celui des grands froids observés vers le pôle austral ; car ils surpassent beaucoup ceux qu'on observe dans le nord à pareille latitude, puisque les montagnes de glaces qui, dans l'hémisphère boréal, sont reléguées près du pôle, s'avancent, sans se fondre, dans l'hémisphère austral, jusque par les latitudes de Boulogne et d'Abbeville ; effet d'autant plus singulier qu'il n'a lieu que pour les latitudes élevées. La température est la même jusqu'à 44° de latitude des deux côtés de l'équateur.

Quelques physiciens ont cherché la cause de ces phénomènes dans l'ellipticité de l'orbe solaire. En effet, la température d'un lieu résulte de la distance du soleil, de sa hauteur sur l'horison, et de la durée de sa présence. Dans notre hémisphère, nous avons l'hiver quand le soleil est périgée, et l'été quand il est apogée. Cette disposition paraît devoir tempérer les chaleurs et modérer les froids que nous éprouvons. C'est le contraire dans l'hémisphère austral, et la différence du froid au chaud doit en être augmentée. Par une autre conséquence de notre position, le tems où le soleil est bas sur notre horison, est plus court que celui où il est plus élevé : actuellement la différence est d'environ sept jours ; et cette seconde cause peut contribuer à nous donner une température moyenne plus chaude. Peut-être aussi la grande étendue des mers qui recouvre l'autre hémisphère, contribue-t-elle puissamment à le refroidir par l'évaporation qu'elles occasionnent, et aussi parce qu'elles s'échauffent moins que les terres. Enfin la marche différente que *suivent les décroissemens et les déperditions* de chaleur pour les deux hémisphères, en raison de leur position relativement à l'orbite du soleil, doit aussi modifier leur température ; car, en vertu de cette différence ; les deux hémisphères, quoique recevant des quantités égales de chaleur, les perdraient par le rayonnement, suivant des lois inégales, plus promptement dans l'hémisphère austral où la chaleur absolue de l'été est plus intense ; moins promptement dans l'hémisphère boréal. Mais l'examen comparé de toutes ces causes nous mènerait trop loin ; et peut-être, pour comparer leur influence avec exactitude, faut-il attendre que les voyages maritimes, qui se multiplient de nos jours vers la partie australe du globe, aient réuni plus de faits positifs sur cette importante question. Jusqu'alors, nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer les lecteurs à l'excellent ouvrage de M. Prevost de Genève, sur le calorique rayonnant. Ils y trouveront cette matière traitée avec tout le détail desirable.

Toutes les considérations que nous venons d'exposer ont eu pour objet la température de la terre à sa surface. Il est beaucoup plus difficile de savoir quelle peut être celle de son intérieur. Décroît-elle comme celle de l'atmosphère, à mesure que l'on s'éloigne de la surface, ou reste-t-elle toujours constante ? Ce sont des choses que nous ignorons. Pour éclaircir cette question, quelques physiciens ont fait des expériences sur la température de la mer à de grandes profondeurs, en y descendant des thermomètres revêtus de plusieurs enveloppes peu conductrices du calorique, et qui, les rendant très-lents à prendre la température de ces abîmes, les rendaient aussi très-lents à la perdre, dans le tems qu'on employait pour les retirer du fond de la mer. On a trouvé ainsi que la température des eaux était d'autant plus froide, que la profondeur où on descendait le thermomètre était plus grande. Près de l'équateur, à 600 mètres de profondeur, M. Péron a trouvé la température de l'eau $+ 7^{\circ},5$ de la division centésimale, tandis qu'à la surface elle était à $+30^{\circ}$. La loi de ce décroissement est extrêmement variable suivant les profondeurs et les localités. A quoi tiennent ces phénomènes? Sont-ils dus à un décroissement réel de la température propre du globe, à mesure que la profondeur augmente, ou doivent-ils être attribués à des courans inférieurs d'eau glacée qui viendraient des pôles vers l'équateur? Cette dernière cause est d'autant plus probable, que la plus grande densité de l'eau ayant lieu un peu au-dessus du terme de la congélation, mais très-près de ce terme, les eaux provenant des glaces polaires, qui se fondent chaque été par la chaleur du soleil, doivent descendre au fond des mers, et y maintenir un abaissement durable de température : c'est ainsi que dans tous les lacs de la Suisse, qui sont alimentés par des neiges fondues, et dont la profondeur est trop grande pour pouvoir être complètement pénétrée, dans un été, par la chaleur du soleil, la température des eaux est à $+ 4^{\circ}$; ce qui est la température du *maximum* de densité de l'eau. Les couches profondes de ces lacs sont de véritables glacières liquides, qui se renouvelant sans cesse chaque année, durent autant que les glaciers solides d'où ils descendent.

Au reste, quelque idée que l'on puisse se faire sur l'état de la chaleur intérieure du globe, il faut concevoir cet état comme invariable à une petite profondeur, ou du moins comme infiniment peu troublé par les variations périodiques qui ont lieu à la surface. Les variations journalières de la température, extrêmement sensibles à cette surface, disparaissent déja à quelques centimètres de profondeur, pour ne laisser voir que les variations annuelles; celles-ci, à leur tour, s'affaiblissent à mesure que la profondeur augmente : les époques des oscillations qu'elles y produisent, sont en rapport avec le tems nécessaire pour leur propagation. A une profondeur, même peu considérable, comme de 10 ou 12 mètres, on a l'hiver quand nous avons l'été, et les variations annuelles du thermomètre ne sont déja plus que de quelques degrés ; plus bas, ces variations sont encore moindres, et leur propagation plus tardive ; enfin, en augmentant la profondeur jusqu'à 100 mètres, les variations annuelles sont tout-à-fait insensibles, l'état de la température est constant et représente exactement la température moyenne de la surface.

De tout ce que nous venons de dire sur les effets prolongés de la chaleur solaire, il ne faut pas conclure, comme une chose certaine, que la terre ne renferme aucune cause intérieure et indépendante du soleil, qui contribue aussi à l'échauffer. On peut dire seulement que s'il existe une cause semblable, elle nous est jusqu'à présent inconnue, puisque tous les faits observés peuvent s'expliquer sans y avoir recours. Peut-être acquerra-t-on plus de lumières sur cet objet, lorsque l'on saura positivement si la chaleur souterraine diminue ou augmente ; mais l'invention des thermomètres est encore trop récente pour que l'on puisse rien décider sur cette question.

165. Je ne dois pas non plus passer sous silence un mouvement très-remarquable qui se produit constamment dans l'atmosphère, et qui, en modifiant la température des différens pays de la terre, est lui-même un indice très-frappant de sa rotation. Je veux parler des *vents d'est* qui soufflent constamment entre les tropiques, principalement sous l'équateur, et que l'on nomme les *vents alisés*. Leur régularité est si bien connue des navigateurs, que pour passer d'Europe en Amérique, ils commencent

par remonter vers l'équateur jusqu'à la hauteur des vents alisés, et ensuite, en s'y abandonnant, ils traversent l'océan en ligne droite.

Or ce courant continuel s'explique très-aisément dans l'hypothèse de la rotation de la terre. Le soleil, par l'action de sa chaleur, dilate l'atmosphère près de l'équateur, où il donne toujours à-plomb. Les colonnes d'air ainsi soulevées, s'élèvent au-dessus de leur véritable niveau; mais lorsque leur sommet a dépassé les colonnes voisines, elles se renversent et retombent vers les pôles par leur propre poids. Au contraire, dans la partie inférieure, l'air frais des pôles afflue vers l'équateur, comme pour remplir le vide causé par la dilatation : d'où résultent deux courans d'air continuels, l'un supérieur, de l'équateur au pôle, l'autre inférieur, du pôle à l'équateur.

Supposons maintenant que la terre tourne sur elle-même, en entraînant l'atmosphère qui l'enveloppe. Chaque particule d'air doit avoir pris depuis longtems la vîtesse de rotation qui convient au parallèle sur lequel elle se trouve. Celles qui sont près de l'équateur, vont plus vîte; celles qui sont près des pôles, vont plus lentement : mais si une partie de ces dernières sont forcées de se rapprocher de l'équateur, elles porteront sur les nouveaux parallèles où elles passent, la vîtesse de rotation qu'elles avaient d'abord; elles resteront par conséquent en arrière par rapport aux autres molécules situées depuis longtems sur ces parallèles. La lenteur de leur mouvement sera d'autant plus sensible, qu'elle s'approcheront davantage de l'équateur, où la vîtesse de rotation est plus grande. Les corps terrestres situés sur ces parallèles, rencontrant ces molécules, les choqueront avec tout leur excès de vîtesse; il en sera de même d'un spectateur qui participera à ce même mouvement. Mais comme il se croira immobile, il supposera que ce sont les particules d'air qui le choquent en sens contraire, d'orient en occident : il aura par conséquent la sensation d'un vent d'est, effet conforme à celui que produisent les vents alisés.

168. Ce serait le contraire si l'on pouvait s'élever dans les régions supérieures de l'atmosphère : les particules d'air qui refluent de l'équateur vers les pôles, y portant leur excès de vîtesse, doivent y produire un vent d'ouest réel, que l'on pourrait appeler le *contre-alisé*, et qui, peut-être, deviendrait sensible jusque dans les régions inférieures, si l'on s'attachait à l'observer. Les mêmes particules transportent aussi l'excès de chaleur que leur situation primitive sous l'équateur leur avait donnée, et peut-être, par l'effet de cette cause, la température des couches supérieures près des pôles, est-elle plus douce que celle des couches inférieures qui avoisinent la surface de la terre.

Enfin, pour n'omettre aucun des phénomènes physiques qui paraissent tenir à l'action du soleil sur notre globe, j'indiquerai ici un phénomène curieux qui s'observe principalement dans les régions des tropiques, quoiqu'on puisse aussi le rendre sensible dans nos climats, par de longues suites d'observations faites avec soin. Ce phénomène consiste en ce que, tous les jours, le mercure du baromètre monte graduellement, et ensuite s'abaisse suivant des périodes déterminées, et d'autant plus constantes, ou du moins d'autant plus remarquables, qu'il éprouve d'ailleurs moins de variations accidentelles. Ces *variations horaires* du baromètre s'exécutent dans l'intervalle d'un jour solaire. Elle paraissent avoir un rapport marqué avec l'angle horaire du soleil; mais leur étendue et l'époque de leurs *maximum* et *minimum* ne sont pas les mêmes en différens lieux. Cet effet tient-il aux vents plus ou moins réguliers que la présence du soleil excite ordinairement à certaines heures, et qui font monter ou baisser le baromètre, suivant qu'ils apportent de l'air plus froid ou plus chaud, plus lourd ou plus léger ? Tient-il à quelque cause attractive, comme le flux et le reflux de la mer? C'est ce que l'on n'est pas encore en état de décider.

CHAPITRE XVI.

De l'Hypothèse du mouvement annuel de la Terre.

167. JUSQU'ICI nous avons supposé la terre immobile dans l'espace, et le soleil en mouvement sur le plan de l'équateur ; mais il se pourrait que ce ne fût qu'une apparence, et que le soleil fût réellement immobile, la terre étant en mouvement. Alors elle exécuterait autour de lui tous les mouvemens qu'il semblerait faire autour d'elle ~~en sens contraire~~. La révolution annuelle de la terre se ferait dans une ellipse dont le soleil serait un des foyers, et tout ce que nous avons dit de l'ellipse solaire, devrait s'entendre de l'ellipse terrestre.

Non-seulement cette disposition est possible, mais l'analogie la rend extrêmement probable, car on verra plus tard que toutes les planètes et les comètes se meuvent ainsi autour du soleil. Comme les preuves de cette vérité s'offriront successivement, je vais, pour qu'on les saisisse mieux, et qu'on en suive bien la liaison, présenter sous ce point de vue les phénomènes du mouvement annuel, ainsi que je l'ai déja fait pour le mouvement diurne.

168. Concevons donc que la terre ait un double mouvement : de rotation sur elle-même, et de révolution autour du soleil.

L'axe de rotation de la terre qui est perpendiculaire à l'équateur terrestre, reste à très-peu près parallèle à lui-même dans chaque révolution ; car les changemens que la *nutation et les attractions* des planètes produisent dans l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique ne s'élèvent qu'à quelques secondes dans l'intervalle d'une année. La terre parcourra ainsi son ellipse en décrivant autour du soleil des aires proportionnelles aux tems.

169. Ce double mouvement composé de rotation et de révolution, n'a rien en soi d'impossible ni de contraire aux lois de la mécanique. Les toupies qui servent de jouet aux enfans, nous en offrent l'image. Leur mouvement est produit et entretenu par des impulsions latérales qui les font, en même tems, tourner sur elles-mêmes, et décrire, par leur pointe, des courbes très-variées. En effet, on démontre en mécanique qu'un mouvement pareil peut résulter d'une seule impulsion latérale (*) ; et ceci s'applique à-la-fois à la toupie et à la terre, avec cette différence que la terre ne paraissant éprouver dans l'espace aucune résistance, n'a pas besoin que son mouvement soit renouvelé et entretenu, au lieu que celui de la toupie diminue sans cesse, à cause du frottement de la pointe et de la résistance de l'air.

170. Pour montrer comment les explications des phénomènes doivent se transformer dans cette hypothèse, je vais l'appliquer à la différence et à l'inégalité des saisons.

Quand nous supposons la terre immobile, c'est le soleil qui, en s'élevant ou s'abaissant d'un tropique à l'autre, *produit la différence des saisons. Si nous mettons la terre* en mouvement, c'est elle qui vient se présenter au soleil

---

(*) Mécanique céleste, tom. I, pag. 84.

sous différens aspects, dans les différentes parties de son orbite.

Au solstice d'été, vers le 22 juin, la terre est à sa plus grande distance du soleil, et à son *aphélie :* alors sa position est telle que la représente la *fig.* 43. Le soleil donne à-plomb sur le tropique boréal *Tt* : le pôle boréal est entièrement éclairé : c'est l'été des peuples septentrionaux.

Au solstice d'hiver, vers le 22 décembre, la terre a pris une position directement contraire, voyez *fig.* 44. Elle est à sa plus petite distance du soleil, ou à son *périhélie.* Les rayons de cet astre tombent à-plomb sur le tropique austral, désigné par *T′t′*, et le pôle austral est entièrement éclairé. C'est l'hiver pour les peuples du nord, l'été pour ceux du midi.

Entre ces positions contraires, il en est deux aussi opposées, et dans lesquelles le plan de l'équateur terrestre passe par le centre du soleil : ce sont les instans de l'équinoxe, qui arrivent vers le 24 septembre et le 21 mars.

Ce peu de mots suffit pour montrer comment les explications données précédemment d'après les observations, s'adaptent au mouvement de la terre.

CHAPITRE XVII.

De la Précession des Équinoxes, considérée comme l'effet du déplacement de l'Équateur terrestre.

171. On vient de voir que le mouvement annuel du soleil dans l'écliptique, peut fort bien se représenter par un mouvement réel de la terre en sens contraire. Il en est de même de la précession des équinoxes, et de ces petits déplacemens des étoiles que, nous avons nommés nutation. En général, on sent qu'il en doit être ainsi de tous les mouvemens généraux qui semblent affecter tous les astres : il n'y a pas plus de raison pour les attribuer à tous les astres, qu'à la terre seule, en sens contraire. Même si nous n'étions pas prévenus par une habitude involontaire de nous supposer immobiles, on pourrait dire que l'idée qui attribue ces mouvemens à la terre est infiniment plus simple que celle qui les imprime à tous les astres. Mais ce n'est pas par de simples apperçus que l'on peut se décider en pareille matière ; c'est en entrant dans les détails, et les employant à faire l'épreuve de nos conjectures. Voyons si les phénomènes de la précession peuvent se représenter dans les deux hypothèses, et examinons dans laquelle ils le sont avec plus de simplicité.

172. Quand on considère le mouvement du soleil comme apparent, et celui de la terre comme réel, les signes de

l'écliptique répondent aux différens points de l'orbe terrestre. Voyez *fig.* 45.

Alors la terre voit toujours le soleil dans le lieu de l'écliptique opposé à celui où elle se trouve. Lorsqu'elle est dans le signe du belier, elle voit le soleil dans la balance. Lorsqu'elle est dans le taureau, elle le voit dans le scorpion, et ainsi de suite. Tandis qu'elle se meut suivant l'ordre des signes, le soleil paraît se mouvoir à l'opposé de l'orbite et dans le même sens.

Je vais montrer présentement comment la précession des équinoxes peut s'expliquer dans cette hypothèse, sans mettre en mouvement toute la sphère céleste.

173. Soit $TT'tt'$, *fig.* 46, l'orbite annuelle de la terre dont le soleil occupe un des foyers : soit ETQ le plan de l'équateur, TP l'axe du pôle qui lui est perpendiculaire, l'équinoxe arrivera lorsque la ligne TQ, intersection de l'équateur et de l'écliptique, passera par le centre du soleil ; car alors cet astre se trouvera dans le plan ETQ de l'équateur.

En supposant que l'équateur reste parallèle à lui-même dans chaque révolution, il y aura deux positions opposées, dans l'orbite, T et t, qui donneront chacune un équinoxe ; l'un du printems, qui arrive vers le 21 mars ; l'autre d'automne, qui arrive vers le 24 de septembre. Le passage de la terre par ces points ne partage donc pas l'année en deux portions égales. Cela tient à la nature du mouvement elliptique et à la position actuelle du périhélie, comme on l'a vu dans la page 172. En partant des valeurs données alors, on trouve qu'en ce moment la terre emploie $186^j,47172$ pour aller de l'équinoxe du printems à celui d'automne, et seulement $178^j,77064$ pour revenir de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe du printems.

Si la trace TQ restait constamment parallèle à elle-même, l'équinoxe arriverait toujours dans les mêmes points. Mais pendant que la terre se meut dans le sens TO, cette trace elle-même a un petit mouvement, et lorsque la terre est revenue en T', elle ne se trouve plus dirigée suivant $T'S'$ parallèle à TS, mais suivant TQ', qui fait, avec $T'S'$, un petit angle $S'T'Q'$, égal à 154″,63. Alors la trace $T'Q'$ rencontre le soleil avant que la terre soit revenue en T; l'équinoxe arrive plutôt qu'il ne devrait sans cette circonstance : c'est en cela que consiste la *précession des équinoxes*.

La trace $T'Q'$ prolongée paraît répondre en t' sur l'écliptique. Elle semble donc reculer chaque année de la quantité tt', contre l'ordre des signes, c'est-à-dire, en sens contraire du mouvement annuel de la terre. On dit, par cette raison, que le mouvement des équinoxes est *rétrograde*.

Pour compléter ce qui concerne les mouvemens de l'*équateur terrestre*, on a aussi représenté dans la figure le cercle parallèle à l'écliptique, que décrit le pôle moyen de l'équateur en vertu du mouvement de précession, et la petite *ellipse de nutation* sur laquelle oscille *le pôle apparent*, suivant les lois que nous avons expliquées dans le chap. VI.

CHAPITRE XVIII.

Utilité de la Théorie du soleil et des mouvemens de l'équateur de l'écliptique et des équinoxes, dans les recherches de chronologie et d'antiquité.

174. Les résultats auxquels nous sommes parvenus dans ce livre, n'intéressent pas seulement l'astronomie; ils sont utiles dans l'histoire pour déterminer les dates des anciens monumens d'après les figures astronomiques qui y sont tracées, ou pour retrouver les époques des événemens d'après les descriptions de l'état du ciel que les auteurs nous ont transmises; car cet état ayant changé depuis eux jusqu'à nous, suivant une marche déterminée, il est facile d'assigner le tems où il a dû s'accorder avec leur récit. Sous ce rapport, tous les mouvemens séculaires qui affectent la position des astres, peuvent être considérés comme de grandes mesures communes à tous les peuples et à tous les âges du monde. Mais la plupart de ces inégalités ont été découvertes et calculées depuis trop peu de tems pour que l'on ait pu encore en faire beaucoup d'applications. Le phénomène de la précession était presque le seul qui fût assez connu pour qu'on songeât à l'employer dans des recherches d'érudition. Aussi les chronologistes en ont-ils fait un fréquent usage; Fréret surtout, critique instruit autant que judicieux, s'est attaché à donner de la certitudeà ses recherches, en les appuyant

ainsi sur des phénomènes astronomiques. On peut voir dans les ouvrages de ce savant, les ingénieuses conséquences auxquelles il est parvenu en suivant cette route. Je me bornerai ici à donner quelques exemples de ce genre de considération, et je commencerai par les plus simples.

175. Les ruines de l'ancienne ville de Tentyris en Egypte sont sur-tout remarquables par un grand temple intact dans toutes ses parties.

Sous le plafond du portique de ce temple, on remarque une longue file de figures d'hommes et d'animaux, marchant dans le même sens, à la suite les uns des autres. Parmi ces figures, se trouvent les douze signes du zodiaque, placés dans l'ordre selon lequel le soleil les parcourt.

Le signe qui est à la tête de tous les autres, et qui semble sortir le premier du temple, est le lion.

Si, comme quelques personnes l'ont pensé, il est raisonnable de croire que le signe qui ouvre la marche, est aussi celui dans lequel le soleil entrait au commencement de l'année; il sera facile de trouver la date de l'état du ciel, représenté par ce monument.

Car on sait que l'année rurale des Egyptiens commençait au solstice d'été, époque des inondations du Nil. D'après l'hypothèse précédente, le solstice serait arrivé dans la constellation du lion à l'époque représentée sur le zodiaque de Tentyris. Or il se trouve maintenant au 24^e. degré septentrional de la constellation des gémeaux. Le tems nécessaire pour cette rétrogradation, donnera la date du monument.

Pour la fixer avec quelque certitude, il faudrait connaître le point précis de la constellation du lion auquel le solstice répondait alors; mais c'est ce que le monument ne semble pas indiquer. Si on évalue l'intervalle total à deux signes complets, ou à 66°,6, on aura un peu plus de 4000 ans pour l'ancienneté de cet édifice, à raison de 154",63 par année. Nous n'avons pas égard ici aux inégalités de la précession, et il est évident que cela serait inutile : les données dont nous parlons ne comportent pas une si grande exactitude.

176. Les positions des étoiles servent aussi à faire connaître les époques. Par exemple, Hipparque rapporte un passage d'Eudoxe, contemporain de Platon, dans lequel il est dit, qu'il existe, sur la sphère céleste, une étoile qui répond au pôle de l'équateur. Ce n'est pas l'étoile polaire d'aujourd'hui ; car elle en était alors fort éloignée. En considérant toutes celles qui sont situées près du parallèle à l'écliptique, sur lequel le pôle de l'équateur se trouve, ou à peu de distance de ce parallèle, on voit qu'il n'y en a qu'une seule assez brillante pour avoir été ainsi remarquée à la vue simple. On la nomme *κ du dragon* (*). Sa longitude, au 1er. janvier 1800, était 148°,26. Or, si cette étoile s'est réellement trouvée amenée au pôle de l'équateur, du tems d'Eudoxe, par l'effet de la précession, son cercle de latitude passait alors par ce pôle et par celui de l'écliptique. Il coupait donc ce dernier cercle au solstice d'été, et la longitude de l'étoile était de 100°. La différence de ces deux longitudes, ou 48°,26, est la quantité dont elle a dû s'éloigner du solstice depuis cette époque, par l'effet de la précession, et à raison de 154",63 par année. Ces arc répond à un intervalle d'un peu plus de trois mille ans.

Cherchons la déclinaison de l'étoile à la même époque.

(*) Bailly, Hist. de l'Astronomie ancienne, pag. 511.

Sa latitude était, à fort peu près, la même qu'aujourd'hui, ou de 68°,59 boréale. L'obliquité de l'écliptique était de 26°,5750 ; car elle était de 26°,0732 en 1800, et elle a varié de 0°,5018 en 3121 ans, à raison de 160″,83 par siècle. Or puisque le cercle de latitude était en même tems perpendiculaire à l'écliptique et à l'équateur, il était aussi cercle de déclinaison. La déclinaison de l'étoile à cette époque était donc égale à 26°,5750 + 68°,59 ou 95°,1650 ; il s'en fallait de 4°,8350 qu'elle ne fût égale à 100°, distance du pôle à l'équateur.

Il suit de là que l'étoile κ du dragon ne s'est jamais trouvée exactement au pôle, mais la différence 4°,8350 était trop petite pour être apperçue dans ces premiers âges de l'astronomie.

On voit aussi qu'Eudoxe n'a pas décrit l'état du ciel tel qu'il était de son tems ; car ce philosophe, contemporain de Platon, a vécu il y a environ 2150 ans, c'est-à-dire, à une époque beaucoup plus récente que celle à laquelle, le phénomène qu'il rapporte, a pu arriver.

Il résulte donc de cette discussion que la sphère décrite par Eudoxe répond à un état du ciel beaucoup plus ancien. On croit que c'est le même qui avait été fixé et déterminé par Chiron, vers le tems du siége de Troie.

177. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des questions qui n'étaient pas susceptibles d'une grande exactitude ; mais lorsqu'au lieu d'indications vagues on a des observations précises, on peut au moyen des formules remonter par le calcul à l'ancien état du ciel, auquel se rapportent ces observations. En comparant les résultats de ce calcul avec ceux que l'on donne pour avoir été réellement observés, on peut d'après leur accord plus ou moins parfait, juger si l'observation est vraie ou fausse,

certaine ou douteuse ; ou bien, lorsque l'observation est incontestable, on peut vérifier ainsi l'exactitude de l'époque à laquelle les historiens l'ont rapportée. Ou enfin si la date est précise, et l'observation digne de toute confiance, tant pour sa réalité que pour son exactitude, on peut au moyen de cette comparaison, vérifier l'exactitude des tables astronomiques modernes, confirmer ainsi la théorie de l'attraction dont elles dérivent, et connaître jusqu'à quel nombre de siècles, en avant ou en arrière, on peut les étendre sans crainte d'erreur. Je vais rapporter des exemples de ces diverses applications.

178. Je choisirai pour cela les observations chinoises, relatives à l'obliquité de l'écliptique et à la position des équinoxes, qui ont été discutées et calculées par M. Laplace dans la Connaissance des tems de 1811 ; l'exemple en sera d'autant plus frappant que la réalité de ces observations a été révoquée en doute par quelques auteurs. On verra par la discussion suivante qu'ils ne l'eussent pas fait, s'ils eussent eu les connaissances nécessaires pour sentir et apprécier la force des preuves astronomiques que nous allons rapporter.

La plus ancienne de ces observations, et même de toutes les observations qui nous soient parvenues sur la même matière, est attribuée à Tcheou-Koung, frère de Vouvang, empereur de la Chine qui, suivant les calculs de Fréret, et du père Gaubil, savant missionnaire, vivait 1100 ans avant l'ère chrétienne. Une ancienne tradition, conservée dans des livres très-anciens, dont l'autorité passe, chez les Chinois, pour incontestable, rapporte que Tcheou-Koung observa la longueur de l'ombre, à midi, au solstice d'été, dans la ville de Loyang, avec un gnomon de huit pieds chinois. Il la trouva d'un pied cinq pouces ; c'est-à-dire $1^p,5$, car le pied chinois se divise en décimales. Cette tradition paraît d'autant plus croyable, que l'on sait que les Chinois, par leur culte et par leurs usages, ont été de tous tems adonnés à l'observation des ombres méridiennes des gnomons. On sait de plus, que l'ancien livre où l'observation de Tcheou-Koung se trouve rapportée, est du petit nombre de ceux que des motifs religieux et politiques firent excepter de la proscription, lorsque l'empereur Tsin-chi-hoang ordonna l'incendie général des livres chinois, 246 ans avant l'ère chrétienne: exception qui donne encore une nouvelle probabilité à l'observation de Tcheou-Koung.

Suivant une autre tradition rapportée pareillement dans les livres chinois, et citée par le père Gaubil, et par d'autres savans missionnaires, Tcheou-Koung avait aussi observé, dans la ville de Loyang, la longueur de l'ombre du même gnomon au solstice d'hiver, et il l'avait trouvée de 13 pieds chinois.

Puisque nous connaissons les longueurs des ombres méridiennes dans les deux solstices, nous pouvons en déduire les deux distances du soleil au zénith de la ville de Loyang. La demi-somme de ces distances sera la latitude géographique de cette ville; leur demi-différence sera l'obliquité de l'écliptique qui avait lieu à l'époque de ces observations.

Commencons par le solstice d'été. La longueur de l'ombre étant de $1^{p},5$, et celle du gnomon de 8, le rayon lumineux extrême faisait avec l'axe du gnomon, c'est-à-dire, avec la verticale, un angle dont la tangente trigonométrique était exprimée par $\frac{1,5}{8}$, cet angle étant évalué par les tables de sinus, répond à $10°.37'.10'',77$ de la division sexagésimale. Or ce rayon prolongé jusqu'au soleil, n'aboutissait point à son centre, mais au bord supérieur de son disque. Ainsi l'angle $10^\circ.37'.10''7$ exprime la distance apparente du bord supérieur du soleil au zénith; pour avoir la distance vraie de ce même bord, il faut y ajouter la réfraction moins la parallaxe. L'observateur chinois ne connaissait ni l'une ni l'autre de ces corrections. Le baromètre et le thermomètre n'existaient point alors. Il faut donc faire une supposition sur la pression barométrique et sur la température. Nous prendrons pour la première $0^m,76$, et pour la seconde $+ 25^\circ$ de la division centésimale; la première est celle qui a lieu ordinairement au niveau de la mer, la seconde paraît assez convenir au climat de Loyang, le jour du solstice. Au reste une petite erreur sur ces élémens n'aurait sur le résultat qu'une influence négligeable, comparativement aux erreurs que comportent des observations de gnomon. Avec ces données et la distance zénithale observée, on trouve pour la réfraction $10'',32$; pour la parallaxe $1'',28$, différence $9'',04$; de plus, le demi-diamètre du soleil à cette époque de l'année était $15'.47''.7$: on aura donc la distance zénithale du centre ainsi qu'il suit.

Dist. appar. du bord supér. du ⊙ au zénith de Loyang	$10^\circ.37'.10'',77$
Réfraction — parallaxe	$+ 9'',04$
Distance vraie	$10^\circ.37'.19'',81$
Demi-diamètre du ⊙	$15'.47'',70$
Dist. vraie du centre du ⊙ au zénith de Loyang au solstice d'été	$10^\circ.53'.\ 7'',51$

En répétant un calcul semblable pour l'observation du solstice d'hiver, on trouve

Dist. appar. du bord supér. du ☉ au zénith de Loyang	58°.23′.33
Réfraction — parallaxe.	1′.26″,78
Distance vraie.	58°.24′.59″,78
Demi-diamètre du ☉.	16′.14″,03
Dist. vraie du centre du ☉ au zénith de Loyang au solstice d'hiver	58°.41′.13″,81
Demi-somme des distances solsticiales, ou latitude du gnomon	34°.47′.10″,66
Demi-différence, ou obliquité de l'écliptique à l'époque des observations . . .	23°.54′. 3″,15

Nous avons deux moyens d'éprouver la vérité de ces résultats, et par conséquent la réalité des observations; c'est de comparer la latitude à celle qu'ont observée les missionnaires, et l'obliquité à celle que nos formules donnent, pour l'époque que Fréret assigne aux observations de Tcheou-Koung.

La ville de Loyang, au rapport du père Gaubil et de tous les missionnaires, est la même que celle qui s'appelle aujourd'hui Hon-an-fou. Trois observations de latitude y ont été faites par les missionnaires : la première donne 34°.52′.8″; la seconde 34°.46′.15; la troisième 34°.43′.15″, la moyenne 34°.47′.13″ ne diffère que de 2″ du résultat de Tcheou-Koung. Cet écart paraîtra bien petit si l'on considère que les observations même des missionnaires ne s'accordent pas tout-à-fait entre elles, et si l'on fait attention à la difficulté d'observer bien exactement l'extrémité de l'ombre d'un gnomon. Une si faible difference paraît donner un haut degré de probabilité à l'observation chinoise.

Cependant on pourrait objecter encore que les missionnaires, jaloux d'exalter l'antiquité de l'empire de la Chine, ce qui a été reproché quelquefois au père Gaubil lui-même, bien injustement à ce qu'il me semble, ont pu arranger leurs observations de latitude de manière à tomber d'accord avec le résultat de l'astronome chinois. Ou bien encore on pourrait dire qu'ils ont inventé et fabriqué ces prétendues observations de Tcheou-Koung, d'après les leurs, et qu'ils les donnent aujourd'hui comme anciennes afin d'appuyer leurs systèmes chronologiques.

Tous ces doutes seront levés, si nous comparons l'obliquité résultante des observations de Tcheou-Koung avec celles que donnent les formules, pour l'époque de 1100 ans avant notre ère, époque à laquelle, d'après les témoignages historiques, Fréret et le père Gaubil ont cru tous deux devoir rapporter la régence de ce prince (*). Car, ni Fréret ni le père Gaubil, ni aucun des missionnaires, n'ont pu avoir aucune connaissance de ces formules, puisqu'en 1712, à l'époque où les missionnaires observèrent la latitude de Loyang, les astronomes étaient encore incertains, si l'obliquité de l'écliptique était variable ou constante. Or l'expression générale de cette obliquité que nous avons rapportée dans la page 71, donne $23^\circ.51'.58'',03$ pour sa valeur, 1100 ans avant l'ère chrétienne (**), résultat qui diffère seulement de $2'.5'',12$

(*) Les calculs de Fréret, fondés sur les périodes que présente le calendrier chinois, fixent l'époque de la régence de Tcheou-Koung entre les années 1098 et 1104 avant notre ère; en quoi il est d'accord avec le père Gaubil.

(**) En nommant l'obliquité apparente V', cette formule était

$$V' = 26^\circ,0812 - 1^\circ,03304 \sin t.99.1227 - 0^\circ,73532 \sin^2 t.21'',5223.$$

L'origine du tems t est l'année 1750; ainsi 1100 ans avant notre ère de celui que donnent les ombres de gnomon, observées aux deux solstices. On ne peut pas desirer un accord plus approché dans des observations de gnomon, où l'extrémité de la pénombre est si difficile à reconnaître. On doit donc en conclure, que cette observation de Tcheou-Koung est très-certaine; car pour qu'elle fût supposée, d'après l'élévation postérieure de la latitude, il faudrait non-seulement que la différence des deux hauteurs solsticiales eût été arrangée conformément au décroissement véritable de l'obliquité de l'écliptique; il faudrait encore que chacune de ces distances en particulier eût été arrangée aussi conformément à cette loi, qui était alors inconnue, car chacune de ces distances combinée avec la latitude des missionnaires s'accorde également avec les formules. Ces suppositions sont tellement invraisemblables, on pourrait dire tellement impossibles, que la réalité de ces anciennes observations ne peut nullement être mise en doute; et tant de justesse dans les résultats, avec de pareils instrumens, suppose une longue habitude d'observer.

179. Tcheou-Koung avait également déterminé par ses observations le moment du solstice d'hiver, mais elles ne nous ont pas été transmises. Nous savons seulement par les Lettres des missionnaires, que suivant Tcheou-Koung, l'ascension droite du solstice d'hiver, surpassait de 2 degrés chinois, l'ascension droite de la constellation *Nû*, constellation qui commence par ϵ du verseau. Ainsi en retranchant deux degrés chinois, ou $1^{\circ}.58'.17''$, division sexagésimale de l'ascension droite du solstice

---

on avait $t = -2850$. En calculant avec cette valeur de t, on trouve $V' = 26^{\circ},51791$, ou, en degrés sexagésimaux, $25^{\circ}.51'.58''03$, comme nous l'avons dit dans le texte.

d'hiver est de 270° ; la différence 268°.1'.43 sera suivant le témoignage de Tcheou-Koung l'ascension droite de ε du verseau à l'époque où il observait. Voyons si la chose a pu être ainsi à l'époque que nous avons assignée à Tcheou-Koung, c'est-à-dire, 1100 ans avant l'ère chrétienne.

Au commencement de 1750, la longitude de ε du verseau était	$l = 308°.14'.10''$
Sa latitude était...........	$\lambda = \ \ 8°.\ 6'.20''$ bor.

En comparant les catalogues de Bradley et de Mayer, avec celui de Piazzi, on voit que cette étoile n'éprouve point d'autres déplacemens que ceux qui sont causés par la précession, l'aberration et la nutation. Elle n'a donc point de mouvement propre sensible.

Maintenant pour déduire de ces données sa déclinaison et son ascension droite, 1100 ans avant l'ère chrétienne, ou 2850 avant l'époque de 1750, il faut employer la méthode exposée dans le n°. 64, page 92, et faire usage des formules que nous avons rapportées page 95, en conservant toujours la notation que nous avions adoptée alors. On supposera dans les formules le tems $t = -2850$, et avec cette valeur, on trouvera

Obliquité de l'équateur sur l'écliptique fixe de 1750, 1100 ans avant l'ère chrétienne...	$V = \ \ 23°.32'.48''$
Déplacement du point équinoxial sur l'écliptique fixe entre les deux époques........	$\psi = -40°.\ 2'.43''$
Déplacement du point équinoxial sur l'écliptique mobile.	$\psi' = -39°.23'.32''$

Déplacement du point équinoxial sur l'équateur. . . . . $\frac{\psi - \psi'}{\cos V} = -$ 0°.42'.44",5

Ajoutant ψ à la longitude de l'étoile, en 1750, on aura cette longitude rapportée à l'intersection de l'équateur sur l'écliptique fixe, 1100 ans avant notre ère . . . . $l + \psi =$ 268°.11'.27"

Avec la longitude $l + \psi$ et la latitude λ, on peut calculer l'ascension droite de l'étoile rapportée à cette même intersection de l'équateur avec l'écliptique fixe; il ne faut pour cela qu'appliquer les formules de la page 58; on trouvera ainsi pour la valeur de cette ascension droite. . . . . $a' =$ 268°. 8'.31"

Retranchant de cette ascension droite le mouvement du point équinoxial sur l'équateur ou $\frac{\psi - \psi'}{\cos V}$, on aura la même ascension droite rapportée à cette époque, à l'équinoxe vrai. . . . . $a' - \alpha' =$ 268°.51'.16"

Telle était donc, d'après nos formules, l'ascension droite de ε du verseau, 1100 ans avant notre ère. Cette valeur surpasse seulement de 49'.33", la détermination attribuée à Tcheou-Koung. Cette différence, ajoute M. Laplace, paraîtra fort petite, si l'on considère l'incertitude de l'époque précise des observations sur lesquelles cette détermination est fondée ; il suffirait de remonter de 54 ans au-delà de 1100 ans avant l'ère chrétienne, pour faire disparaître cette différence, et alors l'observation se rapporterait au tems de Ou-En-Ouang, père de Tcheou-Koung, prince que le père Gaubil nous dit avoir aimé et cultivé l'astronomie. L'imperfection des observations peut être aussi pour quelque chose dans cette différence. Les astronomes chinois déterminaient l'instant du solstice en observant des longueurs égales de l'ombre du gnomon 40 ou 50 jours avant et après le solstice, et ils prenaient l'époque moyenne entre toutes ces observations correspondantes. Cette méthode serait exacte, si le grand axe de l'ellipse solaire coïncidait avec les solstices ; dans ce cas, la marche du soleil en déclinaison serait symétrique de part et d'autre du solstice, comme l'ellipse qu'il décrit l'est de part et d'autre de son grand axe. Mais à l'époque de Tcheou-Koug, 1100 ans avant notre ère, cette coïncidence était fort éloignée d'avoir lieu ; il en doit, par conséquent, déja résulter quelque erreur sur la position du soleil à l'instant du solstice. Une cause d'erreur plus à craindre encore dans cette détermination, était la manière de rapporter le solstice aux étoiles, et de fixer sa position dans le ciel. Pour y parvenir, voici la méthode que l'on employait. On partait de l'instant du solstice déterminé par les observations du gnomon, et douze heures après cet instant, dans la nuit suivante, on observait les étoiles qui se trouvaient dans le plan du méridien. L'ascension droite de ces étoiles était donc celle du point de l'équateur diamétralement opposé au solstice que l'on avait observé. C'était, par conséquent, le solstice d'hiver, si l'observation était faite au solstice d'été, ou réciproquement.

Or, pour employer ce procédé, il faut mesurer exactement un intervalle de douze heures. Il paraît, d'après le père Gaubil, qu'on se servait alors de clepsydres. On mesurait le tems qu'un vase employait à se remplir à diverses hauteurs, en y faisant couler l'eau d'un vase plus élevé. On sent combien cette manière de mesurer le tems doit offrir d'incertitudes, et trois minutes d'erreur, sur un intervalle de douze heures, suffisent pour expliquer l'erreur de la détermination de Tcheou-Koung, puisque 3 minutes de tems font 45′ en arc. Nous sommes donc encore ici ramenés à la même conclusion où nous avait conduits le calcul des hauteurs méridiennes, c'est que les observations attribuées à Tcheou-Koung, par les historiens chinois et par tous les missionnaires, sont incontestables, qu'elles se rapportent très-bien à l'époque de 1100 ans avant notre ère, que Fréret et le père Gaubil assignent pour celle de la régence de ce prince, et qu'enfin loin de révoquer ces observations en doute, on doit plutôt s'étonner qu'on ait pu en faire d'aussi exactes à une pareille époque et avec de pareils instrumens.

180. On voit, par cet exemple, comment les observations anciennes peuvent être comparées aux tables astronomiques modernes. Si ces observations peuvent être regardées comme plus exactes que les tables à cette distance, où on entreprend de les étendre, alors on peut regarder la différence comme l'erreur des tables ; et en faisant varier les élémens de ces dernières d'une quantité fort petite et indéterminée, on en déduit une équation de condition entre l'erreur observée des tables et les erreurs indéterminées des élémens.

C'est en comparant ainsi les tables astronomiques avec les anciennes observations grecques, arabes, perses et chinoises, que l'on s'est assuré de leur exactitude, et qu'on a fixé les valeurs précises des grandes inégalités séculaires que le tems seul peut développer. Il nous suffira d'avoir indiqué ces importantes applications ; ceux qui desireront plus de détails sur cette matière, les trouveront dans les ouvrages du père Pétau, de Fréret, de M. Laplace, de Bailly, du père Gaubil et de quelques autres savans.

181. Les levers et les couchers des étoiles, autrefois observés avec beaucoup de soin, forment ainsi un genre d'indication très-utile pour reconnaître les époques éloignées.

On en distinguait de trois sortes relatifs aux positions de l'étoile, par rapport au soleil, et on les nommait suivant ces positions, *cosmiques*, *acroniques* ou *héliaques*. Il en est fréquemment question dans les poètes.

Le *lever* et le *coucher cosmique* avaient lieu lorsque l'étoile se levait ou se couchait le matin, à l'instant du lever du soleil.

Le *lever* ou le *coucher acronique* avaient lieu au contraire lorsque l'étoile se levait ou se couchait, le soir, à l'instant du coucher du soleil.

Enfin, le *lever* ou le *coucher héliaque*, avaient lieu lorsque l'étoile paraissait le matin sur l'horison, un peu avant le soleil, ou se couchait le soir presque aussitôt que lui. C'était l'instant où elle commençait à se dégager des rayons de cet astre, ou celui où elle allait s'y plonger.

Et comme les étoiles ne sont en général visibles à la vue simple que lorsqu'elles sont au moins à 12° ou 15° du soleil, il s'ensuit que le lever cosmique précède, de 12 ou 15 jours environ, le lever héliaque, et que le coucher acronique suit le coucher héliaque de la même quantité.

182. Le lever héliaque des étoiles était le plus remarquable. C'était lui qui servait, pour ainsi dire, de calendrier aux anciens peuples, et les travaux de l'agriculture se réglaient sur ces observations; mais la position des équinoxes déplaçant peu-à-peu les étoiles, leur lever héliaque ne répondait pas longtems à la même époque de l'année, et par conséquent aux mêmes travaux.

Pour trouver le lever héliaque d'une étoile, il faut déterminer le point de l'écliptique qui, lorsqu'elle se lève, est abaissé de 12° ou 15° sous l'horison. Or, cela est très-facile; car soit, *fig.* 47, *O* l'observateur, *SCH* l'horison, *OP* l'axe du pôle, et *S* l'astre dont on veut calculer le lever héliaque, lorsque le soleil est en *S'*, à 12° sous l'horison. On est supposé connaître la latitude du lieu, ainsi que l'ascension droite et la déclinaison de l'astre *S*. Avec ces données, on calcule d'abord le point *Q* de l'équateur, qui se trouve dans l'horison en même tems que l'astre *S*; puis on cherche le point *C* de l'écliptique qui se trouve dans l'horison en même tems que le point *Q*; enfin, connaissant l'arc vertical *VS'* de 12°, avec l'inclinaison de l'équateur sur l'horison, on calcule l'arc de l'écliptique *CS'*. Cet arc, ajouté à la longitude du point *C*, donne la longitude du soleil à l'instant du lever héliaque; et d'après cette longitude, les tables du soleil font connaître l'instant de l'année où le phénomène a lieu.

Si ce phénomène se trouve indiqué dans un auteur ancien pour une époque de l'année différente de celle où il a lieu aujourd'hui, on peut, d'après cette différence, calculer le tems où cet auteur écrivait, en ayant égard à la précession des équinoxes.

Ainsi, quand Hésiode rapporte que, de son tems, l'étoile Arcturus se levait héliaquement soixante jours après le solstice d'hiver, il est facile d'en conclure que ce poète vivait environ 950 ans avant notre ère, car c'est à cette époque que le phénomène a dû arriver dans le pays qu'il habitait (*).

(*) Soit E l'équinoxe du printems, d'où l'on compte les ascensions droites et les longitudes; l'arc EA sera l'ascension droite de l'astre, nous la nommerons α; l'arc SP, perpendiculaire à l'équateur en A, et passant par le pôle, sera sa distance polaire, nous la nommerons δ. Soit de plus ω l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, ou l'angle QEC, et soit d la distance du pôle au zénith, ou l'angle ZOP, complément de la latitude du lieu. Avec ces données, il s'agit d'abord de déterminer le point Q de l'équateur, qui se lève en même tems que l'astre. Pour cela, dans le triangle AQS rectangle en A, on connaît le côté SA égal à $100° - \delta$; on connaît de plus l'angle AQS, hauteur de l'équateur sur l'horison. Cet angle est égal à la distance d du pôle au zénith; on aura donc le second côté AQ par la formule

$$\sin AQ = \frac{\tang SA}{\tang AQS}, \quad ou\ bien \quad \sin a = \frac{1}{\tang \delta \,.\, \tang d}.$$

en représentant, pour plus de simplicité, par a l'arc AQ. Connaissant a, on le retranchera de l'ascension droite α, et l'on aura

$$QE = a - \alpha, \quad \text{ou bien} \quad a' = a - \alpha,$$

en faisant, pour plus de simplicité, $QE = a'$. a' est l'ascension droite du point de l'équateur qui se lève en même tems que l'étoile.

Il faut maintenant déterminer le point C de l'écliptique, qui se lève en même tems que le point Q de l'équateur. Pour cela, on se servira du triangle EQC, où l'on connaît trois choses, savoir : l'angle E, ou l'obliquité de l'écliptique ω; l'angle Q, ou EQC, supplément de EQh; par conséquent égal à $200° - d$, et enfin le côté EQ, ou a', que nous venons de calculer; on aura donc le côté EC, que je nomme a'', par la formule

$$\cot a'' = \frac{-\cot d \sin \omega + \cos \omega \cos a'}{\sin a'}$$

qui a lieu dans un triangle sphérique où l'on connaît un côté et les

Je suis entré dans quelques détails sur ces applications, parce qu'elles montrent l'usage de l'astronomie dans les

---

deux angles adjacens. On aura aussi l'angle QCE, que je nomme C, au moyen de la formule

$$\cos C = \cos a' \sin d \sin \omega + \cos d \cos \omega,$$

l'angle C est l'inclinaison de l'écliptique sur l'horison du lieu. Cet angle sert pour calculer la distance $S'C$ du soleil au point C; car alors dans le triangle sphérique CVS', rectangle en V, on connaît l'angle $S'CV$, ou C, que nous venons de déterminer, et de plus, le côté opposé VS' de 12°, que nous représenterons, en général, par h. On aura donc l'hypothénuse $S'C$ que je nomme h', au moyen de la formule

$$\sin h' = \frac{\sin h}{\sin C}.$$

Ajoutons $S'C$, ou h', à l'arc CE, ou a'', déterminé plus haut; la somme $a'' + h'$ sera la longitude du soleil à l'instant du lever héliaque de l'étoile pour l'époque que l'on a considérée, et d'après cette longitude, les tables feront connaître l'instant de l'année où le phénomène arrive.

La figure que nous avons tracée pour suivre la résolution successive des triangles, est particulière aux étoiles situées du même côté de l'équateur que le pôle qui paraît sur l'horison; mais comme notre raisonnement a été établi sur ce cas d'une manière générale, nos formules le sont aussi, et on les étendra à tous les autres cas, en substituant au lieu des élémens de l'astre, leurs valeurs numériques, et observant seulement la règle des signes.

Je suppose maintenant que l'on veuille appliquer ce calcul au récit d'Hésiode. On sait que ce poète habitait la Béotie; le lieu auquel ses poèmes se rapportent paraît répondre à-peu-près à une latitude de 42°,8, et à une longitude occidentale de 22°,2, comptée du méridien de Paris. Si l'on ignorait entièrement l'époque où il a vécu, il faudrait calculer le lever héliaque d'Arcturus de siècle en siècle pour cette latitude, en ayant égard au déplacement produit dans la position de cette étoile et de l'écliptique, par l'effet recherches de critique et d'antiquité. Il n'y a aucune science qui ne soit utile en quelque chose à toutes les autres.

---

de la précession et du changement d'obliquité. On trouverait ainsi que le phénomène est compris entre les années 900 et 1000 avant l'ère chrétienne ; et en continuant à procéder ainsi par bisection, on trouvera qu'il répond à-peu-près au milieu de leur intervalle, c'est-à-dire, à l'an 950 avant notre ère. Je dis à-peu-près, car l'indication des époques par le lever héliaque, ne peut être considérée que comme une approximation assez grossière, à cause de l'incertitude de ce genre d'observation ; le plus ou le moins de transparence de l'air, la vue plus ou moins perçante de l'observateur, et une infinité d'autres causes accidentelles, peuvent avancer ou retarder l'époque du lever héliaque dans un même pays, et cette époque n'y peut être fixée avec quelque apparence d'exactitude, que par un grand nombre d'observations.

NOTES

ET EXEMPLES DE CALCULS

RELATIFS AU SECOND LIVRE.

NOTE Ire.

Exemple d'un calcul du tems vrai, du tems moyen et du tems sydéral, d'après des hauteurs absolues du soleil, observées hors du méridien.

Soit, comme dans la page 449 du premier livre, Δ la distance polaire apparente du soleil, D la distance du pôle au zénith, ou le complément de la latitude du lieu où l'on observe; nommons Z la distance zénithale du soleil observée, et corrigée de la réfraction et de la parallaxe; enfin, soit P l'angle horaire cherché : avec ces données, on aura P par la formule

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin\left\{\dfrac{Z+\Delta-D}{2}\right\}\sin\left\{\dfrac{Z+D-\Delta}{2}\right\}}{\sin\Delta\sin D}},$$

dont nous avons déja fait un fréquent usage. Voici un exemple de calcul appliqué à une observation du soleil, faite par M. Mathieu et moi, à Dunkerque, le 21 mars 1809, le jour même de l'observation de Rigel, que j'ai rapportée dans le tome Ier., page 449. La latitude était de 51°.21'.2'.5'', la hauteur du baromètre 0m,76840, et le thermomètre centésimal à + 8°.

Le tems vrai de l'observation était déja connu à très-peu près par les observations des jours précédens : avec cette donnée, supposée exacte, on a calculé, par les tables du soleil, quelle devait être la distance apparente de cet astre au pôle boréal de l'équateur pour l'instant moyen de la série. Une petite erreur sur le tems, ne pouvait avoir sur ce résultat qu'une influence insensible, parce que la distance polaire du soleil varie très-peu dans un petit intervalle de tems. Toutefois cette erreur peut se redresser d'elle-même; car si l'on s'est trompé sur le tems en calculant la distance polaire, l'angle horaire déduit de l'observation différera de celui que l'on a supposé. On recommencera donc le calcul de la distance polaire avec cette nouvelle donnée, et cette fois l'erreur du tems, s'il en reste une, sera certainement assez petite pour que l'on puisse employer la distance polaire comme exacte. Dans notre exemple, on avait cette distance polaire, ou $\Delta = 89^\circ.44'.12''$.

L'observation faite au cercle répétiteur à niveau fixe, après le passage du soleil au méridien, avait donné la distance apparente du centre du soleil au zénith . . . . $75^\circ.2'.54'',29$

Correction du niveau	$-\ 5'',27$
	$75^\circ.2'.49'',02$
Réfraction	$+\ 3'.39'',01$
Parallaxe	$-\ 8'',57$
Distance vraie du soleil au zénith	$Z = 75^\circ.6'.19'',46$

Avec ces données, on effectue le calcul ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 89^\circ.44'.12'',00 \\
D &= 38^\circ.57'.55'',00 \\
\Delta - D &= 50^\circ.46'.17'',00 & & 50^\circ.46'.17'' \\
Z &= 75^\circ.\ 6'.19'',46 & & 75^\circ.\ 6'.19'',46 \\
Z + \Delta - D &= 125^\circ.52'.36'',46 & Z + D - \Delta &= 24^\circ.20'.\ 2'',46 \\
\frac{Z + \Delta - D}{2} &= 62^\circ.56'.18'',23 & \frac{Z + D - \Delta}{2} &= 12^\circ.10'.\ 1'',23
\end{aligned}$$

$$\log \sin \left(\frac{Z + \Delta - D}{2}\right) = 9{,}9496427 \qquad \log \sin \Delta = 9{,}9999954$$

$$\log \sin \left(\frac{Z + D - \Delta}{2}\right) = 9{,}3237922 \qquad \log \sin D = 9{,}7985466$$

$$9{,}2734349 \qquad 9{,}7985420$$

$$9{,}7985420$$

$$\log \sin^2 \tfrac{1}{2} P = 9{,}4748929$$

$$\log \sin^2 \tfrac{1}{2} P = 9{,}7374464$$

$$\tfrac{1}{2} P = 33^\circ.\ 6'.53'',47$$

$$P = 66^\circ.13'.46'',9 = 4^h.24'.55'',13$$

Avec le tems vrai ainsi connu, les tables donnent le tems moyen	$16^h.32'.17'',59$
Et ensuite le tems sydéral	$4^h.27'.20'',59$
Epoque moyenne de la série en tems de la pendule	$2^h.10'.\ 9'',65$
Retard de la pendule sur le tems sydéral à l'époque de l'observation du soleil	$2^h.17'.10'',94$

NOTE II.

Exemple d'un calcul de l'obliquité de l'écliptique par une déclinaison du soleil observée près du solstice.

L'observation que je prendrai pour exemple, a été faite par M. Mathieu et moi, à l'Observatoire de Paris avec un cercle répétiteur à niveau fixe, le 15 juin 1809, le baromètre étant à 0,75722, le thermomètre attaché au baromètre marquait + 18°,8 de la division centésimale, et le thermomètre exposé à l'air libre et à l'ombre marquait + 22°,5.

Voici d'abord le tableau des angles horaires observés et des réductions au méridien. Nous avons fait un calcul semblable pour la polaire, tome I^{er}., page 450.

Passage du soleil au méridien en tems de la pendule.
$5^h . 23' . 7''$.

EPOQUE DES OBSERVATIONS.	ANGLE HORAIRE.	RÉDUCTION.
$5^h . 5' . 9''$	$17' . 58''$	633 . 4
9 . 53	13 . 14	343 . 7
13 . 23	9 . 44	186 . 0
15 . 7	8 . 0	125 . 7
16 . 11	6 . 56	94 . 4
17 . 12	5 . 55	68 . 7
18 . 1	5 . 6	51 . 1
19 . 2	4 . 5	32 . 7
19 . 58	3 . 9	19 . 5
21 . 50	1 . 17	3 . 2
22 . 55	0 . 12	0 . 1
24 . 22	1 . 15	3 . 1
25 . 10	2 . 3	8 . 2
27 . 36	4 . 29	39 . 8
28 . 38	5 . 31	59 . 8
29 . 43	6 . 36	85 . 5
30 . 48	7 . 41	115 . 9
32 . 0	8 . 53	154 . 9
33 . 35	10 . 28	215 . 1
34 . 41	11 . 34	262 . 6
36 . 10	13 . 3	334 . 3
36 . 58	13 . 51	376 . 5
37 . 59	14 . 52	433 . 8
38 . 50	15 . 43	484 . 8
39 . 33	16 . 26	530 . 0
40 . 46	17 . 39	611 . 3
41 . 40	18 . 33	675 . 3
42 . 27	19 . 20	734 . 1
		6683 . 2

Avec cette somme, on calcule la réduction moyenne de la distance par la formule

$$\delta = \frac{\sin\Delta . \sin D\{1 + 2r'\}}{\sin Z} \cdot \frac{2''. \sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''},$$

démontrée dans le premier livre. La quantité 6683″,2 est la somme des facteurs variables $\frac{2''.\sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}$. Pour calculer le facteur constant, il faut connaître les valeurs de Δ, Z et r'. D'abord, l'observation étant faite à l'Observatoire dont la latitude est 48°.50′.14″, on avait . . . . $D = 41°.\ 9'.46''$

La distance polaire du soleil calculée par les tables pour midi, était. . . . $\Delta = 66°.40'.43''$

Comme il s'agit d'un passage au méridien supérieur, on avait . . . . . $Z = \Delta - D = 25°.30'.57''$

De plus, la pendule avançait par jour sur le soleil de 106″,8 ; ainsi comme r' exprime, en général, le retard diurne divisé par 86400″, on avait . . . . . $r' = -\frac{106'',8}{86400}$

Avec ces données, le calcul du facteur constant se fait de la manière suivante, comme on l'a déja vu pour la polaire à l'endroit cité.

log (1 + 2r') . . . . =	9,9989251
log sin D. . . . . =	9,8183583
log sin Δ. . . . . =	9,9629812
	9,7802646
log sin $\Delta - D$ . . . . =	9,6343359
log facteur constant.	0,1459287
log 6683,2	3,8249845
	3,9709182
log 28	1,4471580
	2,5237552
Réduction moyenne . . . . —	334″.006

Cette réduction est soustractive de la distance zénithale, mais elle suppose la distance polaire du soleil constante, tandis qu'elle allait en diminuant, parce que le soleil n'était pas encore arrivé au solstice. La correction que cette circonstance nécessite a été expliquée dans le tome Ier., page 307, nous en ferons ici l'application. La somme des angles horaires exprimés en minutes de tems et fractions de minute est

Avant le passage au méridien.	75′.60
Après le passage au méridien.	187′.92
Différence	112′.32
Diminution de la distance polaire en 1′ de tems . . .	0″,10
Somme des corrections	11″,23
Divisant par 28, nombre des observations, on a la correction moyenne, qui est.	0″,401

Puisque la distance polaire va en décroissant, les distances zénithales observées avant midi et réduites au méridien, sont plus grandes que la distance méridienne; au contraire, les observations faites après midi donnent des distances méridiennes trop petites. Puisque celles-ci l'emportent, la correction moyenne, 0″,401 doit être ajoutée aux distances zénithales observées; on doit donc écrire + 0″,401. Généralement soient M la somme des angles observés avant midi, S la somme des angles observés après, ces angles étant exprimés en minutes; nommons ϖ l'accroissement de la distance polaire du soleil en une minute de tems; la correction moyenne additive aux distances zénithales a pour expression $+\dfrac{(M-S)\,\varpi}{n}$, n étant le nombre des observations. Il ne reste, dans chaque cas particulier, qu'à suivre les signes que prend cette formule.

Enfin il nous faut calculer la réduction que la distance méridienne exige pour être ramenée au solstice; cette réduction toujours additive est donnée par la formule

$$\sin D' = 2 \operatorname{tang} \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} L' - 2 \operatorname{tang}^3 \omega \sin^4 \tfrac{1}{2} L' :$$

ω est l'obliquité de l'écliptique, et L' la distance du soleil au solstice en longitude. Cette formule a été démontrée tome II, page 31.

Dans notre exemple on avait $\omega = 23^\circ.27'.43''.37$, de plus, la valeur de L' calculée par les tables du soleil de M. Delambre était $L' = 6^\circ.7'.37''$. Avec ces données, le calcul s'effectue ainsi qu'il suit:

log 2 . . .	= 0,3010300	log 2 . . .	= 0,3010300
log tang ω	= 9,6375143	log tang³ ω	= 8,9125429
log sin² $\frac{1}{2}L$	= 7,4557688	log sin⁴ $\frac{1}{2}L$	= 4,9115376
	7,3943131		4,1251105
1er. terme.	2,4792997	2e. terme. .	— 23339
2e. terme. .	— 13339		
sin D' . .	2,4778758		
log sin D'	= 7,3940795		
D'	= 8′.31″.10		

Toutes nos réductions étant connues, nous achèverons le calcul comme il suit :

Distance zénithale moyenne, observée, ...	25°.36′.12″,05
Correction du niveau	+ 0″,15
	25°.36′.12″,20
Réfraction — parallaxe	+ 22″,79
	25°.36′.34″,99
Réduction au méridien.	— 5′.34″,006
Pour la variation de déclinaison.	+ 0″,401
Distance méridienne du soleil au zénith	25°.31′. 1″,39
Distance de l'équateur au zénith	48°.50′.14″
Déclinaison du soleil observée.	23°.19′.12″,61
Réduction au solstice	8′.31″,10
	23°.27′.43″,71
Correction pour la latitude du soleil, donnée par les tables, tome Ier., page 29	+ 0″,85
Obliquité apparente	23°.27′.44″,56

Cette obliquité est celle qui avait lieu réellement à l'époque de l'observation; il faudrait encore en déduire la nutation si l'on voulait obtenir l'obliquité moyenne.

On forme ainsi autant de valeurs de l'obliquité apparente que l'on a d'observations du soleil. On réduit ces valeurs à l'obliquité moyenne en tenant compte de la nutation. Le milieu entre tous ces résultats donne, avec une grande précision, l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'époque où l'on a observé. Ceci a été expliqué avec détail dans la page 28 du texte.

NOTE III, RELATIVE A LA PAGE 34.

Exemple d'un calcul de la longitude du soleil près de l'équinoxe d'automne, pour trouver la correction des tables du soleil.

Ce calcul est tout-à-fait analogue à celui que nous avons détaillé dans la note précédente ; c'est pourquoi je l'exposerai plus brièvement. L'observation qui nous servira d'exemple a été faite à l'Observatoire de Paris, le 15 septembre 1809, par MM. Mathieu et Arago, avec un cercle répétiteur à niveau fixe. Le baromètre marquait.... $0^m,75742$, le thermomètre à l'air libre + 19.

Epoque du passage du soleil au méridien en tems de la pendule. $11^h.25'.3'',8$.

EPOQUE DES OBSERVATIONS.	ANGLE HORAIRE.	RÉDUCTION.
$11^h.22'.50''$	$2'.14''$	9 . 8
23 . 43	1 . 21	3 . 6
24 . 40	0 . 24	0 . 3
25 . 32	0 . 28	0 . 4
26 . 33	1 . 29	4 . 3
27 . 20	2 . 16	10 . 1
28 . 33	3 . 29	23 . 8
30 . 59	5 . 55	68 . 7
31 . 59	6 . 55	93 . 9
32 . 48	7 . 44	117 . 4
34 . 12	9 . 8	163 . 8
35 . 0	9 . 56	193 . 7
		689 . 8

La réduction au méridien se calcule par la formule

$$\delta = \frac{\sin \Delta . \sin D \left\{ 1 + 2r' \right\}}{\sin Z} . \frac{2''.\sin^2 \frac{1}{2} p'}{\sin 1''}.$$

Or on avait, dans ces observations,

$$D = 41^\circ.\ 9'.46''$$
$$\Delta = 86^\circ.53'.37'' \text{ croissante.}$$
$$Z = \Delta - D = 45^\circ.43'.51''$$

La pendule *avançait* par jour de 219″; on avait donc

$$r' = -\frac{219''}{86400}.$$

Avec ces données, on calcule δ; et en divisant la somme des δ par 12, nombre des observations, on a la correction moyenne : voici ce calcul.

log $(1 + 2r')$	=	9,9977925
log sin D	=	9,8183583
log sin Δ	=	9,9993617
		9,8155125
log sin $(\Delta - D)$.	=	9,8549525
log facteur constant.	=	9,9605600
log 689,8	=	2,8387322
		2,7992832
log 12		1,0791812
		1,7201020
Réduction moyenne au méridien.	—	52″,49 soustractive.

La correction moyenne résultant du changement de la distance polaire pendant l'intervalle de la série, a été donnée dans la note précédente. Son expression générale est

$$+ \frac{(M - S)\,\pi}{n};$$

elle s'ajoute à la distance zénithale moyenne avec son signe. Ici, en ajoutant les angles horaires avant et après le passage, on trouve

	$M = \quad 4'.00$
	$S = \quad 47'.33$
Différence	$M - S = - 43'.33$
Accroissement de la distance polaire en 1′ de tems, déduite des tables.	$\varpi = + \; 0'',96$
Par conséquent	$(M-S)\,\varpi = - 41''.5968$
	$\frac{(M-S)\,\varpi}{12} = - \; 3'',466$

Avec ces résultats on peut calculer la déclinaison du soleil ainsi qu'il suit :

Distance zénithale observée.	45°.43′.52″,50
Correction du niveau	+ 0″,89
	45°.43′.53″,39
Réfraction — parallaxe	51″,27
	45°.44′.44″,66
Réduction au méridien	— 52″,49
Pour la variation de la distance polaire. . . .	— 3″,466
Distance méridienne du soleil au zénith. . . .	45°.43′.48″,70
Distance de l'équateur au zénith, ou latitude de l'observatoire	48°.50′.14″,00
Déclinaison du soleil boréale.	3°. 6′.25″,30
Réduction à l'écliptique à cause de la latitude du soleil	— 0″,48
Déclinaison du point correspondant de l'écliptique.	3°. 6′.24″,82

Cette déclinaison étant connue et représentée par d, on peut en déduire la longitude L par cette formule

$$\sin L = \frac{\sin d}{\sin \omega},$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique que nous prendrons égale à. . . $23^\circ.27'.43''.62$, on trouve

$$\log \sin d = 8{,}7339902$$
$$\log \sin \omega = 9{,}6000385$$
$$\log \sin L = 9{,}1339517$$

Longitude du soleil déduite de l'observation L. =	$172^\circ.10'.33'',85$
Longitude du soleil calculée par les tables pour le même instant	$172^\circ.10'.35'',80$
Différence, ou erreur des tables.	$+\ 1'',95$

On forme ainsi 20 ou 30 observations de cette erreur, et on prend la moyenne entre elles, comme il a été dit dans le texte, page 34.

NOTE IV.

Détermination de la latitude par des observations du soleil faites près du méridien.

Dans cette méthode, on suppose les tables du soleil exactes; on observe la distance méridienne de cet astre au zénith; on prend dans les tables sa distance à l'équateur. On ajoute ces quantités si le soleil se trouve entre l'équateur et le zénith. Dans le cas contraire, on retranche la plus petite de la plus grande; la somme ou la différence est la distance de l'équateur au zénith, ou la latitude.

La distance méridienne du soleil au zénith se déduit des observations précisément comme nous venons de le faire dans l'exemple précédent; nous avons trouvé alors

Distance méridienne du soleil au zénith	45°.43'.48",70
Admettons la déclinaison boréale du soleil donnée par les tables, et supposons.	3°. 6'.25",30
La somme sera la distance de l'équateur au zénith, ou la latitude de l'observatoire	48°.50'.10"

Nous avons ajouté la déclinaison à la distance zénithale, parce que le soleil se trouvait entre l'équateur et le zénith. Si la déclinaison eût été australe, il aurait fallu la retrancher.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DE LA LUNE.

CHAPITRE PREMIER.

Phénomènes généraux du mouvement de la Lune.

1. Nous venons d'exposer les phénomènes que présente la marche du soleil, nous en avons déduit les lois du mouvement de cet astre, et nous avons fait connaître les applications de ces lois aux usages de la société. Nous avons donc rempli à cet égard l'objet de l'astronomie. Nous allons suivre de la même manière les mouvemens des autres corps célestes, en nous élevant, par l'observation et le raisonnement, de leurs apparences les

plus simples à leurs lois les plus compliquées. Mais la facilité de ces recherches deviendra beaucoup plus grande par nos recherches antérieures; car, le but étant le même, les méthodes dont nous avons fait usage, pourront presque toujours servir; et si la diversité des circonstances nous force à les modifier, les changemens qu'il faudra leur faire subir seront indiqués par la nature des choses aussitôt qu'ils deviendront nécessaires.

2. Commençons par la lune, dont les apparences sont si remarquables, et suivons la série des phénomènes que cet astre nous présente. Sa lumière est plus pâle que celle du soleil; on n'en reçoit aucune chaleur sensible. Elle éprouve dans son étendue, et dans son éclat, des variations périodiques auxquelles on a donné le nom de *phases*. Si l'on observe la lune lorsqu'elle passe au méridien au milieu de la nuit, son disque paraît entièrement lumineux, sa forme est arrondie et brillante; alors elle se lève quand le soleil se couche, et réciproquement. Si on continue de l'observer pendant plusieurs jours, on la voit, peu-à-peu, perdre de sa lumière. La partie éclairée de son disque diminue de largeur; en même tems elle se lève plus tard, et lorsque son disque est réduit à un demi-cercle, elle ne paraît plus que pendant la dernière moitié de la nuit. Quelques jours après, ce n'est plus qu'un *croissant*, dont les pointes sont tournées vers l'occident, c'est-à-dire, vers le côté du disque le plus éloigné du soleil. Alors, elle ne se lève que peu de tems avant cet astre; le croissant diminuant de jour en jour, la lune devient tout-à-fait obscure : elle se lève avec le soleil, et on cesse de l'appercevoir.

Après avoir été invisible pendant trois ou quatre jours, elle reparaît, le soir, à l'occident, peu de tems après le coucher du soleil; ce n'est d'abord qu'un filet de lumière, qui s'agrandissant peu-à-peu, prend en quelques jours la forme d'un croissant, dont les pointes sont tournées à l'orient, c'est-à-dire, du côté opposé au soleil. Les jours suivans, la lune s'éloigne de plus en plus de cet astre; son disque s'agrandit, et elle reprend enfin cette forme arrondie et brillante que nous lui avons vue d'abord : la période de ces phases est d'environ 29 jours et demi.

Voici l'exposé des faits. Pour parvenir sûrement à la connaissance de leurs causes, il faut, avant tout, acquérir quelques notions précises sur le mouvement de la lune.

CHAPITRE II.

Première approximation des mouvemens de la Lune. Théorie de son mouvement circulaire.

3. Les observations que nous venons de rapporter, prouvent que la lune, après avoir passé au méridien en même tems que le soleil, retarde sur lui de jour en jour, et s'en écarte ainsi, de plus en plus, en sens contraire du mouvement diurne. Elle a donc, comme cet astre, un mouvement propre, mais plus rapide, dirigé d'occident en orient : cela est tout-à-fait confirmé par la manière dont elle s'éloigne successivement des étoiles qui se rencontrent sur sa route.

Pour connaître la loi de ces mouvemens avec exactitude, on emploie la méthode générale que nous avons exposée dans le premier chapitre du second livre, et qui nous a déja servi pour le soleil ; on observe, jour par jour, la hauteur méridienne du centre de la lune et son ascension droite ; on en déduit, par le calcul, sa longitude et sa latitude. La série de ces résultats détermine la vîtesse et la direction de son mouvement angulaire.

4. On a trouvé de cette manière que la lune décrit sur la sphère céleste, un grand cercle dont la terre est le centre ; ce grand cercle est oblique à l'équateur et à l'écliptique. Son inclinaison sur ce dernier plan varie dans des limites peu étendues, que nous déterminerons bientôt.

Mais sa valeur moyenne est 5°,7222. Les valeurs variables qu'elle prend à chaque révolution peuvent se déduire immédiatement des observations, en déterminant d'après leur comparaison, la plus grande latitude de la lune ; de même que l'obliquité de l'écliptique est donnée par la plus grande déclinaison du soleil.

5. On trouve la trace de l'orbe lunaire sur l'écliptique, ou, selon le langage astronomique, *la position de ses nœuds*, en déterminant, par la série des observations, l'instant où la latitude de la lune devient nulle ; car il est sensible que cet astre traverse alors le plan de l'écliptique, et par conséquent, sa longitude à cette époque est la même que celle de ses nœuds.

6. On appelle *nœud ascendant* celui par lequel la lune passe lorsqu'elle s'élève au-dessus du plan de l'écliptique, vers le pôle boréal ; et *nœud descendant*, celui par lequel elle descend au-dessous de l'écliptique, vers le pôle austral. La distance du nœud ascendant à l'équinoxe du printems, ou sa longitude, au premier janvier 1800, était 17°,6933 ; ce qui détermine, pour cette époque, la position de l'orbe lunaire.

7. Ces nœuds ne sont pas fixes dans le ciel ; ils ont sur l'écliptique, un mouvement rétrograde, c'est-à-dire, dirigé en sens contraire de celui du soleil. Ce mouvement se reconnaît par la suite des étoiles que la lune rencontre en traversant le plan de l'écliptique, ou plus exactement il se reconnaît et se mesure par le changement de longitude de ses nœuds.

8. Donnons maintenant les valeurs numériques de ces mouvemens divers : l'arc moyen que la lune décrit parallèlement à l'écliptique en cent années juliennes, forme ce que l'on appelle son *mouvement séculaire tropique.* C'est la différence de ses longitudes moyennes dans cet

intervalle ; sa valeur en 1800 était de 5347420°,088110 ou simplement 342°,088110, en omettant les 1336 circonférences entières qui ne peuvent occasionner aucun doute. Cet arc, divisé par 36525j, donne le *mouvement diurne tropique* égal à 14°,6404, environ treize fois plus rapide que celui du soleil.

9. Avec ces données, on conclut par une simple proportion, le tems que la lune emploie à revenir à la même longitude ou sa *révolution périodique*, dont la valeur est $\frac{400°.36525^j}{5347420°,088110}$ ou 27j,321582 ; c'est ce que l'on nomme un *mois périodique lunaire*.

10. Si, du mouvement séculaire tropique, on retranche la précession des équinoxes pour un siècle, c'est-à-dire, 15463″, on aura le *mouvement séculaire sydéral*, ou par rapport aux étoiles; car la marche des étoiles et celle de la lune par rapport aux équinoxes, se faisant dans le même sens, leur mouvement relatif est égal à la différence des arcs qu'elles décrivent. On trouve ainsi 5347400°,541810 ou simplement 340°,541810 pour le mouvement séculaire sydéral de la lune ; et par une simple proportion, on en déduit 27j,321661 pour sa révolution sydérale.

Ces deux révolutions de la lune sont donc liées entre elles, par la précession des équinoxes, et on peut les déduire l'une de l'autre. Elles n'ont pas toujours eu les valeurs précédentes ; elles diminuent peu-à-peu, de siècle en siècle, parce que le mouvement de la lune s'accélère ; et ces changemens sont sensibles dans les observations, après d'assez courts intervalles de tems.

11. En général, les mouvemens de la lune se composent, comme ceux du soleil, d'un petit nombre d'élémens, dont la valeur moyenne reste la même ;

de plusieurs inégalités à longues périodes ou *séculaires*, qui altèrent peu-à-peu ces valeurs; enfin, d'un grand nombre d'inégalités renfermées dans des périodes plus petites, qui se détruisent et se rétablissent successivement : celles-ci accélèrent, dans certains tems, le mouvement de la lune, et le retardent dans d'autres; au lieu que les inégalités séculaires suivent une marche constamment croissante ou décroissante, au moins depuis les plus anciennes observations jusqu'à nous; et ce ne sera qu'après un grand nombre de siècles, qu'on verra leurs périodes s'accomplir pour recommencer de nouveau.

Nous examinerons plus tard, avec détail, les effets de ces diverses causes : pour le moment, il suffit de les indiquer.

12. On n'a pas connu d'abord les résultats précédens avec toute l'exactitude que nous pouvons aujourd'hui leur supposer. On a dû commencer, comme pour le soleil, par les déterminer à-peu-près, et en former des tables qui étaient sans doute assez inexactes; en comparant ces tables avec plusieurs années d'observations, on a pu trouver l'erreur du moyen mouvement; car cette erreur allait en s'accumulant avec le tems, au lieu que celles des inégalités périodiques, ne faisaient qu'osciller dans certaines limites. D'après cela, on conçoit qu'ici, comme dans la détermination de l'année solaire, l'effet de ces inégalités s'affaiblit quand on compare des observations très-éloignées, parce que dans l'intervalle, elles ont dû nécessairement se compenser et disparaître un grand nombre de fois, de manière à ne laisser que les résultats moyens. On a donc pu conclure alors, avec une plus grande approximation, la durée moyenne de la révolution de la lune, pour l'intervalle compris entre ces observations, et

même l'employer, sans une grande erreur, pour quelques années avant et après. Mais tant que les inégalités à longues périodes qui affectent le mouvement de la lune n'ont pas été toutes connues, leur effet variable se trouvant compris dans l'évaluation du moyen mouvement, altérait nécessairement sa valeur, et l'altérait inégalement suivant les époques des observations que l'on comparait. Il a donc fallu connaître toutes ces inégalités, et en dépouiller les observations avant d'obtenir le moyen *mouvement véritable. Alors seulement* on a pu prévoir les changemens que les tables doivent subir, et l'on a pu avec certitude les étendre aux siècles futurs, bien au-delà des observations qui avaient servi pour les former. C'est la théorie de l'attraction qui a donné la connaissance et la mesure de ces phénomènes. Elle seule peut en démêler les lois avec exactitude. Nous ne pouvons ici que les indiquer.

Au commencement de ce siècle, c'est-à-dire, au 1er. janvier 1801, à minuit moyen au méridien de Paris, la *longitude moyenne* de la lune sur l'écliptique était... 124°,01299; avec cette donnée, et la connaissance du moyen mouvement, on peut calculer la longitude moyenne de la lune pour une autre époque antérieure ou postérieure. Cette valeur primitive de la longitude moyenne se déduit des observations comme l'*époque* des tables du soleil, ou comme l'instant de l'équinoxe moyen. Quand on a un grand nombre d'observations de la lune peu distantes les unes des autres, on en déduit, par le calcul, les valeurs de la longitude vraie; de ces valeurs, on retranche l'effet des inégalités périodiques tiré des tables déja existantes; ce qui reste est la longitude moyenne de la lune à l'instant de l'observation. On réduit toutes ces valeurs à une même époque, d'après la connaissance que l'on a du moyen mouvement: car quand même il resterait encore sur cet élément quelque petite incertitude, l'influence n'en serait pas sensible sur la réduction d'observations voisines. Cela fait, on prend une moyenne arithmétique entre tous les résultats, afin de détruire les petites erreurs que les observations ont pu comporter; et l'on a ainsi, avec précision, la valeur de la longitude moyenne pour l'époque que l'on a considérée. En répétant les mêmes réductions et les mêmes calculs sur des observations séparées des premières par un intervalle de tems considérable, on obtient une autre valeur de la longitude moyenne réduite à une autre époque fort éloignée de la première; la différence de ces deux longitudes vérifie le moyen mouvement dont on a fait usage, et s'il comportait quelque petite erreur, elle sert à le corriger.

13. Jusqu'ici nous n'avons parlé que du mouvement propre de la lune; celui de ses nœuds se mesure de la même manière, par les différences de leurs longitudes à diverses époques; et le tems qu'ils emploient à revenir à la même longitude, donne la *révolution tropique du nœud.* Le mouvement moyen séculaire et tropique des nœuds en 1800 était de $2152^{\circ},15637$, ce qui donne $6788^{j},54019$ pour leur révolution tropique, et $6793^{j},42118$ pour leur révolution sydérale (*).

Si ce mouvement était uniforme, il suffirait de connaître, par l'observation, la longitude des nœuds de la lune, à une certaine époque, et l'on en déduirait, par une simple proportion, cette longitude pour une autre époque quelconque : mais leur mouvement est sujet à plusieurs inégalités, et d'ailleurs il se rallentit de siècle en siècle, comme nous le verrons plus loin.

(*) Ces périodes se déduisent du mouvement séculaire, comme on l'a vu dans l'art. 8 et les suivans.

CHAPITRE III.

Explication des Phases de la Lune.

14. AYANT reconnu la marche circulaire de la lune sur la sphère céleste, cherchons quelle peut être la cause de ces variations périodiques que l'on observe dans sa lumière. On ne peut pas raisonnablement supposer que cet astre acquière et perde successivement la faculté de briller ; car alors à quelle cause probable pourrait-on attribuer les périodes si régulières de ces changemens. On ne peut pas dire non plus qu'il a une face lumineuse et une face obscure qu'il nous montre tour-à-tour ; car il est certain que la lune nous présente toujours la même face : en effet, lorsque son disque n'est qu'en partie lumineux, sa partie obscure n'est pas tout-à-fait invisible ; elle est encore éclairée d'une faible lueur, que l'on nomme la *lumière cendrée*. A l'aide de cette lueur, on y remarque des sinuosités, des taches qui sont absolument les mêmes que dans le tems où la lune est entièrement lumineuse. Ces phénomènes ne peuvent raisonnablement s'expliquer qu'en supposant que la lune est un corps opaque, obscur par lui-même, et qui brille d'un éclat étranger : alors, les variations de ces phases seront l'effet très-simple de ses différentes positions.

Mais si la lune est un corps opaque, quel est le flambeau qui l'éclaire? Pour le découvrir, observons la suite de ses phases ; nous les voyons liées de la manière la plus frappante à ses positions successives par rapport au soleil. Lorsque la lune est entièrement lumineuse et qu'elle passe à minuit au méridien, le soleil est sous l'horison : la face qu'elle nous présente est donc éclairée par cet astre, et doit nous réfléchir sa lumière, pourvu toutefois qu'elle soit assez éloignée de nous pour n'être pas enveloppée dans l'ombre de la terre. Au contraire, lorsque la lune et le soleil paraissent sur l'horison en même tems, la face éclairée de la lune étant toujours tournée vers cet astre, nous ne la voyons point, ou nous ne l'appercevons qu'en partie, et celle qui est tournée vers nous est dans l'ombre : généralement, lorsqu'une partie du disque de la lune nous paraît éclairée, cette partie est toujours opposée au soleil, et placée de manière à pouvoir nous réfléchir sa lumière. Il est prouvé d'ailleurs que la lune est un corps opaque. Il faut donc conclure de ces rapports, qu'en effet la lumière que ce corps nous renvoie, est celle qui lui vient du soleil.

Ce corps opaque doit paraître comme une tache noire, quand il passe devant le disque du soleil entre cet astre et la terre. Il doit également s'obscurcir lorsqu'étant opposé au soleil, il entre dans le cône d'ombre que la terre projette au loin derrière elle dans l'espace : de là les phénomènes des éclipses.

Réciproquement, la terre doit faire l'effet d'une lune par rapport à ce corps opaque, lorsqu'elle est placée convenablement. Elle doit lui réfléchir les rayons solaires. Aussi lorsque la face que la lune nous présente n'est pas entièrement éclairée par le soleil, la portion de cette face qui ne reçoit pas encore la lumière directe de cet astre n'est pas tout-à-fait obscure. En l'observant avec le télescope, on y remarque une faible lueur qui la rend sensible, et qui achève de dessiner le contour du disque sur le fond du ciel. Cette lueur a été nommée par les astronomes la *lumière cendrée*.

15. Ces vérités reconnues nous en découvrent d'autres : la lune, dans ses phases, présente absolument les mêmes apparences que devrait offrir un corps arrondi qui serait toujours vu du même point, et éclairé successivement de différens côtés : la lumière ne s'y répand pas d'une manière subite et instantanée, comme cela devrait être si son disque était plat et sans épaisseur ; elle s'y propage d'une manière lente et progressive. La convexité de la surface de la lune est donc rendue sensible par ces accroissemens toujours réglés, et l'on peut même en déduire, par le calcul, qu'elle est à fort peu près sphérique (*).

(*) Pour plus de simplicité, supposons la lune dans le plan de l'écliptique, et regardons comme parallèles les rayons lumineux menés du soleil à cet astre, aussi bien que les rayons visuels menés de la terre. Cela est sensiblement vrai à cause de la distance, et il sera facile de faire aux résultats les petites corrections que ces suppositions comportent. Soit donc T, *fig.* 1, le centre de la terre, C le centre de la lune supposée sphérique, et menons CS, TS', parallèles entre elles et dirigées vers le soleil. La partie éclairée de la lune sera séparée de la partie obscure par un plan mené par son centre perpendiculairement aux rayons solaires, et figuré par AB. De même la partie de la lune qui est visible pour la terre sera limitée par le plan LL', perpendiculaire à la distance CT. Ainsi la seule partie du disque lunaire qui paraîtra éclairée, sera AL, qui projetée sur le plan LL' par la perpendiculaire AP, aura pour largeur PL, ou le sinus verse de l'angle LCA. Telle est donc la mesure de la phase visible. Or l'angle LCA est complément de LCS, par conséquent égal à SCT' ou à $S'TC$, qui est la distance angulaire de la lune au soleil vue de la terre ; d'où il résulte que si la lune est sphérique, et éclairée par le soleil, la largeur de ses phases doit croître proportionnellement au sinus verse de

16. Cela acquiert un nouveau degré d'évidence, lorsqu'on suit, d'après ces idées, la marche des phases de la lune. La *fig.* 2 représente toutes les positions du sphéroïde lunaire, par rapport à la terre et au soleil. Ces positions sont projetées sur le plan de l'écliptique; C est

---

cette distance. Ce résultat étant à fort peu près conforme aux observations, la sphéricité de la lune en est une conséquence nécessaire. Si l'on voulait apprécier cette variation avec une approximation plus grande, il n'y aurait qu'à chercher la valeur exacte de l'angle de l'intérieur ATC, qui mesure la distance apparente de l'intérieur du croissant lumineux au centre du disque, et retrancher cette valeur du demi-diamètre apparent de la lune. Or, en nommant CP, x, PA, y, r le rayon de la lune supposée sphérique, et R la distance CT de son centre à la terre, l'angle ATC aura pour tangente trigonométrique $\frac{x}{R-y}$ ou $\frac{r \cos e}{R - r \sin e}$, en désignant par e l'angle d'élongation $S'CT$ qui est égal à ICA. Maintenant D étant le demi-diamètre apparent du disque, on a $r = R \sin D$; la tangente de ATC devient donc égale à $\frac{\sin D \cos e}{1 - \sin D \sin e}$. Comme cet angle lui-même est fort petit, aussi bien que D, le rapport $\frac{\tan ATC}{\sin D}$ diffère très-peu de $\frac{ATC}{D}$. En substituant ce dernier au précédent, on a $ATC = \frac{D \cos e}{1 - \sin D \sin e}$. La largeur apparente de la phase lumineuse vue de la terre est égale à $D - ATC$, on aura donc pour son expression $D - \frac{D \cos e}{1 - \sin D \sin e}$ ou, ce qui revient au même $D \left\{ 1 - \cos e - \frac{\sin D \sin e \cos e}{1 - \sin D \sin e} \right\}$, le dernier terme multiplié par $\sin D$ est beaucoup plus petit que les deux premiers. Si on le néglige, on voit que la largeur de la phase lumineuse est au demi-diamètre apparent de la lune, comme le sinus verse de l'angle d'élongation est au rayon. Au reste, l'observation même à laquelle on peut comparer ces résultats, n'est pas non plus susceptible d'une extrême rigueur à cause des dentelures et des accidens le centre de la terre, et *CS* la direction des rayons solaires, qui, pour plus de simplicité, sont supposés parallèles entre eux. La face que la lune présente constamment à la terre est successivement obscure ou éclairée, en tout ou en partie ; et la courbe qui forme, sur cette face, la séparation de l'ombre et de la lumière, étant vue de la terre en perspective, prend tour-à-tour diverses formes analogues aux positions du sphéroïde. D'abord, on ne l'apperçoit pas, lorsque la lune est en L, du même côté que le soleil par rapport à la terre. On dit alors que la *lune est nouvelle*. Lorsqu'elle s'est dégagée des rayons du soleil, comme en L', la partie lumineuse paraît sous la forme d'un croissant dont les pointes sont tournées du côté du disque qui est le plus éloigné du soleil. En L'', la limite de l'ombre est une ligne droite, et l'on dit que la lune est dans son *premier quartier*. En L''', la partie lumineuse s'arrondit des deux côtés. Enfin en l, elle devient un cercle entier, et c'est le tems de la *pleine lune*. Les mêmes apparences se reproduisent pendant le *décours*, c'est-à-dire, pendant le tems que la lune emploie à rejoindre le soleil. Elle reparaît en l'' sous la forme d'un demi-cercle dans son *dernier quartier*, et redevient enfin nouvelle en L, après avoir fait une révolution entière dans son orbite.

Dans la réalité, ces diverses positions n'ont pas lieu dans l'écliptique, mais sur l'orbite même de la lune qui

---

bisarres qui terminent toujours la partie éclairée de la lune quand on la regarde avec de forts télescopes. Ces irrégularités sont produites par les élévations inégales des points situés sur la limite de l'ombre et de la lumière, élévations qui font que ces points sont plutôt ou plus tard éclairés ; et de là résulte une assez grande incertitude sur la limite de la courbe qui sépare la partie éclairée de la partie obscure.

est inclinée à ce plan. Pour plus de simplicité, nous avons d'abord fait abstraction de cette obliquité; mais pour voir les phénomènes tels qu'ils sont réellement, il faut considérer la *fig.* 3, où *C* est le centre de la terre, $LL'L''L'''$ l'orbite de la lune, $ll'l''l'''$ la projection de cette orbite sur le plan de l'écliptique, et *CS* la direction d'un rayon vecteur, mené de la terre au soleil. Les différentes positions que peut prendre le sphéroïde lunaire, par rapport à ce rayon vecteur, au-dessous et au-dessus du plan de l'écliptique, donnent les différentes phases de la lune, dans l'ordre où nous les avons examinées.

17. Nous avons aussi, dans ces premières considérations, supposé le soleil immobile sur le plan de l'écliptique; mais, en effet, cet astre et son rayon vecteur sont en mouvement sur ce plan. Cette circonstance, combinée avec le mouvement propre de la lune, détermine la période du retour des différentes phases. Si le mouvement de révolution de la lune était exactement le même que celui du soleil, en sorte que le même intervalle de tems ramenât ces deux astres au même point de leurs orbites, les deux rayons qui leur seraient menés de la terre conserveraient toujours entre eux la même distance angulaire et la même position relative. Nous verrions donc la lune sous le même aspect, par rapport au soleil, et la partie éclairée de son disque, conserverait toujours la même grandeur. Par exemple, si elle eût été placée originairement, à 100° du soleil, nous la verrions toujours dans son premier quartier; et si elle lui eût été opposée, nous aurions toujours eu la pleine lune : du moins, en la supposant placée à une distance telle qu'elle ne pût être éclipsée. De là résulte cette conséquence : pour que la lune nous présente différentes phases, il est nécessaire que son mouvement

de révolution ne soit pas exactement égal à celui du soleil.

18. Ceci nous conduit naturellement à chercher la période des différentes phases, ou l'intervalle qui s'écoule entre deux retours de la lune à la conjonction. Cette recherche est extrêmement simple, quand on n'a égard qu'aux mouvemens moyens. En effet, le cercle de latitude dans lequel la lune se trouve ne s'éloigne du soleil que par l'excès de son mouvement en longitude. Or, le mouvement séculaire moyen du soleil est $40000^{\circ},847222$, comme on l'a vu dans la page 53; celui de la lune est maintenant $534742^{\circ},088110$; leur différence....... $494741^{\circ},240888$ est donc la quantité dont la lune s'éloigne du soleil en 100 années juliennes, en vertu de son mouvement moyen: d'où l'on voit, par une simple proportion qu'elle s'en écarte de 400° après un nombre de jours exprimé par $\frac{400^{\circ}.36525^{j}}{494741,240888}$ ou $29^{j},530588$; c'est ce que l'on nomme la *révolution synodique* de la lune, de deux mots grecs qui signifient *marcher ensemble*. On appelle aussi cette période *un mois lunaire*.

19. Nous pouvons trouver, de même, le tems qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil au nœud de l'orbe lunaire. En effet, le mouvement séculaire du nœud est $2149^{\circ}0972$; celui du soleil est $40000,847222$. Comme ils sont dirigés en sens contraire, le mouvement relatif du soleil et du nœud est égal à leur somme ou à $42149^{\circ},944422$; c'est la quantité dont le soleil et le nœud se sont éloignés l'un de l'autre pendant 100 années juliennes, d'où il faut conclure qu'ils s'écarteront de 400° dans un nombre de jours exprimé par $\frac{400^{\circ}36525^{j}}{42149.944422}$ ou

346^j,61963. Cette période se nomme la *révolution synodique du œuud.* Elle est plus petite qu'une année tropique, et en effet le mouvement du nœud étant rétrograde, le soleil doit le rejoindre avant d'avoir fait le tour entier du ciel. Comme nous n'avons employé dans les calculs que les mouvemens moyens, on conçoit que les valeurs auxquelles nous venons de parvenir ne seront pas toujours conformes au mouvement vrai de la lune, mais elles ne s'en écarteront jamais beaucoup. Elles ne seront altérées que par les inégalités périodiques des mouvemens lunaires, et seraient exactes en les négligeant.

20. Plusieurs autres points de l'orbe de la lune méritent une attention particulière, à cause de leurs rapports avec les différentes phases. Tels sont, par exemple, ceux dans lesquels le rayon vecteur lunaire coïncide avec le rayon vecteur du soleil. Alors, ces deux astres se trouvent, avec la terre, dans un même plan perpendiculaire à l'écliptique, et la longitude de la lune est la même que celle du soleil ou la surpasse de 200°. Ces points se nomment les *syzigies*. Lorsque la lune s'y trouve, elle est entre le soleil et la terre, ou la terre est entre le soleil et elle : dans le premier cas, on dit que la lune est en *conjonction*, dans l'autre, qu'elle est en *opposition*.

21. C'est dans les conjonctions qu'arrivent les nouvelles lunes et les éclipses du soleil. En effet, pour que ce dernier phénomène ait lieu, il n'est pas absolument nécessaire que la lune soit dans le plan de l'écliptique, il suffit que la distance de son bord inférieur à ce plan, soit moindre que le demi-diamètre apparent du soleil.

22. Au contraire, l'opposition est l'instant de la pleine lune, et c'est aussi le lieu où cet astre peut être éclipsé,

Pour cela, il faut que la distance de son bord inférieur au plan de l'écliptique, soit moindre que le demi-diamètre de l'ombre projetée par la terre à cette distance. Nous reviendrons plus loin sur ces phénomènes.

23. On a aussi donné un nom particulier aux points dans lesquels la lune atteint son premier ou son dernier quartier; on les nomme les *quadratures*. Cet astre se trouve alors à 100° du soleil, c'est-à-dire, que la projection de son rayon vecteur sur le plan de l'écliptique, fait un angle de 100° avec la direction des rayons solaires. Les points intermédiaires entre les syzigies et les quadratures, qui sont à 50° du soleil, ont aussi reçu une dénomination particulière : on les appelle les *octans*.

CHAPITRE IV.

Du Diamètre apparent de la Lune et de sa Parallaxe.

24. Jusqu'ici nous n'avons considéré le mouvement de la lune que relativement à sa révolution autour de la terre, et nous avons projeté ses positions successives sur la sphère céleste. Mais les distances de cet astre à la terre, éprouvent aussi des changemens très-considérables qu'il est nécessaire d'apprécier.

Ils sont indiqués par les observations de ses diamètres apparens. Ces diamètres peuvent se mesurer directement avec des micromètres. On peut aussi les conclure des occultations d'étoiles d'après le tems qui s'écoule entre l'immersion et l'émersion. On a trouvé par ces diverses méthodes que le plus grand diamètre apparent de la lune est de 6207″, et le plus petit, de 5438″; les valeurs analogues pour le soleil sont de 6035″,7 et 5836″,3. Il faut donc que les variations de la distance de la lune à la terre soient bien étendues, puisqu'elles peuvent rendre son diamètre apparent plus grand que le plus grand diamètre apparent du soleil, et moindre que le plus petit.

25. Les observations des parallaxes confirment ce résultat. Celle de la lune est assez sensible pour qu'on ait pu l'obtenir par les méthodes indiquées dans le chap. XIX du premier livre, méthodes auxquelles la parallaxe du

soleil avait échappé, à cause de sa petitesse. En comparant les parallaxes de la lune, observées à différentes époques, dans un même lieu, on y trouve de très-grandes variations. La plus grande parallaxe horisontale de la lune, à Paris, est 1°,13868, la plus petite 0°99722; elle prend successivement toutes les valeurs possibles entre ces deux extrêmes.

26. En calculant d'après ces données la plus grande et la plus petite distance de la lune à la terre, on trouve les résultats suivans :

Parallaxe.	*Distance.*
0,99722.	63,8419.
1,13858.	55,9164.

La distance moyenne arithmétique entre ces extrêmes est 59,87918, c'est-à-dire, environ 60 fois le rayon de la terre à la latitude de Paris, ou plus exactement 85790 lieues de 2280 toises. La distance du soleil est incomparablement plus grande, comme je l'ai annoncé précédemment.

27. Si l'on divise la plus grande distance 63,8419, par la plus petite 55,9164, leur rapport 1,1417 fera connaître les plus grandes variations des distances de la lune à la terre. On parviendra au même résultat en divisant les parallaxes extrêmes l'une par l'autre, car ces parallaxes sont réciproques aux distances. Ce même rapport n'était que de 1,034 pour le soleil; ainsi la réunion de ces résultats nous conduit à deux conséquences importantes. La lune est incomparablement plus rapprochée de la terre que le soleil, et elle éprouve dans les rapports de ses distances des altérations qui sont, proportionnellement, beaucoup plus considérables.

28. Non-seulement la parallaxe lunaire varie pour les différentes époques, en vertu de ces inégalités, mais sa valeur n'est pas la même à la même époque, lorsqu'elle est observée dans des lieux différens de la surface terrestre. Les observations modernes donnent à cet égard des différences très-sensibles. Pour expliquer ce phénomène, ou plutôt pour en sentir les conséquences, il faut se rappeler que la parallaxe horisontale d'un astre est l'angle sous lequel on verrait, de cet astre, un rayon mené du centre de la terre à l'observateur. Puisque cette parallaxe n'est pas la même au même instant dans les différens lieux, c'est une preuve que tous les rayons de la terre ne sont pas égaux entre eux, et que la surface de la terre n'est pas parfaitement sphérique. Ainsi la lune nous indique par les variations de sa parallaxe, les inégalités de la surface terrestre, comme elle nous avait indiqué la rondeur de la terre par ses éclipses.

L'inégalité des rayons terrestres influe donc sur les positions apparentes de la lune, observées à différentes latitudes. Elle y influe encore dans le même lieu, selon les plans verticaux dans lesquels la lune se trouve au moment de l'observation. Il est très-nécessaire d'avoir égard à ces différences quand on veut calculer avec exactitude les positions apparentes de la lune ; car la supposition de la sphéricité de la terre pourrait entraîner des erreurs sensibles sur l'époque d'une occultation d'étoile, ou de tel autre phénomène qu'il serait important de déterminer. Pour obtenir les corrections qui en résultent, on est obligé de faire une hypothèse sur la figure de la terre, et on la suppose ordinairement elliptique, ce qui donne une suffisante exactitude. Nous avons donné, dans le premier livre, les formules nécessaires pour cet objet.

29. En divisant le demi-diamètre apparent de la lune réduit au centre de la terre, par la valeur de sa parallaxe horisontale, pour un lieu déterminé, on trouve entre ces quantités un rapport constant. D'après ce qui a été démontré dans la page 253 du premier livre, on voit que ce rapport est celui des rayons de la lune et de la terre supposées sphériques. D'après les observations les plus exactes, la valeur de ce rapport, pour l'équateur, est 0,27293056, en supposant 0°,303256 pour le demi-diamètre réduit au centre de la terre quand la parallaxe est 1°,111111. Ce résultat une fois connu, on s'en sert pour calculer le diamètre apparent de la lune quand on connaît sa parallaxe horisontale; ou réciproquement on en peut conclure la parallaxe lorsque le diamètre est donné.

30. La lune décrivant son cercle diurne autour de la terre, chaque observateur placé sur la surface terrestre, la voit plus près, lorsqu'elle est au zénith, que lorsqu'elle est à l'horison. Cette différence, comme nous l'avons déja annoncé, produit un effet sensible sur son diamètre apparent, qui augmente à mesure qu'elle s'élève. Cet accroissement est facile à calculer, et sa valeur totale depuis l'horison jusqu'au zénith est d'environ $\frac{1}{60}$, parce que dans l'intervalle, la distance de la lune à l'observateur se trouve diminuée d'une quantité égale au rayon de la terre, qui en est à-peu-près la soixantième partie (*).

(*) Soit R la distance du centre de la lune au centre de la terre à un instant quelconque; supposons qu'au même instant la distance apparente de la lune au zénith de l'observateur soit z, et que sa distance rectiligne à l'observateur soit r. Dans le triangle rectiligne formé par les droites R et r avec le rayon terrestre, la première sera opposée à l'angle $200° - z$, et la seconde à l'angle $z - \varpi$, ϖ étant la parallaxe de hauteur. On aura donc

$$r = R\,\frac{\sin(z-\varpi)}{\sin z},$$

De plus en nommant Π la parallaxe horisontale de la lune pour la distance R, on aura

$$\sin\varpi = \sin\Pi.\sin z,$$

comme nous l'avons vu dans le I^er. livre, page 244. Maintenant, soit D le demi-diamètre apparent de la lune pour la distance R; sa valeur à la distance r sera $\frac{DR}{r}$, car il est inversement proportionnel à la distance; ainsi, en le nommant D' relativement à l'observateur placé sur la surface de la terre, et mettant pour $\frac{R}{r}$ sa valeur, on aura

$$D' = \frac{D.\sin z}{\sin(z-\varpi)}.$$

et par conséquent

$$D' - D = D\left\{\frac{\sin z - \sin(z-\varpi)}{\sin(z-\varpi)}\right\},$$

et enfin

$$D' - D = \frac{2D\sin\frac{1}{2}\varpi\cos\left\{z-\frac{1}{2}\varpi\right\}}{\sin(z-\varpi)}.$$

Cette dernière forme est très-commode pour le calcul logarithmique; elle fera connaître l'accroissement $D' - D$ du demi-diamètre après que l'on aura calculé la parallaxe de hauteur ϖ.

Lorsque la lune est à l'horison, on a $z = 100°$, $\varpi = \Pi$, alors la formule donne

$$D' - D = \frac{2D\sin^2\frac{1}{2}\Pi}{\cos\Pi}.$$

Supposons, par exemple, que l'observateur soit placé à l'équateur même, d'après les observations les plus exactes, quand la parallaxe horisontale Π est $1°,11111$ à l'équateur, le demi-diamètre apparent D est $0°,303256$. Dans ce cas on trouve

$$D' - D = 0'',46295$$

Le demi-diamètre vu à l'horison même, est donc déja un peu plus grand que celui que l'on observe du centre de la terre; en effet, la lune, dans ce cas même, est plus éloignée du centre de la terre que de l'observateur.

Au zénith on a $z = 0$, $\varpi = 0$, et la valeur de $D' - D$ se présente sous la forme de $\frac{0}{0}$; cela tient à ce que le triangle rectiligne sur lequel nous avions fondé notre formule n'existe plus dans cette circonstance, et se réduit à une ligne droite. Alors on ne peut plus calculer le rapport des distances d'après la comparaison des angles opposés. Dans ce cas, si l'on nomme R', le rayon terrestre, les distances de la lune au centre de la terre et à l'observateur, seront

$$R \text{ et } R - R' \text{ ou } R \text{ et } R - R \sin \Pi .$$

Π étant toujours la parallaxe horisontale. Le rapport des deux diamètres apparens étant inverse de ces distances, on aura

$$\frac{D'}{D} = \frac{R}{R - R \sin \Pi} \text{ ou simplement } \frac{D'}{D} = \frac{1}{1 - \sin \Pi},$$

ce qui donne

$$D' - D = \frac{D \cdot \sin \Pi}{1 - \sin \Pi}, \quad \text{ou bien} \quad D' - D = \frac{D}{56{,}428} = 53'',865,$$

en mettant pour Π et D les valeurs numériques que nous avons adoptées.

On serait parvenu au même résultat en développant l'expression générale de $D' - D$ que nous avons trouvée d'abord, et délivrant ses deux termes du facteur commun $\sin z$, avant de supposer $z = 0$. En effet, en opérant ainsi on trouve d'abord

$$D' - D = D \left\{ \frac{\sin z - \sin z \cos \varpi + \cos z \sin \varpi}{\sin z \cos \varpi - \cos z \sin \varpi} \right\};$$

or, $\sin \varpi = \sin \Pi . \sin z$, en mettant pour $\sin \varpi$ cette valeur, les deux termes de la fraction deviennent divisibles par $\sin z$, et il reste

$$D' - D = D \frac{\{ 1 - \cos \varpi + \cos z \sin \Pi \}}{\cos \varpi - \cos z . \sin \Pi}; \quad (1)$$

faites maintenant ϖ et z nuls, il vient

$$D' - D = \frac{D \sin \Pi}{1 - \sin \Pi},$$

comme nous l'avons trouvé directement.

L'expression précédente de $D' - D$, que nous avons désignée par (1), peut être mise sous cette forme

$$D' - D = D\,\frac{\left\{\cos z \sin \Pi + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varpi\right\}}{1 - \cos z \sin \Pi - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varpi}.$$

Comme ϖ est toujours un fort petit angle, on peut, sans craindre aucune erreur sensible, mettre $\frac{1}{4} \sin^2 \varpi$ au lieu de $\sin^2 \frac{1}{2} \varpi$; or, on a $\sin \varpi = \sin \Pi . \sin z$. En substituant cette valeur, ϖ se trouvera éliminé, et il viendra

$$D' - D = D\,\frac{\left\{\cos z \sin \Pi + \frac{1}{2} \sin^2 \Pi \sin^2 z\right\}}{1 - \cos z \sin \Pi - \frac{1}{2} \sin^2 \Pi \sin^2 z}.$$

On peut encore éliminer la parallaxe en mettant au lieu de π sa valeur nD, n étant le rapport constant de la parallaxe au demi-diamètre dans le lieu de l'observation; alors la formule ne contenant plus d'inconnue que z, peut être réduite en tables qui donnent l'accroissement du diamètre pour chaque distance apparente au zénith; c'est ce que font les astronomes, et ils joignent ces résultats aux tables de la lune. Il faut remarquer que dans les expressions précédentes la distance apparente z est supposée corrigée de l'effet de la réfraction, qui élève l'image de l'astre sans changer sa distance à l'observateur.

CHAPITRE V.

Seconde approximation du mouvement de la Lune. Théorie de son mouvement elliptique.

31. On vient de voir que les distances de la lune à la terre éprouvent des variations très-grandes. Le mouvement de cet astre n'est donc pas circulaire comme il le paraît lorsqu'on le projète sur la sphère céleste. En mesurant ainsi un grand nombre de ces distances, et les comparant au mouvement angulaire, on connaîtra la nature de l'orbite. La méthode est la même que pour le soleil. On a obtenu de cette manière les résultats suivans, qui doivent être regardés comme certains.

La lune se meut dans une orbite elliptique, dont le centre de la terre occupe un des foyers. Son rayon vecteur trace autour de ce point des aires à fort peu près proportionnelles aux tems. La moyenne distance de cet astre à la terre étant prise pour unité, l'excentricité de son orbite est 0,0548553 en 1800, ce qui donne la plus grande équation du centre égale à 6°,9983 (*). La manière dont

(*) Ces résultats sont pris textuellement dans l'Exposition du système du Monde, 4me. édition. J'ai puisé dans la même source toutes les autres données numériques relatives à la lune et aux planètes. J'ai même conservé les propres expressions de l'auteur, quand elles offraient assez de développement pour pouvoir être saisies par les élèves : dans ce cas je me serais bien gardé d'y rien changer. Quiconque a lu et médité ce bel ouvrage, a dû se convaincre que les vérités qu'il renferme ne sauraient être mieux exprimées.

ces résultats se déduisent des observations, a été expliquée dans le second livre, en traitant de l'ellipse solaire.

32. Le périgée lunaire a un mouvement direct, c'est-à-dire, dirigé dans le même sens que celui du soleil. Ce mouvement se mesure en calculant les longitudes du périgée à différentes époques, d'après les observations. Au commencement de l'an 1800 cette longitude était $295^\circ,66824$. Le mouvement du périgée était alors de $4521^\circ,1550$, par rapport aux équinoxes, en cent années juliennes, ce qui donne pour sa révolution tropique $3231^j,4751$, et $3232^j,5807$ pour sa révolution sydérale. Ces périodes changent avec le tems, parce que le mouvement du périgée se ralentit pendant que celui de la lune s'accélère. Mais leurs variations sont très-lentes, comme celles du moyen mouvement auxquelles elles se trouvent liées par les lois de l'attraction.

33. Avec ces données, on peut aisément calculer la révolution anomalistique de la lune, c'est-à-dire sa révolution par rapport à ses absides; car son mouvement propre se faisant dans le même sens que celui du périgée, elle ne rejoint ce point de son orbite que par son excès de vîtesse. Cet excès est de $530220^\circ,768710$ en cent années juliennes, comme on peut aisément le conclure de ce qui précède, et l'on en déduit pour la révolution anomalistique, $\frac{400^\circ,36525^j}{530220^\circ,768710}$, ou $27^j,5546$.

34. Tels sont les élémens actuels de l'ellipse lunaire. Nous avons déja annoncé qu'ils changent peu-à-peu avec le tems. Mais même en ayant égard à ces variations, le mouvement elliptique est encore bien loin de représenter exactement la marche de la lune. Cet astre éprouve des perturbations périodiques dont l'effet est très-considérable, et auxquelles il est absolument nécessaire

d'avoir égard, même dans les observations les moins exactes. Il faut donc, pour avoir une idée suffisamment précise de ses mouvemens, connaître les diverses valeurs de ces inégalités. Je vais exposer ici les principales, en commençant par les changemens séculaires des élémens elliptiques. Mais cette marche, qui est la plus méthodique et la plus simple, n'est pas celle que l'on a réellement suivie dans l'invention ; les résultats que nous placerons les premiers n'ont pas été trouvés dans l'ordre où nous les présenterons ici, et indépendamment de ceux qui vont suivre ; ils n'ont été fixés, souvent même soupçonnés, que lorsque les résultats suivans ont été reconnus et mesurés à-peu-près par l'observation, ou lorsque le tems, en développant les erreurs des premiers apperçus, a indiqué la manière de les corriger. Nous avons déja trop de fois remarqué cette marche, pour qu'il soit besoin d'en faire sentir la nécessité.

CHAPITRE VI.

Sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

35. Le mouvement de la lune et les élémens de son orbite, ne restant pas constamment les mêmes, les altérations progressives qu'ils éprouvent rendraient bientôt les tables fautives, et l'on serait obligé d'y retoucher sans cesse, en les comparant à de nouvelles observations. Le seul moyen d'éviter cet inconvénient, est de calculer ces élémens pour diverses époques éloignées, d'en déduire les variations qu'ils ont subies, et de chercher ensuite les lois les plus propres à y satisfaire.

Appliquons ces considérations au mouvement moyen et séculaire de la lune, que l'on a déterminé avec beaucoup d'exactitude par les observations modernes, et qui est comme la base de tous les autres résultats; comparons-le à des observations anciennes, et cherchons à reconnaître s'il a toujours été le même, ou s'il a changé.

Le procédé que l'on emploie pour y parvenir, est le même dont on fait usage pour corriger les tables du soleil, pag. 51. Il consiste à regarder les anciennes observations de la lune comme autant de longitudes observées : on calcule le lieu de cet astre par les tables pour la même époque, et l'on voit si les résultats s'accordent, ou s'ils diffèrent.

36. Choisissons, par exemple, l'ancienne éclipse de lune, observée par les Chaldéens, 721 ans avant l'ère

chrétienne, et rapportée par Ptolémée (*). D'après l'observation des phases de cette éclipse, on peut déterminer l'instant où la longitude de la lune était opposée à celle du soleil. Celle-ci est facile à calculer par les tables du soleil, puisque Ptolémée rapporte le jour et l'heure de l'observation; on a donc ainsi la longitude vraie de la lune à l'instant de l'éclipse.

En la dépouillant des inégalités périodiques qui l'affectent et qui peuvent se calculer exactement par les tables, on aura la longitude moyenne.

Maintenant, si l'on compare ce résultat avec une autre longitude moyenne, calculée d'après des observations modernes, la différence des longitudes, augmentée du nombre convenable de circonférences, fera connaître l'arc décrit par la lune parallèlement à l'écliptique, en vertu de son moyen mouvement pendant l'intervalle des observations; en divisant cet arc par le nombre de siècles écoulés, on aura le moyen mouvement séculaire.

Or, le moyen mouvement ainsi calculé par MM. Delambre, Bouvard, Burg, se trouve de six ou sept cents secondes décimales plus faible que celui qui se conclut des seules observations modernes comparées entre elles; la même chose résulte de deux autres éclipses également observées par les Chaldéens dans les années 719 et 720 avant l'ère chrétienne, et rapportées avec la précédente dans l'Almageste. Cet accord ne peut guère laisser de doute sur la réalité du résultat. D'un autre côté, les observations modernes sont beaucoup trop exactes pour que leur comparaison entre

(*) Elle fut observée à Babylone le 19 mars, 721 ans avant l'ère chrétienne. La lune commença à être éclipsée une heure environ après son lever. Lalande a calculé cette éclipse dans son Mémoire sur l'Équation séculaire de la lune. Académie des Sciences, 1757, page 429.

elles puisse donner lieu à des erreurs aussi considérables. Il faut donc en conclure que le moyen mouvement de la lune est maintenant plus rapide qu'il ne l'était autrefois ; ou, ce qui revient au même, que l'on avait compris dans les évaluations de ce mouvement une grande inégalité séculaire dont il faut le dépouiller pour qu'il devienne uniforme.

Mais ce résultat acquiert une nouvelle évidence, lorsque l'on compare aux observations modernes d'autres éclipses observées entre les précédentes et nous ; car si le mouvement de la lune s'est réellement accéléré dans l'intervalle, cette nouvelle comparaison doit encore le donner plus faible qu'il ne l'est aujourd'hui ; mais l'époque de l'ancienne observation étant plus rapprochée, la différence doit être moindre que dans le cas précédent. Cela est tout-à-fait confirmé lorsque l'on calcule les éclipses observées au Caire, par Ibn-junis, astronome arabe du dixième siècle (*).

Un pareil accord ne peut laisser aucun doute sur la réalité du phénomène ; et il en résulte incontestablement que le mouvement de la lune s'est accéléré depuis les Chaldéens jusqu'aux Arabes, et des Arabes jusqu'à nous.

37. Pour représenter cette accélération, il faut ajouter à la longitude moyenne de la lune un terme proportionnel au carré du tems, et un autre plus petit proportionnel à son cube (**) ; c'est ce qu'on nomme l'*équation*

(*) Le manuscrit qui renferme ces observations a été traduit par M. Caussin, et inséré dans les Mémoires de l'Institut, au sixième volume des manuscrits.

(**) Soit L la longitude moyenne de la lune au premier janvier 1801 ; m son mouvement séculaire à cette époque. Après un nombre n de siècles, l'expression de la longitude moyenne sera

$$L + mn + 31'',5017\, n^2 + 0'',057214\, n^3.$$

n devient négatif pour les siècles antérieurs au 18e.

séculaire de la lune. Avec cette correction, les tables actuelles *satisfont aux observations les plus anciennes*, et on peut les étendre à mille ou douze cents ans au-delà de l'époque présente.

Mais il ne faut pas croire que cette accélération sera constamment croissante, et que la formule précédente pourra toujours suffire pour les représenter. La théorie de l'attraction, qui a fait connaître la cause de cette accélération, a montré qu'elle est périodique et liée aux variations qu'éprouve l'excentricité de l'orbe terrestre; en sorte qu'après avoir augmenté jusqu'à un certain terme, *elle se changera en un retardement; mais l'étendue de* cette période est très-considérable, et l'intervalle qui nous sépare des observations les plus anciennes n'a développé qu'une très-petite partie de sa révolution. Les inégalités qui en résulteront dans le mouvement de la lune, s'élèveront au moins au quarantième de la circonférence. La *postérité, qui observera ces grands phénomènes*, remarquera sans doute avec quelque reconnaissance, que les *géomètres de ce siècle les ont prévus*, calculés, *et ont préparé* à leurs successeurs les moyens de juger des états passés et futurs du système du monde, avec autant de certitude que de son état présent.

Ce fut le célèbre astronome Halley, qui découvrit le premier l'existence de cette accélération; c'est M. Laplace qui, *par une analyse très-profonde*, en a fait connaître la cause et la loi. Le mérite de la découverte doit donc se partager entre l'observateur et le géomètre. Sans doute le dernier résultat est bien plus beau, parce qu'il est démontré : *sur-tout* il est plus utile pour la science qu'il complète; mais ceux qui ont observé la ténacité qu'ont dans les *meilleurs esprits les idées* généralement admises, penseront qu'il fallait un jugement bien libre et bien philosophique pour oser douter de l'uniformité des moyens mouvemens, admise depuis deux mille ans comme principe.

38. La variation du mouvement de la lune influe sur la durée de ses révolutions tropiques, synodiques et sydérales, qui sont différentes dans différens siècles. Il sera *donc à jamais impossible de trouver des périodes* qui accordent pendant longtems les mouvemens de la lune et du soleil par un nombre exact de révolutions. De semblables périodes ne pourront tout au plus servir que pendant un petit nombre de siècles; et les efforts que l'on tenterait pour leur conserver plus longtems leur exactitude, seraient toujours inutiles.

CHAPITRE VII.

Des Équations séculaires qui affectent les élémens de l'orbe de la Lune.

39. Le mouvement du périgée lunaire n'est pas uniforme; il est assujéti à une équation séculaire liée à celle du moyen mouvement, et dépendante de la même cause. La comparaison des observations anciennes avec les modernes, met ce résultat hors de doute; mais c'est à la théorie de l'attraction que sa découverte est due. Cette inégalité est égale à celle du moyen mouvement multiplié par le coefficient $-3{,}00052$ (*).

Si de la longitude moyenne de la lune on retranche la longitude moyenne du périgée lunaire, on aura l'anomalie moyenne de la lune. Cette anomalie est donc assujétie à une équation séculaire égale à la différence des deux précédentes, c'est-à-dire à celle du moyen mouvement multiplié par $1 + 3{,}00052$, ou par $+ 4{,}00052$.

(*) Représentons par ϖ la longitude moyenne du périgée lunaire au commencement de 1801, par μ son moyen mouvement séculaire à cette époque, et par $+K$ l'équation séculaire de la longitude moyenne dont nous avons donné l'expression dans la page précédente. Après un nombre n de siècles, la longitude moyenne du périgée lunaire sera

$$\varpi + n\mu - 3{,}00052 . K.$$

n devient négatif pour les siècles antérieurs au 18^e.

40. Le mouvement des nœuds est aussi assujéti à une inégalité semblable, et de même signe que celle du périgée; elle est égale à celle du moyen mouvement multiplié par — 0,735452 (*); comme le mouvement des nœuds est rétrograde, on voit que cette correction tend à augmenter leurs longitudes pour les siècles postérieurs à celui que l'on a pris pour origine. Tous ces résultats sont confirmés par les observations.

41. On voit, par ces rapprochemens qu'en vertu des équations séculaires, le mouvement du périgée et le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire se ralentissent tandis que celui de la lune s'accélère. De plus, ces inégalités sont liées entre elles par des rapports très-simples, puisqu'elles sont représentées par les nombres 1 ; —3,00052 ; —0,735452.

42. La révolution anomalistique dépendant, à-la-fois du mouvement de la lune et de celui du périgée, est également modifiée par l'équation séculaire. Il en est de même de toutes les quantités qui dépendent de la longitude moyenne, du périgée ou des nœuds.

43. La même analyse qui a dévoilé ces grands phénomènes a fait voir que la distance de la lune à la terre, l'excentricité et l'inclinaison de son orbite, sont pareillement assujéties à des équations séculaires liées à celles du moyen mouvement. Mais leur effet jusqu'à présent a été

(*) Soit N la longitude moyenne du nœud ascendant de la lune au 1er. janvier 1801 à minuit, son mouvement moyen et séculaire à cette époque ; enfin $+K$ l'équation séculaire de la longitude moyenne. Après un nombre n de siècles, la longitude moyenne du nœud sera

$$N - nr + 0{,}735452 . K.$$

Il faut faire n négatif pour les siècles postérieurs au 18e.

très-peu sensible. Cependant, par la suite des siècles, il deviendra nécessaire d'y avoir égard. L'expression du grand axe de l'orbite ne renferme aucune inégalité de ce genre; c'est encore un résultat de la théorie.

C'est M. Laplace qui a dévoilé tous ces rapports ; il y a été conduit par la connaissance de la cause qui produit l'équation séculaire du moyen mouvement, cause que nous expliquerons plus loin. Il est rare qu'une grande découverte n'ait pas des applications importantes et multipliées.

CHAPITRE VIII.

Inégalités périodiques du mouvement lunaire. Moyens qu'on a employés pour les reconnaître par l'observation.

44. TOUTES les inégalité que l'on a reconnues jusqu'à présent dans les mouvemens célestes, ont une étendue limitée, et sont sujètes à des périodes plus ou moins longues ; mais quelques-unes d'entre elles n'achèveront le cercle de leur valeur, qu'après un grand nombre de siècles ; et leurs accroissemens peuvent être, pendant longtems, regardés comme uniformes : ce sont celles que nous avons appelées *inégalités séculaires*. On a réservé le nom de *périodiques*, pour celles qui reprennent successivement les mêmes valeurs après des intervalles de tems assez petits pour qu'on ait pu observer fréquemment leurs retours, et déterminer leurs lois. Nous avons déja fait plusieurs fois cette distinction.

45. On apperçoit bientôt l'effet de ces inégalités dans le mouvement de la lune, quand on compare ses positions réelles, données par les observations, avec celles qu'elle devrait prendre en vertu de son mouvement elliptique ; car, si l'on calcule d'avance sa longitude, sa latitude ou son diamètre apparent dans cette hypothèse, même en ayant égard aux mouvemens du périgée et des nœuds, on trouve encore des écarts considérables, qu'un petit nombre de jours suffit pour faire appercevoir, et qui

même n'avaient pas échappé aux anciens astronomes, malgré l'imperfection de leurs instrumens.

Ces écarts ne sont pas toujours les mêmes; ils varient d'une manière périodique, et se reproduisent successivement dans le même ordre, après des intervalles de tems réglés. Des observateurs attentifs en ont suivi et déterminé les phases; la théorie en les expliquant les a confirmées; et on les a jointes aux tables, comme autant de corrections à faire au mouvement elliptique.

46. C'est à quoi on aurait pu difficilement réussir, si toutes ces inégalités avaient eu des périodes peu différentes les unes des autres; car elles se seraient alors confondues ensemble, de manière qu'il eût été très-difficile, peut-être même impossible, de les démêler par le seul secours de l'observation. Heureusement il arrive que les unes sont de courte durée, et se reproduisent plusieurs fois dans l'année, tandis que d'autres croissent et décroissent pendant des années entières. Il en est qui ont des valeurs moyennes considérables, tandis que d'autres en ont d'assez faibles; enfin, les unes sont souvent à leur plus petite valeur, lorsque les autres se trouvent à leur plus haut degré d'accroissement, de sorte qu'en choisissant adroitement les circonstances, on peut saisir l'instant où chaque inégalité est la plus sensible, tandis que les autres sont moindres; et l'on parvient ainsi à les dégager les unes des autres, en commençant par les plus fortes, qui, étant par-là même les plus sensibles, doivent être les premières observées.

47. Alors, il n'est pas difficile de s'appercevoir que toutes ces inégalités ont des rapports marqués avec les positions respectives du soleil et de la lune par rapport à la terre, ou par rapport au périgée et aux nœuds de leurs orbites. Elles reprennent les mêmes valeurs lorsque ces

positions redeviennent exactement les mêmes, et repassent ensuite par les mêmes périodes d'accroissement et de diminution : or, ces positions sont elles-mêmes déterminées par des angles connus, et dont les variations peuvent être sans cesse observées ou calculées. En comparant la marche de ces variations avec celles des diverses inégalités, pendant de longs intervalles, on parvient enfin à découvrir celles qui se correspondent. On connaît ainsi les angles d'où dépend chaque inégalité, et d'après les variations que les angles éprouvent, on peut suivre et prévoir les changemens que cette inégalité subit.

48. Pour représenter d'une manière commode les lois de ces changemens; on a cherché des quantités qui eussent aussi la propriété de croître et de décroître d'une manière périodique, et qui fussent liées par des rapports très-simples avec les angles observés. C'était en effet une hypothèse très-naturelle que de comparer à ces fonctions la marche des inégalités périodiques. Les sinus des angles sont très-propres à remplir cet objet, comme on l'a vu dans la théorie du soleil; c'est pourquoi on les a fait servir à cet usage (*).

(*) Pourre présenter ainsi *empiriquement* une inégalité, quand on a déterminé par l'observation les angles dont elle dépend, on cherche les valeurs de ces angles, pour lesquelles elle est la plus petite ou la plus grande. On conclut de ces remarques le sinus qui est propre à la représenter, et auquel on la suppose proportionnelle. Cette hypothèse donne des terme de la forme $k \sin E$, dans lesquels E est l'angle ou *l'argument* de l'inégalité, et k un nombre constant que l'on nomme *coefficient*, et par lequel il faut multiplier sin E pour avoir la valeur absolue de l'inégalité correspondante à l'angle E. On suppose, selon l'usage ordinaire, que les sinus dont on fait usage sont pris dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité, et comme la plus grande valeur que puisse prendre un sinus est d'être égal au

49. Quand on a ainsi l'expression d'une inégalité, il est facile de calculer la durée de sa période, c'est-à-dire, le tems nécessaire pour qu'elle passe successivement par toutes ses valeurs. Ce tems doit être tel que l'*argument*, c'est-à-dire l'angle d'où dépend l'inégalité que l'on considère, varie dans l'intervalle, de 400°, ou d'une circonférence entière, puisque c'est seulement alors que les sinus reprennent leurs premières valeurs. Ainsi, pour que la période soit terminée, il faut que cette condition soit remplie. On peut donc calculer la durée de cette périodepar une simple proportion, quand on connaît la variation de l'argument pour un tems donné, et cela est toujours facile, puisque l'on connaît les angles dont cet argument se compose.

La théorie de l'attraction a confirmé ces résultats en montrant qu'en effet les inégalités des mouvemens célestes pouvaient se développer de cette manière. Elle a de plus déterminé la forme des termes qui les expriment; alors les observateurs n'ont eu qu'à introduire dans ces formules générales les données numériques qui devaient les particulariser: la marche était la même que dans la théorie du soleil.

50. En réunissant ces deux sortes de données, la forme des inégalités déduites de la théorie, et leurs valeurs numériques tirées de l'observation, on conçoit qu'il doit être possible de calculer d'avance le *lieu vrai* de la lune, pour un instant quelconque.

En effet, cet instant étant connu, on cherchera d'abord le lieu du nœud et l'inclinaison de l'orbite.

---

rayon du cercle, la plus grande valeur de sin E sera de devenir égale à l'unité; alors k sin E se réduira à k : c'est là plus grande valeur de l'inégalité; dans tout autre cas, sin E sera moindre que le rayon, ou au-dessous de l'unité. Il sera donc exprimé par une fraction, et k sin E, sera moindre que k.

On calculera ensuite l'expression de la longitude de la lune pour la même époque, en employant toutes les inégalités reconnues par la théorie et l'observation. On aura ainsi le vrai lieu de la lune, projeté sur l'écliptique, et d'après la connaissance que l'on a de l'inclinaison de l'orbite et de la position du nœud, on peut calculer la direction vraie du rayon vecteur dans l'orbite; après quoi la parallaxe donnera la longueur du rayon vecteur ou la distance, et l'on connaîtra par ces résultats la position réelle de la lune sur son orbite et dans l'espace.

Si l'on effectue les mêmes calculs pour un grand nombre d'instans très-rapprochés les uns des autres, on peut, d'après cette réunion de résultats, prédire le lieu de la lune pour tous les instans; et, en les réduisant en tables faciles à consulter, on aura des *tables de la lune*.

Ces tables étant fondées sur la théorie, quant à la forme et au nombre des inégalités qu'elles comprennent, leur exactitude ne dépendra plus que de celle des données numériques qu'on y aura introduites, et par conséquent de la précision des observations qui auront servi à les déterminer. Les tables de M. Burg, que le Bureau des longitudes a publiées, s'appuyant sur les recherches approfondies de M. Laplace et sur un nombre immense d'observations de Paris et de Grenwich, combinées avec beaucoup d'adresse par la méthode des équations de condition, réunissent au plus haut degré tous les avantages qui peuvent en rendre le succès durable: aussi sont-elles aujourd'hui entre les mains de tous les observateurs; et l'expérience ne fait que confirmer leur exactitude.

51. Sans doute il serait bien intéressant d'étudier les moyens admirables par lesquels on est enfin parvenu à déduire du seul principe de l'attraction universelle toutes les inégalités du mouvement lunaire, si nombreuses, si

bisarres, si compliquées. Mais comme je ne puis pas exposer ici l'analyse profonde qui sert à découvrir ces rapports, je vais du moins indiquer la méthode, en quelque sorte, expérimentale, que l'on a d'abord employée pour découvrir l'existence de la plupart d'entre elles, et en déterminer à-peu-près la valeur. Je le ferai d'autant plus volontiers, que cette méthode est très-propre à faire concevoir la loi des diverses inégalités, et qu'elle est encore d'un grand secours pour découvrir les angles dont elles dépendent. Mais pour ne pas arrêter les commençans, j'ai rassemblé ces considérations dans les trois chapitres suivans, qu'ils peuvent passer à la première lecture, parce qu'ils ne sont pas exempts de quelques difficultés.

CHAPITRE IX.

Des Inégalités périodiques qui affectent la longitude de la Lune.

52. Les inégalités périodiques du mouvement lunaire sont de trois sortes, qui se rapportent aux trois coordonnées par lesquelles on détermine la position de la lune dans son orbite. Les unes affectent la longitude de cet astre, d'autres sa latitude, d'autres son rayon vecteur. Nous les considérerons successivement.

Les inégalités qui affectent la longitude elliptique de la lune, augmentent ou diminuent l'équation du centre. Leur effet devient sensible, parce que la lune s'éloigne de son lieu moyen, tantôt plus, tantôt moins, qu'elle ne devrait faire d'après les seules lois du mouvement elliptique.

53. La plus considérable de ces inégalités, et celle que l'on a reconnue la première, se nomme l'*évection*. Elle fut découverte par Ptolémée. Son effet général et constant est de diminuer l'équation du centre dans les sysigies, et de l'augmenter dans les quadratures. Si cette diminution et cet accroissement étaient toujours les mêmes, l'évection ne dépendrait que de la distance angulaire de la lune au soleil; mais sa valeur absolue varie aussi avec la distance de la lune au périgée de son orbite. Après de longues suites d'essais et d'observations, on est

parvenu à représenter très-exactement cette inégalité, en la supposant proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire de la lune au soleil, moins l'anomalie moyenne de la lune. Le coefficient de cette proportionnalité est 1°,4906. La période de l'évection est de . . . 31j,811939 (*).

(*) En désignant la longitude moyenne de la lune par le signe ☾, celle du soleil par ☉, l'anomalie moyenne de la lune par A, l'évection a pour expression + 1°,4906 sin $\{2(☾ - ☉) - A\}$. C'est sous cette forme qu'elle s'applique à la longitude moyenne avec son signe.

D'après cela, il est très-facile de suivre les variations successives de cette inégalité; car il n'y a qu'à considérer les diverses valeurs que peut prendre son argument. Si l'on veut, par exemple, connaître les cas où elle atteint son *maximum*, il n'y a qu'à chercher les cas dans lesquels l'angle $\{2(☾ - ☉) - A\}$ devient égal à 100° ou à 300°; car alors le sinus de cet angle étant égal à l'unité prise en plus ou en moins, l'évection deviendra ± 1°,4906. La première valeur arrivera, par exemple, dans la quadrature, lorsqu'en même tems l'anomalie moyenne sera égale à 100°; car on aura alors 2 (☾ — ☉) = 200°; et 2 (☾ — ☉) — A = 200° — 100° = 100°. Au contraire, l'évection disparaîtra, lorsque l'argument sera nul ou égal à 200°, ce qui arrivera par exemple, dans les sysigies, lorsque la lune y sera périgée ou apogée, parce que la distance de la lune au soleil est alors égale à 0°, ou à 200°, et qu'il en sera de même de l'anomalie moyenne. Mais par les diverses combinaisons des deux angles qui forment l'argument de l'évection, les plus grandes et les plus petites valeurs arriveront encore, selon les valeurs de cet argument dans plusieurs autres points de l'orbite. En général, dans les conjonctions, l'évection aura un signe contraire à l'équation du centre; car alors le premier terme 2 (☾ — ☉) étant nul, l'argument se réduit à : — anomalie moyenne ☾, ce qui donnera un sinus négatif, si l'anomalie est moindre que 200°, et un sinus positif, si elle est plus grande; mais dans le premier cas, l'équation du centre est soustractive à la longitude moyenne; dans le second elle est soustractive. Elle sera donc toujours de signe contraire à l'évection.

54. On observe encore, dans le mouvement lunaire, une grande inégalité qui disparaît dans les sysigies et dans les quadratures, et qui atteint sa plus grande valeur lorsque la lune est dans les octans. Cette inégalité dépend donc de la distance angulaire de la lune au soleil, et comme elle parcourt toute sa période pendant que cette

---

Il en sera de même des oppositions, comme on peut s'en assurer facilement de la même manière ; d'où l'on voit qu'en général dans les sysigies, l'évection est soustractive de l'équation du centre. Au contraire, elle lui devient additive dans les quadratures. Aussi les premiers observateurs qui ne déterminaient les élémens de la théorie lunaire qu'au moyen des éclipses, et dans la seule vue de prédire ce phénomène, trouvaient-ils l'équation du centre trop petite de toute la quantité de l'évection, dans les sysigies.

On peut aisément calculer la période de l'évection d'après les variations de l'angle dont elle dépend ; il suffit de calculer les changemens que cet angle éprouve dans un tems donné, et d'en conclure par une simple proportion le nombre de jours nécessaires pour qu'il varie de 400°.

Le mouvement synodique de la lune en un siècle, est $494741^\circ,240888$. En le multipliant par 2 on aura $989482^\circ,481776$: c'est le double de la distance de la lune au soleil après 100 années juliennes. Si l'on en retranche le mouvement anomalistique de la lune dans le même intervalle, ou $530220^\circ,933110$, la différence $459261^\circ,548666$ sera la valeur de l'argument de l'évection après 100 années juliennes, d'où l'on voit que cet argument croît de 400° dans un nombre de jours exprimé par

$$\frac{400^\circ.36525}{459261^\circ548666,} \text{ ou } 31^j,811939,$$

c'est la période de l'évection ; après cet intervalle elle reprend successivement les mêmes valeurs.

On voit aussi par cet exemple, qu'en mettant, au lieu des angles, leurs valeurs calculées comme nous venons de le faire, l'argument distance augmente de 100°, on en a conclu qu'elle est proportionnelle au sinus du double de cette distance angulaire. Sa plus grande valeur est de 0°,6610. On la nomme *variation;* sa durée est d'une demi-révolution synodique; elle a été découverte par Tycho-Brahé, astronome célèbre et maître de Képler (*).

---

peut être mis sous la forme d'une quantité proportionnelle au tems; car si l'on nomme t le nombre de jours écoulés depuis une époque convenue, qui sera, par exemple, celle où l'évection est nulle, l'angle 2 dist. ☾ ☉ — anom. moy. ☾ deviendra

$$\frac{t.400^\circ}{311,811939},$$

et l'évection pourra être représentée par un terme de la forme

$$1^\circ,4906 \cdot \sin\left\{\frac{400^\circ\, t.}{311,811939}\right\}$$

ou simplement par $1^\circ,4906 \cdot \sin mt$ en faisant

$$m \,.\, = \frac{400^\circ}{311,811939}.$$

(*) L'expression de cette inégalité est

$$+\,0^\circ,6610 \sin 2\,(☾ - ☉).$$

il est visible, en effet, que cette formule remplit les conditions indiquées par l'observation; car elle est nulle quand la distance angulaire de la lune au soleil est nulle; elle atteint son *maximum*, quand cette distance est égale à 50°, et redevient nulle dans les quadratures où la distance est égale à 100°. La distance angulaire de la lune au soleil dépend de son mouvement synodique; elle varie en un jour de $\frac{400^\circ}{29,530588}$, et le double de cette distance devient $\frac{2.400^\circ}{29,530588}$. L'argument de la variation étant proportionnel à cette quantité, le tems nécessaire, pour qu'il augmente de 400°, sera . . . .

55. Enfin, le mouvement angulaire de la lune s'accélère annuellement quand le soleil s'éloigne de la terre, et se rallentit quand cet astre s'approche, d'où résulte une troisième inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle.* Sa période est une année solaire anomalistique. On s'apperçoit de son existence en calculant plusieurs lieux de la lune pour diverses saisons de l'année, et les comparant aux observations; car, quoiqu'on emploie dans le calcul l'évection et la variation, pour corriger le mouvement elliptique, les résultats s'écartent de la vérité, d'une manière fort sensible; et ces écarts suivent, dans leur étendue et leur signe, des périodes régulières. Le mouvement observé est plus lent que le mouvement moyen dans les six mois que le soleil emploie pour aller du périgée à l'apogée: c'est le contraire dans les six autres mois. Par exemple, si la première observation qui sert d'origine, est faite dans le mois de janvier, vers le tems où le soleil vient de passer au périgée, et qu'on veuille ensuite calculer le lieu de la lune pour un jour du mois de mars, d'après le tems écoulé entre ces deux époques, on trouve l'accroissement de sa longitude moins grand, suivant l'observation, que le calcul ne l'indique, en partant de la valeur du moyen

---

$\frac{29^{j},530588}{2} = 14^{j},765294$. La période de la variation lunaire est donc égale à une demi-révolution synodique, et l'on voit qu'elle diffère beaucoup de celle de l'évection, qui dépend en même tems de la révolution synodique et de la révolution anomalistique.

On voit aussi que cette seconde inégalité peut être mise sous la forme $0^{\circ},6610 \sin \frac{400^{\circ}}{29^{j},530588}\, t$, ou simplement $0^{\circ},6610 . \sin . mt$, m étant le mouvement synodique pour un jour, et t le tems écoulé depuis l'époque où la variation est nulle.

mouvement. La différence augmente jusqu'à ce que le soleil ait atteint sa moyenne distance; alors elle diminue peu-à-peu, et devient nulle quand le soleil est à l'apogée de son orbite. A cet instant, les observations et le calcul s'accordent. De là jusqu'au retour du soleil au périgée, les mêmes erreurs se reproduisent dans un ordre inverse, c'est-à-dire que les arcs parcourus par la lune depuis l'apogée, sont plus grands que ne l'indique le calcul établi sur la valeur du moyen mouvement : la différence augmente ainsi jusqu'à ce que le soleil ait atteint sa moyenne distance ; l'erreur diminue depuis cette époque jusqu'au périgée, où elle est nulle de nouveau. Ces écarts réglés et périodiques indiquent évidemment l'existence d'une inégalité qui dépend de la distance du soleil au périgée de son orbite, ou de son anomalie moyenne. Tel est en effet l'argument de l'*équation annuelle*. Elle est exactement de même forme que l'équation du centre du soleil; mais elle a toujours un signe contraire. Il est visible que sa période est une année solaire anomalistique (*).

56. On suppléerait à cette inégalité, et on pourrait même la supprimer entièrement dans la théorie de la lune, si l'on modifiait en conséquence l'équation du

---

(*) La plus grande valeur de cette inégalité est $0°,2074$; son expression générale est $-0°,2074 . \sin$ anomalie moy. ☉. C'est ainsi qu'on la trouve dans les tables, où elle s'applique à la longitude moyenne de la lune avec son signe. On a vu que l'équation du centre du soleil est $+ 2°,13777 \sin$ anom. moy. ☉. En prenant le coefficient des nouvelles tables de M. Delambre, elle est donc, au signe près, exactement semblable pour la forme à l'*équation annuelle* de la longitude de la lune. Dans tout ceci nous supposons toujours les anomalies comptées du périgée.

tems, ce qui reviendrait à calculer le lieu de cet astre pour une époque un peu différente de la véritable, et plus ou moins avancée selon les positions du soleil dans son orbite. En effet, par suite de cette altération, on pourrait combiner l'erreur du tems de manière à compenser la variation de la vîtesse. Si l'on calculait, par exemple, le lieu de la lune pour le 21 mars, lorsque son mouvement vrai est plus lent que son mouvement moyen, et que le tems moyen correspondant à cette époque, fût aussi plus petit que le véritable, de toute la quantité correspondante à cette diminution de vîtesse, il est évident qu'en calculant d'après ce tems fictif, on trouverait la lune dans sa position véritable. Aussi Tycho-Brahé, qui découvrit la variation annuelle, la présenta sous cette forme, en employant, pour calculer les lieux de la lune, une équation du tems différente de la véritable; en quoi il fut suivi depuis par plusieurs observateurs; mais maintenant qu'on connaît la véritable loi de l'équation annuelle, on a abandonné cette manière imparfaite et compliquée d'en faire usage, et on l'introduit immédiatement dans la théorie de la lune, sous la forme que nous avons indiquée. La théorie de l'attraction explique bien simplement le phénomène de l'équation annuelle. Le soleil en s'approchant de la terre, se rapproche aussi de la lune, et l'attraction qu'il exerce sur elle augmente d'intensité. Cette attraction opposée à la pesanteur terrestre, éloigne la lune de la terre, la soulève pour ainsi dire, et dilate l'orbe qu'elle décrit. Alors, sa vîtesse et son mouvement angulaire diminuent : c'est le contraire quand le soleil s'éloigne vers l'apogée. La pesanteur terrestre devenant la plus forte, resserre l'orbite de la lune et accélère son mouvement. L'équation annuelle de la lune est donc une conséquence de l'excentricité de l'orbe terrestre, qui fait varier les distances du soleil à la terre. Tout ce qui influe sur cette excentricité doit donc influer aussi sur le mouvement de la lune. En effet, c'est justement ainsi que les variations séculaires de l'excentricité de l'orbe terrestre produisent l'équation séculaire du moyen mouvement.

57. Les trois inégalités dont nous venons de parler, l'*évection*, la *variation* et l'*équation annuelle*, sont les plus sensibles de celles qui affectent la longitude elliptique de la lune pendant de courts intervalles, mais elles sont loin d'être les seules; les recherches profondes de l'analyse, comparées avec de longues séries d'observations, en ont fait connaître beaucoup d'autres qui, par leur complication et leur petitesse, seraient restées toujours insensibles aux observateurs. Ces petites inégalités doivent donc être considérées comme autant de corrections à faire aux trois inégalités précédentes, de même que celles-ci servent de corrections au mouvement elliptique; ou plutôt on les doit appliquer toutes ensemble à la longitude moyenne. Ces diverses inégalités se trouvent toutes calculées dans les tables.

Mais parmi les diverses inégalités de la longitude de la lune, que la théorie a fait connaître, il en est une que je ne dois pas omettre. Non-seulement sa connaissance est très-importante pour la formation des tables de la lune, mais sa découverte qui est moderne, offre un exemple frappant de la manière dont les inégalités se développent, et montre en même tems l'usage que l'on doit faire et qu'on fait des observations pour rectifier le moyen mouvement par des corrections successives. Voici, en peu de mots, le détail de cette découverte, qui a porté la connaissance des mouvemens de la lune, au dernier degré de précision.

58. Les tables lunaires insérées dans la troisième édition

de l'Astronomie de Lalande, supposent un mouvement séculaire tropique égal à 534742°,096290. L'époque de 1750, c'est-à-dire, la longitude moyenne de la lune, le 31 décembre 1749 à midi moyen, est, suivant ces tables, égale à 209°,20820. Avec ces données, on peut calculer toute autre époque antérieure ou postérieure à 1750. Il suffit d'ajouter ou d'ôter le moyen mouvement de la lune dans l'intervalle.

Par exemple, pour avoir l'époque de 1756, on prendra l'époque de 1750, qui est.	209°,20820
On y joindra le mouvement pour six années communes, en rejetant les circonférences entières, ce sera.	62°,56508
Plus, le mouvement pour deux jours, à cause des deux bissextiles.	29°,28088
Enfin, l'équation séculaire, qui donne en 6 années.	0°,00001
Ajoutant ces résultats, on trouve.	301°,05417

C'est la longitude moyenne de la lune, ou l'*époque* pour l'année 1756.

Il est clair que cette époque pourrait s'obtenir également par les observations, si l'on en avait qui fussent faites vers 1756.

C'est ce qu'ont exécuté MM. Masson et Bouvard, au moyen des observations de Bradley, et ils ont trouvé un résultat exactement égal au précédent.

Mais en déterminant de même l'*époque* de 1691, par plus de deux cents observations de Lahire, on la trouve moindre que par les tables : l'erreur de celles-ci est

+ 13″,58, c'est-à-dire, qu'à cette époque, la longitude moyenne de la lune était moindre de 13″,58 que les tables de Lalande ne l'indiquent. Ainsi depuis 1691 jusqu'à 1756, la lune a décrit un plus grand arc que ces tables ne le supposent. Son mouvement vrai, dans cet intervalle, était donc plus fort que celui des tables; car sans cela, se trouvant en arrière en 1691, elle n'aurait pas pu, en 1756, s'accorder précisément avec elles.

Au contraire, depuis 1756, le mouvement indiqué par les tables est devenu plus fort que le mouvement réel; car en calculant les époques des années suivantes, on les trouve toujours moindres que par les observations. La série des erreurs est même croissante, comme on le voit par le tableau suivant :

Années.	*Erreurs des Tables.*
1766	— 9″,26
1779	28″,09
1789	54″,32
1801	87″,96

59. Ces résultats indiquaient évidemment qu'en calculant d'après les observations le mouvement moyen des tables, on avait enveloppé dans sa valeur les résultats de quelque inégalité à longue période, dont on ignorait l'existence, mais dont les effets pour augmenter et diminuer tour-à-tour la longitude de la lune, devenaient sensibles avec le tems. De là la nécessité de retoucher sans cesse les longitudes moyennes indiquées pour l'origine de chaque année à mesure que les tables devenaient fautives, et de là résultait aussi l'impossibilité de les étendre à des époques éloignées.

Le seul moyen d'éviter ces mouvemens, était de découvrir cette inégalité. Mais il restait peu d'espoir d'y parvenir par la simple observation, car puisqu'elle avait échappé jusqu'alors à tous les observateurs, il était probable qu'elle était assujétie à une période très-longue, peut-être dépendante d'un grand nombre d'élémens et par conséquent, sous tous les rapports, très-difficile à déterminer.

C'était donc à la théorie à la dévoiler, et les secours que l'astronomie avait déja reçus d'elle, permettaient d'espérer encore ce nouveau succès.

60. M. Laplace l'obtint par un examen nouveau et approfondi de toutes les parties de la théorie de la lune. Il y découvrit une nouvelle inégalité qui n'avait pas encore été apperçue, et dont l'argument est égal au double de la longitude du nœud de l'orbe lunaire, plus la longitude de son périgée, moins trois fois la longitude du périgée du soleil. Elle est proportionnelle au sinus de cet angle. Sa période est de 184 ans (*).

En 1691, cette inégalité était soustractive et diminuait la longitude moyenne de la lune. Elle a dû devenir nulle

(*) Le mouvement des nœuds de la lune en un siècle est 2149°,0972. Je lui donne le signe négatif, parce qu'il est rétrograde. En doublant cette quantité, on aura — 4298°,1944; c'est la première partie de l'argument de la nouvelle inégalité. Le mouvement séculaire du périgée de la lune est + 4521°,3194. En l'ajoutant au précédent avec son signe, il reste 223°,1250. Enfin en retranchant de ce résultat le mouvement séculaire du périgée du soleil ou 1°,9151, pris trois fois, il reste 217°,3797. C'est la variation de l'argument en un siècle; d'où l'on doit conclure qu'il variera de 400° dans un nombre d'années exprimé par $\frac{400^\circ \cdot 100}{217^\circ,3797}$ ou 184 ans. C'est la période de l'inégalité précédente que M. Laplace a découverte.

quelque tems après, car elle était additive en 1756, et elle avait alors presque atteint son *maximum*. La différence des longitudes moyennes dans cet intervalle s'est donc trouvée augmentée par l'influence progressive de cette inégalité. Aussi le moyen mouvement donné par les tables a-t-il paru trop faible quand on a voulu remonter de 1756 à l'époque de 1691. Au contraire, après 1756, l'inégalité qui avait atteint son *maximum* a commencé à décroître; son effet, pour augmenter la longitude de la lune, est devenu moindre. Alors l'accroissement de la longitude moyenne depuis 1756 est devenu moindre qu'il n'aurait dû l'être, en vertu du moyen mouvement; et par conséquent le mouvement assigné par les tables a paru trop fort. Enfin l'erreur devait s'accroître à partir de cette époque, puisque l'accroissement étranger que l'on avait compris dans les longitudes moyennes que l'on comparait, se trouvait de plus en plus affaibli dans la seconde à mesure que l'on s'éloignait de 1756, et devait même bientôt se changer en une diminution.

61. Cette découverte nécessitait plusieurs corrections. Il fallait déterminer la valeur absolue de la nouvelle inégalité, la soustraire des longitudes moyennes que l'on avait adoptées en 1750 pour calculer le moyen mouvement, lors de la formation des tables; enfin calculer de nouveau ce moyen mouvement avec les longitudes corrigées. Mais ces corrections étant toutes liées entre elles, ne pouvaient pas s'obtenir isolément. Quand les observations donnent l'erreur des tables, elles ne font connaître que le résultat général de toutes les causes d'erreur dont ces tables sont affectées; elles ne distinguent pas séparément ce qui appartient à chacune d'elles. Il faut donc regarder toutes ces corrections comme autant d'inconnues liées entre elles par certains rapports, et que l'on doit repré-

senter par autant de quantités indéterminées. On calcule d'après ces rapports l'expression analytique de l'influence que chaque erreur doit avoir sur le résultat définitif, et l'ensemble de ces erreurs hypothétiques doit égaler l'erreur totale réellement indiquée par l'observation. En un mot, il faut employer la *méthode des équations de condition*, dont nous avons déja apprécié l'utilité dans la théorie du soleil, et dont cet exemple nous offre une nouvelle application.

62. M. Laplace a trouvé de cette manière 47″,51 pour le coefficient de cette inégalité, — 41″,54 pour la correction de l'époque des tables en 1750, et 98″,654 pour la diminution séculaire du moyen mouvement, diminution qui doit être multipliée par le nombre des siècles écoulés après 1750, et qui devient par conséquent additive avant cette époque (*).

(*) Pour comprendre comment on peut déterminer ces coefficiens il suffit de savoir comparer les résultats de l'observation aux résultats des tables.

Supposons qu'à une certaine époque connue, par exemple t d'années après 1750, on ait trouvé un lieu de la lune. De la longitude vraie observée, que je nomme L, on retranchera la somme des inégalités périodiques que je représente par S; la différence $L - S$ sera la longitude moyenne, conclue de l'observation. Or, on peut calculer cette longitude moyenne par les tables; car si, à l'époque de 1750, que je suppose égale à l, on ajoute le moyen mouvement annuel que je nommerai m, on aura $l + mt$, qui sera la longitude moyenne et devra égaler $L - S$.

Cette égalité n'a pas lieu d'après les tables de Lalande, et la longitude calculée est trop forte de 87″,96 pour 1801. Soit en général r l'erreur observée.

Appelons donc s la correction additive qu'il faut faire à l'époque de 1750, $-x$ la correction du moyen mouvement annuel, E l'argument de la nouvelle inégalité, $+y$ son coefficient. La longitude moyenne, déduite des observations, sera alors $L - S + y \cdot \sin E$, en mettant pour E la valeur qui convient à l'instant que l'on considère. La longitude moyenne, d'après les tables, sera $l + \epsilon + mt - tx$ qu'il faudra égaler à la valeur déduite de l'observation. On aura donc ainsi

$$l + \epsilon + mt - tx = L - S + y \sin E,$$

ou

$$\epsilon - tx - y \sin E = L - S - (l + mt).$$

Or, par hypothèse, la différence de l'observation et des tables, ou $L - S - (l + mt)$, est égal à r; on aura donc l'équation de condition

$$\epsilon - tx - y \sin E = r.$$

Trois observations semblables donneront trois valeurs de r, qui suffiront pour déterminer ϵ, x, y; car t et $\sin E$ sont des quantités connues: t est le nombre d'années écoulées depuis 1750 jusqu'à l'instant que l'on considère, et E est la valeur de l'argument à la même époque.

CHAPITRE X.

Des Inégalités périodiques qui affectent la latitude de la Lune.

63. JUSQU'ICI nous n'avons considéré que les inégalités qui affectent la longitude elliptique de la lune ; il en est d'autres qui changent sa distance au plan de l'écliptique, ou sa latitude. La plus remarquable est celle qui fait varier l'inclinaison de l'orbe lunaire ; elle s'élève à $0°,1627$ dans son *maximum*, et a pour argument le double de la distance du soleil au nœud ascendant de l'orbe lunaire. Elle est proportionnelle au cosinus de cet angle, c'est-à-dire, au sinus de son complément. Sa période est, par conséquent, égale à une demi-révolution du soleil, par rapport aux nœuds de la lune, puisque dans cet intervalle, son argument varie de $400°$.

Tycho découvrit le premier cette inégalité, en comparant entre elles les plus grandes latitudes de la lune, observées à des époques différentes, et dans différentes positions de cet astre, par rapport aux nœuds de son orbite : il vit que ces latitudes ne sont pas toujours les mêmes. Elles s'écartaient, tantôt en plus, tantôt en moins, de la valeur moyenne, que nous avons dit être égale à $5°,7222$; et, comme les plus grandes latitudes de la lune donnent immédiatement l'inclinaison de son orbite sur le plan de l'écliptique, il s'ensuivait nécessairement que cette inclinaison varie. Tycho alla plus loin, et par une longue suite d'observations, il détermina la loi de cette inégalité, qu'il présenta sous une forme différente de celle que nous lui donnons ici, mais qui revient au même pour les résultats. Le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire renferme aussi une inégalité dépendante du même angle que la précédente, avec cette différence qu'elle est proportionnelle au sinus de cet angle, et non pas à son cosinus. On pourrait représenter l'ensemble de ces deux inégalités en imprimant un petit mouvement de nutation à l'axe de l'orbe lunaire, de même que nous avons représenté les oscillations périodiques de l'équateur terrestre et des équinoxes au moyen de la nutation de l'axe de la terre. Pour cela il faudrait placer le pôle moyen de l'orbe lunaire à une distance du pôle de l'écliptique égale à 5°,7222, puis faire osciller le pôle vrai autour du pôle moyen sur une petite ellipse qu'il décrirait dans un tems égal à une demi-révolution du soleil par rapport aux nœuds de l'orbe lunaire, c'est-à-dire en 173^j,30996.

Il y a plusieurs autres inégalités qui affectent la latitude de la lune et l'inclinaison de son orbite, et on les a jointes aux tables avec les précédentes; mais elles n'ont été bien déterminées que par la théorie; c'est pourquoi je n'en parlerai point ici. Mon but, dans cet exposé, est seulement de donner une idée des secours que l'observation et la théorie ont pu se fournir réciproquement.

CHAPITRE XI.

Des Inégalités périodiques qui affectent le rayon vecteur lunaire.

64. Il nous reste à considérer les inégalités périodiques qui affectent la distance de la lune à la terre, ou son rayon vecteur, dernière donnée nécessaire pour déterminer sa position dans l'espace.

Les variations du rayon vecteur lunaire, ne suivent pas exactement les lois du mouvement elliptique ; elles s'en écartent d'une manière très-sensible, quelquefois en plus, et quelquefois en moins. On s'apperçoit de ces écarts en comparant entre elles les distances de la lune à la terre, observées dans le même point de son ellipse à des époques différentes, ou, ce qui revient au même, en comparant les parallaxes d'après lesquelles ces distances sont calculées ; car on découvre que ces parallaxes ne sont pas toujours les mêmes, et leurs changemens ont des rapports marqués avec les positions de la lune à l'égard du soleil. On a trouvé ainsi que la plus petite parallaxe $0^{\circ},99722$, a lieu lorsque la lune est apogée et en conjonction, la plus grande $1^{\circ},13858$, lorsqu'elle est périgée et en opposition. Mais la réunion de ces circonstances est nécessaire pour obtenir les valeurs extrêmes. Souvent la parallaxe périgée est moindre que $1^{\circ},13858$, et souvent la parallaxe apogée surpasse $0^{\circ},99722$.

65. Ces résultats nous montrent que l'ellipse lunaire ne conserve pas toujours les mêmes dimensions ; elle se

dilate et se resserre successivement : nous avons déja entrevu cette vérité en nous occupant de l'équation annuelle. Ces phénomènes doivent donc être considérés comme produits par des inégalités périodiques, qui affectent le rayon vecteur de la lune. Leur effet consiste à éloigner et à rapprocher tour-à-tour la lune de la terre, en la faisant ainsi osciller dans des limites peu étendues autour d'une distance moyenne qu'il s'agit de déterminer, et à laquelle toutes les inégalités périodiques doivent s'appliquer alternativement en plus ou en moins.

La théorie de l'attraction ayant fait connaître les forces qui agissent sur le sphéroïde lunaire, a donné le moyen de déterminer cette distance moyenne et la nature des inégalités qui l'affectent ; mais comme les observations astronomiques donnent immédiatement la valeur de la parallaxe, et qu'on peut en déduire celle du rayon vecteur, par une simple proportion, on a trouvé plus commode et plus exact de chercher directement par la théorie les inégalités de la parallaxe, pour être plus à portée de les suivre et de les vérifier par l'observation. Mais alors il faut de même déterminer une parallaxe moyenne dont toutes les autres s'écartent également en plus et en moins, par l'effet des inégalités : c'est ce que l'on nomme la *constante de la parallaxe*.

Pour la déterminer, on a d'abord fait usage des observations ; en appliquant aux parallaxes observées toutes les inégalités que la théorie avait fait connaître, le reste était la constante de la parallaxe; mais par une étude plus approfondie, M. Laplace est parvenu à déduire de la théorie elle-même cet élément important. Sa valeur est 1°,056841 (*). Elle donne une distance moyenne égale

(*) Mécanique céleste, tome III, page 248.

à 60,237990 rayons terrestres, environ 86261 lieues. Le diamètre apparent qui y correspond est égal au double de 1°,056841 multiplié par le rapport constant 0,27293, ou 0°,57646.

Pour déterminer cette parallaxe moyenne par la théorie, il faut considérer la lune comme un corps soumis à la même pesanteur que les autres corps terrestres, et circulant autour de la terre par l'effet d'un mouvement de projection. La vîtesse de ce mouvement est connue par les observations de la lune. On connaît de plus par les expériences du pendule, l'intensité de la pesanteur terrestre à la surface de la terre. Ainsi, en supposant que cette pesanteur soit réciproque au carré de la distance au centre de la terre, on peut calculer jusqu'à quel point il faut l'affaiblir, et par conséquent à quelle distance il faut éloigner la lune pour que l'action de la pesanteur sur elle soit telle que les observations la démontrent d'après son mouvement moyen. On obtient donc ainsi la distance de la lune à la terre qui répond à ce mouvement, et l'on en conclut la valeur moyenne de la parallaxe, puisqu'elle est réciproque à cette distance. Je ferai remarquer que la valeur 1°,0568 n'est pas moyenne arithmétique entre les valeurs 1°,13858, et 0°,99722 des parallaxes extrêmes; elle se rapproche un peu plus de la seconde que de la première.

CHAPITRE XII.

De la Libration de la Lune et de la situation de son équateur.

66. L'OBSERVATION suivie des taches de la lune prouve que cet astre nous présente toujours à-peu-près la même face. Ainsi pendant qu'il fait une révolution autour de la terre, son hémisphère opposé répond successivement à tous les points du ciel qui se trouvent dans le plan de son orbite. Il a donc réellement un mouvement de rotation sur lui-même.

On se convaincra de l'existence de ce mouvement, d'une manière encore plus frappante, en rapportant les positins succ essives de la lune à un point très éloigné comme le soleil; car la face qu'elle nous présente est tantôt tournée vers cet astre, et tantôt lui est opposée. Un observateur placé dans le soleil, verrait donc la lune tourner sur elle-même dans le cours d'une révolution synodique. Cette rotation vue des étoiles, serait de même durée que la révolution sydérale de la lune : par rapport aux points équinoxiaux, ce serait la révolution tropique.

Le desir de déterminer l'axe de rotation et le plan de l'équateur lunaire, a fait observer les taches de la lune avec beaucoup de soin. Deux circonstances facilitaient cette recherche : ces taches sont permanentes, et on peut, en général, les observer pendant la durée entière d'une même révolution.

Elles offrent pourtant quelques variétés dans leurs positions apparentes sur le disque lunaire; on les voit s'approcher et s'éloigner alternativement de ses bords. Celles qui en sont voisines disparaissent et reparaissent successivement en faisant ainsi des oscillations périodiques. Cependant, comme les taches elles-mêmes ne paraissent pas éprouver de changemens sensibles dans leurs positions respectives, et qu'on finit toujours par les revoir sous la même grandeur et sous la même forme, lorsqu'elles sont revenues à la même position, on en a conclu qu'elles sont fixes sur la surface de la lune. Leurs oscillations semblent donc indiquer dans le globe lunaire, une sorte de balancement auquel on a donné le nom de *libration*, d'un mot latin, qui signifie *balancer.*

Mais en adoptant cette expression, qui peint bien les apparences observées, il ne faut pas lui donner un sens positif, car le phénomène lui-même n'a rien de réel; ce n'est qu'un résultat composé de plusieurs illusions optiques.

67. Pour concevoir et démêler ces illusions, ramenons-nous à des termes précis. Imaginons un rayon visuel mené du centre de la terre au centre de la lune. Le plan mené par ce centre perpendiculairement à ce rayon, coupe le globe lunaire suivant une circonférence de cercle qui est pour nous le disque apparent. Si la lune n'avait point de mouvement de rotation réel, c'est-à-dire si chaque point de sa surface restait invariablement dirigé vers le même point du ciel, son seul mouvement de révolution, autour de la terre, nous découvrirait successivement tous les points de cette surface : le rayon visuel la rencontrerait successivement en différens points, que nous verrions passer les uns après les autres au centre apparent du disque lunaire. Le mouvement réel de rotation contrarie les effets de cette rotation apparente, et ramène constamment vers nous

la même face du globe lunaire : voilà pourquoi nous ne découvrons jamais la face opposée.

Supposons maintenant que la rotation de la lune soit sensiblement uniforme ; c'est-à-dire, qu'elle ne participe pas aux inégalités périodiques : cette supposition est au moins la plus naturelle que l'on puisse faire, et la théorie a prouvé qu'elle est rigoureuse. Alors une des causes qui produisent la libration devient évidente ; car le mouvement de révolution participant aux inégalités périodiques, est tantôt plus lent, tantôt plus rapide. La rotation apparente qu'il occasionne ne peut donc pas toujours contrebalancer exactement la rotation réelle, qui reste constamment la même, et ces deux effets se surpassent tour-à-tour. Les points du globe lunaire doivent donc paraître tourner tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, autour de son centre, et l'apparence qui en résulte est la même que si la lune avait un petit balancement de part et d'autre du rayon vecteur mené de son centre à la terre. C'est ce que l'on nomme la *libration en longitude*.

Plusieurs causes accessoires, mais sensibles, modifient ce premier résultat.

Les taches de la lune ne conservent pas toujours la même élévation au-dessus du plan de son orbite ; quelques-unes même, par l'effet de la rotation, passent d'un côté de ce plan au côté opposé. Ces circonstances indiquent un axe de rotation qui n'est pas exactement perpendiculaire au plan de l'orbe lunaire ; or, selon que cet axe nous présente sa plus grande ou sa plus petite obliquité, il doit nous découvrir successivement les deux pôles de rotation du sphéroïde lunaire ; de même que l'axe de la terre présente successivement ses deux pôles au soleil dans les deux solstices. Nous devons donc appercevoir dans certains tems quelques-uns des points situés vers ces pôles, et les perdre de vue ensuite, lorsqu'ils se rapprochent du bord apparent; c'est ce que l'on nomme la *libration en latitude.* Elle est peu considérable, ce qui indique que l'équateur de la lune diffère très-peu du plan de son orbite.

Enfin, une troisième illusion provient de ce que l'observateur est placé à la surface de la terre, et non à son centre. C'est vers ce centre que la lune tourne toujours la même face, et le rayon visuel, mené de là au centre de la lune, rencontrerait toujours sa surface au même point, abstraction faite des inégalités précédentes. Il n'en est pas de même du rayon visuel mené de la surface de la terre; ce rayon fait un angle sensible avec le précédent, à cause de la proximité de la lune; cet angle, à l'horison, égale la parallaxe horisontale; par suite de cette différence, le contour apparent du sphéroïde lunaire n'est pas le même pour le centre de la terre et pour l'observateur placé à sa superficie. Celui-ci, lorsque la lune se lève, découvre vers son bord supérieur, quelques points que l'on n'appercevrait pas du centre de la terre. A mesure que la lune s'élève sur l'horison, ces points s'approchent du bord supérieur du disque, et enfin disparaissent, tandis que d'autres se découvrent vers son bord inférieur; le même effet se continue pendant tout le tems que la lune est visible, et comme la partie de son disque qui paraît en haut à son lever, se trouve en bas à son coucher; c'est à ces deux instans que la différence est sur-tout sensible. Ainsi, dans son mouvement diurne, le globe lunaire paraît osciller autour du rayon vecteur, mené de son centre au centre de la terre. On a désigné ce phénomène par le nom de *libration diurne.*

68. Les explications précédentes satisfont aux phéno-

mènes observés avec trop de simplicité et de précision, pour qu'on puisse douter de leur justesse. Les trois espèces de libration que présente le sphéroïde lunaire, sont donc purement optiques ; aussi disparaissent-elles entièrement, lorsqu'on rapporte les positions des taches vues de la terre à ce qu'elles seraient pour un observateur placé au centre de la lune. Il ne reste alors qu'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe presque perpendiculaire à l'orbe lunaire.

69. Pour déterminer la position de cet axe et la durée de la rotation, on emploie les mêmes procédés que nous avons décrits en traitant de la rotation du soleil. On observe à la machine parallactique, les différences d'ascension droite et de déclinaison entre un des bords de la lune et une tache déterminée. Comme on connaît aussi par observation ou par le calcul, le demi-diamètre apparent du disque, on déduit de ces données la différence de déclinaison et d'ascension droite entre la tache et le centre, et par suite, la différence de longitude et de latitude. Mais avant d'effectuer ces calculs, il faut faire subir aux observations une correction particulière. D'après ce que nous avons dit dans le premier livre sur l'usage de la machine parallactique, on conçoit que pour observer la différence des passages ou des déclinaisons entre la tache et les bords du disque, on tourne le micromètre de manière que la tache, dans son mouvement en ascension droite, suive le fil parallèle à l'équateur, et alors les autres fils perpendiculaires à celui-là représentent des cercles horaires ; mais ces suppositions ne sont pas rigoureusement vraies ; car la lune ayant un mouvement propre qui la porte successivement sur différens parallèles, ce mouvement se compose avec celui de la rotation diurne du ciel, et, par conséquent, sa

route apparente est oblique à l'équateur et aux parallèles, excepté dans les instans où elle atteint ses plus grandes déclinaisons. Le parallèle apparent décrit par la tache et sur lequel on règle le micromètre, diffère donc du parallèle vrai, et à cause de la rapidité du mouvement propre de la lune, cette différence peut devenir fort sensible. Un autre effet analogue résulte du changement qu'éprouve la parallaxe de hauteur à mesure que la lune s'élève sur l'horison; car dans le cas même où la lune n'aurait aucun mouvement en déclinaison, le seul changement de la parallaxe rendrait sa marche apparente inclinée à l'équateur; il faut donc corriger, dans les observations, les effets de ces deux causes, et c'est une chose très-facile (*).

Les positions géocentriques de la tache étant ainsi connues, on les convertit en positions *sélénocentriques*, c'est-à-dire, vues du centre de la lune. Les formules nécessaires pour cette réduction sont les mêmes que nous avons employées pour le soleil, à une petite modification près, qui provient de ce que la latitude de la lune n'est pas nulle comme l'était celle du soleil.

70. Si l'orbite décrite par la tache autour du centre de la lune est plane, trois observations ainsi préparées doivent suffire pour déterminer son plan, et par suite la position de l'équateur lunaire qui lui est parallèle. Mais ici se présente une nouvelle particularité.

Si l'on emploie trois observations faites dans un intervalle de tems peu considérable, par exemple, dans l'espace de quinze jours, on trouve que la longitude du

---

(*) On trouvera à la fin de ce chapitre les formules nécessaires pour cet objet.

nœud ascendant de l'équateur lunaire est égale à la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite; et comme en répétant ce calcul, à des époques quelconques, mais toujours sur des observations voisines, on trouve toujours cette égalité, il en faut conclure que la trace de l'équateur lunaire sur l'écliptique est constamment parallèle à la ligne des nœuds moyens de l'orbite; par conséquent, cette trace a un mouvement rétrograde égal à celui des nœuds; et ainsi l'axe de rotation du sphéroïde *lunaire décrit une surface conique autour* de l'axe mené par son centre perpendiculairement à l'écliptique. Quant à l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, il paraît qu'elle est constante; car en la calculant ainsi par des observations voisines, on lui trouve dans tous les tems, la même valeur, qui est $1^{\circ},67$.

71. La révolution moyenne des nœuds de l'orbe lunaire se faisant en $6793^{j},421$, comme nous l'avons vu plus haut, il s'ensuit que ces nœuds rétrogradent de 1° en $16^{j},183$. La trace de l'équateur lunaire suivant le mouvement des nœuds, rétrograde donc aussi de 1° dans le même intervalle de tems. La lenteur de ce mouvement fait que des observations comprises dans un intervalle de peu de jours, s'accordent à peu de chose près, pour donner la même longitude du nœud de l'équateur lunaire; mais on ne pourrait pas combiner de la même manière des observations faites à des époques éloignées; car alors le déplacement de l'équateur lunaire devenant sensible, les positions sélénocentriques de la tache ne pourraient pas être comprises dans un même plan dont la longitude serait constante, comme le supposent les formules que nous avons établies pour le soleil; de là résulte donc encore une autre modification à faire à ces formules pour les rendre applicables à la lune. Cette modification consiste

à rendre la trace de l'équateur lunaire mobile sur l'écliptique, conformément à la loi que nous venons de déterminer; or, rien n'est plus facile, et il n'en résulte aucune complication de plus dans les calculs.

Pour ne rien omettre de ce qui peut contribuer à l'exactitude, je ferai remarquer qu'il faut employer une parallaxe différente pour le centre du sphéroïde lunaire et pour les taches qui sont à sa surface; car à cause de la grandeur de la parallaxe de la lune, cette différence est sensible. On peut l'évaluer aisément quand on connaît la différence des distances; et pour obtenir cette dernière, il suffira de calculer le parallèle de la tache, par une première approximation, où l'on supposera les parallaxes égales pour la tache et pour le centre du sphéroïde.

Enfin, afin d'éviter l'effet des petites erreurs que les observations comportent toujours, il faudra en calculer un très-grand nombre, et les combiner par la méthode des équations de condition. Ce concours est très-nécessaire, car les erreurs des positions géocentriques s'agrandissent dans une énorme proportion, quand on transforme celles-ci en positions sélénocentriques.

72. En employant toutes les attentions que nous venons de recommander, et les appliquant à un grand nombre d'observations fort exactes, on confirme avec la plus grande certitude la constance de l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique et le parallélisme de ses nœuds avec les nœuds moyens de l'orbite. Ces résultats peuvent être représentés par la construction suivante: par le centre de la lune concevez trois plans, l'un représentant l'équateur de la lune, le second le plan moyen de son orbite; le troisième parallèle à l'écliptique. Ce dernier qui sera toujours compris entre les deux autres, passera par leur commune section. Il fera, avec le premier,

un angle de 1°,67; c'est l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique ; avec le troisième, un angle de 5°,7222 ; c'est l'inclinaison moyenne de l'orbite sur le même plan.

Ces résultats, qui forment une des plus belles découvertes de l'astronomie moderne, ont été trouvés pour la première fois par Dominique Cassini; et l'on doit à M. Lagrange d'avoir montré qu'ils sont une conséquence de l'attraction que la terre exerce sur le sphéroïde lunaire.

73. Nous avons vu qu'il existe dans le moyen mouvement de la lune, des variations séculaires qui doivent y produire à la longue des changemens très-considérables. Si le mouvement de rotation de la lune restait toujours le même, et ne participait point à ces inégalités, il cesserait bientôt de contre-balancer exactement le mouvement de révolution, et la lune se détournant peu-à-peu pour nous, on devrait, par la suite des siècles, découvrir successivement tous les points de sa surface ; mais la théorie a prévu d'avance que cela ne doit point arriver. Le mouvement de rotation de la lune, indépendant des inégalités périodiques qui affectent le mouvement de révolution, est assujéti aux mêmes inégalités séculaires. Ces mouvemens s'altéreront donc peu-à-peu par les mêmes périodes en se contre-balançant toujours, et la face de la lune opposée à celle qu'elle nous présente, nous sera éternellement cachée. Par une suite des mêmes lois, la constante d'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique et le parallélisme de ses nœuds avec les nœuds moyens de l'orbite, subsisteront toujours malgré le développement des inégalités séculaires. Ces beaux théorêmes résultent encore de l'analyse de M. Lagrange.

CHAPITRE XIII.

Sur la forme et la constitution physique du Sphéroïde lunaire.

74. Nous avons vu dans l'art. 29, que le rapport des rayons de la lune et de la terre supposée sphérique, est égal à 0,273, ce qui fait à très-peu près $\frac{3}{11}$. Si nous supposons ces deux corps sphériques, le rapport de leur volume sera égal au cube du rapport de leurs rayons, c'est-à-dire, à $\frac{27}{1331}$ ou $\frac{1}{49}$, d'où il résulte que *le volume de la lune est environ la quarante-neuvième partie du volume de la terre.*

On a trouvé par la théorie de l'attraction, que la masse de la lune est $\frac{1}{68,4}$, celle de la terre étant prise pour unité. Ce rapport est beaucoup au-dessous de $\frac{1}{49}$. La masse de la lune, comparée à celle de la terre, n'est donc pas dans la proportion de son volume, et par conséquent sa densité est moindre que celle du globe terrestre.

Les phénomènes que présente la rotation du sphéroïde lunaire prouvent que la lune n'est pas sphérique : elle doit avoir la forme d'un ellipsoïde, ayant son plus grand axe constamment tourné vers la terre, et dirigé dans le plan de l'équateur lunaire, son plus petit axe dirigé suivant les pôles de rotation ; enfin le troisième axe perpendiculaire aux deux autres et intermédiaire entre eux pour la longueur. Ces beaux résultats sont encore une découverte de M. Lagrange.

75. En observant avec soin le disque de la lune lorsqu'il n'est pas entièrement éclairé par le soleil, on remarque sur sa partie obscure des points brillans, dont la lumière s'agrandit et s'étale peu-à-peu par le progrès des phases. Ces points ne paraissent jamais qu'à peu de distance de la partie éclairée, et lorsqu'ils sont atteints par la lumière générale, ils sont constamment accompagnés d'une ombre plus ou moins intense, qui tourne avec le soleil, comme ferait une ombre portée, c'est-à-dire, de manière à être toujours opposée à cet astre.

On a conclu de ces phénomènes que les points dont il s'agit, sont des montagnes qui s'élèvent sur la surface de la lune, et dont le soleil frappe le sommet avant d'éclairer la base. Lorsque ces montagnes se trouvent sur le bord du disque de la lune, elles y forment des dentelures sensibles, d'après le diamètre desquelles on a pu mesurer leur hauteur. Elle est pour quelques-unes d'entre elles de plus de 3000 mètres (1500 toises). Les inégalités qui hérissent la surface de cet astre, sont proportionnellement beaucoup plus sensibles que celles de notre globe.

76. On observe aussi sur le disque lunaire des portions assez étendues, qui ne sont jamais autant éclairées que les autres. Elles restent toujours plus ou moins obscures. Il paraît assez naturel de penser que ce sont des vallées ou des cavités profondes. On les avait d'abord prises pour des mers; mais comme il n'existe autour de la lune aucune atmosphère sensible, il s'ensuit qu'il ne saurait y avoir de liquide à sa surface; car on démontre en physique que, sans le poids de l'atmosphère terrestre et des vapeurs qui s'y trouvent, tous les liquides qui sont à la surface de la terre se réduiraient en vapeurs, jusqu'à ce qu'ils eussent formé une nouvelle atmosphère

à laquelle chacun d'eux contribuerait suivant le degré de sa force élastique. Si cette nouvelle atmosphère restait autour de la terre, l'évaporation s'arrêterait quand la tension de la vapeur de chaque liquide serait égale à ce qu'elle serait dans le vide, à la même température. Mais si quelque cause absorbante enlevait ces vapeurs à mesure qu'elles se forment, ce qui aurait dû être le cas de la lune, puisque les observations prouvent qu'il n'existe point de vapeurs à sa surface, il faudrait bien que par cette évaporation continuelle, tous les liquides finissent par s'épuiser.

Ces circonstances physiques s'opposent à ce que la lune, dans son état actuel, puisse être habitée par des êtres animés, semblables à ceux qui peuplent la surface de la terre; car ils ne pourraient y respirer, ni par conséquent y vivre. Tout doit être solide à la surface de cet astre, et il y règne sans doute un froid excessif. Mais peut-être cet état n'a-t-il pas toujours existé : il est possible que la lune ait eu autrefois une atmosphère, qu'alors elle ait été habitée, et que la pesanteur terrestre, favorisée par quelque circonstance particulière, ait attiré cette atmosphère, et l'ait réunie à la nôtre.

77. Enfin on a quelquefois remarqué sur le disque de la lune des points lumineux qui ont brillé pendant un tems plus ou moins considérable, indépendamment du progrès des phases. On en a vu de semblables, même pendant des éclipses de soleil, lorsque la face que la lune nous présente est directement opposée à cet astre. Ces circonstances indiquent que les points dont il s'agit sont lumineux par eux-mêmes. Il est donc possible que ce soient des volcans qui aient des intermissions comme l'Etna et le Vésuve. L'extrême rareté de l'atmosphère lunaire, si toutefois elle existe, n'est pas un obstacle à ces combustions, parce qu'on connaît des substances

qui développent dans leur ignition le gaz oxigène nécessaire pour que les corps puissent brûler.

NOTE.

Formules pour réduire les observations du parallèle apparent au parallèle vrai.

Quand on veut observer à la machine parallactique la différence de déclinaison et d'ascension droite, entre le centre de la lune et une de ses taches, ou entre ce centre et un astre quelconque, on tourne le fil équatorial du micromètre de manière que le bord austral ou boréal de la lune le suive dans son mouvement diurne apparent. Alors les fils horaires qui sont perpendiculaires au fil équatorial, convergent vers un pôle apparent P' différent du pôle vrai. Voy. *fig.* 4. Je suppose maintenant que l'on observe l'instant du passage de l'astre à un des fils horaires, et que l'on observe aussi les passages des deux bords occidental et oriental de la lune au même fil; la moyenne arithmétique entre ces deux instans donnera le passage du centre du disque; on connaîtra donc la différence des passages entre ce centre et l'astre. De même si l'on mesure avec le fil mobile la différence apparente de déclinaison entre le bord austral ou boréal de la lune et l'astre, et que l'on prenne aussi la différence de déclinaison des deux bords entre eux, on en conclura la différence de déclinaison entre l'astre et le centre. Si le mouvement diurne de l'astre diffère de celui de la lune, il faut que la différence de déclinaison soit prise sur le même cercle horaire où l'on observe le passage de l'astre; mais s'il s'agit d'une tache de la lune, cette condition est inutile, parce que son mouvement est parallèle à celui du bord.

Il n'arrive presque jamais que l'on puisse observer ainsi les passages des deux bords de la lune et leur différence de déclinaison, parce qu'ils ne sont presque jamais éclairés en même tems. Mais comme le diamètre apparent de la lune est connu, on peut le rapporter sur le fil équatorial et sur le fil horaire; alors, d'après le passage d'un des bords, on conclut le passage du centre, et de même pour les différences de déclinaison. Il faut, dans cette réduction, avoir égard à l'altération que la réfraction produit sur les diamètres apparens de la lune, suivant leur inclinaison sur l'horison. Je donnerai à la fin du présent livre la formule nécessaire pour cet objet. D'après cela, nous n'avons plus à considérer que le centre de la lune et l'astre.

Soit, fig. 4, CC' le parallèle apparent du centre de la lune, P' le pôle apparent vers lequel convergent les fils horaires. Supposons que $P'T$ soit le fil où l'on observe les passages, et admettons que le centre passe le premier. On observe donc d'abord son passage en C, puis quelques instans après, on observe l'arrivée de l'astre en T. Alors le centre sera parvenu en C' sur un autre fil horaire $C'P'$. Si par les points CC' on mène au pôle vrai P les cercles horaires vrais CP, $C'P$, l'angle horaire CPC' sera égal à l'intervalle des passages observés convertis en arc. Cet angle est donc une des données de l'observation.

On peut tout de suite en conclure la valeur de l'arc CC' décrit par le centre de la lune sur le fil équatorial. En effet, dans le triangle sphérique CPC' on connaît trois choses, savoir : l'angle horaire CPC' que nous nommerons T; la distance $C'P$ du centre de la lune au pôle vrai, à l'instant du passage de l'astre au fil horaire : nous la nommerons Δ; enfin l'angle $CC'P$ égal à $C'CT - P'CP = 90^\circ - n$, en nommant n le petit angle formé par les cercles horaires vrai et apparent. On verra tout-à-l'heure que cet angle n peut aisément se calculer d'après les élémens du mouvement de la lune. J'emploie ici les mesures sexagésimales, parce que les tables de la lune sont encore construites suivant cette division. Avec ces données, on aura le côté CC' par la formule

$$\sin CC' = \frac{\sin \Delta . \sin T}{\cos n}.$$

Réciproquement, si CC' était connu ainsi que Δ et n, cette formule donnerait l'angle T. C'est le cas où l'on se trouve quand on n'a pu observer que le passage d'un des bords de la lune au fil horaire. Alors l'arc CC' est égal au demi-diamètre apparent de la lune calculé parallèlement au fil équatorial du micromètre; et la formule donne l'intervalle des passages entre le bord et le centre. Si l'on voulait négliger le carré de $\sin n$ et supposer les petits arcs CC', T proportionnels à leurs sinus, on aurait simplement $T = \frac{CC'}{\sin \Delta}$, c'est-à-dire que l'intervalle des passages entre le bord et le centre serait égal au demi-diamètre apparent de la lune réduit en tems, et transporté sur le parallèle vrai de la lune. L'intervalle apparent des passages du bord et du centre serait donc le même que si on l'eût observé sur le parallèle vrai. Cela tient au peu de différence de ces parallèles, et aussi à ce qu'ils sont respectivement perpendiculaires sur les cercles horaires qui leur correspondent ; cependant, si l'angle n était de 1°, comme cela arrive quelquefois, il pourrait en résulter une erreur de $\frac{1}{100}$ de seconde sur la valeur de l'angle T, exprimé en degrés et par conséquent une erreur de $\frac{2}{1000}$ de seconde sur l'intervalle des passages du bord et du centre convertis en tems : erreur bien petite à la vérité, mais qui étant constante, n'est pas de nature à se détruire en multipliant les observations, et qu'il sera par conséquent préférable d'éviter.

Une fois l'arc CC' connu, le reste n'a plus aucune difficulté; en effet, par le point T où l'on a observé le passage de l'astre, menons un arc de parallèle vrai TQ terminé au cercle horaire vrai $C'P$. Il est clair que cet arc exprimera la différence des passages telle qu'on l'aurait observée si les fils horaires du micromètre avaient été dirigés vers le pôle vrai; et dans ce cas, $C'Q$ aurait été la différence de déclinaison à l'instant du passage de l'astre. Tout se réduit donc à calculer ces deux arcs que l'on peut considérer comme deux petites lignes droites perpendiculaires l'une sur l'autre.

Si par le point T nous menons aussi l'arc de parallèle apparent TT' terminé au cercle horaire apparent $C'P'$, la petitesse des arcs CT, CC', $C'T'$, $T'T$ permettra également de les considérer comme de petites lignes droites perpendiculaires entre elles, et formant un rectangle sur le micromètre ; en sorte que l'on pourra supposer $TT' = CC'$ et $CT = C'T'$; par conséquent le problème se réduira à passer d'un système de coordonnées rectangulaires $C'Q$, QT à un autre système de coordonnées $C'T'$, $T'T$ pareillement rectangulaires et formant avec les précédentes un angle $T'C'Q$ égal à n. On aura donc par les formules de la Géométrie analytique, page 90 ;

$$C'Q = CT\cos n - CC'\sin n \qquad TQ = CT\sin n + CC'\cos n;$$

ce sont les quantités cherchées. Il ne reste plus qu'à y mettre pour CC' sa valeur tirée de l'équation

$$\sin CC' = \frac{\sin\Delta\sin T}{\cos n}.$$

Si l'on veut supposer les sinus proportionnels aux arcs, et faire $\cos n = 1$, on aura

$$C'Q = CT - T\sin\Delta\sin n \qquad TQ = T\sin\Delta + CT.\sin n.$$

Les premiers termes indépendans de n expriment les quantités observées ; les seconds termes expriment les corrections qu'il faut y faire pour les ramener du parallèle apparent au parallèle vrai.

Si du point C où l'on a observé le passage du centre au fil horaire du micromètre, on mène l'arc de parallèle vrai $C'H'$ qui pourra être considéré comme une petite ligne droite, il résulte de la perpendicularité des diverses parties de la figure, que l'angle $C'CH'$ sera égal à l'angle $P'CP$ que nous avons nommé n ; n exprime donc, dans nos formules, l'angle du parallèle apparent avec le parallèle vrai.

Pour rendre ces formules commodément applicables, il faut exprimer les quantités qu'elles renferment par des dénominations générales qui puissent s'appliquer d'elles-mêmes à tous les cas, sans avoir besoin de recourir, pour chacun d'eux à une figure particulière. Pour cela, nous adopterons la notation suivante.

Soit l'instant du passage du centre au fil horaire du micromètre. $= t'$
l'instant du passage de l'astre au même fil .... $= t''$
l'asc. droite appar. du centre sur l'éq. vrai à l'époque t''.... $= A$
sa distance apparente au pôle vrai à la même époque.... $= \Delta$
sa distance apparente au pôle du micromètre .... $= D$
l'asc. droite appar. de l'astre sur l'éq. vrai à l'époque t''.... $= a$
sa distance apparente au pôle vrai à la même époque.... $= \delta$
sa distance apparente au pôle du micromètre............ $= d$

Avec ces désignations, nous aurons évidemment

$$CT = D - d\,;\; C'Q = \Delta - \delta\,;\; T = 15\,(t'' - t')\,;\; TQ = (a - A)\sin\delta\,;$$

et en substituant ces expressions dans nos formules, il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta - \delta = D - d - 15\,.\,(t'' - t')\sin\Delta\,.\,\sin n \\ (a - A)\sin\delta = 15\,.\,(t'' - t')\sin\Delta + \{D - d\}\sin n. \end{cases}$$

Si Δ et A sont supposés connus par les tables de la lune, la première équation fera connaître $\Delta - \delta$ et ensuite δ ; après quoi la seconde donnera $a - A$ et a. C'est ce qui arrive quand on observe les taches de la lune.

Si au contraire δ et a sont donnés, on pourra en déduire Δ et A. Pour cela il faudra, dans le second membre de la première équation, substituer $\delta + D - d$ au lieu de Δ, ce qui sera suffisamment exact. Alors cette équation donnera $\Delta - \delta$ et ensuite Δ. Après quoi la seconde donnera $a - A$ et ensuite A. C'est ce qui arrive quand on compare la lune à une étoile *qui la suit* et qui est supposée connue.

Ces différences $\Delta - \delta$, $a - A$, sont celles que l'on observerait, si les fils horaires du micromètre étaient dirigés vers le pôle vrai à l'instant de l'observation. Elles sont par conséquent affectées des effets de la réfraction et de la parallaxe propres à chacun des deux astres; il faut les en dépouiller.

Commençons par les coordonnées du centre de la lune. Soient A' Δ' son ascension droite et sa distance polaire *vraies*, calculées pour l'instant t'', au moyen des tables astronomiques. Désignons par les indices $[P A']$, $[P \Delta']$ les changemens produits par la parallaxe sur ces deux élémens; changemens que nous avons appris à calculer exactement dans le chapitre XIX du premier livre. Désignons de même au moyen des indices $[R A']$, $[R \Delta']$ les changemens analogues produits sur ces mêmes élémens par la réfraction; changemens qui sont toujours de signe contraire à l'effet de la parallaxe. Cela posé, les élémens du lieu apparent seront donnés en fonction des élémens du lieu vrai de la manière suivante:

$$A = A' - [P A'] + [R A'],$$
$$\Delta = \Delta' + [P \Delta'] - [R \Delta'].$$

Pour calculer les termes $[R A']$, $[R \Delta']$, il faut remarquer que les effets de la réfraction, comme ceux de la parallaxe, se réduisent à produire un petit changement dans la distance apparente de l'astre au zénith, avec cette seule différence que la réfraction élève l'astre au lieu que la parallaxe l'abaisse, opposition que nous avons exprimée dans l'équation précédente en donnant à ces deux genres de correction des signes opposés. Ainsi quand on aura calculé $[P A']$, $[P \Delta']$ par ces formules données dans les pages 256-259 du premier livre; il suffira de mettre dans ces formules la réfraction R correspondante à la distance zénithale apparente Z, à la place de la parallaxe de hauteur que nous avions alors désignée par ϖ, ou, ce qui revient au même, il faudra substituer $\frac{\sin R}{\sin \Pi} Z$, au lieu de $\sin \Pi$ dans ces formules, où Π représentait la parallaxe horisontale; car $\sin \varpi = \sin \Pi . \sin Z$.

En représentant par des petites lettres les quantités analogues relativement à l'astre que l'on compare à la lune, on aura de même

$$a = a' - [p a'] + [r a']$$
$$\delta = \delta' + [p \delta'] - [r \delta']$$

et en prenant les différences de ces coordonnées à celles de la lune, on aura,

$$(2)\ldots A' - a' = A - a + [PA'] - [pa'] - [RA'] + [ra'],$$
$$\Delta' - \delta' = \Delta - \delta - [P\Delta'] + [p\delta'] + [R\Delta'] - [r\delta'].$$

Les termes, qui dépendent de la réfraction et de la parallaxe dans les seconds membres de ces équations, sont donnés par les formules du premier livre en fonction des élémens A', Δ', a', δ', du lieu vrai des deux astres. A' et Δ' seront toujours donnés avec une exactitude plus que suffisante par les tables de la lune. Quant à a' et δ', si c'est une étoile que l'on observe, ils seront pareillement donnés par les catalogues; mais si c'est une tache de la lune, ils ne seront pas connus. Dans ce cas on éludera la difficulté en remarquant que la réfraction et la parallaxe relatives à la tache, différeront extrêmement peu de la réfraction et de la parallaxe, relatives au centre du disque, de façon que ces deux genres de correction s'entre-détruiront en grande partie dans les seconds membres des équations (2). On pourra donc, pour les calculer, employer au lieu de $A'\,\Delta'$, $a'\,\delta'$, les élémens $A\ \Delta$, $a\ \delta$ du lieu apparent, dont les deux premiers sont donnés par les tables de la lune, et les deux derniers par les équations (1). Si la parallaxe horisontale de la tache n'est pas déja connue par des calculs antérieurs, on la supposera d'abord égale à celle de la lune; sauf à rectifier cette supposition dans un second calcul, quand la position de la tache sur le sphéroïde lunaire sera ainsi déterminée par une première approximation.

Ainsi de toute manière on connaîtra les termes qui dépendent de la réfraction et de la parallaxe dans les équations (2); on a déja les différences $A - a$; $\Delta - \delta$ par les équations (1). On connaîtra donc les valeurs de $A' - a'$; $\Delta' - \delta'$; et comme A' et Δ' ou a' et δ' sont supposées connues exactement, on aura séparément les valeurs de chacune de ces quantités.

Il devient maintenant facile de calculer l'angle n formé par le parallèle apparent de la lune avec le parallèle vrai: les mêmes élémens vont nous servir. En effet, d'après la *fig.* 4, où $C'CH'$ représente cet angle, les petits arcs CH', $C'H'$ peuvent être considérés comme rectilignes; ce qui donne $\tang n = \frac{C'H'}{CH'}$. Il ne reste plus qu'à calculer ces deux quantités.

Pour cela, nommons Δ la distance apparente CP du centre de la

lune au pôle de l'équateur dans la première observation à l'époque t'. Nous avons déja nommé Δ cette même distance à l'époque t'' où elle était égale à $C'P$; nous aurons donc $C'H' = \Delta_{,} - \Delta$. Quant à CH', c'est la variation de l'angle horaire apparent de la lune entre les deux époques, multipliée par la distance apparente au pôle vrai CP. Soit $M_{,}$ l'ascension droite du zénith à l'époque t, et nommons $A_{,}$ l'ascension droite apparente du centre de la lune à ce même instant, $M_{,} - A_{,}$ exprimera son angle horaire compté d'orient en occident. De même, à l'époque t'', cet angle horaire sera $M - A$; par conséquent, la variation qu'il éprouve est $M - A - (M_{,} - A_{,})$; ce qui donne........
$CH' = \{M - M_{,} - (A - A_{,})\} \sin \Delta_{,}$, et par suite

$$\tang n = \frac{\Delta_{,} - \Delta}{\{M - M_{,} - (A - A_{,})\} \sin \Delta};$$

$M - M_{,}$ étant le mouvement de la sphère céleste entre les instans des observations, est égal à $15\,(t'' - t')$: je suppose t' et t'' exprimés en tems sydéral. Quant à $\Delta_{,} - \Delta$ et $A_{,} - A$, ce sont les différences de déclinaison et d'ascension droite du centre de la lune, affectées de la réfraction et de la parallaxe, et calculées pour les instans des deux observations. En mettant pour $M - M_{,}$ sa valeur, il viendra

$$\tang n = \frac{\Delta_{,} - \Delta}{\{15(t''-t') - (A - A_{,})\} \sin \Delta_{,}}$$

Au reste, on pourrait également calculer ces élémens pour deux autres époques $t' t''$, différentes des précédentes, pourvu qu'elles fussent éloignées l'une de l'autre de peu de minutes. La formule donnera également la valeur de l'angle n, car on peut supposer le mouvement de la lune uniforme et rectiligne pendant un si court intervalle de tems. Mais alors il faudra que l'instant t'' et les élémens qui s'y rapportent soient *postérieurs* à l'instant t', comme nous l'avons supposé dans notre formule, si le centre de la lune passe au fil horaire *avant* l'astre, et au contraire *antérieurs*, si l'astre passe *le premier*. Cette attention est nécessaire pour que l'angle n prenne le signe qu'il aurait naturellement, d'après notre formule, si l'on employait dans le calcul les époques mêmes t' et t'' des deux observations. A cela près il n'y aura aucune précaution particulière à prendre dans l'emploi de nos formules.

Jusqu'ici nous avons supposé le fil équatorial du micromètre dirigé suivant le parallèle apparent de la lune. Dans la pratique, on est presque toujours forcé de diriger ce fil sur celui des deux astres qui passe le premier au fil horaire. Pour accommoder nos formules à cette disposition, il n'y a qu'à regarder que les lettres capitales se rapportent en général à l'astre sur lequel le fil équatorial est dirigé. Si cet astre est une tache, il n'en résulte aucun changement dans les calculs, puisque le mouvement des taches est parallèle à celui du bord; s'il s'agit d'une étoile, la valeur de n ne dépend que du changement de la réfraction. Si l'on négligeait ce changement, les corrections dépendantes du parallèle apparent seraient nulles : et en effet cela devait être ainsi, puisque dans cette supposition les fils horaires du micromètre se trouvent dirigés vers le pôle vrai.

NOTE II.

Formules pour la rotation de la Lune.

Les formules que j'ai données pour la rotation du soleil, page 254, s'appliquent aussi à la lune avec quelques légères modifications.

Pour le faire voir, j'adopterai les mêmes dénominations : x, y, z seront les coordonnées de la tache rapportées à trois axes rectangulaires menés du centre de la terre à l'équinoxe du printems, au premier point du cancer et au pôle boréal de l'écliptique; X, Y, Z seront les coordonnées du centre de la lune, rapportées aux mêmes axes. Je nommerai r la distance de la tache à la terre, l et λ sa longitude et sa latitude géocentriques qui se concluent de l'observation; R, L, Λ seront les quantités analogues pour le centre de la lune. Cela posé, on aura ici, comme dans la page 254,

$$x = r\cos\lambda\cos l, \quad y = r\cos\lambda\sin l, \quad z = r\sin\lambda,$$

et de même pour le centre,

$$X = R\cos\Lambda\cos L, \quad Y = R\cos\Lambda\sin L, \quad Z = R\sin\Lambda.$$

Toute la différence consiste en ce que, pour le soleil, on avait $\Lambda = 0$.

Maintenant, si l'on nomme x', y', z' les coordonnées *sélénocentriques* de la tache, rapportées à trois axes parallèles aux précédens, et passant par le centre de la lune; on aura également

$$x' = x - X, \quad y' = y - Y, \quad z' = z - Z,$$

c'est-à-dire,

$x' = r\cos\lambda\cos l - R\cos\Lambda\cos L,\quad y' = r\cos\lambda\sin l - R\cos\Lambda\sin L,$
$z' = r\sin\lambda - R\sin\Lambda.$

Soit r' le rayon mené du centre de la lune à la tache, on aura

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

ou, en mettant pour x', y', z', leurs valeurs

$$r^2 - 2rR\left\{\cos\lambda\cos\Lambda\cos(L-l) + \sin\lambda\sin\Lambda\right\} = r'^2 - R^2.$$

Comme dans cette recherche on suppose la lune sphérique, en nommant Δ son demi-diamètre apparent, on a

$$r' = R\sin\Delta,$$

par conséquent, en éliminant R, il vient

$$r^2 - 2rr'\frac{\left\{\cos\lambda\cos\Lambda\cos(L-l) + \sin\lambda\sin\Lambda\right\}}{\sin\Delta} = -\frac{r'^2\cos^2\Delta}{\sin^2\Delta}$$

équation qui doit servir à déterminer r, et qui est analogue à celle que nous avons trouvée pour le soleil. Afin de compléter cette analogie, j'ajouterai au coefficient de $2rr'$ les deux termes . . . . $+\sin\lambda\sin\Lambda\cos(L-l) - \sin\lambda\sin\Lambda\cos(L-l)$, qui s'entre-détruisent, et alors l'équation prendra la forme suivante :

$$r^2 - 2rr'\frac{\left\{\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) + 2\sin\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)\right\}}{\sin\Delta} = -\frac{r'^2\cos^2\Delta}{\sin^2\Delta},$$

qui étant résolue, donnera pour r ces deux valeurs

$$r = \frac{r'}{\sin\Delta}\left\{\begin{array}{l}\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) + 2\sin\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)\\ \pm\sqrt{\left\{\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) + 2\sin\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)\right\}^2 - \cos^2\Delta}\end{array}\right\}$$

mais de ces deux valeurs, il ne faut prendre que la plus petite, celle où le radical est affecté du signe négatif, parce que les taches que nous observons sont toujours dans la partie du sphéroïde lunaire la plus voisine de la terre ; il faut, de plus, transformer la quantité qui est sous le radical, de manière à en rendre le calcul exact et facile. Pour cela, nous introduirons, comme dans l'article cité, un angle ψ, tel qu'on ait

$$\sin^2\psi = \left\{\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) + 2\sin\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)\right\}^2 - \cos^2\Delta.$$

ou, en développant le premier terme,

$$\begin{aligned}\sin^2\psi &= \cos^2(\Lambda-\lambda)\cos^2(L-l) - \cos^2\Delta \\ &+ 4\sin\lambda\sin\Lambda\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l)\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) + 4\sin^2\lambda\sin^2\Lambda\sin^4\tfrac{1}{2}(L-l).\end{aligned}$$

or ici, comme dans l'art. cité, la quantité $\cos^2(\Lambda-\lambda)\cos^2(L-l)-\cos^2\Delta$ peut se mettre sous la forme.

$$\sin(\Delta+L-l)\sin(\Delta-L+l) - \sin^2(\Lambda-\lambda)\cos^2(L-l),$$

on aura donc ainsi

$$\begin{aligned}\sin^2\psi &= \sin(\Delta+L-l)\sin(\Delta-L+l) - \sin^2(\Lambda-\lambda)\cos^2(L-l) \\ &+ 4\sin\lambda\sin\Lambda\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l)\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) + 4\sin^2\lambda\sin^2\Lambda\sin^4\tfrac{1}{2}(L-l).\end{aligned}$$

Sous cette forme, $\sin^2\psi$ sera entièrement composé de petits termes, dont le calcul pourra se faire avec beaucoup d'exactitude. Connaissant ψ, on aura

$$r = r'\left\{\frac{\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) + 2\sin\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) - \sin\psi}{\sin\Delta}\right\};$$

et en substituant cette valeur dans les expressions de x', y' z', elles deviennent

$$x' = \frac{r'}{\sin\Delta}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda\cos l\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) - \cos\Lambda\cos L \\ + 2\sin\lambda\sin\Lambda\cos\lambda\cos l\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) - \cos\lambda\cos l\sin\psi\end{matrix}\right\},$$

$$y' = \frac{r'}{\sin\Delta}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda\sin l\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) - \cos\Lambda\sin L \\ + 2\sin\lambda\sin\Lambda\cos\lambda\sin l\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) - \cos\lambda\sin l\sin\psi\end{matrix}\right\},$$

$$z' = \frac{r'}{\sin\Delta}\left\{\begin{matrix}\sin\lambda\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l) - \sin\Lambda \\ + 2\sin^2\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l) - \sin\lambda\sin\psi\end{matrix}\right\},$$

Dans chacune de ces expressions, les deux premiers termes ont encore besoin d'être transformés pour qu'on en puisse faire le calcul avec exactitude ; mais cela est très-facile. Considérons, par exemple, les deux termes

$$\cos\lambda\cos l\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l)-\cos\Lambda\cos L,$$

qui appartiennent à la valeur de x'. En développant $\cos(\Lambda-\lambda)$, on le mettra sous la forme

$$\cos\Lambda\left\{\cos^2\lambda\cos l\cos(L-l)-\cos L\right\}+\cos\lambda\cos l\sin\lambda\sin\Lambda\cos(L-l),$$

ou bien

$$\cos\Lambda\left\{\cos l\cos(L-l)-\cos L\right\}+\sin\lambda\cos l\cos(L-l)\left\{\cos\lambda\sin\Lambda-\cos\Lambda\sin\lambda\right\},$$

expression qui se réduit à

$$\cos\Lambda\sin l\sin(L-l)+\sin\lambda\cos l\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda),$$

résultat dont tous les termes sont multipliés par des sinus d'arcs fort petits. De même, les deux premiers termes de y' peuvent se transformer en

$$-\cos\Lambda\cos l\sin(L-l)+\sin\lambda\sin l\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda),$$

et ceux de z' en

$$-\cos\lambda\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda)-2\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l).$$

Avec ces transformations, les valeurs définitives de x', y', z' deviennent

$$x'=\frac{r'}{\sin\Delta}\Big\{\cos\Lambda\sin l\sin(L-l)+\sin\lambda\cos l\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda)$$
$$+2\sin\lambda\sin\Lambda\cos\lambda\cos l\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)-\cos\lambda\cos l\sin\psi\Big\},$$

$$y'=\frac{r'}{\sin\Delta}\Big\{-\cos\Lambda\cos l\sin(L-l)+\sin\lambda\sin l\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda)$$
$$+2\sin\lambda\sin\Lambda\cos\lambda\sin l\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)-\cos\lambda\sin l\sin\psi\Big\},$$

$$z'=\frac{r'}{\sin\Delta}\Big\{-\cos\lambda\cos(L-l)\sin(\Lambda-\lambda)-2\cos^2\lambda\sin\Lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)-\sin\lambda\sin\psi\Big\}$$

à quoi il faut joindre l'équation auxiliaire

$$\sin^2\psi=\sin(\Delta+L-l)\sin(\Delta-L+l)-\cos^2(L-l)\sin^2(\Lambda-\lambda)$$
$$+4\sin\lambda\sin\Lambda\cos(\Lambda-\lambda)\cos(L-l)\sin^2\tfrac{1}{2}(L-l)+4\sin^2\lambda\sin^2\Lambda\sin^4\tfrac{1}{2}(L-l).$$

Les trois valeurs de x' y' z' étant élevées au carré, doivent satisfaire à la relation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

et l'on peut aisément vérifier que cette condition est remplie par les expressions précédentes. Ainsi, quand on aura calculé les valeurs numériques de x', y' z', on pourra se servir de cette relation pour les vérifier. Ces expressions qui sont générales et rigoureuses, paraissent aussi les plus simples qu'il soit possible d'obtenir, car les termes qui les composent, ne comportent aucune réduction algébrique entre eux.

Supposons maintenant que l'on ait ainsi calculé trois positions sélénocentriques d'une même tache. Puisque cette tache se meut sur un plan parallèle à l'équateur lunaire, l'équation de ce parallèle sera, en général, de la forme

$$z = ax + by + D.$$

mais les coefficiens a et b ne seront pas constans comme lorsqu'il s'agissait des taches du soleil dont l'axe de rotation reste constamment parallèle à lui-même; ils seront variables avec le tems. Car la trace du plan de la tache sur l'écliptique devant toujours rester parallèle à la trace de l'équateur lunaire, doit avoir, comme elle, un mouvement rétrograde égal au mouvement moyen des nœuds de l'orbite. Pour exprimer cette circonstance, cherchons l'équation de la trace du parallèle sur l'écliptique.

Rappelons nous qu'en désignant par I l'inclinaison d'un plan fixe, et par N la longitude de son nœud ascendant pareillement supposée fixe, on a (page 264)

$$a = -\tang I \sin N, \quad b = +\tang I \cos N.$$

En supposant que ces valeurs soient celles qui conviennent à la position du parallèle pour une certaine époque, elles ne conviendront plus à une autre époque, car la longitude N aura changé dans l'intervalle d'une quantité mesurée par le mouvement rétrograde du nœud. Soit donc m ce mouvement pour l'unité de tems, par exemple, pour un jour, et soit t le tems aussi compté en jours à partir de l'époque où la longitude du nœud était N; l'expression de cette longitude à une autre époque postérieure à la première d'un nombre t

de jours sera $N - mt$; et par conséquent, les valeurs générales de A et de B seront

$$a = -\tang I \sin\{N - mt\}, \quad b = +\tang I \cos\{N - mt\}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation du parallèle, elle devient

$$z = -x \tang I \sin(N - mt) + y \tang I \cos\{N - mt\} + D;$$

ou, en développant $\sin(N - mt)$ et $\cos(N - mt)$,

$$z = -\{x\cos mt - y\sin mt\}\tang I\sin N + \{x\sin mt + y\cos mt\}\tang I\cos N + D.$$

Maintenant, les inconnues relatives à l'époque prise pour origine, sont en évidence, et si l'on fait, pour abréger,

$$A = -\tang I \sin N, \quad B = +\tang I \cos N,$$

on aura

$$z = A\{x\cos mt - y\sin mt\} + B\{x\sin mt + y\cos mt\} + D;$$

les trois inconnues A, B, D, entreront donc dans ces équations d'une manière linéaire. Chaque position observée de la tache déterminant z, x, y et t, donne une relation numérique entre les inconnues; et trois positions suffiront pour déterminer complètement leurs valeurs; quand on les connaîtra, on aura

$$\tang I = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tang N = -\frac{A}{B}.$$

On aura donc ainsi la valeur de l'inclinaison du parallèle et la longitude de son nœud à l'époque que l'on aura prise pour origine des tems, et ces quantités seront les mêmes pour l'équateur lunaire, à cause du parallélisme.

L'équation de condition entre A et B est tout-à-fait analogue à celle que nous avons trouvée pour les taches du soleil; elle n'en diffère que par l'introduction du tems t; mais comme ces tems sont des quantités connues, il n'en résultera de différence que dans les valeurs numériques des coefficiens, et tout ce que nous avons dit sur l'usage de cette équation, en traitant des taches du soleil, s'applique également à la lune. On pourra de même faire concourir un grand nombre d'observations à la détermination de A et de B, ainsi que nous l'avons fait alors, et leur ensemble donnera ces quantités avec toute l'exactitude que l'on peut attendre des observations.

CHAPITRE XIV.

Des Éclipses en général.

78. NOUS voici arrivés à des phénomènes qui ont été pendant longtems l'objet de la frayeur des hommes, et qui, par le progrès des lumières, n'excitent plus que leur intérêt et leur curiosité.

Je décrirai d'abord les phénomènes généraux que les éclipses présentent ; nous déterminerons ensuite les circonstances dans lesquelles elles peuvent arriver ; enfin, je donnerai les moyens de les prédire.

Considérons d'abord les éclipses de lune. La terre étant un corps opaque éclairé par le soleil, projète au loin derrière elle une ombre dans l'espace. Quand la lune entre dans cette ombre, elle ne reçoit plus la lumière du soleil, et doit par conséquent s'éclipser.

79. Si, par les bords opposés du disque du soleil, on conçoit des lignes droites qui rasent la surface terrestre, comme AB, $A'B'$, voy. *fig.* 5, ces lignes représenteront la limite de l'ombre, et comme le soleil est beaucoup plus gros que la terre, elles se croiseront derrière la terre, de sorte que l'ombre aura la figure d'un cône circulaire si la terre est sphérique, elliptique, si elle a la forme d'un ellipsoïde.

Ainsi, lorsque la lune entre dans cette ombre, et qu'une partie de son disque est encore éclairée par le soleil, cette partie n'est par terminée par une ligne droite, elle a la forme d'un croissant lumineux dont la concavité est tournée vers l'ombre. La même chose arrive quand la lune commence à sortir de l'obscurité.

80. Lorsque la lune approche de l'ombre terrestre, elle ne s'éclipse pas subitement, mais sa lumière s'affaiblit peu-à-peu, et ce n'est qu'après avoir passé par ces dégradations successives que l'obscurité est la plus intense. Pour concevoir ce phénomène, il faut faire attention qu'un corps opaque placé entre un objet et le soleil, peut ne lui cacher cet astre qu'en partie; alors l'objet est moins éclairé que s'il recevait toute la lumière du soleil; il l'est plus que s'il en était totalement privé; il existe donc une teinte intermédiaire entre la lumière et l'*ombre pure*. C'est ce qu'on nomme la *pénombre*. Tel est l'effet que la lune éprouve en approchant de l'ombre terrestre.

Pour trouver les limites de la pénombre, concevez deux droites $A'B$, AB', qui rasent aussi la surface de la terre et du soleil, mais qui les touchent de dehors en dedans, de manière à se croiser entre ces deux corps, ainsi que le représente la *fig.* 6. Les angles EBC, $E'B'C$ détermineront l'espace compris par la pénombre; car d'un point, situé au-delà de ces limites, on appercevrait le soleil tout entier; mais d'un point L qui leur serait intérieur, on ne verrait que la partie AL' du disque de cet astre. Cette portion visible diminue depuis la ligne EB jusqu'à la ligne CB, où elle devient tout-à-fait nulle; et par conséquent l'intensité de la pénombre va en croissant depuis la première limite où elle commence, jusqu'à la seconde, où elle se confond avec l'ombre pure. Ceci explique la progression d'obscurité que présente le disque de la lune quand elle s'éclipse.

81. Lorsque la lune est totalement éclipsée dans l'ombre de la terre, on ne la perd pas tout-à-fait de vue. Sa surface est encore faiblement éclairée d'une lumière rougeâtre, à-peu-près pareille à celle que renvoient les nuages après le coucher du soleil. Cette lumière est produite par les rayons solaires réfractés dans l'atmosphère terrestre, et infléchis derrière la terre. En effet, ceux de ces rayons qui n'ont pas été assez réfractés pour arriver à la surface de la terre, où ils s'absorberaient, continuent leur route dans l'atmosphère. Après qu'ils l'ont traversée, ils se replient derrière la terre comme au foyer d'une lentille. Si la lumière ainsi projetée derrière la terre, n'était pas en grande partie éteinte et absorbée par l'atmosphère, son effet serait très-considérable; car si l'on considère un des points lumineux du disque du soleil, ce point ne pourrait envoyer directement qu'un seul rayon à chaque point de l'espace; mais par l'intermède de l'atmosphère terrestre, il fait parvenir derrière la terre un cône de rayons lumineux. Le foyer où les rayons se réunissent, en reçoit ainsi un nombre beaucoup plus considérable que s'il était éclairé directement.

82. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des éclipses de lune. Les éclipses de soleil doivent se concevoir absolument de la même manière; car elles sont produites par le cône d'ombre que la lune projète derrière elle dans l'espace. Lorsque cette ombre atteint la surface de la terre, les points qu'elle recouvre sont privés de la vue du soleil et entrent dans une obscurité complète. Les points qui ne sont pas dans l'ombre pure, mais dans la pénombre ne perdent qu'en partie de vue le disque du soleil qui leur paraît échancré par l'interposition partielle

de la lune ; en un mot, toutes les considérations relatives aux éclipses de lune s'appliquent également aux éclipses de soleil quand on considère un observateur placé dans la lune, car ce que nous appelons des éclipses de soleil, ne serait que des éclipses de terre pour un observateur ainsi placé.

83. Cherchons maintenant les mesures précises de ces phénomènes, et calculons les circonstances dans lesquelles ils peuvent arriver.

La première chose à détermier dans cette recherche, c'est la longueur du cône d'ombre projeté derrière la terre, afin de voir s'il s'étend toujours jusqu'à l'orbe de la lune. Pour cela, nous ferons d'abord abstraction de l'atmosphère terrestre ; de plus nous supposerons que la figure de la terre soit sphérique.

Soit *fig.* 7 S le centre du soleil, T celui de la terre supposée sphérique, $A\,B$ la ligne droite tangente à la terre et au soleil, et qui forme la limite de l'ombre pure : $S\,T$ sera l'axe du cône d'ombre, et $T\,C$ est l'alongement de ce cône qu'il s'agit de déterminer. Pour cela il suffit de connaître l'angle TCB au sommet du cône. Or par les premiers principes de la géométrie, on trouve que cet angle est égal au demi-diamètre du soleil, moins sa parallaxe horisontale qui est $27'',1$, comme on l'a dit dans le premier livre pag. 271 (*).

(*) Menons TF parallèle à CB, et soit $TCB = STF = C$. Nous aurons $\sin C = \frac{SA \quad TB}{ST} = \sin\frac{D}{2} - \sin p$, D étant le diamètre apparent du soleil et p sa parallaxe horisontale ; d'où l'on voit qu'en substituant les arcs aux sinus, ce qui suffit pour de si petits angles, on a $C = \frac{D}{2} - p$.

D'après ce résultat, on aura facilement la longueur de CT; car dans le triangle CBT, rectangle en B, on connaît l'angle C et le côté TB, qui est le rayon de la terre.

On voit que la longueur du cône d'ombre doit varier avec le diamètre apparent du soleil, et par conséquent avec sa distance à la terre; en voici les valeurs pour la distance moyenne de cet astre, et pour les distances périgée et apogée (*).

(*) Soit D le diamètre apparent du soleil, p sa parallaxe horizontale, R le rayon. D'après ce qui vient d'être démontré dans le texte on aura

$$CT = \frac{R}{\sin\left\{\frac{D}{2} - p\right\}}:$$

relativement aux distances périgée, moyenne et apogée; les valeurs de D et de P sont les suivantes :

	D	p	$\frac{D}{2} - p$
Distance périgée	6035″,7	27″,6	2990″,3
Distance moyenne	5934″,3	27″,1	2940″,1
Distance apogée	5836″,3	26″,6	2890″,6

En calculant CT avec les valeurs, on trouvera les résultats rapportés dans le texte.

Distances du centre de la terre au sommet du cône d'ombre exprimées en rayons terrestres.

Soleil périgée	212,896
Soleil dans la moyenne distance	216,531
Soleil apogée.	220,238

84. La marche de ces valeurs montre que l'ombre s'alonge à mesure que le soleil s'éloigne. On a vu d'ailleurs que la plus grande distance de la lune à la terre n'est que de 63,94145 rayons terrestres, c'est-à-dire beaucoup moindre que les longueurs précédentes; ainsi l'ombre projetée par la terre dans l'espace, s'étend bien au-delà de l'orbe ~~l'ombre~~ de la lune. Par conséquent si cet astre se trouvait sur le plan même de l'écliptique, il traverserait cette ombre à chacune de ses révolutions, et il y aurait tous les mois une éclipse de lune.

85. On peut calculer de la même manière la longueur du cône d'ombre que la lune supposée sphérique projète derrière elle, il suffit d'employer pour le diamètre apparent du soleil et sa parallaxe les valeurs relatives à la surface de la lune. Il est facile de déduire ces valeurs de celles que nous venons d'employer; car d'abord le diamètre apparent du soleil vu de la lune sera égal au diamètre apparent du même astre, vu de la terre et augmenté dans le rapport des distances de la terre et de la lune au soleil. De même la parallaxe du soleil pour la lune est égale à la parallaxe du soleil pour la terre augmentée dans le rapport des distances, et diminuée dans le rapport des rayons de la lune et de la terre; avec ces réductions les formules que nous venons de trouver pour le soleil serviront également pour la lune, et on connaîtra les longueurs des cônes d'ombre qu'elle projète derrière elle

dans l'espace (*). C'est ainsi que l'on a calculé les résultats suivans qui se rapportent aux deux cas extrêmes dans

---

(*) Relativement à la lune, nommons R', D' et p' les quantités que nous avons nommées R, D. p, relativement à la terre, c'est-à-dire, le rayon de sa surface, le diamètre apparent du soleil et sa parallaxe horisontale. D'après la formule trouvée dans la note précédente, la longueur du cône d'ombre pure, projetée derrière la lune, aura pour valeur $\dfrac{R'}{\sin\left\{\dfrac{D'}{2} - p'\right\}}$; mais ce résultat ainsi présenté, se trouverait exprimé en parties du rayon lunaire R'. Pour l'avoir en parties du rayon terrestre, il faut le mettre sous la forme . . .

$$\frac{R\,.\left(\dfrac{R'}{R}\right)}{\sin\left\{\dfrac{D'}{2} - p'\right\}}.$$

Maintenant, si l'on nomme Δ et δ les distances du soleil et de la lune à la terre, on aura

$$D' = \frac{D\,.\,\Delta}{\Delta - \delta},\ p' = p\,\frac{R'}{R}\,.\,\frac{\Delta}{\Delta - \delta},$$

par conséquent

$$\frac{D'}{2} - p' = \left\{\frac{D}{2} - p\,\frac{R'}{R}\right\}\frac{\Delta}{\Delta - \delta};$$

or, puisque p est la parallaxe horisontale du soleil pour la terre, on a $\sin p = \dfrac{R}{\Delta}$, par conséquent $\Delta = \dfrac{R}{\sin p}$; de même, en nommant P la parallaxe horisontale de la lune, on aura . . . . . $\delta = \dfrac{R}{\sin P}$, de là on tire $\dfrac{\Delta}{\Delta - \delta} = \dfrac{\sin P}{\sin P - \sin p}$, ou simplement $\dfrac{\Delta}{\Delta - \delta} = \dfrac{P}{P - p}$, car on peut, sans craindre d'erreur, substituer les rapports de ces petits arcs à celui de leurs sinus.

lesquels la longueur du cône est la plus grande ou la plus petite comparativement à la distance à la terre.

	LONGUEUR du cône.	DISTANCE de la lune à la terre.
Soleil apogée. Parallaxe *maximum*...	59.730	55.902
Soleil périgée. Parallaxe *minimum*...	57.760	63.862

Dans le premier cas l'ombre de la lune atteindra le centre

Avec ces réductions, la longueur du cône d'ombre projetée derrière la lune aura pour expression

$$\frac{R \cdot \left(\frac{R'}{R}\right)}{\sin\left\{\frac{D}{2} - \frac{pR'}{R}\right\} \frac{P}{P-p}} \quad \ldots \ldots (1)$$

D'après ce que l'on a vu dans la page 364, on a $\frac{R'}{R} = 0{,}27293$; on a ensuite, dans les circonstances extrêmes que nous avons considérées dans le texte

	D	p	P
Soleil apogée. Parallaxe *maximum*.	5836″,3	26″,6	1°.1386
Soleil périgée. Parallaxe *minimum*.	6035″,7	27″,6	0°.9972

En substituant ces données dans la formule (1), on aura les valeurs rapportées dans le texte. Quant aux distances correspondantes de la lune, exprimées en rayons terrestres, on les déduit de la formule $\delta = \frac{R}{\sin P}$.

de la terre et même le dépassera; dans le second, elle n'atteindra pas même sa surface. Ainsi, quand même la lune se mouvrait dans le plan de l'écliptique, elle ne produirait pas toujours en passant devant le soleil une obscurité totale en quelque point de la terre : car les variations de sa distance s'y opposent. Son effet se bornerait alors à cacher une partie du disque du soleil.

86. Pour calculer la grandeur des éclipses de lune et leur durée, il est nécessaire de connaître le diamètre de l'ombre terrestre à l'endroit où elle est traversée par l'orbe de la lune. C'est ce qui est très-facile; car soit *fig.* 6 LL', cette orbite supposée circulaire, le demi-diamètre apparent de l'ombre vue de la terre à cette distance a pour mesure l'angle LTC qui est lui-même égal à la différence des angles TCL, TLA. L'angle TLA est le demi-diamètre apparent de la terre vue de la lune; ou en d'autres termes, c'est la parallaxe horisontale de la lune à l'instant de l'éclipse. Quant à l'angle TCL, on vient de voir qu'il est égal au demi-diamètre apparent du soleil, moins la parallaxe de cet astre. Ces deux angles étant connus, l'angle LTC, ou le demi-diamètre de l'ombre, le sera également. Pour le trouver, il suffit d'ajouter la parallaxe du soleil à la parallaxe de la lune, et de retrancher de la somme le demi-diamètre apparent du soleil (*).

En calculant sa valeur d'après celle que nous avons trouvée précédemment pour la plus grande parallaxe

(*) D'après cette règle, en nommant p la parallaxe du soleil, P celle de la lune, et D le diamètre apparent du soleil, on aura

$$\text{Demi-diamètre de l'ombre pure} = P + p - \frac{D}{2}.$$

de la lune, pour la moyenne et la plus petite, on aura le tableau suivant :

Diamètre de l'ombre terrestre à la distance de la lune.

Soleil périgée.	lune apogée	13963″,9
	lune dans sa moyenne distance.	15377 ,5
	lune périgée	16791 ,1
Soleil dans sa distance moyenne.	lune apogée	14064 ,4
	lune dans sa moyenne distance.	15478 ,0
	lune périgée	16891 ,6
Soleil apogée.	lune apogée	14161 ,4
	lune dans sa moyenne distance.	15575 ,0
	lune périgée	16988 ,6

Le plus grand diamètre apparent de la lune n'étant que de 6207″, on voit qu'il peut toujours être compris et enveloppé dans l'ombre terrestre, qui l'excède même de beaucoup. Ainsi toutes les fois que la lune traverse le centre de cette même ombre, elle doit être entièrement éclipsée.

Le diamètre que nous venons de calculer est celui de l'ombre projetée par la masse opaque de la terre. Il paraît que les couches inférieures de l'atmosphère absorbent aussi assez de lumière pour porter une ombre sensible, car le diamètre apparent de l'ombre qui se déduit des observations est toujours un peu plus grand que celui que nous venons de calculer. On évalue ordinairement cette différence à 0°,0310, et c'est ce que les instans de l'entrée et de la sortie de la lune dans l'ombre paraissent indiquer avec plus de vraisemblance ; mais cette évaluation n'est qu'empirique. On sent même que le plus ou moins de pureté et de transparence des couches inférieures de l'atmosphère doit y produire accidentellement des variations considérables ; enfin on sent que cette ombre portée par l'atmosphère doit aller en se dégradant du centre à la circonférence comme la densité de l'atmosphère elle-même, et cette dégradation jointe à celle de la pénombre doit empêcher que le contour de l'ombre projetée sur la lune soit jamais bien terminé. Quant au tems que la lune demeure dans l'ombre, il dépend de la différence de son diamètre à celui de l'ombre, et de la manière dont elle la traverse en vertu de son mouvement horaire. Nous reviendrons plus loin sur cette détermination.

A parler rigoureusement, la terre n'étant pas sphérique son ombre ne peut pas être circulaire ; elle doit être elliptique si la forme de la terre est celle d'un ellipsoïde, et par conséquent sa largeur projetée sur la lune ne doit pas être la même dans tous les sens. Mais la limite de l'ombre pure dans les éclipses de lune n'est pas assez bien tranchée pour que l'on puisse apprécier la différence de ses axes par l'observation.

87. Si l'on veut calculer de la même manière le demi-diamètre de l'ombre lunaire à la distance de la terre, il n'y a qu'à substituer aux données dont nous venons de faire usage, celles qui conviendraient à un observateur placé dans la lune. Ainsi le demi-diamètre de l'ombre lunaire, pour cet observateur, serait égal à la parallaxe du soleil, relative à la lune, plus la parallaxe de la terre, moins le demi-diamètre apparent du soleil vu de la lune. La parallaxe de la terre n'est autre chose que le demi-diamètre apparent de la lune vu de la terre. On a donc par ce qui précède toutes les données dont on a besoin. La formule se simplifie lorsque l'on néglige la parallaxe du soleil qui n'a sur le résultat qu'une

influence presque insensible, puisqu'elle n'y produit pas une demi-seconde. *Alors le demi-diamètre de l'ombre lunaire est égal à l'excès du demi-diamètre apparent de la lune sur le demi-diamètre apparent du soleil* (*).

Si l'on fait le calcul dans les circonstances les plus favo-

(*) En conservant les dénominations dont nous avons fait usage dans la note précédente, la parallaxe lunaire du soleil sera...... $p\,\frac{R'}{R}\cdot\frac{P}{P-p}$. Le diamètre apparent du soleil vu du même point sera $D\,.\,\frac{P}{P-p}$. Ainsi, en nommant D'' le diamètre apparent de la lune vu de la terre, on aura

Demi-diamètre de l'ombre lunaire vu de la lune

$$=\frac{D''}{2}+\frac{pR'}{R}\cdot\frac{P}{P-p}-\frac{DP}{2\cdot(P-p)};$$

cette expression se simplifiera, si l'on se rappelle qu'en divisant le demi-diamètre apparent d'un astre par sa parallaxe horisontale on a le rapport de son rayon au rayon de la terre, proportion qui a été démontrée page 253 du I[er]. livre. En appliquant ce résultat à la lune, on aura donc $\frac{R'}{R}=\frac{D''}{2P}$. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{R'}{R}$ dans la formule précédente, on trouvera, après quelques réductions,

$$\text{demi-diam. de l'ombre lunaire vu de la lune}=\frac{D''-D}{2}\cdot\frac{P}{P-p}.$$

Suivant les données dont nous avons fait usage, on a

$$\frac{D''}{2}=3104'',\ \frac{D}{2}=2918'',15\,,\ P=1^\circ,13858\,,\ p=26'',6\,,$$

ce qui donne

rables à la longueur de l'ombre qui sont celles où le soleil est apogée et la lune périgée dans sa plus petite distance, on trouve que le demi-diamètre de l'ombre lunaire vu de la lune est égal à 186″; le demi-diamètre apparent de la terre à cette même distance est égal à la parallaxe horisontale de la lune au même instant, c'est-à-dire à 1°,13858. Ainsi dans ces circonstances qui sont les plus favorables, la longueur de l'ombre lunaire est à celle du disque de la terre, comme 186 est à 11386, ou comme 1 à 61,2, c'est-à-dire qu'elle ne couvre pas la soixante et deuxième partie de la largeur de l'hémisphère terrestre. On conçoit que dans des circonstances moins favorables la largeur de l'ombre serait moindre encore; elle deviendrait nulle si le diamètre apparent de la lune vu de la surface de la terre, était justement égal au diamètre apparent du soleil, et négative s'il était plus grand. Dans le premier cas, la pointe du cône d'ombre atteindrait seule l'observateur placé sur la terre; dans le second, elle ne parviendrait pas jusqu'à lui.

Mais elle pourrait atteindre encore d'autres observateurs situés différemment sur le globe terrestre; car en raison de

---

$$\frac{D''-D}{2} = 185'',35\,, \quad \text{et} \quad \frac{P}{P-p} = 1,002336\,;$$

par conséquent

$$\left(\frac{D''-D}{2}\right)\frac{P}{P-p} = 185'',78\,;$$

c'est la valeur que nous avons donnée dans le texte. Le demi-diamètre apparent D'' se trouve, en multipliant la parallaxe P par le rapport constant 0,2762 qui est presque égal à $\frac{1}{11}$. On voit que le demi-diamètre de l'ombre devient négatif quand D surpasse D'', d'où il suit qu'il ne peut pas y avoir d'éclipse avec obscurité totale si le diamètre apparent de la lune *ne surpasse pas celui du soleil.*

cette situation même, ils se trouvent plus ou moins éloignés de la lune. Ceux qui la voient à l'horison, par exemple, en sont plus éloignés d'environ $\frac{1}{60}$, que ceux qui la voient au zénith, le diamètre apparent de la lune sera donc aussi plus petit de $\frac{1}{60}$ pour les premiers que pour les derniers; et comme l'effet de ces différentes positions est insensible sur le diamètre apparent du soleil à cause de l'énorme distance de cet astre, il s'ensuit que pour les uns le diamètre apparent de la lune pourra être moindre que celui du soleil, tandis que les autres le verront plus grand. Les premiers ne seront pas atteints par le cône d'ombre, les seconds y seront plongés. On voit donc qu'à ces limites la position de l'observateur devient fort importante, puisqu'elle peut le faire entrer dans l'ombre ou l'en faire sortir par le seul changement de la parallaxe de hauteur : nous reviendrons plus loin sur ces considérations. Pour le moment nous nous bornerons à remarquer que le plus petit diamètre apparent du soleil étant de 5836'',3, et celui de la lune dans la moyenne distance étant de 5797'', plus petit que le précédent, il ne peut déja pas y avoir d'obscurité totale à cette limite, et à plus forte raison il n'y en aura jamais quand la lune sera au-delà de sa moyenne distance à la terre. Nous voyons de plus qu'à cause du peu de largeur de l'ombre lunaire, il n'y a jamais qu'une très-petite portion de l'hémisphère terrestre qui puisse se trouver plonger dans cette ombre; que souvent même l'ombre n'atteint pas la terre, et que par cette double raison les éclipses de soleil doivent être dans chaque lieu beaucoup plus rares que les éclipses de lune, ce que l'expérience confirme.

88. Jusqu'ici nous n'avons considéré que l'ombre pure; déterminons maintenant la limite de la pénombre. Soit AB', *fig.* 7, une droite tangente aux bords opposés de la lune et du soleil, LL' représentant l'orbe de la lune, l'angle

$L'TC$ sera la distance de la pénombre à l'axe CT. Or cet angle étant extérieur au triangle $C'TL'$, est égal à lasomme des deux intérieurs $TL'C'$, $TC'L'$ qui lui sont opposés. Le premier de ceux-ci est la parallaxe horisontale de la lune; le second est égal à $C'AT + C'TA$, c'est-à-dire à la parallaxe du soleil plus au demi-diamètre de cet astre vu de la terre; par conséquent l'angle CTL' ou le rayon extérieur de la pénombre terrestre, est égal à la somme des parallaxes du soleil et de la lune, plus le demi-diamètre apparent du soleil (*).

En retranchant de ce résultat le demi-diamètre de l'ombre pure, on aura la largeur de la pénombre. Ce demi-diamètre est égal à somme des parallaxes du soleil et de la lune moins le demi- diamètre apparent du soleil; par conséquent, la largeur de la pénombre est exactement égale au diamètre apparent du soleil.

89. Si nous voulons calculer par les mêmes principes la largeur de la pénombre projetée par la lune sur la terre dans les éclipses de soleil, rien n'est plus facile; il n'y a qu'à substituer dans les considérations précédentes les données relatives à la lune, aux données relatives à la terre. Par ce moyen le rayon extérieur de cette pénombre, sera égal à la somme des parallaxes du soleil et

---

(*) Ainsi en nommant, comme dans la note précédente, P la parallaxe de la lune, p celle du soleil, D le diamètre apparent du soleil à l'instant de l'éclipse, on aura

Dist. du centre de l'ombre pure à l'extr. de la pénomb. $= P + p + \frac{D}{2}$;

nous avons eu tout-à-l'heure

Demi-diamètre de l'ombre pure . . . . $= P + p - \frac{D}{2}$.

Différence de ces valeurs ou largeur de la pénombre $= D$.

de la terre, augmentées du demi-diamètre apparent du soleil : ces diamètres et ces parallaxes étant supposés calculés pour la lune (*). Si l'on veut négliger la parallaxe du soleil, la formule se simplifie, et le rayon extérieur de la pénombre lunaire vue de la lune devient égal à la

---

(*) En conservant toujours nos précédentes dénominations, le demi-diamètre de la pénombre lunaire vu de la lune sera

$\frac{D'}{2} + \frac{pR'}{R} \cdot \frac{P}{P-p} + \frac{D \cdot P}{2(P-p)}$, et comme $\frac{R'}{R} = \frac{D''}{2P}$, les deux premiers termes se réduiront à $\frac{D'' \cdot P}{2(P-p)}$, de sorte que l'on aura

$$\text{demi-diam. de la pénomb. lun. vue de la lune} = \frac{(D''+D)}{2} \cdot \frac{P}{P-p};$$

nous avons trouvé tout-à-l'heure

$$\text{Demi-diam. de l'ombre lunaire vue de la lune} = \frac{(D''-D)}{2} \frac{P}{(P-p)};$$

retranchant ces expressions l'une de l'autre, on aura la largeur de la pénombre lunaire $= \frac{D \cdot P}{P-p}$,

dans le cas où le soleil est apogée et la lune périgée dans sa plus courte distance, on a, comme on l'a vu tout-à-l'heure

$$\frac{D''}{2} = 3104'', \quad \frac{D}{2} = 2918,15, \quad p = 26'',6, \quad P = 1^{\circ},13558,$$

de là on tire

$$\frac{(D''+D)P}{2(P-p)} = 6035'',74.$$

Le demi-diamètre apparent de la terre vu de la lune est, dans les mêmes circonstances, 11385, puisqu'il est représenté par la parallaxe horisontale de la lune ; ainsi, dans les circonstances les plus favorables, la pénombre lunaire couvre un peu plus de la moitié du disque de la terre.

somme des demi-diamètres apparens du soleil et de la lune vus de la terre. Il faut ajouter à cette somme 14″ pour avoir égard à la parallaxe du soleil. Quant à la largeur totale de la pénombre lunaire vue de la lune, elle est égale au diamètre apparent du soleil vu aussi de la lune, c'est-à-dire à ce diamètre vu de la terre et augmenté à fort peu près de 14″ à cause du rapprochement.

90. Dans ce qui précède, nous n'avons point eu égard aux réfractions que les rayons du soleil subissent en traversant l'atmosphère de la terre. Il faut maintenant déterminer les changemens que cette atmosphère apporte dans les résultats que nous venons d'obtenir.

Lorsqu'on fait abstraction de l'atmosphère, la limite de l'ombre pure est déterminée par le rayon qui touche les bords extérieurs de la terre et du soleil. L'intersection de ce rayon avec la ligne des centres, est alors le sommet de l'ombre. Mais si l'on a égard à l'atmosphère, les choses ne se passent plus de la même manière. Le rayon lumineux venu du bord extérieur du soleil tangentiellement à la terre ne reste pas rectiligne; il se courbe en entrant dans l'atmosphère, et à sa sortie il se replie derrière la terre, de manière à couper l'axe de l'ombre beaucoup plus près de la terre, et par ce moyen le sommet de l'ombre pure est moins éloigné. Considérons dans la *fig.* 8 un pareil rayon venu du bord A du soleil, et touchant la terre quelque part en B. Si S est le centre du soleil, T celui de la terre, le rayon réfracté ira couper la ligne ST quelque part en O, mais toujours plus loin de T qu'il n'aurait fait s'il fût resté rectiligne. Considérons maintenant un autre point du disque du soleil tel que A'. Parmi tous les rayons lumineux émanés de ce point, il y en aura pareillement un qui ira s'engager dans l'atmosphère de la terre, de manière à aller toucher sa surface dans un point B' différent de B. Après se recourbant derrière la terre, il ira couper l'axe de l'ombre quelque part en O' dans un point plus éloigné de la terre que le point O. Comme on peut en dire autant de tous les points du disque, il s'ensuit que tous ces points, même l'autre extrémité A''' du diamètre, enverront par réfraction des rayons lumineux de l'autre côté de la terre à des distances inégales, de manière à repartir toute l'image du disque depuis O jusqu'en O''', de même qu'une lentille de verre disperse les images des objets en les transmettant par réfraction.

Les choses étant dans cet état, s'il arrivait qu'un observateur fût placé en O, ou un peu au-delà de ce point sur la ligne TO''', il est clair qu'il ne serait pas tout-à-fait dans l'ombre; car il commencerait à voir par réfraction le bord extérieur A du soleil, qui lui paraîtrait entourer la circonférence du disque de la terre comme un anneau lumineux. S'il s'éloignait davantage, par exemple, en O', il verrait, de cette manière, les rayons venus du point A'; mais en outre il verrait aussi tout l'intervalle $A'A$, non plus, à la vérité, par des rayons tangens à la surface de la terre, mais par des rayons qui passeraient plus haut dans l'atmosphère. S'il s'éloignait davantage, l'anneau lumineux augmenterait de largeur. Enfin en se plaçant au point O'' sur le rayon venu du bord inférieur du disque, il verrait le disque entier du soleil autour de la surface de la terre. Arrivé à cette limite, et l'observateur s'éloignant encore, il ne pourra plus recevoir de rayons lumineux tangens à la terre, puisque le centre du soleil est supposé finir en A''', mais il en recevrait de pareils des points du ciel, situés au-dessous de A''' dans la figure; par conséquent l'anneau lumineux s'éloignerait de la circonférence de la terre, et serait remplacée par l'azur du ciel. Jusqu'ici l'observateur est supposée dans le cône d'ombre pure, et par conséquent toutes les portions du disque du soleil qui lui deviennent visibles, ne pouvant l'être que par réfraction, seront totalement concentrées dans l'espace occupé par l'atmosphère de la terre. Mais à une plus grande distance encore, l'observateur sortant tout-à-fait du cône d'ombre pure, formé par les rayons extérieurs, il commencerait à voir le bord du soleil directement et sans réfraction, tandis que les rayons qui lui arriveraient de l'intérieur du disque, traverseraient encore l'atmosphère, et seraient encore réfractés.

91. Il est très-facile de déterminer exactement ces diverses limites. Pour cela considérons, *fig.* 9, un rayon SB parti du bord du soleil, et rasant la surface terrestre. La courbe décrite par ce rayon autour de la surface de la terre, supposée sphérique, sera symétrique de part et d'autre de cette surface; et si sa direction est ST lorsqu'il entre dans l'atmosphère, et $T'O$ lorsqu'il en sort, les angles BTI, $BT'I$ formés par ces directions avec la tangente TT', seront égaux entre deux. Or, l'angle BTI ou DTS est à fort peu près égal à DBS, ou à la réfraction horisontale, parce que le point I étant fort peu élevé au-dessus du point B; les lignes SI, SB menées de ces deux points au soleil sont presque parallèles (*). Ainsi l'angle $BT'I$ est aussi à fort peu près égal à la réfraction horisontale; par conséquent, l'angle SIt', qui exprime l'inflexion du rayon, est égal à BTI, plus $BT'I$, ou au double de cette même réfraction.

(*) Nous avons donné la démonstration de cette proposition dans la note 4 du Ier. livre, page 429.

92. On peut donc regarder l'effet de l'atmosphère comme augmentant de cette quantité le demi-diamètre apparent du soleil ; car une fois sortis de l'atmosphère, les rayons lumineux continuent leur marche en ligne droite, de même que s'ils avaient été lancés primitivement dans cette direction ; et le rayon *SBO*, par exemple, émané du bord supérieur *S* du vrai soleil, arrive en *O* sur l'axe, comme s'il venait du bord supérieur d'un soleil fictif dont le demi-diamètre excéderait le véritable d'une quantité égale à l'angle *t'IS*. On voit donc que, pour trouver la distance du sommet du cône d'ombre pure au centre de la terre, en ayant égard à la force réfringente de l'atmosphère, il suffit d'augmenter le demi-diamètre du soleil du double de la réfraction horisontale, et l'on pourra, avec cette seule correction, employer les formules que nous avons trouvées plus haut. Si, au lieu de considérer le rayon *SB* comme venant du bord extérieur du soleil, on le suppose parti d'un point quelconque du disque de cet astre, situé à une distance connue de son centre ; en substituant cette distance au demi-diamètre du soleil, on aura l'éloignement de la terre auquel cette partie du soleil commence à paraître. On connaîtra ainsi successivement les zônes qui deviennent visibles pour chaque éloignement (*).

(*) Si l'on désigne par r la réfraction horisontale en conservant toutes les autres dénominations dont nous avons fait jusqu'à présent usage, on aura

$$\text{Dist. du somm. de l'omb. au centre de la terre} = \frac{R}{\sin\left\{\frac{D}{2}+2r-p\right\}};$$

c'est la formule de la page 432, où l'on a substitué $\frac{D}{2}+2r$ à la place de $\frac{D}{2}$. On aura de plus

C'est ainsi que l'on a calculé la table suivante, où les distances sont exprimées en rayons terrertres.

	☉ Périgée.	☉ Dist. moyen	☉ Apogée.
Limbe du ☉ commence à paraître.........	42,228	42,013	41,842
Un quart du ☉ à la circonf. de la terre.....	46,674	46,502	46,408
Moitié du disqu du ☉ à la circ. de la terre..	52,236	52,2[illegible]6	52,235
Trois quarts du disq. du ☉ à la circ. de la t..	59,316	59,820	60,317
Disque entier du ☉ à la surface de la terre..	68,285	69,125	69,645
Azur du ciel égal au quart du disque du ☉, entre le ☉ et la circonférence de la terre..	81,499	82,144	82,898
Azur du ciel égal à la moitié du disque du ☉, entre le ☉ et la circonférence de la terre.	100,190	101,560	102,980
Azur du ciel égal aux trois quarts du disque du ☉, entre le ☉ et la circonf. de la terre...	130,140	131,570	132,840
Bord extérieur du ☉ commence à être visible directement.......................	185,490	192,570	198,200

La plus petite distance de la lune à la terre, est de 55,916, comme nous l'avons vu pag. 362. Ainsi, dans les circonstances les plus défavorables, même au centre

---

Rayon extérieur de la pénombre....... $P + p + \frac{D}{2} + 2r$,

Demi-diamètre de l'ombre pure à la distance de la lune

$$= P + p - \frac{D}{2} - 2r.$$

Si l'on veut entendre par $\frac{D}{2}$ la distance d'un point quelconque du disque du soleil à son centre, on trouvera, par la première formule, de l'ombre, un observateur placé dans la lune verrait encore, par réfraction, les trois quarts du disque du soleil, à travers l'atmosphère de la terre. On ne doit donc pas s'étonner si la lune, dans les éclipses, paraît colorée d'une lumière rougeâtre; elle nous paraîtrait bien plus lumineuse, si l'action absorbante de l'atmosphère n'affaiblissait pas cette lumière dans une énorme proportion.

93. Jusqu'ici nous avons supposé la lune placée exac-

---

la distance où ce point commence à être vu. Ainsi, en faisant $\frac{D}{2} = 0$, on aura la distance où le centre du soleil commence à paraître par réfraction à la surface de la terre; on fera ensuite $\frac{D}{2}$ négatif pour avoir les points opposés du disque. Au bord opposé on fera

$$\frac{D}{2} = -\tfrac{1}{2}\text{ diamètre apparent du soleil},$$

et ensuite en laissant toujours $\frac{D}{2}$ négatif, on le fera plus grand que ce demi-diamètre. On aura ainsi la distance où les points situés au-delà du disque deviennent visibles par des rayons tangens à la surface de la terre. C'est de cette manière que l'on a calculé la table rapportée dans le texte; elle est tirée de l'ouvrage de Dionis du Séjour, sur les Mouvemens célestes, pag. 661.

Si l'on veut savoir quelle est la partie du disque du soleil qui serait ainsi visible par réfraction, pour un observateur placé dans la lune à une distance donnée de la terre, il n'y aurait qu'à calculer la valeur de la parallaxe P pour cette distance, et ensuite égaler à zéro le demi-diamètre de l'ombre, c'est-à-dire, faire

$$P + p - \frac{D}{2} - 2r = 0, \quad \text{ce qui donne } \frac{D}{2} = P + p - 2r$$

Cette valeur de $\frac{D}{2}$ étant soustraite du demi-diamètre apparent du soleil, le reste sera la portion visible.

tement dans l'axe de l'ombre terrestre. Elle se trouverait effectivement sur cet axe dans chaque position, si elle se mouvait sur l'écliptique ; mais comme elle s'élève tantôt au-dessus de ce plan, et tantôt s'abaisse au-dessous, à cause de l'inclinaison de son orbite, il peut arriver qu'elle n'entre qu'en partie dans l'ombre de la terre, ou qu'elle l'effleure seulement par son bord, ou enfin qu'elle passe tout-à-fait au-dehors sans l'atteindre. Dans le premier cas, l'éclipse est *partielle ;* dans le second, elle prend le nom d'*appulse*. On appelle éclipses *totales* celles où la lune se plonge toute entière dans l'ombre, et *centrales* celles où son centre coïncide avec l'axe même du cône. Nous déterminerons bientôt, par le calcul, les circonstances dans lesquelles ces divers phénomènes peuvent arriver.

94. De même, dans les éclipses de soleil, on distingue les éclipses *partielles*, lorsque la lune cache seulement une partie du disque du soleil ; les *éclipses totales*, lorsque la lune cache entièrement le disque ; les *appulses*, lorsqu'elle le touche. On appelle aussi éclipses *annulaires*, celles où la lune se projète entièrement sur le disque du soleil, qui la déborde de toutes parts, comme un anneau lumineux. Enfin on appelle éclipses *centrales*, celles dans lesquelles l'observateur se trouve au centre de l'ombre, sur la ligne qui joint les centres de la lune et du soleil.

D'après ce que nous avons vu plus haut, sur le peu de largeur de l'ombre lunaire comparativement au disque terrestre, il est évident que les éclipses totales de soleil ne peuvent être que locales et de peu de durée, tandis que les éclipses de lune sont universelles pour tous les points de l'hémisphère terrestre qui ont la lune sur l'horison au moment de l'éclipse, et peuvent à cause de la grandeur de l'ombre terrestre, durer beaucoup plus longtems.

95. Les éclipses totales de soleil sont extrêmement remarquables par les ténèbres qui les accompagnent, et qu'elles portent successivement sur tous les points de la terre où l'ombre de la lune peut atteindre, précisément comme on voit l'ombre d'un nuage, emporté par les vents, parcourir les montagnes et les plaines, et leur dérober, pour quelques instans, la lumière du soleil.

L'obscurité qui accompagne les éclipses, est très-profonde; elle le paraît encore plus à des yeux qui sortent de la clarté du jour; aussi remplit-elle les animaux de frayeur. Le ciel paraît tout-à-coup comme dans une nuit obscure; les étoiles se montrent dans tout leur éclat, et l'on apperçoit autour de la lune une sorte d'auréole pâle et blanchâtre, que l'on croit être la lumière zodiacale, ou l'atmosphère du soleil. Cette obscurité peut durer cinq minutes dans les circonstances les plus favorables (*). Le premier rayon du soleil qui s'échappe, la dissipe, en s'élançant comme un trait.

(*) Cette proposition sera prouvée plus bas par le calcul.

CHAPITRE XV.

Manière de calculer les circonstances des Éclipses de Lune.

96. Nous allons maintenant montrer comment on peut déterminer, par le calcul, toutes les circonstances des éclipses. Nous commencerons par les éclipses de lune, qui, étant indépendantes des parallaxes, sont beaucoup plus faciles que les éclipses de soleil.

Supposons qu'à l'instant de l'opposition, le point T, *fig.* 10, représente le centre de l'ombre terrestre. Soit ET l'écliptique, TP le cercle de latitude sur lequel la conjonction arrive; désignons par L le centre de la lune qui se trouve alors sur ce cercle; et enfin soit LN son orbite inclinée à l'écliptique. En vertu du mouvement du soleil dans l'écliptique, le centre de l'ombre terrestre, toujours diamétralement opposée à cet astre, se meut comme lui et avec la même vitesse, d'occident en orient, c'est-à-dire, de N vers E. Pendant ce tems, le centre de la lune se meut aussi, d'occident en orient, sur son orbite, c'est-à-dire de N vers E'. Les vitesses de ces deux mouvemens sont données par les tables astronomiques. Il s'agit de déterminer, d'après ces données, l'instant où les deux cercles, qui représentent la lune et l'ombre, se rencontreront soit avant la conjonction, soit après.

Cette recherche se simplifie beaucoup, en considérant que la distance apparente des centres de la lune et de l'ombre, pendant la durée de l'éclipse, étant nécessairement fort petite, peut être considérée comme rectiligne, et que l'on peut regarder aussi les différences de longitude et de latitude de ces centres, comme de petites lignes droites parallèles ou perpendiculaires à l'écliptique ; de sorte que le mouvement des deux centres peut être censé rapporté à des coordonnées rectangulaires x et z, les premières prises sur l'écliptique NE, les secondes sur le cercle de latitude qui passe à chaque instant par le centre de l'ombre.

La durée des éclipses de lune est toujours assez courte pour que le mouvement du soleil, et par conséquent celui de l'ombre dans l'écliptique, pendant l'intervalle, puisse être considéré comme uniforme. On peut considérer aussi comme uniformes les mouvemens de la lune en longitude et en latitude, au moins dans une première approximation. Avec ces modifications, le problême n'offre aucune difficulté.

97. En effet, soient T', L' deux positions simultanées de l'ombre sur l'écliptique et de la lune sur son orbite, à un instant quelconque avant ou après l'opposition. Puisque l'on connaît les vîtesses de la lune et de l'ombre tant en longitude qu'en latitude, on aura aussi pour ce même instant les valeurs de $T'P'$ et $P'L'$, qui expriment les mouvemens relatifs du centre de la lune par rapport au centre de l'ombre. La somme des carrés de ces lignes donnera le carré de $L'T'$, c'est-à-dire, de la distance des centres, car le triangle $L'P'T'$ est rectangle en P'. D'après la valeur de cette distance on connaîtra si l'éclipse est commencée ou non ; et en formant l'expression analytique de cette valeur pour un tems quelconque, il est facile de déterminer l'instant précis de

chacune des phases de l'éclipse. Il suffit pour cela de résoudre une équation du second degré.

Ces résultats n'ont lieu qu'en supposant les mouvemens du soleil et de la lune uniformes. Si l'on veut atteindre la dernière exactitude, il faut ne les regarder que comme une première approximation. Puisque l'on connaît ainsi à très-peu-près l'instant de chaque phase, on prendra cet instant pour origine des tems, et ayant calculé par les tables astronomiques les mouvemens du soleil et de la lune qui y correspondent, on recommencera le calcul de la phase avec ces nouvelles données; et l'on trouvera ainsi la correction qu'il faut faire à l'époque déterminée par la première approximation. Cette fois le résultat aura toute l'exactitude desirable, parce que la supposition de l'uniformité des mouvemens horaires ne portera que sur un très-petit intervalle de tems. En opérant ainsi successivement pour chaque phase, on connaîtra très-exactement toutes les circonstances de l'éclipse, eu égard à la variabilité des mouvemens de la lune et du soleil.

Je dois ajouter aussi que pour diminuer l'extrême incertitude que présentent les différentes phases d'une éclipse de lune, les astronomes observent successivement l'entrée et la sortie des différentes taches dans l'ombre. Ces taches étant bien connues de tous les observateurs, et leur position sur le disque lunaire étant fixe, les époques moyennes entre leur immersion et leur émersion répond au milieu de l'éclipse, et l'observation de ces phénomènes concourt à déterminer cet instant avec plus de précision.

Dans tout ceci on fait abstraction du mouvement diurne du ciel, qui, entraînant simultanément et d'un mouvement égal, le soleil, la lune, le plan de l'écliptique et tous les cercles célestes, ne change nullement les positions respectives de ces astres entre eux. Ce mouvement n'a d'autre effet que de présenter successivement l'éclipse à diverses portions du globe terrestre; il n'influe que sur la possibilité de la voir, mais non pas sur son existence.

NOTE.

Soit m' le mouvement horaire du soleil en longitude à l'instant de l'opposition, tel que le donnent les tables astronomiques. Ce sera aussi le mouvement horaire du centre de l'ombre, et par conséquent après un tems quelconque t, compté en heures et en fractions d'heure, à partir de l'opposition, la distance du centre de l'ombre au point T' où la conjonction arrive sera exprimée généralement par $m't$, ce tems devant être supposé négatif pour les époques antérieures; de même, si l'on nomme m, n les mouvemens horaires de la lune en longitude et en latitude à partir de la même époque, le déplacement de cet astre après le tems t, parallèlement à l'écliptique, sera exprimé par mt; et parallèlement au cercle de latitude par nt; de sorte qu'en nommant λ la latitude du centre de la lune à l'instant de l'opposition, les deux coordonnées de ce centre, pour un tems quelconque t, seront exprimées par mt et $\lambda + nt$. Comme les mouvemens propres de la lune et du soleil en longitude, sont toujours dirigés d'occident en orient, ils auront tous deux le même signe; nous les regarderons comme positifs. Mais il n'en est pas de même de n, nous le supposerons positif quand il rapprochera la lune du pôle boréal de l'écliptique, et négatif quand il l'en éloignera. De même, nous supposerons λ positif pour les latitudes boréales, négatif pour les latitudes australes; ces quantités, avec leurs signes, seront données par les tables astronomiques de la lune et du soleil.

m, n

Cela posé, si l'on représente par c la distance des centres de l'ombre et de la lune à un instant quelconque, c sera l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés seront $mt - m't$, ou la différence des mouvemens en longitude; et $\lambda + nt$, c'est-à-dire la latitude de la lune. On aura donc à cet instant

$$\{m - m'\}^2 t^2 + \{\lambda + nt\}^2 = c^2.$$

Maintenant, si l'on veut regarder t comme inconnue dans cette équation, il n'y a qu'à se donner arbitrairement c, ou la distance des centres, et la résolution de l'équation fera connaître la valeur correspondante de t. On connaîtra donc ainsi les époques de toutes les circonstances de l'éclipse que l'on voudra calculer.

Si l'on développe le second terme de cette équation pour la résoudre en général, elle devient

$$\left\{(m - m')^2 + n^2\right\} t^2 + 2\lambda\, nt = c^2 - \lambda^2,$$

et elle est bien facile à résoudre; mais elle se simplifiera encore si l'on y introduit un angle auxiliaire α, tel qu'on ait

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{n}{m - m'},$$

car en éliminant $m - m'$ elle devient

$$n^2 t^2 + 2\lambda\, n \sin^2\alpha . t = (c^2 - \lambda^2) \sin^2\alpha,$$

qui étant résolue, donne pour t ces deux valeurs très-simples

$$t = \frac{-\lambda \sin^2\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{c^2 - \lambda^2 \cos^2\alpha}}{n}.$$

Il n'y a plus maintenant qu'à mettre pour c les différentes valeurs qui conviennent au commencement ou à la fin de l'éclipse, ou à telle autre phase que l'on voudra choisir, et si cette phase est possible il y aura toujours deux époques où elle aura lieu, puisque notre équation nous a donné deux valeurs de t pour chaque valeur de c.

Déterminons ces valeurs de c pour les principales phases de l'éclipse. D'abord, quand le disque de la lune entrera dans la pénombre ou s'en dégagera, la distance des centres sera égale à la somme des demi-diamètres de la pénombre et de la lune. Or en appelant D le diamètre apparent du soleil, D'' celui de la lune, p et P les parallaxes horisontales de ces deux astres, le rayon extérieur de la pénombre est $\frac{D}{2} + P + p$ suivant ce que l'on a vu dans le § 88, en n'ayant point égard à la faible lumière transmise par la réfraction de l'atmosphère. On aura donc

Disque de la lune tang. extér. à la pénombre... $c = \frac{D''+D}{2} + P + p$.

Quand le disque de la lune sera entré tout-à-fait dans la pénombre, ou sera sur le point d'en sortir, la distance des centres sera égale au rayon extérieur de la pénombre, moins le demi-diamètre apparent de la lune; on aura donc alors

Disque de la lune tang. intér. à la pénombre . $c = \frac{D-D''}{2} + P + p$.

Quand le disque de la lune entrera dans l'ombre pure ou s'en dégagera, la distance des centres sera égale à la somme des demi-diamètres de la lune et de l'ombre. Ce dernier est égal à $P + p - \frac{D}{2}$ suivant ce que nous avons trouvé plus haut, on aura donc alors

Disque de la lune tang. extér. à l'ombre pure... $c = \frac{D''-D}{2} + P + p$,

c'est l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse. On aura de même

Disque de la lune tang. intér. à l'ombre pure $c = -\frac{(D''+D)}{2} + P + p$.

Chacune de ces phases, si elle est possible, donnera deux valeurs de t; mais si quelqu'une de ces valeurs se trouvait imaginaire, il en faudrait conclure que la phase dont il s'agit est impossible. Si les deux valeurs de t sont égales, ce qui a lieu quand le radical devient nul, la phase ne dure qu'un instant : par exemple, si cela arrive ainsi pour la valeur $c = \frac{D''-D}{2} + P + p$ qui a lieu quand le disque de la lune est tangent extérieurement à l'ombre pure, il faut en conclure que le disque ne fait que toucher l'ombre sans y entrer. Il n'y a donc pas d'éclipse proprement dite, mais simplement une appulse.

Une époque intéressante à déterminer, c'est celle du milieu de l'éclipse; cette époque a évidemment lieu quand les deux valeurs correspondantes de t sont égales entre elles, c'est-à-dire, quand le radical s'évanouit; car, prenez deux phases correspondante quelconques, par exemple, l'entrée et la sortie de l'ombre pure, la milieu sera toujours cette partie de t qui est indépendante du radical. On aura donc alors

Milieu de l'éclipse $t = -\frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n}$, dist. des centres $c = \lambda \cos \alpha$.

Je dis aussi que cet instant est celui où la distance des centres est la plus petite, par conséquent *celui de la plus grande phase*; en effet, considérons une autre époque éloignée de celle-ci de t'' en plus ou en moins, en sorte qu'on ait généralement

$$t = -\frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n} + t'', \quad \text{par conséquent } t + \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n} = t'';$$

si l'on substitue cette valeur dans notre équation en t, elle devient

$$t'' = \pm \frac{\sin \alpha}{n} \sqrt{c^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha}, \text{ par conséquent } c^2 = \frac{n^2}{\sin^2 \alpha} t''^2 + \lambda^2 \cos^2 \alpha.$$

Le terme affecté de t'' étant toujours positif, il augmente toujours la valeur de c. Celle-ci est donc la plus petite possible quand $t'' = 0$, ce qui donne $c^2 = \lambda^2 \cos^2 \alpha$; c'est la valeur que nous avons trouvée pour le milieu de l'éclipse; on en tire $c = \lambda \cos \alpha$, car les seules valeurs positives de c sont admisibles, parce que la distance des centres ne peut pas devenir négative par la nature du problème.

Puisque l'on connaît la plus courte distance des centres, il est bien facile de trouver l'étendue de la partie éclipsée de la lune, à cet instant, étendue qui donne la mesure de la plus grande phase. A la plus courte distance des centres $\lambda \cos \alpha$, ajoutez le demi-diamètre apparent de la lune, ou $\frac{D''}{2}$, vous aurez la distance du bord extérieur de la lune au centre de l'ombre qui sera $\frac{D''}{2} + \lambda \cos \alpha$; si de cette quantité vous retranchez le demi-diamètre de l'ombre pure, c'est-à-dire, $P + p - \frac{D}{2}$, vous aurez la portion du diamètre de la lune qui n'est point éclipsée. Ce sera $\frac{(D'' + D)}{2} + \lambda \cos \alpha - P - p$. Si cette quantité est positive, en la retranchant du diamètre apparent D'' vous aurez $\frac{D'' - D}{2} + P + p - \lambda \cos \alpha$, pour la partie éclipsée du disque lunaire, portion que les astronomes ont coutume de convertir en douzièmes de ce diamètre ; et ils nomment improprement ces douzièmes des *doigts*. Si la quantité $\frac{D'' + D}{2} + \lambda \cos \alpha - P - p$, expression de la partie non éclipsée, est nulle, cela indique que l'éclipse est totale à l'instant de la plus grande phase ; mais si cette expression est négative, elle indique que l'éclipse est plus que totale, et elle exprime la quantité dont l'ombre déborde le disque lunaire.

Enfin, si l'on veut connaître la durée totale de l'éclipse, il n'y a qu'à chercher l'instant où la lune est entrée dans l'ombre pure, celui où elle en est sortie, et retrancher cette seconde époque de la première, on aura ainsi

$$\text{Durée de l'éclipse}\ldots\ldots = 2\,\frac{\sin\alpha}{n}\sqrt{c^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}\,,$$

dans cette expression, il faudra mettre pour c la valeur qui convient aux instans de l'entrée et de la sortie, c'est-à-dire $c = \frac{D'' - D}{2} + P + p$.

Quoiqu'il soit presque superflu, après ce qui précède, de donner un calcul numérique d'éclipse de lune, cependant, pour ne rien laisser à desirer, je prendrai pour exemple l'éclipse de lune du 17 mars 1764, qui a été calculée par Lalande, dans son Astronomie. Je rapporterai d'abord les élémens de la lune et du soleil en mesures sexagésimales, tels qu'ils sont donnés par les tables astronomiques pour cette époque. On avait alors, suivant les calculs de Lalande

Epoque de l'opposition le 18 mars 1764, à $0^h.6'.12''$, tems solaire à Paris, compté de minuit.

Lat. de la lune à l'inst. de l'opposition	$\lambda = +38'.42''$	boréale.
Mouv. horaire de la lune en latitude.	$n = -\ 3'.26''$	la lune s'éloigne du pôle boréal de l'écliptique.
Mouv. horaire de la lune en longit.. .	$m = 37'.23''$	
Mouv. horaire du soleil en longitude.	$m' = 2'.29''$	
Diamètre apparent de la lune	$D'' = 33'.18''$	
Sa parallaxe horis. corresp. à ce diam.	$P = 61'.\ 0''$	

Diamètre apparent du soleil........ $D = 32'.10''$

Sa parallaxe horisontale........... $p = 0'.9''$.

Avec ces données, on trouve d'abord

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{n}{m - m'} = -\frac{206''}{2094},$$

d'où l'on déduit, par les tables trigonométriques

$$\alpha = -5^\circ.37'.7''.$$

J'observe que $m - m'$ est toujours positif, parce que la lune va toujours plus vîte que le soleil.

On trouve ensuite le tems du milieu de l'éclipse

$$t = -\frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n} = +0^h.108047;$$

ou en le convertissant en minutes et secondes

$$t = +6'.29'',$$

Cette valeur de t étant positive doit être ajoutée à l'époque de l'opposition, c'est-à-dire, $0^h.6'.12''$ le 18 mars; on aura donc ainsi

Milieu de l'éclipse le 18 mars 1764 à $0^h.12'.41''$.

La distance des centres à cet instant, qui est aussi celui de la plus grande phase est . . . . $\lambda \cos \alpha = 38'.31''$;

Ajoutez le demi-diamètre apparent de la lune $16'.39''$, vous aurez la distance du bord extérieur de la lune au centre de l'ombre . . . . $55'.10''$;

Le demi-diamètre de l'ombre est $P + p - \frac{D}{2}$, ou plutôt $P + p - \frac{D}{2} + 1'.40''$, afin de tenir compte de l'ombre portée par l'atmosphère; ce demi-diamètre sera donc. . . . . $46'.44''$;

En le retranchant de $55'.10''$ on aura : largeur de la partie non éclipsée de la lune . . . $8'.26''$;

L'éclipse n'est donc pas totale. Prenons le complément de cette quantité à D', nous aurons :
diamètre de la partie éclipsée de la lune. . . . $24'.52''$;

ou en *doigts* $12^d.\dfrac{24'.52''}{33'.18''} = 12^d.\dfrac{1492''}{1998''} = 8$ doigts et $\dfrac{96}{100}$.

Il faut encore calculer la distance des centres à l'instant de l'entrée dans l'ombre et de la sortie, afin d'en déduire les époques de ces phénomènes. Cette distance sera $c = \dfrac{D'' - D}{2} + P + p$,

ou plutôt $c = \dfrac{D'' - D}{2} + P + p + 1'.40''$, en ayant égard à l'ombre portée par l'atmosphère terrestre. On aura ainsi $c = 63'.23''$, et de là on tire les deux valeurs de t relatives à ces deux instans qui seront

Instant de l'entrée dans l'ombre $t' = +0^h.108047 - 1^h.43546 = -1^h.19'.39''$,
Instant de la sortie. . . . . $t'' = +0^h.108047 + 1^h.43546 = +1^h.32'.37''$,
Durée totale de l'éclipse. . . . . . $t'' - t' = 2.1^h.435460 = 2^h.52'.16''$.

La valeur de t' étant négative et celle de t'' positive, l'éclipse commence avant l'opposition et finit après. L'instant absolu du commencement est le 18 mars 1764, à $0^h.6'.12''$, instant de l'opposition moins la valeur de t', c'est-à-dire, le 17 mars, à $22^h.46'.33''$, tems solaire à Paris compté de minuit, et la fin arrive le 18 mars 1764, à [illegible].12″, instant de l'opposition, plus la valeur de t'', c'est-à-dire le [illegible] mars, à $1^h.38'.49''$, le tems étant toujours compté de minuit.

D'après ces valeurs, on voit que le commencement et la fin de l'éclipse ont dû arriver dans le tems que la lune était au-dessus de l'horison de Paris. L'éclipse toute entière a donc été visible dans cette ville; mais elle ne l'était pas dans l'hémisphère opposé: c'est en cela seulement que le mouvement diurne du soleil ou de la terre a de l'influence dans les éclipses de lune. Il ne fait qu'amener cet astre et l'ombre sous des méridiens différens.

On voit que le calcul de tous ces phénomènes se fait directement sans avoir besoin de figures qui retracent la situation des deux astres, et uniquement en observant les règles des signes algébriques. Cependant tous ces résultats pourraient se représenter aussi par des constructions géométriques assez simples ; et comme les astronomes en ont fait souvent usage, je crois devoir en dire un mot, en ne les donnant toutefois que comme une représentation des formules, et non comme un moyen de trouver graphiquement les valeurs des inconnues, ce qui se fait par le calcul avec infiniment plus de précision, de promptitude et de facilité.

A l'inspection de l'équation fondamentale

$$\left\{(m - m')^2 + n^2\right\} t^2 + 2\lambda\, nt = c^2 - \lambda^2,$$

on voit que la valeur de t serait la *même* si l'on supposait l'ombre de la *terre* immobile sur le plan de l'écliptique, pourvu que l'on donnât au centre de la lune un mouvement en longitude égal à $m - m'$, c'est-à-dire, à l'excès de son mouvement en longitude sur celui de l'ombre de la terre. En effet, il est sensible que c'est uniquement en vertu de ce mouvement *relatif* que la lune s'éloigne ou s'approche de l'ombre. Alors le centre de l'ombre restera immobile à l'origine des coordonnées, par exemple, au point où l'opposition arrive, mais le centre de la lune se déplacera en vertu de son mouvement en latitude n et de son mouvement relatif $m - m'$ en longitude, de façon que pour un tems quelconque t, compté à partir de l'opposition, ses coordonnées seront $\lambda + nt$ et $(m - m')\, t$. On voit donc que ce centre décrit encore une orbite plane dont l'inclinaison sur l'écliptique a pour tangente trigonométrique $\frac{n}{m - m'}$, au lieu que l'inclinaison de l'orbite vraie sur le même plan, a pour tangente trigonométrique $\frac{n}{m}$. Cette inclinaison de l'orbite fictive, que les astronomes on appelée *l'orbite relative* de la lune, est donc précisément égale à l'angle α que nous avons introduit plus haut dans nos formules, et qui les a heureusement simplifiées. D'après cela, *si l'on veut construire graphiquement les résultats de nos formules*, il n'y a qu'à placer le centre de l'ombre immobile en T sur l'écliptique EN, *voy. fig.* 11. TL sera le cercle de latitude sur lequel l'opposition arrive, on y placera le centre de la lune à une hauteur au-dessus ou au-dessous de l'écliptique exprimée par la latitude λ, puis on tracera l'orbite relative LN', *faisant* l'angle α avec l'écliptique. Si du *centre* T de l'ombre on mène une perpendiculaire TL' sur cette orbite, TL' sera la plus courte distance des centres ou $\lambda \cos \alpha$. Si des points T et L' comme centres, on décrit deux circonférences de cercles, la première avec un rayon égal au rayon apparent de l'ombre terrestre, la seconde avec un rayon égal au demi-diamètre apparent de la lune, ces deux cercles, en se pénétrant, représenteront l'effet et la grandeur de la plus grande phase. De même, en prenant sur l'orbite relative deux points L'', L''', dont la distance au centre de l'ombre soit la même et égale à........ $\frac{D'-D}{2} + P + p$, ce seront les lieux des deux centres de la lune lorsqu'elle est tangente à l'ombre terrestre; et ainsi de suite, on représentera graphiquement toutes les phases de l'éclipse; mais, comme je l'ai déja fait observer, cette construction n'est bonne tout au plus qu'à les rendre sensibles, et ne vaudrait rien pour les déterminer numériquement.

Je ne crois pas nécessaire de donner ici l'application numérique de la méthode que j'ai indiquée dans le texte pour corriger par un second calcul la supposition de l'uniformité des mouvemens horaires. Outre que cette application n'a aucune difficulté, l'observation des phases d'une éclipse de lune n'est jamais assez exacte pour qu'il soit nécessaire de tenir compte de cette correction. Si je l'ai indiquée dans le texte, c'est afin d'exposer tout de suite le procédé entier d'une manière complète. Car ce procédé nous servira dans le calcul des éclipses de soleil, et d'étoiles dont l'observation comporte une exactitude beaucoup plus grande. Je remarquerai seulement que dans ce cas général, l'instant du milieu de l'éclipse ne répond plus nécessairement à la plus grande phase. L'époque où celle-ci arrive est déterminée par la condition que la ligne menée du centre de l'ombre à l'orbite relative de la lune, soit la plus courte possible; mais cette orbite n'étant plus rectiligne, quand on considère les mouvemens horaires comme variables, ce point de perpendicularité, n'est plus intermédiaire, au moins en général, entre ceux de l'entrée et de la sortie.

CHAPITRE XVI.

Manière de calculer les circonstances générales des Éclipses de Soleil.

98. Les premières questions que l'on peut se proposer relativement aux éclipses de soleil, c'est d'abord de déterminer s'il y aura éclipse dans quelque lieu de la terre ; ensuite quelle sera la durée de l'éclipse, son étendue ; enfin quelles seront les heures du commencement et de la fin de l'éclipse.

Ces questions n'ont aucune difficulté, si nous voulons considérer les éclipses de soleil comme des éclipses de terre, relativement à un observateur placé dans la lune. Alors il s'agira de déterminer, pour un instant quelconque, la distance apparente du centre du disque terrestre au centre de l'ombre lunaire ; et d'après les diamètres connus de la terre et de l'ombre, on calculera les instans où leurs disques se pénétreront. Ce problême est donc absolument de la même nature que celui des éclipses de lune vues de la terre ; aussi en suivant une marche exactement semblable, serons-nous conduits à des formules toutes pareilles, ou plutôt ce seront les même formules qui nous serviront; il n'y aura de différence que dans la construction graphique qui devra nous représenter le centre de la lune comme le centre des rayons visuels.

Soient donc, *fig.* 12, à un instant quelconque, T le centre de la terre, L celui de la lune, S celui du soleil, et considérons le triangle rectiligne TSL formé par ces trois points dans l'espace. Si l'on prolonge le côté SL de ce triangle qui va du soleil à la lune, ce sera l'axe de l'ombre lunaire, et l'angle OLT formé par ce prolongement, avec le rayon visuel LT mené de la lune à la terre, sera la distance apparente du centre de la terre au centre de l'ombre; distance qu'il s'agit de déterminer. Or, cela est très-facile, car le triangle SLT lui seul fournit toutes les données dont on a besoin, puisque l'on y connaît les deux côtés ST, LT, distances du soleil et de la lune à la terre, avec l'angle en T qui est la distance apparente de ces deux astres vus de la terre; distance qui s'exprime aisément d'après leurs différences de longitude et de latitude, comme nous l'avons fait dans les éclipses de lune. On a donc ainsi pour un instant quelconque, l'expression de la distance apparente du centre de l'ombre au centre du disque terrestre vu de la lune; en égalant cette expression aux diverses valeurs de cette distance qui conviennent aux différentes phases de l'éclipse, et prenant le tems pour inconnue, on pourra déterminer les époques où ces phases arriveront.

99. Dans tout ceci, nous n'avons point égard au mouvement diurne du ciel. Mais il est évident que la considération en serait inutile; car ce mouvement étant commun au soleil, à la lune et à tous les cercles célestes, ne change rien à leurs positions respectives qui sont ici les seules que nous ayons à considérer. Ici, comme dans les éclipses de lune, le mouvement diurne du ciel n'a d'autre effet que de présenter successivement l'éclipse à divers côtés du globe terrestre. Ou bien si l'on veut attribuer le mouvement diurne à la terre, supposition qui satisfait également aux phénomènes, et même qui y satis-

fait d'une manière infiniment plus simple, ce mouvement fera tourner l'observateur sur son parallèle et lui présentera successivement l'éclipse à diverses hauteurs sur l'horison du lieu où il est placé. Cette rotation pourra même lui donner ou lui ôter la possibilité de voir l'éclipse en l'amenant sur l'hémisphère où elle est visible ou en l'entraînant dans l'hémisphère opposé. Elle pourra encore y influer d'une autre manière, en rapprochant l'observateur du centre de la lune ou l'en éloignant, par le changement de la parallaxe de hauteur. Mais toutes ces variations qui compliquent le problême quand on veut considérer un point physique et déterminé de la terre, ne font rien quand on considère la terre en général.

100. Au reste, il existe un moyen très-simple de lever ces difficultés, c'est de raisonner par rapport à un point quelconque de la surface terrestre, comme nous l'avons fait tout-à-l'heure, relativement à son centre. Seulement il faudra employer dans le calcul les données propres à ces nouvelles circonstances, c'est-à-dire les élémens apparens des deux astres vus du point assigné au lieu des élémens vrais vus du centre de la terre. Et comme ces deux genres de données ne diffèrent que par les valeurs des parallaxes de longitude, de latitude, de déclinaison et d'ascension droite, que nous avons appris à calculer, on conçoit que quand on connaîtra les instans des différentes phases de l'éclipse pour le centre de la terre, on pourra calculer les corrections qu'il faudra leur appliquer en vertu des parallaxes, pour les ramener à la surface. On trouvera dans les notes les méthodes les plus simples d'atteindre le but, ainsi que tous les développemens des calculs indiqués.

101. Si nous examinons aussi, d'une manière générale

la marche de l'ombre ou de la pénombre lunaire sur le disque terrestre, nous verrons qu'elle doit aller, relativement à nous, d'occident en orient, dans le sens du mouvement propre de la lune ; car cet astre allant plus vîte que le soleil, dans son mouvement angulaire autour de la terre, son ombre doit le suivre et marcher avec lui dans le même sens. Ainsi un observateur placé dans la lune et regardant la terre s'éclipser, verrait d'abord l'éclipse commencer sur les parties les plus occidentales du disque, et finir par les plus orientales. Pour nous qui sommes placés sur la terre, le disque de la lune nous paraît traverser celui du soleil en allant d'occident en orient, par l'excès de son mouvement relatif. C'est là tout ce qu'il y a de constant dans ce phénomène ; car la grandeur de la partie éclipsée et sa position sur le disque solaire, sont extrêmement variables par plusieurs causes que nous expliquerons dans le chapitre suivant.

NOTE.

Considérons d'abord le triangle SLT de la *fig.* 12 entre le soleil, la lune et la terre ; nommons S et T les deux angles en S et en T. L'angle TLO extérieur à ce triangle est la distance apparente du centre de la terre et de l'ombre, vue de la lune : nous la nommerons c. On aura donc d'abord

$$c = T + S \text{ ; par conséquent } S = c - T.$$

Maintenant, du point T, menons TO perpendiculaire à l'axe de l'ombre ; si nous considérons cette perpendiculaire dans le triangle STO, elle aura pour expression $ST \sin S$ ou $\delta' \sin S$, en nommant δ' la distance ST de la terre au soleil, mais si nous la considérons dans le triangle LTO, elle aura pour expression..... $LT \sin c$ ou $\delta \sin c$ en nommant δ la distance de la terre à la lune.

Ces deux valeurs d'une même ligne devant être égales, on aura

$$\delta' \sin S = \delta \sin c \quad \text{ou} \quad \delta' \sin (c - T) = \delta \sin c.$$

On peut, au rapport $\frac{\delta'}{\delta}$ des distances, substituer le rapport inverse des parallaxes des deux astres ou $\frac{\sin p}{\sin p'}$ en nommant p celle de la lune, p' celle du soleil; on aura ainsi

$$(1) \qquad \sin p . \sin (c - T) = \sin p' . \sin c.$$

Cette équation est générale et rigoureuse; mais quand on en fait usage au moment de l'éclipse, l'angle T est toujours fort petit puisqu'il mesure la distance apparente des centres des deux astres dont les disques se pénètrent. On peut donc évaluer cette distance comme nous l'avons fait dans les éclipses de lune, en la regardant comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés seront les différences de longitude et de latitude des deux astres. Soient donc comme alors m et n les mouvemens horaires de la lune en longitude et en latitude, m' celui du soleil en longitude, λ la latitude de la lune à l'instant de la conjonction, et t le tems compté en heures à partir de cet instant; la différence des longitudes à l'instant t sera $(m - m')\, t$; la différence des latitudes sera $\lambda + nt$; on aura donc

$$(2) \qquad T^2 = (m - m')^2\, t^2 + (\lambda + nt)^2.$$

Cette valeur de T étant substituée dans l'équation (1), celle-ci déterminera c en fonction du tems t, c'est-à-dire qu'elle déterminera pour un instant quelconque la distance des centres de la terre et de l'ombre vue de la lune. Réciproquement, si l'on donne à cette distance les diverses valeurs qui correspondent aux phases de l'éclipse que l'on veut calculer, le tems t sera la seule inconnue de l'équation (1); tout se réduira donc à en extraire la valeur de t, et cette valeur fera connaître l'instant de la phase que l'on a considérée.

L'équation (1) pourrait donner la valeur de T en c d'une manière rigoureuse et fort élégante. Pour cela il suffit de remarquer qu'elle est parfaitement semblable à l'équation $\sin (z - 2nr) = \cos 2nR . \sin z$ que nous avons obtenue dans le I^{er}. livre, pag. 448, en traitant des réfractions. Ici z est représenté par c ; $2nr$ par T et cos $2nR$ par $\frac{\sin p'}{\sin p}$. Notre équation (1), dans le cas actuel, sera donc résoluble comme celle des réfractions, c'est-à-dire, qu'en prenant deux angles auxiliaires ω et u, tels qu'on ait

$$\cos \omega = \frac{\sin p'}{\sin p}; \quad \tan u = \sin \omega \tan c,$$

on aura

$$\tan \tfrac{1}{2} T = \tan \tfrac{1}{2} \omega \tan \tfrac{1}{2} u.$$

La valeur de T étant connue de cette manière en fonctions de c, on la mettrait dans l'équation (2) qui donnerait t par la résolution algébrique ; mais comme cette méthode ne peut avoir son application que dans des cas bien rares où l'on aurait besoin d'une précision extrême, il nous suffira de l'avoir indiquée, et nous procéderons au dégagement de T par des approximations dont l'erreur sera presque insensible ; ces approximations consistent à supposer les petits arcs p, p', c, $c - T$ proportionnels à leurs sinus : alors l'équation (1) devient

$$p\,(c - T) = p' \cdot c, \quad \text{et elle donne} \quad T = c \cdot \frac{p - p'}{p},$$

et cette valeur étant substituée dans l'équation (2), on a pour déterminer t

$$(m - m')\,t^2 + (\lambda + nt)^2 = c^2 \cdot \left(\frac{p - p'}{p}\right)^2,$$

formule absolument pareille à celle que nous avons trouvée pour les éclipses de lune ; il n'y a de différence qu'en ce que la distance apparente c des centres de la terre et de l'ombre lunaire s'y trouve multipliée par $\frac{p - p'}{p}$; mais ce même facteur en sens inverse se trouvera multiplier les distances apparentes des centres qui donnent les différentes phases, ainsi qu'on le verra tout-à-l'heure ; de sorte qu'en définitif, les conditions de ces phases, dans les éclipses de soleil, se détermineront exactement comme dans les éclipses de lune, et l'on pourra, si l'on veut, les représenter géométriquement de la même manière.

Par exemple, si l'on veut connaître l'instant où le disque terrestre entre dans la pénombre lunaire, c'est à-dire, le commencement et la fin de l'éclipse, il n'y a qu'à supposer que la distance apparente des centres de la pénombre et de la terre est égale à la somme de leurs demi-diamètres apparens vus de la lune. Le rayon extérieur de la pénombre lunaire est $\frac{(D''+D)}{2} \frac{p}{p-p'}$ comme on l'a trouvé précédemment; celui de la terre est égal à la parallaxe de la lune ou à p. On aura donc ainsi

$$\text{Disq. terr. tang. extér. à la pén. lun....}\; c = \frac{(D''+D)}{2} \frac{p}{p-p'} + p,$$

le tems t qui correspond à cette valeur de c donnera le commencement et la fin de l'éclipse.

La manière dont nous venons d'établir, dans ce cas, la distance apparente des centres vue de la lune pourrait bien ne pas paraître tout-à-fait rigoureuse. Car, si la ligne droite KMN, *fig.* 13, représente l'arête de la pénombre, tangente aux surfaces de la lune et de la terre, et que M soit le point de tangence, la ligne LT' menée du centre de la lune au point T' différera du rayon visuel LM' mené du même centre tangentiellement à la terre; ces deux lignes feront entre elles un petit angle $T'LM'$. Ainsi, quand l'éclipse commence, la distance apparente des centres vue de la lune, ou l'angle OLT est égal à la somme des trois angles OLT', $T'LM'$, $M'LT$: le premier est le demi-diamètre apparent de la pénombre vue du point L; le dernier est la parallaxe de la lune: nous les avons ajoutés ensemble pour avoir c. Mais nous avons négligé le petit angle $T'LM'$ qui, dans le fait doit être ajouté aux deux précédens; ainsi, pour ne rien laisser à desirer du côté de l'exactitude, il faut calculer ce petit angle, et voir s'il peut occasionner une erreur notable; or cette évaluation est très facile; car si, par les centres de la lune et de la terre, on mène les rayons LN, TM perpendiculaires à l'arête MN de la pénombre, il est facile de voir que la distance LT des deux astres est coupée en I en parties proportionnelles à ces rayons, de sorte qu'en nommant R celui de la terre, R' celui de la lune, et appelant δ la distance des centres de la lune et de la terre, on a $LI = \frac{R'\delta}{R+R'}$, par conséquent

$\dfrac{R'}{LI} = \dfrac{R + R'}{r} = \sin p + \sin\left(\dfrac{D''}{2}\right)$, p étant la parallaxe de la lune et D'' son diamètre apparent vu de la terre. Or, $\dfrac{R'}{LI}$ est aussi le sinus de l'angle LIN, et cet angle LIN lui-même étant extérieur au triangle LIT' est égal à la somme des deux intérieurs qui lui sont opposés, c'est-à-dire, à $IT'L + ILT' = \dfrac{D''}{2} + p + y$, en nommant y le petit angle $M'LT'$ dont nous voulons déterminer la valeur. On aura donc ainsi l'équation

$$\sin\left\{\frac{D''}{2} + p + y\right\} = \sin p + \sin . \frac{D''}{2},$$

ou en développant le premier membre, et mettant pour $\cos y$ sa valeur $1 - 2 \sin \frac{1}{2} y$

$$\cos\left(\frac{D''}{2}+p\right).\sin y - 2\sin\left(\frac{D''}{2}+p\right)\sin^2\tfrac{1}{2}y = \sin p + \sin.\frac{D''}{2} - \sin\left(\frac{D''}{2}+p\right)$$

en développant le terme $\sin\left(\dfrac{D''}{2} + p\right)$ dans le second membre, et se bornant à la première puissance de $\sin y$, on trouve

$$\sin y = 2\,\frac{\left\{\sin\dfrac{D''}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}p + \sin p\ .\ \sin^2\dfrac{D''}{4}\right\}}{\cos^2\left(\dfrac{D''}{2}+p\right)}.$$

Si l'on substitue, dans cette formule, les valeurs.............. $D'' = 29'.29''$; $p = 54'.1''$, valeurs que nous emploierons bientôt dans le calcul de l'éclipse de soleil de l'année 1764, et qui sont exprimées en mesures sexagésimales, on trouvera y égal à $\frac{14}{100}$ de seconde sexagésimale, quantité si petite, qu'à moins d'avoir besoin de la dernière exactitude, on peut se permettre de la négliger, et se borner à la condition que nous avons établie pour le commencement et la fin de l'éclipse.

Puisque l'équation qui détermine le tems des phases est de même forme que celle que nous avons obtenue pour les éclipses de lune, nous la traiterons de la même manière, et nous ferons usage des mêmes transformations. Il sera donc également commode d'introduire, dans le cas actuel, l'inclinaison de l'orbite relative, que nous avons employée dans les éclipses de lune. On fera donc comme alors

$$\tang \alpha = \frac{n}{m - m'},$$

et l'équation qui détermine t deviendra

$$n^2t^2 + 2\lambda n \sin^2 \alpha . t = \left\{ c^2 . \left(\frac{p - p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 \right\} \sin^2 \alpha;$$

en la résolvant de la même manière, elle donnera comme dans la page 457

$$t = \frac{-\lambda \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{c^2 \left(\frac{p-p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha}}{n}.$$

Il n'y a plus maintenant qu'à mettre, pour c, les différentes valeurs qui conviennent aux phases que l'on veut considérer; et les deux valeurs de t feront connaître les époques correspondantes où ces phases arriveront.

Par exemple, si l'on veut déterminer le tems du commencement et de la fin de l'éclipse, il n'y a qu'à, ainsi que nous l'avons déja dit, mettre pour c cette valeur... $c = \frac{(D'' + D)}{2}\left(\frac{p}{p - p'}\right) + p$, et les deux instans cherchés seront

$$t = \frac{-\lambda \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\left\{\frac{D'' + D}{2} + p - p'\right\}^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha}}{n}.$$

On prouvera, comme pour les éclipses de lune, que la plus grande phase de l'éclipse a lieu quand le radical s'évanouit, c'est-à-dire, quand on a

$$t = -\frac{\lambda \sin^2 \alpha}{n}, \quad c = \left(\frac{p}{p - p'}\right)\lambda \cos \alpha.$$

C'est aussi l'instant du milieu de l'éclipse; car cette valeur de t

est la demi-somme de celles qui conviennent au commencement et à la fin. On conclura la grandeur de l'éclipse comme on l'a fait pour les éclipses de lune, et on l'évaluera, si l'on veut, en doigts, suivant l'usage des astronomes. Le calcul est absolument le même que celui que nous avons fait alors, et cela doit être ainsi, puisque les formules sont identiquement semblables, à l'exception du facteur constant $\frac{p}{p-p'}$.

Jusqu'ici nous sommes partis de l'époque de la conjonction pour trouver les instans des différentes phases. Mais réciproquement si l'instant d'une de ces phases était donné, rien ne serait plus facile que d'en déduire l'époque de la conjonction. Il suffirait de retrancher de l'instant observé la valeur de t qui convient à cette phase, et qui est donnée par nos formules. Il faut faire beaucoup d'attention à ce résultat, car il est la base de la méthode qui sert à déterminer les longitudes des lieux et les corrections des tables de la lune par des observations d'éclipses.

Si l'on voulait connaître l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse pour un observateur qui serait placé au centre même de la terre, il n'y aurait qu'à considérer, qu'aux instans cherchés, la distance apparente des centres de la terre et de l'ombre, vue de la lune, doit égaler le demi-diamètre de la pénombre vu du même point; or, ce demi-diamètre est égal à $\left(\frac{D''+D}{2}\right)\cdot\frac{p}{p-p'}$. Telle est donc la valeur de c pour le cas dont il s'agit. En la substituant dans l'expression générale de t, elle devient

$$t=\frac{-\lambda\sin^2\alpha\pm\sin\alpha\sqrt{\left(\frac{D''+D}{2}\right)-\lambda^2\cos^2\alpha}}{n},$$

et les deux valeurs de t qu'elle donnera appartiennent aux instans cherchés. On aurait pu encore arriver à ces résultats d'une autre manière, en observant que relativement au centre de la terre, on a $p=0$, $p'=0$. Ainsi, en faisant ces suppositions dans les valeurs générales de t relatives au commencement et à la fin de l'éclipse, on aura les valeurs pour le centre de la terre, et ces valeurs seront

$$t = \frac{-\lambda \sin^2 \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{D'' + D}{2}\right)^2 - \lambda^2 \cos^2 \alpha}}{n},$$

c'est-à-dire, *précisément celles que nous venons de trouver.*

Je prendrai pour exemple l'éclipse de soleil qui eut lieu le premier avril 1764, et qui a servi de base au grand travail de Dionis-du-Séjour sur les éclipses. Comme il ne s'agit ici que d'un exemple de calcul, j'adopterai les élémens de la lune, qu'il a donnés dans son ouvrage, quoique l'on en pût trouver de plus exacts par les tables actuelles. Nous supposerons donc avec lui

Instant de la conjonction $10^h.31'.5''$, tems solaire apparent à Paris.

Latitude de la lune en conjonction........ $\lambda = +39'.32''$ boréale.

Mouvement horaire de la lune en latitude.. $n = + 2'.44''$ la lune se rapproche du pôle boréal de l'écliptique.

Mouvement horaire de la lune en longitude $m = +29'.39''$

Mouvement du soleil en longitude........ $m' = + 2'.27''.7$

Parallaxe horisontale du soleil........... $p' = 8''.8$

Parallaxe horis. de la lune en conjonction.. $p = 54'.1''.5$

Diamètre apparent de la lune............ $D'' = 29'.29''$

Diamètre apparent du soleil............. $D = 31'.52''$.

En mettant ces données dans notre formule, on trouvera

$$\alpha = 5^o.44'.27''.$$

Commencement $t' = -0^h,14478 - 2^h,73898 = -2^h,88376 = -2^h.53'.1''$,

Fin.......... $t'' = -0^h,14478 + 2^h,73898 = +2^h,59420 = 2^h.35'.39''$,

Milieu....... $t = -0^h,14478 = ... -0^h.8'.1''$.

Le commencement et le milieu de l'éclipse ont donc eu lieu avant la conjonction, la fin après. La distance apparente des centres de la terre et de l'ombre lunaire à l'instant de la plus grande phase.....

$\frac{p}{p - p'} . \lambda \cos \alpha = 39'.27''$; cette distance étant moindre que la parallaxe de la lune qui représente le demi-diamètre apparent de la terre vue de la lune, il s'ensuit que l'axe de l'ombre tombait à cet instant dans l'intérieur du disque terrestre. *L'éclipse était donc centrale* pour certains lieux, quoiqu'elle ne le fût point pour le centre de la terre; cependant, il n'y avait point d'obscurité totale, puisque le diamètre apparent du soleil surpasse celui de la lune. *L'éclipse était donc centrale et annulaire* dans certains lieux ; dans d'autres, elle était annulaire sans être centrale, il s'en est trouvé aussi qui ont dû la voir partielle sans être annulaire ni centrale; enfin il restait plus de la moitié du disque terrestre où on ne la voyait pas du tout, car le rayon de la pénombre $\frac{p}{p-p'} \cdot \frac{(D'+D)}{2} = 30' \,.\, 45''$ est moindre que la plus courte distance des centres $39'.27''$, de sorte que du côté même où l'ombre passe, il y a une portion du diamètre du disque égale à $8'.42''$ qui n'est point éclipsée. En retranchant cette portion, du demi-diamètre apparent de la terre $54'.1''.5$, il restera $45'.19,5$ pour la partie éclipsée, qui, divisée par la valeur du diamètre et réduite en doigts, deviendrait

$$12^d \cdot \frac{2719'',5}{6483.0} = 5 \text{ doigts et } \frac{3}{100}.$$

Il y aurait quelques modifications à faire à tous ces résultats si l'on voulait obtenir la dernière exactitude. Le mouvement horaire de la lune n'est pas rigoureusement constant comme nous l'avons supposé, la différence se fait déja sentir après des intervalles de tems peu considérables. De même la parallaxe de la lune et son diamètre apparent varient aussi, avec sa distance à la terre. Toutes ces quantités qui sont les élémens de nos calculs n'ont pas la même valeur au commencement de l'éclipse, au milieu et à la fin. Il faut donc avoir égard à leurs variations.

On pourrait d'abord y parvenir par interpolation; car, pendant un intervalle de quelques heures, le mouvement horaire de la lune, soit en latitude, soit en longitude, peut être représenté par une expression de la forme $a + bt + ct^2$, où abc désignent des nombres connus, et t, le tems exprimé en heures. Quant à la parallaxe et au demi-diamètre, leur expression générale serait encore plus facile, parce qu'ils ne varient que proportionnellement au tems : en formant donc ces expressions générales, et les substituant dans les valeurs de T et de c, au lieu de celles dont nous avons fait usage, on pourrait encore en tirer le tems par des approximations assez faciles ; mais il sera encore plus simple de regarder les résultats obtenus précédemment comme de premières données approchées qu'il faut rectifier ensuite.

Supposons, par exemple, que notre premier calcul ait indiqué la fin de l'éclipse à une époque t après la conjonction, et que l'on veuille déterminer cette époque avec toute l'exactitude possible, en ayant égard aux variations du mouvement horaire. On supposera que l'instant cherché ne diffère de t que d'une petite quantité t' : on calculera, pour l'instant t, par les tables astronomiques, la longitude l' du soleil, son mouvement horaire m', son diamètre apparent D, sa parallaxe p', la longitude l de la lune, sa latitude λ, ses mouvemens horaires m et n en longitude et en latitude, sa parallaxe p et son diamètre apparent D''. Alors, pour l'instant t' voisin du premier, la différence de longitude de la lune et du soleil sera $l - l' + (m - m')\, t'$, la différence des latitudes $\lambda + nt'$, par conséquent l'angle à la terre T, entre les centres du soleil et de la lune sera exprimé par l'hypothénuse du triangle rectangle formé par ces différences, c'est-à-dire que l'on aura

$$T^2 = \left\{l - l' + (m - m')\, t\right\}^2 + (\lambda + nt')^2.$$

Or, en nommant c la distance des centres de la terre et de l'ombre vue de la lune à un instant quelconque, nous avons trouvé

$$T = c\,\frac{(p - p')}{p},$$

on aura donc encore

$$\left\{l - l' + (m - m')\, t'\right\}^2 + \left\{\lambda + nt'\right\}^2 = c^2\left(\frac{p - p'}{p}\right)^2.$$

équation tout-à-fait analogue à celle que nous avons obtenue d'abord ; mais dans laquelle les élémens des deux astres sont relatifs à l'instant t' : en développant cette équation on aura

$$\left\{(m-m')^2+n^2\right\}t'^2+2\left\{\lambda n+(l-l')\,(m-m')\right\}t'=c^2\left(\frac{p-p'}{p}\right)^2-\lambda^2-(l-l')^2;$$

on la transformera de la même manière en introduisant l'inclinaison α de l'orbite relative à l'instant t, de manière qu'on ait

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{n}{m - m'},$$

car en éliminant $(m - m')$ on aura

$$n^2 t'^2 + 2n \sin\alpha \left\{ \lambda \sin\alpha + (l - l') \cos\alpha \right\} t' = \left\{ c^2 \left(\frac{p - p'}{p} \right)^2 - \lambda^2 - (l - l')^2 \right\} \sin^2\alpha;$$

cette équation étant résolue algébriquement donne pour t' deux valeurs qui sont

$$t = \frac{-\sin\alpha \left\{ \lambda \sin\alpha + (l - l') \cos\alpha \right\} \pm \sin\alpha \sqrt{c^2 \left(\frac{p - p'}{p} \right)^2 - \lambda^2 - (l - l')^2 + \left\{ \lambda \sin\alpha + (l - l') \cos\alpha \right\}^2}}{n}$$

L'une de ces valeurs est la correction qu'il faut faire à l'instant t pour avoir la phase que l'on cherche, et qui est ici par supposition la fin de l'éclipse ; l'autre valeur est la correction qu'il faudrait appliquer à ce même instant pour avoir la phase correspondante, par exemple ici le commencement de l'éclipse, si les mouvemens horaires restaient toujours les mêmes qu'à l'instant t pris pour origine. Cette dernière valeur ne peut nous intéresser puisqu'elle est contraire à la nature ; il faut donc savoir reconnaître celle des deux que nous voulons obtenir, et cela est très-facile, car celle-ci s'évanouirait si la distance apparente des centres de la lune et du soleil calculée pour l'instant t pris pour origine était exactement égale à la valeur $c \cdot \frac{p - p'}{p}$, ou T qui correspond à la phase que l'on considère, c'est-à-dire, si l'on avait à cet instant

$$c^2 \left(\frac{p - p'}{p} \right)^2 - \lambda^2 - (l - l')^2 = 0.$$

La valeur de t' qui nous intéresse doit satisfaire à cette condition, c'est par conséquent celle où le radical est affecté du signe positif, c'est-à-dire

$$t' = \frac{-\sin\alpha \left\{ \lambda \sin\alpha + (l - l') \cos\alpha \right\} + \sin\alpha \sqrt{c^2 \left(\frac{p - p'}{p} \right)^2 - \lambda^2 - (l - l')^2 + (\lambda \sin\alpha + (l - l') \cos\alpha)^2}}{n}$$

Mais comme cette valeur qui doit être fort petite serait ainsi donnée par la différence de deux quantités qui pourraient être assez grandes et qu'il faudrait calculer avec beaucoup de précision, nous multiplierons ces deux termes par

$$\lambda \sin\alpha + (l-l')\cos\alpha + \sqrt{c^2\left(\frac{p-p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 - (l-l')^2 + (\lambda\sin\alpha + (l-l')\cos\alpha)^2},$$

et alors on aura

$$t' = \frac{\sin\alpha . \left\{c^2\left(\frac{p-p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 - (l-l')^2\right\}}{n(\lambda\sin\alpha + (l-l')\cos\alpha) + n\sqrt{c^2\left(\frac{p-p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 - (l-l')^2 + (\lambda\sin\alpha + (l-l')\cos\alpha)^2}}.$$

Il est facile de voir que l'autre valeur de t' ne pourra pas satisfaire à la même condition en général, mais elle y satisferait si l'on avait en même tems

$$c^2\left(\frac{p-p'}{p}\right) - \lambda^2 - (l-l')^2 = 0, \quad \lambda\sin\alpha + (l-l')\cos\alpha = 0.$$

La première condition signifie que l'instant t, résultat du premier calcul, est exact, et qu'il n'y a rien à y changer. Pour interpréter la seconde, faisons

$$\frac{\lambda}{l-l'} = \tang\beta,$$

β sera l'angle formé avec l'écliptique par la distance apparente des centres de la lune et du soleil à l'instant t, cette distance étant vue de la terre. En substituant cette valeur dans la seconde des conditions que nous venons d'obtenir, on aura

$$\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \cos(\alpha-\beta) = 0,$$

c'est-à-dire, que différence des angles α et β serait égale à un angle droit; et par conséquent, dans ce cas, l'orbite relative de la lune vue de la terre serait perpendiculaire à la ligne qui joint son centre et celui du soleil. Cette circonstance ne peut appartenir qu'au milieu de l'éclipse, et non au commencement ni à la fin, à moins qu'elle ne se réduise à une appulse.

Quand on aura corrigé l'époque de la fin de l'éclipse, comme nous venons de le dire, on pourra corriger l'époque du commencement de la même manière, en prenant pour les élémens de l'astre ceux qui sont relatifs à cette époque, et y plaçant l'origine du tems t'. On choisira de même entre les deux valeurs de t' celle qui s'évanouit quand $c^2 \cdot \left(\frac{p-p'}{p}\right)^2 - \lambda^2 - (l-l')^2 = 0$, c'est-à-dire, que l'on pourra employer l'expression que nous venons de déterminer en général, pourvu que l'on y substitue les valeurs numériques qui conviennent aux instans que l'on veut considérer. Dans ce cas général où l'on suppose les mouvemens horaires variables, le tems de la plus grande phase n'est plus intermédiaire entre le milieu et la fin.

Si l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse avait été réellement observé et que l'on voulût en conclure l'époque de la *conjonction*, *il n'y aurait qu'à calculer la valeur exacte du tems* $t+t'$, comme nous venons de le faire, et la retrancher du tems de l'observation, s'il s'agissait de la fin de l'éclipse; ou l'y ajouter s'il s'agissait du commencement.

Il y a encore une autre circonstance à laquelle nous n'avons point eu égard, et qu'il nous faut corriger aussi, avant de commencer notre seconde approximation. Nous avons supposé la terre sphérique, et nous avons calculé le contact de la pénombre et de la terre comme celui d'un cône circulaire et d'une sphère, ou plus simplement comme le contact de deux circonférences de cercle; mais réellement ce calcul n'est qu'une approximation. Pour le rendre exact, il faut déterminer le point physique du sphéroïde terrestre qui reçoit le premier contact de la pénombre, et celui qui le reçoit le dernier; il faut calculer la longueur des rayons terrestres qui passent par ces points, et prendre pour demi-diamètre apparent de la terre, c'est-à-dire, pour parallaxe de la lune, les valeurs de la parallaxe qui y correspondent; ce sont ces valeurs qu'il faut introduire dans nos formules pour calculer les résultats du premier et du dernier contact, c'est-à-dire, le commencement et la fin de l'éclipse.

Cette recherche semble assez compliquée au premier coup-d'œil, parce que la parallaxe dépend du lieu où se fait le contact; par conséquent de l'instant où ce contact arrive; et réciproquement l'instant du contact dépend de la parallaxe. Mais on simplifiera, tout en remarquant que l'erreur du contact calculé, en supposant la terre sphérique, ne peut être que fort peu considérable, puisque la terre diffère très-peu d'une sphère. Par conséquent l'instant du contact étant connu sur la sphère, on peut l'employer à calculer la longitude et la latitude géographiques du lieu où ce contact doit arriver. On y prendra la valeur du rayon terrestre; et comme la variation totale de ce rayon, du pôle à l'équateur, est extrêmement petite, elle deviendra tout-à-fait insensible sur le petit espace où le point de contact pourra varier.

Pour résoudre cette question, et confirmer par le calcul les approximations que nous venons d'indiquer, reprenons la *fig.* 13. Dans cette figure, les points SLT représentent les centres du soleil, de la lune et de la terre. Les circonférences décrites autour des deux derniers, sont les intersections de la lune et de la terre supposées sphériques par le plan des trois centres. Enfin la ligne KM tangente à ces deux circonférences est l'arête extrême de la pénombre qui se trouve toujours dans ce plan et qui doit être tangente à la sphère terrestre dans le cas du premier et du dernier contact, en sorte que l'angle KMT est droit. Or si du point de contact M nous menons la ligne MS au centre du soleil, l'angle KMS sera le demi-diamètre apparent de cet astre, ou $\frac{D}{2}$, puisque KM est l'arête de la pénombre, qui lui est tangente. Par conséquent, si nous continuons à employer les mesures sexagésimales, nous aurons $SMT = 90 - \frac{D}{2}$; l'angle TSM du même triangle est à très-peu-près égal à la parallaxe horisontale du soleil, c'est-à-dire à p', puisque le bord S du soleil est horisontal en M. Ainsi la somme de ces deux angles est......... $90 - \frac{D}{2} + p'$; et comme le troisième angle STM en est le supplément, on aura

$$STM = 90^\circ + \frac{D}{2} - p'$$

C'est la distance angulaire du soleil au point du premier ou du dernier contact vue de la terre.

Maintenant que cet angle est connu, soit, *fig.* 14, T le centre de la terre, $\gamma V V' V''$ la section de sa surface par le plan de l'écliptique; S, S' les positions successives du soleil dans ce plan à l'instant de la conjonction et du dernier contact, enfin M le point de la surface terrestre où ce contact a eu lieu. Si de ce point qu'il faut supposer élevé au-dessus du plan de la figure, nous menons le rayon MT au centre de la terre, l'angle $S'TM$ sera l'angle de distance que nous venons de déterminer. De plus, on connaîtra l'inclinaison du plan $S'TM$ sur l'écliptique; car puisque la lune s'y trouve à l'instant du dernier contact dont l'époque est, je suppose, t'', sa latitude, à cet instant, est $\lambda + nt''$; sa différence de longitude avec le soleil est $(m - m')\, t''$, et sa distance apparente au soleil vue de la terre est T ou $\frac{D'' + D}{2} + p - p'$; par conséquent, comme ces arcs sont fort petits, le sinus de l'inclinaison du plan sera $\frac{\lambda + nt''}{\frac{D'' + D}{2} + p - p'}$; et son cosinus sera $\frac{(m - m')\, t''}{\frac{D'' + D}{2} + p - p'}$. Avec ces données, on peut aisément calculer la latitude du point M et sa différence de longitude avec le soleil, car si l'on abaisse de ce point sur l'écliptique le cercle de latitude MV'', les trois points V', V'', M, formeront sur la sphère terrestre un triangle sphérique rectangle en V'', dans lequel on connaîtra de plus l'hypothénuse $V'TM = 90 + \frac{D}{2} - p'$, et l'angle dièdre $MV'V''$ que nous venons de déterminer. On aura donc ainsi, par les règles de la trigonométrie

$$\sin MV'' = \frac{\cos\left(\frac{D}{2} - p'\right) \cdot (\lambda + nt'')}{\frac{D'' + D}{2} + p - p'}$$

$$\operatorname{tang} V'V'' = \operatorname{tang}\left(90 + \frac{D}{2} - p'\right) \cdot \frac{(m - m')\, t''}{\frac{D'' + D}{2} + p - p'}.$$

Dans la première de ces valeurs, on peut supposer . . . . $\cos\left(\frac{D}{2} - p'\right) = 1$, il n'en résultera que quelques secondes de différence sur MV'', et quelques secondes ne sont d'aucune conséquence dans cette élimination. Quant à la valeur de $V'V''$, on peut la simplifier beaucoup ; car en faisant $V'V'' = 90 + V'$, ce qui donne $\tan V'V'' = -\frac{1}{\tan V'}$, l'équation qui détermine $V'V''$ devient

$$\tan V' = \frac{\tan\left(\frac{D}{2} - p'\right) \cdot \left\{\frac{D'' + D}{2} + p - p'\right\}}{(m - m')\,t''}.$$

On voit donc que l'arc V' est très-petit de l'ordre $\frac{D}{2} - p'$, par conséquent, en substituant les sinus aux arcs, on aura par une approximation toujours suffisante

$$V' = \frac{\left(\frac{D}{2} - p'\right)\left\{\frac{D'' + D}{2} + p - p'\right\}}{(m - m')\,t''},$$

ce qui donne

$$V'V'' = 90 + \frac{\left(\frac{D}{2} - p'\right)\left\{\frac{D'' + D}{2} + p - p'\right\}}{(m - m')\,t''}.$$

C'est la différence de longitude entre le point M et le soleil : ajoutez-y le mouvement du soleil en longitude depuis la conjonction jusqu'à l'instant du dernier contact, mouvement égal à $m't''$, vous aurez la longitude du point M comptée du point V de l'écliptique où la conjonction est arrivée. Enfin, si l'on ajoute encore la longitude du soleil comptée de l'équinoxe, à l'époque de la conjonction, longitude que nous nommons L, et qui est représentée par ΥV dans la figure, on aura la longitude du point M rapportée au point équinoxial. On obtiendra ainsi ces expressions très-simples :

Coordonnées du point de la terre où se fait le dernier contact de la pénombre.

Longitude du zénith $90 + L + m't'' + \frac{\left\{\frac{D}{2} - p'\right\}\left\{\frac{D'' + D}{2} + p - p'\right\}}{(m - m')\,t''}$,

sin (latitude du zénith)...... $\frac{\lambda + nt''}{\frac{D'' + D}{2} + p - p'}$.

Par exemple, dans l'éclipse que nous avons calculée, on avait, à l'époque du dernier contact .... $t'' = 2^h,59420$,

On avait de plus, à l'instant de la conjonction $L = 12^\circ.9'.56''$.

En employant ces quantités et les autres données dont nous avons fait usage, on trouve que le dernier contact a eu lieu dans un point de la terre où l'on avait à cet instant :

Longitude du zénith .... $102^\circ.35'.15''$,
Latitude du zénith .... $33^\circ.27'.35''$ boréale.

Les mêmes raisonnemens appliqués au commencement de l'éclipse donneront :

Coordonnées du point de la terre où se fait le premier contact de la pénombre.

$$\text{Longitude du zénith } 270^\circ + L + m't' + \frac{\left(\frac{D}{2} - p'\right)\left\{\frac{D''+D}{2} + p - p'\right\}}{(m - m')\,t'},$$

$$\sin(\text{latitude du zénith}) \ldots\ldots \frac{\lambda + nt'}{\frac{D''+D}{2} + p - p'}.$$

Par exemple, dans notre éclipse on avait à cet instant ...... $t' = -2^h,88376$, ce qui donne, pour le point du premier contact

Longitude du zénith .... $281^\circ.45'.48''$
Latitude .... $21^\circ.59\ 0''$ boréale.

En appliquant ces formules, il ne faut pas oublier de donner à t' et à t'' les signes qui leur appartiennent et qui sont déterminés par les calculs précédens. Avec cette seule attention les formules sont générales et peuvent servir pour tous les cas.

Il ne reste plus maintenant qu'à transformer ces coordonnées en ascensions droites et en déclinaisons, ce qui est très-facile par les formules de la page 58 ; on trouvera ainsi

Point du dernier contact :

Ascension droite du zénith .... $109^\circ.\ 1'.55''$
Déclinaison du zénith ou latitude géographique $56^\circ.\ 6'.20''$ boréale.

Point du premier contact :

Ascension droite du zénith .... $289^\circ.53'.57''$
Déclinaison du zénith ou latitude géographique $-1^\circ.\ 2'.39''$ australe.

La connaissance des latitudes géographiques suffit déja pour trouver les parallaxes correspondantes à ces deux points du globe terrestre, car nous avons donné, dans le premier livre, page 164, l'expression générale des rayons terrestres pour une latitude quelconque, et les parallaxes sont proportionnelles à ces rayons. Celle que nous avons employée, $54'.1''.5$, est la valeur qui convenait au rayon du pôle. Soit donc R ce rayon exprimé en mètres, et $R'R''$ les rayons pour les deux latitudes où le contact a eu lieu; les véritables parallaxes relatives à ces latitudes seront

$$\text{Pour le premier contact. } 54'.1''.5 \times \frac{R'}{R} = 54'.1'',5.1,003297 = 54.12''.2$$

$$\text{Pour le dernier........ } 54'.1'.5 \times \frac{R''}{R} = 54'.1'',5.1,001024 = 54'.4''.8$$

A parler rigoureusement, ces parallaxes ne sont pas encore celles qu'il faudrait employer dans le calcul de la distance des centres, car elles appartiennent au point du sphéroïde où se fait le contact de la pénombre, par exemple au point M, *fig.* 13, et non pas au point M', où le sphéroïde est touché par le rayon visuel mené du centre de la lune. Mais il est facile de voir que l'erreur sera toujours bien petite à cause du peu de différence de ces deux points. En effet, soit V le point d'intersection des deux droites KM, LM' dont l'une touche la terre en M, l'autre en M'. Il est visible que les deux angles MTM', NVL seront égaux, comme ayant tous deux pour supplément le même angle MVM'. On aura donc $MTM' = \frac{D''}{2}$; D'' étant le diamètre apparent de la lune, ce sera 15' sexag., en supposant ce diamètre de 30'. Or une différence de 15' dans la position de deux points sur le sphéroïde terrestre, supposé elliptique, ne fait pas plus de 0'',05 sur la parallaxe, dans les cas même les plus favorables à cette variation. On peut donc, vu la petitesse de cette erreur, négliger la différence des rayons terrestres entre les points M et M'; et calculer la distance des centres dans le cas du premier et du dernier contact avec les parallaxes que nous venons de déterminer. Mais ici se présente encore une autre circonstance. Le rayon visuel LM' mené de la lune tangentiellement au sphéroïde elliptique n'est plus perpendiculaire au rayon terrestre. Par conséquent l'angle TLM' n'est pas tout-à-fait égal à la parallaxe horisontale qui convient à ce rayon. Cette remarque est vraie à la rigueur; mais l'erreur qui peut résulter de son omission est encore plus faible que la précédente; car si l'on mène en M' une normale à l'ellipse, cette normale faisant avec le rayon un angle n, la distance de la lune au zénith vrai, comptée à partir du rayon, sera $90 + n$; par conséquent la parallaxe de hauteur TLM' sera égale à $p \sin (90 + n)$ ou $p \cos n$, p étant la parallaxe horisontale dans l'ellipse. Or la plus grande valeur de l'angle n étant toujours au-dessous de $12'$ sexagésimales, le facteur $\cos n$ ne peut pas produire plus de $0'',02$ de variation dans la parallaxe p.

Enfin si l'on voulait tenir compte exactement de toutes les circonstances du problème avec une rigueur géométrique, il ne faudrait pas supposer que le premier et le dernier contact de la pénombre avec le sphéroïde terrestre se font dans le plan des trois centres. Cette disposition avait lieu dans le cas de la sphère, elle n'a plus lieu quand la terre est un sphéroïde elliptique; excepté dans deux cas; lorsque le plan des trois centres coïncide avec l'équateur ou avec un méridien. Ainsi pour traiter ce problème avec ses circonstances géométriques, il faudrait concevoir le cône de la pénombre et l'ellipsoïde terrestre comme étant tous deux mobiles conformément aux lois que nous avons établies, puis chercher les conditions du contact de leurs surfaces. La petitesse de l'applatissement de la terre, et la connaissance déjà très-approchée du lieu et de l'instant des contacts sur la sphère permettraient de résoudre ce problème par des approximations faciles. Mais cette recherche minutieuse n'aurait aucune utilité bien réelle, et si je suis entré à ce sujet dans quelques détails, c'est uniquement pour donner une idée rigoureuse de la question, et montrer sur quoi portent les approximations qui la facilitent.

Si l'on veut négliger la dernière circonstance que nous venons d'indiquer, on pourra calculer la distance des centres avec les parallaxes elliptiques que nous avons trouvées pour les instans des contacts. Avec ces parallaxes, et les élémens du mouvement des deux astres calculés pour ces mêmes instans, on procédera à une seconde approximation; et cette fois on obtiendra les instans du commencement et de la fin de l'éclipse avec une grande exactitude.

Si l'on voulait connaître complètement la position des deux points d'entrée et de sortie que nous venons de déterminer sur la sphère, il faudrait avoir leur longitude géographique rapportée au méridien d'un lieu déterminé, de Paris, par exemple; or, rien n'est plus facile; car il suffit de calculer l'ascension droite du soleil pour les instans des deux contacts, et de la retrancher de l'ascension droite du zénith de chacun des deux points, laquelle est donnée pour le même instant. On aura ainsi l'angle horaire du soleil dans chacun de ces points à l'instant où le phénomène a eu lieu; et comme on connaît l'heure qui se comptait à Paris au même instant, on aura par ce moyen la différence des longitudes. Voici le type de ce calcul qui n'a pas besoin d'explication.

	Premier contact.	*Dernier contact.*
Longitude du soleil à l'époque de la conjonction.	12°. 9'.56"	12°. 9'.56"
Réduction à l'instant du phénomène	$m't' = -7'.7''$	$n't'' = +6'.24''$
Longitude du soleil à l'instant du phénomène.	12°. 2'.49"	12°.16'.20"
Avec ces longitudes et l'obliquité de l'écliptique 23°.28'.21", on calcule les valeurs correspondantes de l'ascension droite du soleil, qui sont, suivant les formules de la page 58. .	13°. 5'.53"	13°.20'.28"
Retranchant ces résultats de l'ascension droite de chaque point, qui est.	280°.53'.57"	109°. 1'.55"
on a l'angle horaire du soleil à l'instant du phénomène.	267°.48'. 4"	95°.41'.27"
ou en divisant par 15 pour réduire en heures solaires	17h.51'.12"	6h.22'.46"

Ces angles sont comptés à partir du méridien supérieur, et d'orient en occident, de 0 à 360°; or, en comptant toujours de la même manière, on avait, à Paris,

	Premier contact.	*Dernier contact.*
A l'instant de la conjonction.	$22^h.31'.\ 5''$	$22^h.31'.\ 5''$
Réduction à l'instant du phénomène	$t' = -2^h.53'.\ 1''$	$t'' = +2^h.35'.39''$
Heure que l'on comptait à Paris à l'instant du phénomène.	$19^h.38'.\ 4''$	$1^h.\ 6'.44''$
Retranchant les angles horaires des deux lieux.	$17^h.51'.12''$	$6^h.22'.46''$
on a leurs longitudes géographiques rapportées au méridien de Paris	$1^h.46'.52''$	$18^h.43'.58''$

Ces longitudes sont comptées d'orient en occident comme les angles horaires. Comme la derniere surpasse $12^h.$, si l'on veut la convertir en longitude occidentale, il n'y a qu'à prendre son supplément à $24^h.$, ce sera $5^h.16'.2''$.

Ces résultats, obtenus en supposant la terre sphérique, ne peuvent comporter que quelques minutes d'erreur. Si l'on voulait les rectifier et obtenir une plus grande exactitude dans cette recherche, ce qui ne serait jamais qu'une affaire de curiosité, inutile dans les applications, il n'y aurait qu'à suivre la marche que nous venons d'adopter quant aux raisonnemens et aux formules, en y ajoutant seulement la précaution d'effectuer les calculs avec les parallaxes elliptiques et avec les autres élémens de l'éclipse calculés pour les deux instans du premier et du dernier contact que nous venons de déterminer.

On pourrait encore se proposer bien d'autres questions relativement aux circonstances générales des éclipses ; on pourrait, par exemple, demander de tracer sur le globe terrestre la trace de l'éclipse et ses limites, en déterminant les longitudes et les latitudes géographiques des points qui se trouvent sur les confins de la pénombre ou de l'ombre pure. Ce problême et tous ceux du même genre, se résoudraient facilement par les méthodes que nous avons déja employées, et l'on conçoit qu'ils se réduiront toujours à des questions de géométrie en trois dimensions, dans lesquelles il s'agira de trouver les intersections successives d'une sphère ou d'un sphéroïde avec un cône mobile suivant une loi donnée. Tout cela n'étant que de pure curiosité, doit être abandonné à ceux qui desireraient s'exercer cette recherche. Le peu d'espace qui nous reste encore pour exposer des vérités bien plus utiles, nous empêche de nous y arrêter : mais je dois prévenir que pour traiter toutes ces sortes de questions d'une manière simple, élégante, et dont les résultats soient d'une interprétation facile, il faut éviter, avec le plus grand soin, de se jeter dans des généralités inutiles qu'on est, presque toujours forcé de limiter ensuite pour passer aux nombres. Il faut, au contraire, s'attacher à simplifier d'abord le problême autant qu'il est possible par des approximations aussi exactes qu'il est besoin de les avoir, et chercher, parmi toutes les routes, celle qui conduit aux formules les plus courtes et aux calculs numériques les plus simples.

CHAPITRE XVII.

Manière de calculer les circonstances générales des occultations de planètes et d'étoiles par la Lune.

102. Les occultations des planètes et étoiles par la lune se calculent absolument d'après les mêmes principes que les éclipses de soleil. En désignant toujours comme dans la *fig.* 12 par T le centre de la terre, par L le centre de la lune, et par S le centre de l'astre occulté, la ligne SL représentera également l'axe de l'ombre lunaire, et l'angle TLO sera la distance apparente du centre de l'ombre au centre de la terre. L'expression générale de cet angle en fonction du tems peut s'obtenir ici comme nous l'avons fait alors d'après le calcul des angles en S et en T. En égalant cette expression aux diverses valeurs de l'angle TLO qui conviennent aux différentes phases de l'éclipse, et prenant le tems pour inconnue, on conclura de même les époques où ces phases arriveront.

Nous entendons ici par *ombre lunaire*, la portion de l'espace où les rayons venus de l'astre ne peuvent parvenir à cause de l'interposition du corps de la lune qui les intercepte. Sous ce rapport l'expression d'*ombre lunaire* est exacte, quoique l'on ne doive y attacher aucune idée d'obscurité sensible.

Dans les éclipses de soleil, lorsqu'il s'est agi de calculer l'angle STL, ou la distance apparente des deux astres vue du centre de la terre, nous avons considéré cette distance, qui est toujours fort petite dans les éclipses, comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés étaient la latitude de la lune, et sa différence de longitude avec le soleil. Dans les occultations de planètes et d'étoiles par la lune, nous pourrons encore employer la même considération; mais, comme alors la latitude de l'astre occulté n'est pas nulle, et que celle de la lune peut n'être pas très-petite, l'un des côtés du triangle rectangle sera la différence des latitudes, et l'autre sera la différence des longitudes, transportée à la hauteur du centre de la lune sur l'écliptique, c'est-à-dire multipliée par le cosinus de sa latitude. Voilà toute la différence qui existe entre le calcul de ces phénomènes et ceux des éclipses de soleil. En y ayant égard, les formules des chapitres précédens seront complètement applicables, et il suffira d'y substituer pour les parallaxes de la lune et de l'astre leurs valeurs numériques propres aux différens cas qui peuvent arriver. Si l'astre occulté est une étoile, sa parallaxe est nulle, et son mouvement soit en latitude soit en longitude est nul aussi.

NOTE.

Nommons, comme dans le précédent chapitre, λ la latitude de la lune à l'instant de sa conjonction avec l'astre. Appelons p sa parallaxe, et m, n, ses mouvemens horaires en longitude et en latitude; désignons par λ', p', m', n', les quantités analogues pour l'astre occulté; de plus, appelons encore T l'angle LTS, ou la distance apparente des deux astres vus du centre de la terre, et c la distance de ce centre à l'axe de l'ombre lunaire vue du centre de la lune, nous aurons les deux formules suivantes, analogues à celle du chapitre précédent,

$$(1) \ldots \sin p \,.\, \sin (c - T) = \sin p' \sin c\,,$$

$$(2) \ldots T^2 = (m - m')^2 \cos^2 \lambda \,.\, t^2 + \left\{\lambda - \lambda' + (n - n')\, t\right\}^2.$$

En éliminant T entre ces deux équations, on aura une relation entre c et t; si l'on se donne t, cette relation déterminera c; c'est la distance du centre de la terre à l'axe de l'ombre. Réciproquement, si l'on se donne c tel qu'il doit avoir lieu aux différentes phases de l'éclipse, on trouvera les valeurs de t, où ces phases arriveront.

L'élimination est facile lorsque l'on se permet de substituer les rapports des arcs $p\ p'$, $c - T$ et c à ceux de leurs sinus, ce qui suffira presque toujours, puisque ces arcs sont fort petits dans les éclipses; on aura alors simplement

$$T = c\,\frac{(p - p')}{p},$$

et, par conséquent,

$$(m - m')^2 \cos^2 \lambda \,.\, t^2 + \left\{\lambda - \lambda' + (n - n')\,t\right\}^2 = c^2 \,.\left(\frac{p - p'}{p}\right)^2.$$

Si l'on supposait $\lambda' = 0$ et λ assez petit pour que l'on pût négliger le produit $(m - m')\sin\lambda$, on retomberait sur les formules relatives aux éclipses de soleil.

Les diverses valeurs de c, qui appartiennent aux instans des différentes phases, seront ici de même forme que celles qui nous ont servi alors; par exemple, pour avoir le commencement et la fin de l'éclipse, il faudra supposer le disque terrestre tangent extérieurement à la pénombre lunaire; il faudra donc prendre

$$c = \frac{(D'' + D)}{2} \cdot \frac{p}{p - p'} + p,$$

D'' étant le diamètre apparent de la lune et D celui de l'astre occulté. On opérera de même pour les autres phases, en suivant la marche indiquée pour les éclipses de soleil.

On pourra aussi transformer l'équation en t d'une manière analogue, en introduisant un angle α, tel qu'on ait

$$\tang \alpha = \frac{n - n'}{(m - m')\cos\lambda};$$

cet angle α exprimera de même l'inclinaison de l'orbite relative de la lune sur le plan du grand cercle mené par son centre, perpendiculairement au cercle de latitude, ce plan se confond avec l'écliptique dans les éclipses de soleil; alors l'équation en t deviendra

$$(n-n')^2t^2+2(\lambda-\lambda')(n-n')\sin^2\alpha.t=\left(c^2\frac{(p-p')^2}{p^2}-(\lambda-\lambda')^2\right)\sin^2\alpha,$$

équation parfaitement analogue à celle que nous avons déja obtenue, pour les éclipses de soleil; on en tire de même

$$t=\frac{-(\lambda-\lambda')\sin^2\alpha\pm\sin\alpha\sqrt{c^2.\frac{(p-p')^2}{p^2}-(\lambda-\lambda')^2\cos^2\alpha}}{n-n'};$$

expression qui donnera pareillement toutes les valeurs de t correspondantes aux diverses phases de l'éclipse, quand on y aura mis pour c les valeurs convenables.

Lorsque ces valeurs de t auront été déterminées, on pourra les rectifier, comme nous l'avons fait pour le soleil, en les calculant de nouveau avec les mouvemens horaires et les parallaxes qui leur sont propres. Ces dernières s'obtiendront en calculant le point du globe terrestre où se fait la première impression de l'éclipse.

CHAPITRE XVIII.

Manière de déterminer les circonstances des éclipses de soleil, de planètes ou d'étoiles, pour un point déterminé de la terre.

103. Jusqu'ici nous n'avons considéré les phénomènes des éclipses que dans leurs circonstances générales, et tels que les verrait un observateur placé dans la lune. Si nous voulons maintenant déterminer leurs apparences particulières pour un point déterminé du sphéroïde terrestre, il faut faire entrer dans nos calculs les conditions particulières résultantes de la position de l'observateur sur ce point.

Dans ce cas toutes les questions que l'on peut se proposer se réduisent aux deux suivantes : Trouver la distance apparente des deux astres vue d'un point déterminé de la terre, pour un instant donné : ou bien, trouver l'instant auquel telle distance déterminée aura lieu dans un lieu donné.

104. Le premier problême est le plus facile. Calculez pour l'instant donné les longitudes et latitudes *apparentes* des deux astres, c'est-à-dire les longitudes et latitudes vues du point de la terre où se fait l'observation ; puis calculez la distance apparente des centres comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés est la différence des latitudes apparentes, et l'autre la différence des longitudes apparentes transportée à la hautenr où la

lune se trouve sur l'écliptique, c'est-à-dire multipliée par le cosinus de sa latitude apparente (*).

Connaissant la distance des centres et les diamètres apparens des deux astres à l'instant donné, on pourra aisément savoir s'il y a éclipse. Il suffit d'examiner si la distance apparente des centres est plus petite ou plus grande que la

---

(*) Pour obtenir les longitudes et latitudes apparentes, il faut d'abord chercher, pour l'instant donné, les longitudes et latitudes des deux astres vus du centre de la terre. Les valeurs en sont données par les tables astronomiques. Avec ces valeurs et le tems qui est connu, vous pouvez calculer les parallaxes de longitude et de latitude, au moyen des formules de la page 62. Ces parallaxes appliquées aux lieux vrais, donneront les lieux apparens.

Si l'on voulait ensuite calculer rigoureusement la distance Δ des deux centres, il n'y aurait qu'à considérer le triangle formé par cette distance avec les distances apparentes des deux astres au pôle de l'écliptique. En effet, on connaîtra, dans ce triangle, les deux distances polaires ϖ, ϖ'; de plus l'angle compris entre elles est égal à la différence des longitudes que nous nommerons l et l'; on aura donc Δ par la formule

$$\cos \Delta = \sin \varpi \sin \varpi' . \cos (l - l') + \cos \varpi \cos \varpi'.$$

mais comme Δ et $l - l'$ sont ici de petits angles, il faut mettre, au lieu de $\cos \Delta$ et $\cos l - l'$, les valeurs $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (l - l')$; par ce moyen, l'équation précédente devient

$$(1) \ldots \sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta = \sin^2 \tfrac{1}{2} (\varpi - \varpi') + \sin \varpi \sin \varpi' . \sin^2 \tfrac{1}{2} (l - l').$$

Sous cette forme, on pourra calculer très-exactement chacun des termes du second membre. Pour tirer de cette formule le résultat approché auquel conduit la considération du triangle rectangle, il faut remarquer que l'on a, en général,

$$\sin \varpi \sin \varpi' = \tfrac{1}{2} \cos (\varpi - \varpi') - \tfrac{1}{2} \cos (\varpi + \varpi') = \sin^2 \tfrac{1}{2} (\varpi + \varpi') - \sin^2 \tfrac{1}{2} (\varpi - \varpi').$$

Cette expression étant substituée dans l'équation (1), elle devient

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta = \sin^2 \tfrac{1}{2} (\varpi - \varpi') \cos^2 \tfrac{1}{2} (l - l') + \sin^2 \tfrac{1}{2} (\varpi + \varpi') \sin^2 \tfrac{1}{2} (l - l'),$$

Si l'on se permet de négliger le produit de $\sin \frac{1}{2} (\varpi - \varpi')$ par $\sin \frac{1}{2} (l - l')$, somme des demi-diamètres. Dans le premier cas, l'éclipse existe ; dans le second, elle n'a pas encore lieu, ou elle est déja passée.

Pour ce calcul, il faut employer les diamètres *apparens*, tels qu'on les voit du lieu de l'observation, c'est-à-dire augmentés en raison de la hauteur des astres sur l'horison. La lune est le seul astre assez voisin de la terre pour que cette augmentation apparente soit sensible, et nous avons donné dans la page 366 les formules nécessaires pour en calculer l'effet.

---

comparativement aux termes affectés d'un seul de ces facteurs, on pourra, dans le premier terme du second membre, supposer..... $\cos^2 \frac{1}{2}(l-l') = 1$, et dans le second................. $\sin^2 \frac{1}{2}(\varpi + \varpi') = \sin^2 \left\{\varpi - \frac{1}{2}(\varpi - \varpi')\right\} = \sin^2 \varpi$. Si, de plus, on se permet de substituer le rapport des arcs Δ, $\varpi - \varpi'$ et $l - l'$ à celui de leurs sinus, on aura simplement

$$\Delta^2 = (\varpi - \varpi')^2 + (l - l')^2 \sin^2 \varpi\,;$$

c'est le résultat donné par la considération du triangle rectangle. Mais ce résultat n'est qu'approché, et l'on voit en quoi consiste l'approximation. Au reste, il n'en coûterait presque pas plus d'employer la formule rigoureuse. En général, les élémens les plus influens de la formule, c'est-à-dire, ceux qu'il faut connaître avec le plus d'exactitude, sont les différences apparentes de longitude et de latitude des deux astres. Si l'équation qui donne $\sin \frac{1}{2}\Delta$, ne contenait que ces différences, on pourrait employer le lieu vrai d'un des astres, et appliquer à l'autre la différence des parallaxes. C'est la règle que prescrivent tous les astronomes. On voit qu'elle n'est pas rigoureuse à cause du facteur $\sin \varpi \sin \varpi'$; car ce facteur étant égal à....... $\sin^2 \frac{1}{2}(\varpi + \varpi') - \sin^2 \frac{1}{2}(\varpi - \varpi')$, le terme $\sin^2 \frac{1}{2}(\varpi + \varpi')$ ne peut pas être assujéti à cette supposition; car $\frac{1}{2}(\varpi + \varpi')$ est la demi-somme des latitudes vraies, plus la demi-somme des parallaxes de latitude, et au lieu de cette dernière *somme*, le procédé ordinaire emploie leur demi-différence. L'erreur est toujours fort petite à cause du facteur $\sin^2 \frac{1}{2}(l - l')$ qui la multiplie, mais peut-être serait-il mieux de l'éviter, puisqu'elle n'a aucun avantage pour simplifier le calcul.

105. Des deux questions que nous avons posées au commencement de ce chapitre, celle que nous venons de résoudre est de beaucoup la plus facile. Nous allons maintenant passer à la seconde qui en est l'inverse, et dans laquelle on se propose de trouver le tems, d'après la distance des centres supposée connue.

Cette seconde question sert par exemple à trouver si une éclipse est possible dans un lieu donné, et à quel instant elle arrivera.

Pour y parvenir, on commencera par calculer les circonstances de l'éclipse pour la terre en général, par les méthodes indiquées dans le chapitre précédent. On connaîtra ainsi l'instant du commencement et de la fin de l'éclipse; par conséquent sa durée totale. Cela fait on partagera cette durée en un certain nombre d'intervalles, par exemple, de demi-heures en demi-heures, et l'on calculera pour chacun de ces instans les élémens du lieu apparent des deux astres, vus du point assigné. On en conclura la distance apparente de leurs centres, par la méthode que nous venons d'expliquer tout-à-l'heure, et en comparant cette distance à la somme des demi-diamètres, on saura si l'éclipse a lieu ou non. On connaîtra donc ainsi, à moins d'une demi-heure près, les instans du commencement et de la fin de l'éclipse dans le lieu de l'observation.

Dans l'état actuel de l'astronomie, toutes les éclipses de soleil, de planètes, et même la plupart des occultations d'étoiles sont déja prévues à très-peu près. On n'a donc pas besoin du calcul préparatoire que nous venons d'expliquer, ou du moins il sera rarement nécessaire. Mais pourtant il était convenable de l'indiquer pour observer la condition que nous nous sommes prescrite dans cet ouvrage, de montrer comment un observateur isolé pourrait créer toute l'astronomie par ses seules observations.

Admettons donc que l'on connaît à très-peu près les instans du commencement et de la fin de l'éclipse dans le lieu pour lequel on calcule, il s'agit de les déterminer plus exactement. On calculera pour ces instans les longitudes et les latitudes *apparentes* des deux astres, leurs mouvemens horaires *apparens*, et leurs demi-diamètres apparens en ayant égard à leur hauteur sur l'horison. Il est très-facile de faire la petite correction que cette hauteur exige, au moyen d'une formule que l'on trouvera ici dans les notes (*). Elle n'est nécessaire que pour la lune.

Puis on supposera que les instans cherchés ne diffèrent des précédens que de quantités assez petites, pour que

---

(*) Supposons trois rayons visuels menés au zénith, au pôle de l'écliptique et au centre de l'astre, c'est-à-dire, aux points Z, P', C de la *fig.* 15. Si l'on joint ces points par des arcs de grands cercles, ZP' sera le complément de la latitude du zénith rapportée à l'écliptique, ou $100^\circ - \Lambda$, CP' sera le complément de la latitude de l'astre, ou $100^\circ - \lambda$, et l'angle $CP'Z$, compris entre eux, sera la différence de longitude du zénith et de l'astre, ou $L - l$; le troisième côté CZ sera la distance de l'astre au zénith, ou Z. On aura donc cette distance, qui est l'inconnue du problême, par la formule

$$\cos Z = \cos \lambda \cos \Lambda \cos (L - l) + \sin \lambda \sin \Lambda.$$

Cette formule est très-simple; mais pour en faire usage, il faudrait calculer la longitude et la latitude du zénith, ce qui est un inconvénient. Il faut donc chercher à éliminer ces deux quantités, et à introduire à leur place l'ascension droite A du zénith, qui est le tems sydéral réduit en arc, comme on l'a vu, pag. 64, et sa déclinaison, ou la latitude géographique du lieu, que je nommerai H, parce qu'elle est égale à la hauteur du pôle de l'équateur sur l'horison du lieu. Nous l'avions nommée D dans les formules de la page 58; mais nous ne pouvons plus ici employer cette lettre qui nous sert pour exprimer les diamètres apparens. Cela posé, les formules de la page 58 nous donnent les relations qui existent entre A, H, Λ et les mouvemens horaires apparens puissent être employés comme uniformes dans cet intervalle. Ainsi, en regardant

---

L, il faut en profiter pour éliminer les deux dernières. Ces relations étaient

$$\sin \Lambda = - \sin \omega \cos H \sin \mathcal{A} + \cos \omega \sin H,$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{tang} H \sin \omega + \sin \mathcal{A} \cos \omega}{\cos \mathcal{A}},$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique sur l'équateur; on a de plus

$$\cos L \cos \Lambda = \cos \mathcal{A} \cos H.$$

Cela posé, si, dans l'expression de $\cos Z$, on développe le terme $\cos(L - l)$, afin de mettre les L et les Λ en évidence, l'expression de $\cos Z$ deviendra

$$\cos Z = \cos l \cos \lambda \,.\, \cos L \cos \Lambda + \sin l \cos \lambda \,.\, \sin L \cos \Lambda + \sin \lambda \sin \Lambda,$$

ou bien

$$\cos Z = \cos l \cos \lambda \cos L \cos \Lambda + \sin l \cos \lambda \,.\, \cos L \cos \Lambda \,.\, \operatorname{tang} L + \sin \lambda \sin \Lambda.$$

Dans cette expression ainsi préparée, on peut éliminer $\cos L \cos \Lambda$, $\operatorname{tang} L$ et $\sin \Lambda$, au moyen de leurs valeurs qui sont données par ce qui précède, et l'on aura

$$\begin{aligned}\cos Z = {} & \cos l \cos \lambda \cos \mathcal{A} \cos H + \sin l \cos \lambda \sin H \sin \omega - \sin \lambda \sin \mathcal{A} \cos H \sin \omega \\ & + \sin l \cos \lambda \sin \mathcal{A} \cos H \cos \omega + \sin \lambda \sin H \cos \omega.\end{aligned}$$

Cette formule donnera la distance zénithale de l'astre directement et sans passer par la longitude et la latitude du zénith.

Comme la correction due à la hauteur de la lune est extrêmement petite, ainsi qu'on l'a vu dans la page 365, où nous avons donné sa valeur, il s'ensuit qu'une petite variation dans la hauteur y fait peu de différence. Ainsi, lorsqu'on aura calculé cette correction pour l'instant présumé du commencement et de la fin de l'éclipse, on l'emploiera comme constante pendant le court intervalle de tems t', qui représente l'erreur du tems présumé de chacune de ces phases, sauf à calculer de nouveau pour l'instant $t + t'$, si t' était un peu considérable.

la correction des époques calculées comme une inconnue t', on formera l'expression analytique de la distance des centres en fonction de t', et cette expression étant égalée à la distance véritable qui doit avoir lieu pour la phase que l'on considère, donnera une équation qui déterminera t'.

Si l'on veut obtenir une exactitude encore plus minutieuse, on calculera de nouveau, pour cette nouvelle époque, les élémens du lieu apparent des deux astres, leurs mouvemens horaires et leurs demi-diamètres, en ayant égard à leur hauteur sur l'horison. Cela fait, on prendra cette nouvelle époque pour origine, et on calculera de la même manière la correction t'' dont elle a besoin. Cette correction sera incomparablement plus petite que t', et elle donnera l'époque cherchée du phénomène avec la dernière exactitude. Ce procédé est exactement le même que nous avons indiqué pour les éclipses de soleil, lorsque nous avons voulu corriger les résultats obtenus par les premières approximations (*).

106. C'est ici le lieu d'examiner un phénomène curieux

(*) Nommons l et l' les longitudes apparentes des deux astres pour l'époque obtenue par la première approximation. Soient λ, λ' leurs latitudes apparentes, m, m', n, n', leurs mouvemens horaires en latitude et en longitude, enfin, soit Δ, la distance apparente des centres qui doit avoir lieu à l'instant de la phase que l'on cherche. En considérant la distance des centres comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle, formé sur les différences de longitude et de latitude, on aura après un tems t',

$$\{l - l' + (m - m')t'\}^2 \cos^2\lambda' + \{\lambda - \lambda' + (n - n')t'\}^2 = \Delta^2,$$

cette équation se transformera, comme les précédentes, en introduisant l'inclinaison α de l'orbite relative, telle qu'on ait

$$\tang \alpha = \frac{n - n'}{(m - m')\cos\lambda'};$$

des éclipses de soleil, je veux parler de la marche de l'ombre lunaire sur le disque terrestre. Nous avons déja remarqué

---

car en éliminant $m - m'$, elle devient

$$\left.\begin{array}{l}(n-n')^2 t'^2 \\ +2.(n-n')\sin\alpha\left\{(l-l')\cos\lambda'\cos\alpha+(\lambda-\lambda')\sin\alpha\right\}t'\end{array}\right\} = \left\{\Delta^2-(l-l')^2\cos^2\lambda'-(\lambda-\lambda')^2\right\}\sin^2\alpha,$$

d'où l'on tire

$$t' = -\frac{\sin\alpha}{n-n'}\left\{(l-l')\cos\lambda'\cos\alpha+(\lambda-\lambda')\sin\alpha\right\}$$
$$\pm\frac{\sin\alpha}{n-n'}\cdot\sqrt{\Delta^2-(l-l')^2\cos^2\lambda'-(\lambda-\lambda')^2+\left\{(l-l')\cos\lambda'\cos\alpha+(\lambda-\lambda')\sin\alpha\right\}^2}.$$

Il ne faut prendre que le signe supérieur du radical, parce qu'il n'y a qu'une des racines qui convient au problème; c'est celle qui donne t' nul, quand la distance Δ, pour laquelle on calcule, appartient réellement au tems t, trouvé par la première approximation; c'est-à-dire, quand on a

$$\Delta^2 = (l-l')^2\cos^2\lambda' + (\lambda-\lambda')^2.$$

Ceci est analogue à ce que nous avons trouvé dans la page 478, pour les éclipses de soleil. Sous cette forme, la valeur de t' qui est fort petite, serait donnée par la différence de deux quantités qui peuvent être beaucoup plus considérables qu'elle. Pour éviter cet inconvénient, il faut multiplier les deux termes de cette valeur par la somme du radical et du premier terme, ainsi que nous l'avons fait dans la page 479, et l'on aura alors

$$t' = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{n-n'}\cdot\left\{\Delta^2-(l-l')^2\cos^2\lambda'-(\lambda-\lambda')^2\right\}}{(l-l')\cos\lambda'\cos\alpha+(\lambda-\lambda')\sin\alpha+\sqrt{\Delta^2-(l-l')^2\cos^2\lambda'-(\lambda-\lambda')^2+\left\{(l-l')\cos\lambda'\cos\alpha+(\lambda-\lambda')\sin\alpha\right\}^2}}.$$

L'application numérique de cette formule est si facile et a tant d'analogie avec celles que nous avons effectuée pour les éclipses de soleil, qu'il est inutile de nous y arrêter.

J'indiquerai seulement la manière dont il faudrait s'y prendre, qu'elle doit se faire d'occident en orient, dans le sens du mouvement propre de la lune ; car cet astre allant plus vîte que le soleil, dans l'orbite apparente qu'il décrit autour de la terre, son ombre doit le suivre et marcher avec lui dans le même sens. Ainsi, un observateur placé dans la lune, et regardant la terre s'éclipser, verrait d'abord l'éclipse commencer par les parties les plus occidentales du disque, et finir par les plus orientales. Pour nous qui sommes placés sur la terre, c'est toujours le bord le plus occidental du soleil qui s'éclipse le premier et le bord oriental le dernier. De sorte que le disque de la lune nous paraît traverser celui du soleil d'occident en orient, par l'excès de son mouvement relatif. Quant à la portion de ce disque qui se trouve ainsi éclipsée, elle dépend des positions respectives de la lune, du soleil et de l'observateur, ce qui y produit de très-grandes variations. Dans les éclipses fort petites, l'inclinaison de l'orbite lunaire peut être assez grande pour que la portion éclipsée du disque solaire se trouve toute entière d'un côté de ce disque. Par exemple, si la lune s'approche de son nœud ascendant pour s'élever vers le pôle boréal de l'écliptique, il est possible que son disque ne rencontre celui du soleil que dans son sommet le plus austral ou même un peu au-delà de ce sommet vers l'occident. En sorte que dans ce cas l'éclipse aurait lieu toute entière dans la partie occidentale du disque du soleil. Le contraire

---

en employant cette formule, pour avoir égard à l'augmentation du diamètre apparent de la lune, produite par sa hauteur sur l'horison. Il faudra d'abord employer ce diamètre calculé pour l'instant t, qui sert d'origine. Avec ce diamètre et la valeur de Δ qui s'en déduit, la formule donnera déja une valeur très-approchée de t', qui suffira pour obtenir la vraie valeur du diamètre apparent. Après quoi un second calcul donnera t' d'une manière exacte.

pourrait arriver dans le nœud descendant, et l'éclipse n'aurait lieu encore que dans la partie occidentale du disque, près de son sommet boréal. Des effets semblables, peuvent encore être occasionnés par le jeu des parallaxes de longitude et de latitude qui fait varier considérablement l'inclinaison apparente de l'orbe lunaire.

D'après cela, on conçoit que la vîtesse de l'ombre et de la pénombre sur la terre doit aussi être sujète à de grandes variations. Cependant elle est toujours très-rapide, et l'étendue entière du disque terrestre, est toujours parcourue par elle dans l'espace de deux heures décimales au plus. Pour mettre ceci en évidence, faisons abstraction de l'inclinaison de l'orbite lunaire; supposons que la lune se meut dans le plan de l'écliptique, et pour plus de simplicité, négligeons encore la parallaxe du soleil qui est extrêmement petite, de sorte que cet astre devra être considéré comme placé à une distance infinie. Dans ces circonstances simplifiées, soit, *fig.* 16, T le centre de la terre, $MM'O$ la section de sa surface par le plan de l'écliptique; TLS la projection du cercle de latitude correspondant à la conjonction. Dans ce cas, la route de l'ombre lunaire sur la surface de la terre suivra le cercle MO résultant de sa section avec l'écliptique. Supposons maintenant qu'à un certain instant après la conjonction, le soleil se trouve sur le prolongement du rayon visuel TS'; et la lune en L' sur le rayon visuel TL' menés l'un et l'autre du centre T. Cela posé, en menant du point L' la droite $L'O$ parallèle à TS', et rencontrant en O la surface terrestre, le point O sera le lieu de l'ombre sur cette surface, et l'angle $TL'O$ sera égal à $L'TS'$, c'est-à-dire au mouvement relatif du soleil sur la lune, depuis la conjonction. Prenons ces astres dans leurs moyennes distances, et n'ayons égard qu'à leurs moyens mouvemens. Celui du soleil est $1°,09516$ par jour, ce qui fait 0°,1095 pour une heure décimale celui de la lune, est par jour 14°,640, ce qui donne 1°,4640 pour son mouvement horaire. La différence 1°,3545 est le mouvement relatif de la lune sur le soleil. C'est donc l'accroissement horaire de l'angle $TL'O$. Et comme cette valeur surpasse déja la parallaxe moyenne 1°,0568 qui représente le diamètre apparent de la terre vue de la lune, on voit que l'axe de l'ombre deviendra tangent à la surface terrestre avant qu'il se soit écoulé une heure décimale depuis la conjonction. Alors l'angle $L'TO$ sera égal à 100° moins la parallaxe horisontale de la lune ; ainsi le centre O de l'ombre aura parcouru pendant ce tems, sur la terre, un angle égal à cette quantité, plus l'angle LTL' décrit par la lune autour de la terre, à partir de la conjonction. Jusqu'ici nous avons fait abstraction du mouvement diurne du ciel, mais il faut y avoir égard si nous voulons considérer les variations du centre de l'ombre, par rapport à un point déterminé de la terre. Pour plus de simplicité, négligeons l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique, supposons que ces deux plans se confondent, en sorte que le cercle $MM'O$ représente l'équateur terrestre, et pour simplifier les raisonnemens, atribuons-lui le mouvement de rotation apparent du ciel, en sens contraire, ce qui ne change rien aux apparences des phénomènes vus de la terre, comme nous l'avons déja dit plusieurs fois. Cela posé, considérons un observateur placé en M à l'instant de la conjonction, c'est-à-dire ayant alors le soleil et la lune à son zénith. Cet observateur, par l'effet du mouvement diurne, se trouvera transporté sur son cercle de M vers M', d'occident en orient. Il courra donc ainsi après l'ombre lunaire qui marche aussi dans ce même sens, mais il ne pourra la rejoindre; car la rotation du ciel étant de 400° en un jour n'est par heure décimale que de 40°; tandis que dans le même tems, la marche de l'ombre lunaire sur le cercle MM' est de plus de 100°. Celle-ci s'éloignera donc de l'observateur avec l'excès de son mouvement; mais par suite de cette disposition, l'observateur verra plus longtems l'éclipse que s'il *était immobile*. Toutefois son mouvement ne pourra jamais égaler la vîtesse de l'ombre, ce qui la rendrait permanente sur un point du globe terrestre.

Cette grande rapidité du mouvement de l'ombre, se voit tout de suite par le moyen du triangle $L'TO$. Dans ce triangle, les côtés $L'T$, OT, sont entre eux, à très-peu près, comme 60 est à 1. Il s'ensuit que les sinus des angles opposés $L'OT$, $TL'O$ conservent aussi le même rapport. De sorte que le premier varie soixante fois plus vîte que le second. L'angle T qui complète le triangle participe donc à cet accroissement rapide suivant la *même* proportion (*).

(*) Nommons r le rayon terrestre OT, et R la distance $L'T$ de la lune au centre de la terre. Désignons chacun des angles en T, O, L', par la lettre qui lui correspond, on aura $O = 200° - (T + L')$; par conséquent

$$\sin (T + L') = \frac{R}{r} \sin L'.$$

Si les angles T et L' sont fort petits en sorte qu'on puisse substituer leur rapport à celui de leurs sinus, on aura simplement

$$T + L' = \frac{R}{r} \cdot L' \cdot \text{ par conséquent } T = \left(\frac{R - r}{r}\right) L';$$

ainsi, dans ce cas, lorsque l'angle L' croît d'une minute, l'angle T croît d'un nombre de minutes exprimé par $\left(\frac{R - r}{r}\right) \cdot 1$. Ce sera, par exemple, de $60'$ si $R = 61 . r$. La valeur de R qui répond à la parallaxe moyenne est $60{,}238 . r$, par conséquent l'accroissement

107. Partons de ce rapport qui deviendra exact, lorsque les angles $TL'O$, $L'TO$ seront fort petits, et cherchons à en déduire le tems que l'observateur placé en M pourra rester dans l'obscurité totale. Pour cela, il faut connaître le mouvement relatif de l'ombre sur lui. Le mouvement relatif de la lune sur le soleil, est comme nous l'avons trouvé $1°,3545$ par heure décimale; ainsi dans une minute décimale de tems, il sera $0°,013545$: ce sera, la valeur de l'angle $TL'O$ une minute après la conjonction. Pour réduire ce mouvement au centre de la terre, il faut le multiplier par 60, ce qui donne $0°,812700$. C'est la valeur de l'angle $L'TO$ pour le même instant. De plus, en vertu de son mouvement propre en longitude, la lune a encore décrit l'angle $L'TL$ qui, dans le même intervalle, est égal à $0°,01464$, puisque son mouvement horaire est $1°,464$. La somme de ces deux angles partiels donnera l'angle total MTO décrit par l'ombre, autour du centre de la terre, dans une minute de tems; et cet angle sera $0°,82734$. Mais dans cet intervalle, celui de l'observateur autour du même centre par l'effet de la rotation de la terre, sera $0°,40$, à raison de $40°$ par heure; le mouvement relatif de l'ombre sur lui, vu du centre de la terre, sera donc $0°,82734 - 0°,40$ ou $0°,42734$ en une minute, et ce sera en vertu de cet excès qu'elle le dépassera. Or nous avons vu dans la page 441 que le demi diamètre de l'ombre pure vue de la lune, est, dans sa plus grande valeur, égal à $0°,0186$; par conséquent la largeur totale de cette ombre sera $0°,0372$, double

---

de l'angle T dans cette circonstance serait égal à $59,238$. L'. Mais nous avons pris le nombre 60 pour la commodité du calcul; la différence n'est d'aucune importance pour l'objet que nous nous sommes proposé, qui est de prendre une idée approchée de la vitesse de l'ombre.

de la précédente. En multipliant cette quantité par 60, on aura $2^{\circ},232$ pour la largeur de l'ombre pure vue du centre de la terre. Cette valeur étant plus que quintuple de la quantité $0^{\circ},42734$ qui exprime le mouvement relatif de l'ombre sur l'observateur en une minute de tems, on voit que la durée totale de son immersion dans l'obscurité totale pourra aller au-delà de cinq minutes de tems décimal, dans les circonstances que nous venons d'assigner. C'est le résultat que nous avions annoncé dans la page 452.

108. Au moyen des principes que nous venons d'exposer, on peut prédire et déterminer les instans des éclipses avec la dernière précision. Mais afin d'éviter d'entreprendre des calculs inutiles, il serait avantageux de trouver quelque moyen simple de prévoir quand elles auront lieu. Cela est très-facile. Par exemple, si nous considérons d'abord les éclipses de soleil et de lune, on conçoit tout de suite qu'il suffit de trouver une période de tems après laquelle le soleil et la lune se trouvent exactement, ou à fort peu près, dans les mêmes positions, par rapport au nœud de l'orbe lunaire. Car après cet intervalle, les mouvemens de ces astres recommençant de la même manière, les éclipses qui en dépendent devront aussi se reproduire à-peu-près dans le même ordre et successivement. Il ne peut s'y trouver de différences que celles qui proviennent des inégalités auxquelles les mouvemens du soleil et de la lune sont assujétis. Tout se réduit donc à chercher une semblable période, et pour la trouver, il suffit d'accorder la révolution synodique de la lune et la révolution synodique de ses nœuds.

Or, on a vu précédemment que la révolution synodique de la lune est de $29^{j},530588$, et la révolution synodique des nœuds de $346^{j},61963$. Ces deux quantités sont entre elles, à fort peu près, comme 19 est à 223, c'est-à-dire qu'après 223 révolutions synodiques, le nœud de la lune est revenu dix-neuf fois à la même position, par rapport au soleil. La différence est $0^j,45185$, comme on peut s'en assurer très-facilement, et elle répond à $0^o,5214$ dont la longitude du nœud se trouve plus grande qu'elle ne l'était dans sa position synodique ancienne (*). Or 223 mois lunaires représentent $6585^j,321124$, ou 18 années tropiques moyennes et 11 jours : ainsi, après cet intervalle, toutes les éclipses, soit de soleil, soit de lune, doivent reparaître aussi dans le même ordre ; ce qui donne un moyen simple de les prédire, quand on connaît celles qui ont eu lieu dans la période précédente.

Le retour des éclipses, après 223 lunaisons était déja connu du tems des anciens astronomes chaldéens. Ils appelaient cette période *Saros* ; et on la trouve souvent désignée sous cette dénomination dans les ouvrages des chronologistes modernes.

De même si l'on compare la révolution sydérale de la lune, qui est de $27^j,321661$ avec la révolution sydérale de ses nœuds, qui est de $6793^j,42118$, on voit qu'elles sont dans le rapport de 17 à 4227 ; c'est-à-dire qu'après 4227 révolutions sydérales de la lune, il s'est écoulé à fort

---

(*) En effet, on vient de voir que 19 révolutions synodiques du nœud, *surpassent en durée* 223 révolutions synodiques de la lune, et la différence est $0^j,45185$. Dans cet espace de tems, le mouvement synodique du nœud serait $\dfrac{400^o . 0^j,45185}{346^j,61963}$, ou $0^o,5214$; et comme ce mouvement est rétrograde, on voit qu'après 223 mois lunaires, la longitude du nœud sur l'écliptique aura parcouru en rétrogradant 19 circonférences entières *moins* 0^o5214. Cette longitude sera donc plus grande de $0^o,5214$ qu'elle ne l'était à l'époque précédente.

peu près 17 révolutions sydérales du nœud. La différence est de $0^j,50$. Alors, la position de la lune, relativement à ses nœuds et aux divers points du ciel, redevient à-peu-près la même. Les occultations d'étoiles doivent donc revenir aussi dans le même ordre. D'après la durée de la révolution sydérale, cette période est de $115488^j,661$ ou 316 années tropiques et 72 jours $\frac{1}{10}$.

Mais les rapports dont il s'agit n'étant pas rigoureusement exacts, ces lois ne peuvent être regardées que comme des approximations, et l'ordre observé dans chaque période, doit s'altérer à la longue, ce que l'expérience confirme. Les inégalités périodiques qui affectent le mouvement de la lune, troublent aussi ces retours, parce qu'elles n'ont pas toutes pour périodes un multiple de la révolution synodique ou sydérale. Cependant comme ces inégalités sont peu considérables, on se sert du rapport que nous venons d'établir pour trouver à-peu-près les époques des éclipses, et l'on calcule ensuite, par les tables astronomiques, l'instant précis auquel elles doivent arriver. Si l'on voulait en approcher d'abord davantage, il suffirait d'avoir égard aux principales inégalités de la longitude de la lune.

Une autre cause d'altération provient des grandes inégalités séculaires, dont nous avons, plus haut, développé l'existence ; et qui, dans l'immense durée de leur cours, changent sensiblement les valeurs des petites périodes que nous pourrions imaginer ; en sorte que toutes les tentatives que l'on pourrait faire à cet égard, seront toujours inutiles.

Pour trouver directement et indépendamment de ces périodes, les sizygies où il peut y avoir éclipse, on commence par calculer, au moyen, des tables de la lune, l'époque de chaque conjonction moyenne. On emploie communément pour cet objet la méthode des *épactes astronomiques* ; voici en quoi elle consiste.

L'épacte d'une année est l'âge de la lune au commencement de cette année; c'est-à-dire, le tems qui s'est écoulé ou qui doit s'écouler depuis la dernière conjonction de l'année précédente, jusqu'au 31 décembre, à midi tems moyen, s'il s'agit d'une année commune, ou jusqu'au 1er janvier, à midi tems moyen s'il s'agit d'une année bissextile. Je ne parle ici que des anciennes tables. On joint ces épactes aux autres élémens de la lune pour le commencement de l'année. L'épacte de chaque mois est ensuite ce qu'il faut ajouter à l'épacte de l'année pour avoir l'âge de la lune au commencement de ce mois.

Connaissant l'épacte d'un mois quelconque, il est facile de trouver les conjonctions moyennes qui peuvent arriver ce mois-là. Car, d'abord, en retranchant l'épacte d'une révolution synodique de la lune, c'est-à-dire de $29^j,530588$, le reste indiquera le jour du mois et l'heure du jour où arrivera la première conjonction ; je dis la première, car il peut quelquefois y en avoir deux dans le même mois, éloignées l'une de l'autre d'une révolution synodique; mais il ne peut y en avoir davantage, puisque les mois sont au plus de 31 jours.

Quand on connaît les époques des conjonctions moyennes ou des nouvelles lunes, on trouve celles des oppositions ou des pleines lunes, en retranchant des premières une demi-révolution synodique ou $14^j,765294$.

Les instans des conjonctions et des oppositions étant ainsi déterminés, pour savoir s'il y aura éclipse de soleil dans les unes ou éclipse de lune dans les autres, il faut calculer la distance de la lune à son nœud, et voir si elle tombe dans les limites où les éclipses peuvent arriver. Voici ces limites calculées par M. Delambre.

$$\begin{array}{l}\text{Si la dist. du } \odot \text{ au} \\ \text{nœud de la ☾ est}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{moindre que } 10^\circ \\ \text{plus grande} \\ \quad \text{que} \ldots\ldots \ 14^\circ\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{l'éclipse} \\ \text{de ☾ est}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{sûre.} \\ \\ \text{impossible.}\end{array}\right.$$

Entre 10° et 14° il y a du doute, il faut un calcul plus exact. Il s'agit ici de degrés décimaux ou de grades.

$$\begin{array}{l}\text{Si la dist. du } \odot \text{ au} \\ \text{nœud de la ☾ est}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{moindre que } 15^\circ{,}2 \\ \text{plus grande} \\ \quad \text{que} \ldots\ldots \ 21^\circ{,}2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{l'éclipse} \\ \text{de } \odot \text{ est}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{sûre.} \\ \\ \text{impossible.}\end{array}\right.$$

Entre 15°.2 et 21.2, il y a du doute; il faut un calcul plus exact.

On voit que ces limites sont plus étendues pour les éclipses de soleil que pour les éclipses de lune. Les premières doivent donc être plus fréquentes; mais elles ne sont visibles que de certains points de la terre, à cause de la parallaxe qui les modifie, au lieu que les éclipses de lune sont visibles de tous les points de l'hémisphère terrestre qui a la lune sur l'horison pendant l'éclipse.

Dans les nouvelles tables publiées par le Bureau des longitudes, on n'a point indiqué les épactes, mais comme on y trouve les valeurs des longitudes moyennes du soleil ou de la lune, ainsi que les distances de ces deux astres au nœud de l'orbe lunaire, ces argumens suffisent pour calculer les époques des sizygies et de toutes les autres phases, aussi brièvement et plus exactement que par la méthode des épactes. La manière de faire ce calcul est expliquée dans les tables dont nous parlons.

On trouve ordinairement dans les almanachs certains nombres que l'on appelle *épactes ecclésiastiques*. Ils servent à trouver les époques auxquelles l'Eglise chrétienne place les fêtes et les cérémonies religieuses dont le retour est réglé sur la marche de la lune. Mais comme les intercalations employées par l'Eglise pour cet objet, sont réglées conformément aux décisions des conciles, et non pas sur la marche réelle de la lune, il n'est point de notre ressort de nous étendre sur ce sujet.

Il me reste à parler d'une précaution indispensable que doivent prendre les astronomes qui veulent faire une observation d'éclipse. Dans les éclipses de soleil, la face que la lune nous présente, ne reçoit point les rayons de cet astre, elle est donc complètement invisible ; car la faible lueur de la lumière réfléchie par la terre à cette distance, est entièrement effacée par le grand éclat du soleil. Aussi ne s'apperçoit-on du passage de la lune sur le disque du soleil, que par l'impression qu'elle y produit lorsqu'elle commence à l'échancrer ; mais il est impossible de saisir le premier instant de ce phénomène, si l'on ne sait d'avance l'instant où il arrivera, instant qui peut se calculer à quelques secondes près par les tables, et si l'on ne sait aussi dans quelle partie du disque du soleil se fera la première impression de l'éclipse. La même difficulté se présente dans les passages des planètes sur le soleil, et dans les émersions des étoiles ou des planètes que la lune occulte. Il faut absolument savoir à quel point du disque lunaire l'astre doit sortir pour être prêt à observer le premier indice de sa réapparition.

Prenons ce dernier cas qui est le plus général, et dont tous les autres peuvent se déduire. On calcule d'abord par les tables l'instant précis de l'émersion de l'astre ; et les différences de longitude et de latitude entre son centre et celui de la lune à cet instant. De là il est facile de conclure l'angle formé par la ligne des centres avec le cercle de latitude qui passe par la lune ; car la tangente de cet angle est égale à la différence de longitude transportée à la hauteur de l'astre occulté, et divisée par la différence des latitudes. On a donc ainsi l'arc du disque lunaire compris entre le point d'émersion et le point du disque le plus voisin du plan de l'écliptique. Cet arc est représenté par SE dans la figure 15, où ♈NL représente l'écliptique, ♈ l'équinoxe du printems, C le centre de la lune, Cl son cercle de latitude, et S le point de son disque où se fait l'émersion.

Maintenant soit Z le zénith du lieu de l'observation, en sorte que ♈L soit sa longitude, et LZ sa latitude, rapportées l'une et l'autre à l'écliptique. Le grand cercle ZC représentera le plan du vertical où le centre de la lune se trouve; car ce vertical doit contenir le centre de la lune et le zénith. Ces deux conditions suffisent pour déterminer l'angle NCl formé par le cercle de latitude de la lune avec le vertical ZC; et en lui ajoutant l'angle lCS que nous venons de calculer tout-à-l'heure, la somme donnera l'arc SH du disque lunaire compris entre le point d'émersion S et le point SH du disque qui est le plus éloigné du zénith Z, et par conséquent le plus bas sur l'horison. Ici nous comptons cet arc depuis le point le plus bas du disque en allant vers l'orient, et de 0° à la circonférence entière. Les formules une fois établies sur cette construction, s'appliquent à tous les cas, sans qu'il soit besoin de construire pour chacun d'eux une figure particulière. Il suffit d'observer fidèlement les règles des signes algébriques (*). Si nous voulons appliquer

(*) Soit l la longitude apparente du centre de la lune et λ sa latitude apparente à l'instant de l'émersion; soient, à ce même instant, l' et λ' la longitude et la latitude apparente de l'astre occulté;

ce cas aux éclipses de soleil, il n'y a qu'à substituer dans les formules le centre du soleil au centre de la lune; alors, comme la latitude du soleil est toujours nulle, les formules se simplifient.

Au moyen de ce calcul préparatoire, on sait toujours, avec une exactitude très-suffisante, sur quel point du disque de la lune ou du soleil il faut diriger son atten-

---

appelons U l'angle SCE, V l'angle ECH, nous aurons d'abord

$$\operatorname{tang} U = \frac{(l' - l)\cos\lambda'}{\lambda - \lambda'}.$$

Maintenant désignons par L la longitude γA du zénith Z, et par Λ sa latitude LZ. Prolongeons les cercles de latitude de la lune et du zénith jusqu'à leur rencontre au pôle de l'écliptique en P'. Cela posé, dans le triangle sphérique $CP'Z$, on connaîtra trois choses, savoir : le côté $P'Z$, ou $100° - \Lambda$, le côté $P'C$, ou $100° - \lambda$, et l'angle compris $CP'Z$, égal à la différence de longitude du zénith et de la lune, ou à $L - l$; on aura donc l'angle $P'CZ$, ou son opposé ECH, que l'on cherche par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin(L - l)}{\operatorname{tang}\Lambda\cos\lambda - \sin\lambda\cos(L - l)}.$$

On pourrait éliminer de cette expression la longitude et la latitude du zénith, précisément comme nous l'avons fait dans la note de la page 499, et l'on en tirerait la valeur de tang V en fonction de l'ascension droite A du zénith, qui est donnée par le tems, et de sa déclinaison H qui est constante et égale à la hauteur du pôle; on trouverait ainsi

$$\operatorname{tang} V = \frac{\cos l \operatorname{tang} H \sin\omega + \cos l \sin A \sin\omega - \sin l \cos A}{\left\{\begin{array}{c}\cos\lambda \operatorname{tang} H \cos\omega - \cos\lambda \sin A \sin\omega - \sin\lambda \cos l \cos A \\ - \sin\lambda \sin l \operatorname{tang} H \sin\omega - \sin\lambda \sin l \sin H \cos\omega\end{array}\right\}}$$

mais comme cette formule est assez compliquée, peut-être est-il aussi tion, et l'observateur ainsi prévenu, peut saisir l'instant du phénomène avec toute la précision dont ses organes sont susceptibles.

---

simple de calculer directement Λ et L par les formules de la page 58, qui donnent, dans le cas actuel

$$\sin \Lambda = -\sin \omega \cos H \sin \mathcal{A} + \cos \omega \sin H,$$

$$\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{tang} H \sin \omega + \sin \mathcal{A} \cos \omega}{\cos \mathcal{A}}.$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique, et $\mathcal{A}$ le terme sydéral déduit en arc comme nous l'avons vu dans la page 64.

Nous avons déja trouvé l'angle U ou SCl par la formule

$$\operatorname{tang} U = \frac{(l' - l) \cos \lambda'}{\lambda - \lambda'},$$

quand on aura calculé les angles U et V, on aura

$U + V =$ distance du point le plus bas du disque au point d'émersion, en allant vers l'orient, et de o à 400°.

S'il s'agit d'une éclipse de soleil, il faut substituer son centre à celui de la lune; dans ce cas, $\lambda = 0$, parce que la latitude du soleil est toujours nulle, et l'on peut supposer aussi $\cos \lambda' = 1$, à cause de la petitesse de la latitude de la lune dans les éclipses.

Il faut remarquer que l, λ, l' et λ', sont les longitudes et latitudes *apparentes* des deux astres.

CHAPITRE XIX.

De la mesure des Longitudes par l'observation des Éclipses et par les distances de la Lune aux étoiles.

109. Il est de la dernière importance pour le salut des navigateurs, de connaître à chaque instant la position de leur navire sur le globe terrestre; d'y marquer le chemin qu'ils ont fait, et la suite des points qu'ils ont parcourus. Sans cette connaissance, ils peuvent manquer le but de leur voyage, et s'exposer mille fois à périr en se brisant contre des côtes qu'ils croiraient encore fort éloignées. Aussi l'intérêt du commerce et de la navigation a-t-il fortement attiré l'attention des savans sur ces objet, et comme les résultats auxquels on est parvenu sont extrêmement satisfaisans, je présenterai ici sous un même point de vue les méthodes que l'on a successivement employées pour amener la détermination des longitudes au degré de perfection et d'exactitude, où elle se trouve aujourd'hui. Quant aux détails des procédés et à leurs applications pratiques, on trouvera dans le Traité d'astronomie nautique, tout ce que l'on peut desirer sur cet objet important.

La position d'un lieu sur la terre se détermine toujours par deux élémens : la latitude et la longitude géographiques. Le premier est facile à reconnaître, même à la mer, en observant les hauteurs méridiennes des astres, dont on connaît la déclinaison ; mais la recherche de la longitude est beaucoup plus difficile.

110. On a d'abord tâché de l'obtenir, en observant la direction du vaisseau, et sa vîtesse depuis le point de départ.

Pour observer la direction, on se sert de l'*aiguille aimantée*, que l'on nomme *boussole* ou *compas de mer*. Cet instrument a été décrit avec détail dans le premier livre. Je ne rappellerai ici que ses propriétés générales. On sait par expérience qu'un barreau de fer aimanté et librement suspendu, prend dans chaque lieu une direction constante, peu différente de la ligne nord et sud, et dont l'azimuth peut être déterminé par des relèvemens d'objets célestes. En comparant cette direction, qui peut être supposée constante, avec celle du navire qui est variable, on détermine l'angle que celle-ci fait avec la première. On a expliqué dans le premier livre, pag. 468, la manière de faire cette observation. L'on connaît ainsi le sens dans lequel le vaisseau a marché, ou, dans le langage des marins, le *rumb de vent* qu'il a suivi (*).

111. Pour connaître l'étendue qu'il a parcourue, on jette à la mer un morceau de bois attaché à une longue corde ; c'est ce qu'on appelle un *loc*. On lâche cette corde à mesure que le navire avance ; et après un certain tems,

(*) La marche du vaisseau ne se fait pas toujours suivant la direction de sa quille ; cela n'est ainsi que quand on a le vent arrière ; mais le plus souvent, le vent n'étant pas directement favorable à la route que l'on veut suivre, on se trouve obligé d'orienter les voiles obliquement, et le vaisseau s'avance ainsi dans une direction oblique ; mais comme il fend la mer avec force, il laisse toujours derrière lui une trace qui subsiste fort longtems, et qui indique sa véritable direction : c'est cette trace qu'on relève avec la boussole.

qui est ordinairement d'une demi-minute, on mesure la longueur que l'on a *filée*. En supposant le flotteur immobile, cette longueur indique le chemin fait par le navire, dans l'intervalle; et l'on en conclut proportionnellement le chemin qu'il doit faire pendant un tems plus considérable.

Pour faciliter cette opération et pouvoir mesurer la longueur de la corde, même dans l'obscurité de la nuit, on la partage en intervalles égaux par des nœuds dont la distance est la 360^{eme}. partie d'une lieue marine, ou environ $15^m,23$ (47 pieds). On estime le tems par le moyen d'un sablier qui se vide précisément dans une demi-minute sexagésimale.

Cette méthode suppose que le flotteur reste fixe et immobile sur la surface de la mer, au lieu où on l'a jeté. Cela n'est jamais vrai à la rigueur, et quelque soin que l'on prenne à filer le cable, on ne peut éviter de produire une faible résistance qui rapproche un peu le flotteur. De plus, les courans qui se rencontrent souvent dans la mer, doivent lui communiquer toute leur vîtesse, et, suivant les circonstances, l'éloigner du navire, ou l'en rapprocher. Aussi, entre les tropiques, où les vents alisés produisent des courans constans, a-t-on vu quelquefois des pilotes, trompés par leur *estime*, altérer la durée de leur sablier, ou la distance de leurs nœuds.

On voit donc que ces méthodes sont extrêmement imparfaites; cependant, en les employant avec défiance, on peut encore les regarder comme une approximation utile. Connaissant la vîtesse du navire, on trouve le chemin qu'il a fait sur chaque rumb de vent qu'il a parcouru, et en portant ces résultats sur une carte, depuis le point de départ, on voit le lieu où le navire doit se trouver.

Mais si les navigateurs ne rectifiaient ce procédé par toutes les ressources que leur donne l'expérience, ils s'exposeraient à de grandes erreurs, et courraient les plus grands dangers.

112. Les montres marines offrent une comparaison beaucoup plus sûre. Toutes les fois que, lorsque le tems est serein, on peut trouver l'heure par la hauteur du soleil, ou par celle des étoiles, dont l'ascension droite et la déclinaison sont connues. On sait de plus, par la montre, quelle heure on compte au même instant dans le lieu où la montre a été réglée, et que l'on a pris pour point de départ. La différence des heures comptées ainsi au même instant à bord du navire, et sur le premier méridien, donne la différence des longitudes; et comme la latitude peut être facilement observée, on a toutes les données nécessaires pour trouver le lieu du navire sur le globe terrestre. On trouvera dans l'Astronomie nautique les détails pratiques de cette importante application, dont nous avons déja dit un mot dans le premier livre, tom. Ier., pag. 176.

Mais les montres marines sont encore trop rares pour pouvoir être généralement employées. D'ailleurs, quelque soin qu'on ait mis à les construire, il serait imprudent de s'y abandonner, puisqu'une infinité de causes imprévues peuvent déranger leur marche. Il faut donc chercher encore quelque moyen plus sûr et plus invariable, qui puisse servir à les vérifier et à les remplacer. On obtient tous ces avantages par les observations astronomiques.

113. Nous avons indiqué dans le premier livre comment on pouvoit déterminer les différences de longitudes géographiques par l'observation des phénomènes astronomiques instantanées, tels que les éclipses de lune, de soleil, les occultations d'étoiles par la lune, et les distances de la

lune au soleil et aux étoiles. Maintenant que nous savons calculer toutes les circonstances des éclipses, nous allons entrer dans quelques détails sur cette importante application de l'astronomie.

114. Les éclipses de lune semblent d'abord les plus favorables à la détermination des différences de longitude; car l'entrée de la lune dans l'ombre terrestre, a lieu au même instant physique, pour tous les points de l'hémisphère terrestre qui est alors tourné vers cet astre, c'est-à-dire pour tous les lieux qui peuvent observer l'éclipse. Ainsi, en supposant que l'on ait déterminé dans chaque lieu le tems vrai de cette observation, la différence des tems convertie en degrés de l'équateur, donnera immédiatement la différence des longitudes sans aucune autre préparation.

115. Mais dans la pratique, cette méthode est sujète à un inconvénient très-grave; la lune avant de pénétrer dans l'ombre terrestre, entre d'abord dans la pénombre, et cette pénombre devient de plus en plus intense, à mesure qu'elle s'approche davantage de l'ombre pure. Il résulte de là que l'éclat du disque lunaire s'affaiblit graduellement par des nuances insensibles, et l'instant où il entre dans l'ombre pure, instant qui doit marquer le commencement de l'éclipse, ne peut jamais être assigné avec précision. On peut affaiblir cette inexactitude en répétant la même observation sur les diverses taches de la lune qui entrent successivement dans l'ombre, et qui, ayant des formes constantes, sont connues des observateurs. Mais quoique cette répétition soit propre à diminuer l'erreur du résultat moyen, par l'effet des compensations fortuites qu'elle amène, l'incertitude de chaque observation en particulier est beaucoup trop grande pour que l'on puisse compter sur leur ensemble avec quelque apparence de probabilité. Aussi

l'emploi des éclipses de lune, pour la détermination des longitudes, est-il aujourd'hui généralement abandonné.

116. Les éclipses de soleil et les occultations d'étoiles sont infiniment préférables; car l'instant où ces phénomènes commencent et celui où ils finissent, peuvent être observés avec la dernière précision. Il est vrai qu'ils exigent plus de calcul, parce que l'effet des parallaxes rend leurs apparitions différentes pour les différens points de la terre. Mais comme on peut avoir égard à ces différences par le calcul, cette circonstance n'ôte rien à l'exactitude du procédé.

Ce calcul étant à fort peu près le même pour les éclipses de soleil ou d'étoiles, ou même de planètes, je l'expliquerai ici en général pour ce dernier cas qui renferme les deux autres; car le soleil peut être considéré comme une planète qui n'a point de latitude, et une étoile peut être considérée comme une planète qui n'a ni mouvement propre ni parallaxe.

Je suppose donc généralement que dans un lieu quelconque de la terre, on ait observé l'occultation d'un astre par la lune, et que l'on connaisse aussi pour le même instant le tems vrai, soit solaire, soit sydéral, au méridien du lieu. On demande la longitude géographique de ce lieu, rapportée au méridien de Paris.

Pour y parvenir le plus simplement et le plus directement possible, j'admettrai d'abord que par quelque essai préliminaire, par des cartes géographiques, ou par des résultats d'observations nautiques, telles que l'*estime*, on connaisse déja à-peu-près la longitude qu'il s'agit de déterminer exactement. Ce cas est celui qui se présente presque toujours dans les applications : quand nous l'aurons résolu, je donnerai le moyen de se passer de ces notions préliminaires, ou plutôt je montrerai comment on peut les obtenir.

Connaissant la différence des longitudes estimée, réduisez-la en tems, à raison de 15 degrés par heure sexagésimale, et en l'appliquant au tems vrai observé, que je suppose être le tems sydéral, vous aurez à-peu-près le tems sydéral vrai de l'observation, compté au méridien de Paris. Calculez, pour cet instant, par les tables astronomiques les longitudes et latitudes de la lune et de l'astre vues du centre de la terre, et déduisez-en les parallaxes de longitude et de latitude dans le lieu de l'observation pour l'instant présumé. Cherchez aussi pour le même instant les diamètres apparens des deux astres. Cela fait, calculez de nouveau ces mêmes élémens pour un instant éloigné d'une heure sydérale du premier, et vous aurez ainsi les mouvemens horaires apparens en longitude et en latitude pour le lieu présumé de l'observation. Alors, supposons que l'instant vrai de l'observation, en tems du méridien de Paris, diffère de l'instant presumé d'une certaine quantité inconnue de tems sydéral que nous nommerons t. Au moyen de cette indéterminée, nous pouvons exprimer, d'une manière générale, les différences de latitude et de longitude apparentes des deux astres à un autre instant quelconque voisin du premier; en supposant toutefois que ces élémens, ainsi que les parallaxes de longitude et de latitude, varient, dans l'intervalle, proportionnellement au tems. Nous aurons donc ainsi l'expression analytique de la distance des deux astres; et en égalant cette distance à la somme des demi-diamètres, nous aurons une équation du second degré en t qui déterminera les valeurs de cette quantité au commencement et à la fin de l'éclipse. De ces deux valeurs, on prendra celle qui répond à la phase réellement observée, et en l'ajoutant au tems sydéral présumé, ou l'en retranchant, suivant son signe, nous aurons le tems vrai que l'on comptait à Paris, à l'instant de l'observation. Nous connaissons déjà celui que l'on a observé dans le lieu ; en multipliant la différence des tems par 15 pour la réduire en arc, nous aurons la différence des longitudes.

Si l'instant auquel on a observé l'éclipse n'était pas donné en tems sydéral, mais en tems solaire vrai, on l'ajouterait de même à la différence présumée des longitudes convertie en tems, à raison de 15 degrés pour une heure sexagésimale; mais alors la somme exprimerait la valeur approchée du tems solaire vrai que l'on comptait à Paris au moment de l'observation. Il faudrait donc aussi regarder la correction t comme exprimant un intervalle de tems solaire vrai, et par conséquent il faudrait calculer les mouvemens apparens pour un intervalle *donné* de tems solaire. Quand on aurait trouvé t, on en conclurait la valeur exacte des tems solaires vrais, comptés au même instant dans les deux lieux, et la différence convertie en arc, à raison de 15 degrés par heure sexagésimale, donnerait également la différence des longitudes en degrés de l'équateur. En général il faut que la correction t soit toujours exprimée dans la même espèce d'unité par laquelle on a exprimé le tems vrai dans le lieu et à l'instant de l'observation.

Si l'on voulait obtenir la différence des longitudes avec plus de précision encore, il n'y aurait qu'à considérer les deux instans ainsi déterminés pour le commencement et la fin de l'éclipse, comme de simples approximations. On recommencerait donc le calcul, en partant de ces nouvelles données, et on obtiendrait ainsi les petites corrections qu'elles peuvent exiger encore. Il est clair que l'erreur de la première approximation, porte principalement sur le calcul des parallaxes de longitude et de latitude qui, variant avec le tems, d'une manière qui n'est pas uniforme, ne peuvent pas être transportées avec sûreté à une époque un peu éloignée de celle pour lesquelles on les détermine. Il peut y avoir aussi quelque erreur provenant des variations du diamètre apparent de la lune, et des mouvemens horaires pendant le tems t. La nécessité d'un second calcul dépendra donc de l'exactitude plus ou moins grande des données dont on fait d'abord usage. Si l'incertitude n'est que de quelques minutes de tems, comme cela a lieu presque toujours, il suffira de la première approximation. Mais alors, au lieu de calculer les élémens des deux astres et les parallaxes par les *tables* pour deux instans éloignés d'une heure, il faudra les calculer pour deux instans éloignés de quelques minutes de tems, par exemple de dix minutes, afin que l'instant véritable déduit de ces calculs, ne se trouve pas éloigné de ceux pour lesquels on a calculé les élémens des deux astres, et soit cependant compris entre eux (*).

(*) Cette méthode, quoique fort simple, deviendra encore plus facile à saisir quand nous l'aurons réduite en formule. Soit T' le tems vrai du phénomène au méridien du lieu de l'observation, T la différence de longitude estimée, convertie en tems et comptée, à partir du méridien de Paris, d'orient en occident comme les angles horaires; $T+T'$ sera, par hypothèse, le tems vrai à Paris au même instant. Comme nos tables sont construites pour le méridien de Paris, nous pouvons calculer pour cet instant, les longitudes apparentes l, l' de la lune et de l'astre dans le lieu présumé de l'observation; les latitudes apparentes λ. λ'; les demi-diamètres et les mouvemens *apparens* m, m', n, n' en longitude et en latitude, pendant une minute de tems de même nature que $T+T'$. Alors pour un autre instant postérieur à $T+T'$ de t minutes, la différence apparente des longitudes des deux astres sera $l-l'+(m-m')\,t$, la différence des latitudes sera $\lambda-\lambda'+(n-n')\,t$; par conséquent, si l'on nomme Δ la somme

Enfin, si l'on ignorait entièrement la différence des longitudes, on adopterait d'abord pour cette différence, celle des tems auxquels l'éclipse est arrivée dans les deux lieux. Par exemple, si elle a commencé à 1^h de tems vrai dans le lieu de l'observation, et qu'à Paris, suivant

---

des demi-diamètres apparens des deux astres, on aura, au commencement et à la fin de l'éclipse,

$$\{l - l' + (m - m')t\}^2 \cos^2 \lambda' + \{\lambda - \lambda' + (n - n')t\}^2 = \Delta^2.$$

Cette équation, analogue à celles que nous avons déja traitées tant de fois dans le calcul des éclipses, donnera la valeur de t, qui, ajoutée à $T + T'$, ou retranchée, suivant son signe, donnera . . . $T + T' + t$ pour la valeur du tems vrai que l'on comptait à Paris à l'instant de l'observation, et, par conséquent, $T + t$ sera la différence corrigée des longitudes exprimée en *tems sexagésimal*. Il suffira de la multiplier par 15 pour l'avoir en arc. J'emploie ici le tems sexagésimal, parce que les tables de la lune sont encore construites d'après cette division.

Maintenant, si l'on recommence les mêmes calculs en prenant au lieu de T, $T + t$ pour la différence présumée des tems et des longitudes, on formera la seconde approximation dont nous avons parlé dans le texte; s'il en résulte une nouvelle correction t', elle sera incomparablement moindre que t, et $T + t + t'$ sera la différence des longitudes avec la dernière précision. On voit que le problême exige seulement l'observation d'une des phases de l'éclipse; mais si l'on a observé les deux phases, le commencement et la fin, elle se serviront de vérification.

La marche du calcul sera la même pour les deux phases. Mais les époques des observations étant différentes, les valeurs des parallaxes, des mouvemens horaires et des demi-diamètres le seront aussi, de sorte qu'il faudra les calculer séparément par les tables pour chacun de ces deux instans.

Quant à la variation du diamètre apparent de la lune pendant les intervalles t et t', on en tiendra compte, comme nous l'avons expliqué dans la note de la page 502.

les tables, elle ait dû commencer à 2^h. On supposera 1^h pour la différence des longitudes estimée ; cela suffira pour déterminer une valeur plus exacte de la différence cherchée, et un second calcul, établi sur ce premier résultat, donnera toute la précision desirable.

117. Dans la question que nous venons de traiter, on suppose les tables exactes, et l'on calcule la différence des longitudes géographiques d'après l'observation de l'éclipse. Réciproquement si la différence des longitudes était donnée, l'observation de l'éclipse pourrait servir à vérifier les tables, et ferait connaître leurs erreurs. Supposons, par exemple, que le lieu de l'observation soit Paris. On calculera par les tables quels étaient, pour Paris, à l'instant de l'observation, les élémens du lieu apparent de la lune et de l'astre qu'elle a dû occulter. Je suppose que celui-ci puisse être considéré comme exactement connu. Alors, en représentant les erreurs de la longitude et de la latitude de la lune, chacune par une indéterminée, on formera l'expression algébrique des différences en longitude et en latitude de la lune et de l'astre ; on en déduira l'expression de leur distance ; et en l'égalant à la valeur de leurs demi-diamètres, on aura une équation de condition entre les deux erreurs présumées (*).

On recommencera le même calcul pour la fin de l'éclipse, mais on pourra considérer que les erreurs de la longitude et de la latitude de la lune sont les mêmes qu'au com-

(*) Soient l et λ la longitude et la latitude *apparentes* d'un des astres, calculées par les tables pour l'instant du commencement de l'éclipse, et relativement au méridien du lieu où l'on a fait l'observation. Nommons x et y les erreurs qu'elles comportent ; soient l', λ', x', y' les quantités analogues pour le second astre ; enfin, soit Δ la somme mencement ; car les tables étant construites sur les formules analytiques, déduites de la théorie de l'attraction, ne peuvent point donner d'erreurs sur la loi des résultats, mais seulement sur leurs valeurs absolues. L'observation

---

de leurs demi-diamètres à ce même instant. La distance Δ pouvant être considérée comme fort petite, on aura

$$\left\{l-l'+x-x'\right\}^2\cos^2\lambda'+\left\{\lambda-\lambda'+y-y'\right\}^2=\Delta^2,$$

ce qui donnera une relation entre les différences des erreurs des tables en longitude et en latitude relativement aux deux astres. Cette équation étant développée pourra être mise sous la forme suivante :

$$2\cos^2\lambda'(l-l')(x-x')+2(\lambda-\lambda')(y-y')=\begin{cases}\Delta^2-\cos^2\lambda'(l-l')^2-(\lambda-\lambda')^2\\-\cos^2\lambda'(x-x')^2-(y-y')^2,\end{cases}$$

Répétons le même calcul pour l'instant de la fin de l'éclipse, en marquant les élémens qui s'y rapportent avec un accent inférieur, excepté les erreurs des tables qui ne changent point ; nous aurons ainsi

$$2\cos^2\lambda'_{,}(l_{,}-l'_{,})(x-x')+2(\lambda_{,}-\lambda'_{,})(y-y')=\begin{cases}\Delta_{,}^2-\cos^2\lambda'_{,}(l_{,}-l'_{,})^2-(\lambda'-\lambda'_{,})^2\\-\cos^2\lambda'_{,}(x-x')^2-(y-y')^2.\end{cases}$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer les deux différences $(x-x')$, $(y-y')$. Comme elles sont chacune du second degré, il semble qu'elles doivent donner, pour ces différences, quatre valeurs. Mais dans le cas actuel, les racines propres au problème sont particularisées par la condition que les erreurs des tables ne peuvent être que fort petites. Quand un des astres observés sera le soleil ou la lune, comme leurs diamètres apparens sont deux ou trois cents fois plus grands que les erreurs que l'on peut supposer aux tables, il y aura toujours au moins une des différences $l-l'$, $\lambda-\lambda'$, qui sera très-considérable comparativement à $x-x'$ ou $y-y'$. Supposons que ce soit la première ; alors le terme $2\cos^2\lambda'.(l-l')(x-x')$ sera très-grand par rapport à $\cos^2\lambda'(x-x')^2$. On pourra donc négliger celui-ci par rapport à l'autre, au moins dans une première approximation : alors $(x-x')$ sera donné par une équation du premier degré ; et $y-y'$

de la fin de l'éclipse donnera donc encore une équation de condition entre les deux erreurs ; ayant ainsi deux équations et deux inconnues, on déterminera chacune d'elles par le procédé ordinaire de l'élimination.

---

le sera par une du second. L'inverse arriverait si c'était $\lambda - \lambda'$ qui fût très grand relativement à $y - y'$. Enfin si la supposition pouvait être admise pour les deux quantités $l - l'$ et $\lambda - \lambda'$, ce qui est le cas le plus ordinaire, alors les deux carrés $(x - x')$, $(y - y')$ pourraient être négligés relativement aux termes du premier ordre, et les deux erreurs $x - x'$, $y - y'$ seraient données par des équations du premier degré. Mais afin d'éviter tout soupçon d'inexactitude, il faudra ne considérer ces valeurs que comme de premières approximations. Si elles ne sont pas tout-à-fait exactes, elles le seront du moins assez pour que l'on puisse s'en servir à calculer les carrés $(x - x')^2$, $(y - y')^2$ que l'on avait négligés d'abord. On mettra donc les valeurs de ces carrés dans les seconds membres des deux équations, qui deviendront alors entièrement composés de quantités connues. On résoudra de nouveau les équations ainsi préparées, et les valeurs de $x - x'$ et de $y - y'$ qui en résulteront, auront toute l'exactitude nécessaire.

Si la longitude du lieu de l'observation n'était pas connue, on commencerait par la déterminer au moyen des tables supposées exactes. Puis en supposant que, suivant ce calcul, t fût l'instant du commencement ou de la fin de l'éclipse dans le lieu de l'observation, et en tems du premier méridien, on calculerait pour cet instant tous les élémens *apparens* de la lune et de l'astre pour le lieu où l'observation a été faite : ensuite on supposerait que l'instant véritable diffère de celui-là d'une petite quantité t'; et que les erreurs des tables sont x, y, x', y', comme ci-dessus. On aurait ainsi l'équation de condition

$$\left\{l-l'+(x-x')+(m-m')t'\right\}^2\cos^2\lambda'+\left\{\lambda-\lambda'+y-y'+(n-n')t'\right\}^2=\Delta^2,$$

entre les erreurs des tables et celles de la longitude cherchée. Cette équation deviendrait linéaire, en négligeant d'abord les carrés des petites corrections x, y, x', y' et t', comme on peut presque toujours le faire ; sauf à en tenir compte dans une seconde approximation, comme nous l'avons fait plus haut.

Si l'on ne veut pas regarder les élémens d'un des astres comme exempts d'erreurs, la méthode précédente donne la différence des erreurs propres à chacun d'eux.

J'ai supposé que l'on connaissait la longitude du lieu où l'on a fait ces observations. Si elle était inconnue, on commencerait par la déterminer en supposant les tables exactes, comme nous l'avons dit plus haut. Puis on supposerait que les tables et la longitude calculée, ou plutôt le tems qui la représente, comportent de très-petites erreurs, que l'on exprimerait par des indéterminées. On substituerait les valeurs ainsi corrigées dans l'expression de la distance des centres observée, et l'on aurait ainsi, entre les erreurs des tables et celles de la longitude calculée, autant d'équations de condition que l'on aurait observé de phases. Ces équations pourraient même presque toujours être rendues linéaires, en se bornant à la première puissance des corrections indéterminées, qui seront toujours très-petites dans l'état actuel de l'astronomie.

Quand on réunit ainsi plusieurs observations d'une même éclipse, faites dans des lieux différens, il arrive d'ordinaire qu'on n'a qu'un petit nombre d'observations *complètes*, c'est-à-dire, dans lesquelles on ait observé le commencement et la fin de l'éclipse ; tandis que les autres en plus grand nombre, sont *incomplètes*, c'est-à-dire se rapportent à une seule des phases. Supposons qu'il y ait en tout n lieux d'observations. On aura autant de longitudes à rectifier; et en outre il faudra déterminer les erreurs des tables en longitude et en latitude, erreurs que l'on peut supposer constantes pendant toute la durée d'une même éclipse. On aura donc ainsi $n+2$ inconnues à déterminer. Chaque phase de l'éclipse observée dans un des lieux, donne une équation de condition entre ces inconnues. Il suffit donc d'avoir $n+2$ observations pour les déterminer toutes. Mais si l'on peut former un plus grand nombre d'équations, soit par des observations des deux phases faites dans un même lieu, soit par la connaissance déja exacte de la longitude, il faudra les faire toutes concourir suivant la méthode ordinaire des équations de condition. Car leur ensemble déterminera les erreurs des tables d'une manière plus avantageuse et plus indépendante des erreurs des observations.

Comme l'application de cette méthode exige la plus rigoureuse exactitude, j'ai rapporté ici en note les formules qui donnent les valeurs exactes des parallaxes de longitude et de latitude, car celles de la page 62 ne sont que des approximations (*). Enfin pour ne rien omettre,

---

(*) Pour calculer les parallaxes de longitude et de latitude, il faut d'abord déterminer la longitude L du zénith et sa latitude Λ, rapportées l'une et l'autre à l'écliptique. Soit $\mathcal{A}$ l'ascension droite du zénith, c'est-à-dire, le tems sydéral converti en arc, H sa déclinaison qui est égale à la hauteur du pôle dans le lieu de l'observation, les formules de la page 58 donneront

$$\sin \Lambda = -\sin \omega \cos H \sin \mathcal{A} + \cos \omega \sin H,$$

$$\tang L = \frac{\sin \omega \tang H + \cos \omega \sin \mathcal{A}}{\cos \mathcal{A}};$$

ω est l'obliquité de l'écliptique.

Maintenant, soit l' la longitude vraie de l'astre, λ' sa latitude vraie, telles qu'on les verrait du centre de la terre, et l, λ sa longitude et sa latitude apparentes vues de la surface. Nous sommes forcés par le défaut de caractères, d'employer ici les lettres l', λ' dans une autre acception que dans les formules de la page précédente; mais comme le calcul des parallaxes se fait à part sur les élémens de chaque astre en particulier, cela ne peut occasionner aucune erreur. Cela posé, nous avons reconnu, dans la page 62, que les parallaxes de longij'ai placé à la fin du livre des formules qui donnent directement les élémens du lieu apparent de l'astre, sans passer par le calcul des parallaxes.

La comparaison d'un grand nombre d'observations d'éclipses de soleil ou d'étoiles, faite par cette méthode, est le plus sûr moyen de découvrir si la lune est environnée d'une atmosphère sensible. Car cette atmosphère, si

---

tude et de latitude étaient données précisément par les mêmes formules qui exprimaient les parallaxes de déclinaison et d'ascension droite, page 255 du Ier. livre; et qu'il suffisait pour les obtenir, de substituer la différence des longitudes du zénith et de l'astre ou $L-l$ à l'angle horaire P; la distance du zénith au pôle de l'écliptique, ou $100^o - \Lambda$, à la distance du zénith au pôle de l'équateur, qui était représentée par D dans les formules, enfin la distance de l'astre au pôle de l'écliptique, ou $100^o - \lambda$, à sa distance au pôle de l'équateur qui était représentée par Δ'. Pour conserver cette analogie, faisons

$$P = L - l,\ P' = L - l',\ D' = 100^o - \Lambda,\ \Delta = 100^o - \lambda,\ \Delta' = 100^o - \lambda',$$

et nommons α et δ les parallaxes de longitude et de latitude, nous aurons

$$P = P' + \alpha,\quad \Delta = \Delta' + \delta,$$

ou en mettant pour P et P', Δ et Δ', leurs valeurs

$$l = l' - \alpha,\quad \lambda = \lambda' - \delta;$$

alors, d'après les formules citées du Ier. livre, on aura rigoureusement

$$\sin\alpha = \sin\Pi \cdot \frac{\sin D' \cdot \sin\{P' + \alpha\}}{\sin\Delta'},$$

$$\sin\delta = \sin(\Delta' + \delta) \cdot \left\{\frac{\sin\Pi\cos D'\sin(P'+\alpha) - 2\cos\Delta'\cos(P'+\tfrac{1}{2}\alpha)\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin P'}\right\},$$

Π étant la parallaxe horisontale de l'astre dans le lieu de l'observation.

elle existe, *doit réfracter les rayons solaires*, *doit les infléchir* derrière la lune, et par cette raison influer sur l'instant précis des éclipses et sur leur durée. Nous avons déja remarqué un effet analogue produit par l'atmosphère de la terre dans les éclipses de lune, et nous avons vu que, pour un observateur placé dans la lune, le demi-diamètre apparent du soleil en était augmenté d'une quantité à très-peu-près égale au double de la réfraction

---

Remettons dans ces expressions pour D', P', Δ', leurs valeurs, elles deviendront

$$\sin\alpha = \frac{\sin\Pi\cos\Lambda\sin(L-l'+\alpha)}{\cos\lambda'},$$

$$\sin\delta = \cos(\lambda'-\delta)\left\{\frac{\sin\Pi\sin\Lambda\sin(L-l'+\alpha)-2\sin\lambda'\cos(L-l'+\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin(L-l')}\right\}.$$

Si l'on supposait α et δ nuls dans les seconds membres de ces équations, on retomberait sur les formules approchées de la page 62; mais si l'on veut avoir α et δ d'une manière plus exacte, ce qui est nécessaire pour la lune, à cause de sa proximité, il faudra résoudre ces équations par les séries, comme nous l'avons fait dans la page 257 du I^er^. livre. On calculera d'abord α par la première, et ensuite α étant connu, on aura δ par la seconde.

α et δ étant calculés, on aura, comme nous l'avons vu,

$$l = l' - \alpha, \quad \lambda = \lambda' - \delta,$$

l et λ seront les longitudes et latitudes apparentes. Ces formules ont l'avantage de n'exiger aucune construction particulière; il suffit d'avoir égard aux signes algébriques. On pourrait en éliminer la longitude L du zénith et sa latitude Λ, et introduire à la place son ascension droite $\mathcal{A}$ et sa déclinaison H; mais les formules que l'on obtient de cette manière sont trop compliquées pour que nous les donnions ici; d'ailleurs, cette élimination est très-facile en opérant comme dans la page 499.

horisontale à la surface de la terre (*). Réciproquement si nous parvenons à déterminer l'inflexion produite par l'atmosphère de la lune dans les éclipses de soleil ou d'étoiles, nous saurons tout de suite que la réfraction horisontale à la surface de la lune est égale à la moitié de sa valeur.

(*) Je dis à très-peu près égale. En effet, reprenons la *fig.* 9 qui nous a servi pour cette recherche, page 448, et conservons aux parties qui la composent les mêmes significations qu'elles avaient alors. O sera l'observateur placé dans la lune, S un point du soleil qui ne peut pas être apperçu directement suivant OS, à cause de l'interposition de la terre, mais qui devient visible par réfraction par la ligne brisée SIO. L'angle SIt' sera le double de la réfraction horisontale, nous la nommerons $2R$. Cela posé, en désignant les angles en S et en O par les lettres qui leur appartiennent, l'angle $2R$ étant extérieur au triangle SIO, on aura $2R = S + O$; or, les angles S et O, supposés très-petits, sont entre eux comme les côtés opposés OI, SI de ce triangle, ou à fort peu près comme les distances de la lune et du soleil à la terre. Ainsi, en nommant δ et Δ ces distances, on aura $S = \frac{O.\delta}{\Delta}$, par conséquent $2R = \frac{O.\delta}{\Delta} + O$; ou, . . . $2R = O . \frac{\Delta + \delta}{\Delta}$. Comme Δ est extrêmement grand par rapport à δ, on voit que O est à fort peu près égal à $2R$, ou au double de la réfraction horisontale à la surface de la terre. Telle serait donc, pour un observateur placé dans la lune, la valeur de l'*inflexion* produite par notre atmosphère. Nous pourrions en calculer l'étendue, puisque nous connaissons R, Δ et δ; mais réciproquement, si l'observateur placé dans la lune était parvenu à déterminer la quantité de cette inflexion par la comparaison des observations d'éclipses de soleil vues de la surface de la lune, il en pourrait tirer la valeur de R. Tel est le cas où nous nous trouvons quand nous observons des astres occultés par la lune; l'atmosphère qui l'environne, si elle est sensible, doit se manifester par une inflexion dans les rayons lumineux, et la mesure de cette inflexion nous fera tout de suite connaître la réfraction horisontale que cette atmosphère peut produire.

L'atmosphère lunaire, si elle existe, ne peut point altérer le diamètre apparent de la lune mesuré au micromètre, lorsque cet astre se projète la nuit sur le fond obscur du ciel, et que son disque est formé par des rayons réfléchis du soleil vers nous. Il semble donc que, pour reconnaître l'existence de l'inflexion et pour déterminer sa valeur, il suffirait de mesurer ainsi le diamètre apparent de la lune, et de le comparer avec la durée pareillement observée des occultations d'étoiles et des éclipses de soleil, afin de voir si l'une correspond à l'autre. Mais si, comme on l'a cru jusqu'à présent, il se produit autour des objets lumineux une irradiation qui dilate un peu leur image, cette cause doit augmenter aussi le diamètre apparent de la lune, quand nous observons cet astre sur le fond obscur du ciel. A la vérité, on pourrait encore mesurer le diamètre de son disque quand il se projète sur celui du soleil dans les éclipses annulaires; mais alors l'irradiation dilatant la couronne lumineuse qui entoure la lune, doit faire paraître son diamètre apparent trop petit. Pour éluder ces difficultés, Dionis-du-Séjour avait imaginé de considérer l'irradiation et l'inflexion comme deux inconnues, qu'il fallait déterminer simultanément, d'après les observations des phases de l'éclipse, sur lesquelles ces deux causes n'influent pas de la même manière. Telles sont les observations que l'on peut faire de la grandeur du croissant lumineux et de ses progrès successifs dans les éclipses annulaires.

Dionis-du-Séjour, a calculé ainsi avec beaucoup de soin l'éclipse annulaire de soleil de l'année 1764, qui fut visible dans toute l'Europe, et qui, par l'étendue et la variété de ses phases, autant que par l'habileté des astronomes qui l'ont observée, présentait un grand nombre de points de comparaison. Il s'est particulièrement servi des observations faites en différens lieux sur les instans de la formation et de la rupture de l'anneau. Il a encore confirmé ces observations par les mesures de la distance des cornes du croissant faites à divers instans de l'éclipse par M. Short à Londres, par conséquent dans un point dont la différence de longitude avec Paris était déja bien connue par des opérations géodésiques et par des transports de chronomètre, indépendamment des observations d'éclipses. Le résultat d'un nombre de calculs immenses a été que les phases observées ne pouvaient pas se concilier, à moins de supposer sur le demi-diamètre du soleil une irradiation de 0°,00091 (3″ sex.), et autour du disque de la lune une irradiation à-peu-près égale produite par l'atmosphère de cet astre, ce qui donnerait 0,000455 (1″,50 sex.) pour la réfraction horisontale à la surface de la lune. Or la réfraction horisontale moyenne qui s'observe à la surface de la terre, est 0°,6500. Elle est donc quatorze cents fois plus forte que la précédente. Ainsi, en supposant que l'atmosphère lunaire fût de même nature que la nôtre, sa densité serait quatorze cents fois moindre; elle serait donc plus rare que le vide que nous pouvons faire dans des récipiens avec les meilleures machines pneumatiques, car celui-ci ne réduit jamais l'air à $\frac{1}{1000}$ de sa densité.

La difficulté que présente la mesure exacte des phases d'une éclipse, peut jeter quelque incertitude sur les données qui ont servi de base aux calculs de Dionis-du-Séjour. Mais si, par cette raison, la valeur qu'ils assignent à l'inflexion ne peut pas être regardée comme rigoureuse, du moins on peut en conclure avec certitude que cette inflexion, si elle existe, est extrêmement petite et presque insensible; ce qui suffit pour prouver l'extrême rareté de l'atmosphère de la lune, si toutefois cette atmosphère existe. La question ne pourra être résolue complètement tant qu'on ne saura pas à quoi s'en tenir sur les effets de l'irradiation. M. Arago s'occupe en ce moment à les déterminer, en mesurant au micromètre de cristal de roche les diamètres apparens des disques lumineux d'une dimension connue, et placés à une distance déterminée trigonométriquement. Déja il a trouvé que des disques beaucoup plus lumineux que la pleine lune n'ont aucune irradiation sensible : car la mesure du diamètre apparent s'accorde exactement avec la valeur assignée par le calcul, d'après la distance. Cette expérience prouve que l'on obtiendra avec exactitude les diamètres apparens des corps célestes, en les mesurant avec le micromètre de cristal de roche. Mais malheureusement la grandeur du diamètre apparent de la lune ne permet pas qu'on le mesure avec cet instrument, qui ne peut embrasser que de petits angles ; il faudra donc effectuer ces mêmes expériences avec le micromètre à fils, et quand on connaîtra l'irradiation par ce moyen, les éclipses montreront si l'inflexion est sensible.

L'atmosphère lunaire doit retarder le commencement des éclipses, en rendant le bord des astres qu'elle occulte, visible par réfraction lorsqu'il a cessé de l'être directement. Elle accélère la fin de ces phénomènes de la même manière, en rendant l'astre visible par réfraction avant qu'il soit redevenu visible directement. Par cette raison, quand on calcule des éclipses de soleil, on diminue ordinairement le demi-diamètre apparent de la lune tiré des tables, de 0,00091 (3″, sex.), c'est-à-dire de toute la quantité due à l'inflexion, et l'on diminue aussi celui du soleil, d'une quantité à-peu-près égale en vertu de l'irradiation, afin d'avoir réellement la distance des centres, telle qu'elle est au moment du commencement ou de la fin de l'éclipse. Mais, d'après ce que nous avons dit plus haut, la légitimité de ces corrections est assez incertaine.

118. Il nous reste à parler de la détermination des longitudes géographiques par les observations de distances de la lune au soleil et aux étoiles. Nous avons déja indiqué, page 176 du premier livre, l'esprit de cette méthode importante. Nous avons expliqué les moyens dont on se sert pour observer les distances des deux astres. Le calcul est absolument le même que celui des occultations et des éclipses; car une éclipse n'est qu'une observation de distances dans laquelle la distance des deux astres est égale à la somme de leurs demi-diamètres. Toute la différence consiste en ce que, dans le cas général, la distance des deux astres n'étant pas toujours très-petite, ne peut plus être considérée comme l'hypothénuse d'un triangle rectiligne rectangle formé sur les différences de latitude et de longitude. Il faut la calculer rigoureusement au moyen du triangle sphérique formé par les deux astres et le pôle de l'écliptique. Dans ce triangle, on connaît les distances des deux astres à ce pôle; on connaît aussi l'angle qui est compris entre elles; c'est la différence des longitudes : on peut donc aisément calculer le troisième côté qui est la distance cherchée. Nous avons déja donné l'application d'une formule semblable, dans un des chapitres précédens. On trouvera dans le Traité d'Astronomie nautique, tous les détails numériques relatifs à l'usage de cette méthode, qui est principalement employée dans les voyages maritimes, et qui ne peut être trop recommandée aux voyageurs et aux marins.

L'exactitude de cette méthode dépend de celle des tables de la lune et de l'adresse de l'observateur. Les tables ont été perfectionnées dans ces derniers tems, au-delà de ce qu'on pouvait espérer. Quant à l'observation, elle se fait, comme nous l'avons déja dit, avec un instrument de réflexion que l'on tient à la main, et que l'on nomme un *sextant*. On acquiert facilement l'habitude de cet instrument, et avec un peu de précaution, on peut être sûr que l'erreur résultante de ces deux causes combinées, ne s'élève pas à une minute de tems décimal. Dans cet intervalle, quarante minutes de l'équateur traversent le méridien : telle est l'erreur que l'on peut commettre sur la longitude du navire. Si l'on se trouvait à l'équateur même, ces quarante minutes de degré répondraient à quarante mille mètres, ou environ dix lieues marines ; mais comme la longueur des degrés de longitude diminue à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, l'erreur sera beaucoup moindre sur les différens parallèles. On peut la diminuer encore en multipliant les observations, et en prenant une moyenne entre les longitudes qui s'en déduisent. Avec ces précautions, on peut compter sur l'exactitude de la méthode, et s'y confier entièrement.

119. Ce qui rend les observations de la lune, particulièrement, propres à cette recherche, c'est la rapidité de son mouvement. Si l'on se trompe d'une minute de degré, en observant la position de la lune, l'heure que l'on compte au même instant sur le premier méridien, devra être augmentée ou diminuée de tout le tems que la lune emploie à décrire un degré dans le ciel ; mais si l'on employait le soleil, dont le mouvement est environ treize fois moins rapide, la même erreur d'un degré donnerait, sur le tems, une erreur treize fois plus considérable.

C'est, sans doute, une des plus belles inventions de l'homme, d'avoir réussi à connaître sa position et sa route, au milieu de l'immensité des mers, lorsqu'il n'apperçoit plus autour de lui que l'eau et le ciel. Les moyens assurés qu'il a pour y parvenir, lui ont été donnés par l'astronomie.

CHAPITRE XX.

Des rapports que l'on observe entre la marche de la Lune et les oscillations périodiques de la Mer.

120. PUISQUE j'ai commencé à rapporter les applications qui peuvent intéresser les navigateurs, je ne dois pas omettre un phénomène extrêmement remarquable sur lequel la lune paraît avoir une très-grande influence. Je veux parler du *flux* et du *reflux* de la mer.

Deux fois par jour l'océan se soulève et s'abaisse par un mouvement d'oscillation régulier. Les eaux montent d'abord pendant environ un quart de jour; elles inondent ainsi les rivages, et se précipitent dans l'intérieur des fleuves, jusqu'à de grandes distances de leur embouchure: ce mouvement se nomme le *flux*. Lorsque les eaux sont parvenues à leur plus grande hauteur, elles ne restent dans cet état que quelques instans: c'est dans le moment de la *haute mer*. Peu-à-peu elles commencent à descendre par les mêmes périodes qu'elles avaient suivies dans leur accroissement. Elles se retirent et abandonnent les lieux qu'elles avaient inondés. Ce mouvement se nomme le *reflux*: il dure à-peu-près un quart de jour; les eaux arrivent ainsi à leur plus grande dépression, et y restent pendant quelques instans. C'est le moment de la *basse mer*. Bientôt le flux recommence par les mêmes périodes, en suivant exactement les mêmes lois.

121. Ces mouvemens de la mer peuvent être augmentés par l'action des vents, mais ils ne leur doivent pas leur existence; car on les observe également par le tems le plus calme et le plus serein. D'ailleurs leurs périodes sont si réglées et si constantes, que l'on s'en sert pour prévoir le retour du flux et du reflux. Cette constance indique évidemment une cause régulière et durable qui exerce périodiquement ses effets. Pour la découvrir, il faut observer longtems les phénomènes, en suivre tous les développemens, et trouver les périodes auxquelles leurs moindres variétés sont assujéties. On peut chercher ensuite à reconnaître dans leur marche, la nature des causes qui les produisent. Or, en examinant ainsi les phénomènes du flux et du reflux de la mer, on trouve, jusque dans leurs plus petits détails, des rapports marqués avec les conjonctions de la lune et du soleil; l'influence de la lune y est sur-tout sensible.

Cela se voit d'abord par les intervalles de leurs retours. Ces intervalles ne sont pas toujours exactement les mêmes, mais ils ont cependant une durée moyenne dont ils s'écartent peu, et qui, exprimée en tems moyen, est $1^j,035050$. Pendant ce tems, il y a deux basses mers et deux pleines mers. Or, c'est précisément le tems que la lune emploie pour revenir au méridien par l'effet de son moyen mouvement, et cette période du flux et du reflux peut s'appeler un jour lunaire (*).

(*) Suivant ce qui a été dit dans la page 348, le mouvement sydéral de la lune en 36525 jours moyens, est $534740^\circ,541810$. Par conséquent son mouvement propre en un jour moyen est égal à $\dfrac{534740,541810}{36525}$ ou $14^\circ,640398$. Ainsi quand la sphère céleste a décrit $401^\circ,095136$ par l'effet de la rotation diurne, ce qui a lieu en un jour solaire, On voit donc que si la pleine mer a eu lieu aujourd'hui, dans un port, à 0^h, demain elle arrivera à $0^h,35050$, après-demain à $0^h,70100$, et ainsi successivement en retardant de $0^h,35050$; mais dans l'intervalle, il y aura une autre pleine mer, que l'on pourra nommer la pleine mer du matin, et qui arrive le premier jour à $5^h,17525$; le second jour à $5^h,17525 + 0^h,35050$, et ainsi de suite.

122. Cependant cette marche ne s'observe pas exactement. Le retard journalier d'une marée sur l'autre est quelquefois un peu plus grand que $0^h,35050$, et quelquefois il est moindre. Mais cela ne fait que montrer encore mieux l'influence de la lune sur ces phénomènes; car cet astre n'a pas non plus une marche régulière; il est assujéti à plusieurs inégalités, qui sont dans un accord admirable avec les retards et les variétés que les marées éprouvent. On peut donc regarder cette action de la lune, quelle que soit sa nature, comme une vérité incontestable.

123. Mais la lune n'agit pas seule sur les marées : le soleil a aussi sur elles une influence sensible. On remarque constamment que les plus grandes marées ont lieu dans les sysigies, et les plus petites dans les quadratures; en sorte que la seule observation des phases de la lune peut faire prévoir leur retour.

---

comme on l'a vu dans la page 48, la lune a décrit cette même quantité moins $14^o,640398$, ou $400^o - 13^o,545234$, d'où l'on voit qu'elle décrira une circonférence entière dans un tems exprimé par

$$1^{j.sol.}\frac{400^o}{400^o - 13^o,545234} = 1^{j.sol.} + \frac{1^{j.\ sol.}\ 13^o.545234}{386^o,454766} = 1^{j.sol.}035050;$$

c'est la durée du *jour lunaire* exprimée en tems solaire moyen.

124. Ces phénomènes augmentent d'intensité quand la lune et le soleil sont plus près de la terre ; ils diminuent quand ces astres s'éloignent : mais, même dans cet effet *secondaire*, *l'action de la lune conserve sa supériorité*, et les variations de ses distances y seront sur-tout sensibles. Enfin les positions des deux astres de part et d'autre de l'équateur, y produisent aussi des modifications.

125. Tout ceci doit s'entendre d'une mer très-étendue et libre de toutes parts, comme l'océan. Dans de petites mers et près des rivages, les mouvemens des eaux doivent être gênés et contrariés par les obstacles qu'ils rencontrent. Aussi les instans des marées diffèrent-ils suivant les tems nécessaires pour que les ondulations se propagent. C'est ce qui arrive dans nos ports, quoiqu'ils soient situés sur le même océan. L'heure de la haute mer est fort différente de l'un à l'autre, quoique constante dans chaque port. A Dunkerque, par exemple, la pleine mer a lieu un demi-jour après le passage de la lune au méridien; à St.-Malo, c'est un quart de jour; au Cap de Bonne-Espérance, c'est $0^{j},0625$. L'heure où ce phénomène arrive le jour de la nouvelle lune, s'appelle *l'établissement du port*. Cet instant se détermine dans chaque lieu, par l'observation, après quoi, en y ajoutant successivement $0^{j},035050$ ou $50'.28'',32$ en tems sexagésimal, on obtient les retards successifs des marées d'un jour à l'autre, et on connaît les instans auxquels elles doivent arriver. Comme il y a deux pleines mers par jour lunaire, il faut deux observations de ce genre pour déterminer complètement l'établissement du port, et pouvoir prédire toutes les pleines mers.

La méthode précédente ne donne que les époques *moyennes* de ces phénomènes, c'est-à-dire, celles qui auraient lieu, si la marche de l'astre qui les règle, n'était sujète à aucune inégalité. Pour prédire les instans véritables, il faut avoir recours à la théorie de l'attraction qui, ayant fait connaître la cause des oscillations de la mer, a montré les rapports qui existent entre les variations qu'elles éprouvent et les inégalités des astres qui les produisent. On trouve, dans le second volume de la Mécanique céleste, toutes les formules nécessaires pour cet objet.

126. Parmi les inégalités des mouvemens de la mer, on remarque cette loi générale : plus la mer s'élève lorsqu'elle est pleine, plus elle descend dans la basse mer suivante. On appelle *marée totale* la demi-somme de deux pleines mers consécutives au-dessus du niveau de la basse mer intermédiaire. La plus grande valeur de cette marée totale à Brest, est $5^m,888$. Elle a lieu dans les sysigies. La plus petite est $2^m,789$. Elle a lieu dans les quadratures.

127. Il serait très-important d'avoir des observations aussi exactes pour tous les autres ports ; mais malheureusement, elles manquent encore, et l'Institut de France a cru devoir appeler sur cet objet l'attention des hommes éclairés qui habitent les villes maritimes. Il suffit d'établir une colonne verticale portant une division métrique, et d'observer chaque jour, ou du moins assez souvent, l'heure précise de la haute et de la basse mer, et le point de la plus grande élévation et du plus grand abaissement des eaux. Mais comme la hauteur de la mer varie très-lentement en approchant de ces termes extrêmes, il faut pour la déterminer avec exactitude, employer des observations correspondantes faites avant et après, lorsque les eaux ont atteint la même hauteur. Si ces observations sont peu éloignées du *maximum* et du *minimum*, la haute ou la basse mer répondra au milieu de l'intervalle qui

les sépare, mais il faudra pour cela qu'elle ne soient pas trop distantes; car on tomberait ainsi dans des erreurs très-graves, parce que la mer emploie un peu plus de tems à descendre qu'à monter. A Brest, cette différence s'élève à neuf ou dix minutes.

128. La théorie de l'attraction ayant fait connaître la cause du flux et du reflux de la mer, a donné, comme nous l'avons dit, le moyen de calculer toutes les variations qui doivent s'y produire; elle a appris comment on peut les prévoir. Les oscillations de la mer se sont ainsi trouvées liées aux mouvemens célestes, et elles ont servi à en faire mieux connaître plusieurs points importans. Je donnerai plus tard une idée de ces rapports que l'on ne saurait approfondir sans le secours de l'analyse. Ici je me bornerai à engager de nouveau les personnes éclairées qui habitent les côtes, à multiplier les observations sur ce sujet important (*).

(*) *Voy.* le rapport fait par M. Levêque à l'Institut de France, pour déterminer les observations qu'il importe de faire sur les marées dans les différens ports. Paris, prairial, an 11.

CHAPITRE XXI.

De quelques Périodes astronomiques usitées dans la Chronologie.

129. Les mouvemens de la lune, combinés avec ceux du soleil, servent, dans la chronologie, pour fixer les époques des événemens historiques. On a imaginé à cet effet diverses périodes astronomiques, que l'on nomme *cycles*. Comme il est utile de les connaître, je vais donner une idée de leur formation et de leur usage.

La première se nomme le *cycle solaire*. C'est une période de vingt-huit années juliennes, après laquelle les jours de la semaine reviennent dans le même ordre aux mêmes jours du mois. En effet, la semaine étant composée de sept jours, chaque année commune de 365 jours, contient 52 semaines et un jour de reste. Si toutes les années étaient de cette durée, les restes formeraient une semaine en sept ans; mais les années bissextiles qui reviennent, de quatre en quatre ans, interrompent cet ordre, parce qu'elles contiennent un jour de plus. Ce n'est qu'après sept bissextiles, ou quatre fois sept ans, que le cercle entier de ces inégalités se trouve révolu, et il en résulte une période de 28 ans pour la durée du cycle solaire. En cela l'on n'a point d'égard à la suppression séculaire de la bissextile prescrite par la réforme grégorienne.

130. La seconde période se nomme le *cycle lunaire*. C'est un intervalle de dix-neuf années juliennes, après lequel les nouvelles lunes, et les différentes phases qui les suivent,

reviennent aux mêmes jours de l'année. En effet, la durée de la révolution synodique de la lune est $29^{j},530588$. Ainsi 335 révolutions de ce genre font $6939^{j},688180$; c'est-à-dire, à fort peu près, la même somme que les dix-neuf années juliennes de $365^{j},25$; car celle-ci donnera $6939^{j},75$. La différence est de $0^{j},06182$. Cette période a été autrefois en usage dans la Grèce. Maintenant que l'astronomie est perfectionnée, nous trouvons, avec raison, plus commode et plus simple de n'employer pour la mesure du tems, que le mouvement du soleil. Mais les anciens peuples, dont les connaissances étaient encore très-imparfaites, trouvaient, dans le retour fréquent des phases de la lune, une période naturelle et commode pour leurs fêtes et leurs jeux. Cependant, comme leur année était réglée sur les mouvemens du soleil, ils ont dû chercher des périodes plus longues, qui pussent accorder les mouvemens de ces astres, en embrassant, pour chacun deux, un nombre exact de révolutions. Le cycle lunaire de dix-neuf ans est la plus exacte de ces périodes, parmi celles qui ne sont pas d'une très-longue durée. Aussi Méton, qui en fit la découverte, l'ayant présenté aux Grecs assemblés pour les jeux olympiques, il fut aussitôt généralement adopté.

L'Église chrétienne emploie encore aujourd'hui les mouvemens de la lune pour régler quelques-unes de ses cérémonies, qui, par conséquent, ne peuvent pas revenir constamment aux mêmes époques de l'année solaire, puisque les mouvemens de la lune et du soleil ne s'accordent point entre eux ; aussi les appelle-t-on *fêtes mobiles*. Pour en fixer le retour, l'Église emploie la méthode des épactes, telle que nous l'avons expliquée plus haut en parlant des moyens de prédire les sysigies ; mais les épactes astronomiques réglées sur le moyen mouvement de la lune, diffèrent un peu des épactes ecclésiastiques qui sont déterminées d'après des règles établies par le Concile de Nicée. La méthode est la même; les nombres sont seuls différens.

131. Enfin, on se sert encore, dans la chronologie, d'une troisième espèce de cycle, que l'on nomme le *cycle d'indiction*, et qui comprend quinze années juliennes. Cette période, qui n'est point astronomique, a été introduite à Rome, sous les empereurs. Elle est relative à certains actes judiciaires qui se faisaient à des époques réglées.

132. Non-seulement les trois périodes dont je viens de parler, se nomment des cycles, mais on donne aussi ce nom à chacune des années qui les composent, en raison du rang qu'elles occupent. Par exemple, le cycle 1, 2, 3, 4, de la lune, est la première, la deuxième, la troisième ou la quatrième année du cycle lunaire de dix-neuf ans, et il en est ainsi des autres. Le nombre qui exprime le cycle lunaire d'une année s'appelle LE NOMBRE D'OR de cette année, dans le langage des chronologistes.

133. Si l'on eût commencé à compter les cycles dès l'origine de l'ère chrétienne, en comptant 1 pour la première année, 2 pour la deuxième, et ainsi de suite, on aurait eu un cycle d'indiction complet, après quinze ans; un cycle lunaire complet après 19 ans; et un cycle solaire complet, après 28 ans. On aurait donc pu continuer ainsi dans le même ordre, en recommençant à compter 1 à la fin de chaque cycle. Alors, en divisant la somme des années écoulées par les nombres 28, 19, 15, les restes auraient indiqué les cycles propres à chaque année. Par exemple, l'année 1800 aurait eu pour cycle solaire 8, pour cycle lunaire 14, et 0, ou 15, pour cycle d'indiction. Mais cette manière, très-simple, n'est pas celle que l'usage

a introduite. Chaque année a bien son cycle; mais il diffère des précédens. Ainsi l'année 1800 a 17 de cycle solaire, 15 de cycle lunaire, et 3 de cycle d'indiction; ce qui revient à supposer que la première année de l'ère chrétienne avait pour cycle solaire 17 — (8 — 1) ou 10, pour cycle lunaire 15 — (14 — 1) ou 2, et pour cycle d'indiction 3 — (0 — 1) ou 4; d'où il suit que pour avoir les cycles de chaque année, comptée à partir de l'ère chrétienne comme on compte aujourd'hui, il faut, au nombre qui exprime cette année, ajouter successivement 9, 1, 3, et diviser chaque somme par celui des nombres 28, 19 et 15 qui répond à chaque cycle.

134. En multipliant ces trois nombres l'un par l'autre, on a formé une période de 7980 ans, après laquelle les mêmes cycles reviennent ensemble dans le même ordre pour chaque année; mais dans toute l'étendue d'une même période, chaque année a ses cycles qui lui appartiennent en propre, et qui la caractérisent; en sorte qu'aucune autre qu'elle ne les réunit. Cela tient à ce que les nombres 28, 19 et 15 sont premiers entre eux. Cette propriété a fait employer ce cycle de 7980 ans, dans la chronologie, pour désigner les années, et on le nomme la PÉRIODE JULIENNE.

135. Cette méthode a le très-grand avantage de donner aux chronologistes un langage uniforme. Elle est sur-tout extrêmement utile pour les années qui ont précédé l'ère chrétienne, et que plusieurs historiens comptent à partir de la création du monde. La diversité de leurs opinions, sur ce point, est si variée, que l'on en trouverait à peine deux qui fussent tout-à-fait d'accord. Ainsi, lorsque nous lisons dans un historien qu'un événement a dû arriver dans telle année, à partir de la création du monde, nous ne savons encore rien sur sa véritable époque, si nous n'avons cherché préalablement combien cet auteur compte

d'années depuis cette origine jusqu'à la première année de l'ère chrétienne, ce qu'il faudra faire de nouveau pour chaque écrivain. De plus, les années usitées chez les différens peuples et chez les historiens qui en ont parlé, n'ont pas leur origine dans la même saison; les unes commençaient au printems, comme les années romaines, d'autres au solstice d'été, comme les olympiades chez les Grecs, d'autres en automne, comme les années judaïques; d'autres enfin, en hiver, comme les années juliennes.

On évite tous les inconvéniens de cette diversité, lorsqu'on se sert de la période julienne. Chaque année se trouvant fixée à sa place dans cette période, au moyen des cycles qui lui conviennent, en reçoit un caractère distinctif qui la sépare de toutes les autres.

Pour profiter de ces avantages, il faut savoir transporter dans la période julienne les dates des événemens historiques indiqués dans une autre manière de compter. Cela se réduit à y transporter seulement la date de *l'ère* à laquelle on rapporte ces événemens; car la progression des années, à partir d'un même terme, sera la même dans toutes les périodes en avant et en arrière.

Prenons pour exemple l'ÈRE CHRÉTIENNE, qui est la plus usitée. Nous avons dit que pour la première année de cette ère, le cycle solaire était 10, le cycle lunaire 2, et le cycle d'indiction 4, il s'ensuit qu'elle répond à l'an 4714 de la période julienne; car, parmi tous les nombres compris dans cette période, c'est-à-dire depuis 0 jusqu'à 7980, il n'y a que le nombre 4714 qui étant successivement divisé par 28, 19 et 15, donne pour reste 10, 2 et 4.

Nous verrons bientôt comment on peut arriver directement à ce résultat. En partant de ce point, il est facile d'établir la concordance de l'ère chrérienne avec la période julienne, pour une époque quelconque; car en écrivant les uns sous les autres les numéros des mêmes années, on forme le tableau suivant dont la loi est évidente.

	ÈRE.							
Ère chrétienne...	$-n$	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$	$+$
Période julienne.	$4714-n$	4711	4712	4713	4714	4715	4716	$4713+$

Ainsi en appelant P et n les numéros des années qui se correspondent dans les deux périodes, on a

Avant l'ère chrétienne. $P = 4714 - n$, $n = P - 4714$
Après l'ère chrétienne. $P = 4713 + n$, $n = P - 4713$

La différence d'une unité dans ces deux formules, vient de ce que la progression arithmétique s'interrompt, pour les années chrétiennes, en passant du positif au négatif. On éviterait cette dissemblance, en appelant o la première année de l'ère; mais les chronologistes n'ont pas adopté cette dénomination.

Pour appliquer ces résultats à un exemple, je suppose que l'on sache que la mort de César arriva l'an 4670 de la période julienne. Comme cette époque est antérieure à l'ère chrétienne, il faut retrancher 4670 de 4714, le reste est 44; c'est-à-dire que César est mort dans la 44^e année avant l'ère chrétienne.

Autre exemple. On sait que l'empereur Auguste mourut dans la 14^e année après l'ère chrétienne; ajoutant ce nombre à 4713, on aura 4727 pour l'année de la période julienne, à laquelle il faut rapporter la mort d'Auguste. Cette année avait donc 23 de cycle solaire, 15 de cycle unaire, et 2 de cyle d'indiction.

Lorsque l'année de la période julienne est connue, comme dans ces exemples, il est bien facile de trouver les cycles, il suffit de diviser le nombre donné par 28, 19, 15; le reste de chaque division est le cycle correspondant pour cette année.

On peut aussi se proposer le problême inverse. Les cycles étant donnés, trouver l'année; cela se réduit à trouver un nombre moindre que 7980, et tel qu'en les divisant successivement par 28, 19, 15, on aït pour reste les cycles désignés. L'algèbre fourni un moyen très-simple d'y parvenir. Il faut que le nombre cherché soit moindre que 7980; car l'origine de l'ère chrétienne, répondant à l'an 4714 de la période julienne, tous les événemens historiques sont nécessairement compris dans cette période, puisqu'aucun d'eux ne remonte à plus de 4000 ans avant l'ère chrétienne (*).

(*) Quoique ce petit problême soit très-facile, cependant comme on pourrait perdre quelques instans à le résoudre, dans le cas où l'on aurait besoin de l'appliquer, j'en donnerai ici la formule. Soit x le nombre cherché; supposons qu'en le divisant par 28, il donne q pour quotient et r pour reste; qu'en le divisant par 19, il donne pour quotient q' et pour reste r'; enfin, qu'en le divisant par 15 le quotient soit q'' et le reste r'', on aura ces trois équations

$$x = 28q + r,$$
$$x = 19q' + r',$$
$$x = 15q'' + r''.$$

Les restes r, r', r'' sont donnés : ce sont les nombres entiers qui expriment les cycles. q, q', q'' sont des nombres entiers indéterminés. On peut leur donner telle valeur que l'on voudra. Il s'agit de trouver pour x le plus petit nombre entier qui satisfasse à ces trois conditions.

Or, ces trois conditions donnent

$$19q' + r' = 28q + r, \quad 15q'' + r'' = 28q + r;$$

136. J'indiquerai encore ici quelques autres périodes dont l'usage est moins général et bien moins avantageux que celui de la période julienne ; mais qui sont cependant célèbres dans l'histoire par les événemens qui leur ont

---

il faut résoudre ces équations suivant la méthode des problèmes indéterminés. La première donne d'abord, en effectuant la division par 19,

$$q' = q + \frac{9q + r - r'}{19}, \quad \text{soit donc} \quad \frac{9q + r - r'}{19} = n;$$

il faudra que n soit un nombre entier. De là on tire

$$9q = 19n - r + r' \quad \text{ou} \quad q = 2n + \frac{n - r + r'}{9};$$

par conséquent, si l'on fait

$$\frac{n - r + r'}{9} = n', \quad \text{d'où } n = 9n' + r - r',$$

il faudra encore que n' soit un nombre entier; de là on tire

$$q = 19n' + 2r - 2r';$$

c'est la forme la plus simple de q qui satisfasse à la première condition. Venons maintenant à la seconde. Cette valeur de q donne

$$28q + r = 532n' + 57r - 56r';$$

substituant dans l'équation en q'', on en tire

$$15q'' + r'' = 532n' + 57r - 56r',$$

par conséquent,

$$q'' = 35n' + 3r - 3r' + \frac{7n' + 12r - 11r' - r''}{15};$$

il faut donc qu'en faisant

$$\frac{7n' + 12r - 11r' - r''}{15} = n'',$$

servi d'origine, ou par l'emploi qu'en ont fait les astronomes et les historiens.

La première dont je parlerai, est celle des OLYMPIADES adoptée autrefois dans toute la Grèce. C'était une pé-

---

n'' soit aussi un nombre entier; de là on tire

$$7n' = 15n'' - 12r + 11r' + r'',$$

par conséquent,

$$n' = 2n'' - r + r' + \frac{n'' - 5r + 4r' + r''}{7};$$

ainsi, en faisant

$$\frac{n'' - 5r + 4r' + r''}{7} = n''',$$

ce qui donne

$$n'' = 7n''' + 5r - 4r' - r'',$$

n''' devra être un nombre entier. On ne peut pas pousser plus loin cette réduction, puisque la division est effectuée autant que possible : de là on tire

$$n' = 15n''' + 9r - 7r' - 2r'',$$

ensuite

$$q = 19n' + 2r - 2r' = 285n''' + 173r - 135r' - 38r'',$$

et comme on a

$x = 28q + r$, on aura $x = 7980n''' + 4845r - 3780r' - 1064r''$,

en donnant à n''' toutes les valeurs entières que l'on voudra, on aura autant de nombres qui satisferont aux trois conditions exigées. Mais la plus petite de ces valeurs est la seule nécessaire dans l'état actuel de la durée des événemens historiques; il s'agit de la déterminer.

Pour cela, on prendra les valeurs r, r', r'' des trois cycles qui riode de quatre années solaires complète. Le commencement de chaque nouvelle olympiade, c'est-à-dire, de chaque cinquième année, était signalé par des jeux magnifiques auxquels on se rendait de toutes les parties de la

---

sont données, et l'on formera la valeur numérique de la quantité $4845\, r - 3780\, r' - 1064\, r''$; c'est la partie connue de la formule.

Si cette quantité est négative, on la divisera par 7980, pour savoir combien de fois elle contient ce nombre. Supposons qu'elle le contienne Q fois, avec un reste R; on aura donc alors

$$x = 7980\, n''' - 7980 . Q - R.$$

Dans ce cas, la plus petite valeur positive de x se trouvera en supposant $n''' = Q + 1$, ce qui donne

$$x = 7980 - R.$$

Si, au contraire, la quantité $4845\, r - 3780\, r' - 1064\, r''$ est positive, on la divisera encore par 7980, pour savoir combien de fois elle contiendra ce nombre; et en supposant qu'elle le renferme Q fois avec un reste R, on aura, en général,

$$x = 7980\, n''' + 7980\, Q + R;$$

dans ce cas, la plus petite valeur positive de x se trouvera, en supposant $n''' = - Q$, ce qui donne

$$x = + R.$$

Ces deux règles peuvent se réduire en une seule. Formez la valeur numérique de la quantité $4845\, r - 3780\, r' - 1064\, r''$; rejetez-en, par la division, tous les multiples de 7980 qu'elle peut contenir, et ne conservez que le reste; s'il est positif, il indique le rang de l'année dans la période julienne; s'il est négatif, prenez-en le complément à 7980.

On demande, par exemple, quel est, dans la période julienne, le rang de l'année qui avait 1 de cycle solaire, 1 de cycle lunaire, 1 de cycle d'indiction. Ici on a $4845\, r - 3780\, r' - 1064\, r'' = + 1$;

Grèce, et qui se célébraient près d'*Olympie*, ville du Péloponèse; de là le nom d'*Olympiades*. Cette manière de compter les années fut introduite par Iphitus, fondateur des jeux olympiques ; aussi la nomme-t-on quelquefois la période d'Iphitus. La première année de la première olympiade concourt avec l'année 3938 de la période julienne, ce qui répond à 776 ans avant l'ère chrétienne. Cette année avait donc 18 de cycle solaire, 5 de cycle lunaire et 8 de cycle d'indiction.

D'après ces données, rien n'est plus facile que de ramener à la période julienne ou à l'ère chrétienne, une année indiquée en olympiades. Supposons, par exemple, que l'on veuille savoir à quelle date répond la seconde année de la quatre-vingt-septième olympiade. Cette époque fut fameuse en Grèce, par le commencement de la guerre du Péloponèse, qui se déclara peu de mois auparavant. On observera qu'au commencement de l'année désignée, il y avait quatre-vingt-six olympiades révolues, lesquelles étant multipliées par 4, donnent 344 années : ajoutons les deux années de plus, nous aurons 346 ans depuis le commencement de la période d'Iphitus. C'est par conséquent une unité de moins, ou 345 ans à ajouter à la première année de cette période. Or celle-ci avait pour rang 3938 dans la période julienne ; ainsi en lui ajoutant 345, la somme 4283 sera le nombre de la période julienne qui répond

---

par conséquent, $x = 7980\, n''' + 1$. La plus petite valeur répond à $n''' = 0$ et $x = 1$. C'est le commencement de la période.

Autre exemple. On demande le rang de l'année qui avait 10 de cycle solaire, 2 de cycle lunaire, et 4 de cycle d'indiction. Ici on a $4845\, r - 3780\, r' - 1064\, r'' = 36634$. Ce nombre, divisé par 7980, donne 4 pour quotient et 4714 pour reste. C'est le rang de l'année désignée qui est précisément la première de l'ère chrétienne.

à la seconde année de la quatre-vingt-septième olympiade. Si l'on veut maintenant rapporter cette même année à l'ère chrétienne, il suffit d'ôter le nombre 4283 de 4714, parce qu'il s'agit d'une époque antérieure à l'ère chrétienne. La différence est 431 années, c'est-à-dire, que la seconde année de la quatre-vingt-septième olympiade répond à la 431e année avant l'ère chrétienne.

La Fondation de Rome est encore une époque importante à connaître, parce que c'est d'elle que comptent tous les historiens latins; cette ère, d'après Varron, se rapporte au 21 avril 3961 de la période julienne, 753 ans avant l'ère chrétienne.

Généralement, pour ramener à la periode julienne une année exprimée suivant d'autres périodes, il faut remonter à l'origine de l'ère, calculer le nombre d'années écoulées depuis cette origine, diminuer ce nombre d'une unité, et ajouter le reste au nombre qui exprime le rang de la première année dans la période julienne. Cette marche est si simple, qu'il est inutile d'en donner d'autres exemples.

L'ère de Nabonassar, roi des Chaldéens, est une autre époque célèbre par les observations astronomiques qui servirent à en fixer l'origine ; et par l'usage qu'en ont fait Hipparque et Ptolémée pour y rapporter leurs propres observations. Le commencement de cette ère répond au 26 février de l'année 3967 de la période julienne. Le commencement du mois égyptien Thoth, arriva le 26 février, à midi, au méridien d'Alexandrie. A partir de cette époque commencent les années égyptiennes de 365 jours. Cette période n'est employée que par les astronomes : elle n'est pas usitée dans l'histoire.

Enfin, la dernière ère dont je parlerai est celle de l'Hégire, adoptée par les Turcs ; elle commence le vendredi, 16 juillet de l'année 5335 de la période julienne, ce qui répond à 622 ans après l'ère chrétienne, comme on peut le voir par les formules de la page 550. Cette ère est importante à connaître à cause des astronomes arabes qui l'ont employée. Les années arabes sont des années lunaires composées de 12 révolutions synodiques de la lune, c'est-à-dire de $354^j.8^h.48',33'',64$ de la division sexagésimale. Pour appliquer cette période à l'usage civil, ils se servent d'une intercalation, et font successivement leurs années de 354 et de 355 jours. L'ordre de cette intercalation se règle sur un cycle de trente ans, dans lequel il y a onze années de 355 jours, qui sont les années 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 et 29; les dix-neuf autres sont de 354. La somme de ces trente années lunaires fait 10631 jours moyens, et est seulement de $0^j,011680$ plus faible que 360 révolutions synodiques moyennes. Ce cycle a commencé le 14 septembre 1757 de notre ère avec l'année 1171 de l'hégire. L'origine des années lunaires suivantes se transporte successivement dans les diverses parties de l'année solaire, à cause de la différence qui existe entre les durées des révolutions de la lune et du soleil.

Comme ces détails sont nécessaires pour lire l'histoire, j'ai cru devoir les rapporter. Ce n'est pas s'écarter de l'enseignement des sciences que de faire connaître les services qu'elles rendent aux hommes.

De l'influence de la réfraction sur les diamètres inclinés du disque lunaire.

Le disque réel de la lune étant supposé circulaire, ne peut pas nous paraître tel quand nous le mesurons au micromètre, parce que la réfraction élève inégalement ses différens points. Cette cause doit donc altérer les différens diamètres du disque et les rendre inégaux entre eux. Pour évaluer cette altération de la manière la plus simple, il faut remarquer que, dans la petite étendue qu'occupe le disque de la lune, les différences de réfraction peuvent être supposées proportionnelles aux différences de hauteur. Les ordonnées du disque circulaire sont donc toutes diminuées proportionnellement à leur longueur, et par conséquent, ce disque se change en une ellipse, dont le grand axe est horisontal et le petit axe vertical. Le premier de ces axes est égal au diamètre horisontal de la lune, que nous nommerons Δ; le second sera égal à $\Delta - r$, en représentant par r le changement de la réfraction pour une différence de hauteur égale à Δ. Ainsi, en rapportant l'ellipse à des coordonnées horisontales et verticales x, y, ayant leur origine au centre du disque, l'équation du disque déformée par la réfraction sera

$$\Delta^2 y^2 + (\Delta - r)^2 x^2 = \frac{\Delta^2 (\Delta - r)^2}{4}.$$

Nommons R le rayon vecteur de l'ellipse, I l'angle qu'il forme avec le fil horisontal du micromètre, nous aurons

$$x = R \cos I, \quad y = R \sin I,$$

ce qui donne

$$R^2 \left\{ \Delta^2 \sin^2 I + (\Delta - r)^2 . \cos^2 I \right\} = \frac{\Delta^2 . (\Delta - r)}{4};$$

par conséquent,

$$2R = \frac{\Delta . (\Delta - r)}{\sqrt{\Delta^2 \sin^2 I + (\Delta - r)^2 \cos^2 I}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$2R = \frac{\Delta \left\{ 1 - \frac{r}{\Delta} \right\}}{\sqrt{\sin^2 I + \left\{ 1 - \frac{r}{\Delta} \right\}^2 \cos^2 I}}.$$

$2R$ est la valeur du diamètre cherché ; mais on peut simplifier cette expression, en remarquant que r est toujours fort petit relativement à Δ ; de sorte que l'on peut se borner à la première puissance de $\frac{r}{\Delta}$. En extrayant ainsi la racine carrée par approximation, et faisant passer le résultat au numérateur, on trouve

$$2R = \Delta \left\{ 1 - \frac{r}{\Delta} \sin^2 I. \right\}$$

Pour employer cette expression, il faut connaître Δ ou le diamètre horisontal du disque ; mais ce diamètre lui-même varie avec les hauteurs de la lune, car si l'on conçoit deux verticaux tangens aux bords du disque lunaire, le diamètre horisontal restant toujours compris entre ces verticaux, doit paraître plus petit à mesure qu'il se rapproche du zénith vers lequel les verticaux concourent. Pour évaluer l'effet de cette altération, on peut, sans erreur sensible, considérer ce diamètre comme un petit arc de cercle perpendiculaire au vertical qui passe par le centre de la lune ; alors, pour qu'il soutende toujours le même angle au zénith, il faut que ses longueurs soient proportionnelles aux sinus de ses distances zénithales, c'est-à-dire, qu'en nommant Δ' sa valeur pour la distance zénithale vraie Z', et Δ celle qui convient à la distance apparente Z, on aura

$$\Delta = \frac{\Delta' . \sin Z}{\sin Z'}.$$

Or Z' ne diffère de Z que par la valeur absolue de la réfraction que nous nommerons r', c'est-à-dire, qu'on a $Z = Z' - r$. En substituant cette valeur dans l'expression de Δ, il vient

$$\Delta = \frac{\Delta' . \sin (Z' - r')}{\sin Z'}, \quad \text{ou} \quad \Delta = \Delta' \cos r' - \frac{\Delta' \sin r'}{\tang Z'}$$

Pour évaluer cette formule en nombres, on peut, sans aucune erreur sensible, négliger le carré de la réfraction; ce qui permet de faire $\cos r' = 1$, et de mettre Z au lieu de Z' dans le second membre. On peut de plus substituer au lieu de r' l'expression approchée de la réfraction, trouvée dans le premier livre, page 446, c'est-à-dire, prendre $r' = 6'',666 \tang Z$; car il est inutile de tenir compte du multiple de r qui s'ajoute à Z : on aura ainsi, sans erreur sensible, $\sin r' = \sin 60'',666 \,.\, \tang Z'$. En mettant ces valeurs dans notre formule, $\tang Z'$ disparaît, et il reste

$$\Delta = \Delta' - \Delta' \sin 60'',666 \quad \text{ou} \quad \Delta = \Delta' - \Delta' \,.\, 0{,}0002957.$$

Enfin, si l'on remet cette valeur dans la formule qui donne le diamètre incliné, on aura, en négligeant le produit de cette correction par $\frac{r}{\Delta}$,

$$2R = \Delta' \left\{ 1 - 0{,}0002957 - \frac{r}{\Delta} \sin^2 I \right\}.$$

Formules de M. Olbers *pour obtenir les élémens du lieu apparent des astres en fonction des élémens du lieu vrai.*

Pour obtenir ces formules, il faut chercher les coordonnées de l'astre et de l'observateur rapportées à trois axes rectangulaires fixes au centre de la terre. Les différences de ces coordonnées seront les coordonnées du lieu apparent de l'astre rapportées aux mêmes axes.

Conformément aux conventions que nous avons fréquemment adoptées, nous supposerons que l'axe des x positifs est dirigé du centre de la terre à l'équinoxe du printems, l'axe des y positifs au premier point du cancer, enfin, l'axe des z positifs au pôle boréal de l'écliptique. Nous nommerons λ et l la longitude et la latitude apparentes de l'astre, r sa distance à l'observateur, et nous désignerons par λ', l', r' sa longitude, sa latitude et sa distance vraies rapportées au centre de la terre. Nous nommerons aussi Λ, L, R, les quantités analogues pour l'observateur, c'est-à-dire, la latitude et la longitude de son zénith, ainsi que sa distance au centre de la terre. Alors, en représentant par $x, y, z, x', y', z', X, Y, Z$, les coordonnées rectangulaires correspondantes aux précédentes, nous aurons

$$x = r \cos\lambda \cos l, \quad y = r \cos\lambda \sin l, \quad z = r \sin\lambda,$$
$$x' = r' \cos\lambda' \cos l', \quad y' = r' \cos\lambda' \sin l', \quad z' = r' \sin\lambda',$$
$$X = R \cos\Lambda \cos L, \quad Y = R \cos\Lambda \sin L, \quad Z = R \sin\Lambda;$$

on aura de plus,

$$x = x' - X, \qquad y = y' - Y, \qquad z = z' - Z,$$

par conséquent,

$$x = r' \cos\lambda' \cos l' - R \cos\Lambda \cos L, \quad y = r' \cos\lambda' \sin l' - R \cos\Lambda \sin L,$$
$$z = r' \sin\lambda' - R \sin\Lambda,$$

or, les équations du lieu apparent donnent

$$\text{tang}\, l = \frac{y}{x}, \quad \text{tang}\, \lambda = \frac{z}{x} \cdot \cos l.$$

En substituant les x, y, z dans ces formules, nous ferons, pour plus de simplicité,

$$\frac{R}{r'} = \sin \Pi,$$

Π sera la parallaxe horisontale de l'astre, pour le rayon terrestre mené à l'observateur; nous aurons alors

$$\text{tang}\, l = \frac{\cos\lambda' \sin l' - \sin\Pi \cos\Lambda \sin L}{\cos\lambda' \cos l' - \sin\Pi \cos\Lambda \cos L},$$
$$\text{tang}\, \lambda = \frac{\left\{ \sin\lambda' - \sin\Pi \sin\Lambda \right\} \cos l}{\cos\lambda' \cos l' - \sin\Pi \cos\Lambda \cos L}.$$

La première de ces formules donnera la longitude apparente l: ensuite la seconde fera connaître la latitude apparente λ. Quand l et λ seront connus, on aura r par la formule

$$r = \frac{x}{\cos\lambda \cos l}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{r' \cos\lambda' \cos l' - R \cos\Lambda \cos L}{\cos\lambda \cos l}.$$

Or, en nommant D' le diamètre apparent de l'astre vu du centre de la terre, et D ce même diamètre vu du lieu de l'observation, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \frac{r'}{r} \sin \tfrac{1}{2} D',$$

puisque $r \sin \frac{D}{2}$ représente le rayon du sphéroïde lunaire qui est supposé constant. Substituant au lieu de r sa valeur, nous aurons

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \sin \tfrac{1}{2} D' \cdot \frac{\cos \lambda \cos l}{\cos \lambda' \cos l' - \sin \Pi \cos \Lambda \cos L}.$$

Pour rendre ces formules plus commodes dans les applications, il est utile d'en éliminer la longitude L du zénith et sa latitude Λ, comme comme nous l'avons fait dans la page 499, afin d'introduire à leur place l'ascension droite A du zénith, qui est le tems sydéral réduit en arc, et sa déclinaison H, qui est égale à la hauteur du pôle, moins l'angle du rayon avec la verticale, comme on l'a vu page 64. Or, cela est très-facile, en préparant les formules précédentes comme celles de la page 499, et se rappelant que l'on a

$$\begin{aligned}
\sin \Lambda &= -\sin \omega \cos H \sin A + \cos \omega \sin H, \\
\cos A \operatorname{tang} L &= \sin \omega \operatorname{tang} H + \cos \omega \sin A, \\
\cos L \cos \Lambda &= \cos A \cos H,
\end{aligned}$$

ω étant l'obliquité de l'écliptique; car en substituant ces valeurs, il vient

$$\operatorname{tang} l = \frac{\cos \lambda' \sin l' - \sin \Pi \sin \omega \sin H - \sin \Pi \cos \omega \sin A \cos H}{\cos \lambda' \cos l' - \sin \Pi \cos A \cos H},$$

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\{\sin \lambda' - \sin \Pi \cos \omega \sin H + \sin \Pi \sin \omega \sin A \cos H\} \cos l}{\cos \lambda' \cos l' - \sin \Pi \cos A \cos H},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \sin \tfrac{1}{2} D' \cdot \frac{\cos \lambda \cos l}{\cos \lambda' \cos l' - \sin \Pi \cos A \cos H}.$$

Si dans ces formules, nous supposons l'obliquité ω nulle, nous ferons coïncider l'écliptique avec l'équateur; alors la longitude vraie l' et la latitude vraie λ' deviendront l'ascension droite et la déclinaison vraie que nous désignerons par a', d'; et l et λ deviendront l'ascension droite et la déclinaison apparentes ; nous les nommerons a et d : nous aurons ainsi

$$\tang a = \frac{\cos d' \sin a' - \sin \Pi \sin A \cos H}{\cos d' \cos a' - \sin \Pi \cos A \cos H},$$

$$\tang d = \frac{\left\{\sin d' - \sin \Pi \sin H\right\} \cos a}{\cos d' \cos a' - \sin \Pi \cos A \cos H},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \sin D' . \frac{\cos d \cos a}{\cos d' \cos a' - \sin \Pi \cos A \cos H}.$$

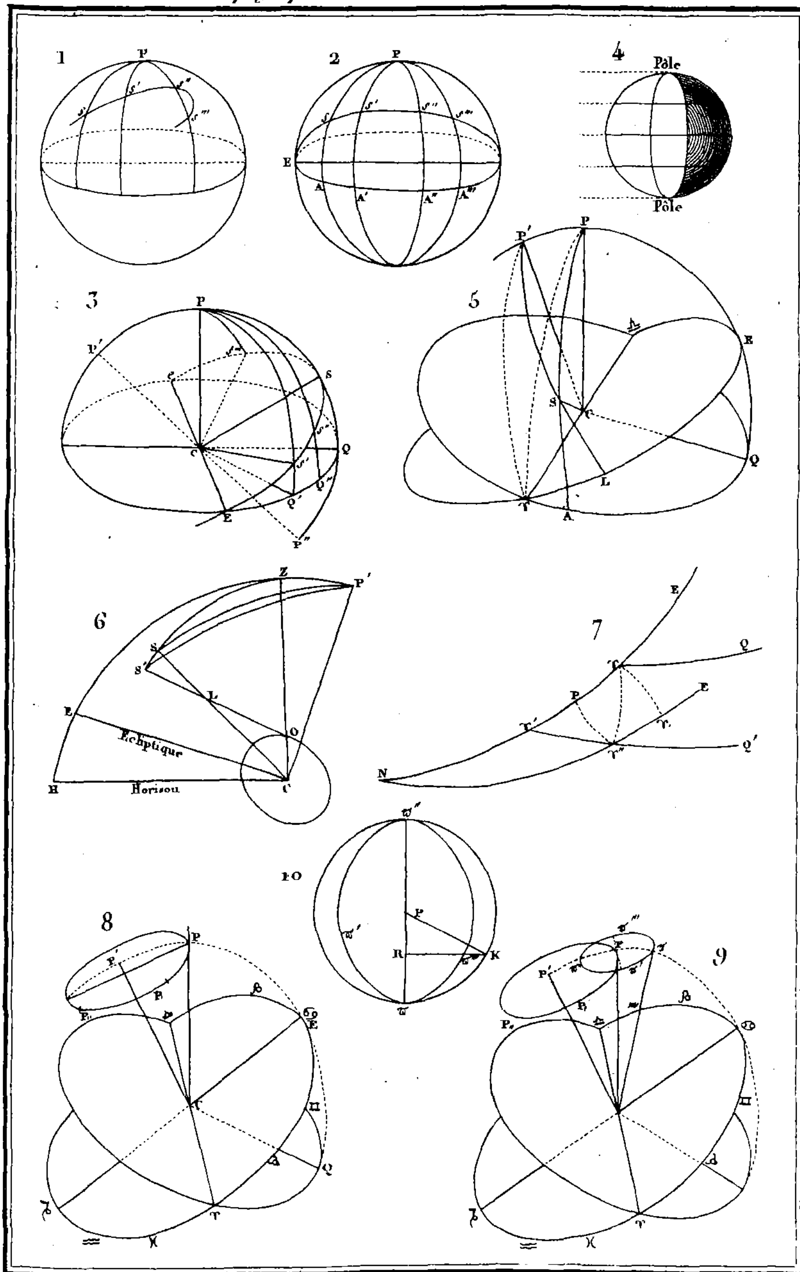
Enfin, si dans ces dernières on supposait $A = 0$ et $H = 90 - \nu$, ν étant l'angle du rayon terrestre avec la verticale dans le lieu de l'observation ; alors le plan des x, y deviendrait perpendiculaire à la verticale, et serait par conséquent horisontal. L'angle a' qui se compte sur ce plan, serait l'azimuth vrai de l'astre pris du centre de la terre, mais toujours autour d'une ligne parallèle à la verticale. Nous nommerons cet azimuth α'. L'angle d' qui se compte perpendiculairement au premier, serait la hauteur vraie de l'astre sur l'horison, ou $90 - z'$, en nommant z' la distance zénithale vraie comptée de la verticale ; enfin, a et d seraient l'azimuth et la hauteur vraie relativement au même zénith ; nous les nommerons α et $90 - z$: on aura ainsi

$$\tang \alpha = \frac{\sin z' \sin \alpha'}{\sin z' \cos \alpha' - \sin \Pi \sin \nu}, \quad \cot z = \frac{\left\{\cos z' - \sin \Pi \cos \nu\right\} \cos \alpha}{\sin z' \cos \alpha' - \sin \Pi \sin \nu},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} D = \sin \tfrac{1}{2} D' . \frac{\sin z \cos \alpha}{\sin z' \cos \alpha' - \sin \Pi \sin \nu}.$$

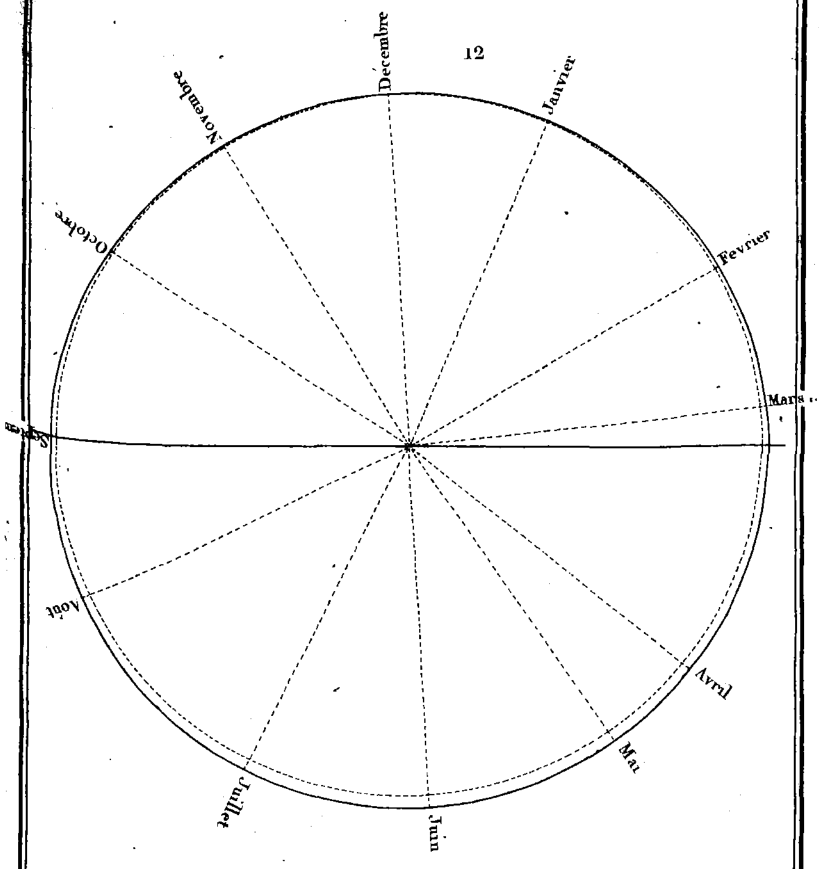
Cette manière très-simple de déduire ces formules des précédentes, a été donnée par M. Delambre dans la Connaissance des tems de 1812. En employant ces formules, il faut toujours se rappeler que les lettres accentuées appartiennent aux élémens du lieu vrai vu de la terre, et les lettres sans accens aux élémens du lieu apparent vu de la surface, conformément à la notation que nous avons adoptée dans tout le cours de cet Ouvrage.

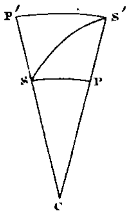
Fin du Tome second.



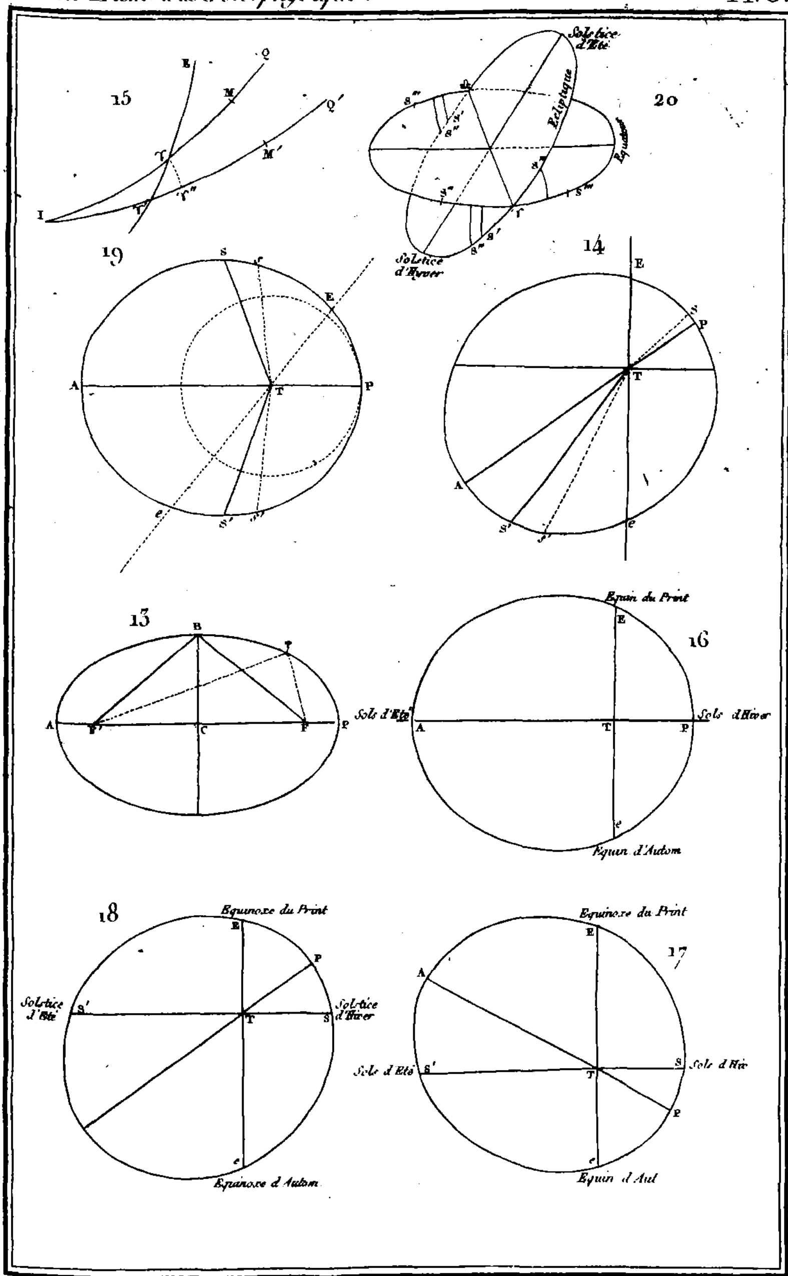
Gravé par Tardieu l'ainé, rue de Sorbonne n.° 10.

12


Decembre
Janvier
Fevrier
Mars
Avril
Mai
Juin
Juillet
Aout
Octobre
Novembre

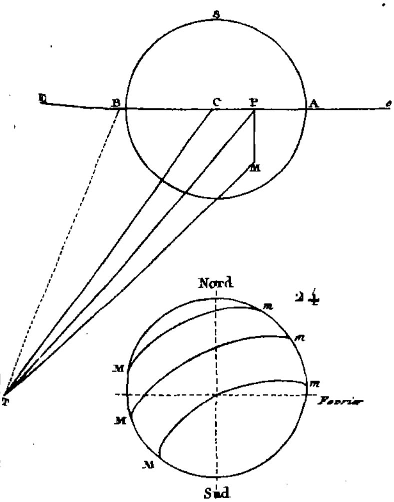

P'
S'
S
P
C

11

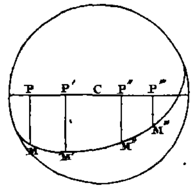


B. Brulard del. Jourdan sc.

21

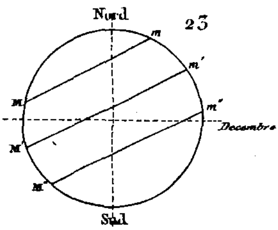


22

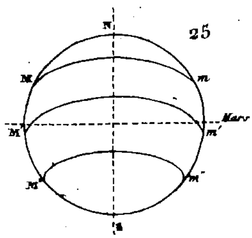


24

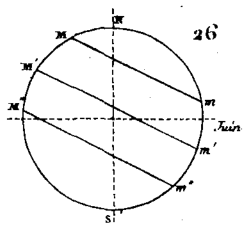
23



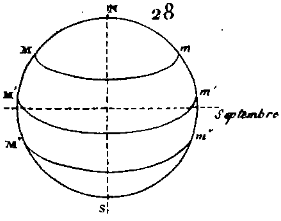
25



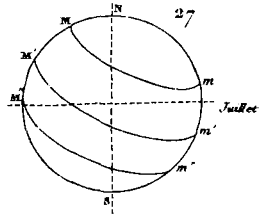
26

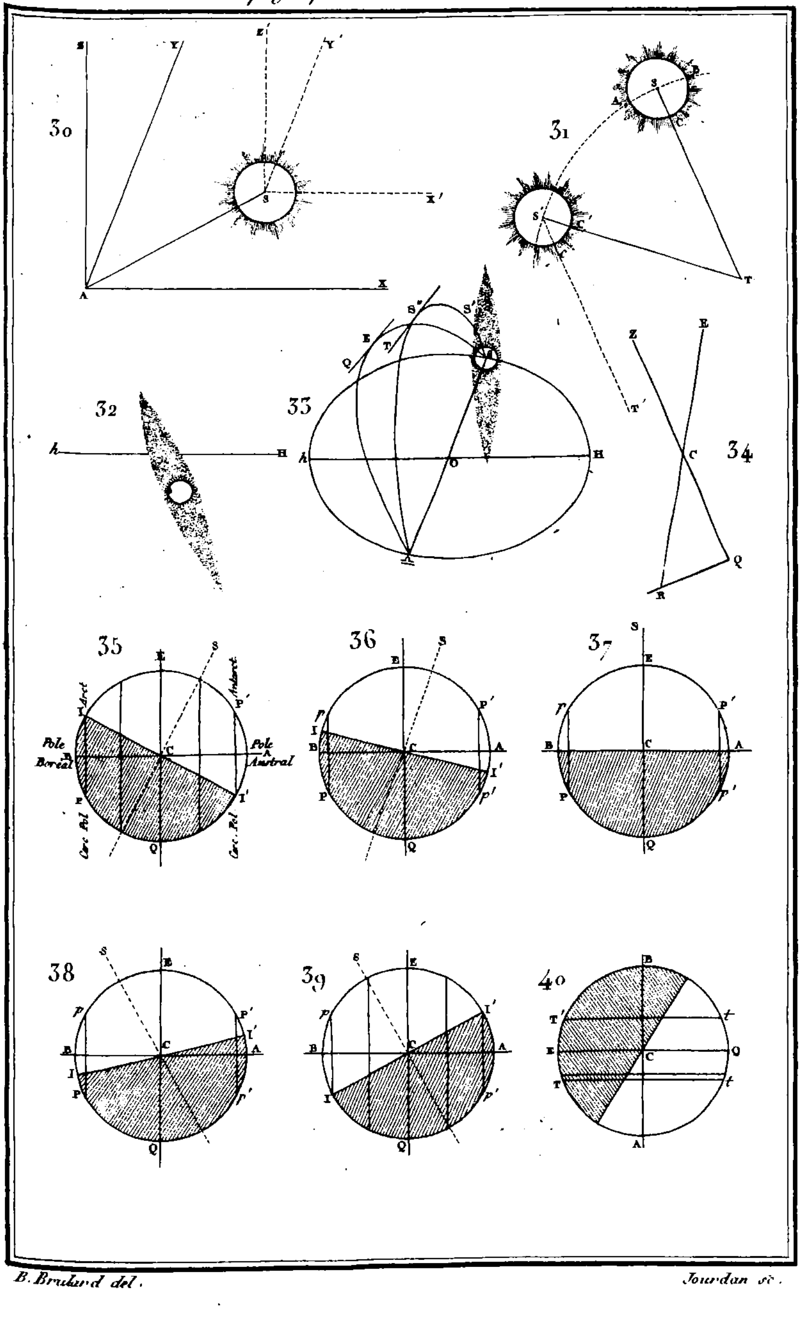


28

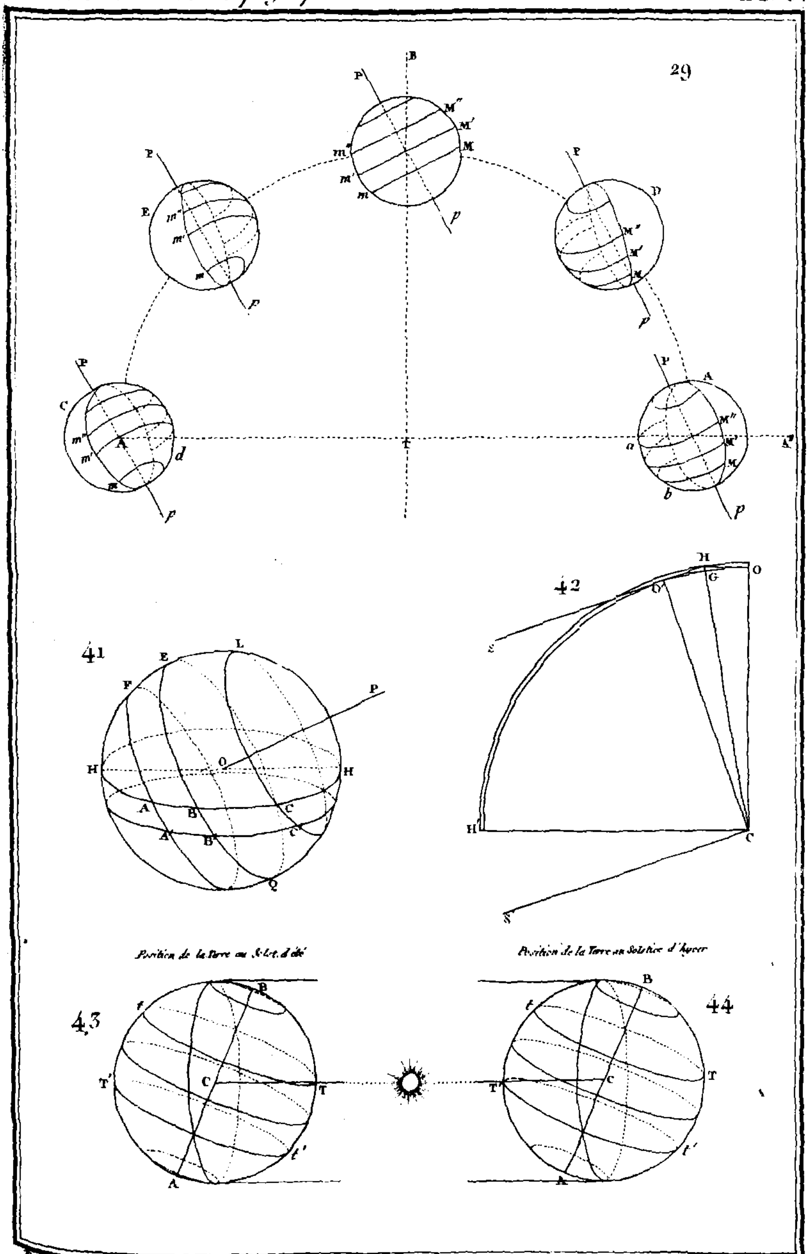


27

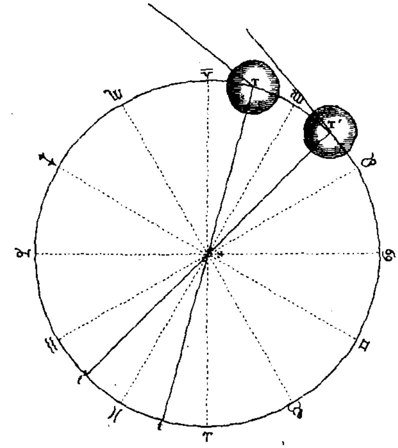




B. Brulard del. Jourdan sc.

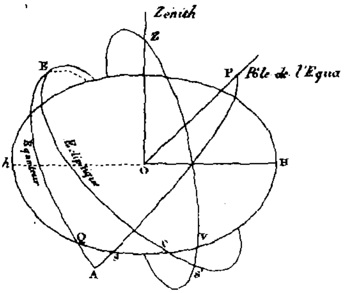


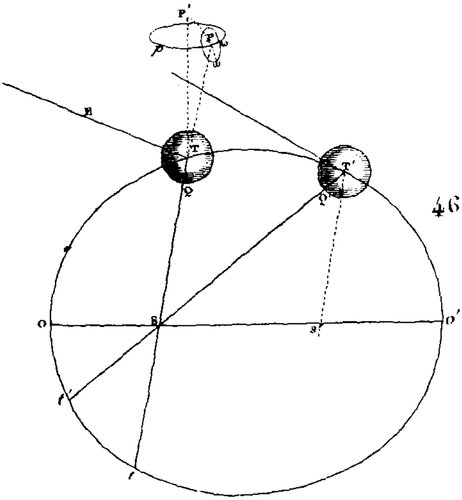
R. Brulard del. *Jourdan sc.*



45.

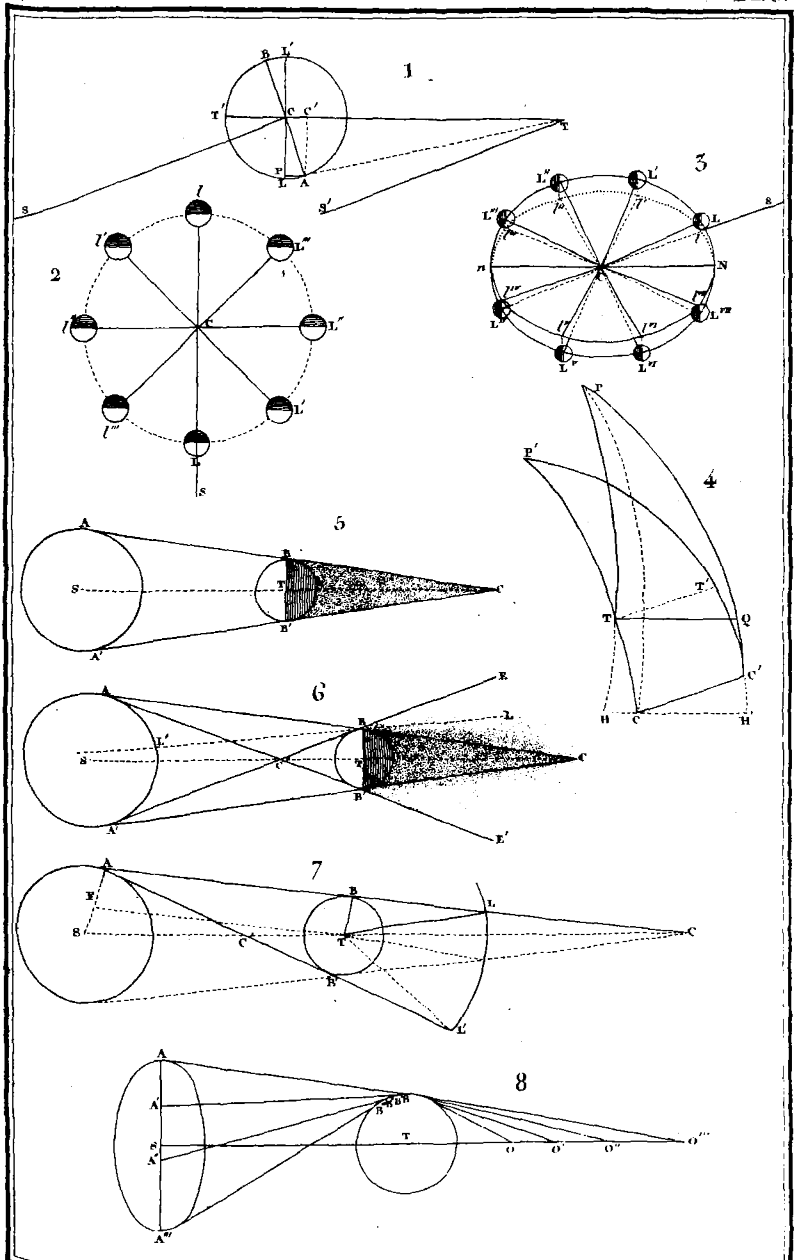
47



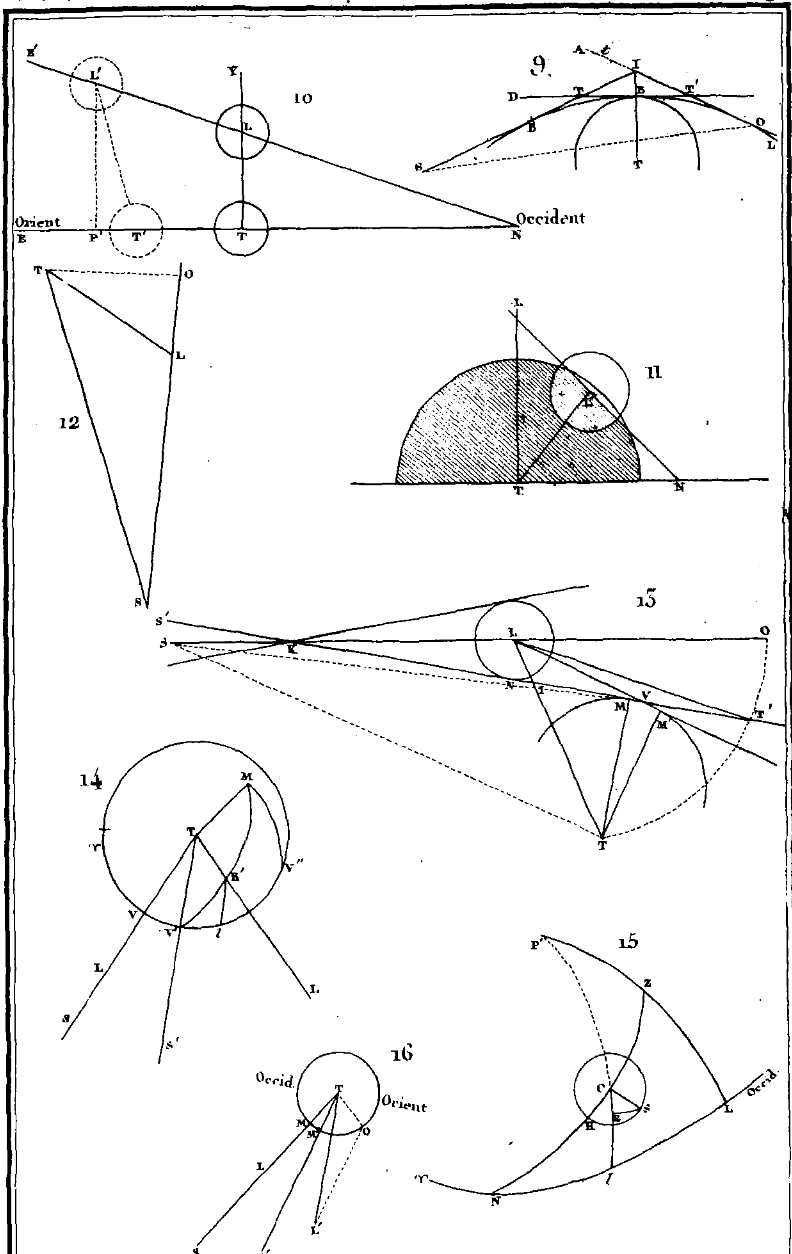


46

Gravé par Tardieu l'ainé.



Gravé par Tardieu l'ainé.



Gravé par Tardieu l'ainé.