ABRÉGÉ

D'ASTRONOMIE,

OU

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

D'ASTRONOMIE

THÉORIQUE ET PRATIQUE;

PAR M. DELAMBRE,

Chevalier de l'Empire, Trésorier de l'Université Impériale, Secrétaire perpétuel de l'Institut Impérial pour les Sciences Mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collége Impérial de France, Membre du Bureau des Longitudes, des Sociétés Royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des Académies de Saint-Pétersbourg et de Suède, de la Société Italienne, etc. Membre de la Légion-d'Honneur.

RARE BOOK
QB
45
.D44
1813

138.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

U.S. C. & G. SURVEY
LIBRARY
ARCHIVES
No. 7915
Shelf 520
Case 043

National Oceanic and Atmospheric Administration

Rare Books from 1600-1800

ERRATA NOTICE

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages
Faded or light ink
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at Library.Reference@noaa.gov

HOV Services
Imaging Contractor
12200 Kiln Court
Beltsville, MD 20704-1387
April 8, 2009

Case B.
Shelf a.

This Book is the Property of the
U. S. COAST AND GEODETIC SURVEY,
and must be returned to the Inventory
if not returned before the Expiration
of the Calendar Year.

Library of the
Survey of the Coast

ABRÉGÉ
D'ASTRONOMIE.

This Book is the Property of the
U. S. COAST AND GEODETIC SURVEY,
and must be [illegible] on Book Inventory
if not returned [illegible] Expiration
of the Calendar Year [illegible]

PRÉFACE.

Cet Abrégé est extrait des leçons que j'ai données au Collége impérial de France, et dont le recueil formera un Traité complet en trois volumes in-4°. Les deux premiers sont terminés, et le troisième est sous presse. On trouve ici le même plan avec moins de détails, moins de développemens, une moindre variété dans les méthodes, et moins d'exemples de calculs. Dans le grand Traité, j'ai tâché de rassembler tout ce qui peut être utile à l'astronome de profession. Ici, j'ai dû me borner à ce qui peut suffire à celui qui se contentera de prendre une idée exacte de la science, des théories et des observations sur lesquelles elle se fonde; et qui, ne voulant point pratiquer, n'a pas besoin qu'on lui expose avec une certaine étendue toutes les petites attentions qu'exigent et les calculs et les observations : mais je n'ai rien négligé pour qu'on y trouvât dans toutes les branches de l'Astronomie, les formules les plus exactes et les plus commodes avec leurs démonstrations. Nous avons déjà plusieurs traités qui jouissent d'une réputation méritée; mais l'Astronomie a fait de si grands progrès depuis qu'ils ont paru pour la première fois, que l'on convient généralement de la nécessité d'un ouvrage

plus moderne. Les leçons de La Caille étaient un excellent texte pour un professeur, mais elles laissent trop à faire à celui qui voudrait les suivre aujourd'hui sans maître. L'Abrégé d'Astronomie de Lalande, à portée d'un bien plus grand nombre de lecteurs, est par là même moins fait pour être enseigné que pour être lu, les méthodes n'en sont quelquefois ni assez rigoureuses, ni assez géométriques. En rédigeant un Ouvrage nouveau sur un sujet déjà traité tant de fois, j'ai senti la nécessité d'un plan méthodique et surtout plus naturel que celui de La Caille. Ce grand astronome, en plaçant comme il a fait tout d'abord l'observateur au centre du soleil, impose à son lecteur l'obligation de le croire long-tems sur parole. En supposant même que l'on pût faire de ce point central toutes les observations indiquées par l'auteur, quelle raison aurait l'observateur ainsi placé, pour tout rapporter à l'orbite de la terre, plutôt qu'à celle de Mercure ou de Jupiter, ou enfin plutôt qu'à l'équateur solaire. En effet, de tous les cercles imaginés par les astronomes, l'équateur solaire est le seul auquel, avec notre manière d'observer, nous pussions ramener tous les mouvemens célestes, si nous étions réellement placés, non pas au centre, ce qui est impossible, mais à la surface du soleil. Pour suivre un pareil plan, La Caille a dû faire abstraction de toutes les méthodes d'observation, et il est remarquable que l'un des plus grands observateurs qui jamais aient existé, n'ait pas dit un seul

mot ni des instrumens modernes, ni de la manière de s'en servir.

L'Astronomie n'est pas tout-à-fait la même pour l'habitant d'une planète et pour l'habitant du soleil; elle serait encore différente pour un habitant de la lune ou d'un satellite. C'est par les observations que nous ferons sur la terre, que nous pourrons par degrés nous faire une idée de ce que l'on doit voir du centre ou de la surface du soleil. A l'exemple des anciens, qui n'avaient pu inventer des instrumens dont rien ne leur suggérait l'idée, ni ne leur indiquait la nécessité, nous nous servirons d'abord de nos yeux, puis de l'horizon, seul terme fixe que donne la nature. Nous sentirons nous-mêmes la grossiéreté de nos premières observations; nous nous aiderons d'une lunette, d'une pendule astronomique, secours utiles, et dont l'ignorance a rendu si lents les premiers progrès de la science. Le gnomon et le cercle nous feront trouver toute l'Astronomie des premiers âges. Les phénomènes et les idées qu'ils auront fait naître, nous conduiront à imaginer le quart de cercle et l'équatorial de Ptolémée, les globes et les armilles d'Alexandrie. Nous passerons aux inventions des modernes pour ajouter à la précision des observations : à chaque pas nous emprunterons à la Géométrie des règles de calcul; nous apprendrons enfin à observer comme on fait aujourd'hui. De nos observations ou de celles que les astronomes ont publiées depuis soixante ans, nous ferons sortir l'Astronomie toute entière, telle

qu'elle existe aujourd'hui ; c'est-à-dire les petits mouvemens des étoiles, la marche inégale du soleil, de la lune, des planètes et de leurs satellites ; le calcul des éclipses de toutes les espèces, et l'art d'en tirer la connaissance des positions géographiques, ou des positions des astres dans les espaces célestes ; nous démontrerons qu'aujourd'hui le système de Ptolémée ne pourrait pas même venir à l'idée de l'astronome, ou qu'il ne tarderait pas à être rejeté comme directement contraire aux phénomènes. Nous balancerons quelque tems entre ceux de Copernic et de Tycho ; la simplicité du premier nous fera souhaiter qu'il soit le véritable, et nous trouverons enfin dans l'aberration des étoiles et les différentes longueurs du pendule en différens climats, des argumens qui ne nous permettront plus de douter ni du mouvement annuel, ni du mouvement diurne de la terre. A mesure que nous avancerons, nous tirerons des observations les conséquences auxquelles elles conduisent, et nous prendrons garde seulement de les trop généraliser ; tant que les phénomènes pourront s'expliquer de deux manières, nous aurons soin de les indiquer, et nous n'admettrons comme certain que ce qui nous sera démontré. Nous n'anticiperons jamais, en raisonnant d'après ce qui pourrait être prouvé par la suite, nous suivrons l'ordre le plus naturel ; et si nous nous écartons quelquefois de ce principe rigoureux, ce ne sera jamais que pour quelques corollaires peu importans, et que nous placerons

à la fin d'un chapitre, pour n'avoir plus à revenir sur un sujet, et pour que l'on puisse au besoin les retrouver plus facilement; de sorte que l'on pourrait les retrancher de l'Ouvrage, sans rompre la chaîne des démonstrations.

Ce plan si simple et si naturel n'était pas sans quelques difficultés, et voilà sans doute la raison qui a fait que dans aucune langue, aucun auteur que je sache ne s'y est astreint rigoureusement; presque tous ont suivi à fort peu près l'ordre et la marche de Ptolémée dans son Almageste.

M. Biot s'est fait un plan tout nouveau, mais il traitait de l'Astronomie *physique;* il en est résulté qu'en parlant des mêmes choses, nous avons cependant suivi une marche très-différente.

Mes idées sur le plan d'un Traité d'Astronomie, et sur l'esprit dans lequel il me paraît devoir être rédigé, étaient arrêtées depuis long-tems, et j'en avais conféré plus d'une fois avec Lalande, quand il travaillait à sa troisième édition. Il s'était trop bien trouvé de sa manière pour consentir à la changer; en adoptant plusieurs de mes méthodes, il avait desiré que je leur donnasse la forme qu'il préférait, et que je les traduisisse en sa langue. Je devais cette déférence à un maître et un ami qui m'a été si utile; mais en publiant mon propre Ouvrage, j'ai dû lui rendre sa première forme, qui d'ailleurs a bien incontestablement l'avantage de la brièveté. Depuis cette troisième édition de Lalande, il s'est écoulé plus de vingt ans, que j'ai consacrés

uniquement à l'Astronomie, et l'on concevra facilement que dans un aussi long intervalle, j'ai eu plus d'une occasion de revenir sur les mêmes problèmes et d'en varier les solutions; et peut-être il me sera permis de dire avec La Caille, *que ceux qui savent ce que contiennent les livres élémentaires publiés jusqu'ici, ne trouveront pas que celui-ci en soit une pure compilation; que je l'ai rédigé sur les connaissances que j'ai acquises, tant par mes réflexions que par mes observations depuis* 30 *ans que je fais mon unique occupation de l'Astronomie.* Dans mon grand Traité, on trouvera rapprochées et comparées les diverses méthodes des astronomes les plus célèbres. Ici, forcé par la petitesse du volume à me borner au strict nécessaire, il paraîtra tout simple que j'aie donné la préférence aux méthodes que j'ai imaginées et long-tems éprouvées.

Si je ne pouvais rien dire de neuf sur les instrumens et la manière de s'en servir, j'ai tâché du moins d'en présenter d'une manière nouvelle l'origine et la filiation. La Trigonométrie sphérique est aussi un instrument, et même le plus précis et le plus universel de tous; j'en fais naître le théorème fondamental, de la Trigonométrie rectiligne applipliquée à une observation très-usuelle. Ce premier principe établi, j'en déduis tout le reste d'une manière toute analytique et la plus directe peut-être qu'on ait encore employée. Je ne néglige pourtant point la synthèse quand elle est plus claire que l'analyse; c'est ce qu'on verra par ma démonstra-

tion des analogies de Néper. Avec un quart de cercle et la Trigonométrie sphérique, on peut déterminer les réfractions à diverses hauteurs; pour les lier entre elles, il faut une règle ; je la trouve par une construction qui est celle de Cassini, d'où je tire une formule générale qui est celle de tous les auteurs, c'est-à-dire une série qui procède suivant les puissances impaires des tangentes des distances au zénit, et qui renferme des indéterminées que l'observation doit donner. Je passe de là aux parallaxes, par cette seule considération qu'il est impossible que l'observateur s'imagine être réellement au centre des mouvemens. Je réduis toutes les parallaxes en formules générales, symétriques et d'une exactitude indéfinie.

Les étoiles n'ont point de parallaxe diurne ; ainsi, en tenant compte seulement des réfractions dont j'ai calculé la table, je puis former un catalogue des principales étoiles. Sans doute il ne peut avoir la dernière précision, puisque je n'ai point encore parlé de l'aberration ni de la nutation ; mais en reprenant nos premières observations, nous pourrons ensuite y faire les corrections dont il pourrait avoir besoin. En attendant, je montre comment avec des positions moyennes observées en 1800, comparées aux positions moyennes de La Caille, en 1750, on peut reconnaître la précession en déclinaison et en ascension droite, à l'exception pourtant de l'équation des points équinoxiaux qui est la même pour tous les astres, et qu'on peut en conséquence négliger pour tous.

Je passe à la route annuelle du soleil; j'en détermine l'obliquité et les points où elle coupe l'équateur. Je fais les mêmes calculs pour 1750 et 1800, et ce qui m'a surpris et presque fâché, c'est que par cette méthode incomplète, je détermine exactement l'équation des points équinoxiaux, le mouvement séculaire du soleil, l'époque des moyens mouvemens, l'obliquité de l'écliptique, et presque tout aussi exactement que je l'ai fait par des milliers d'observations et des calculs immenses, dans lesquels rien n'était négligé. Je passe aux circonstances du mouvement diurne, à la théorie des climats et aux problèmes de l'Astronomie sphérique. Je reviens au soleil dont je détermine l'inégalité, d'abord dans l'excentrique ou l'épicycle, comme les anciens, dans l'ellipse de Bouillaud et Seth Ward, enfin dans l'ellipse de Képler. Je démontre les formules du mouvement elliptique et la manière de trouver les élémens de l'ellipse solaire ou terrestre; j'explique les différentes espèces de tems, car jusqu'ici je n'ai guères employé que le tems sidéral; je parle des retours au méridien, des levers et des couchers des planètes; j'expose enfin la construction des tables du soleil. Après le soleil, ce qui a dû s'attirer spécialement l'attention des astronomes, c'est la lune; je montre comment on a pu en déterminer par observation la parallaxe, la révolution et les principales inégalités, et par quels moyens on aurait pu déterminer encore presque tout ce qu'elle a d'inégalités sensibles. Avec ce qui

précède, nous sommes désormais en état de calculer les éclipses ; je donne pour celles de lune une méthode graphique toujours suffisante pour les simples annonces, et j'y joins la méthode rigoureuse; j'en fais de même pour les éclipses de soleil, et pour en déterminer les circonstances générales et les courbes de commencement et de fin, j'expose une méthode nouvelle et purement trigonométrique, qui me paraît bien plus commode et tout au moins aussi exacte que celle des projections. Cette même méthode me fournit les moyens de calculer l'éclipse pour un lieu particulier, en y employant directement les parallaxes de distance au lieu des parallaxes soit d'ascension droite et de déclinaison, soit de longitude et de latitude dont je donne également les préceptes. Je montre aussi comment on peut employer ces éclipses à la correction des tables et aux longitudes terrestres.

Après la lune, le ciel n'offre rien de si remarquable que Vénus; ses phases me prouvent que son orbite embrasse le soleil ; les passages par les nœuds ou par le plan de l'écliptique me donnent sa révolution et son grand axe; ses conjonctions fournissent des lieux héliocentriques qui me servent à trouver son ellipticité. Le passage de 1769 me sert à déterminer la parallaxe du soleil; j'applique tous les mêmes raisonnemens à l'orbite de Mercure dont je détermine de même l'ellipse et l'inclinaison. Les mêmes méthodes, avec de légers changemens, me donnent les orbites des planètes supérieures; j'ajoute

des considérations nouvelles pour Uranus dont la période trop longue met en défaut les méthodes qui nous avaient réussi pour les autres planètes. Ce que nous disons d'Uranus s'applique aux quatre petites planètes découvertes plus nouvellement ; je m'occupe ensuite des stations et rétrogradations et de la rotation de toutes les planètes, ainsi que de l'anneau de Saturne.

Je viens à l'aberration que je traite d'une manière toute nouvelle, ainsi que la parallaxe annuelle des étoiles ; et à la nutation sur laquelle il ne restait presque rien de neuf à dire ; aux problèmes des comètes pour lesquelles j'expose une méthode entièrement nouvelle. Je donne l'expression de l'anomalie et du rayon vecteur elliptique et toutes les formules des comètes sous une forme dont le premier terme est le seul à conserver, quand on regarde l'orbite comme parabolique : ainsi l'on voit toujours ce qu'on néglige, et si la parabole est insuffisante, on peut essayer diverses ellipses. Cette méthode n'emploie que les opérations les plus usuelles de l'Astronomie ; elle n'offre aucun calcul difficile ni long, les erreurs y sont presque impossibles, et quand on a trouvé une parabole approximative, on en peut corriger à la fois tous les élémens sur la totalité des observations, par le moyen des équations de condition, comme on fait pour les planètes. Ce moyen de rectification me paraît plus simple, plus direct et plus satisfaisant qu'aucun de ceux qu'on a proposés jusqu'ici, et qui sont tous fondés sur les méthodes de

fausse position. Je ne puis m'étendre beaucoup sur les satellites de Jupiter, quoiqu'aucun astronome vivant n'ait autant travaillé sur cette théorie, mais elle aurait trop grossi le volume. Je suis encore plus bref sur les satellites de Saturne et d'Uranus, dont on ne fera jamais aucun usage bien important; je donne une idée suffisante des moyens employés pour la grandeur et la figure de la terre. Ceux qui voudront plus de détails sur les dernières opérations, les trouveront dans la *Base du système métrique décimal.*

La connaissance de la figure de la terre nous a été presqu'inutile dans tout ce qui est d'Astronomie générale; les formules de parallaxe ne dépendent que de trois points; l'observateur, l'astre et le centre des mouvemens; les formules ont donc toute la généralité possible. L'observateur peut, sans sortir de chez lui, déterminer la parallaxe horizontale. Dans le chapitre des éclipses seulement, nous avons été forcés d'adopter dans les calculs de l'éclipse générale, une hypothèse sur la figure de la terre: en la supposant sphérique, on aurait déjà les longitudes et les corrections des tables avec assez d'exactitude. Nous avons cependant indiqué à l'avance quelques légères attentions qu'on a été long-tems forcé de négliger.

Je donne sur les observations et les calculs nautiques, les notions qui doivent suffire à celui qui aura lu tout ce qui précède, et je finis par un chapitre sur le calendrier, où l'on trouvera toutes

les notions qui peuvent être de quelque utilité. Ainsi nous avons parcouru toutes les branches de l'Astronomie; nous en avons résolu tous les problèmes avec toute l'exactitude et la simplicité possibles, et dans un volume assez médiocre, on trouvera renfermé un Traité que je me suis efforcé de rendre complet en son genre.

Quand je parle d'un instrument, d'une solution ou d'une formule, je tâche toujours d'en nommer l'auteur. C'est une méthode trop négligée par ceux qui ont écrit des livres élémentaires : il en résulte que le lecteur attribue à l'auteur tout ce qu'il voit rassemblé dans son livre; ainsi nous sommes portés à donner à Euclide tous les théorèmes qu'il n'a fait que nous transmettre. En tâchant de rendre ainsi à chacun ce qui lui appartient, quelquefois je n'ai eu d'autre règle que celle de rechercher le livre le plus ancien où se trouvait mentionné l'instrument ou le théorème : prêt à me rectifier, si l'on me montre un livre plus ancien encore que celui dont j'ai eu connaissance. Pour ce que je donne comme de moi, je suis bien sûr de l'avoir trouvé; mais je suis également prêt à reconnaître les droits de ceux qui auraient imprimé avant moi; c'est une justice que j'ai déjà rendue à plusieurs auteurs chez qui j'ai retrouvé ensuite ce que je croyais avoir imaginé le premier.

ABRÉGÉ
D'ASTRONOMIE,

OU

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES
D'ASTRONOMIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE.

PREMIÈRE LEÇON.

Observations fondamentales.

1. L'ASTRONOMIE est la science de l'astronome ; ἀστρονόμος est le nom que donnaient les Grecs à celui qui s'occupait spécialement des astres et de leurs mouvemens.

L'Astronomie se compose d'observations et de calculs, que nous allons présenter dans l'ordre qui nous paraît le plus naturel et le plus méthodique.

2. Placez-vous au milieu d'une vaste plaine, ou sur le sommet d'une tour, de manière que rien ne gêne votre vue. Le ciel vous paraîtra une voûte hémisphérique, appuyée sur un cercle qui est la terre.

3. Ce cercle qui est la limite commune ou l'intersection de la terre et du ciel, s'appelle *horizon*, c'est-à-dire, *terminateur*, parce qu'il borne la vue.

4. Examinez le soleil levant, vous le verrez s'élever obliquement de gauche à droite, monter jusqu'au milieu du jour, redescendre, comme il a monté, d'une manière uniforme, et se coucher à un autre point de l'horizon.

5. Quelque tems après, quand l'obscurité sera devenue sensible, vous apercevrez des points brillans qu'on appelle *étoiles*, et qui semblent parsemer la voûte du ciel. Suivez ces étoiles dans leur cours, vous verrez qu'elles se lèvent de divers points de l'horizon; qu'elles vont, de même que le soleil, de gauche à droite; qu'elles montent pendant une partie de leur course, et que l'autre partie est employée à redescendre, et qu'enfin elles disparaissent vers un point de l'horizon plus ou moins éloigné de celui où elles se sont montrées.

6. Vous remarquerez que toutes ces étoiles conservent entre elles les mêmes distances, forment les mêmes figures pendant toute la durée de la nuit, et que la voûte étoilée paraît tourner *tout d'une pièce* autour de la terre.

7. Pour vérifier si cette régularité est constante, il faut mettre de l'ordre dans les observations. Pour mieux connaître tous ces mouvemens, il faut les rapporter à quelque chose de fixe. La première chose qui se présente est l'horizon; car la terre a l'air d'être immobile.

8. L'horizon est un cercle dont nous occupons le centre; nous ne pouvons atteindre à la circonférence pour y marquer les points où les astres se lèvent et se couchent. Mais tous les cercles sont des figures semblables; et quand ils sont concentriques, les lignes menées du centre à la circonférence les divisent en arcs d'un même nombre de degrés.

9. Traçons autour de nous une circonférence, ou plaçons une balustrade ronde à hauteur d'appui; au centre mettons un piquet droit de même hauteur que la balustrade, et qui soit le lieu de notre œil quand nous observons.

10. L'œil étant donc en C (fig. 1), faisons marquer sur notre balustrade, ou sur notre horizon factice, le point A vers lequel une étoile se lève, et marquons à la montre l'heure et la minute où elle a commencé à se montrer.

Faisons-en de même pour différentes étoiles qui se leveront successivement en H, en D et autres points.

Suivons ces étoiles pendant toute leur course au-dessus de l'horizon. Notons les instans où elles disparaîtront, l'une en B, l'autre en R, l'autre en E; marquons ces points.

11. Nous remarquerons, d'abord que l'étoile qui s'est levée et couchée dans la corde AB, y a employé moins de tems que celle qui, s'étant levée en H, s'est couchée en R, et celle-ci moins de tems que l'étoile dont le chemin est indiqué par la corde DE.

Que, par exemple, si l'étoile AB a été visible pendant dix heures, HR l'a été pendant douze, et DE pendant quatorze. Pour faire ces observations, il faut choisir les plus longues nuits.

12. Nous verrons généralement que la durée de l'apparition de l'étoile sera d'autant plus courte, que la corde sera plus courte et plus éloignée du centre, en allant de C vers O.

Que la durée sera d'autant plus longue, que la corde sera plus courte et plus éloignée de C vers I.

Que si deux étoiles se lèvent l'une après l'autre au même point de l'horizon, elles se coucheront aussi dans la même corde, et que l'apparition sera de même durée; ce qui est un indice assez frappant de l'uniformité du mouvement de la sphère étoilée.

Ainsi ce n'est pas la longueur de la corde qui fait la longueur ou la durée de l'apparition, mais bien la position de cette corde par rapport à la corde HR qui donne une durée moyenne de 12 heures, et qui passe par le centre C.

Si nous répétons ces observations les jours suivans, nous trouverons que les levers ont lieu toujours aux mêmes points et à 24 heures d'intervalle.

13. Nous remarquerons encore fort aisément que l'étoile AB au milieu de sa course, était sensiblement moins haute que l'étoile HR; c'est-à-dire qu'elle était plus voisine du point O de l'horizon; que l'étoile DB était au contraire plus haute que HR, et plus éloignée du point O;

Que les étoiles qui suivent la même corde, s'élèvent également au-dessus du point O, du moins autant que l'œil peut en juger.

14. Si nous traçons sur le terrain les différentes cordes, nous verrons tout d'abord qu'elles sont toutes parallèles, ce dont nous nous assurerons en mesurant les arcs AH et BR qui seront égaux entre eux, ainsi que HD et RE.

15. Puisque toutes ces cordes sont parallèles, une ligne ICO qui serait perpendiculaire à l'une de ces cordes, comme HR, serait également perpendiculaire à toutes les autres, et les couperait toutes en deux parties égales.

16. Les diamètres IO, HR partageront l'horizon en quatre parties égales de 90° chacune; les points HORI s'appelleront *les points cardinaux de l'horizon*, ceux auxquels nous rapporterons tous les autres. H est l'est, O le sud, R l'ouest, et I le nord.

17. Le point H s'appelle encore *le levant* ou *l'orient;* le point R, *l'occident* et *le couchant;* le point O est *le midi*, et le point I, *le point septentrional.*

Dans la réalité, tous les points du demi-cercle oriental IHO sont pour différens astres, le point *orient;* mais le point H qui tient le milieu entre tous, en retient le nom.

De même, tous les points du demi-cercle occidental ORI sont des points de *couchant;* mais R s'appelle spécialement *l'occident.*

18. L'arc AO de l'horizon, compris entre le point levant d'un astre et le point sud de l'horizon, s'appelle *l'azimut* de cet astre.

L'arc OB est l'azimut de l'astre couchant, et ces deux arcs sont égaux pour la même étoile (15).

19. L'azimut peut également se compter du point nord I, et l'on aura de même IA = IB.

L'azimut IA compté du nord, est toujours le supplément à 180° de l'azimut compté du sud. IA = 180° — OA.

Les azimuts comptés de O vers I, ou de I vers O, peuvent aller de 0° à 180°.

20. On pourrait compter les arcs de l'horizon en partant de H ou R.

Dans ce cas, HA s'appelle l'amplitude *ortive* de l'étoile qui se lève en A.

L'arc RB est l'amplitude *occase* de l'astre qui se couche en B; ces deux amplitudes sont égales.

HD et RE sont de même les deux amplitudes de l'étoile DE.

21. L'azimut et l'amplitude font toujours une somme de 90°, en donnant à l'amplitude le signe — quand elle est vers le nord.

22. L'amplitude est nulle et l'azimut est par conséquent de 90°, pour l'astre qui se lève et se couche dans le diamètre HR.

L'azimut est moindre que 90° pour l'étoile qui se lève en A plus près du point O; le jour est moindre que de 12 heures, et la hauteur est moindre au-dessus du point O.

23. Sur votre balustrade circulaire HORI, imaginez une demi-sphère transparente ou de verre; en plaçant l'œil au centre C, vous pourriez faire marquer le point auquel l'étoile répondrait à chaque instant de son apparition; vous marqueriez ainsi sur votre sphère artificielle, une trace qui serait toute semblable à la route de l'étoile sur la sphère celeste. Cette demi-sphère est impossible à établir.

24. Il est au moins fort aisé d'établir perpendiculairement sur un diamètre comme OI, un demi-cercle qui ferait une portion de cette sphère.

Ce cercle perpendiculaire à l'horizon s'appelle *vertical*. Il a le même diamètre que l'horizon et que la sphère.

25. Prolongez votre piquet central, par la pensée, jusqu'à sa rencontre avec le vertical. Le point de rencontre partagera le vertical en deux arcs de 90°. Ce point s'appelle *zénit*, c'est-à-dire *point*; c'est le point fixe auquel nous rapporterons tous les autres.

Prolongez le piquet, par la pensée, au-dessous autant qu'au-dessus, vous aurez par la rencontre avec le demi-cercle infé-

rieur, un point qu'on nomme *nadir*, c'est-à-dire *opposé*; mais ce dernier point est sous la terre, il est invisible.

26. Au moyen de ce demi-cercle placé verticalement sur le diamètre IO, vous pourrez mesurer la distance de l'étoile au point sud de l'horizon, quand elle sera au milieu de sa course.

27. Dans cette position, le cercle vertical prend le nom de *méridien* ou de *cercle du milieu du jour*. Il partage la sphère céleste en deux hémisphères, l'un oriental et l'autre occidental.

En notant l'instant du passage de l'étoile par ce cercle, vous vous assurerez que cet instant est également éloigné de l'instant du lever et du coucher, et qu'ainsi le méridien est bien nommé, puisqu'il partage en deux parties égales le jour de l'astre ou le tems de son apparition sur l'horizon.

28. Il suffit, pour le moment, d'avoir conçu ce cercle. On peut le remplacer d'une manière plus simple.

Soit CM (fig. 2) le piquet central, QE un autre piquet élevé perpendiculairement sur le diamètre IO, nord et sud, de la figure première; cette ligne s'appelle *la méridienne*. Le long de ce piquet, glisse et tient à frottement un grain de chapelet G. Quand l'étoile est prête à disparaître derrière le piquet QE, faites élever le grain G à la hauteur N, intersection du piquet avec le rayon visuel, CS dirigé à l'étoile.

Mesurez NL, excès de NQ, sur CM, et CL = MQ distance des deux piquets; l'angle NCL sera la hauteur de l'astre sur l'horizon de la balustrade. Soit h cette hauteur, vous aurez

$$\tang h = \frac{NL}{CL};$$

vous connaîtrez donc la hauteur méridienne de l'étoile.

29. Imaginez que la figure première soit repliée à angles droits, selon la méridienne IO, OHI continuera d'être la partie orientale de l'horizon; ORI sera le vertical qui passe par les points nord et sud de l'horizon. Que l'angle OCS soit la hauteur méridienne de l'étoile qui s'est levée en A. Par les

points AmS, imaginons un plan; l'inclinaison de ce plan avec l'horizon, sera OmS, car les lignes Om, mS sont perpendiculaires à l'intersection commune AmB des deux plans. Or nous aurons, en abaissant la perpendiculaire Sn,

$$\text{tang}\, OmS = \frac{Sn}{mn} = \frac{\sin OS}{Cn - Cm} = \frac{\sin OCS}{\cos h - \sin AH} = \frac{\sin h}{\cos h - \sin AH}$$
$$= \frac{\sin h}{\cos h - \cos AO} = \frac{\sin h}{\cos h - \cos z} = \frac{\text{tang}\, h}{1 - \frac{\cos z}{\cos h}}.$$

Nous pouvons mesurer AO ou HA; nous pouvons mesurer h (28), nous aurons l'inclinaison $OmS = I$ du plan dans lequel l'étoile paraît se mouvoir.

Répétez l'opération sur plusieurs étoiles, et vous trouverez à Paris, que l'inclinaison I est constante et de 40°. 10′.

30. D'où résulte cette conséquence, que toutes les étoiles se meuvent dans des plans parallèles, puisqu'ils ont tous même inclinaison sur l'horizon; vérité que nous avions déjà droit de soupçonner, en remarquant que toutes les cordes de lever et de coucher étaient parallèles entre elles. En effet, des plans parallèles coupant un même plan, y forment des intersections parallèles; à la vérité, il ne s'ensuit pas rigoureusement que des plans soient parallèles quand leurs intersections le sont. Mais ce parallélisme est prouvé par l'égalité d'inclinaison. Il resterait à démontrer rigoureusement que les étoiles se meuvent toutes dans des plans. C'est ce qui résulterait de l'idée que toutes les étoiles tournent autour de la terre avec une sphère à laquelle elles sont invariablement attachées. Cette idée qui s'est présentée aux astronomes de tous les tems, n'est pas d'une exactitude bien rigoureuse; mais nous pouvons l'admettre pour expliquer les premières observations, jusqu'à ce que d'autres observations nous enseignent les modifications dont elle peut être susceptible.

31. Supposons donc que les étoiles soient attachées à la surface intérieure de la sphère celeste, et soit OI (fig. 3) l'intersection du méridien OZI avec l'horizon, z sera le zénit

(25) ; le diamètre AQ, qui fera avec l'horizon OCI l'angle OCA $= 41°.10'$, marquera la hauteur OA de l'étoile qui se lève et se couche aux points que nous avons nommés *est* et *ouest* (16), et dont le jour est de 12 heures (11) ; nous appelons *jour* d'un astre, le tems qu'il passe sur l'horizon, *nuit* le tems qu'il passe au-dessous.

Pour le prouver, reprenons la formule $\text{tang } I = \frac{\text{tang } h}{1 - \frac{\cos z}{\cos h}}$.

Si l'étoile s'est levée en H, son azimut OH $= z$ est de 90°

$$\cos z = \cos 90° = 0.$$

Donc $\text{tang } I = \frac{\text{tang } h}{1} = \text{tang } h$; donc $I = h$;

donc la hauteur de cette étoile est égale à l'inclinaison commune de tous les plans.

32. AQ sera dans la sphère céleste le diamètre d'un grand cercle, qu'on appelle *l'équateur*, parce que tous les astres qui s'y trouvent placés ont leur jour égal à leur nuit.

33. Perpendiculairement au diamètre AQ, menons par le centre le diamètre PCP′, ce diamètre sera l'axe autour duquel tourne la sphère étoilée. Les points P et P′ s'appellent *les deux pôles*.

34. Le point A tournant autour de l'axe et des pôles P, P′, à l'extrémité du diamètre QCA, sera toujours à 90° des pôles P et P′, car l'angle PCA sera toujours droit.

35. Par extension, on appelle *axe* d'un cercle quelconque, le diamètre P′CP élevé perpendiculairement sur le milieu du diamètre AQ de ce cercle.

On appelle *pôles* de ce cercle, les deux extrémités P et P′ de l'axe.

Tous les points du cercle décrit sur le diamètre AQ, seront également éloignés des pôles P et P′ ; tous les points de la circonférence d'un grand cercle sont à 90° de ses pôles.

36. On appelle *grand cercle de la sphère*, tous ceux qui ont le même diamètre que la sphère; tels sont l'horizon dont le diamètre est OI; le méridien dont le diamètre est ZN, ligne qui joint le zénit et le nadir (25) : l'axe PP′ est encore un des diamètres du méridien. Il y a d'autres grands cercles que nous ferons connaître quand ils nous seront utiles.

37. On nomme *petits cercles de la sphère*, ceux qui ont pour diamètre une corde de la sphère plus petite que le diamètre. Tel serait le cercle décrit sur la corde EFF′.

Supposons qu'une étoile passe au méridien en E, l'arc OE ou l'angle OCE sera la hauteur méridienne de cette étoile. Cette étoile s'élevant moins haut que l'étoile équatoriale A, aura son azimut moindre que 90°; car le triangle MCE donne

$$\text{tang OME} = \text{tang I} = \frac{Ep}{Mp} = \frac{\sin \text{EO}}{\cos \text{EO} - \text{MC}}$$
$$= \frac{\text{tang EO}}{1 - \frac{\text{MC}}{\cos \text{EO}}} = \frac{\text{tang } h}{1 - \frac{\text{MC}}{\cos h}};$$

ce qui est précisément l'équation (32), donc $\text{MC} = \cos z$

$$\text{tang I} - \text{MC}\frac{\text{tang I}}{\cos h} = \text{tang } h,$$

ou
$$\text{tang I} \cos h - \text{MC tang I} = \sin h;$$
$$\text{tang I} \cos h - \sin h = \text{MC tang I};$$
$$\text{MC} = \cos h - \sin h \cot \text{I} = \frac{\sin \text{I} \cos h - \sin h \cos \text{I}}{\sin \text{I}};$$
$$\text{MC} = \frac{\sin(\text{I} - h)}{\sin \text{I}} = \frac{\sin \text{I}}{\cos \text{AE}} = \frac{\sin \text{AE}}{\sin \text{AO}},$$

ou
$$\cos z = \frac{\sin(\text{I} - h)}{\sin \text{I}},$$

quantité qui ne peut être $= 0$, que dans le cas où $\text{I} - h = 0$.

Au reste, cette conséquence peut se déduire plus simplement des art. 11 et 16, où nous avons remarqué que quand l'azimut est moindre, la hauteur méridienne est moindre, ainsi que la durée du jour.

38. L'étoile qui passe en E tourne autour du point F de l'axe; elle décrit un petit cercle dont le diamètre est EF′, et le rayon EF = sin EP′ = sin EP = sin dist. polaire, et tout nous porte à supposer qu'elle le parcourt d'un mouvement uniforme.

Imaginez le demi-cercle décrit sur EF′ perpendiculairement au plan du papier ou de la figure 3.

De tous les points de cette demi-circonférence, imaginez des perpendiculaires sur le diamètre EF′, toutes les perpendiculaires auront leur pied dans la droite EF′ qui sera ce qu'on appelle *la projection orthographique de ce cercle*. La partie EM sera la projection de la partie du cercle qui est au-dessus de l'horizon, la ligne MF sera la projection de la partie qui est au-dessous; or, EM = FE — FM; la ligne MF′ = F′F + MF = FE + MF; les rayons FE et FF′ sont les projections d'un quart de cercle, EM est la projection d'un arc plus petit, MF′ est celle d'un arc plus grand. Voilà pourquoi le jour de l'étoile E est moindre que de 12 heures.

39. Les projections AC et CQ des deux quarts de l'équateur sont égales; voilà pourquoi l'étoile qui parcourt ce cercle a un jour de 12 heures, et une nuit de 12 heures.

L'étoile qui parcourt le petit cercle décrit sur BD, a ses deux projections BD et D′D inégales; son jour est plus grand que sa nuit, parce que BD′ est plus grand que D′D.

L'étoile qui décrit le cercle dont la projection est BD, est plus haute au méridien que l'étoile équatoriale A.

40. La figure 3 est ce que les Grecs nommaient *analemme*. Ce mot est un composé de *lemme*, λῆμμα, ὁ λαμβάνεται, *quod sumitur*. Un *lemme* est une proposition isolée que l'on *prend* pour démontrer une proposition dont on a besoin.

Ἀνάλημμα ὁ ἀναλαμβάνεται, *quod assumitur*. L'*analemme* est une figure tracée suivant certaines règles, où l'on prend avec un compas, des lignes dont la longueur est nécessaire à la solution du problème dont on s'occupe.

41. Ainsi, le demi-cercle dont la projection est BD, étant décrit en 12 heures et d'un mouvement uniforme, sa moitié

sera décrite en 6 heures. La partie BD′ qui est la plus grande, est égale à la demi-somme plus la demi-différence. Le tems de BD′ sera 6 heures plus le tems qui répond à l'arc dont le sinus est la demi-différence de BD′ à D′D; on peut mesurer cette demi-différence; on aura donc le sinus et le tems de BD′, et par conséquent celui de D′D; l'arc dont BD′ est la projection s'appelle *l'arc semi-diurne de l'astre*, parce qu'il mesure la moitié de son jour.

L'arc D′D est l'arc semi-nocturne, parce qu'il mesure la moitié de sa nuit; ces deux arcs réunis valent toujours 12 heures; l'un ne peut s'augmenter qu'aux dépens de l'autre.

42. Les arcs AE, AB du méridien, compris entre l'étoile et l'équateur, s'appellent *déclinaison;* la déclinaison AB est boréale, parce qu'elle est du côté du nord, ou de *Borée*, vent du nord.

La déclinaison AE est australe ou du sud, parce qu'elle est du côté de l'*Auster*, ou vent du sud.

43. Les parties CH, CF de l'axe, comprises entre l'équateur AQ et le cercle parallèle BD et EF de l'étoile, sont aussi les sinus des déclinaisons AB et AE de l'étoile, ou les cosinus des distances polaires PB et PE. Ces cosinus ont des positions contraires, par rapport au centre C; si le cosinus CH est considéré comme positif, le cosinus CF sera regardé comme négatif. Voilà pourquoi l'on dit que les cosinus des arcs plus grands que l'arc de 90° sont négatifs.

44. EF $=$ sin $\Delta =$ sin dist. pol. $=$ cos D $=$ cos déclinaison. MF est la projection de la partie du cercle qui est la demi-différence entre la moitié du jour et de la nuit. Soit A cette demi-différence, MF $=$ sin Δ sin A $=$ cos D sin A.

OI est la projection orthographique de l'horizon; CM est celle de l'amplitude soit ortive, soit occase; CM $=$ sin amplitude $=$ cos z (37).

PP′ est la projection orthographique du demi-méridien PAP′; on voit donc que dans la progression orthographique, un demi-cercle a pour projection son diamètre, quand ce diamètre est parallèle au plan de projection. Dans ce cas, les deux quarts

de cercle dont il se compose, ont pour projection le rayon du cercle. Tout arc P'O qui a son origine à l'une des extrémités de ce diamètre, a pour projection son sinus verse $P'G = 2 \sin^2 \frac{1}{2} P'O$. Tout arc comme AO, qui a son origine au milieu A, a pour projection $CG = \sin AO$, c'est-à-dire son sinus. Un arc quelconque EO a pour projection

$$\begin{aligned} GE = CG - CF &= \sin AO - \sin AE \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(AO - AE) \cos \tfrac{1}{2}(AO + AE) \\ &= 2 \sin \tfrac{1}{2} EO \cos (AE + \tfrac{1}{2} EO) \\ &= \sin EO \cos AE - \sin \text{verse}\, EO \sin AE. \end{aligned}$$

45. Plus la distance polaire PB sera grande, plus la hauteur méridienne diminuera, plus le jour sera de courte durée (12). Supposons que la distance polaire soit

$$PO = 90° + OA = 90° + \text{haut. équat.},$$

l'astre au méridien sera au point O. Abaissons la perpendiculaire OG sur l'axe, OG sera le rayon du parallèle de l'étoile, et cette étoile tournant autour du point G, sera toujours invisible.

Supposons au contraire que la distance polaire soit PI, et menons la perpendiculaire IL, l'étoile décrira son cercle autour du point L, et passera au méridien aux points I et V; son jour sera de 24 heures; l'étoile ne descendra jamais au-dessous de l'horizon, puisque son cercle entier est au-dessus de l'horizon, comme sa projection RI.

Il y a donc des étoiles qui ne se couchent jamais; ce sont toutes celles dont la distance polaire ne surpasse pas PI, ou la hauteur du pôle; d'autres étoiles qui ne se lèvent jamais, ce sont celles dont la distance polaire $= 180° -$ hauteur du pôle $= PO$; les unes et les autres se nomment *circompolaires*. On donne ce nom plus particulièrement à celles qui ne se couchent jamais.

46. La hauteur du pôle est connue quand on connaît celle de l'équateur; car

$$OA = 90° - AZ$$
$$PZ = 90° - AZ = OA,$$
$$PI = 90° - PZ = 90° - OA;$$

donc la hauteur du pôle est complément à 90° de la hauteur de l'équateur; elle est de 48°.50′ à Paris.

47. Une étoile dont la distance polaire PV = PX serait moindre que la hauteur du pôle PI, non-seulement ne se coucherait pas, mais même dans son plus grand abaissement, elle serait encore élevée au dessus du point nord de l'horizon, d'un arc XI = PI — PX.

Dans son passage supérieur en V, sa hauteur comptée du point nord, serait PI + PV; comptée du point sud, elle serait OV = 90° + ZV. Au lieu de mesurer la hauteur, nous verrons qu'on mesure plus souvent la distance au zénit ZV; par là on n'a que des distances moindres que de 90°; mais il faut, comme pour les hauteurs, avertir si elles ont été mesurées au sud ou au nord du zénit.

48. Les passages supérieurs et inférieurs des étoiles circompolaires, prouvent que le méridien partage leur révolution en deux parties égales.

Les passages des étoiles qui se lèvent et se couchent, prouvent que le jour ou la partie visible de leur révolution est également partagée par le méridien; de là on est porté à conclure que la révolution entière se fait d'un mouvement uniforme. En astronomie, on commence par supposer partout l'uniformité, jusqu'à ce que les observations fassent connaître quelque inégalité dont elles servent à trouver la loi, après en avoir démontré l'existence. Cependant cette uniformité dans la révolution de la sphère étoilée, est un principe si important, qu'il faut se le démontrer plus rigoureusement, en le soumettant à des épreuves plus exactes. Pour faires ces épreuves, il faut que l'astronome se munisse de deux instrumens qui seront l'objet de la leçon suivante.

49. On voit comme les observations les plus simples ont pu donner l'idée des premiers instrumens et des premiers calculs.

LEÇON II.

De l'Horloge et de la Lunette astronomique.

1. L'HORLOGE astronomique est de la plus grande simplicité; son cadran porte trois aiguilles, dont l'une marque les heures, l'autre les minutes, et la troisième les secondes. Elle est à poids et non à ressort, et elle a pour régulateur un pendule composé d'une lentille métallique fort pesante, suspendue à une règle aussi métallique, et d'un mètre environ de longueur. A chaque oscillation, l'aiguille avance d'une seconde.

2. Mais on a remarqué que les verges métalliques s'alongent par la chaleur et se raccourcissent par le froid; que quand la règle s'alonge, les oscillations sont plus lentes, que le mouvement se ralentit et que l'horloge retarde. Au contraire, si la verge se raccourcit, l'oscillation devient plus rapide, et l'horloge avance.

3. Pour éviter ces inconvéniens qui rendraient les observations inexactes, au lieu de suspendre la lentille à une verge simple, on la suspend à une verge composée de deux métaux, que le même degré de chaleur dilate inégalement, et l'on combine les deux métaux de manière que le système entier reste toujours de la même longueur. Ces verges à compensation, formées de fer et de laiton, sont aujourd'hui fort communes; nous ne les décrirons pas plus particulièrement : il nous suffira de dire que, par ce moyen, on a donné de nos jours aux horloges une régularité dont on ne peut se faire d'idée que par l'expérience.

4. Il ne suffit pas à l'astronome qu'une bonne horloge lui marque l'instant précis ou la durée exacte d'un *phénomène;* il lui faut une lunette pour voir mieux et plus juste.

Phénomène est un mot grec, par lequel on désigne tout ce qui se voit et peut s'observer.

5. Avant l'invention encore assez moderne des lunettes, les anciens, pour voir mieux et de plus loin, se servaient quelquefois d'un tube long et étroit, mais leurs astronomes n'en faisaient aucun usage; ils se servaient d'alidades ou de pinnules.

L'alidade est une règle, aux extrémités de laquelle ils plantaient perpendiculairement deux cylindres d'égale dimension; ils mettaient l'œil contre l'un des cylindres, et dirigeaient l'alidade à l'astre qu'ils rendaient tangent à l'autre cylindre; alors l'alidade marquait la direction du rayon visuel mené à l'astre. Si cet astre était le soleil, on faisait tomber l'ombre du cylindre central sur l'autre cylindre, et sans viser au soleil; on avait ainsi la direction du rayon solaire ou visuel.

Dans le moyen âge, on substitua les pinnules aux deux cylindres. Les pinnules sont des lames métalliques divisées par une fente longitudinale. On mettait l'œil à l'une des fentes, et l'on voyait l'étoile à travers la fente de l'autre pinnule. C'était une amélioration utile, mais les lunettes sont bien préférables encore.

6. La lunette astronomique est composée d'un tube fermé d'un côté par une lentille bi-convexe qui se nomme *objectif*, parce qu'elle se tourne vers l'objet, et de l'autre, par une lentille quelquefois simple, quelquefois composée de deux verres, qu'on nomme *oculaire*, parce qu'elle bouche le tube par la partie à laquelle on applique l'œil.

7. Décrivons sommairement les effets de cet appareil (fig. 4).

Soit une étoile L qui envoie un rayon lumineux LB perpendiculairement à la surface convexe de l'objectif. Ce rayon traversera le verre sans se détourner, et décrira la droite BDC sur le prolongement de LB.

Ce rayon perpendiculaire, que nous nommerons *principal*, sera accompagné d'autant de rayons obliques, qu'il y aura de points dans la surface de l'objectif. Tous ces rayons obliques, en traversant le verre, y éprouveront une réfraction qui les brisera, les détournera de leur route, ensorte qu'ils

viendront tous se réunir au rayon principal BL en un point qu'on appelle *foyer*, parce que plusieurs rayons solaires réunis, produisent une chaleur très-sensible. Ainsi, au lieu de voir l'étoile par un rayon unique, on la verra par une multitude de rayons réunis, et par conséquent l'image de l'étoile formée au foyer sera plus lumineuse que l'étoile ne paraît à la simple vue. On voit par ce moyen des étoiles qui, sans cela, seraient invisibles. Premier avantage des lunettes.

Si la distance de l'objet est d'environ 10,000 fois la longueur de la lunette, la distance du foyer à l'objectif sera égale au rayon de courbure de la surface extérieure de la lentille.

Si la distance est beaucoup moindre, la longueur focale sera plus grande, et la réunion des rayons obliques moins parfaite. Dans aucun cas, le foyer n'est un point mathématique, il a toujours des dimensions plus ou moins sensibles.

8. Si l'objet, au lieu d'être un point lumineux comme une étoile, a un disque sensible comme les planètes, la lune et le soleil, voyons ce qui doit arriver.

Soit AB l'un des diamètres du disque, le point du milieu *m* enverra, comme l'étoile, un faisceau lumineux qui, par la réfraction, se réunira avec le rayon principal au foyer de la lunette.

Le point B enverra de même le rayon principal qui sera perpendiculaire au point *b* de la lunette, et tous les rayons obliques qui l'accompagneront, se réuniront avec lui au foyer H.

De même l'autre bord A enverra un rayon principal perpendiculaire en *a*, avec lequel tous ces rayons obliques se réuniront au point G.

Il en sera de même des points intermédiaires entre A et B, de sorte que le diamètre AB aura son image GH au foyer de la lunette.

Ce que nous avons dit du diamètre AB, se doit entendre d'un diamètre quelconque; et si le disque est rond, l'image formée au foyer sera ronde; si le disque est échancré comme celui

celui de la lune, l'image sera pareillement échancrée et en tout semblable à l'objet.

9. Remarquons d'abord que le bord A peint son image en G, que le bord B peint la sienne en H, ensorte que ce qui était à droite paraît à gauche, et réciproquement; ce qui est en haut paraît en bas, l'image est renversée.

Si l'astre se meut de gauche à droite, il paraîtra dans la lunette aller de droite à gauche; mais l'effet étant pareil pour tous les astres, il ne résultera de ce renversement aucun inconvénient dans la pratique; il suffit qu'on en soit averti.

10. Remarquons encore que l'angle HCG que soutend l'image est égal à l'angle ACB que soutend l'objet.

Si la distance focale CF est à la largeur HG de la lunette en un rapport tel, que $\frac{\frac{1}{2}\text{HG}}{\text{CF}} = \text{tang}\,\frac{1}{2}\text{ACB}$, l'objet se peindra tout entier dans la lunette; mais si la distance focale est $Cf > \text{CF}$, l'image sera hg, plus large que la lunette; on ne verra donc pas l'objet tout entier. Au contraire, si la distance focale est $C\varphi$ moindre que CF, l'image $\varkappa\varphi\gamma$ ne remplira pas la lunette.

En général le champ de la lunette se trouve par cette formule

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{champ} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{diamètre du tube}}{\text{longueur focale}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\,\text{diamètre du tube}}{\text{rayon de courbure de l'objectif}};$$

mais le plus souvent on diminue le diamètre intérieur de la lunette par un diaphragme, espèce d'anneau placé vers le foyer, pour empêcher la réflexion des rayons obliques par les parois du tube, et ce diaphragme diminue le champ de la lunette; alors $\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{champ} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{diamètre du diaphragme}}{\text{rayon de courbure}}$.

11. Supposons que l'œil se place en O à une distance $\text{OF} = \text{FC}$, il verra l'image HG sous l'angle $\text{HOG} = \text{HCG}$; l'image serait plus lumineuse que l'objet vu hors la lunette, mais elle ne serait pas augmentée.

Placez l'œil en f, l'image sera vue sous l'angle $HfG > HOG$ ou $> HCG$; l'image sera donc augmentée, car, toute chose égale d'ailleurs, un objet paraît d'autant plus grand qu'il est vu sous un plus grand angle. Ainsi plus le point f sera près de F, plus l'image paraîtra augmentée; mais il y a de certaines bornes qu'on ne peut passer sans rendre la vision incommode ou imparfaite.

Pour approcher l'œil de l'image, sans tomber dans cet inconvénient, on regarde l'image au microscope, c'est-à-dire qu'on place en f une lentille d'un foyer très-court Ff, alors l'image est augmentée dans le rapport.....

$$\frac{HfG}{HCG} = \frac{BF}{Ff} = \frac{\text{distance focale de l'objectif}}{\text{distance focale de l'oculaire}}.$$

Par ce moyen l'image des objets est augmentée 50, 60, 80 ou 100 fois dans les lunettes astronomiques ordinaires. Si la lunette est plus longue, on peut faire augmenter 300 ou 400 fois; mais il est rare que les lunettes supportent ces forts grossissemens. Herschel nous dit qu'il a fait grossir jusqu'à 6000 fois ses grands télescopes; mais alors les objets deviennent confus et mal terminés.

12. Au reste, quand on dit qu'une lunette grossit 100 fois, il ne faut pas s'attendre qu'elle vous montrera le soleil grand 100 fois comme il paraît à la vue simple, il s'en faut de beaucoup; cela signifie seulement qu'elle le montre sous un angle 100 fois plus grand, ou tel qu'il serait vu s'il était 100 fois plus près.

13. En lui-même, l'angle ne nous apprend rien sur la grandeur réelle de l'objet.

L'objet CD (fig. 5), vu sous l'angle CKD, nous paraîtra tel qu'il est, si nous estimons juste la distance à laquelle nous le voyons. Si nous le croyons en AB, nous le croirons plus petit qu'il n'est réellement, et si nous avons quelque raison de le croire en EF, nous l'estimerons plus grand. Dans ces jugemens, il se mêle toujours une estime de la distance qui rend la conclusion variable et incertaine.

14. Cette lunette suffit quand il ne s'agit que de voir mieux

et de plus loin, et s'il s'agit d'apercevoir un objet terrestre, on y ajoute ordinairement deux autres oculaires en avant du premier; on a par ce moyen deux lunettes au bout l'une de l'autre, et la seconde renversant de nouveau l'image qui est renversée dans la première, la redresse en effet, et la montre dans sa situation naturelle. Mais les astronomes ne font point usage de cet oculaire, qu'on appelle *équipage terrestre;* ils ne se servent que de l'*équipage céleste*, qui renverse les objets et n'est composé que d'un oculaire à un ou quelquefois deux verres, parce que le simple verre, quand il est d'un court foyer, rend les objets un peu courbes.

15. Veut-on faire des observations astronomiques, on ajoute un *réticule* ou *réseau*, composé de plusieurs fils.

Soit ADBF (fig. 6) la coupe du tube ou le diaphragme dont nous avons parlé n° 10. Sur les bords de cet anneau on attache avec deux vis un fil métallique DF, le plus fin qu'on peut trouver. Quelquefois ce fil est un cheveu, ou un brin de soie de cocon, et alors on se contente de l'attacher au diaphragme avec de la cire.

Perpendiculairement à ce fil, on en place cinq autres tout pareils, tels que AB, qui coupe DF par le milieu, et les quatre autres qui sont placés à intervalles égaux, de côté et d'autre du fil principal AB.

16. L'étoile traverse la lunette de E en S, en 2 ou 3′ de tems, plus ou moins, selon le champ de la lunette et la position de l'étoile, plus près ou plus loin du pôle. Il serait donc impossible de dire à quel instant précis l'étoile se serait trouvée au milieu de la lunette; mais quand l'étoile passera en G derrière le fil, elle disparaîtra pour un instant, si le fil est épais et l'étoile petite; mais le plus souvent à l'instant où l'étoile sera sous le fil, elle paraîtra coupée en deux exactement, et elle débordera le fil de part et d'autre d'une manière fort égale, ensorte que l'on pourra saisir à $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{4}$ de seconde près l'instant précis du passage: on fera une observation semblable à chacun des quatre fils latéraux, et comme ces fils sont également espacés, les instans des cinq observations formeront

une progression arithmétique, et le milieu entre les cinq instans, ou la somme des cinq observations divisées par cinq, donnera une observation moyenne qui, par son accord plus ou moins grand avec le fil du milieu, fera juger de la précision avec laquelle on aura observé. Cette précision sera souvent de $\frac{1}{10}$ de seconde de tems.

17. Dans la figure, DF est une ligne horizontale, AB une ligne verticale; cette position du réticule ne convient qu'à l'instant où l'étoile est au méridien, et qu'elle cesse de monter, ou qu'elle cesse de descendre, si c'est une circompolaire, dans son passage inférieur. Dans toute autre position, l'étoile monte ou descend obliquement, et alors on donne au réticule une situation inclinée comme DF (fig. 7), de sorte que l'astre, en parcourant la corde ES, marche parallèlement à DF et perpendiculairement à AB, ce qui fait que le passage par le fil est plus rapide, et l'observation plus précise.

18. Le réticule est porté par le tube de l'oculaire, lequel tourne à frottement dans le grand tube de la lunette, ensorte qu'on peut, chaque fois qu'on veut observer, lui donner l'inclinaison convenable. Quand on y est parvenu à fort peu près avec les doigts, on achève, au moyen d'une petite vis d'un pas très-doux et très-fin, qui est placée sur le côté du châssis du réticule et qui sert à l'incliner d'une quantité très-petite.

19. La difficulté, c'est que quand la nuit est passablement obscure, on ne voit plus les fils, si ce n'est quelquefois à l'instant où ils paraissent couper l'étoile en deux, mais comme cet instant est très-fugitif, et qu'on n'est pas suffisamment préparé, parce qu'on ne peut juger d'avance si l'étoile est près du fil, il arrive souvent que l'observation manque tout-à-fait, ou qu'elle est beaucoup moins exacte.

20. Pour obvier à cet inconvénient, on éclaire l'intérieur de la lunette, et voici comment.

Soit B (fig. 8), un collet qui embrasse la lunette et qui porte une verge BA, à laquelle est assujétie à angle droit une autre verge A*b* qui porte une plaque elliptique P percée d'un trou ovale à son milieu.

La plaque est de métal argenté ou simplement recouverte d'un papier blanc; la plaque P tourne à frottement autour de la verge A*b*; elle reçoit et conserve l'inclinaison qu'on veut lui donner; elle sert à réfléchir dans l'intérieur de la lunette la lumière d'une bougie placée près de là. On incline la plaque de manière à n'avoir dans l'intérieur que la quantité de lumière strictement nécessaire pour y voir les fils, qui paraissent comme des traits noirs et déliés sur un fond d'un blanc terne.

Telle est la manière la plus ancienne d'éclairer les lunettes; en voici une plus moderne et plus commode.

Sur le côté du tube au milieu de la longueur, on pratique une ouverture C*a*, vis-à-vis laquelle est un petit miroir *m*, incliné à 45°. La lumière de la bougie tombe sur le miroir en faisant avec ce miroir un angle de 45°; elle se réfléchit en faisant de même un angle de 45°; d'où il résulte que le rayon réfléchi fait avec le rayon primitif un angle de 90°; il est donc réfléchi parallèlement à l'axe et aux parois de la lunette. Il en éclaire l'intérieur d'une manière plus égale que la plaque, et l'on a encore cet avantage, que l'on peut plus facilement modérer à son gré l'intensité de la lumière, ce qui se fait en glissant entre l'ouverture C*a* et la bougie un prisme de verre vert; suivant qu'on enfonce ce prisme plus ou moins, la lumière trouve une épaisseur plus ou moins forte à traverser pour entrer dans la lunette, où l'on n'admet que ce qui convient: car il est bon de savoir que si l'astre est très-faible, comme les étoiles de 9 ou 10e grandeur, ou les comètes, la plus faible lumière étrangère empêche de le voir et rend l'observation impossible.

21. Cette lunette, garnie de son réticule et de son éclairage, va nous servir à régler la marche de notre horloge.

Pour cela, la lunette étant sur son pied garni de ses vis d'engrenage, qui servent à la maintenir dans une situation donnée, dirigez la lunette sur une étoile brillante. Essayez si le réticule a l'inclinaison qui le rend parallèle au mouvement des étoiles. Ce parallélisme n'a pas besoin d'être fort exact.

Quand vous l'aurez vérifié, ramenez l'étoile au bord E; arrêtez la lunette dans une position invariable.

Ecrivez l'heure, la minute, la seconde et la fraction de

seconde que marquait l'horloge au tems du passage de l'étoile par les cinq fils.

Attendez que d'autres étoiles viennent à leur tour à passer par la lunette, et notez pareillement les instans de leurs passages aux cinq fils.

Observez ainsi autant d'étoiles que vous jugerez à propos, et laissez toujours la lunette immobile.

Le lendemain à pareille heure, mais un peu plus tôt, venez guetter les passages des mêmes étoiles aux mêmes fils.

22. Supposons que le passage au premier fil ait avancé de 4′, le passage aux quatre autres avancera pareillement de 4′; *il en sera de même de toutes les étoiles observées*, à quelque heure qu'elles aient passé par la lunette; vous en conclurez que les 24 heures de l'horloge durent 4′ de plus que la révolution des étoiles, ou que cette révolution est de 23^h 56′.

23. Pour corriger ce retard de la pendule, remontez la lentille afin d'en raccourcir la verge de suspension et d'accélérer la marche de l'horloge. Pour cela, il y a deux moyens. Tournez un écrou qui est au-dessous de la lentille et la soutient; mais ce moyen est grossier, il n'est bon que quand on a beaucoup à faire, comme ici, où le retard est de 4′.

Remontez ainsi la lentille de 4 à 5 millimètres, et aussitôt après observez des étoiles.

Observez-les de nouveau le lendemain, pour savoir combien d'heures, de minutes et de secondes la pendule aura marqué entre les passages de la même étoile.

Vous trouverez cette fois qu'entre deux passages la pendule aura marqué 24 heures, plus ou moins quelques secondes. Si les secondes sont en moins, vous n'aurez pas assez relevé la lentille; si elles sont en plus, vous l'aurez trop relevée.

Pour corriger la petite erreur qui vous reste, tournez une vis qui est au-dessus de la suspension. Cette vis porte une aiguille qui tourne sur un cadran. Tournez la vis de manière que l'aiguille avance de 10 parties dans le sens qui fait baisser la lentille, si elle est trop haute, ou dans le sens qui la fait lever, si elle est trop basse.

Observez de nouveau des étoiles pendant deux jours consécutifs, et voyez quel effet ont produit sur le tems des retours les 10 parties dont vous avez fait mouvoir la vis.

24. Je suppose qu'elles aient produit 8″ de tems, et que vous n'eussiez que 4″ d'erreur, vous verrez que vous avez trop tourné la vis, et qu'il n'aurait fallu faire avancer l'aiguille que de 5, qui eussent produit 4″, puisque 10 en ont produit 8.

Quel que soit l'effet, et quel que soit le retard à corriger, vous verrez toujours, par une règle de trois, ce qu'il eût fallu faire.

L'effet produit est au mouvement donné à l'aiguille, comme l'erreur qui était à corriger est au mouvement qu'il fallait donner.

En comparant le mouvement calculé au mouvement donné, vous saurez ce que vous avez fait de trop, ou trop peu, vous le corrigerez et l'horloge sera réglée; vous vous en assurerez en observant de nouveau des passages.

Il arrivera souvent que les nuages vous feront manquer les observations du lendemain et des jours suivans; mais quel que soit l'intervalle, le procédé sera le même, excepté qu'au lieu d'avoir le retard ou l'erreur d'un jour, vous aurez le retard pour le nombre de jours écoulés; ce retard sera plus grand, mais en le divisant par le nombre de révolutions, vous aurez le retard pour une simple révolution.

25. Cette méthode suppose l'immobilité absolue de la lunette. Pour vous en assurer, vous pouvez la fixer par des liens de fer contre un mur solide.

Si vous voyez à peu de distance un mur, un clocher, un paratonnerre, il suffira de marquer sur le parquet ou le carreau trois repères pour les pieds de la lunette. Chaque fois que vous voudrez observer, vous poserez le support sur les mêmes repères, et dirigeant la lunette mobile au point du mur, du clocher, du paratonnerre derrière lequel l'étoile sera prête à se cacher, vous en observerez la disparition.

Vous dirigerez la lunette successivement à toutes les étoiles qui pourront se cacher ainsi, et vous n'aurez pas besoin de

plus grande précaution. Voyez Base du Système métrique, tome II, page 421.

26. Votre horloge ainsi réglée, vous verrez que les étoiles seront fidèles à revenir dans les mêmes tems aux mêmes fils de la lunette. Mais s'il s'en fallait quelquefois d'une fraction de seconde, ou même d'une seconde, vous en concluriez que la petite différence est une irrégularité de la pendule, qui, quelque parfaite qu'on la suppose, est cependant une machine qui n'est pas à l'abri de quelques légers dérangemens, et vous n'en resterez pas moins persuadé que la révolution des étoiles est constante; et en effet, on n'a eu jusqu'ici aucune raison d'y soupçonner la moindre irrégularité.

27. Quand vous aurez assez éprouvé les mêmes étoiles dans la même position de la lunette, vous pourrez changer la position et observer d'autres étoiles, ou les mêmes étoiles dans un autre point de leur parallèle, et toujours vous trouverez la même régularité.

28. Vous en conclurez que toutes les étoiles emploient également 24 heures à faire une révolution entière, quel que soit le point de leur parallèle où on les observe. Vous serez bien tenté de conclure aussi qu'elles décrivent ces cercles d'un mouvement uniforme, vous ne vous tromperiez pas; mais cette conséquence ne vous est pas encore rigoureusement démontrée. Vous êtes au moins en droit de la supposer, en attendant que vous découvriez quelque irrégularité, s'il en existe.

Une remarque qui ne saurait échapper à l'observateur, c'est que toutes les étoiles avancent tous les jours leur passage à la lunette fixe, que l'étoile qui a passé à 8 heures du soir, passera un mois après à 6 heures, puis à 4 heures, à 2 heures, à midi, ensorte qu'au bout d'un an elle passerait encore à 8 heures, et qu'en 365 jours elle aurait passé 366 fois.

29. Le hasard pourra cependant amener dans votre lunette quelques étoiles qui ne reviendront pas aussi régulièrement aux mêmes points de la lunette, ni aux mêmes instans.

Ces étoiles sont des *planètes*, ou des astres errans. On les reconnaît d'abord à ce mouvement particulier, et ensuite à un

disque sensible et rond le plus souvent, qui empêche de les confondre avec les étoiles fixes : elles sont au reste en petit nombre, et nous en traiterons séparément.

30. Les étoiles, proprement dites, ne sont que des points lumineux que ne grossissent pas les lunettes, et qui, au contraire, paraissent plus petites dans les lunettes qu'à la vue simple.

31. Les étoiles conservent entr'elles les mêmes distances, les mêmes configurations; elles occupent toujours la même place dans la sphère étoilée, ce qui se voit par la constance avec laquelle elles reviennent au fil de la lunette, et encore par les observations d'Hipparque, faites il y a plus de 2000 ans, et qu'on peut vérifier aujourd'hui.

32. Hipparque, en donnant la première description qu'on ait eu du ciel étoilé, s'était attaché à désigner les étoiles qui, trois à trois, se trouvent en ligne droite. Ces alignemens qui nous ont été conservés par Ptolémée, ont lieu encore aujourd'hui. Voici en quoi ils consistent :

Tendez un fil et inclinez-le de manière qu'il couvre trois étoiles; au bout d'un certain tems après quelques jours, ou après quelques années, réitérez l'épreuve, elle aura toujours le même succès. Mais nous indiquerons par la suite, des moyens plus sûrs de constater cette immobilité des étoiles.

LEÇON III.

Premières observations du soleil, idée de la Gnomonique ou de la science des cadrans.

1. Les moyens qui nous ont servi pour les étoiles ne peuvent s'appliquer au soleil. Pour l'observer sans se blesser les yeux, on visse à l'oculaire, ou l'on tient à la main, un verre coloré qui en adoucit l'éclat.

Dirigez la lunette au soleil, et observez son passage par le centre, dès le lendemain non-seulement il n'y reviendra pas à la même heure, mais il passera au-dessous ou au-dessus du centre, et au bout de quelques jours il n'entrera plus dans la lunette, quoiqu'elle n'ait pas changé de position.

Le soleil change donc de lieu chaque jour dans la sphère étoilée. C'est une vérité dont on peut s'assurer en observant chaque jour à quel point de l'horizon il se lève et se couche. Ces points changent continuellement.

A la fin de décembre il se lève en A et se couche en B (fig. 1.); le jour n'est que de huit heures, et la hauteur méridienne n'est guère que de 17°. Au 22 mars et au 22 septembre, il se lève en H et se couche en R; sa hauteur méridienne est de 41°, comme celle de l'équateur; le jour est de 12 heures.

Au 22 juin, il se lève en D et se couche en E, le jour est de 16 heures, et la hauteur méridienne de 64° $\frac{1}{2}$. De ces observations, ainsi que de celles des étoiles qui avancent leur passage de 4′ par jour, il résulte que le soleil n'est pas attaché à un point fixe de la voûte céleste, mais qu'il doit en faire le tour en un an en suivant une route qui est oblique à l'axe du mouvement diurne.

Ces remarques ont été faites de tout tems; elles n'exigent que des yeux et un peu d'attention.

2. Les ombres que projette le soleil nous fournissent un moyen facile pour obtenir la hauteur et l'azimut de cet astre.

Soit S le soleil (fig. 9), BA un style élevé perpendiculairement à l'horizon, un obélisque, une colonne ou un corps droit quelconque dans une position verticale.

Les rayons lumineux sont toujours des lignes droites; un rayon qui viendra du soleil et rasera le sommet BA, ira tomber sur le plan horizontal en C.

Tout autre rayon qui viendra frapper AB en un point D, sera arrêté par le corps opaque, mais prolongé par la pensée, il arriverait en un point E. Ce point E ne sera pas éclairé directement par le soleil, il sera dans l'ombre; tous les points

placés entre A et C seront dans le même cas. AC est ce qu'on appelle l'ombre de AB.

3. Dans le triangle rectangle ABC, nous aurons

$$AC = BA \tang ABC = BA \cot ACB \quad \text{et} \quad \cot ACB = \frac{AC}{BA};$$

$ACB = ACS$ est la hauteur du soleil. Ainsi cot haut. $\odot = \frac{AC}{BA} = \frac{\text{ombre}}{\text{style}}$.

Il suffira donc de mesurer l'ombre et le style pour avoir la hauteur du soleil.

4. Prolongez par la pensée AB, jusqu'au ciel en Z, Z sera le zénit (I. 28). $ZBS = ABC = 90° - ACB$ sera la distance du soleil au zénit; soit N cette distance, vous aurez

$$\text{Tang } N = \text{cot haut. } \odot = \frac{\text{ombre}}{\text{style}}.$$

5. ABC est un triangle plan; prolongez CA et imaginez la perpendiculaire SP; SCP, BCA seront des parties d'un même plan, l'objet lumineux, l'ombre et le corps opaque qui la projette sont donc dans un même plan.

L'ombre prolongée marque dans quelle direction il faut s'avancer pour aller vers le corps lumineux.

CP est l'intersection du plan de l'horizon et du plan vertical où se trouve le soleil.

6. L'équation $\tang N = \frac{\text{ombre}}{\text{style}}$ fait voir que la distance au zénit augmente avec l'ombre, et réciproquement, car le style est une constante. Prenez le style pour unité, faites-le d'un mètre, par exemple, alors vous aurez $\tang N = \text{ombre}$.

L'ombre est donc une tangente, ce sont en effet les ombres qui ont donné l'idée des tangentes, et ce sont les Arabes qui, les premiers, en ont calculé des tables pour l'usage de la science des cadrans solaires, et qui par suite les ont introduites dans la trigonométrie il y a six ou sept cents ans au moins.

7. Il y a un avantage à faire le style d'un mètre, c'est qu'alors la longueur de l'ombre exprimée en parties du mètre don-

nera, sans autre calcul, la distance du soleil au zénit par les tables des tangentes en nombres naturels, et réciproquement la distance zénitale étant donnée, on trouvera par sa tangente l'ombre exprimée en parties du mètre.

8. *Si la distance au zénit est de 90°*, l'ombre sera infinie et ne pourra plus se mesurer, mais sa direction indiquera l'azimut du soleil levant ou couchant.

Si la distance au zénit est nulle, sa tangente sera nulle, ainsi que l'ombre; ainsi quand le soleil est au zénit, les corps ne projettent plus d'ombre.

9. La direction et la longueur de l'ombre changent continuellement par le mouvement du soleil. Ainsi, quelque tems après le lever, l'ombre sera la ligne AE (fig. 10); puis AI, AM, AL, AH, le soleil sera successivement dans les plans verticaux des triangles BAE, BAI, etc. Les ombres iront en diminuant jusqu'au milieu du jour, et puis en augmentant jusqu'au coucher du soleil.

Les droites AE, AI, etc. indiqueront les azimuts du soleil. En effet, du point A comme centre, décrivez le cercle EM'H, ce cercle représentera l'horizon, et si AM' est l'ombre au milieu du jour, M' sera point nord de l'horizon, M'E sera l'azimut de l'ombre comptée du point nord, et cet arc sera égal à l'azimut du soleil compté depuis le point sud, car le soleil sera dans l'azimut marqué par le prolongement de EA, et ce prolongement fait avec celui de la méridienne un angle opposé au sommet, et par conséquent égal à l'angle EAM'.

10. Chaque ombre du matin comme AE, AI, aura parmi les ombres du soir une ombre correspondante et égale comme AH, AL; chaque azimut MAE aura son égal MAH; l'azimut MAI, son égal MAL; d'où MAE — MAI = EAI = MAH — MAL = HAL; c'est-à-dire que deux angles azimutaux sont égaux de part et d'autre du méridien, quand ils sont compris entre deux ombres égales chacune à chacune; mais les azimuts ne croissent pas également en tems égaux; deux azimuts égaux comme MAI et MAL ou MAE et MAH, appartiennent à deux instans également éloignés de midi, l'un le matin et l'autre le soir.

11. Si l'on multiplie les points d'ombre, et que par tous ces points on fasse passer une courbe HLMIE, les deux branches HM, EM seront semblables, et le sommet M se trouvera en partageant en deux également l'angle IAL formé par deux ombres égales observées le même jour. Autant vous aurez d'ombres égales deux à deux, autant vous aurez de moyens pour trouver le sommet M et l'ombre AM, qui sera celle de midi, c'est-à-dire la plus courte.

12. La ligne AM sera celle de midi pendant toute l'année. Les autres ombres n'indiqueront pas la même heure dans toutes les saisons, parce que le mouvement azimutal du soleil, qui n'est pas proportionnel au tems, ne se retrouve le même que deux fois chaque année, c'est-à-dire aux deux jours où la distance zénitale du soleil à midi se trouve la même, ou, ce qui revient au même, une ombre n'indique la même heure que les jours où, avec une même direction, elle a aussi une même longueur; c'est un fait prouvé par l'observation, nous en trouverons la cause par la suite.

13. Ainsi les ombres égales fournissent un moyen fort simple de tracer une méridienne. Il suffit de tracer autour du point A plusieurs cercles concentriques, et de marquer sur chacun de ces cercles les points E, H, I, L, où l'ombre aura été égale au rayon du cercle; on partagera ensuite les arcs HE, LI en deux également au point M′ et au point m, les lignes Am, AM′ se confondront et feront la méridienne.

Cette opération, très-exacte vers le 22 juin et le 22 décembre, peut être en erreur de quelques secondes, surtout à trois mois de ces deux époques. La ligne AM ne serait pas alors la vraie méridienne; nous verrons par la suite la cause de cette petite erreur, et nous donnerons le moyen de la corriger.

14. Quand vous aurez tracé la courbe HME par points, et déterminé la méridienne qui en est l'axe, vous pourrez chercher la nature de la courbe en cherchant les rapports des abscisses aux ordonnées; mais on peut résoudre la question par un raisonnement plus simple, en supposant toutefois

que le soleil décrit chaque jour un cercle comme les étoiles.

Si le soleil décrit un cercle, de tous les points de la circonférence il enverra successivement des rayons au sommet du style AB; ces rayons formeront une surface conique dont B sera le sommet; tous ces rayons, prolongés au-delà de B, formeront un second cône opposé au premier par le sommet. Ces deux cônes opposés seront coupés par le plan de l'horizon, et la section des deux cônes sera une hyperbole.

Je dis que le plan de l'horizon coupe les deux cônes; en effet, le soleil se lève et se couche tous les jours, donc le cercle et le premier cône sont coupés par l'horizon. Tous les rayons qui ont rasé le sommet vont rencontrer l'horizon, donc le second cône est également coupé par l'horizon, donc la courbe des ombres est une hyperbole dont les ombres du lever et du coucher sont les asymptotes.

Si le soleil tournait autour du style sans changer de hauteur et sans se coucher, la courbe des ombres serait un cercle, car toutes les ombres seraient égales.

Si le soleil, sans descendre jusqu'à l'horizon, changeait à chaque instant de hauteur, la courbe des ombres serait une ellipse, car il n'y aurait que le second cône qui fût coupé par l'horizon. Si le soleil, dans son plus grand abaissement, était à 90° du zénit, l'un des côtés du cône serait parallèle au plan coupant, c'est-à-dire à l'horizon, et la courbe serait une parabole.

Or comme le soleil se couche pour nous tous les jours, la courbe, en tout tems, ne peut être qu'une hyperbole; l'équation de cette courbe est $y^2 = p(ax + x^2)$.

15. En mesurant deux ordonnées avec les abscisses correspondantes, on aura

$$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{\frac{x'}{x}\left(1 + \frac{x'}{a}\right)}{1 + \frac{x}{a}};$$

donc si le soleil tourne dans une surface conique, les carrés

des ordonnées doivent être en un rapport plus grand que les abscisses, ce qui est bien aisé à vérifier; on trouvera, de plus,

$$a = \frac{x'^2y^2 - x^2y'^2}{xy'^2 - x'y^2} \quad \text{et} \quad p = \frac{ay'^2}{ax' + x'^2} = \frac{ay^2}{ax + x^2},$$

et l'on pourra achever l'hyperbole.

16. L'hyperbole ira se rétrécissant de jour en jour, de septembre en décembre, parce que les ombres s'alongent de jour en jour, et que l'angle des asymptotes ou des ombres du lever et du coucher devient de plus en plus aigu. Ensuite elle ira s'élargissant du solstice d'hiver à l'équinoxe suivant; le jour de l'équinoxe elle se réduira à une ligne droite, parce que les ombres, au lever et au coucher, ne forment qu'une seule ligne droite, et qu'ainsi l'angle des asymptotes est de 180°; ensuite l'hyperbole se formera de l'autre côté, de manière que les hyperboles des saisons contraires tourneront toutes leur convexité à la ligne droite des équinoxes. Mais la direction de l'axe sera toujours la même et perpendiculaire à la ligne droite des équinoxes.

17. Arrêtons-nous à cette circonstance remarquable, qu'il y a deux jours dans l'année où la route de l'ombre est une ligne droite. Cela prouve que le soleil alors se meut dans un plan dont cette droite est la commune intersection avec l'horizon.

Du pied A du style (fig. 11), abaissez une perpendiculaire AM sur cette droite; AM sera la méridienne.

BM sera le rayon solaire à midi; BMA = hauteur méridienne du soleil; à Paris vous trouverez BMA = 41° 10′ comme par les étoiles; d'où vous conclurez que le soleil et les étoiles tournent autour du même axe.

Par la droite OMR et le sommet B du style, imaginez un plan; ce sera celui dans lequel se meut le soleil au jour de l'équinoxe, ou quand il est dans l'équateur.

BM sera la méridienne dans ce plan incliné.

18. Voici un moyen fort simple de reconnaître si le soleil tourne uniformément autour de B dans le plan OBR.

Sur ce plan MBDEF (fig. 12) élevez perpendiculairement un style BS; du point B, pied de ce style et d'un rayon arbitraire, décrivez un cercle. Au point où ce cercle est coupé par BM, marquez o ou midi. De part et d'autre du zéro indiquez les arcs de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, et menez des rayons à tous ces points.

Si le soleil se meut uniformément autour de B, une heure avant et après midi, l'ombre couvrira les rayons de 15°; à deux heures elle couvrira celui de 30°, et ainsi des autres; car si les 24 heures de l'horloge répondent à 360°, une heure répondra à 15°, deux heures à 30°, et ainsi de suite. Or c'est ce que l'expérience a toujours confirmé, et non-seulement le jour de l'équinoxe, mais durant les six mois pendant lesquels le soleil s'élève au-dessus de ce plan incliné. Ainsi notre cercle, divisé de 15 en 15°, sera un cadran solaire infaillible qui nous donnera l'heure civile ou du soleil avec beaucoup de justesse.

19. Après l'équinoxe d'automne, le soleil sera pendant six mois au-dessous de notre plan, il n'en éclairera que la surface inférieure. Il faudra donc prolonger notre style SB jusqu'à l'horizon en T; alors en traçant autour de BT un cercle divisé comme le premier, nous aurons un cadran qui nous servira de même les six autres mois de l'année.

Ce cadran, qui s'appelle *équinoxial*, est le plus facile de tous à construire, et les autres s'en déduisent d'une manière fort simple.

20. Prolongez les lignes horaires du cadran équinoxial jusqu'au plan horizontal; votre ligne droite équinoxiale OMR se trouvera divisée en heures aux points XI, X, IX, etc.; du point T menez les droites TXII, TXI, TX, TI, etc.; ce seront les lignes horaires du cadran horizontal. La ligne de six heures TVI sera parallèle à MO à cause de MB90°=90°.

Les angles MTXI, MTX, MTIX ne seront pas, comme dans le cadran équinoxial, des multiples exacts de 15°; mais voulez-vous avoir la formule de ces angles, imaginez, par exemple, l'angle MTX, vous aurez

MX

$$MX = BM \text{ tang } 30^\circ = BM . \text{tang } 2(15^\circ) = BM . \text{tang } n\,(15^\circ),$$

$$\text{tang } MTX = \frac{MX}{TM} = \frac{BM \text{ tang } n\,(15^\circ)}{TM} = \sin BTM \text{ tang } n\,(15^\circ)$$

$$= \cos TMB \text{ tang } n(15^\circ) = \sin \text{haut. du pôle tang } n(15^\circ)$$

$$= \cos \text{hauteur équinoxiale du soleil tang } n\,(15^\circ),$$

n étant le nombre d'heures qui marquent la distance à midi.

Ainsi prenant TM = 1 mètre, les distances à la méridienne sur l'horizontale seront = sin H tang n (15°); pour les heures qui passent 6 heures $n\,(15^\circ) > 90^\circ$, la tangente est négative, il faut prendre l'intervalle Mx du côté opposé, d'où il résulte que la ligne horaire est divergente de OMR; elle était convergente jusqu'à 6 heures, parallèle à 6 heures, elle doit être divergente après 6 heures.

Pour les heures de l'après-midi, il suffira de changer le signe de la tangente; c'est-à-dire, de prendre les distances pareilles à celles du matin sur l'horizontale, mais de l'autre côté du midi. Vous aurez ainsi toutes les lignes horaires depuis 6 heures du matin jusqu'à 6 heures du soir. Quant aux autres, il suffira de prolonger au-delà de T les lignes de IV et V heures du soir pour avoir les lignes de IV et V heures du matin, et réciproquement.

21. Voulez-vous un cadran vertical, élevez un plan perpendiculaire sur l'horizon OMR qui est déjà divisé en heures. Prolongez le style TBS jusqu'à la rencontre du plan. Ce style y marquera le centre du cadran. De ce centre menez des droites à tous les points horaires de l'horizontale OMR, et le cadran sera tracé; l'angle au centre aura pour expression tang angle au centre = cos H tang n (15°), car le style TBS prolongé fera avec le plan vertical un angle complément de BTM = 90° — BTM = TBA.

22. Il ne restera plus qu'à placer l'axe TBS. Formez un triangle HOV (fig. 13) dont l'angle H = hauteur du pôle et l'angle V hauteur de l'équateur.

Placez HO perpendiculairement sur la méridienne horizon-

tale, de manière que H soit au centre du cadran horizontal; HV sera l'axe dont l'ombre indiquera les heures.

Placez OV sur la méridienne verticale et perpendiculairement au plan, ensorte que V soit au centre du cadran, VH sera l'axe dont l'ombre marquera l'heure.

23. Voulez-vous un cadran déclinant, c'est-à-dire, dont l'intersection horizontale MQ (fig. 13) fasseun angle quelconque en M avec OMR, prolongez les lignes horaires TXI, TX, etc. jusqu'à l'intersection MQ, vous aurez les points horaires sur l'horizontale MQ. Du centre du cadran, qui sera le même que celui du cadran vertical tracé au-dessus de OMR, menez des lignes à tous les points de l'horizontale, et le cadran sera terminé, car l'axe sera le même; mais on remarquera que le triangle HOV doit faire avec le mur un angle 90° + OMQ.

24. Ainsi, le cadran équinoxial tracé et placé donnera sans calcul et par de simples prolongemens le cadran horizontal, le cadran vertical qui sera perpendiculaire au méridien, et le cadran vertical déclinant qui fera un angle donné TMQ avec la méridienne TM.

Il donnerait de même les lignes horaires sur un plan quelconque incliné à l'horizon qui serait placé à proximité.

25. Nous voilà donc convaincus de l'uniformité du mouvement du soleil. Comme les étoiles, il décrit un cercle chaque jour autour de l'axe du monde, il décrit ce cercle d'un mouvement égal. Mais nous avons d'autres conséquences à tirer de nos observations, quoique toujours un peu grossières.

Nous pouvons chaque jour mesurer de combien le soleil est élevé ou abaissé par rapport au plan de l'équateur ou du cadran équinoxial.

Le jour du solstice d'été nous aurons la cotangente de sa hauteur sur ce plan $= \frac{BM}{BS} = \frac{\text{ombre solsticiale}}{\text{style}} = 23° \, 28'$.

Le jour du solstice d'hiver, nous le trouverons abaissé d'un angle dont la cotangente $= \frac{BM}{B} = \frac{\text{ombre d'hiver}}{\text{style}} = 23° \, 28'$.

Cet angle est la plus grande déclinaison du soleil.

26. Le plan de notre cadran équinoxial, prolongé par la pensée jusqu'à la voûte céleste, y marquerait l'équateur ou le cercle que décrit le soleil le jour de l'équinoxe.

Si le plan de l'équateur fait avec l'horizon un angle de 41° 10′
et que la déclinaison du soleil soit..... 23. 28

il s'ensuivra qu'en été la hauteur méridienne sera 64. 38
et en hiver..... 17. 42

C'est ce qu'on trouvera en effet les jours du solstice en mesurant directement la hauteur du soleil.

27. Soient P et P′ les deux pôles du mouvement diurne (fig. 14) HOR l'horizon; PR = 48° 50′; EOQ l'équateur, HE = 41° 10′; PE = 90°. CL un autre grand cercle perpendiculaire au méridien, ensorte que EC = LQ = 23° 28′, ce cercle sera la route annuelle du soleil. En été le soleil en C sera 23° 28′ au-dessus de l'équateur; en hiver en L′ il sera 23° 28′ au-dessous. Aux équinoxes le soleil sera en O à l'équateur; le cercle CL s'appelle aujourd'hui l'*écliptique* ou *cercle des éclipses;* les Grecs le nommaient plus simplement l'oblique λοξὸς ou λοξιὰς.

L'angle que fait ce cercle avec l'équateur se nomme l'*obliquité de l'écliptique.*

28. Par la révolution diurne, le point C au bout de 12 heures se trouve en c, et le soleil paraîtra avoir décrit le demi-petit cercle Cc; en hiver il paraîtra décrire L′L.

Ces deux cercles s'appellent tropiques, de τροπὴ, retour ou conversion, parce que le soleil qui pendant trois mois s'était éloigné de l'équateur, paraît se retourner pour s'en rapprocher.

Quand le soleil est en O, il paraît décrire l'équateur.

Quand il est en un point quelconque *a* de son cercle oblique, il paraît décrire le petit cercle *tad.* Dans la réalité, jamais il ne décrit un cercle, puisqu'il change à chaque instant de place sur son cercle oblique, et qu'il n'est pas un seul instant à la même distance de l'équateur. Mais son mouvement en déclinaison est peu sensible dans un jour, et ne va jamais tout-à-fait à une minute par heure.

Ces notions nous suffisent pour le moment, et les anciens

s'en sont contentés long-tems ; ils les supposent dans tous leurs ouvrages sans nous dire comment ils y étaient parvenus.

29. Il nous reste cependant à trouver le tems de la révolution diurne du soleil. Pour cela, nous écrirons chaque jour l'heure que marquera l'horloge, quand le soleil sera sur la ligne de midi, ou telle autre ligne du cadran équinoxial, nous trouverons que les intervalles varient depuis 24 heures 3′, jusqu'à 24 heures 5′ de tems sidéral. La révolution diurne est donc inégale et surpasse celle des étoiles qui est uniforme, et plus courte d'environ 4′, ce dont nous avions déjà une idée d'après nos premières observations, suivant lesquelles une étoile qui passait à 9 heures du soir par la lunette fixe, six mois après passait à 9 heures du matin ; un mois après passait à 7 heures.

30. Dans la mesure des hauteurs par les ombres, nous avons, à l'exemple des anciens, regardé le soleil comme un point mathématique ; mais il a un disque sensible. Ainsi, nos premières observations ne pouvaient pas être d'une très-grande exactitude.

Si le soleil n'était qu'un point S (fig. 15), l'ombre de AB serait AC ; mais soit *ab* le diamètre du disque solaire, le point *a* du bord supérieur enverra un rayon *a*BD, le bord inférieur *b* enverra un rayon *b*BF. Le point D ne verra que le bord supérieur, le point C verra la moitié S*a* du soleil, le point F verra le disque *ab* tout entier, il sera dans la lumière pure ; le point D sera la limite de l'ombre pure AD. Les points entre D et F auront une lumière plus faible à mesure qu'ils seront plus près de D. Cette lumière affaiblie, qui n'est ni lumière, ni ombre pure, s'appelle pénombre, *presqu'ombre.*

Les limites D et F de la pénombre sont difficiles à bien distinguer ; mais en prenant le milieu *m* de la pénombre pour l'ombre du centre du soleil, et A*m* pour la longueur de l'ombre qui sert à calculer la hauteur ACS du centre du soleil, on ne se tromperait pas de beaucoup.

31. Cependant il n'est pas rigoureusement exact que CD soit égal à CF. En effet les angles DCB, CBF égaux aux angles *a*BS, SB*b* sont égaux au demi-diamètre du soleil ; la ligne

BC partageant en deux également l'angle BDF, on a

$$CF : CD :: BF : BD :: \sin D : \sin F,$$

$$CF + CD : CF - CD :: \sin D + \sin F : \sin D - \sin F$$

$$:: \tang \tfrac{1}{2}(D+F) : \tang \tfrac{1}{2}(D-F) :: \tang \tfrac{1}{2}(D+D-DBF)$$

$$: \tang \tfrac{1}{2}(DBF),$$

$$\frac{CF-CD}{CF+CD} = \tang \tfrac{1}{2} DBF \cot(D - \tfrac{1}{2} DBF) = \tang \tfrac{1}{2} \odot \cot(D - \tfrac{1}{2}\odot),$$

$$= \tang \tfrac{1}{2} \odot \cot C = \tang \tfrac{1}{2} \odot \cot(\text{haut.} \odot),$$

$$\tfrac{1}{2}(CF - CD) = \tfrac{1}{2}(CF + CD) \tang \tfrac{1}{2} \odot \tang N.$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{pénombre} \tang \tfrac{1}{2} \odot \tang N.$$

$\frac{1}{2}\odot$ étant le demi-diamètre du soleil, et N sa distance au zénit, éliminons la pénombre.

32. $$CF + CD = DF = AF - AD = AB(\tang ABF - \tang ABD)$$

$$= \frac{AB \sin DBF}{\cos ABF \cos ABD}$$

$$= \frac{\text{style} \sin \odot}{\cos(N + \frac{1}{2}\odot) \cos(N - \frac{1}{2}\odot)}$$

$$= \frac{\text{style} \sin \odot}{\cos^2 N \cos^2 \frac{1}{2}\odot - \sin N^2 \sin^2 \frac{1}{2}\odot},$$

et

$$\tfrac{1}{2}(CF - CD) = \frac{\text{style} \sin \frac{1}{2}\odot \cos \frac{1}{2}\odot \tang \frac{1}{2}\odot \tang N}{\cos^2 \frac{1}{2}\odot \cos^2 N - \sin^2 \frac{1}{2}\odot \sin^2 N}$$

$$= \frac{\text{style} \tang^2 \frac{1}{2}\odot \tang N}{\cos^2 N - \tang^2 \frac{1}{2}\odot \sin^2 N}$$

$$= \frac{\text{style} \tang^2 \frac{1}{2}\odot \sec^2 N \tang N}{1 - \tang^2 \frac{1}{2}\odot \tang^2 N}.$$

Cette quantité est insensible au méridien; mais elle mériterait qu'on en tînt compte si N était de 75 à 80°.

Pour la calculer, il faudrait connaître le demi-diamètre du soleil. Voici une méthode fort simple.

33. Au jour de l'équinoxe, quand nous sommes au centre du parallèle décrit par le soleil et que le soleil passe au méridien, observez les instans où ses deux bords atteignent ou quittent successivement les cinq fils. Vous trouverez, au printems, qu'il emploie 2′8″,6 à traverser chaque fil, et qu'en automne il emploie

2′ 8″, milieu 2′ 8″,3, et qu'entre deux passages au méridien il s'écoule 24^h 3′ 36″ ou 24^h 3′ 38″, milieu 24^h 3′ 37″.

Le soleil emploie donc 24^h 3′ 37″ sidérales à parcourir les 360°. Vous direz :

$$24^h\ 3'\ 37'' : 360° :: 2'\ 8'',3 : 32' \text{ environ.}$$

C'est l'arc de l'équateur que couvre le disque solaire ; c'est le diamètre du soleil.

Dans tout autre tems de l'année, le soleil décrit un petit cercle dont le centre est dans l'axe au-dessus ou au-dessous de l'œil de l'observateur; le tems du passage nous donnerait l'arc de petit cercle couvert par le disque solaire, et cet arc aurait besoin d'une réduction pour être converti en arc de grand cercle, le calcul en serait moins simple ; nous le donnerons dans la suite.

34. Dépourvus de lunettes et de réticules, les anciens avaient imaginé des méthodes ingénieuses, mais inexactes, pour cette détermination du disque solaire, qu'ils n'ont jamais bien mesuré. Il ne paraît pas même qu'ils aussent donner une bien grande précision à la mesure des ombres de leur gnomon.

Le gnomon est proprement une équerre dont une branche est placée horizontalement à fleur du terrain, suivant la ligne méridienne, et l'autre est perpendiculaire à cette ligne. BAC (fig. 15) est un gnomon au moyen duquel on mesurait les ombres AD, ou AF ou A*m*, en prenant le milieu de la pénombre.

35. Pour éluder l'effet de cette pénombre, un géomètre nommé Manlius, au rapport de Pline, imagina le premier de placer une boule au sommet de l'obélisque du Champ de Mars, à Rome. L'ombre, au lieu de finir en une pointe incertaine, finissait par une figure sensiblement ronde, dont le centre se prenait pour l'ombre, ou le point qui répondait au centre du soleil.

Ptolémée, qui parle souvent d'ombre solsticiale, ne fait aucune mention de cette boule.

Les modernes, au lieu de boule, se servent d'une plaque

percée d'un trou dont ils font le diamètre plus ou moins grand, selon la hauteur du gnomon. Cette plaque, toujours inclinée soit au rayon, soit au plan horizontal, donne à la lumière du soleil une figure elliptique plus ou moins alongée.

Mais cette boule et cette ouverture horizontale ou inclinée participent toujours plus ou moins de l'incertitude du gnomon simple. Le centre de figure de l'ombre ou de la lumière ne répond jamais au centre du soleil.

36. Soit IN (fig. 16) le diamètre du trou de la plaque, ou les points extrêmes de la boule de Manlius. Le point I donne en B l'image du bord inférieur du soleil; le point N donnera en A celle du bord supérieur. Pour avoir la tangente de la distance zénitale du centre du soleil, j'ai prouvé qu'il faut faire

$$\operatorname{tang} N = \left(\frac{QB+PA}{IQ+NP}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N} - \left(\frac{IQ-NP}{QB+PA}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}\odot \cos\frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N}\right),$$

c'est-à-dire, diviser la somme des deux longueurs d'ombres par la somme des deux hauteurs.

Ce premier calcul donnera une valeur approchée de la tangente de N. De cette valeur il faudra retrancher le produit de cette tangente par le carré du sinus du demi-diamètre solaire, divisé par le cosinus carré de la distance approchée; par ce moyen, on aura corrigé l'angle de l'effet du demi-diamètre solaire.

Pour seconde correction, on multipliera cette même tangente par le produit du sinus et du cosinus du demi-diamètre solaire divisé par le cosinus carré de la distance zénitale, et ce produit doit se multiplier encore par la différence des deux hauteurs divisées par la somme des ombres.

Cette seconde correction détruit l'erreur occasionnée par l'ouverture et l'inclinaison de la plaque.

37. Cette formule est générale. Dans le gnomon simple, les deux hauteurs IQ et PN sont identiques; les lignes se confondent ainsi que les points P et Q; $IQ - NP = 0$, la deuxième correction disparaît et la formule se réduit à

$$\text{tang N} = \frac{PB + PA}{2PN}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N}\right).$$

Si la plaque est horizontale (IQ—NP) disparaît encore, et

$$\text{tang N} = \frac{QP + PA}{2PN}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N}\right).$$

Si le gnomon est surmonté d'une boule, on mesurera les ombres de l'axe du gnomon, et nommant r le diamètre de la boule, O et O′ les deux ombres mesurées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la boule, H la hauteur du centre de la boule, on aura

$$\text{tang N} = \left(\frac{O + O'}{2H}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N} - \frac{r \sin \frac{1}{2}\odot}{H \cos N}\right).$$

38. Pour rendre l'image du soleil plus nette, Lemonnier enchâssa une lentille de 80 pieds de foyer dans la plaque du gnomon de Saint-Sulpice. L'inconvénient est que la longueur de l'ombre et celle du rayon solaire, qui est la sécante de la distance au zénit, variant chaque jour, si la lunette réunit exactement tous les rayons à son foyer, en été, quand l'ombre est la plus courte, elle donnera en hiver une image diffuse et dont les bords seront incertains. Heureusement l'église où est placé ce gnomon n'a point assez de largeur, et l'image du soleil, en hiver, est reçue sur le mur vertical opposé; l'image est moins défigurée. Pour jouir de tout l'avantage que promet la lentille, il eût fallu construire, de la lentille comme centre, et avec un rayon de 80 pieds, un mur taillé circulairement dans le plan du méridien, ce qui aurait formé un secteur d'un rayon bien plus grand qu'aucun instrument connu d'astronomie; mais ce secteur aurait des inconvéniens que ne compenserait pas la grandeur du rayon, et les astronomes ont en général peu de confiance à ces grands gnomons, dont D. Cassini a pourtant tiré un bon parti pour la théorie du soleil.

39. Les méridiennes de ces grands gnomons sont divisées en tangentes ou en *ombres*, qui donnent sans calcul la hauteur du soleil, ou sa distance au zénit. Les anciens ne s'avisèrent

pas de ce moyen si simple de diviser leurs méridiennes; à la vérité, ils n'avaient pas de Tables de tangentes; mais ils auraient pu exécuter cette division graphiquement, en traçant du sommet et d'un rayon arbitraire, un arc de cercle qu'ils auraient divisé en degrés, en fractions de degrés. Mais ils exécutèrent en petit le gnomon circulaire dont nous parlions tout-à-l'heure; on le trouve dans l'instrument qu'ils nommaient *scaphé*, *barque* ou *esquif*.

40. Soit ABD (fig. 17) la coupe verticale d'une demi-sphère creuse, C le centre, CB un rayon vertical; que le demi-cercle ABD soit divisé en degrés. Le soleil S enverra un rayon SCO qui marquera en O, la hauteur ACO du soleil, ou la distance zénitale à tous les instans du jour, il suffira de tourner la machine de sorte que le rayon tombe sur le demi-cercle divisé, à moins qu'on ne préfère de multiplier ces cercles verticaux divisés de distance en distance dans l'intérieur du scaphé.

Cet instrument peu volumineux, porté en différens pays, donnait la hauteur de l'équateur par celle du soleil observée le jour de l'équinoxe, on en concluait la hauteur du pôle. On trouvait la même chose par la hauteur au solstice d'été, en retranchant de la hauteur observée la déclinaison du soleil, ou l'obliquité de l'écliptique, qui était alors de 23° 52′ ou 54′, selon le tems, car nous verrons que l'obliquité diminue d'environ une demi-seconde par an.

41. Si nous en croyons Cléomède, Eratosthène se servit de cet instrument pour observer la hauteur du pôle à Alexandrie et à Syené, pour en conclure la grandeur de la terre. Mais il y a toute apparence qu'Eratosthène, qui avait à sa disposition des instrumens plus grands et plus parfaits, n'aura pas fait usage d'un instrument qui n'est bon tout au plus que pour la gnomonique, et dont jamais astronome n'a fait mention.

Les voyageurs astronomes, tels que Pythéas de Marseille, employaient de préférence les grands gnomons, et mesuraient le rapport de l'ombre équinoxiale et solsticiale au gnomon; ils en déduisaient la hauteur du pôle, et la durée du jour au solstice d'été.

42. Les astronomes grecs d'Alexandrie imaginèrent encore plusieurs instrumens dont nous allons donner successivement la description, parce qu'ils ont fourni l'idée de tous les instrumens qui sont encore en usage, et que les modernes ont simplement perfectionnés.

43. Tel est d'abord le quart de cercle imaginé par Ptolémée, et voici l'idée qu'il nous en a laissée lui-même dans son Almageste.

Imaginez un parallélépipède de bois, ou une table bien dressée, assez épaisse pour se maintenir droite et verticale, quand elle est posée de champ sur un plan bien horizontal.

Dans ce rectangle (fig. 18) décrivez un carré. De l'un des angles comme centre, décrivez deux arcs concentriques de 90° chacun; divisez ces deux arcs en leurs 90° et fractions de degrés, si la grandeur de l'arc le permet; par les points de division correspondans tracez des lignes droites. Cette bande circulaire s'appelle le *limbe*.

Au centre de ce limbe est implanté un cylindre autour duquel tourne une règle, percée d'un trou rond, et qui finit en pointe *e* pour marquer plus nettement sur le limbe à quel degré de hauteur la règle est dirigée. Près de cette pointe est un autre cylindre tout pareil au premier. Si c'est le soleil qu'on observe, on fait glisser la règle le long du limbe, ensorte que l'ombre du premier cylindre couvre le second; alors la pointe indique sur le limbe l'arc *de* qui est la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon; car le *o* de la division répond au rayon horizontal *Cd*, le 90e degré est au rayon vertical CB. L'angle *d*Ce est véritablement opposé au sommet de l'angle de hauteur; l'angle BCe est l'opposé au sommet de la distance zénitale.

Un fil à plomb *fp* est sur le côté de l'instrument pour prouver que la position est véritablement verticale.

Ptolémée dit qu'il posait ce quart de cercle sur une méridienne horizontale tracée sur le terrain; et dans cette position l'instrument servait à mesurer les hauteurs méridiennes du soleil, de la lune et des étoiles; et comme celles-ci ne jettent point d'ombres, on plaçait l'œil au sommet, ou à côté du cylindre,

et l'on faisait mouvoir la règle jusqu'à ce que l'étoile parût ou au sommet, ou tout à côté du cylindre central.

On pouvait tracer de part et d'autre de la méridienne plusieurs lignes azimutales sur lesquelles on pouvait placer l'instrument pour observer hors du méridien. Ptolémée ne nous a conservé aucune des observations qu'il dit avoir faites avec cet instrument, dont il ne nous a pas laissé les dimensions; mais Tycho et ses successeurs ont suivi les idées de Ptolémée. Voyons ce que les modernes y ont ajouté.

44. D'abord ils ont exécuté l'instrument en fer au lieu de le faire en bois; ils l'ont évidé en ne laissant que le rayon horizontal et le rayon vertical assemblés par quelques traverses; ils ont fait le limbe en cuivre pour la facilité des divisions; ils suspendent l'instrument à un axe vertical porté sur un espèce de trépied. Les trois rayons horizontaux qui forment le support, sont traversés par trois vis qui servent à mettre le trépied bien de niveau et l'axe bien vertical. Ils ont subtisué d'abord des règles à pinnules à la règle qui portait les deux cylindres (43); enfin on a mis des lunettes garnies de réticules à la place de la règle et de ses pinnules; et c'est alors qu'on a pu se flatter de pouvoir observer une distance zénitale à 1 ou 2″, au lieu que Tycho et Hévélius avec leurs pinnules ne pouvaient répondre de deux ou trois minutes. Les divisions faites au microscope et dans ces derniers tems sur les limbes d'argent, ont acquis une netteté, une finesse, une justesse dont les anciens n'avaient pas l'idée. Tel est en substance le quart de cercle mobile.

45. Pour plus de solidité on attache le quart de cercle à un mur épais construit exprès dans le sens du méridien. Le quart de cercle prend alors le nom de *mural*.

46. Au lieu de simple quart de cercle, Tycho a fait construire des demi-cercles qu'il posait verticalement sur des cercles azimutaux, le long desquels ils glissaient pour que l'on pût observer dans tous les points du ciel. On observait ainsi tout à la fois la hauteur et l'azimut de l'astre, et l'observation était

complète, car il n'y a qu'un point dans la voûte céleste qui ait à la fois et même hauteur et même azimut.

47. Ramsden, Troughton, Reichembach ont fait des cercles entiers, et au lieu de les fixer contre un mur, ce qui en aurait restreint l'usage, ou de les placer sur un pied à trois branches qui n'aurait pas eu assez de solidité, ils les ont attachés à des axes verticaux terminés par les deux bouts en cônes qui tournent dans deux coquilles, l'une fixée sur le pavé de l'Observatoire, l'autre renversée et attachée au toit où quatre vis placées entr'elles à angles droits, permettent à la pointe du cône d'aller en avant ou en arrière, à droite ou à gauche, jusqu'à ce que l'axe soit bien exactement vertical dans toutes les positions, ce qu'on vérifie en donnant à l'instrument un mouvement azimutal de 360°. Il faut que dans ce mouvement un fil aplomb suspendu au haut du limbe ne cesse pas un instant de couvrir un point marqué à la partie inférieure qu'on observe au microscope pour mieux juger de la coïncidence. Au lieu du fil aplomb on emploie encore à cette epreuve un niveau dont nous parlerons bientôt. Le sommet du cône inférieur est placé au centre d'un cercle azimutal. On observe l'azimut en même tems que la hauteur.

48. Quand l'astre est vertical, l'instrument donne exactement les distances au zénit; mais il faut, pour en être sûr, faire encore plusieurs vérifications dont nous allons donner une idée.

Il faut premièrement que le réticule de la lunette soit exactement au foyer. Pour s'en assurer on vise à un objet éloigné que l'on place sous les fils de la lunette, ensorte qu'il soit coupé bien exactement par le milieu. Cela fait, on élève et l'on abaisse l'œil alternativement. Si dans ce mouvement l'objet sort de dessous le fil et paraît monter et descendre avec l'œil, c'est que l'image de l'objet est à une certaine distance derrière le fil; pour y remédier on enfonce un peu l'objectif qui est enchâssé dans nn tube particulier qui glisse à frottement dans le grand tube de la lunette.

Si dans le mouvement l'image paraît baisser quand l'œil s'élève, ou s'élever quand l'œil baisse, c'est que l'image est

entre le réticule et l'œil, pour lors on alonge la lunette en retirant un peu l'objectif en dehors.

Quand l'objet reste invariablement sous le fil, malgré les mouvemens de l'œil, le réticule est bien placé.

Cette vérification est commune à toutes les lunettes. En enfonçant ou retirant l'objectif, il faut bien se garder de le tourner comme si on voulait le visser, il faut le pousser simplement, sans quoi l'on courrait le risque de déranger l'axe optique.

49. Il faut en second lieu, que l'axe optique de la lunette soit bien parallèle au limbe, ou au plan du cercle.

On appelle *axe optique* la ligne menée du centre de l'objectif à la croisée des fils du milieu du réticule. Pour cette vérification, on peut, suivant la nature de l'instrument, choisir entre divers moyens; voici le plus simple et le plus universel :

On a une lunette qu'on appelle d'*épreuve*, qui est montée dans deux carrés parfaitement égaux, et dont les côtés supérieurs et inférieurs sont parallèles à un fil qui est au foyer de la lunette. On pose cette lunette sur ou contre le limbe de l'instrument, de manière que le fil intérieur soit parallèle au limbe, on place un objet sous ce fil, on regarde le même objet par la lunette de l'instrument; il y sera aussi sous le fil, si l'axe optique est parallèle au limbe, sinon on approchera le châssis du réticule, ou on l'éloignera au moyen d'une vis propre à lui donner ce mouvement, et quand le fil du réticule coupe l'objet, la vérification est faite.

50. Il faut enfin, et c'est le plus important, que l'axe optique de la lunette soit bien vertical et bien dirigé au zénit quand la règle qui porte la lunette indique zéro de distance au zénit sur le limbe, et que cet axe optique soit bien horizontal quand la lunette indique 90° de distance au zénit. Cette vérification est encore extrêmement simple.

Pour la rendre possible, on donne aux quarts de cercle environ 95° ou 96°, au lieu de 90°, c'est-à-dire, que par-delà zéro, le limbe offre encore 5 ou 6° à la gauche du commencement de la division.

Pour découvrir l'erreur, s'il y en a une, rectifiez bien l'instrument en vous assurant de sa verticalité par le fil aplomb ou le niveau; observez au méridien une étoile dont la distance au zénit soit de 1 à 6°. Supposons que vous ayez trouvé la distance zénitale 4° 56′ 8″, cette distance, pour être juste, exige que l'axe optique dirigé au zénit soit exactement parallele au rayon 0°. Donnez à l'instrument un mouvement azimutal de 180°, c'est-à-dire, placez-le dans le méridien comme il était, avec la différence que le limbe qui regardait l'orient regarde maintenant l'occident. Observez le lendemain la distance au zénit; mais comme l'instrument est retourné pour amener la lunette sur l'astre, il faudra la conduire sur 4° 56′ à gauche du zéro, au lieu que la veille l'observation s'était faite à la droite du zéro. Je suppose que dans cette seconde observation la distance vous paraisse 4° 58′ 10″, vous direz, l'etoile n'a pas changé de place du jour au lendemain. Si l'une des distances au zénit était de 4° 58′ 10″, tandis que l'autre n'était que de 4° 56′ 8″, la difference de 2′ 2″ ne peut venir que d'une erreur dans la ligne de collimation qui, augmentant l'une des deux distances, doit nécessairement diminuer l'autre. La somme des deux distances 9° 54′ 18″ est le double de la distance vraie qui sera 4° 57′ 9″. L'erreur de collimation est donc de 1′ 1″ qui diminue les distances observées à l'ordinaire, et augmente d'autant les distances mesurées de l'autre côté du zéro. Vous saurez donc qu'il faut ajouter 1′ 1″ à toutes les distances observées avec l'instrument dans la position naturelle, à moins que vous ne trouviez le moyen de corriger l'erreur en faisant mouvoir le réticule de 1′ 1″, ce qui détruira la cause d'erreur. Cette correction est assez difficile à exécuter parfaitement; mais il est aisé de réduire l'erreur à 1″ ou 2″ ou moins encore.

51. Avec les cercles entiers de Reichembach, il est inutile de connaître l'erreur, car on fait une première observation quelques secondes avant le passage au méridien, et une seconde en retournant l'instrument quelques secondes après le passage; on a une distance double où l'erreur se trouve compensée, et

comme au méridien l'astre est quelques secondes sans monter ni descendre, on a la vraie distance méridienne.

Avec ces cercles et ceux de Borda, dont nous parlerons par la suite, on peut faire 20 observations avant le passage, et 20 après; on a également la compensation d'erreur et 40 observations au lieu d'une en un jour; mais ces observations ont besoin de correction dont nous donnerons le calcul, et dont la nécessité vient du mouvement de l'astre en hauteur à quelque distance du méridien.

52. Voilà déjà bien des avantages des quarts de cercles ou cercles modernes sur l'instrument de Ptolémée; mais ce n'est pas tout. Les cercles de l'Observatoire d'Alexandrie étaient divisés en degrés ou sixièmes de degré tout au plus. Les nôtres ne sont non plus divisés que de 10′ en 10′; mais on a trouvé des moyens ingénieux pour porter les subdivisions jusqu'aux secondes. Nous avons déjà parlé des microscopes qui facilitent la lecture des observations. On a imaginé d'abord les transversales obliques qui formaient sur le limbe une espèce d'échelle de dixme, telle qu'on en voit dans les étuis de mathématiques, et qui divisaient un espace de 10 en 10 parties, c'est-à-dire, de minute en minute. Mais ce moyen est maintenant abandonné. En voici un autre bien préférable, on l'appelle un *Vernier*, du nom de l'inventeur.

53. Supposons, pour fixer les idées, que le limbe soit divisé de 10 en 10′; sur le bord de la règle qui porte la lunette et glisse sur le limbe divisé, marquez deux traits qui embrassent 9 divisions du limbe ou un arc de 90′ bien juste. Quand le premier trait coïncidera avec un degré du limbe, le second trait coïncidera avec le trait de 30′ du degré suivant; divisez l'intervalle en 10 parties, l'intervalle valant 90′, le dixième vaudra 9′.

Ainsi le vernier restant dans la même position, le premier trait ou zéro répondant à 36°, je suppose, le second trait du vernier marqué 1 sera sur 9′, c'est-à-dire, 1′ en arrière du trait qui marque 36° 10′ sur le limbe. Le second trait de vernier, qui répond à 18′, sera 2′ en arrière du trait 20′, et ainsi des autres qui resteront en arrière de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

et 9′, jusqu'au dernier qui reste en arrière de 10′, et qui coïncide par conséquent avec un trait du limbe.

A présent, supposons que l'on fasse glisser la lunette d'une minute en avant, le zéro du vernier qui coïncide sera avancé d'une minute; le suivant qui est marqué 1′ et qui était en arrière d'une minute coïncidera à son tour et sera le seul. Avancez encore la lunette de 1′, ce sera le trait 2 qui coïncidera; avancez encore de 1′, le troisième coïncidera, et ainsi des autres.

54. Ceci posé, supposons que j'aie fait une observation de distance zénitale, je regarde d'abord le zéro du vernier, et j'écris la division qu'il dépasse; supposons que ce soit 45° 50′; je cherche ensuite quel est le trait qui coïncide, je suppose que ce soit le 7e, j'ajoute 7′ et j'ai 45° 57′; je suppose que le trait ne coïncide pas exactement, mais qu'il passe la coïncidence de $\frac{1}{3}$ de l'intervalle entre deux traits consécutifs, j'ajoute un tiers de minute, et j'aurai 45° 57′ 20″.

Si j'avais pris pour construire mon vernier 99 intervalles du limbe, et que je les eusse divisés en 100, chaque partie du vernier eût valu $\frac{600''}{100} = 6''$, et en estimant jusqu'aux tiers, j'aurais eu 22″ au lieu de 20.

55. La formule générale est de prendre $(n-1)$ parties du limbe et de les diviser en n parties sur le vernier, ou la formule est $\frac{n-1}{n}$; alors le vernier donne la partie $\frac{1}{n}$ de la division du limbe.

J'appelle ce vernier direct, parce que la numération y marche dans le même sens que sur le limbe. Il en est un autre que j'appelle *rétrograde*, parce que la numération s'y lit en sens contraire; il est un peu moins commun; la formule est $\frac{n+1}{n}$. Le principe en est le même, ainsi que l'usage.

56. La règle qui porte le vernier est taillée en biseau, afin que les traits paraissent descendre du vernier sur le limbe, et puissent s'y unir plus prochainement malgré l'épaisseur de la règle; mais cette règle n'est pas toujours bien unie au limbe, alors la jonction des traits n'est point parfaite, on ne peut pas

si

si bien juger la coïncidence. Reichenbach a remédié à cet inconvénient d'une manière fort heureuse.

Au lieu d'un cercle unique, il en fait deux, l'un extérieur qui porte la division, l'autre intérieur qui porte la lunette et le vernier ; ces deux cercles sont dans un même plan et si bien adaptés l'un dans l'autre, qu'il est impossible de voir le moindre jour entr'eux ; la séparation ne paraît à l'œil que comme un trait circulaire qui serait tracé sur le limbe.

57. Voici le premier moyen de subdivision ; en voici deux autres qu'on peut joindre au premier, ce sont les micromètres intérieurs on extérieurs.

Le micromètre intérieur est un réticule, tel que celui que nous avons décrit (II. 15), à l'exception qu'on y joint un fil mobile et parallèle au fil horizontal ; ce curseur est porté par un châssis particulier que l'on fait glisser sur le châssis du réticule au moyen d'une vis latérale garnie d'un cadran, où une aiguille marque les parties de tours qu'on a donnés à la vis, et une marque intérieure indique le nombre des tours entiers. En voici l'usage :

Quand on voit l'astre entrer dans la lunette, on la fixe, au moyen du vernier, sur le point de la division qui fait que le fil horizontal de la lunette est aussi près de l'astre qu'il soit possible ; on fixe la lunette dans cette position au moyen d'une vis de pression.

Si l'astre est sur le fil, il n'y a plus rien à faire qu'à lire le vernier.

58. Si l'astre est à quelque distance du fil fixe, on tourne la vis, et l'on amène le curseur sur l'astre ; on lit sur le cadran le nombre de tours et parties de tours donnés à la vis pour écarter le curseur qui couvrait le fil fixe ; on a une table des parties du micromètre en minutes et secondes ; on y prend la valeur des tours donnés à la vis ; on ajoute cette valeur à ce qui est donné par le limbe et le vernier.

59. Mais il faut calculer la table du micromètre, en voici le moyen :

Dirigez la lunette, ensorte que le fil horizontal couvre un

objet terrestre. La lunette étant sur l'une des divisions du limbe et le curseur amené sur l'objet bien exactement; notez le nombre des tours donnés à la vis du curseur; je suppose $2^t\ 25^p$, le cadran étant divisé en 40 parties, comme ils le sont communément.

Le curseur restant dans cet état, conduisez la lunette sur une division éloignée de 10′; pour ramener le curseur, il faudra le faire mouvoir d'un nombre de tours équivalent à 10′=600″. Je suppose qu'il faille le mener à. . $10^t\ 35^p$

il était précédemment à..... $2\ 25$

Ainsi..... $8^t\ 10^p = 600''$

ou 8×40 parties $+ 10^p = 330^p = 600''$; 33 parties $= 60''$; $3{,}3 = 6''$ et $1'' = 0^p\ 55$; d'après ce rapport connu, vous pourrez construire votre table.

Au lieu de faire avancer la lunette de 10′ seulement, faites-la avancer de 20; il faudra tourner un plus grand nombre de tours pour ramener le curseur à l'objet. Vous pourrez varier l'expérience de plusieurs manières, et voir si elles donnent bien le même rapport, ce qui sera une preuve de l'uniformité des tours de la vis.

60. Le micromètre extérieur est encore plus usité que le précédent, surtout dans les grands instrumens. C'est une vis extérieure qui sert à donner à la lunette un mouvement lent et doux, quand on l'a fixée sur l'une des divisions du limbe. Cette vis est également accompagnée d'un cadran qui marque les tours et parties de tours. Quand la lunette est fixée sur une des divisions, si l'astre qu'on veut observer n'est pas exactement sur le fil, on l'y amène en faisant tourner la vis, alors la lunette s'écarte du point où on l'avoit placée.

L'observation étant faite, on l'y ramène en tournant la vis, et dans ce mouvement on observe le nombre de tours et de parties; on en prend la valeur dans une table, et on l'ajoute à la division du limbe à laquelle on a ramené la lunette. On voit même qu'il était inutile de l'y placer avant l'observation.

Supposons l'observation faite, voyons comment il fallait s'y

prendre pour n'être pas obligé de donner à la vis du micromètre deux mouvemens contraires.

La hauteur est ici 30° 38′, je placerai la lunette à 30° 45′, et pour cela, je ferai coïncider le o du vernier, la lunette sera trop haute, l'astre sera au-dessous du fil horizontal et paraîtra au-dessus. Quand il sera près du fil du milieu, je tournerai la vis pour mettre le fil sur l'astre; dans ce mouvement le point o qui coïncidait s'avancera contre l'ordre de la numération; un des traits s'approchera plus que tous les autres de la coïncidence. Ici c'est le trait 8 qui passe la coïncidence d'une partie qu'il faut estimer; continuez à tourner la vis du même côté, jusqu'à ce que le point 8 coïncide. Le nombre de secondes marqué par le cadran devra s'ajouter à $30° 30' + 8 + n'' = 30° 38' n''$.

Plus ordinairement la division donnera les distances au zénit, la division sera en sens contraire.

Pour observer, sans avoir deux mouvemens contraires à donner à la vis, je mettrai la lunette trop loin du zénit, l'astre sera au-dessus et paraîtra au-dessous du fil, je tournerai la vis pour hausser la lunette et amener le fil sur l'astre, et l'observation faite, je tournerai la vis dans le même sens pour amener la coïncidence du trait qui dépasse.

Supposons (fig. 21) que la distance au zénit soit de 60° 6′ environ; je mettrai la lunette sur 60° 15′; l'astre passera au-dessus du fil, je tournerai la vis pour amener le fil sur l'astre. Je trouverai alors que le o passe 64 parties, qui valent 60°; que le trait 6 passe la coïncidence; 6 parties valent 5′ 16″,4; pour amener le trait 6 à la coïncidence, je tournerai de nouveau la vis, le mouvement me donnera 26″,4, par exemple; en réunissant tous ces nombres j'aurai 60° 5′ 42″,8. Règle générale, pour éviter le tems perdu de la vis, fixez la lunette à une distance zénitale ou à une hauteur plus grande que la véritable.

La vis est construite de manière qu'un tour équivaut à 3′. Le cadran est donc divisé en trois parties qui valent chacune une minute; chaque minute est divisée en 20 parties qui valent trois secondes; on peut en estimer le tiers, et par conséquent

avoir l'arc à la seconde. Dans quelques instrumens la minute du cadran est divisée en 60 parties qui sont des secondes.

61. La table de ce micromètre est encore plus aisée à construire que la précédente ; fixez la lunette sur une division, faites tourner la vis de manière que la lunette parcoure 10, 20, 30′ autant que permettra la vis ; notez le nombre de tours qui répondent à 10, 20, 30′, vous aurez autant de moyens de déterminer le rapport des parties aux secondes pour construire votre table.

62. La division du cercle est anciennement de 360°, le quart de cercle en a 90°. Pour diviser par des bissections continuelles, des artistes célèbres ont trouvé plus commode de partager le quart de cercle en 96 parties qui, par la bissection, donnent les arcs de 48, 24, 12, 6, 3. L'arc de 60° vaut 64 parties et donne 32, 16, 8, 4, 2, 1 ; ce degré vaut $\frac{15}{16} = 0.9375 = 0° \; 56' \; 15''$; il se sous-divise en quatre parties de 14′ 3″,75, et chacune de ces parties en 16, qui valent 52″,734375.

63. Pour assurer la verticalité de son quart de cercle, Ptolémée se servait du fil à plomb ; les modernes, en imitant cette pratique, l'ont perfectionnée. Ils suspendent le fil plus haut et à côté du rayon vertical. A la hauteur du centre le fil doit traverser deux traits croisés, marqués sur le plan de l'instrument ; au bas du limbe, il doit encore traverser deux traits croisés qu'on observe au microscope. Ils placent le fil à plomb derrière le limbe pour qu'il ne gêne en rien l'observation.

64. Pour confirmer l'épreuve du fil à plomb, ils ont imaginé plusieurs espèces de niveau. Le plus simple de tous est l'equerre des maçons ; c'est une espèce de triangle composé de trois traverses de bois solidement assemblées. Vers le sommet de l'angle est suspendu le fil à plomb qui doit battre sur un trait marqué au milieu de la traverse qui est parallèle à l'horizon.

Pour trouver la place de ce trait par expérience, posez l'équerre sur un plan bien uni et sur une ligne droite tracée sur ce plan ; remarquez quel point de la base couvre le fil ; retournez le niveau, c'est-à-dire, placez le pied droit au

point où était le pied gauche, et réciproquement. Si le fil bat encore sur le même point, ce point est celui que vous devez marquer d'un trait, et le plan est horizontal dans le sens où vous avez placé le niveau et l'équerre.

Si le fil ne bat pas sur le même point, partagez en deux également l'intervalle entre les deux points, et vous aurez la place du trait; vous en conclurez que le plan est incliné dans le sens où vous avez placé le niveau. Posez le niveau sur une ligne qui fasse un angle avec la première, si le fil s'écarte du trait plus qu'il ne faisait sur la première ligne, l'inclinaison de la seconde ligne est plus forte; s'il s'écarte moins, l'inclinaison est plus faible. Essayez successivement diverses lignes, vous en trouverez nécessairement une où l'inclinaison sera nulle, et la ligne qui fera un angle droit avec cette dernière, sera celle où l'inclinaison sera la plus forte.

65. En effet, tout plan incliné, si on le prolonge suffisamment, coupera l'horizon; l'intersection commune sera horizontale, puisqu'elle sera toute entière dans le plan de l'horizon. Toute ligne parallèle à l'intersection sera parallèle à l'horizon, et par conséquent horizontale; donc, dans un plan quelconque, il est aisé de trouver une parallèle à l'horizon, la perpendiculaire à cette ligne horizontale sera perpendiculaire à l'intersection des deux plans.

L'angle de deux plans est l'angle que forment deux perpendiculaires menées au même point de la commune intersection dans les deux plans. Cet angle est le plus grand que puissent former deux lignes menées dans les deux plans d'un même point de la commune intersection. Tout cela est démontré dans les Elémens de Géométrie, et l'on peut s'en convaincre par le fait, en plaçant le niveau dans tous les sens possibles, ou sur tous les diamètres d'un cercle décrit dans le plan.

66. Le poids qui tend le fil, le ramène toujours à la position verticale, c'est-à-dire, que ce fil prolongé se trouverait toujours perpendiculaire à l'horizon, et c'est de là que vient le mot de ligne perpendiculaire, c'est-à-dire, ligne du perpendicule ou ligne du fil à plomb, ou du fil chargé d'un poids.

67. La direction du fil à plomb est toujours perpendiculaire à la surface d'une eau tranquille. Nous en pourrions donner la démonstration, mais nous ne démontrons pas les vérités universellement reconnues qui sont devenues des axiomes, et d'ailleurs nous en verrons tout à l'heure une démonstration pratique (75).

68. Au lieu d'appuyer le niveau à fil sur deux pieds, on peut le suspendre à un cylindre (fig. 22 et 23) parallèle à la base. Ce cylindre peut être armé de deux crochets parfaitement égaux, au moyen desquels on pourra suspendre le niveau à un autre cylindre. Si le fil à plomb bat sur le trait, on en conclura que le cylindre est bien horizontal. En effet, le fil étant sur le trait est perpendiculaire à la base, il est perpendiculaire au cylindre armé de crochets, et perpendiculaire au cylindre qu'embrassent les deux crochets; ce dernier cylindre est donc horizontal.

Les quarts de cercles modernes ont ainsi une verge de fer horizontale, à laquelle on peut suspendre un niveau plus grand et par conséquent plus sensible, et qui peut remplacer ou contrôler le fil à plomb plus court qui est suspendu derrière le limbe.

69. Ce niveau à crochets, au lieu d'une base ou traverse rectiligne peut avoir un arc de cercle sur lequel on marque o le trait ou point de foi que doit couvrir le fil. A droite ou à gauche du zéro, on divise l'arc de cercle en degrés et fractions de degré qui servent à évaluer l'inclinaison de la verge à laquelle le niveau est suspendu. En effet, le fil à plomb Bx (fig. 23) est perpendiculaire à l'horizon Bf, $CBo = 90°$; ôtez la partie commune fBo, il restera $CBf = oBx = ox$; or, CBf est l'inclinaison de AC et de EF; donc l'arc compris entre le zéro et le fil est égal à l'inclinaison de la verge à laquelle est accroché le niveau. Rien n'empêche de suspendre le fil à plomb au-dessus des crochets, ensorte que la longueur du fil soit divisée en deux parties égales par la verge qui est surmontée de deux crochets. Voyez l'Astronomie pratique de Vince (fig. 45.)

On peut rendre l'arc de cercle mobile au moyen d'une vis, afin de ramener le zéro à la place convenable, si l'artiste s'était négligé dans la construction, ou si l'instrument s'était déformé par un long usage.

70. Le niveau à bulle d'air est celui dont les astronomes font usage plus communément; il est plus sensible, mais il peut être plus irrégulier et moins sûr, s'il n'est pas construit avec soin.

Soit CD (fig. 24) un tube de verre rempli presque entièrement d'alcool ou d'éther, et fermé hermétiquement par les deux bouts. Les côtés intérieurs du tube, au lieu d'être droits, ont une courbure circulaire d'un très-grand rayon.

Ce cylindre est enfermé dans une garniture de cuivre dont la base est plane, à l'un des bouts est une vis verticale v qui sert à élever un des bouts du tube, jusqu'à ce que l'axe du tube soit exactement parallèle à la base de cuivre.

71. Placez ce niveau sur un plan bien horizontal, la liqueur par son poids occupera la partie inférieure du tube, et laissera un vide à la partie supérieure à cause de la courbure circulaire. La flèche de ce vide, ou la hauteur perpendiculaire, sera la plus grande au milieu du tube; on indique ce milieu par un trait qu'on marque zéro. De part et d'autre du zéro, on trace sur le verre ou sur le bord de la garniture, de petites lignes droites parallèles, également espacées, que l'on marque des chiffres 1, 2, 3, etc. La régularité de la courbure fait que la bulle d'air s'étend de part et d'autre du zéro, jusqu'à deux chiffres pareils comme 20 et 20, 25 et 25, plus ou moins, selon la température qui peut dilater ou condenser le liquide, diminuer ou augmenter la longueur du vide, ou de la bulle d'air qui est plus ou moins comprimée.

72. La vis dont nous avons déjà parlé sert à remonter ou à baisser l'un des bouts du tube, de manière que la bulle soit comprise entre deux chiffres pareils.

Cette rectification étant faite, ce niveau sert à connaître si un plan est horizontal dans tous les sens; il suffit d'y placer le niveau; quand la bulle sera partagée par le zéro, le plan

sera horizontal, au moins dans ce sens. Vous poserez ensuite ce niveau suivant une direction perpendiculaire à celle qu'il avait dans la première expérience; si la bulle est encore entre les mêmes repères, le plan est horizontal en tout sens; si elle n'y est plus, vous saurez dans quelle direction l'inclinaison est la plus forte, et vous pourrez la corriger en abaissant le plan dans la partie où la bulle est plus longue, ou en le haussant dans la partie où elle est plus courte, jusqu'à ce que l'égalité soit rétablie.

73. Ce niveau s'applique à divers instrumens dont nous aurons occasion de parler. A la garniture on adapte deux crochets pareils à ceux du niveau à fil, et l'on suspend de même l'instrument à la verge, au cylindre, ou à l'axe dont on a besoin d'assurer l'horizontalité.

Quand ce niveau est ainsi suspendu, si la bulle est entre ses repères, l'axe est horizontal, si la bulle s'écarte de l'un ou de l'autre côté, on hausse ou baisse un des bouts de l'axe jusqu'à ce que la bulle rentre dans ses repères (fig. 24).

74. Tout ceci suppose le niveau bien rectifié. Il peut ne l'être pas, ne l'avoir jamais été, ou avoir cessé de l'être, mais l'usage n'en est pas moins sûr et n'est guère plus incommode; il suffira de changer le niveau bout pour bout, c'est-à-dire, de faire que le crochet qui était à votre droite passe à votre gauche, et réciproquement.

Remarquez le chiffre auquel arrive le même bout de la bulle *dans les deux positions du niveau. Si le chiffre est le* même, l'axe sera bien, et alors pour rectifier le niveau, s'il en a besoin, il suffira d'en tourner la vis *v*, jusqu'à ce que la bulle atteigne de part et d'autre les mêmes chiffres.

Si le chiffre marqué par le même bout n'est pas le même dans les deux positions, haussez ou baissez l'axe de manière que la bulle marque le nombre moyen arithmétique entre les deux qu'il a marqués successivement, l'axe sera rectifié et vous rectifierez le niveau au moyen de sa vis, en faisant que les deux bouts arrivent à un chiffre pareil.

Peu importe quel bout de la bulle on observe, pourvu

que ce soit toujours le même, et pour ne pas s'y tromper, on fera bien d'observer celui qui est le plus voisin de la vis.

Cette règle est bien simple; je l'ai démontrée, ainsi que plusieurs autres, dans mon Traité d'Astronomie (Chap. VI).

75. Quand l'axe sera rectifié par le niveau à bulle, suspendez-y un niveau à fil, vous verrez le fil battre sur le même point, avant et après le retournement, d'où vous conclurez que l'axe est horizontal, puisqu'il est perpendiculaire à la ligne à plomb; mais l'axe est parallèle à la surface de la liqueur, ou à la corde qui passe par les extrémités de la bulle; donc le fil à plomb est perpendiculaire à la surface de l'eau.

Par le choix entre ces deux moyens, ou par leur réunion, la verticalité du cercle est assurée; les divisions sont étendues jusqu'aux secondes par les verniers ou les micromètres; mais ce n'est pas tout encore; il faut, pour que ces divisions nous donnent les distances au zénit, que l'axe optique de la lunette, ou le rayon visuel soit parallèle au rayon du cercle que la division indique; il faut d'abord qu'il le soit au plan de l'instrument; il faut que la vision soit nette et sûre. Nous avons exposé ci-dessus les moyens de faire toutes ces vérifications.

Elles sont faciles si le quart-de-cercle est mobile, mais celle de collimation très-difficile s'il est mural. Alors on se sert d'un cercle mobile pour vérifier le mural.

76. Si le mural donne les distances au zénit plus fortes d'un arc E que le quart-de-cercle, on en conclut que l'erreur de collimation est E, qu'il faut retrancher des distances données par le mural.

Mais les quarts-de-cercle mobiles sont ordinairement petits en comparaison du mural; on ne connaîtra l'erreur de collimation du mural qu'à 2″ près, si le petit quart de cercle ne donne pas les moyens de répondre de 2″.

Pour obvier à cet inconvénient, on a des secteurs de 4 ou 5 mètres, 12 à 15 pieds de rayon.

77. Le secteur consiste en un arc de 20 à 30°, et une lunette.

L'arc est divisé en deux parties égales par le zéro, la lunette est suspendue à un axe horizontal posé sur deux fourches. Par son poids, le secteur prend la position verticale, on en vérifie la ligne de collimation par le retournement. Soit Z la distance verticale de l'astre au zénit, O et O′ les deux distances observées, on aura $Z = O + E$,

$$Z = O' - E,$$
$$2Z = O + O' + E - E = O + O'.$$

On n'aurait donc pas besoin de corriger l'erreur de collimation du secteur, on aurait $Z = \frac{1}{2}(O + O')$.

Du reste, le secteur a ses fils à plomb, ses niveaux, ses verniers, ses micromètres, comme tous les autres instrumens; il est moins lourd, plus facile à retourner que le mural, et même que le quart de cercle mobile; il est d'un grand rayon; il sert pour les étoiles qui passent près du zénit.

Au lieu d'un simple quart de cercle mural, Flamsteed a employé un arc d'environ 130°, qui lui donnait le moyen d'observer depuis le point sud de l'horizon jusques et par-delà le pôle, en passant par le zénit.

On pourrait avoir le demi-cercle entier, qui ferait à lui seul l'office de deux quarts de cercle placés l'un au nord et l'autre au sud, sur les deux faces d'un même mur, comme ceux des Observatoires de Paris et de Greenwich.

Rien n'empêche d'avoir des cercles entiers, et l'on y trouvera cet avantage, que la lunette pourra avoir deux verniers au lieu d'un; qu'on fera l'observation sur deux parties opposées du limbe. Si les deux arcs diffèrent exactement de 180°, on pourra compter sur l'observation, et l'on sera sûr qu'il n'y a point d'erreur dans la division et que l'axe optique passe par le centre de l'instrument; car si au lieu d'être un diamètre, il était une corde, les deux arcs différeraient de deux fois l'excentricité de la lunette.

Au lieu de deux verniers on en peut mettre quatre, à 90° les uns des autres, au moyen d'une seconde alidade jointe en croix à celle qui porte la lunette. On aura ainsi quatre

lectures au lieu d'une, et l'erreur quatre fois moindre, en prenant le milieu entre les quatre arcs, s'ils ne s'accordent pas parfaitement.

78. Il faut que les quatre alidades, promenées successivement sur tous les degrés du limbe, donnent partout la même différence 90°, ce qui fournit la vérification réciproque des alidades et de la division.

Au lieu des quatre verniers placés sur des alidades en croix, à la manière de Borda, Reichenbach fait porter la lunette sur un cercle concentrique à celui qui porte la division. Ce cercle intérieur tourne si juste dans l'autre, qu'on n'aperçoit aucun interstice, pas même la lumière entre les deux cercles; alors les verniers, qu'on peut multiplier autant qu'on voudra, sont exactement dans le plan; on juge mieux la coïncidence avec les traits du limbe, ce qui n'a pas lieu si exactement dans les alidades qui glissent sur le limbe, malgré la précaution de les tailler en biseau. L'alidade, après un certain tems, se fausse et s'élève au-dessus du plan.

Ramsden mettait ainsi deux verniers opposés; Borda et Reichenbach en mettent quatre; on en pourrait mettre davantage, mais quatre suffisent.

79. On ajoute à la commodité, en attachant le cercle entier à un axe vertical, terminé par les deux bouts en cônes qui tournent dans des coquilles (fig. 25).

Pour rendre l'axe parfaitement vertical, on a deux vis opposées S et N, l'une au sud et l'autre au nord; en tournant l'une et détournant l'autre simultanément, on fait avancer la coquille C dans le plan du méridien, jusqu'à ce qu'en donnant à l'axe un mouvement azimutal de 180°, la bulle du niveau se retrouve entre les mêmes repères dans les deux positions contraires de l'instrument.

Si elle ne sort pas un seul instant de ses repères, quoiqu'on donne à l'instrument un mouvement de 360° en azimut, l'axe est parfaitement vertical; mais après qu'il est rectifié dans le sens du méridien, il pourrait avoir une inclinaison est et ouest, ce que le niveau indiquerait quand il serait à 90° ou

270° du 0. On corrigerait cette erreur comme la première, au moyen de deux vis opposées, l'une à l'est, l'autre à l'ouest.

L'instrument serait alors bien exactement vertical, et s'il s'écartait de cette position pendant une série d'observations, le niveau en avertirait et donnerait les moyens de corriger l'erreur.

80. Supposons que le niveau soit dans un plan parallèle à celui du limbe; dans le méridien, par exemple, si l'axe penche vers le sud et se rapproche de l'étoile que l'on observe, la bulle montera vers le nord; on notera de combien de parties de l'échelle du niveau; il restera à savoir le rapport de ces parties aux secondes de l'arc de grand cercle. On en conclura de combien le zénit de l'axe s'est rapproché de l'astre, et ce qu'il faut ajouter à la distance zénitale observée.

Pour connaître ce rapport, on mettra un objet terrestre sur le fil; ensuite, par le mouvement des vis S et N, on donnera une inclinaison de 30 parties du niveau, par exemple, c'est-à-dire, propre à faire monter la bulle de 30 parties vers le nord. L'objet ne sera plus sous le fil; on l'y remettra en faisant jouer le micromètre. Supposons que le cadran du micromètre indique 60″, on dira: 60″ valent 30 parties; une partie vaut 2″. Le raisonnement sera le même, quel que soit le mouvement observé du niveau et du micromètre.

81. Il résultera de cette construction un avantage bien remarquable.

Observez la distance zénitale 30″ environ avant le passage au méridien, tournez l'instrument de 180° en azimut (Car ce cercle a un cercle azimutal dont le centre répond à l'axe qui passe par les sommets des deux cônes. Une double alidade avec ses verniers, marque les azimuts avec la même précision qu'on obtient pour les distances au zénit.), et vous pourrez observer une seconde distance au zénit; les deux réunies seront indépendantes de la position de l'axe, comme dans le secteur ou le quart de cercle.

Imaginez que la lunette ait été fixée solidement sur le zéro, et qu'on ait fait tourner le cercle autour de son centre, pour amener la lunette à l'étoile, la lunette sera à 30° + E du zénit vrai, si l'étoile est à 30°, et l'erreur de l'axe = E. Après le mouvement azimutal, la lunette sera à 30° — E de ce même zénit. Pour la ramener à l'étoile, vous serez obligé de lui donner un mouvement =30°+E+30°—E=60°; la première observation ne vous aura rien appris, la seconde vous donnera la double distance corrigée. Vous en prendrez la moitié.

Les distances observées 30″ avant et après le passage au méridien, ne diffèreront des distances méridiennes que d'une quantité absolument insensible, et que d'ailleurs nous apprendrons à calculer.

82. Commencez les observations 10′ avant le passage, et faites-en ainsi 10 observations, une par chaque minute. Faites-en 10 après le passage, vous aurez 20 observations et un arc de 20 fois 30° ou 600°; vous aurez eu 10 erreurs E positives et 10 négatives qui se seront détruites; vous prendrez le vingtième 30° de l'arc total 600°, ce sera la distance simple.

L'arc de 600° n'est sujet, comme l'arc de 30°, qu'à une erreur médiocre. Supposons 10″ d'erreur dans la division; cette erreur, divisée par 20, ne donnera que 0″,5 d'erreur sur l'arc simple; ainsi, en multipliant les observations à volonté, vous diminuerez en même raison les erreurs de la division, qui deviennent insensibles. Cette idée est due originairement à Mayer, mais on n'en avait tiré aucun parti avant Borda.

La multiplication des angles remédie encore à l'erreur du pointé, c'est-à-dire, à l'erreur commise en pointant la lunette à l'étoile, en mettant la lunette sous le fil. Cette erreur n'étant soumise à aucune loi, sera souvent additive et souvent soustractive; il y aura une compensation plus ou moins parfaite.

83. Nous supposons que l'objet reste invariablement à la même distance du zénit, et cela est vrai d'un objet terrestre, d'une montagne ou d'une tour, et non d'une étoile. Mais

la Trigonométrie nous enseignera à calculer les variations des distances zénitales aux environs du méridien. Connaissant de combien l'observation a précédé ou suivi le passage, nous saurons de combien la distance zénitale observée est plus grande ou plus petite que la distance méridienne. Si elle est trop grande, nous retrancherons cet excès de l'arc observé; chaque observation partielle aura sa correction particulière; la somme de ces corrections sera la correction de l'arc total de 600°. Je suppose qu'elle soit $-15'$, l'arc se réduit à $599°45'$,
dont le 20e est..... 29.59.15".

Ce sera l'arc simple ou la distance vraie; en effet, ...
$\frac{15'}{20} = 0',75 = 45''$ à retrancher de 30°.

84. Ces avantages sont immenses, mais ils sont achetés par un petit inconvénient. Pour placer ainsi l'axe solidement entre deux coquilles, il faut un local préparé tout exprès. Une fois en place, on ne peut le placer ailleurs sans beaucoup de travail, de tems et de dépense. On a su rendre l'instrument portatif, en variant la construction; c'est même par là qu'on a commencé.

85. On a posé le cercle sur un trépied, comme les quarts de cercle mobiles; le trépied est garni d'un cercle azimutal, mais plus petit que le vertical.

Au lieu d'attacher le niveau à la colonne verticale, on le place derrière le limbe.

Avant de commencer une série d'observations, on met la lunette sur zéro. Pendant qu'un premier observateur fait tourner le cercle autour de son centre, pour diriger la lunette à l'astre, un second observateur, attentif à tous les mouvemens du premier, maintient la bulle du niveau entre ses repères. Quand il y est à peu près parvenu, il serre une vis de pression qui fixe le niveau à un point déterminé du limbe. Si le premier observateur continue à mouvoir le cercle, le second fait mouvoir une vis de rappel qui remet la bulle entre ses repères. Les deux observateurs s'avertissent mutuellement, et quand il arrive que l'étoile est sous le fil et

que dans le même instant le niveau est ce qu'on appelle *bien calé*, l'observation est faite; le niveau est parallèle à un certain diamètre du cercle, et la lunette à un autre.

On donne le mouvement de 180° en azimut à l'instrument, on ramène la lunette à l'étoile, en la faisant glisser le long du limbe, et elle parcourt sur ce limbe un arc égal à la double distance zénitale. On n'a plus qu'à lire cette distance.

Il n'y a pas d'erreur dans cette double distance, car le niveau est resté, ou a été ramené à la même position que dans la première observation ; c'est le même diamètre de l'instrument qui est horizontal; c'est par conséquent le même qui est vertical. Quoiqu'on ne sache pas quel est le diamètre qui est dirigé vers le zénit, on sait que c'est le même, et que la lunette a fait un chemin égal à la double distance ; cette double distance est donc connue aussi bien que si l'axe eût été attaché invariablement par les deux bouts ; on n'a pas besoin de connaître la valeur des parties du niveau, puisqu'il n'a point éprouvé de variation ; le cercle mobile est plus aisé à construire, l'astronome dépend moins de l'habileté de l'artiste ; l'instrument est portatif et n'a pas besoin de vérification ; l'observation n'est guères plus longue ; il suffit que les deux observateurs soient également attentifs, également scrupuleux.

Cette construction ingénieuse a précédé l'autre, et elle est due à Borda. Elle lui était nécessaire ; il voulait un cercle portatif; elle était plus difficile à imaginer, ou plutôt on avait déjà des exemples de l'autre, qui n'est qu'un axe substitué à un mur, et cet axe vertical, imaginé par Ramsden, ressemble beaucoup à l'axe incliné des équatoriaux de Graham, dont il va être question.

86. C'est par tous ces moyens qu'on a successivement perfectionné le quart-de-cercle dont Ptolémée avait donné l'idée.

Il avait de même donné la description d'un autre instrument que les modernes ont singulièrement perfectionné, c'est l'équatorial.

87. Soit Pp (fig. 26) l'axe de notre cadran équinoxial

suffisamment prolongé, il représentera l'axe du monde autour duquel le soleil tourne uniformément.

Que cet axe tourne en P dans une coquille, en B, et en *p* dans deux collets dont l'un est au centre du cadran immobile SD dont *m*B*n* est la méridienne.

Placez sur cet axe à angles droits l'alidade ACE attachée en C par un boulon, AE représentera l'équateur. Une étoile sans déclinaison et au méridien serait vue à travers les pinnules E, A; à mesure qu'elle tournera, poussez du doigt l'alidade, elle fera tourner l'axe P*p* dans ses collets; elle entraînera l'aiguille *a*B que je suppose placée sur o heure. L'aiguille par son mouvement mesurera le mouvement de l'étoile, et vous verrez que l'aiguille fera également 15° par heure; donc le mouvement de l'étoile est uniforme.

88. Si l'étoile est hors de l'équateur, donnez à l'alidade un mouvement égal à la déclinaison de l'étoile, de 60° si la déclinaison est de 60°, ensorte que l'angle ACP qui était de 90° devienne 90° + 60° = 150° si la déclinaison est boréale. Mettez l'aiguille sur o heure, attendez que l'étoile passe au méridien, et suivez-la comme la première fois, vous verrez que le mouvement de l'aiguille sera encore de 15° par heure, quelle que soit la déclinaison de l'étoile; donc toutes les étoiles tournent uniformément autour du même axe que le soleil.

89. L'alidade CA′ dans cette révolution décrira une surface conique dont la base sera le cercle qui est le parallèle de l'étoile. Si l'étoile ne se couche pas, que A′CP soit moindre que la hauteur du pôle, vous pourrez la suivre pendant sa révolution de 24 heures, pourvu qu'elle soit assez brillante pour être aperçue de jour; mais pour cela, il faudra mettre une lunette au lieu de pinnules sur l'alidade, ainsi qu'ont fait les modernes.

Si l'étoile se couche, vous pourrez au moins la suivre depuis son lever jusqu'à son coucher, en poussant du doigt l'alidade pour faire tourner l'axe.

90. Pour donner à l'alidade l'inclinaison convenable, placez-

la

la sur un cercle divisé dont le zéro soit sur le rayon parallèle à Pp; que ce cercle soit fixé par des vis en x et y à l'axe Pp, l'alidade tournant sur ce cercle, vous indiquera la distance pCA' de l'étoile au pôle, si vous ne la connaissez pas; si vous la connaissez, arrêtez l'alidade sur le degré qui marque cette distance, et vous serez sûr, en faisant tourner l'axe, que l'étoile passera par le milieu de la lunette. Si de plus vous savez à quelle heure elle passe au méridien, et qu'elle y ait passé depuis trois heures, par exemple, tournez l'axe, ensorte que l'aiguille ag couvre la ligne de 3 heures, l'étoile se trouvera au milieu de la lunette. C'est par ce moyen que de jour on trouve des astres qui, sans ce secours, seraient invisibles.

91. Vous pourrez observer de même le soleil. L'aiguille ag vous marquera l'heure avec plus de précision que le meilleur cadran. L'heure qu'elle marquera sera l'heure civile, parce que l'aiguille divisera la course du soleil en 24 parties égales; comme elle divise celle des étoiles, seulement pour suivre le soleil, il faudra donner à la machine un mouvement un peu plus lent que pour l'étoile.

92. Quand le plan du cercle de déclinaison MO est dans une position verticale, et que l'étoile est sur le fil du milieu de la lunette, il est évident que l'étoile est à son plus grand degré de hauteur ou au plus haut point de son arc; elle ne peut que baisser, ce qui se voit au mouvement conique que l'on est forcé de donner à la lunette pour suivre l'étoile; quand le cercle de déclinaison est vertical, il est dans le plan PLp du méridien; ainsi tous les astres sont à leur plus grande hauteur quand ils sont au méridien dans leur passage supérieur; ils sont dans leur plus grand abaissement dans leurs passages inférieurs au méridien, car ils sont alors dans la partie opposée et la plus basse de leur parallèle. Mais dans ce dernier passage, il n'y a que les étoiles circompolaires qui soient visibles, les autres sont sous l'horizon.

93. On appelle étoiles circompolaires les étoiles dont la distance polaire est moindre que la hauteur du pôle, ou que

la distance polaire du point nord de l'horizon. Les anciens les distinguaient sous le nom d'*arctiques*, c'est-à-dire de l'Ourse, parce que l'Ourse est une constellation voisine du pôle; ils appelaient *cercle arctique* celui dont la circonférence enferme toutes les étoiles qui ne se couchent jamais.

94. Tout ceci suppose que l'axe P*p* de la machine se dirige exactement au pôle, et qu'il est parallèle à l'axe du méridien. Les observations qui nous ont servi à trouver la direction de l'axe ne promettent pas cette exactitude. L'instrument aura besoin de vérifications, elles seront très-faciles.

La première est de voir si la traverse PL est bien horizontale; c'est ce que nous indiquera le niveau à bulle d'air.

La seconde est de s'assurer de la position verticale du montant LR, on le fait au moyen du fil à plomb.

La troisième, de savoir si l'angle LP*p* est bien celui de la hauteur du pôle. Observez l'étoile au méridien supérieur, et à l'instant où l'étoile va passer au fil de la lunette, fixez l'alidade contre le limbe, ensorte que l'étoile soit coupée en deux également par le fil horizontal.

Observez de même le passage inférieur, si l'étoile se trouve encore sous le fil, l'axe est à la hauteur convenable.

Si l'étoile ne se trouve pas sous le fil, tournez la vis du micromètre et coupez l'étoile en deux, la quantité dont vous aurez tourné la vis sera la moitié de la correction, car de même qu'au zénit (50), l'erreur de l'axe aura diminué l'une des deux distances polaires, et augmenté l'autre de la même quantité. Si la distance inférieure a été trouvée plus grande, il faudra baisser l'axe de la moitié de la différence.

Si elle a paru plus petite, il faudra le hausser de même.

Nous verrons plus loin, que ce procédé donnerait l'angle LP*p* trop fort d'une minute environ; cette erreur ne sera pas d'une grande importance pour l'usage de l'instrument. Il est au moins inutile de la corriger; mais pour qu'elle soit la plus petite possible, on choisira l'étoile polaire, c'est-à-dire, l'étoile de seconde grandeur qui est la plus voisine du pôle.

95. Cette vérification est indépendante du premier point de

la division du cercle de déclinaison, puisque nous n'avons fait aucun usage des distances marquées sur le cercle, et que les deux distances dont nous avons pris la différence, sont comptées du même point de zéro et sur le même arc du limbe.

Pour vérifier le zéro quand l'axe sera rectifié, nous mesurerons la distance polaire absolue dans les deux passages, la moitié de la différence serait l'erreur de collimation ou du point zéro. On la corrigerait comme celle du quart de cercle, en faisant mouvoir le réticule de la lunette.

96. Enfin, nous avons supposé que PLR est bien dans le plan du méridien. Pour nous en assurer, mesurons la distance polaire 6^h avant et 6^h après le passage. Si les deux distances sont égales, la machine est dans le plan du méridien. Si elles sont inégales, la demi-somme sera la véritable distance. Mettez la lunette à cette distance, puis sans donner aucun mouvement au point P, poussez le montant LR horizontalement de la quantité nécessaire pour que l'étoile soit sous le fil. Au lieu de pousser ainsi l'instrument, ce qui est assez difficile, faites usage de deux vis horizontales, entre lesquelles tournera l'axe *p*; en tournant l'une et détournant l'autre, vous pousserez l'axe vers le point où vous avez trouvé la distance polaire plus grande, vous le ferez avancer de la demi-différence trouvée, et l'axe sera dans le méridien.

Cette vérification n'est pas sujette à la même erreur que celle de la hauteur du pôle ou de l'angle LP*p*.

La hauteur se corrige facilement au moyen de deux autres vis, entre lesquelles tourne pareillement l'axe P*p*; mais les vis sont verticales, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe.

Quand la machine sera dans le plan du méridien, si nous observons l'heure du passage supérieur, et celle du passage inférieur à la pendule sidérale, nous trouverons que l'intervalle est exactement de 12 heures. S'il s'en fallait de quelques secondes, ce serait une preuve que la machine n'est pas encore parfaitement dans le méridien, mais il s'en faudrait de bien peu, et nous verrons plus loin l'usage qu'on pourrait faire des observations pour corriger tout-à-fait l'erreur.

97. Ptolémée en nous donnant la description succincte de cette machine à laquelle les modernes ont ajouté tout ce qui lui donne de la précision, comme la lunette, le micromètre, le niveau à bulle, ne rapporte aucune observation, n'indique presque aucun des usages; c'est peut-être, comme pour son quart-de-cercle, une idée qui n'avait pas été mise en pratique. Presque toutes les observations qui nous restent de l'école d'Alexandrie, ont été faites à un instrument qui n'était rien que la sphère armillaire.

98. La sphère armillaire est trop connue pour que nous en donnions ici une description; nous dirons seulement en quoi elle diffère des armilles d'Alexandrie.

On en avait d'abord supprimé le pied et l'horizon, qui n'aurait fait que gêner les observateurs. On n'avait conservé de l'axe que les parties voisines des pôles qui servaient à joindre les différens cercles de l'instrument. Ces deux parties de l'axe, prolongées hors de la sphère, servaient encore à la placer exactement dans le méridien et à la hauteur convenable, comme nous avons dit à l'article de l'équatorial.

Les armilles avaient, comme la sphère céleste, deux colures ou cercles horaires qui se coupaient à angles droits. Ce nom de *colure*, qui signifie *tronqué*, leur venait de ce qu'une partie de ces cercles est toujours au-dessous de l'horizon, malgré le mouvement continuel de la sphère, qui fait monter successivement toutes les parties des grands cercles, tels que l'équateur et l'écliptique. Ces cercles d'ailleurs ne servaient guères que d'assemblage.

99. L'équateur coupait les colures à 90° des pôles; il servait à observer l'équinoxe. En effet, quand le soleil est dans le plan de l'équateur, quand la trace de l'ombre sur nos cadrans est une ligne droite, la partie extérieure et convexe de ce cercle couvrait entièrement de son ombre la partie concave opposée; mais à cause du diamètre du soleil, qui est de plus de $\frac{1}{2}$ degré, l'ombre des corps opaques est toujours un peu plus étroite que les corps mêmes; ainsi l'ombre de la partie convexe n'avait pas tout-à-fait une largeur égale à l'épaisseur du cercle; elle

était bordée de deux filets étroits de lumière, et quand ces filets étaient de largeur bien égale, on jugeait que le centre du soleil était dans le plan de l'équateur. C'était l'instant de l'équinoxe. Mais il eût fallu pour cela que l'équateur de la machine fût bien parallèle à l'équateur céleste et terrestre; et les astronomes d'Alexandrie paraissent n'avoir jamais connu à 15′ près la hauteur de l'équateur.

La réfraction dont nous parlerons ci-après, qui élève inégalement le soleil aux différentes heures du jour, troublait un peu l'observation, et il est arrivé plusieurs fois qu'on a eu deux observations de l'équinoxe à cinq ou six heures de distance, ce qui avait droit d'inquiéter Hipparque et Ptolémée qui ne savaient trop comment expliquer ce phénomène.

100. L'équateur aurait pu servir encore à trouver le tems sidéral et solaire, mais on n'en voit aucune trace bien précise dans Ptolémée. On y entrevoit seulement, qu'il pouvait servir à marquer les passages des astres au méridien. Ptolémée n'explique en aucun endroit comment il déterminait l'heure d'un phénomène.

101. L'écliptique des armilles faisait un angle de 23° 51′ avec l'équateur. L'intersection des deux cercles était à l'un des colures qui s'appelle, pour cette raison, *colure des équinoxes*. Les plus grandes déclinaisons avaient lieu dans l'autre colure qui s'appelait *colure des solstices*.

L'écliptique était divisée en ses 360°. On tournait vers le soleil le point qui marquait ce jour-là la longitude : alors la partie convexe et antérieure de l'écliptique devait ombrager la partie concave opposée. La sphère armillaire était posée comme la sphère céleste; on pouvait lire sur l'équateur et l'écliptique les points qui étaient alors au méridien.

A l'endroit qui répondait au soleil on plaçait une pinnule mobile, une autre pinnule au point opposé, et l'on faisait ainsi suivre à la machine le mouvement du soleil; dès qu'on appercevait la lune, on prenait sa distance au soleil le long de l'écliptique; et quand le soleil venait à se coucher, on se servait de la lune pour régler le mouvement de la machine. On

prenait le long de l'écliptique la distance de la lune à une planète ou à une étoile, et l'on connaissait la longitude de cet astre; le soleil et surtout la lune avait dans l'intervalle des observations un mouvement dont on tenait compte, en calculant la longitude de l'astre; c'est-à-dire le point de l'écliptique où il répondait alors perpendiculairement.

102. Pour mesurer la distance de la lune, ou de la planète à l'écliptique, on avait un cercle mobile qui tournait à volonté autour des pôles de l'écliptique placés à 23° 51′ des pôles de l'équateur; on amenait le cercle de latitude dans la direction de l'astre, on y plaçait des pinnules mobiles, semblables à celles dont on se servait pour le soleil, à travers ou le long desquelles on pouvait viser à l'étoile. Le cercle de latitude, par son intersection avec l'écliptique, indiquait la longitude, et l'arc compris entre la pinnule et l'écliptique était la latitude de l'astre. Ce cercle mobile ressemblait beaucoup à celui qui porte le soleil dans les sphères armillaires modernes. Il servait à déterminer la position des étoiles.

103. Par ce moyen les Grecs, sans presque aucun calcul, pouvaient tout rapporter à l'écliptique. Il paraît qu'ils connaissaient assez bien l'obliquité, mais si leur équateur était mal placé, l'écliptique ne pouvait être bien, et il devait y avoir des erreurs, surtout en latitude.

104. Outre les armilles dont ils se servaient pour les observations, ils avaient aussi un globe qui servait à préparer ces observations, ou rendre sensibles les différentes circonstances du mouvement diurne. Voici la construction de ce globe et la manière d'y placer les étoiles dans leurs positions respectives.

105. Formez un globe au tour. Les deux pointes du tour marqueront à la surface deux points diamétralement opposés dont vous ferez les deux pôles; de l'un de ces deux pôles, avec une ouverture de compas égale à la corde de 90°, vous décrirez un grand cercle qui sera l'équateur; vous diviserez ce cercle en 360° et en 24 heures; avec les cordes de 80°, 70°, etc.,

vous tracerez les parallèles de 10 en 10°, ou plus serrés si vous voulez. Par les deux pôles et tous les points de division de l'équateur, faites passer des grands cercles qui seront des cercles de déclinaison, ou cercles horaires; ils auront tous leurs pôles dans l'équateur et à 90° du point où ils traversent l'équateur. Aux deux pôles placez deux pointes autour desquelles vous ferez tourner un grand cercle dont la circonférence intérieure embrassera exactement votre globe, ce cercle sera le méridien de la machine; vous le diviserez en quatre fois 90°, à partir soit de l'équateur, soit des pôles, à votre volonté.

106. Placez ce cercle ainsi préparé dans les deux échancrures d'un cercle également divisé qui représentera l'horizon. Au moyen d'un fil placé dans le méridien, orientez votre machine, de manière que les points est, sud, ouest et nord de l'horizon artificiel répondent aux quatre points cardinaux du monde, élevez le pôle de la machine sur son horizon, du même nombre de degrés que le pôle du monde est plus élevé que l'horizon du lieu. Votre globe ainsi placé sera concentrique à la sphère céleste, et l'axe du globe parallèle à l'axe du monde se dirigera aux deux pôles de la rotation diurne.

107. Tout étant ainsi disposé, attendez qu'une belle étoile paraisse à l'horizon oriental (ou occidental.) Voyez sur l'horizon (I. 10) à quelle amplitude elle répond. Supposons 10° vers le nord, prenez sur l'horizon du globe une amplitude pareille, et sur le point du globe qui répond à cette amplitude, faites une marque qui représentera votre étoile.

Quatre minutes plus tard, je suppose que vous voyiez lever une autre étoile à 15° d'amplitude est-sud, faites tourner le globe d'un degré juste; c'est-à-dire, faites passer par l'horizon, un degré entier de l'équateur, à partir du point qui était à l'horizon, quand la première étoile s'est levée, le globe aura suivi la sphère céleste; il aura la position convenable pour marquer la place de la seconde étoile.

Une heure après une autre étoile se lève à 25° d'amplitude

sud ; je fais passer par l'horizon 15° depuis la première étoile ; et je marque la place de la troisième et ainsi de suite.

L'une quelconque des étoiles observées ainsi dans une même nuit, pourra servir à placer de la même manière une étoile quelconque observée dans une autre nuit. Ainsi, en moins d'un an on pourra placer sur le globe toutes les étoiles qui se lèvent et se couchent sur l'horizon du lieu.

108. Quand vous aurez observé le lever d'une étoile vers le matin, attendez que le soleil soit à l'horizon, vous le placerez de même sur la sphère étoilée.

Marquez ainsi la place du soleil tous les jours de l'année où le lever sera visible, vous aurez la trace du soleil dans la sphère des fixes, vous verrez qu'elle est un grand cercle de la sphère, que ce cercle est incliné d'environ 23°$\frac{1}{2}$ à l'équateur. Vous aurez même le mouvement vrai, et vous vous appercevrez que le mouvement du soleil sur son cercle n'est pas tout-à-fait uniforme.

109. L'écliptique sera donc tracée sur votre globe, et même divisée en jours ; vous aurez le jour, et le lieu des solstices et des équinoxes. Ces derniers seront à la fois dans l'écliptique et dans l'équateur.

On trouvera convenable de prendre pour point de départ l'un de ces équinoxes, celui du printems, par exemple ; on y mettra le zéro de la division, tant pour l'équateur que pour l'écliptique ; et c'est ainsi qu'en ont usé les Grecs.

Ce changement dans la division ne fait absolument rien aux positions des étoiles qui resteront toujours à leurs places respectives, qui seront toujours à la même distance de l'équateur et répondront toujours perpendiculairement au même point physique de ce cercle. Seulement ce point aura changé de numéro, et tous les autres devront subir un pareil changement.

110. Les constellations que traverse l'écliptique s'appellent *zodiacales*. Le *zodiaque*, ou zône des *animaux*, s'étend à 8 ou 10° au nord et au sud de l'écliptique.

111. Il est à remarquer que les figures formées sur le globe par les groupes d'étoiles, s'y présenteront d'une manière renversée, ensorte que ce qui sur le globe paraîtra à droite, sera vu dans le ciel à la gauche; c'est que nous voyons le ciel du centre et sur la surface concave, au lieu que nous sommes placés en dehors du globe. Mais si l'on calque d'après le globe et sur un papier transparent, les groupes remarquables d'étoiles, en retournant le papier, on verra sur la carte les groupes tels qu'ils paraissent dans le ciel. On aura ainsi des cartes des diverses *constellations*. On appelle ainsi des amas d'étoiles autour desquelles on dessine une figure dont les différentes parties servent à désigner les différentes étoiles du groupe, sans avoir besoin de leur imposer à chacune des noms particuliers. Il restera des lacunes à remplir.

112. Les étoiles situées vers les deux pôles, échapperont à cette méthode, qui est probablement celle des premiers auteurs des anciens zodiaques et des principales constellations. Mais on a pu les placer à vue et relativement aux étoiles voisines qui se lèvent et se couchent. Ptolémée, pour les placer sur son globe, employait, comme pour toutes les autres étoiles, les différences de longitude et de latitude observées aux armilles (102). Il avait pris Sirius pour point de départ.

113. Voilà tout ce qu'on sait des globes, des armilles des Grecs. Ce dernier instrument est trop peu sûr, il est abandonné depuis long-tems; les modernes, dans leurs observations, rapportent tout à l'équateur, sauf à réduire à l'écliptique, par le calcul, tous les mouvemens dont l'écliptique est la mesure la plus naturelle.

114. Aujourd'hui l'observation d'un astre se compose de deux observations partielles. L'une consiste à prendre la distance méridienne au zénit; on y ajoute la distance du pôle au zénit, et l'on a la distance polaire de l'astre, s'il a été observé entre le zénit et le point sud de l'horizon. S'il a été observé entre le zénit et le point nord, on retranche la distance zénitale de la distance du pôle au zénit, pour avoir la distance

polaire; enfin, si l'astre a été observé dans son passage inférieur, on retranche la distance du pôle au zénit, de la distance zénitale observée; le reste est la distance polaire. Cette observation était facile à imaginer et à exécuter, puisque l'on part de deux points bien fixes, dont l'un peut se trouver à tout moment et l'autre chaque jour, ainsi que nous le dirons, et que l'indique l'article 94.

115. La seconde observation consiste à observer combien d'heures, de minutes et de secondes la pendule a marqué entre le passage du point équinoxial de l'écliptique et de l'équateur, et le passage de l'astre; on en conclut le point de l'équateur qui passe au méridien avec l'astre; c'est ce qu'on appelle *ascension droite*. Nous en donnerons la raison.

116. Le complément de la distance polaire est la déclinaison, ou la distance à l'équateur; quand on connaît à quel point de l'équateur un astre répond, et à quelle distance il est de l'équateur, sa position est entièrement déterminée.

117. Ces deux observations peuvent se faire au même instrument, au cercle ou quart de cercle établi solidement dans le plan du méridien. Mais pour avoir toute la précision qu'on exige aujourd'hui, il faudrait que le limbe fût rigoureusement dans un même plan, ce à quoi l'on n'a pu encore parvenir jusqu'ici; par le défaut du plan, un passage ainsi observé pourrait différer de 6 à 8″ du passage au méridien. L'inconvénient est nul pour les distances au zénit, qui ne changent plus à cette proximité du méridien; il serait d'une fâcheuse conséquence pour le tems absolu des observations, et surtout pour les différences de passage, parce que l'erreur du plan change presqu'à chaque degré de hauteur, et qu'ainsi l'on pourrait avoir 12 à 16″ d'erreur sur les différences de passages.

118. Pour remédier à cet inconvénient, Roëmer, astronome danois, vers le commencement du 18e siècle, imagina l'instrument qu'on nomme *des passages*, ou *lunette méridienne*.

Cette lunette est enchâssée dans un axe composé d'un cube creux qu'elle traverse; à ce cube sont attachés deux cônes

égaux terminés chacun par un cylindre qu'on nomme *tourillon;* l'un des tourillons est creux, pour laisser passer la lumière d'une bougie qui, réfléchie par un miroir incliné de 45° à l'une des parois du tube, est renvoyée parallèlement à l'axe du tube, pour éclairer l'intérieur de la lunette et rendre visibles les fils du réticule placé au foyer.

Ce réticule est composé de cinq fils verticaux également espacés et traversés par un fil horizontal.

On pose les tourillons dans deux supports ou coussinets formés l'un et l'autre de deux plans inclinés que le cylindre ne touche que suivant deux lignes, pour éviter trop de frottement. L'un de ces supports peut s'élever ou s'abaisser de quelques millimètres, pour amener l'axe de rotation à une position horizontale, qu'on vérifie au moyen d'un niveau soit à fil, soit à bulle.

L'autre tourillon peut être poussé en avant ou en arrière, dans une direction parallèle à la méridienne, afin de pouvoir amener la lunette dans le plan du méridien.

A l'un des bouts de l'axe est attachée une alidade qui, tournant avec lui, indique sur un demi-cercle vertical dont le centre est dans le tourillon, l'inclinaison qu'on donne à la lunette quand on la fait mouvoir dans le plan du méridien; en effet, quand l'axe de rotation est bien horizontal, la lunette qui est perpendiculaire à cet axe, ne peut tourner que dans le plan d'un vertical.

119. Vous reconnaîtrez que l'axe optique est perpendiculaire à l'axe de rotation, si une mire horizontale que vous aurez placée dans la direction de la lunette, ensorte qu'elle soit coupée par le fil vertical du milieu, se retrouve sous le même fil quand vous aurez retourné la lunette bout pour bout, c'est-à-dire, que vous aurez placé le tourillon qui est à votre gauche sur le support ou coussinet de la droite, et réciproquement.

Si le fil s'est écarté de la mire, le chemin qu'il aura fait sera le double de l'inclinaison de l'axe optique sur l'axe horizontal. Vous ferez rétrograder le fil de la moitié de cette

inclinaison; en tournant la vis du réticule au moyen d'une clef qui ressemble à celle d'une montre. Remarquez le point que couvre le fil après cette correction; et pour voir si vous avez bien corrigé l'erreur, retournez la lunette ensorte qu'elle se retrouve dans sa première position; alors si le fil couvre le même point qu'il couvrait avant le second retournement, l'axe est perpendiculaire; s'il reste une erreur, elle sera bien moindre; corrigez-en la moitié de la même manière et vérifiez de même en tournant encore la lunette, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, dans deux positions consécutives, le fil couvre exactement le même point de la mire horizontale. On réitère cette vérification de tems à autre, pour s'assurer que la position de l'axe optique ne change pas. Avant chaque observation, on examine si l'axe de rotation est bien horizontal, ce qui se voit par le niveau.

120. Voici la manière de faire cette épreuve: accrochez le niveau à l'axe et remarquez à quel point de l'échelle répond une des extrémités de la bulle; retournez le niveau, c'est-à-dire, accrochez à gauche le crochet qui était à droite, et réciproquement; si le même bout de la bulle répond encore au même point, l'axe est horizontal; s'il y a une différence, corrigez-en la moitié au moyen de la vis verticale du coussinet, et l'axe sera horizontal; il ne s'agira plus que de savoir s'il est dans le méridien.

Pour cela, observez le passage d'une étoile circompolaire; 12 heures après, observez la même étoile à son passage inférieur, si le premier était supérieur, ou réciproquement.

Si l'intervalle est juste de 12 heures sidérales, la lunette est dans le méridien.

Si l'intervalle est moindre que de 12 heures, la lunette dévie du nord à l'ouest, si l'étoile a parcouru son demi-cercle occidental; elle dévie du nord à l'est, si l'étoile a décrit son demi-cercle oriental.

Tournez la vis horizontale de l'un des coussinets, et répétez l'observation et la correction, au moyen de la vis, jusqu'à ce que l'intervalle soit exactement de 12 heures.

121. Tels sont les instrumens principaux de l'Astronomie moderne. La lunette méridienne sert à observer avec une précision presqu'incroyable, les passages au méridien; le cercle ou le quart de cercle, à mesurer avec une exactitude pareille les distances au zénit; l'équatorial, moins susceptible de précision, sert pour les astres qu'il est impossible de voir au méridien, parce qu'ils y passent de jour et qu'ils ont trop peu de lumière.

A défaut d'équatorial, on emploie au même usage une simple lunette garnie d'un réticule; on place la lunette dans une position invariable, et on attend que l'astre que l'on veut observer traverse la lunette, peu de tems après ou avant un astre connu. Le réticule sert à mesurer les différences de passage et de distance polaire entre l'astre inconnu et l'étoile dont on connaît la position; on en conclut la position de l'astre.

122. Les réticules sont de plusieurs espèces; nous avons déjà décrit le réticule le plus ordinaire, connu sous le nom de *micromètre;* on place l'un des fils parallèlement à l'équateur, ce qu'on reconnaît à ce que l'étoile, dans son mouvement à travers le champ de la lunette, ne cesse pas un instant d'être coupée en deux par le fil équatorial; alors le fil perpendiculaire est placé dans le plan d'un cercle horaire, c'est-à-dire, d'un cercle qui se dirige au pôle du monde. La différence des passages entre les deux astres est leur différence d'ascension droite, ou l'angle au pôle entre leurs cercles de déclinaison. On mesure la différence de déclinaison en menant le curseur sur l'astre inconnu, à l'instant où il est prêt à traverser le fil horaire. Le cadran du micromètre indique alors la différence de déclinaison, et l'observation est complète.

123. Le plus simple des réticules, si on peut lui donner ce nom, est le *micromètre circulaire;* il est composé d'un cercle peu épais de métal (fig. 27). On observe les instans où les deux astres que l'on veut comparer entrent dans le cercle, et les instans où ils en sortent. Les deux astres décrivent des cordes différentes; l'instant qui tient le milieu entre l'entrée

et la sortie, est celui où l'astre était sur le milieu de la corde, et par conséquent dans le cercle horaire ; car ces cercles sont tous perpendiculaires à l'équateur et à ses parallèles ; la différence entre les deux demi-sommes des tems d'entrée et de sortie, est donc la différence d'ascension droite. Quant à la différence de déclinaison, on l'obtient d'une manière fort simple. On détermine le diamètre du micromètre circulaire, en observant combien de tems une étoile équatoriale emploie à le traverser ; la moitié de ce tems est le tems du rayon du cercle.

124. Le tems de la demi-corde de l'astre, divisé par celui du rayon, est le sinus d'un angle, et le rayon, multiplié par le cosinus du même angle, est la différence de déclinaison entre le centre du micromètre et l'astre. Par l'étoile connue on a la déclinaison du centre ; par l'astre inconnu on a la différence entre cet astre et le centre, et par conséquent la déclinaison de l'astre.

125. Il faut une attention de plus quand l'astre a une déclinaison qui surpasse 1° ; le tems de la corde est alors plus grand que si l'étoile était dans l'équateur ; il faut le multiplier par le sinus de la distance polaire, avant de le diviser par le tems du rayon ; après cela, l'opération s'achève de même.

La raison de cette différence est sensible. Quand le micromètre est dirigé à l'équateur, la corde du micromètre couvre la corde de l'équateur, c'est-à-dire, d'un grand cercle ; quand elle est dirigée à 60° de l'équateur, elle couvre une corde d'un petit cercle qui est à 30° du pôle ; ce petit cercle est la moitié du cercle de l'équateur, car il est proportionnel à son sinus, qui est $\frac{1}{2}$; mais la corde du micromètre n'a pas changé de longueur, elle couvre une corde d'un nombre double de degrés ; puisque les degrés sont tous doubles, l'étoile doit employer un tems double à décrire la corde ; mais en la multipliant par le sinus $= \frac{1}{2}$, ce tems double se réduit à ce qu'il aurait été sur l'équateur : ce que nous disons du cercle dont la distance est de 30°, nous le dirons de tout autre ;

toujours il faudra multiplier le tems observé par le sinus de la distance polaire, pour avoir le tems qu'emploierait une étoile équatoriale; et si l'on connaît le tems d'une corde pour l'équateur, il faudra diviser ce tems par le sinus de la distance polaire, pour avoir le tems qu'une étoile quelconque mettra à traverser cette corde.

126. Le même raisonnement s'applique à l'intervalle de deux fils verticaux d'une lunette quelconque. Soit I cet intervalle en tems sur l'équateur; il sera $\frac{I}{\sin \Delta}$ pour une distance quelconque Δ au pôle.

Cette formule sert à calculer une table des intervalles des fils pour toutes les distances polaires; cette table sert à réduire au fil du milieu une observation faite à l'un des fils latéraux d'une lunette. Quand on a ainsi réduit toutes les observations d'un même astre, on prend le milieu entre toutes, et l'on a plus de certitude que si l'on s'était contenté d'un seul fil; car il est probable que toutes les erreurs des observations ne seront pas dans le même sens, que si l'une a été marquée trop tard de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de seconde, une autre a été marquée trop tôt, il s'établira presque nécessairement une compensation plus ou moins parfaite, et au lieu d'une erreur de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$, on aura $\frac{1}{5}$ (de la somme des erreurs) si l'on a observé à cinq fils.

Si les quatre intervalles des cinq fils sont absolument égaux, on prend tout simplement le cinquième de la somme des cinq observations.

127. Après ce micromètre, le plus simple de tous est le réticule de Cassini ou de 45° (fig. 28). Partagez le cercle en huit parties égales, par quatre diamètres qui se coupent au centre, et le réticule sera construit. En voici l'usage. Faites que l'étoile décrive l'un des diamètres par son mouvement diurne, et notez l'instant où elle passe au centre sur le fil horaire du milieu. La déclinaison de l'étoile sera aussi celle du centre de la lunette. Peu après ou avant, un astre inconnu traverse le réticule parallèlement au fil équatorial; son

passage au fil horaire du milieu, comparé à celui de l'étoile, vous donne en tems la différence d'ascension droite ; le tems que l'étoile met à passer de l'un des fils obliques au fil du milieu, ou du fil du milieu au fil oblique suivant, multiplié par $15 \sin \Delta$, vous donnera l'arc de l'équateur qui répond à la demi-corde décrite, et cette demi-corde est la différence de déclinaison; car la demi-corde, le fil oblique et le fil horaire forment un triangle rectangle qui a un angle de 45°, l'autre angle est donc de 45° pareillement; donc la demi-somme est égale à la distance au centre ou à la différence de déclinaison; ainsi (fig. 28) la demi-corde $em = Km$ distance au centre. L'inconvénient de ce réticule est que les deux segmens EAF, HBG deviennent inutiles, ce qui diminue le champ de la lunette.

128. Le réticule le plus en usage est celui qu'on appelle *rhomboïde*. Soit (fig. 29) un carré RSTV partagé en quatre carrés égaux par les fils AE, ZX; des points A et E menez les fils obliques AV, AT, ER, ES aux quatre angles. Du centre C avec le rayon CA décrivez un cercle AXEZ qui représente le champ de la lunette. Aucun astre ne peut traverser la lunette parallèlement à ZX, sans passer au moins par deux fils obliques et par le fil horaire AE, la différence des passages au fil horaire donne la différence des ascensions droites. Par la construction, la demi-diagonale AC est égale à la diagonale BD. Toute droite parallèle à BD, et comprise dans ce rhombe ABED, est égale à sa distance à l'un des sommets, ou à la différence de déclinaison entre le sommet du réticule et l'astre qui le traverse parallèlement au fil BD.

Toute parallèle à BD comprise dans l'un des triangles latéraux ABS, TBE, EDV, AER est égale à sa distance à l'un des sommets B ou D, et par conséquent donnera la différence de déclinaison entre l'astre et le centre de la lunette.

129. On fait décrire à un astre connu la diagonale BD; la déclinaison du centre de la lunette sera celle de cet astre. On déterminera CA par le tems qu'une étoile équatoriale emploie à décrire BD = CA, on aura donc la déclinaison des sommets

sommets A et E du réticule. Soit à présent t le tems qu'un astre inconnu emploie à traverser l'un des huit angles du réticule; $15t \sin\Delta$ sera la différence de declinaison entre l'astre qu'on observe et l'un des points A, C, E de la lunette.

Pour placer le réticule parallèlement à l'équateur et au mouvement diurne, vers le sommet A est un arc de roue dentée dans laquelle engrène une vis sans fin que l'on tourne jusqu'à ce qu'une étoile entrée en B parcoure, sans le quitter, le fil BDZ. Ce réticule est celui de Bradley.

130. On peut remplir d'une lame métallique le triangle RQZ. Si l'étoile ne reparaît plus après son passage au dernier fil, on en conclut qu'elle a passé dans la partie AZX; si elle reparaît, c'est qu'elle a passé dans la partie ZEX. Par ce moyen et en donnant une certaine épaisseur aux fils obliques, l'étoile est cachée instantanément par chacun des fils, quand elle vient à les traverser, et l'on est dispensé d'éclairer l'intérieur de la lunette, ce qui facilite l'observation des astres faibles de lumière.

On peut changer le rapport des deux diagonales BD et AC; faites que $BD = \frac{1}{2}AC$, ou $\frac{1}{3}AC$, ou $\frac{1}{n}AC$, et alors la différence de déclinaison sera $15nt \sin\Delta$. Cette construction a son avantage quand les étoiles qu'on observe sont voisines du pôle et qu'elles sont long-tems à traverser le réticule. Mais on a rarement occasion d'observer auprès du pôle; on doit éviter d'observer trop près de l'horizon, où la réfraction et la parallaxe, dont nous parlerons bientôt, peuvent altérer le mouvement de l'astre, qui cesse alors de marcher parallèlement à l'équateur; d'où il résulte que les différences de passage au fil AE ne donnent plus assez exactement les différences d'ascension droite ni celles de déclinaison; on a des formules de correction, mais il vaut mieux n'y pas recourir quand on le peut; j'ai donné ces formules et celles qui dispensent l'observateur de placer exactement son réticule parallèlement à l'équateur.

131. Il nous reste à parler du micromètre objectif ou de l'héliomètre.

Imaginez un objectif coupé en deux suivant un de ses diamètres. Si vous placez ces deux moitiés l'une à côté de l'autre, elles feront le même effet qu'un objectif entier. Mais si vous faites glisser l'une des moitiés sur l'autre (fig. 30), ensorte que les deux centres soient écartés, vous aurez deux images distinctes et d'autant plus séparées, que vous aurez plus écarté les deux centres.

132. Supposons que vous observiez le soleil, tant que les deux objectifs seront ensemble vous verrez les deux images du soleil se confondre exactement; tournez les vis de renvoi qui donnent le mouvement à l'un des objectifs, vous verrez les deux images s'écarter graduellement; continuez le mouvement jusqu'à ce que le bord oriental d'une image devienne tangent au bord occidental de l'autre image, la distance des centres sera égale au diamètre du soleil; regardez alors sur une règle de cuivre qui borde les deux objectifs, et sur laquelle l'un des deux glisse, de combien de parties il aura avancé; vous connaîtrez le rapport des parties de votre vernier au diamètre du soleil, et si vous connaissez le diamètre du soleil en minutes et secondes, vous saurez en minutes et secondes la valeur des parties de votre micromètre; vous en calculerez une table qui vous servira à calculer les différentes parties du disque, et par exemple à quelle distance du bord se trouve une de ces taches qu'on voit souvent sur le disque du soleil, et en tout tems sur celui de la lune.

133. Supposons que vous observiez deux étoiles voisines et dont vous connaissiez la distance: vous verrez quatre étoiles au lieu de deux; faites mouvoir l'un des objectifs jusqu'à ce que vous ne voyez plus que trois images, les centres de vos objectifs seront éloignés de la distance qui est entre les deux étoiles; si vous connaissez cette distance, vous aurez la valeur des parties du micromètre; si vous connaissez cette valeur, vous en conclurez la distance des deux étoiles.

134. Quand les deux objectifs sont joints, vous voyez les

deux étoiles, l'une en a et l'autre en b. Faites mouvoir l'objectif, vous verrez quatre étoiles; mais quand l'étoile a coïncidera avec b dans les deux objectifs, l'autre étoile paraîtra en b' dans l'objectif mobile. Il est clair que le chemin cc' du centre est égal à ab.

Nous avons supposé que le diamètre commun est horizontal; mais on peut à volonté lui donner toutes sortes d'inclinaisons, et pour mesurer une distance on amène les deux points qu'on veut observer sur le diamètre commun, et aussitôt après on fait mouvoir l'un des objectifs.

LEÇON IV.

Trigonométrie sphérique.

1. Nous ignorons les distances des étoiles à la terre, nous n'avons aucun moyen pour déterminer si ces distances sont inégales; nous les supposons égales; les étoiles sont pour nous comme si elles étaient placées à la surface concave d'une sphère dont notre œil occupe le centre, nous ne pouvons prendre que des distances angulaires, c'est-à-dire mesurer que l'angle formé dans notre œil par les rayons visuels menés à deux astres différens; ces angles ont pour mesure des arcs de la sphère étoilée. Les distances réciproques entre trois points de cette surface, ou trois étoiles, forment un triangle qu'on appelle *sphérique*, parce qu'il est formé de trois arcs de grands cercles d'une même sphère. Toutes les étoiles prises deux à deux, nous paraissent dans un même plan qui passe par notre œil et par les deux étoiles; or un plan qui coupe une sphère et qui passe par le centre, la coupe selon un arc de grand cercle; nous ne pouvons donc observer que des arcs de grand cercle. Les trois arcs connus, on peut avoir besoin de connaître les angles du triangle. Mais qu'est-ce qu'un angle sphérique? Pour le comprendre, imaginons un demi-cercle PAP′ (fig. 31), et de tous les points

A, B, D, E, etc. de la demi-circonférence imaginons les perpendiculaires AC, BF, DG, EH qui seront les sinus des distances PA, PB, PD, PE, etc.

2. Imaginons que le cercle vienne à tourner autour du diamètre PP′ qui prend le nom d'axe, le rayon AC décrira une circonférence égale à celle dont PAP′ fait partie, car elle aura le même rayon; AC décrira un grand cercle, BF décrira un cercle plus petit, GD un plus petit encore et ainsi de suite, puisque les rayons iront toujours en diminuant.

Le demi-cercle dans sa révolution autour de l'axe, décrira une surface sphérique; tous les cercles grands et petits dont nous venons de parler seront décrits simultanément; quand le mouvement de AC aura produit $\frac{1}{4}$ de circonférence, le mouvement de FB ou de tout autre sinus aura de même décrit le quart du cercle dont il est le rayon; ce que je dis du $\frac{1}{4}$, je le dirai de toute autre fraction; tous les arcs décrits simultanément seront d'un même nombre de degrés; ils seront la mesure du mouvement de AC, DF, etc. et du plan PAP′. Ils exprimeront l'angle que fera la nouvelle position du demi-cercle avec la position primitive; ils exprimeront l'inclinaison respective des deux plans.

L'inclinaison de deux plans est donc l'angle que forment deux perpendiculaires abaissées dans les deux plans sur un même point de l'intersection commune, ce sont les angles des deux rayons CA et CA′, FB et FB′ ou des deux tangentes PT et P′T′, car tous ces angles sont égaux, l'angle plan de deux cercles est donc l'angle des deux tangentes menées par le point d'intersection. Dans un espace très-petit, les tangentes se confondent avec les arcs, l'angle de deux arcs est donc le même que celui de leurs tangentes.

3. Les problèmes d'astronomie dépendent le plus souvent de la solution des triangles sphériques. Supposons pour exemple, qu'on ait mesuré la distance zénitale ZA d'une étoile (fig. 32), que C soit le centre de la sphère céleste et du cercle azimutal ou de l'horizon astronomique, ZCA sera le cercle vertical de l'étoile, et le point *a* en déterminera l'azimut.

Par le mouvement diurne au bout de quelques heures, l'astre sera parvenu en B; je suppose qu'on ait mesuré la distance ZB et marqué son azimut b, on connaîtra l'arc ab qui est la différence azimutale.

4. Par les points A, B, imaginez un arc de grand cercle AB, vous aurez un triangle sphérique ZAB, dans lequel vous connaîtrez ZA, ZB, et l'angle compris AZB $= ab$; on peut avoir besoin de connaître AB et les angles A et B; menez les rayons CA et CB prolongés indefiniment; par le point Z imaginez les tangentes ZQ, ZP et la droite PQ qui joint les deux tangentes ZQ, ZP et les deux sécantes CQ, CP.

Le triangle PCQ donnera

$$\overline{PQ}^2 = \overline{ZP}^2 + \overline{ZQ}^2 - 2ZP.\,ZQ \cos Z = \text{tang}^2\, ZA + \text{tang}^2\, ZB - 2\,\text{tang}\, ZA\, \text{tang}\, ZB \cos Z.$$

Le triangle PCQ donnera de meme

$$\overline{PQ}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2CP.\,CQ \cos PCQ = \text{séc}^2\, ZA + \text{séc}^2\, ZB - 2\,\text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB \cos AB,$$

car AB est la mesure de l'angle PCQ. Retranchez la première de ces équations de la seconde

$$0 = \text{séc}^2\, ZA - \text{tang}^2\, ZA + \text{séc}^2\, ZB - \text{tang}^2\, ZB - 2\text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB \cos AB + 2\,\text{tang}\, ZA\, \text{tang}\, ZB \cos Z,$$

$$0 = 1 + 1 - 2\,\text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB \cos AB + 2\,\text{tang}\, ZA\, \text{tang}\, ZB \cos Z,$$

$$0 = 1 - \text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB \cos AB + \text{tang}\, ZA\, \text{tang}\, ZB \cos Z,$$

ou $\text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB \cos AB = \text{tang}\, ZA\, \text{tang}\, ZB \cos Z + 1$

divisez tout par $\text{séc}\, ZA\, \text{séc}\, ZB = \dfrac{1}{\cos ZA \cos ZB}$,

il viendra

$$\cos AB = \sin ZA \sin ZB \cos Z + \cos ZA \cos ZB.$$

5. Ce théorème renferme toute la trigonométrie sphérique; deux côtés et l'angle compris déterminent le triangle tout entier; car il est évident que par les points A et B et le point

C, on ne peut mener qu'un seul plan et qu'un seul grand cercle. Pour rendre ce théorème plus général, exprimons les trois angles par les lettres A, A′, A″, les trois côtés opposés par les lettres C, C′, C″, nous aurons successivement

$$\cos C'' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C',$$
$$\cos C = \cos A \sin C' \sin C'' + \cos C' \cos C'',$$
$$\cos C' = \cos A' \sin C'' \sin C' + \cos C'' \cos C.$$

6. Supposons que $C = C'$, c'est-à-dire, que le triangle soit isoscèle, notre équation sera

$$\cos C'' = \cos A'' \sin^2 C + \cos^2 C = \cos^2 C + \sin^2 C - 2\sin^2 C \sin^2 \tfrac{1}{2} A''$$
$$= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} C'' = 1 - 2\sin^2 C \sin^2 \tfrac{1}{2} A'',$$

et

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C'' = \sin^2 C \sin^2 \tfrac{1}{2} A'',$$

ou

$$\sin \tfrac{1}{2} C'' = \sin C \sin \tfrac{1}{2} A''.$$

Ainsi dans un triangle isoscèle,

Le sinus de la demi-base = sin ½ angle au sommet sin côté.

7. Dans le triangle isoscèle ZBA (fig. 33), menez l'arc Zm qui divise en deux également l'angle au sommet $Z = A''$, nous aurons par notre théorème général

$$\cos mA = \cos mZA \sin Zm \sin ZA + \cos Zm \cos ZA,$$
$$\cos mB = \cos mZB \sin Zm \sin ZB + \cos Zm \cos ZB,$$

Or, $mZB = mZA = \frac{1}{2} BZA$, et $ZA = ZB$, donc les deux seconds membres sont identiques, donc

$$\cos mA = \cos mB, \text{ donc } mA = mB;$$

donc *l'arc qui divise en deux l'angle au sommet du triangle isoscèle partage aussi la base en deux également.*

8. Les mêmes triangles donnent

$$\cos AZ = \cos AmZ \sin mA \sin mZ + \cos mA \cos mZ,$$
$$\cos BZ = \cos ZmB \sin mB \sin mZ + \cos mB \cos mZ,$$

d'où $\cos ZmB = \cos AmZ$, donc $Zmb = AmZ = 90°$.

car deux angles de suite forment toujours une somme de 180°. Ainsi *dans tout triangle isoscèle l'arc qui divise en deux l'angle*

au sommet est perpendiculaire sur le milieu de la base et réciproquement, car du point m, on ne peut élever qu'une perpendiculaire.

9. $\cos Zm = \cos ZAm \sin ZA \sin mA + \cos ZA \cos mA = \cos ZBm \sin ZB \sin mB + \cos ZB \cos mB$, donc $\cos ZAm = \cos ZBm$, donc $ZAm = ZBm$.

Donc *dans un triangle isoscèle, les deux angles opposés aux côtés égaux, sont égaux.*

10. Mais nous avons (6) $\sin Am = \sin ZA \sin AZm$.

Ainsi *dans un triangle rectangle quelconque, le sinus d'un côté = sin angle opposé sinus hypoténuse.* On appelle hypoténuse le côté opposé à l'angle droit. En effet, tout triangle rectangle ZmA peut être considéré comme la moitié d'un triangle isoscèle.

11. Nous avons démontré $AmZ = 90°$, donc $\cos AmZ = 0$,

donc (8) $$\cos AZ = \cos mA \cos mZ;$$

donc *dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus de l'hypoténuse = produit des cosinus des deux autres côtés.*

12. Du sommet d'un triangle AZC ou AZC′ quelconque (fig. 34), faites tomber un arc perpendiculaire sur la base, vous aurez par l'article 10.

$$\sin ZD = \sin ZC \sin C = \sin ZC' \sin C' = \sin ZA \sin A,$$

d'où $$\sin ZC : \sin ZA :: \sin A : \sin C,$$
$$\sin ZC' : \sin ZA :: \sin A : \sin C';$$

donc *dans un triangle sphérique quelconque, les sinus des deux côtés sont entr'eux comme les sinus des angles opposés*, ce qu'on exprime généralement par cette équation,

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin A'}{\sin C'} = \frac{\sin A''}{\sin C''}.$$

Second théorème général des triangles sphériques.

13. De ces deux théorèmes réunis, nous allons en déduire un troisième tout aussi général :

$$\cot. A'' = \frac{\cos A''}{\sin A''} = \frac{\cos C'' - \cos C \cos C'}{\sin C \sin C'} \cdot \frac{\sin C'}{\sin A' \sin C''}$$

$$= \frac{\cos C'' - \cos C \cos C'}{\sin C \sin C'' \sin A'},$$

$$\text{ou} \quad \sin A' \cot A'' = \frac{\cos C'' - \cos C \cos C'}{\sin C \sin C''}$$

$$= \frac{\cos C'' - \cos C\,(\cos A' \sin C \sin C'' + \cos C \cos C'')}{\sin C \sin C''} \quad (5)$$

$$= \frac{\cos C'' - \cos A' \sin C \cos C \sin C'' - \cos^2 C \cos C''}{\sin C \sin C''}$$

$$= \frac{\cos C'' \sin^2 C - \cos A' \sin C \cos C \sin C''}{\sin C \sin C''}$$

$$= \cot C'' \sin C - \cos A' \cos C;$$

$$\text{et enfin} \left.\begin{array}{l} \cos C \cos A' = \cot C'' \sin C - \sin A' \cot A'' \\ \cos C' \cos A'' = \cot C \sin C' - \sin A'' \cot A \\ \cos C'' \cos A = \cot C' \sin C'' - \sin A \cot A' \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{troisième}\\ \text{théorème}\\ \text{général.}\end{array}$$

En ajoutant un trait à chaque lettre et supprimant trois traits dès qu'ils s'y trouvent.

14. Nous avons (théor. III) $\cot A'' = \dfrac{\cot C'' \sin C - \cos C \cos A'}{\sin A'}$

$$\text{et (théor. I)} \quad \sin A'' = \frac{\sin A' \sin C''}{\sin C'};$$

$$\text{d'où} \quad \cot A'' \sin A'' = \cos A'' = \frac{\cos C'' \sin C}{\sin C'} - \frac{\cos A' \sin C''}{\sin C'} \cos C.$$

Je vois déjà dans cette formule un angle et le côté opposé, et un autre angle. Tâchons d'introduire le troisième angle, afin d'avoir les trois angles et un côté opposé, et pour cela, éliminons C C', par les deux premiers théorèmes.

$$\cos A'' = \frac{\cos C'' \sin A}{\sin A'} - \frac{\cos A' \sin C''}{\sin C'} (\cos A \sin C' \sin C'' + \cos C' \cos C'')$$

$$= \frac{\cos C'' \sin A}{\sin A'} - \cos A \cos A' \sin^2 C'' - \cos A' \sin C'' \cos C'' \cot C'.$$

Il ne reste plus à éliminer que $\cot C'$ en prenant sa valeur dans la troisième ligne du théorème III.

$$\cos A'' = \frac{\cos C'' \sin A}{\sin A'} - \cos A \cos A' \sin^2 C''$$
$$-\cos A' \sin C'' \cos C'' \left(\frac{\cos C'' \cos A + \sin A \cot A'}{\sin C''}\right)$$
$$= \frac{\cos C'' \sin A}{\sin A'} - \cos A \cos A' \sin^2 C''$$
$$-\cos A \cos A' \cos^2 C'' - \frac{\sin A \cos^2 A' \cos C''}{\sin A'},$$
$$\cos A'' = \frac{\cos C'' \sin A \sin^2 A'}{\sin A'} - \cos A \cos A'$$
$$= \cos C'' \sin A \sin A' - \cos A \cos A' \text{ (Théorème IV).}$$

Ainsi,

$$\left.\begin{array}{l} \cos A'' = \cos C'' \sin A \sin A' - \cos A \cos A' \\ \cos A = \cos C \sin A' \sin A'' - \cos A' \cos A'' \\ \cos A' = \cos C' \sin A'' \sin A - \cos A'' \cos A \end{array}\right\} \text{c'est le } 4^e \text{ et dernier théorème général.}$$

Toute la trigonométrie est renfermée dans ces quatre formules, et par conséquent dans la première dont nous avons déduit analytiquement les trois autres. Plusieurs auteurs ont ainsi déduit d'un théorème fondamental les formules qui suffisent à la résolution de tous les triangles possibles; mais aucun, que je sache, ne l'a fait d'une manière aussi directe, ni aussi *purement analytique*.

15. Si l'on compare avec le théorème I

$$\cos C'' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C',$$

le quatrième, que l'on peut écrire

$$-\cos A'' = -\cos C'' \sin A \sin A' + \cos A \cos A',$$
$$\text{ou} -\cos a'' = -\cos c'' \sin a \sin a' + \cos a \cos a',$$

on remarquera que les angles ont pris place des côtés opposés, et réciproquement, que les cosinus sont devenus négatifs de positifs qu'ils étaient.

Supposons $c'' = 180° - A''$, $a = 180° - C$, $a' = 180° = C'$, nous aurons le côté et les deux angles adjacens d'un nouveau triangle qui sera possible, car *sur un côté quelconque* c'', *on peut faire deux angles quelconques* a et a'. Nous aurons évidem-

ment $\cos A''$ sin C sin C' + cos C cos C' = — cos c'' sin a sin a' + cos a cos a'; ces deux seconds membres étant égaux, les premiers le seront aussi : donc $\cos C'' = -\cos a''$, donc $a'' = 180° - C'$; ainsi dans le second triangle, les trois angles seront les supplémens des trois côtés du premier, et réciproquement.

On pourra donc substituer l'un des triangles à l'autre. Ce nouveau triangle s'appelle *supplémentaire* ou *polaire*. La plupart des auteurs en font grand usage; c'est M. Lagrange qui a imaginé de le former ainsi; quoique ce triangle nous soit tout-à-fait inutile, il mérite d'être connu; mais auparavant continuons de tirer de nouvelles conséquences de nos formules.

16. Dans les formules du théorème II, soit $A = 90°$, nous aurons

$$\sin C' = \sin A' \sin C; \quad \sin C'' = \sin A'' \sin C.$$

Ainsi, *dans tout triangle rectangle, le sinus d'un côté est égal au produit du sinus de l'angle opposé par le sinus de l'hypoténuse.*

17. Dans les formules du théorème premier, soit $A'' = 90°$, alors $\cos C'' = \cos C \cos C'$.

Ainsi, *dans tout triangle rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés.* Nous avons déjà trouvé ci-dessus ces deux théorèmes.

18. Dans les formules du théorème IV, soit $\sin A'' = 90°$; $\cos C'' = \cot A \cot A'$; *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cotangentes des deux angles obliques.*

19. Dans les mêmes formules, soit $\sin A = 90°$, $\cos A'' = \cos C'' \sin A'$; *dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus d'un angle oblique est égal au produit du cosinus du côté opposé par le sinus de l'autre angle oblique.*

20. Dans les formules du théorème III, soit $A'' = 90°$, $\cot C'' = \cot C \cos A'$ ou $\tang C = \cos A' \tang C''$, ou *la tangente d'un côté est égale au produit de la tangente de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle compris.*

21. Enfin, dans les mêmes formules, soit $A = 90°$, $\cot A'' = \cot C'' \sin C$ ou $\tang C'' = \sin C \tang A''$, *dans tout triangle*

sphérique rectangle, la tangente d'un côté est égale au produit de la tangente du côté opposé par le sinus de l'autre côté.

22. Ces six formules suffisent pour la solution de tout les cas possibles des triangles rectangles. En égalant à 90° l'un des côtés dans chacune des formules fondamentales, on aurait des théorèmes analogues pour les triangles qui ont un côté de 90°; mais ces théorèmes sont de peu d'usage.

23. Les triangles rectilignes ne peuvent avoir qu'un angle droit; il n'en est pas de même des triangles sphériques.

Dans les formules (III), supposons $A' = A = 90°$, nous aurons $0 = \cot C'' \sin C$, ainsi $\cot C'' = 0$, $C'' = 90°$.

Ainsi, dans un triangle sphérique, quand les deux angles sur la base sont de 90°, le côté opposé à l'un des angles égaux est de 90°, l'autre est par conséquent de 90°, car le triangle est isoscèle; donc quelle que soit la valeur de la base C, les deux côtés sont de 90° et se réunissent au pôle de la base, et l'angle au sommet ou au pôle aura pour mesure l'arc de la base; et si cette base est elle-même de 90°, les trois angles du triangle seront droits, les trois côtés seront de 90°, et chacun des sommets sera le pôle du côté opposé.

24. Supposons deux côtés égaux et de 90° chacun, les angles opposés seront égaux et de 90°; car soit

$$C = C' = 90°, \cos C = \cos C' = 0 = \cos A \sin C'' = \cos A' \sin C'',$$

il faut donc que $\cos A = 0 = \cos A'$, sans cela il faudrait que C'' fût $= 0$, et alors plus de triangle, ou que $C'' = 180°$, et le triangle dégénérerait en une figure à deux côtés, qu'on nomme *fuseau;* les deux côtés seraient de 180° chacun, et les deux angles seraient égaux, mais indéterminés.

25. Supposons les trois angles de 90° chacun, le théorème IV donnera $C = C' = C'' = 90°$. Supposons les trois côtés de 90° chacun, par le théorème I les trois angles seront de 90°. Supposons l'angle et le côté adjacent de 90° chacun, ou $A'' = C = 90°$, nous aurons théorème I $\cos C'' = 0$, donc le côté opposé est de 90°, donc le triangle est isoscèle, donc $\sin \frac{1}{2} C' = \sin \frac{1}{2} A'$, donc $C' = A'$, donc le sommet A' est le pôle de C'.

26. Donc, *si un arc de 90° est perpendiculaire sur un autre arc, il aboutit au pôle de cet arc, et tout arc mené de ce pôle sur l'arc, sera de 90° et perpendiculaire sur le même arc.*

Tous les arcs perpendiculaires à un grand cercle quelconque, le sont à tous les cercles parallèles; ils passent tous par le pôle commun du grand cercle et de ses parallèles.

27. Deux arcs de grand cercle qui se coupent sous un angle quelconque, se couperont à 180° de là sous le même angle, et formeront le fuseau de cet angle; il suit de là qu'un côté quelconque de triangle sphérique est moindre que l'arc de 180°, et que la somme des trois côtés est toujours moindre que 540°; elle est même toujours au-dessous de 360°.

28. Pour le prouver, remarquons d'abord que notre premier theorème $\cos C'' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C''$, donne

$$\cos C'' = \cos C \cos C' + \sin C \sin C' - 2 \sin C \sin C' \sin^2 \tfrac{1}{2} A''$$
$$= \cos(C'-C) - 2 \sin C \sin C' \sin^2 \tfrac{1}{2} A'',$$

et

$$2 \sin C \sin C' \sin^2 \tfrac{1}{2} A'' = \cos(C'-C) - \cos C'' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (C''-\overline{C'-C})$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (C''+\overline{C'-C}) = 2 \sin \tfrac{1}{2} (C''+C-C') \sin \tfrac{1}{2} (C''+C'-C).$$

Le premier membre est positif, le second l'est donc aussi. On a donc tout à la fois $C''+C>C'$ et $C''+C'>C$; car on ne peut avoir à la fois $C''+C<C'$ et $C''+C'<C$, puisqu'il en résulterait à la fois $C''<C'-C$ et $C''<C-C'$, ce qui est absurde.

Donc *la somme de deux côtés quelconques est plus grande que le troisième côté.*

29. Soit un triangle quelconque ABC; prolongez AB, AC en D, vous aurez $BC < DB + DC$; donc

$$AB + AC + BC < AB + AC + DB + DC < 360°.$$

Puisque $\sin \frac{1}{2}(C'' + C' - C)$ est toujours positif, il s'ensuit que $\sin \frac{1}{2}(C'' + C' - C)$ est toujours positif; donc C'' ou *un côté quelconque est toujours plus grand que la différence des deux autres.*

30. Nous ferons un usage continuel de la règle des signes; on se rappellera donc que les sinus des arcs au-dessous de 180° sont toujours positifs, parce qu'ils sont dans le demi-cercle supérieur; négatifs depuis 180° jusqu'à 360°, parce qu'ils sont dans le demi-cercle inferieur; ils seraient dans le demi-cercle inférieur, et par conséquent négatifs, si l'arc était négatif et moindre que la demi-circonférence.

31. Le cosinus est positif de 0 jusqu'à 90°, où il passe par zéro et change de position; il est négatif de 90° jusqu'a 270°, où il devient positif, parce qu'il reprend sa première direction.

32. $\text{Tang A} = \frac{\sin A}{\cos A}$, ainsi la tangente est positive de zéro jusqu'à 90°, change de signe à 90° comme le cosinus, en change encore à 180° comme le sinus; elle redevient donc positive à 180°; elle en change encore à 270° comme le cosinus; elle redevient alors négative jusqu'à 360°.

La cotangente change de signe comme la tangente, à chacun des quatre quarts de la circonférence. Les sécantes et les cosécantes n'entrent pas directement dans nos formules; elles y sont mises quelquefois à la place du cosinus ou du sinus, et doivent suivre les mêmes règles pour les signes.

33. Si l'on a $\tang x = m$, il est impossible de décider à quelle moitié du cercle appartient l'arc x, mais on sait dans chaque moitié à quel quart il appartient. Mais si l'on a $\tang x = \frac{m}{n} = \frac{\sin x}{\cos x}$, le signe du numérateur indique la moitié du cercle dans laquelle se trouve x, et le signe du dénominateur indique le quart; il ne reste plus d'incertitude.

34. Les formules qui donnent l'arc par son cosinus, sa tangente et sa cotangente, ne laissent aucune incertitude sur l'espèce de l'arc ou de l'angle, qui ne peut être ni plus grand que 180°, ni négatif; les formules qui donnent l'arc par son sinus sont douteuses, parce que sin A et sin (180°—A) sont la même chose.

35. Nous avons trouvé $\cos C'' = \cos C \cos C'$; il en résulte que l'hypoténuse est moindre que 90°, si les deux autres cotés

sont de la même espèce, et qu'elle surpasse 90° s'ils sont d'espèce différente, c'est-à-dire, l'un plus petit, et l'autre plus grand que 90°.

36. La formule $\cos C'' = \cot A' \cot A''$ prouve de même que l'hypoténuse sera plus petite ou plus grande que l'arc de 90°, selon que les deux angles obliques seront de même espèce ou d'espèce différente.

37. La formule $\cos A'' = \cos C'' \sin A'$ prouve que l'angle d'un triangle rectangle est toujours de même espèce que le côté opposé; la formule $\tang C'' = \sin C \tang A''$ prouve la même chose.

38. La formule $\tang C = \tang C'' \cos A'$ prouve que l'hypoténuse et un autre côté seront de même espèce, si l'angle compris est aigu; d'espèce différente s'il est obtus.

39. Dans un triangle AZC (fig. 34) abaissez une perpendiculaire ZD sur la base; vous aurez

$$\tang ZD = \tang A \sin AD = \tang C \sin CD;$$

ZD est de même espèce que A et que C, et dans ce cas la perpendiculaire tombe dans le triangle; au contraire, si les angles sont de différente espèce, comme dans AZC', la perpendiculaire tombe en dehors, car $\tang ZD = \tang A \sin AD = \tang C' \sin C'D$.

40. Venons maintenant au triangle supplémentaire; soit ABC (fig. 36) un triangle quelconque; nous supposons seulement que tous les côtés soient moindres chacun que de 90°.

Prolongez BA et BC en D et en E, ensorte que $BD = BE = 90°$. Du point B, comme pôle, décrivez l'arc indéfini MDEO, ou le cercle entier si vous voulez.

Prolongez de même AB et AC jusqu'à 90° en G et en F, et décrivez du point A, comme pôle, le cercle NGFO; enfin prolongez de même CA et CB en I et en H, et décrivez le troisième cercle MIHN.

Ces trois cercles se couperont nécessairement et formeront par leurs intersections un triangle MNO qu'on nomme *polaire*, c'est-à-dire, le triangle des trois pôles; en effet, O est le pôle de AB, puisque les angles D et G sont droits; M est

le pôle de BC, puisque E et H sont des angles droits; enfin N est le pôle de AC, puisque F et I sont de 90° chacun.

L'angle O a pour mesure l'arc

$$DG = DB + BG = 90° + 90° - AB = 180° - AB.$$

L'angle M a pour mesure l'arc

$$HE = HC + CE = 90° + 90° - BC = 180° - BC.$$

L'angle N a pour mesure l'arc

$$FI = FA + AI = 90° + 90° - AC = 180° - AC.$$

$$MN = MH + HN = 90° + 90° - IH = 180° - C,$$
$$NO = NF + FO = 90 + 90 - FG = 180 - A,$$
$$OM = OD + DM = 90 + 90 - DE = 180 - B.$$

Les trois côtés du triangle polaire sont donc les supplémens des trois angles du triangle ABC; ces trois angles sont les supplémens des trois côtés du triangle ABC.

41. Or $\cos NO = \cos M \sin MN \sin MO + \cos MN \cos MO$,

$$\cos(180° - A) = \cos(180° - BC)\sin(180° - C)\sin(180° - B)$$
$$+ \cos(180° - C)\cos(180° - B)$$
$$-\cos A = -\cos BC \sin C \sin A + \cos C \cos B,$$
$$\cos A = \cos BC \sin C \sin B - \cos C \cos B,$$

ce qui est précisément notre quatrième théorème démontré d'une manière plus courte et plus claire; mais c'est le seul que nous puissions ainsi démontrer, car les formules des théorèmes II et III, transportées de même au triangle supplémentaire, n'apprendront rien de nouveau; et c'est ce qui arrivera quand les formules seront symétriques entre les angles et les côtés.

42. Nos quatre théorèmes suffisent pour résoudre, dans tous les cas, les triangles sphériques quelconques; elles expriment les relations générales entre quatre des six quantités qui constituent le triangle; il suffira de dégager, c'est-à-dire de laisser seule dans un membre l'inconnue du problème. Mais ces formules ne donneront pas toujours les solutions les plus faciles, et nous allons indiquer les procédés qui sont

plus généralement mis en pratique par les astronomes, en commençant par les triangles rectangles. Soit le triangle AA′A″ rectangle en A (fig. 37).

Premier cas. Si l'on connaît l'hypoténuse C et un angle qu'on désignera par A′,

$$\sin C' = \sin C \sin A' = \sin \text{ angle opposé } \sin \text{hypoténuse}$$
$$= \sin \text{ côté cherché},$$
$$\text{tang } C'' = \text{tang } C \cos A' = \text{tang côté cherché}$$
$$= \text{tang hypoténuse cosin angle compris},$$
$$\cos A'' = \cos C \text{ tang } A' = \text{cot angle cherché}$$
$$= \cos \text{hypoténuse tang angle donné}.$$

La règle des signes lève le doute dans les deux dernières formules; pour la première, on songera que l'angle et le côté opposé sont toujours de même espèce (37).

Second cas. Si l'on connaît l'hypoténuse C et l'un des côtés, qu'on désignera par C′, on aura

$$\sin A' = \frac{\sin C'}{\sin C}, \text{ ou } \sin \text{ angle cherché} = \frac{\sin \text{ côté connu}}{\sin \text{ hypotenuse}},$$
$$\cos C'' = \frac{\cos C}{\cos C'}, \cos \text{ côté cherché} = \frac{\cos \text{ hypoténuse}}{\cos \text{ côté connu}},$$
$$\cos A'' = \text{tang } C' \text{ cot } C \text{ tang angle cherché}$$
$$= \text{cot hypoténuse tang côté connu}.$$

Les espèces se connaissent comme dans le cas précédent.

Troisième cas. Si l'on connaît les deux côtés qui renferment l'angle droit, c'est-à-dire C′ et C″,

$$\cos C = \cos C' \cos C'', \text{ ou}$$
$$\cos \text{ hypoténuse} = \cos \text{ premier côté cos deuxième côté},$$
$$\text{tang } A' = \frac{\text{tang } C'}{\sin C''}, \text{ ou}$$
$$\text{tang angle cherché} = \frac{\text{tang côté opposé}}{\sin \text{ côté adjacent}},$$
$$\text{tang } A'' = \frac{\text{tang } C}{\sin C'}.$$

Aucun doute sur l'espèce.

Quatrième

Quatrième cas. Si l'on connaît C′ et A′, c'est-à-dire un côté et un angle opposé,

$$\sin C = \frac{\sin C'}{\sin A'}, \text{ ou bien l'hypoténuse} = \frac{\sin \text{côté connu}}{\sin \text{angle opposé}},$$

$$\sin C'' = \operatorname{tang} C' \cot A', \text{ ou sin côté cherché}$$
$$= \operatorname{tang} \text{côté connu} \cot \text{angle opposé},$$

$$\sin A'' = \frac{\cos A'}{\cos C'}, \text{ ou sin angle cherché} = \frac{\cos \text{angle connu}}{\cos \text{côté connu}}.$$

Ces formules laissent dans le doute sur l'espèce de l'inconnue.

Cinquième cas. Si l'on connaît C″ et A′, c'est-à-dire un côté et l'angle adjacent,

$$\operatorname{tang} C' = \operatorname{tang} A' \sin C'', \text{ ou tang côté cherché}$$
$$= \operatorname{tang} \text{angle opposé} \sin \text{côté connu},$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} C''}{\cos A'}, \text{ ou tang hypoténuse} = \frac{\operatorname{tang} \text{côté connu}}{\cos \text{angle connu}},$$

$$\cos A'' = \cos C'' \sin A', \text{ ou cos angle cherché}$$
$$= \cos \text{côté opposé} \sin \text{angle connu}.$$

Sixième cas. Si l'on connaît les deux angles A′ et A″,

$$\cos C = \cot A' \cot A'', \text{ ou cos hypoténuse}$$
$$= \cot \text{premier angle} \cot \text{deuxième angle},$$

$$\left.\begin{aligned} \cos C' &= \frac{\cos A'}{\sin A''} \\ \cos C'' &= \frac{\cos A''}{\sin A'} \end{aligned}\right\} \cos \text{côté cherché} = \frac{\cos \text{angle opposé}}{\sin \text{autre angle}}.$$

La règle des signes suffit pour connaître l'espèce de l'inconnue.

Triangles obliquangles.

43. *Premier cas.* Si l'on connaît les trois côtés, le théorème I donnera

$$\cos A'' = \frac{\cos C'' - \cos C \cos C'}{\sin C \sin C'},$$

d'où

$$1-\cos A''=2\sin^2\tfrac{1}{2}A''=\frac{\sin C\sin C'+\cos C\cos C'-\cos C''}{\sin C\sin C'}$$

$$=\frac{\cos(C'-C)-\cos C''}{\sin C\sin C'}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(C''-C'-C)\sin\frac{1}{2}(C''+C'-C)}{\sin C\sin C'}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(C''+C-C')\sin\frac{1}{2}(C''+C'-C)}{\sin C\sin C'},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A''=\frac{\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C'\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C\right)}{\sin C\sin C'}.$$

Il suffira donc de prendre la demi-somme des trois côtés, d'en retrancher successivement les deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; de chercher les sinus logarithmiques des deux restes, et les complémens arithmétiques des sinus des deux mêmes côtés ; la demi-somme de ces quatre logarithmes sera le log du sinus du demi-angle cherché.

La même formule donne encore

$$1+\cos A''=2\cos^2\tfrac{1}{2}A''=\frac{2\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C''\right)}{\sin C\sin C'},$$

formule qui prouve que la demi-somme des trois côtés est toujours plus grande qu'un des trois côtés quelconque.

De ces deux formules on tire

$$\tan^2\tfrac{1}{2}A''=\frac{\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C'\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C\right)}{\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C''\right)}.$$

Au lieu de diviser $\sin^2\frac{1}{2}A''$ par $\cos^2\frac{1}{2}A''$, faites le produit des deux formules et vous aurez

$$\tfrac{1}{2}\sin A''=\frac{\left\{\left[\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C'\right)\sin\left(\frac{C''+C'+C}{2}-C''\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}{\sin C\sin C'}.$$

La première de ces quatre formules est la plus usitée,

les deux autres le sont moins, la dernière n'est que curieuse. Il y a d'autres méthodes encore, mais on n'en fait presqu'aucun usage.

44. *Second cas.* Si l'on connaît les trois angles, on aura par les mêmes moyens, des formules analogues ; mais ce cas ne se rencontre jamais dans la pratique. Voici les formules :

$$\cos C'' = \frac{\cos A'' + \cos A' \cos A}{\sin A' \sin A},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C'' = -\frac{\cos\left(\frac{A''+A'+A}{2}\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A''\right)}{\sin A \sin A'};$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C'' = \frac{\cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A'\right)}{\sin A \sin A'},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C'' = -\frac{\cos\left(\frac{A''+A'+A}{2}\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A''\right)}{\cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A'\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A\right)};$$

$$\tfrac{1}{4} \sin^2 C'' = -\frac{\left\{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2}\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A''\right) \\ \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A'\right) \cos\left(\frac{A''+A'+A}{2} - A\right) \end{array}\right\}}{\sin A \sin A'}.$$

Il suit de ces formules, 1°. que la somme des trois angles surpasse toujours 180° ; que la différence de la demi-somme à l'un quelconque des trois angles ne peut aller jusqu'à 90° ; car dans la valeur de $\sin^2 \frac{1}{2} C''$, le numérateur est nécessairement positif ; il faut donc que l'un des deux cosinus soit négatif, et ce ne peut être que celui de la demi-somme.

45. *Troisième cas.* Si l'on connaît deux côtés avec l'angle compris, la formule pour le troisième côté sera

$$\cos C'' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C';$$

on la transforme de la manière suivante, qu'il est utile de

connaître, parce que les applications en sont fréquentes.

$$\cos C'' = \cos C(\cos A'' \operatorname{tang} C \sin C' + \cos C')$$
$$= \cos C(\operatorname{tang} x \sin C' + \cos C')$$
$$= \cos C\left(\frac{\sin C' \sin x + \cos C' \cos x}{\cos x}\right) = \frac{\cos C \cos(C' - x)}{\cos x}.$$

Il suffit donc de chercher un arc auxiliaire x par la formule $\operatorname{tang} x = \cos A'' \operatorname{tang} C$; il est aisé de voir que l'arc x est la base du triangle rectangle dont C est l'hypoténuse et A'' l'angle à la base (20) (fig. 38).

De l'extrémité du côté connu, que je suppose le plus petit des deux côtés donnés, abaissez une perpendiculaire p sur le côté C', vous aurez $\operatorname{tang} C \cos A'' = \operatorname{tang} MN = \operatorname{tang} x$; donc (fig. 38) $NQ = C' - x$, et vous aurez

$$\cos C'' = \frac{\cos C \cos NQ}{\cos MN} = \frac{\cos C \cos(C' - x)}{\cos x}.$$

La perpendiculaire partagera le grand côté en deux segmens x et $(C' - x)$, et le triangle entier en deux triangles rectangles; vous aurez $\cos C = \cos p \cos x$ et $\cos C'' = \cos p \cos(C' - x)$; vous en conclurez $\cos p = \frac{\cos C}{\cos x} = \frac{\cos C''}{\cos(C - x)}$; $\cos C'' = \frac{\cos C \cos(C' - x)}{\cos x}$.

46. Le procédé se réduit donc aux deux formules.... $\operatorname{tang} x = \cos A'' \operatorname{tang} C$, et $\cos C'' = \frac{\cos C \cos(C' - x)}{\cos x}$.

Pour avoir le second angle à la base, ou A, vos triangles partiels donnent

$$\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} A'' \sin MN = \operatorname{tang} A \sin QN,$$

ou

$$\operatorname{tang} A'' \sin x = \operatorname{tang} A \sin(C' - x) \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} A'' \sin x}{\sin(C' - x)};$$

vous aurez pour le troisième angle A',

$$\sin A' = \frac{\sin A'' \sin C'}{\sin C''} = \frac{\sin A \sin C'}{\sin C}.$$

Il n'y a nul doute sur l'espèce de C'' ni de A, en suivant la règle des signes ; pour l'espèce de A', le doute n'est qu'apparent, car si le côté C' est le plus grand des trois côtés, l'angle A sera le plus grand des trois angles. Si le côté C', qui est plus grand que C, est plus petit que C'', l'angle A' est plus petit que A'' et plus grand que A, ainsi que nous le démontrerons bientôt.

En effet, dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, le plus petit au plus petit, et le côté moyen à l'angle moyen. Vous pourriez au reste faire ... $\cot MA'N = \cos C \tang A''$, et $\cot QA'N = \cos C'' \tang A$, et $A' = MA'N + QA'N$, et il ne resterait aucun doute.

47. En abaissant la perpendiculaire du petit côte C sur le plus grand C' des côtés connus, la perpendiculaire tombera toujours dans le triangle, les angles A'' et A seront toujours de même espèce.

Si l'on manquait à cette attention, il se pourrait que le segment x de la base fût plus grand que la base même, il n'en résulterait aucun changement pour $\cos C'' = \frac{\cos C \cos(C'-x)}{\cos x}$; mais dans la formule $\tang A = \frac{\tang A'' \sin x}{\sin(C'-x)}$, $(C'-x)$ serait une quantité négative, et $\tang A$ serait négative ; si A'' était un angle aigu, A et A'' seraient d'espèce différente, le signe — avertirait que l'angle aigu est extérieur au triangle ; que l'angle qu'on demande est obtus ; que la perpendiculaire tombe dehors, et que les deux angles à la base sont d'espèce différente.

48. *Quatrième cas.* Deux angles et le côté compris étant donnés, on demande le reste. D'abord pour le troisième angle,

$$\begin{aligned}\cos A'' &= \cos C'' \sin A \sin A' - \cos A \cos A' \\ &= \cos A(\cos C' \tang A \sin A' - \cos A') \\ &= \cos A(\cot y \sin A' - \cos A') \\ &= \cos A \frac{(\sin A' \cos y - \cos A' \sin y)}{\sin y} = \frac{\cos A \sin(A'-y)}{\sin y}\end{aligned}$$

quand on a fait $\cot y = \cos C'' \tang A$.

On voit que l'angle auxiliaire est l'angle au sommet d'un triangle rectangle dont C'', côté connu, est l'hypoténuse, et A l'un des angles connus, est l'angle à la base ; ainsi du plus grand angle A' abaissez sur le côté opposé la perpendiculaire $A'N$, vous aurez

$$\cot y = \tang A \cos C'' = \cot NA'Q ;\ MA'N = (A' - y)$$

$$\text{et } \cos A'' = \frac{\cos A \sin (A' - y)}{\sin y},$$

vous aurez ensuite

$$\tang p = \tang C'' \cos y = \tang C \cos (A' - y) \text{ et } \tang C = \frac{\tang C'' \cos y}{\cos (A' - y)},$$

vous aurez ainsi l'un des côtés inconnus ; pour le troisième côté, vous aurez

$$\sin C' = \frac{\sin A' \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A' \sin C''}{\sin A''},$$

vous leverez le doute comme dans le cas précédent, ou bien vous ferez

$\tang NQ = \tang C'' \cos A$;

$\tang MN = \tang C \cos A''$ et $C' = MN + NQ$

si la perpendiculaire tombe dans le triangle, c'est-à-dire, si $(A' - y)$ est positif, si A'' et A sont de même espèce. Dans le cas contraire, vous ferez $C' = MN - NQ$ ou $NQ - MN$.

Ce quatrième cas a beaucoup d'analogie avec le précédent.

49. *Cinquième cas.* Étant donnés deux côtés et un angle opposé, trouver le reste, et d'abord l'angle compris A' ; dans ce cas A' est l'inconnue dans la formule $\cot C'' \sin C = \cot A'' \sin A' + \cos C \cos A'$. Pour éliminer $\cos A' = (1 - \sin^2 A')^{\frac{1}{2}}$, il faudrait faire monter l'équation au second degré, et l'inconnue aurait deux valeurs. Pour plus de simplicité, j'écris

$$\frac{\cot C'' \sin C}{\cos C} = \frac{\cot A''}{\cos C} \sin A' + \cos A',$$

ou

$$\cot C'' \tang C = \tang y \sin A' + \cos A' = \frac{\sin A' \sin y + \cos A' \cos y}{\cos y}$$

$\cot C'' \tang C \cos y = \cos (A' - y)$ ou $= \cos (y - A')$, car on ne

sait lequel des deux, je ferai donc $\frac{\cot A''}{\cos C} = \text{tang}\, y$ ou $\cos C \,\text{tang} A''$ $= \cot y$ et $\cos (A''-y) = \text{tang}\, C \cot C'' \cos y$, puis $(A'-y) + y = A'$, ou $y - (y - A') = A'$, ce qui fera deux valeurs différentes.

L'équation $\cot y = \cos C \,\text{tang}\, A''$ me dit que y est l'angle au sommet d'un triangle rectangle dont C est l'hypoténuse et A'' l'angle à la base; ainsi de l'angle cherché A', abaissez une perpendiculaire sur le côté opposé, vous aurez

$\cos MA'N = \cot y = \cos C \,\text{tang}\, A''$,

puis $\text{tang}\, p = \cos MA'N \,\text{tang}\, C = \cos QA'N \,\text{tang}\, C''$

et $\cot QA'N = \cos (A'-y) = \cos y \,\text{tang}\, C \cot C'$.

Le triangle $NA'Q$ donne ensuite $\cot A = \text{tang}\, (A'-y) \cos C''$ qui aura deux valeurs différentes; puis les deux triangles rectangles donnent

$\text{tang} MN = \text{tang} C \cos A''$; $\text{tang} NQ = \text{tang} C'' \cos A$; $C' = MN + NQ$, ou bien, $\sin C'' : \sin A'' :: \sin C' : \sin A'$;

$$\sin C' = \frac{\sin C'' \sin A'}{\sin A''} = \frac{\sin C \sin A'}{\sin A},$$

Chacune des deux inconnues est susceptible de deux valeurs, suivant qu'on fera $A' = (A'-y) + y$ ou $A' = y - (y - A')$ et souvent les deux solutions seront également admissibles; mais il faudra rejeter celle qui opposerait un angle plus grand à un côté plus petit, et celle qui donnerait un angle ou un côté négatif ou plus grand que 180°.

50. *Sixième et dernier cas.* Étant donnés deux angles A'' et A, et un côté opposé C'', trouver le reste; ce cas présentera la même ambiguité et les mêmes moyens pour se décider quand cela est possible.

On trouvera d'abord le second côté opposé par la règle des quatre sinus. Pour le troisième angle

$$\cos A'' = \cos C'' \sin A \sin A' - \cos A \cos A'$$

$$\frac{\cos A''}{\cos A} = \cos C'' \,\text{tang} A \sin A' - \cos A' = \cot y \sin A' - \cos A'$$

$$= \frac{\cos y \sin A' - \cos A' \sin y}{\sin y} = \frac{\sin (A'-y)}{\sin y};$$

Ainsi on fera $\cot y = \cos C'' \operatorname{tang} A$ et $\sin(A'-y) = \frac{\cos A'' \sin y}{\cos A}$, y est donc l'angle au sommet d'un triangle sphérique dont C'' est l'hypoténuse et A l'angle à la base, abaissez la perpendiculaire de l'angle cherché sur le côté opposé.

Alors $\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A'N}{\cos(A'-y)} = \frac{\operatorname{tang} C'' \cos y}{\cos(A'-y)}$

$=$ tang 2e côté que l'on peut avoir aussi par les quatre sinus. Enfin, $\operatorname{tang} MN = \operatorname{tang} C \cos A''$; $\operatorname{tang} QN = \operatorname{tang} C'' \cos A$ et $C' = MN + NQ$ ou $\sin C' = \frac{\sin A' \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A' \sin C''}{\sin A''}$.

51. On peut réduire en formules générales toutes ces solutions astronomiques pour s'épargner l'embarras des figures. Soient donc A, A', A'' les trois angles d'un triangle, C, C', C'' les côtés *opposés*, S et S' *les deux segmens de la base* C'', V et V' *les* segmens de l'angle vertical A'', on aura les formules suivantes.

Premier cas. Trois côtés connus C, C', C''.

(1) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(S-S') = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C'-C) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(C'+C) \cot \frac{1}{2} C''$,

(2) $S = \frac{1}{2} C'' + \frac{1}{2}(S-S')$, $\quad S' = \frac{1}{2} C'' - \frac{1}{2}(S-S')$,

(3) $\cos A = \operatorname{tang} S \cot C'$, $\quad$ (4) $\cos A' = \operatorname{tang} S' \cot C$,

(5) $\sin A'' = \frac{\sin C'' \sin A}{\sin C} = \frac{\sin C'' \sin A'}{\sin C'}$,

Second cas. Trois angles connus A, A', A''.

(6) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(V-V') = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A'-A) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A'+A) \operatorname{tang} \frac{1}{2} A''$,

(7) $V = \frac{1}{2} A'' + \frac{1}{2}(V-V')$, $\quad V' = \frac{1}{2} A'' - \frac{1}{2}(V-V')$,

(8) $\cos C' = \cot A \cot V$, $\quad$ (9) $\cos C = \cot A' \cot V'$,

(10) $\sin C'' = \frac{\sin A'' \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A'' \sin C'}{\sin A'}$.

Nous démontrerons (54) les formules (1) et (6).

Troisième cas. C', A, C''.

(11) $\operatorname{tang} S = \cos A \operatorname{tang} C'$,

(12) $S' = C'' - S$,

(13) $\cos C = \frac{\cos C' \cos S'}{\cos S}$,

Quatrième cas. A, C', A''.

(16) $\cot V = \operatorname{tang} A \cos C'$,

(17) $V' = A'' - V$,

(18) $\cos A' = \frac{\cos A \sin V'}{\sin V}$,

$$(14)\ \tang A'' = \frac{\tang A \sin S}{\sin S'}, \qquad (19)\ \tang C = \frac{\tang C' \cos V}{\cos V'},$$

$$(15)\ \sin A'' = \frac{\sin C'' \sin A}{\sin C}, \qquad (20)\ \sin C'' = \frac{\sin A'' \sin C}{\sin A},$$

$$= \frac{\sin C'' \sin A'}{\sin C'}. \qquad = \frac{\sin A'' \sin C'}{\sin A'}.$$

52. Dans ces quatre premiers cas, tout est déterminé sans la moindre ambiguité ; les deux cas suivans sont douteux ; ils admettent, la moitié du tems, deux solutions. On y suppose connus deux côtés et l'un des angles opposés, ou deux angles et l'un des côtés opposés. Comme les solutions sont doubles, il y a aussi deux manières de les calculer ; on peut commencer indifféremment par l'équation (11) ou par l'équation (16), qui n'emploient toutes deux qu'un angle avec le côté adjacent à cet angle.

Cinquième cas. Deux côtés C, C′ et un angle opposé A.

Première solution.	*Deuxième solution.*
$\text{Tang}\ S = \cos A \tang C'$ (11),	$\text{Cot}\ V = \tang A \cos C'$ (16),
$\cos S' = \frac{\cos C \cos S}{\cos C'}$ (13),	$\cos V' = \cos V \tang C' \cot C$ (19),
$C'' = S \pm S'$,	$A'' = V \pm V'$,
$\tang A' = \frac{\tang A \sin S}{\sin S'}$ (14),	$\cos A' = \frac{\cos A \sin V'}{\sin V}$ (18),
$\sin A'' = \frac{\sin C'' \sin A}{\sin C}$	$\sin C'' = \frac{\sin A'' \sin C}{\sin A}$
$= \frac{\sin C'' \sin A'}{\sin C'}$.	$= \frac{\sin A'' \sin C'}{\sin A'}$.

On ne sait si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors, s'il faut prendre la somme ou la différence des segmens ; mais cette somme doit être positive et moindre que de 180°, ce qui lève le doute dans la moitié des cas.

Sixième cas. Deux angles A et A′ avec le côté C′.

Première solution.

$$\text{Tang}\, S = \cos A \tan C' \quad (11),$$

$$\sin S' = \sin S \tan A \cot A' \quad (14),$$

$$C'' = S \pm S',$$

$$\cos C = \frac{\cos C' \cos S'}{\cos S} \quad (13),$$

$$\sin A'' = \frac{\sin C'' \sin A}{\sin C} = \frac{\sin C'' \sin A'}{\sin C'}.$$

Deuxième solution.

$$\text{Cot}\, V = \tan A \cos C' \quad (16),$$

$$\sin V' = \frac{\cos A' \sin V}{\cos A} \quad (18),$$

$$A'' = V \pm V',$$

$$\tan C = \frac{\tan C' \cos V}{\cos V'} \quad (19),$$

$$\sin C'' = \frac{\sin A'' \sin C}{\sin A} = \frac{\sin A'' \sin C'}{\sin A}.$$

Ici on sait si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors, puisque les deux angles sont connus (39); mais l'un des segmens se trouve par son sinus; il a donc deux valeurs.

53. On observera partout la règle des signes, on sera dispensé de toute autre attention; si $S > C''$, S' sera négatif et extérieur au triangle; si $V > A''$, V' sera négatif et extérieur au triangle.

54. Voici la démonstration des formules (1) et (6), art. 51.

$$\cos C : \cos C' :: \cos S' : \cos S,$$

$$\cos C + \cos C' : \cos C - \cos C' :: \cos S' + \cos S : \cos S' - \cos S,$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2}(C'+C) \cos \tfrac{1}{2}(C'-C) : 2 \sin \tfrac{1}{2}(C'-C) \sin \tfrac{1}{2}(C'+C),$$

$$:: 2 \cos (S+S') \cos \tfrac{1}{2}(S-S') : 2 \sin \tfrac{1}{2}(S-S') \sin \tfrac{1}{2}(S+S'),$$

$$1 : \tan \tfrac{1}{2}(C'-C) \tan \tfrac{1}{2}(C'+C) :: 1 : \tan \tfrac{1}{2}(S'-S) \tan \tfrac{1}{2}(S'+S),$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(S-S') = \tan \tfrac{1}{2}(C'-C) \tan \tfrac{1}{2}(C'+C) \cot \tfrac{1}{2} C'';$$

car $\quad C'' = (S'+S),$

$$S = \tfrac{1}{2} C' + \tfrac{1}{2}(S-S'), \qquad S' = \tfrac{1}{2} C'' - \tfrac{1}{2}(S-S').$$

Les segmens connus, on a $\cos A = \tan S \cot C'$ et $\cos A' = \tan S' \cot C$ par les règles des triangles rectangles.

55. $\cos A : \cos A' :: \sin V : \sin V',$

$$\cos A + \cos A' : \cos A - \cos A' :: \sin V + \sin V' : \sin V - \sin V',$$

$$1 : \tan \tfrac{1}{2}(A'-A) \tan \tfrac{1}{2}(A'+A) :: 2 \sin \tfrac{1}{2}(V+V') \cos \tfrac{1}{2}(V-V')$$

$$: 2 \sin \tfrac{1}{2}(V-V') \cos \tfrac{1}{2}(V+V'),$$

$$:: 1 : \tan \tfrac{1}{2}(V-V') \cot \tfrac{1}{2}(V+V');$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(V-V') = \tan \tfrac{1}{2}(A'-A) \tan \tfrac{1}{2}(A'+A) \tan \tfrac{1}{2} A'',$$

car $\quad A'' = V + V';$

on aura donc (15) V et V′, d'où, par les règles des triangles rectangles, C′ et C (16) et (17).

Ces analogies sont de Néper qui les a démontrées par une construction ingénieuse, mais compliquée, dont nous n'avons pas encore exposé les principes; au lieu que les démonstrations analytiques sont de la plus grande simplicité.

Nous avons de Néper des analogies plus utiles et plus célèbres, qu'on n'a démontrées jusqu'ici qu'analytiquement et d'une manière assez pénible. Au contraire, nous les pourrons déduire d'une construction fort simple.

56. Dans un triangle sphérique quelconque (fig. 39), mettez B au plus grand des deux angles sur la base, C au plus petit, A au sommet. Menez CD, ensorte que DCB $=$B, et prolongez BA en D; le triangle BCD sera isoscèle. Menez DM perpendiculaire sur la base BC, cet arc partagera en deux également l'angle du sommet D et la base BC. L'angle ACD$=$B$-$C. Divisez cet angle en deux par l'arc CE qui coupera en E la perpendiculaire DM; FCE$=\frac{1}{2}$(B$-$C); MCE$=$C$+\frac{1}{2}$B$-\frac{1}{2}$C$=\frac{1}{2}$(B$+$C); menez l'arc AE, il partagera en deux également l'angle DAC$=180°-$A, et CAE$=\frac{1}{2}$(180°$-$A)$=90°-\frac{1}{2}$A$=$DAE; en effet abaissez les trois perpendiculaires EF, EG, EH, du point E sur les côtés du triangle ACD, vous aurez

$$\sin EF = \sin CE \sin ECF = \sin CE \sin \tfrac{1}{2}(B-C),$$
$$\sin EH = \sin CE \sin ECH = \sin CE \sin \tfrac{1}{2}(B-C),$$
$$\sin EH = \sin DE \sin EDH = \sin DE \sin EDG = \sin GE,$$

d'où $EH = GE = EF$,

$$\sin GAE = \frac{\sin GE}{\sin AE} = \frac{\sin EF}{\sin AE} = \sin FAE,$$

donc $GAE = FAE = \frac{1}{2} DAE = 90° - \frac{1}{2} A$.

57. Il résulte d'abord de cette construction, que si dans un triangle quelconque ACD, vous divisez en deux également deux angles D et C par des arcs qui se coupent en un point E, et que de ce point vous meniez un arc EA au sommet du troisième angle, il le divisera en deux également, et réciproquement, que les trois arcs qui divisent en deux égale-

ment les trois angles d'un triangle se coupent toujours en un même point E.

58. On aura de plus,

tang AF = tang AE cos EAF = tang AE cos EAG = tang AG, d'où AF = AG.

On prouvera de même, que DG = DH, et CH = CF. d'où il suit encore que les trois perpendiculaires menées du point d'intersection sur les trois côtés, seront toutes trois égales et formeront sur les trois côtés six segmens égaux deux à deux.

59. Supposez le triangle infiniment petit, ou portion d'une sphère infiniment grande, tous les arcs se confondront avec leurs côtés, leurs sinus et leurs tangentes; nous pourrons mettre les arcs en place de leurs sinus et de leurs tangentes, et notre théorème sera également vrai des triangles rectilignes.

Je dis de plus, que CEM = AEF, en effet,

$$180^\circ. = MEC + CEH + HED = MEF + FEA + AEG + GED,$$

retranchez....$HED = GED$,

Donc, $MEC + CEH = MEF + FEA + AEG$
$= MEF + 2AEF$,

de plus, CEH = CEF, car cot CEH = cos CE tang HCE
= cos CE tang FCE = cot CEF,

Ainsi, $MEC + CEF = MEF + 2AEF$;
$MEC + MEC + MEF = MEF + 2AEF$,
$2MEC = 2AEF$ et $MEC = AEF$;

on a enfin BD = CD ou $BA + AG + GD = CH + DH$,

mais $GD = DH$,

Donc, $BA + AG = CH = CF = CA - AF$,
$BA + AF = CA - AF$,
$BA = CA - 2AF$; $2AF = CA - BA$;
$AF = \frac{1}{2}(CA - BA)$;

Donc, $CF = AC - AF = AC - \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}(AC + AB.)$

Cela posé, le triangle ACE coupé en deux triangles rectangles par la perpendiculaire AF donnera

$\sin CF : \sin AF :: \tang FAE : \tang FCE$ (46),

$\sin \frac{1}{2}(AC+AB) : \sin \frac{1}{2}(AC-AB) :: \cot \frac{1}{2} A : \tang \frac{1}{2}(B-C)$,

$\sin \frac{1}{2}(C'+C) : \sin \frac{1}{2}(C'-C) :: \cot \frac{1}{2} A : \tang \frac{1}{2}(A'-A.)$

C'est la première analogie de Néper que nous sommes parvenus à construire.

Le triangle CEM donne $\tang ECM = \frac{\cot CEM}{\cos CE}$ (18)

$$= \frac{\cot AEF}{\cos CE} = \frac{\tang FAE \cos AE}{\cos CE} = \frac{\tang FAE \cos AF}{\cos CF} \text{ (45)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cot \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(AC-AB)}{\cos \frac{1}{2}(AC+AB)}, \text{ ou } \tang \tfrac{1}{2}(A'+A)$$

$$= \frac{\cot \frac{1}{2} A'' \cos \frac{1}{2}(C'-C)}{\cos \frac{1}{2}(C'+C)}.$$

C'est la seconde analogie de Néper. En portant ces deux formules dans le triangle supplémentaire comme font tous les auteurs, nous obtiendrons les deux autres analogies, mais elles résultent aussi de notre construction.

Le triangle AEF donne $\tang AF = \sin EF \tang AEF = \sin CE$

$$\sin ECF \tang CEM = \sin CE \sin ECF \frac{\tang MC}{\sin ME} = \frac{\sin ECF \tang MC}{\left(\frac{\sin ME}{\sin CE}\right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(A'-A) \tang \frac{1}{2} C''}{\sin MCE} = \frac{\tang \frac{1}{2} C'' \sin \frac{1}{2}(A'-A)}{\sin \frac{1}{2}(A'+A)}$$

$= \tang \frac{1}{2}(C'-C)$, c'est la troisième analogie de Néper.

Enfin le triangle CEM donne $\tang \frac{1}{2} BC = \tang \frac{1}{2} C'' = \tang CM$

$$= \tang CE \cos MCE = \cos \tfrac{1}{2}(A'+A) \frac{\tang CF}{\cos FCE}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(A'+A) \tang \frac{1}{2}(C'+C)}{\cos \frac{1}{2}(A'-A)} \text{ ou } \tang \tfrac{1}{2}(C'+C)$$

$$= \frac{\tang \frac{1}{2} C'' \cos \frac{1}{2}(A'-A)}{\cos \frac{1}{2}(A'+A)}, \text{ c'est la 4}^{e} \text{ analogie de Néper.}$$

60. Ainsi, avec deux côtés et l'angle compris, on aura les deux autres angles; avec deux angles et le côté compris, on aura les deux autres côtés; il reste dans le premier cas à trouver le troisième côté, et dans le second le troisième angle.

On trouvera le troisième côté par la formule $\tang \frac{1}{2} C'' = \frac{\tang \frac{1}{2}(C'+C) \cos \frac{1}{2}(A'+A)}{\cos \frac{1}{2}(A'-A)}$ où tout est connu par les deux premières analogies. On trouve le troisième angle par la formule $\cot \frac{1}{2} A'' = \frac{\tang \frac{1}{2}(A'+A) \cos \frac{1}{2}(C'+C)}{\cos \frac{1}{2}(C'-C)}$ où tout est connu, quand on a calculé la troisième et la quatrième analogie. On aurait même deux formules, soit pour $\frac{1}{2} C''$, soit pour $\frac{1}{2} A''$; mais on aurait souvent peu de précision en mettant au dénominateur $\sin \frac{1}{2}(A'-A)$ et $\sin \frac{1}{2}(C'-C)$ qui peuvent être de petits angles.

61. La même construction donne encore les quatre formules suivantes, que j'ai données dans la Connaissance des Tems de 1808 :

$$(1)\ \frac{\sin \frac{1}{2} C''}{\sin \frac{1}{2} A''} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C'+C)}{\cos \frac{1}{2}(A'-A}; \quad (2)\ \frac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin \frac{1}{2} A''} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C'+C)}{\cos \frac{1}{2}(A'+A)};$$

$$(3)\ \frac{\sin \frac{1}{2} C''}{\cos \frac{1}{2} A''} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C'-C)}{\sin \frac{1}{2}(A'-A)}; \quad (4)\ \frac{\cos \frac{1}{2} C''}{\cos \frac{1}{2} A''} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C'-C)}{\sin \frac{1}{2}(A'+A)}.$$

La première prouve que $\frac{1}{2}(A'-A) < 90°$, c'est-à-dire, que la différence de deux angles est toujours moindre que 180°, ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'aucun angle ne peut être de 180°.

La seconde prouve que $\frac{1}{2}(C'+C)$ et $\frac{1}{2}(A'+A)$ sont toujours de même espèce, ce qui résulte également de la quatrième de Néper.

La troisième prouve que $(C'-C)$ et $A'-A)$ sont toujours de même signe; c'est-à-dire, que le plus grand angle est opposé au plus grand côté, et réciproquement, ce qui résulte également de la première et de la troisième de Néper.

62. La quatrième prouve que la différence de deux côtés est toujours moindre que 180°, ce qui est évident. De ces remarques, la plus importante est la troisième. On la démontrerait d'une manière plus complète par les formules (43), d'où j'ai tiré, en faisant $2S = C''+C'+C$; et supposant que C'', C', C sont ici par ordre de grandeur.

$$\tang^2 \frac{1}{2} A'' - \tang^2 \frac{1}{2} A' = \frac{\sin(S-C) \sin(C''-C') \sin C}{\sin S \sin(S-C') \sin(S-C'')};$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} A' - \tang^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin (S-C'') \sin (C'-C) \sin C''}{\sin S \sin (S-C) \sin (S-C')}.$$

Tout est positif dans les seconds membres, puisque l'on a $C'' > C'$ et $C' > C$; donc les premiers membres seront positifs, donc $A'' > A'$ et $A' > A$, quand $C'' > C'$ et $C' > C$, d'où l'on conclut généralement que le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, le plus petit au plus petit et le moyen au moyen.

Des formules (44), en supposant $2T = A'' + A' + A$, j'ai déduit

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C'' - \tang^2 \tfrac{1}{2} C' = \frac{-\cos T \sin (A''-A') \sin A}{\cos(T-A)\cos(T-A')\cos(T-A'')};$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} C' - \tang^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{-\cos T \sin (A'-A) \sin A''}{\cos (T-A)\cos (T-A')\cos (T-A'')}.$$

Les seconds membres sont entièrement positifs quand $A'' > A'$ et $A' > A$, d'où il résulte que $C'' > C'$ et $C' > C$ si l'on a $A'' > A'$ et A' et $A' > A$, d'où l'on conclut généralement que le plus grand côté est toujours opposé au plus grand angle, le plus petit au plus petit, et le moyen au moyen.

63. Ce double théorème est utile pour lever l'incertitude dans les cas douteux de la trigonométrie. Il en résulte encore qu'un angle ne peut devenir plus ouvert sans que le côté opposé ne reçoive une augmentation, et qu'un côté ne peut pas s'allonger sans que l'angle opposé ne reçoive une augmentation, ce qui se démontre encore par le théorème fondamental $\cos C'' = \cos A'' \sin C \sin C' + \cos C \cos C' = \cos (C'-C) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A'' \sin C \sin C'$. Plus A'' augmente, plus le 2e membre diminue; plus $\cos C''$ diminue, plus C'' augmente; soit $\cos(C'-C) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A'' \sin C \sin C$; $\cos C'' = 0$ et $C'' = 90°$, si A'' augmente encore, le 2e membre est négatif et C'' obtus; plus A'' augmentera, plus $\cos C''$ augmentera, et l'angle alors augmente avec son cosinus; ainsi A'' croissant depuis 0 jusqu'à 180°, C'' augmentera toujours.

64. Soit, ♈NABC (fig. 40) l'écliptique ou un grand cercle quelconque, P le pôle de ce cercle, PA, PB, PC des cercles de latitude, ou en général des arcs de 90° perpendiculaires à NC; ΠNDEF un autre grand cercle quelconque qui coupe le

premier en un point N qu'on appelle *nœud*, et sous un angle quelconque DNA qu'on appelle *inclinaison*.

Les arcs PD, PE, PF ou Δ, Δ', Δ'' sont les distances polaires des points d'intersection, les arcs AD, BE, CF ou β, β', β'' les latitudes de ces mêmes points.

Les angles DPE, EPF, DPF ont pour mesure les arcs AB, BC, AC :

$$\left.\begin{array}{l} AB = NB - NA = A' - A \\ BC = NC - NB = A'' - A' \\ AC = NC - NA = A'' - A \end{array}\right\} \text{Les A indiquent les arcs de distances au nœud N.}$$

Par notre troisième théorème,

$$\cot PED = \frac{\cot \Delta \sin \Delta'}{\sin A' - A} - \cos \Delta \cot (A' - A)$$

$$= \frac{\tang \beta \cos \beta'}{\sin (A' - A)} - \sin \beta' \cot (A' - A),$$

$$\cot PEF = \frac{\cot \Delta'' \sin \Delta'}{(\sin A'' - A')} - \cos \Delta' \cot (A'' - A')$$

$$= \frac{\tang \beta'' \cos \beta'}{\sin (A'' - A')} - \sin \beta' \cos (A'' - A').$$

Mais $PED = 180° - PEF$, donc $\cot PED = - \cot PEF$, donc

$$\frac{\tang \beta \cos \beta'}{\sin (A' - A)} - \sin \beta' \cot (A' - A)$$

$$= - \frac{\tang \beta'' \cos \beta}{\sin (A'' - A')} + \sin \beta' \cot (A'' - A');$$

et
$$\frac{\tang \beta \cos \beta' - \sin \beta' \cos (A' - A)}{\sin (A'' - A)}$$

$$= - \frac{\tang \beta'' \cos \beta' + \sin \beta' \cos (A'' - A')}{\sin (A'' - A')};$$

$$\tang \beta \cos \beta' \sin (A'' - A') - \sin \beta' \cos (A' - A) \sin (A'' - A')$$
$$= - \tang \beta'' \cos \beta' \sin (A' - A) + \sin \beta' \cos (A'' - A') \sin (A' - A);$$

et
$$\tang \beta \sin (A'' - A') + \tang \beta' \sin (A' - A)$$
$$= \tang \beta' [\sin (A'' - A') \cos (A' - A) + \cos (A'' - A) \sin (A' - A)]$$
$$= \tang \beta' \sin (A'' - A' + A' - A) = \tang \beta' \sin (A'' - A); \quad \text{d'où}$$

$$\tang \beta \sin (A'' - A') + \tang \beta'' \sin (A' - A) = \tang \beta' \sin (A'' - A),$$

équation

équation remarquable, facile à retenir, et qui exprime que les points D, E, F sont dans un même plan incliné sur le cercle des A ou NC.

65. Soit ABC un triangle rectiligne quelconque, abaissez la perpendiculaire AD dans l'angle A que vous voulez calculer par l'angle C et les deux côtés qui le comprennent :

$$\text{tang } A = \frac{BD}{AD} = \frac{BC \sin C}{AC - BC \cos C}$$

$$\frac{\left(\frac{BC}{AC}\right) \sin C}{1 - \left(\frac{BC}{AC}\right) \cos C} = \frac{m \sin C}{1 - m \cos C};$$

Or on sait que $A = \text{tang } A - \frac{1}{3} \text{tang}^3 A + \frac{1}{5} \text{tang}^5 A - \text{etc.}$

Portez dans cette expression la valeur $\text{tang } A = \frac{m \sin C}{1 - m \cos C}$, et ses puissances impaires ; réduisez les puissances en séries et vous arriverez par un calcul aisé, mais fort long, à la série suivante $A = \frac{m \sin C}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 2C}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3C}{\sin 3''} + \text{etc.}$ série dont la loi est visible et dont je fais un usage continuel depuis vingt-cinq ans. J'ai démontré ailleurs cette série par le calcul différentiel ; on peut la démontrer par l'expression imaginaire de la tangente.

66. Si l'on avait $\text{tang } A = \frac{m \sin C}{1 + m \cos C}$, la série serait la même, à l'exception des signes

$$A = \frac{m \sin C}{\sin 1''} - \frac{m^2 \sin 2C}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 3C}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

67. Si l'on avait $\text{tang } A = \frac{m \cos C}{1 \mp m \sin C}$ on aurait

$$A = \frac{m \cos B}{\sin 1''} \pm \frac{m^2 \sin 2B}{\sin 2''} - \frac{m^3 \cos 3B}{\sin 3''} \mp \frac{m^4 \sin 4B}{\sin 4''} + \text{etc.}$$

Les changemens de signes n'auraient lieu que de deux en deux termes.

68. Soit $\tang B = \cos C \tang A$; $B = A - x$,

$$\tang B = \frac{\tang A - \tang x}{1 + \tang A \tang x} = \cos C \tang A,$$

$$\tang A - \tang x = \cos C \tang A + \cos C \tang^2 A \tang x,$$

$$\tang A - \cos C \tang A = \tang x + \cos C \tang^2 A \tang x; \tang x$$

$$= \frac{\tang A - \cos C \tang A}{1 + \cos C \tang^2 A} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} C \tang A}{1 + \cos C \tang^2 A} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} C \sin A \cos A}{\cos^2 A + \cos C \sin^2 A}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} C \sin A \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C \sin^2 A} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C \sin^2 A}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{1 - \sin^2 \frac{1}{2} C (1 - \cos 2A)} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{1 - \sin^2 \frac{1}{2} C + \sin^2 \frac{1}{2} C \cos 2A}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{\cos^2 \frac{1}{2} C + \sin^2 \frac{1}{2} C \cos 2A} = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} C \cos 2A};$$

$$x = A - B = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} C \sin 2A}{\sin 1''} - \frac{\tang^4 \frac{1}{2} C \sin 4A}{\sin 2''}$$

$$+ \frac{\tang^6 \frac{1}{2} C \sin 6A}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

69. Soit A l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle, B la base, C l'angle compris, A—B sera la différence entre l'hypoténuse et la base.

Voulez-vous la différence entre la base et l'hypoténuse exprimée en fonction de B; par des calculs pareils, vous aurez

$$x = A - B = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} C \sin 2B}{\sin 1''} + \frac{\tang^4 \frac{1}{2} C \sin 4B}{\sin 2''}$$

$$+ \frac{\tang^6 \frac{1}{2} C \sin 6C}{\sin 3''} + \text{etc.}$$

La première de ces deux séries est due à M. Lagrange.

70. Soient A, A′, A″ les trois angles d'un triangle sphérique quelconque; $A + A' + A'' - 180° = y$; $A' + A'' = 180° - (A - y)$; $\frac{1}{2}(A' + A'') = 90° - \frac{1}{2}(A - y)$,

$$\tang \tfrac{1}{2}(A' + A'') = \cot \tfrac{1}{2}(A - y) = \frac{1 + \tang \frac{1}{2} A \tang \frac{1}{2} y}{\tang \frac{1}{2} A - \tang \frac{1}{2} y}$$

$$= \frac{\cot \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2}(C' - C'')}{\cos \frac{1}{2}(C' + C'')} \text{ (2e de Néper. 59)},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') + \cos \tfrac{1}{2}(C' + C'') \tang \tfrac{1}{2} A \tang \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'')$$
$$- \cot \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2}(C' - C'') \tang \tfrac{1}{2} y,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C'+C'')\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}y+\cot\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(C'-C'')\tang\tfrac{1}{2}y$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(C'-C'')-\cos\tfrac{1}{2}(C'+C''),$$

$$\tang\tfrac{1}{2}y=\frac{\cos\frac{1}{2}(C'-C'')-\cos\frac{1}{2}(C'+C'')}{\cos\frac{1}{2}(C'+C'')\tang\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}(C'-C'')\cot\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(C'+C'')\sin^2\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}(C'-C'')\cos^2\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\sin A}{\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''\sin^2\frac{1}{2}A-\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\sin^2\frac{1}{2}A\\+\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}C''\cos^2\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}C''\cos^2\frac{1}{2}A\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{\tang\frac{1}{2}C'\tang\frac{1}{2}C''\sin A}{1+\tang\frac{1}{2}C'\tang\frac{1}{2}C''(\cos^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}A)}$$

$$=\frac{\tang\frac{1}{2}C'\tang\frac{1}{2}C''\sin A}{1+\tang\frac{1}{2}C'\tang\frac{1}{2}C''\cos A}$$

et

$$\tfrac{1}{2}y=\frac{\tang\frac{1}{2}C'\tang\frac{1}{2}C''\sin A}{\sin 1''}-\frac{\tang^2\frac{1}{2}C'\tang^2\frac{1}{2}C''\sin 2A}{\sin 2''}$$
$$+\frac{\tang^3\frac{1}{2}C'\tang^3\frac{1}{2}C''\sin 3A}{\sin 3''}-\text{etc.}$$

Doublez cette série et vous aurez en secondes, l'excès des trois angles $(A+A'+A'')$ sur 180°. On s'était contenté de prouver que les trois angles surpassaient 180°, j'ai cherché cette formule pour les opérations de la mesure de la terre.

71. Prolongez les côtés C et C′ jusqu'à leur rencontre à 180° de leur première intersection (fig. 41). Le même théorème transporté au nouveau triangle sera

$\frac{1}{2}(a+a'+a''-180°)=\tang\frac{1}{2}c'\tang\frac{1}{2}C''\sin a-\frac{1}{2}\tang^2\frac{1}{2}c'\tang^2\frac{1}{2}C''\sin 2a+$etc.; mettons pour a sa valeur 180°—A, pour a', sa valeur (180°—A′) pour a'' sa valeur A″; enfin pour c', sa valeur 180°—C′, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}(180°-A-A'+A'')=\tfrac{1}{2}[180°-A-(A'-A'')]$$
$$=[(90°-\tfrac{1}{2}A)-\tfrac{1}{2}(A'-A'')]=\cot\tfrac{1}{2}C'\tang\tfrac{1}{2}C''\sin A$$
$$+\tfrac{1}{2}\cot^2\tfrac{1}{2}C'\tang^2\tfrac{1}{2}C''\sin 2A+\tfrac{1}{3}\cot^3\tfrac{1}{2}C'\tang^3\tfrac{1}{2}C''\sin 3A+\text{etc.}$$

Cette formule donne la demi-différence des angles inconnus A′ et A.

La formule première peut s'écrire

$\frac{1}{2}(A'+A'')-(90^\circ-\frac{1}{2}A)=\text{tang}\,\frac{1}{2}\,C'\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,C''\sin A$
$-\frac{1}{2}\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\,C'\text{tang}^2\frac{1}{2}\,C''\sin 2A+\frac{1}{3}\,\text{tang}^3\frac{1}{2}C\text{tang}^3\frac{1}{2}\,C''\sin 3A+\text{etc.}$

Cette formule donne la demi-somme des deux angles inconnus.

La somme des deux formules sera $\frac{1}{2}(A'+A'')-\frac{1}{2}(A'-A'')$, ou $A''=\text{tang}\,\frac{1}{2}\,C''\,(\cot\frac{1}{2}\,C'+\text{tang}\,\frac{1}{2}\,C')\sin A+\frac{1}{2}\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\,C''$ $(\cot^2\frac{1}{2}\,C'-\text{tang}^2\frac{1}{2}\,C')\sin 2A+\frac{1}{3}\,\text{tang}^3\frac{1}{2}\,C''(\cot^3\frac{1}{2}\,C'+\text{tang}^3\frac{1}{2}C')$ $\sin 3A+\text{etc.}$

La différence des deux formules $\frac{1}{2}\,(A'+A'')+\frac{1}{2}\,(A'-A'')$ $=(180^\circ-A)=A'-(180^\circ-A)=A'-(180^\circ-A)$
$=-\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C''\,(\cot\frac{1}{2}\,C'+\text{tang}\,\frac{1}{2}\,C')\sin A-\frac{1}{2}\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\,C')(\cot^2\frac{1}{2}C'$ $+\text{tang}^2C'\frac{1}{2})-\frac{1}{3}\,\text{tang}^3\frac{1}{2}\,C'\,(\cot^3\frac{1}{2}\,C'+\text{tang}^3\frac{1}{2}\,C')\sin 3A+\text{etc.}$

Ces séries feront connaître les deux angles inconnus; M. Lagrange les a démontrées d'une manière toute différente dans les Mémoires de Berlin, 1774. Il en a déduit la série (68) ci-dessus, comme un cas particulier. Au contraire, après avoir démontré le cas particulier, j'en déduis la formule générale.

72. Soit ABC un triangle sphérique quelconque,

$\cos AC=\cos ABC\sin BA\sin BC+\cos BA\cos BC$ ou $\cos C$ $=\cos(C+x)\cos D\cos D'+\sin D\sin D'$ en faisant $AC=C$; et $ABC=(C+x)$, $D=90^\circ-B$, $D'=90^\circ-BC$,
$\cos C=\cos C\cos x\cos D\cos D'-\sin C\sin x\cos D\cos D'$ $+\sin D\sin D'=\cos C\cos D\cos D'-2\sin^2\frac{1}{2}x\cos C\cos D\cos D'$ $-\sin C\cos D\cos D'\sin x+\sin D\sin D'$

$\sin x\cos D\cos D'\sin C+2\sin^2\frac{1}{2}x\cos D\cos D'\cos C$ $=\sin D\sin D'+\cos C\cos D\cos D'-\cos C$; $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$ $+2\sin^2\frac{1}{2}x\cot C=\dfrac{\sin D\sin D'\,\text{cosé}\,C+(\cos D\cos D'-1)\cot C}{\cos D\cos D'}$

$$=\frac{\text{cosé}\,C[\sin^2\frac{1}{2}(D'+D)-\sin^2\frac{1}{2}(D'-D)]}{\cos D\cos D'}$$

$$-\frac{\cot C[\sin^2\frac{1}{2}(D'+D)+\sin^2\frac{1}{2}(D'-D)]}{\cos D\cos D'}=2b.$$

Divisez tout par $2\cos^2\frac{1}{2}x$, et faites $\cot C=a$;

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,x+a\,\text{tang}^2\,\frac{1}{2}\,x=\frac{b}{\cos^2\frac{1}{2}\,x}=b+b\,\text{tang}^2\,\frac{1}{2}\,x,$$

$$(a-b)\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}x+\text{tang}\tfrac{1}{2}x=b;$$

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}x+\left(\frac{1}{a-b}\right)\text{tang}\tfrac{1}{2}x=\left(\frac{b}{a-b}\right)$$

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}x+\left(\frac{1}{a-b}\right)\text{tang}\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a-b}\right)^2$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{a-b}\right)$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}x=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)\pm\left[\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{a-b}\right)^2+\frac{1}{a-b}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)\left(1+\frac{4(a-b)^2b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)(1+4(a-b)b)^{\frac{1}{2}}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a-b}\right)(1+\text{tang}\,y)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2(a-b)\cos y}\qquad \cot\tfrac{1}{2}x=2(a-b)\cos y;$$

quand on a fait $\text{tang}\,y=2\sqrt{(a-b)b}$,

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{4}4b-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{4}4^2(a-b)b^2+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{6}4^3(a-b)^2b^3$$
$$-\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}4^4(a-b)^2b^4+\text{etc.}$$
$$=b+(a-b)b^2+\tfrac{3}{6}\cdot 4(a-b)^2b^3-\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot 4^2(a-b)^3b^4+\text{etc.}$$

Développez cette série, substituez-en la valeur dans la formule

$$\tfrac{1}{2}x=\text{tang}\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}\text{tang}^3\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}\text{tang}^5\tfrac{1}{2}x-\text{etc.}$$

et vous aurez

$$\tfrac{1}{2}x=b-ab^2+(\tfrac{2}{3}+2a^2)b^3-(3a+5a^3)b^4+(\tfrac{6}{5}+12a^2+14a^4)b^3,$$
$$-(10a+\tfrac{140}{3}a^3+42a^5)b^6$$
$$+(\tfrac{20}{7}+60a^2+180a^4+132a^6)b^7,-\text{etc.}$$

Tous ces termes doivent être divisés par sin 1″, et alors ils donneront $\tfrac{1}{2}x$ en secondes.

Cette série n'est commode que dans le cas où l'on peut se contenter des premiers termes.

La première série qui donne tang $\tfrac{1}{2}x$ est beaucoup plus commode à calculer, la loi en est simple et évidente ; on pour-

rait donc calculer de préférence tang $\frac{1}{2}x$ par les tables, en se contentant de l'avoir à 1 ou 2″ ; alors $\log \frac{1}{2}x = \log \tang \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \log \cos \frac{1}{2}x - \log \sin 1''$: le procédé est exact tant que x ne passe pas 6°. La valeur de $\cot \frac{1}{2}x$ est toujours exacte.

73. Cette série donne la différence entre le côté et l'angle opposé en fonction du côté ; or on peut l'avoir en fonction de l'angle en $C = (A - y)$; on aura par des calculs tout pareils

$$2 \sin \tfrac{1}{2}y \cos \tfrac{1}{2}y - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}y \cot A = \tang \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2} (D' + D)$$
$$- \cot \tfrac{1}{2} A \sin^2 \tfrac{1}{2} (D' - D) = 2b,$$

formule où le facteur b est un peu plus simple ; on fera $-\cot A = a$, et la même série donnera la solution.

Surface du triangle sphérique.

74. Soit un triangle sphérique quelconque A, A′, A″ (fig. 42), t la surface. Prolongez A′A jusqu'à ce qu'il devienne un cercle entier ; prolongez A′A″ jusqu'à la circonférence en a' ; prolongez AA″ jusqu'à la même circonférence en a ; $A'A''a' = 180°$; les triangles t et c réunis ont une surface égale à celle du fuseau dont l'angle est A″ ; car A″a et A″a', prolongés dans l'autre hémisphère, y formeraient un triangle dont les trois angles et les trois côtés seraient égaux à ceux du triangle t.

Soit F″ la surface de ce fuseau..... $t + c = F''$.
Les triangles $t + b$ formeront le fuseau A″.. $t + b = F'$.
Les triangles $t + a$ formeront le fuseau A... $t + a = F$.

$$3t + a + b + c = F + F' + F''.$$

Or les quatre triangles $t + a + b + c =$ hémisphère.

Donc

$$2t = F + F' + F'' - \text{hémisphère},$$
$$t = \tfrac{1}{2}(F + F' + F'') - \tfrac{1}{4}\text{ surface de la sphère},$$
$$= \tfrac{1}{2}(F + F' + F'') - \text{surface d'un grand cercle}.$$

Soit r le rayon de la sphère, π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. La circonférence du grand cercle sera

$2r\pi$, et la surface $r^2\pi = \frac{1}{4}$ surface de la sphère = fuseau de 90°. Ainsi $t = \frac{1}{2}(F + F' + F'') - r^2\pi$.

La surface du fuseau de 1° sera $\frac{r^2\pi . 1^\circ}{90^\circ}$, celle de A degrés sera $\frac{r^2\pi A}{90^\circ}$, ainsi

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2\pi A}{90^\circ} + \frac{r^2\pi A'}{90^\circ} + \frac{r^2\pi A''}{90^\circ}\right) - r^2\pi$$

$$= \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A + A' + A'') - \frac{r^2\pi . 180^\circ}{180^\circ} = \frac{r^2\pi}{180^\circ}(A + A' + A'' - 180^\circ)$$

$$= \frac{r^2\, 3.1415926 5}{648000} = r^2 \sin 1''\ (A + A' + A'' - 180^\circ)$$

$$= 2r^2(\tang\tfrac{1}{2}C' \tang t C'' \sin A - \tfrac{1}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}C' \tang^2\tfrac{1}{2}C'' \sin 2A + \text{etc.})(70);$$

de cette manière la surface du triangle sera exprimée en parties carrées du rayon de la sphère.

75. La surface du triangle c se déduit de celle de t, en mettant $\tang\frac{1}{2}(180^\circ - C') = \tang(90^\circ - \frac{1}{2}C') = \cot\frac{1}{2}C'$ pour $\tang\frac{1}{2}C'$;

$$c = 2r^2(\cot\tfrac{1}{2}C' \cot\tfrac{1}{2}C'' \sin A - \tfrac{1}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}C' \tang^2\tfrac{1}{2}C'' \sin 2A + \text{etc.}$$

La surface du fuseau A,

$$F = \frac{2r^2\pi A}{180^\circ} = 2r^2[(\tang\tfrac{1}{2}C' \tang\tfrac{1}{2}C'' + \cot\tfrac{1}{2}C' \cot\tfrac{1}{2}C'')\sin A$$
$$- \tfrac{1}{2}(\tang^2\tfrac{1}{2}C' \tang^2\tfrac{1}{2}C'' + \cot^2\tfrac{1}{2}C' \cot^2\tfrac{1}{2}C'')\sin 2A + \text{etc.}],$$

ou divisant par $2r^2$ et mettant pour $\frac{\pi}{180^\circ}$ sa valeur $\sin 1''$,

$$A \sin 1'' = [(\tang\tfrac{1}{2}C' \tang\tfrac{1}{2}C'' + \cot\tfrac{1}{2}C' \cot\tfrac{1}{2}C'')\sin A$$
$$- \tfrac{1}{2}(\tang^2\tfrac{1}{2}C' \tang^2\tfrac{1}{2}C'' + \cot^2\tfrac{1}{2}C' \cot^2\tfrac{1}{2}C'')\sin 2A + \text{etc.}].$$

Soit $C' = C'' = 90^\circ$;

$$A \sin 1'' = (2\sin A - \tfrac{1}{2}2\sin 2A + \tfrac{1}{3}2\sin 3A - \tfrac{1}{4}2\sin 4A + \text{etc.}),$$
$$\tfrac{1}{2}A \sin 1'' = \sin A - \tfrac{1}{2}\sin 2A + \tfrac{1}{3}\sin 3A - \tfrac{1}{4}\sin 4A.$$

76. $$\sin A = 2\cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}A = 2^2\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{4}A \sin\tfrac{1}{4}A$$
$$= 2^3\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{4}A \cos\tfrac{1}{8}A \sin\tfrac{1}{8}A$$
$$= 2^4\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{4}A \cos\tfrac{1}{8}A \cos\tfrac{1}{16}A \sin\tfrac{1}{16}A, \text{ etc.}$$
$$= A\cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{4}A \cos\tfrac{1}{8}A \ldots \cos\frac{1}{2^n}A.$$

On voit comment on pourrait trouver la surface d'une portion de la sphère céleste ou terrestre, qu'on aurait partagée en triangles sphériques.

Nous verrons qu'on partage la terre en plusieurs zônes, par des cercles qui ont les mêmes pôles. L'un de ces cercles est l'équateur EQ (fig. 43) ; il est à 90° du pôle. Deux autres sont CA et RI, tropiques du Cancer et du Capricorne ; les deux derniers sont les cercles polaires OL, MN.

Les arcs OP, PL, CE, AQ, ER, QI, MP′, P′N sont chacun de 23° 28′. Les arcs OC, AL, RM, NI sont $90° - 46° 56' = 43° 4'$. On demande la surface des zônes glaciales ou calottes sphériques OPL, MP′N, des zônes OLAC et RMNI, qu'on appelle *tempérées*, et de la double zône CAIR, qu'on appelle *zône torride*.

77. L'expression générale de la zône OLAC, dont la hauteur est bc, est circ. grand cercle. Hauteur zône $= 2r\pi . bc$ $= 2r\pi(\sin PC - \sin PO) = 4r^2\pi \sin\frac{1}{2}(PC - PO)\cos\frac{1}{2}(PC + PO)$. Ainsi en supposant la circonférence de 40,000,000 de mètres,

$$\text{surf. OPL} = 4r^2\pi\sin\tfrac{1}{2}(PO - o)\cos\tfrac{1}{2}(PO + o)$$
$$= 4r^2\pi \sin 11° 44' \cos 11° 44' = 210590000$$
$$\text{surf. OALC} = 4r^2\pi\sin\tfrac{1}{2}(PC - Po)\cos\tfrac{1}{2}(PC + Po)$$
$$= 4r^2\pi \sin 21° 32' \cos 45° 0' = 1321820000$$
$$\text{surf. CAIR} = 4r^2\pi\sin\tfrac{1}{2}(PR - PC)\cos\tfrac{1}{2}(PR + PC)$$
$$= 4r^2\pi \sin 46° 56' \cos 0° 0' = 2027840000$$

surf. RMNI = OALC 1321820000
surf. NP′N = OPL..... 210590000

surface entière en mètres carrés..... 5092660000

Différences et différentielles des lignes trigonométriques.

78. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
$= \sin A - 2\sin^2\frac{1}{2}B \sin A + \cos A \sin B$,

$$\sin(A+B) - \sin A = \Delta \sin A = \sin B \cos A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}B \sin A$$
$$= \sin\Delta A \cos A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A \sin A$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta A \cos\tfrac{1}{2}\Delta A \cos A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta A \sin A$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta A \cos\tfrac{1}{2}\Delta A \cos A(1 - \tan\tfrac{1}{2}\Delta A \tan A);$$

c'est la différentielle exacte de $\sin A$; si la variation de A est petite, on fait

$$d\sin A = dA \cos A \sin 1''.$$

79. $$\begin{aligned}\text{Cos}(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ &= \cos A - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} B \cos A - \sin A \sin B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B) - \cos A = \Delta\cos A &= -\sin\Delta A \sin A - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta A \cos A \\ &= -2\sin \tfrac{1}{2}\Delta A \cos \tfrac{1}{2}\Delta A \sin A - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta A \cos A \\ &= -2\sin \tfrac{1}{2}\Delta A \cos \tfrac{1}{2}\Delta A \sin A (1 + \text{tang} \tfrac{1}{2}\Delta A \cot A).\end{aligned}$$

La différentielle est $d\cos A = -dA \sin A \sin 1''$.

80. $$\text{Tang}(A+B) - \text{tang} A = \frac{\sin B}{\cos A \cos(A+B)},$$

$$\begin{aligned}\Delta \text{tang} A = \frac{\sin \Delta A}{\cos A \cos(A+\Delta A)} &= \frac{\sin \Delta A}{\cos^2 A \cos\Delta A - \cos A \sin A \sin\Delta A} \\ &= \frac{\text{tang}\Delta A \,\text{séc}^2 A}{1 - \text{tang}\Delta A \,\text{tang} A},\end{aligned}$$

$$\text{différentielle} = d\,\text{tang} A = \frac{dA \sin 1''}{\cos^2 A}.$$

81. $$\text{Cot}(A+B) - \cot A = -\frac{\sin B}{\sin A \sin(A+B)},$$

ou $$\Delta \cot A = -\frac{\sin \Delta A}{\sin A \sin(A+\Delta A)}$$

$$= -\frac{\text{tang}\Delta A \,\text{coséc}^2 A}{1 + \text{tang}\Delta A \cot A},$$

$$\text{différentielle} = d\cot A = -\frac{dA}{\sin^2 A}.$$

82. $$\begin{aligned}\text{Séc}(A+B) - \text{séc} A &= \frac{1}{\cos(A+B)} - \frac{1}{\cos A} \\ &= \frac{\cos A - \cos(A+B)}{\cos A \cos(A+B)} \\ &= \frac{2\sin \frac{1}{2} B \sin(A + \frac{1}{2} B)}{\cos A \cos(A+B)},\end{aligned}$$

$$\Delta \text{ séc } A = \frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta A \sin(A + \frac{1}{2}\Delta A)}{\cos A \cos(A + \Delta A)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta A \sin A \cos\frac{1}{2}\Delta A + 2\sin\frac{1}{2}\Delta A \cos A \sin\frac{1}{2}\Delta A}{\cos^2 A \cos\Delta A - \sin A \cos A \sin\Delta A}$$

$$= \frac{\sin\Delta A \sin A + \sin\Delta A \cos A \text{ séc } \frac{1}{2}\Delta A}{\cos^2 A \cos\Delta A - \sin A \cos A \sin\Delta A}$$

$$= \frac{\text{tang}\Delta A \text{ tang} A \text{ séc} A + \text{tang}\,\Delta A \text{ séc } A \text{ séc } \frac{1}{2}\Delta A}{1 - \text{tang}\,\Delta A \text{ tang } A},$$

$$d \text{ séc } A = \frac{dA \text{ tang } A}{\cos A}.$$

83. $$\Delta \text{cosec} A = \frac{1}{\sin(A+B)} - \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A - \sin(A+B)}{\sin A \sin(A+B)}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{1}{2}B \cos(A + \frac{1}{2}B)}{\sin^2 A \cos B + \sin A \cos A \sin B}$$

$$= -\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta A \cos(A + \frac{1}{2}\Delta A)}{\sin^2 A \cos\Delta A + \sin\Delta A \cos A}$$

$$= -\frac{2\sin\frac{1}{2}\Delta A \cos\frac{1}{2}\Delta A \cos A + 2\sin^2\frac{1}{2}\Delta A \sin A}{\sin A \cos\Delta A + \sin\Delta A \sin A \cos A}$$

$$= -\frac{\text{tang}\Delta A \cot A \text{ cosec} A + \text{tang}\Delta A \text{ séc}\frac{1}{2}\Delta A \text{ cosec} A}{1 + \text{tang}\,\Delta A \cot B},$$

$$d \text{ cosec } A = -\frac{dA \cot A}{\sin A}.$$

84. On a souvent besoin de connaître les variations que subissent les inconnues d'un triangle, quand les données qui servent à les calculer viennent à subir elles-mêmes quelque variation; pour cela, il suffit de différentier la formule algébrique.

On sait que la différentielle de la formule $x = ayz + b$ est $dx = aydz + azdy$; que la différentielle de la formule $x = \frac{y}{z} = \frac{dy}{z} + yd(z^{-1}) = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2} = \frac{zdy - ydz}{z^2}$; que la différentielle des constantes est 0; que le procédé consiste à différentier chaque terme d'une quantité, en supposant tous les facteurs constans, à la réserve d'un seul; que l'on fait ainsi varier successivement toutes les quantités qui ne

sont pas constantes. Mettez pour x, y, z les différentes lignes trigonométriques, et vous aurez ainsi par parties la différentielle totale d'une fonction trigonométrique. Plusieurs auteurs ont donné des collections plus ou moins amples de formules différentielles pour les différentes parties des triangles. J'en ai donné moi-même une suite plus complète encore, mais je n'en ai jamais fait d'usage; c'est pourquoi je la supprime ici.

LEÇON V.

Réfractions.

1. Nous avons reconnu que les étoiles reviennent constamment au méridien à des intervalles égaux, que nous avons partagés en 24 heures sidérales; qu'elles gardent sensiblement la même distance polaire pendant un tems assez considérable, et qu'elles reviennent encore après des intervalles égaux, à une même position sur leur courbe diurne. Ainsi les trois côtés du triangle sphérique PSZ étant constans pour le même point de cette courbe, l'angle au pôle entre la méridienne et le cercle de déclinaison est toujours le même pour une même distance au zénit, et réciproquement.

De cette régularité constante nous avons conclu que les étoiles tournent uniformément autour du pôle du monde, ensorte que les angles au pôle croissent d'une manière proportionnelle au tems, et en raison de 15° pour une heure sidérale. C'est ce qu'il s'agit de vérifier.

2. Si nous connaissons PZ distance du pôle au zénit, et PS distance polaire de l'étoile, nous pouvons observer ZS distance de l'astre au zénit, nous calculerons l'angle ZPS, et nous verrons s'il croît comme les tems écoulés depuis le passage au méridien.

3. Il faut donc d'abord déterminer PZ; rien de plus simple, mesurons les distances zénitales d'une étoile circompolaire, à ses deux passages au méridien, nous aurons

$$\text{au passage supérieur } N = PZ - \Delta,$$
$$\text{inférieur } N' = PZ + \Delta;$$

d'où

$$N + N' = 2PZ \quad \text{et} \quad PZ = \tfrac{1}{2}(N + N').$$

En cherchant ainsi PZ successivement par plusieurs étoiles, on a trouvé à Paris,

		Dist. polair.	Variation.
Par l'étoile polaire.....	41° 9′ 10″	1°44′	8″ pour 13° $\frac{1}{3}$.
Par β de la petite Ourse..	41. 9. 2	15. 3	15 pour 9 $\frac{2}{3}$.
Par α du Dragon.....	41. 8.47	24.41	7 pour 2 $\frac{1}{2}$.
Par α de la grande Ourse..	41. 8.40	27.12	650 pour 17 $\frac{2}{3}$.
Par la Chèvre.....	40.57.50	44.53	

Ensorte que la somme va toujours en diminuant à mesure que l'étoile est plus éloignée du pôle, et que la diminution est d'autant plus rapide que les distances polaires comparées sont plus grandes. Les étoiles tourneraient-elles autour de différens pôles, ou bien y aurait-il une cause inconnue qui rapproche les étoiles du pôle dans leurs passages inférieurs, et cette cause aurait-elle un effet plus sensible à mesure que l'étoile est plus voisine de l'horizon? Nous nous convaincrons que cette dernière explication est préférable en prenant la différence de déclinaison dans les passages supérieurs et dans les passages inférieurs. Ces dernières seront toujours plus petites; ainsi la chèvre et α de la grande Ourse paraissent différer en déclinaison de 9′ de moins au-dessous du pôle qu'au-dessus. D'où nous conclurons que la chèvre et α sont élevées par la cause inconnue, de deux quantités dont la différence est 9′. La différence est beaucoup moins sensible pour les étoiles plus voisines du pôle.

4. Pour trouver de combien est altérée chaque distance au zénit, observez la chèvre au passage supérieur; à sa distance zénitale, ajoutez 41° 9′ 10″; pour avoir la distance po-

laire, je choisis 41° 9′ 10″ comme la quantité la plus probable entre celles que nous avons trouvées, parce que l'irrégularité est moindre pour l'étoile polaire que pour toute autre.

Connaissant ainsi PZ et PS et l'angle P pour le tems écoulé depuis le passage, nous calculerons ZS, que nous comparerons à l'observation. Observant ainsi la chèvre vers 45° de distance zénitale, nous trouverons la distance calculée plus forte de 1′ que la distance observée; à 64° nous trouverons 2′; à 72°, nous trouverons 3′; à 76° 40′, nous en trouverons 4; à 79° $\frac{1}{3}$, 5, et environ 12′ à 86°.

Si nous prenons ensuite une étoile plus éloignée du pôle, nous trouverons vers 90° que la différence est de 33′.

5. Il s'agit de chercher la cause de ces irrégularités des distances zénitales, car si nous calculons en même tems tous les azimuts, nous ne trouverons aucune différence appréciable entre le calcul et l'observation, d'où il résulte que l'effet est toujours produit dans le plan vertical.

Ptolémée, dans son grand traité d'astronomie (l'Almageste), paraissait avoir complétement ignoré cet effet; mais dans son Optique, dont la Bibliothèque impériale possède la traduction latine, il en a donné une explication naturelle et satisfaisante, adoptée aujourd'hui par tous les astronomes.

6. On sait qu'en passant d'un milieu d'une certaine densité dans un milieu d'une densité différente, la lumière change de direction.

Nous observons que l'œil placé en O (fig. 44), ne peut appercevoir un objet E placé au fond d'un vase FHGB, si le rayon direct EBA passe au-dessus de l'œil; mais cet objet devient visible si l'on remplit d'eau le vase, parce que le rayon EB s'infléchit en B et prend la direction BO, ensorte que nous voyons l'objet E sur le rayon OBD, comme s'il était réellement en D. Réciproquement un œil placé en E ne pourrait voir que l'objet A si le vase était vide et non transparent; mais il verrait l'objet O si le vase était rempli d'eau, il le

verrait en A, c'est-à-dire, rapproché de la perpendiculaire AZ d'un angle ABO, qu'on appelle *angle de réfraction*.

7. Ptolémée avait mesuré les angles de réfraction pour tous les degrés d'inclinaison ZBO de 10 en 10 degrés, et sa table est sensiblement la même que celle qui résulte des expériences de Newton. Snellius et Descartes ont remarqué qu'il existait un rapport constant entre le sinus de l'angle d'incidence ZBO et le sinus de l'angle rompu ZBA. J'ai calculé, d'après les observations de Ptolémée, que ce rapport est celui de 4:3 en passant de l'air dans l'eau, de 3 : 2, en passant de l'air dans le vide. Newton explique cet effet par une attraction proportionnelle à la densité des milieux; le mouvement oblique UM (fig. 45) se décompose en un mouvement UK parallèle à la surface du milieu plus dense, et en un mouvement KM perpendiculaire à cette surface. Ce dernier est accéléré par l'attraction du fluide aqueux, et devient KN; VM devient UN, or

$$\frac{UN}{UM}=\frac{\sin M}{\sin N}=\frac{\sin PUM}{\sin PUN}=\frac{\sin(PUN+MUN)}{\sin PUN}$$

$$\frac{\sin(ZVL'+MUN)}{\sin ZVL'}=\frac{\sin(N+r)}{\sin N}=\frac{\sin N\cos r+\cos N\sin r}{\sin N}$$

$$=\cos r+\sin r\cot N=n=\text{constante}$$

$$n=\frac{1-\tang^2\frac{1}{2}r}{1+\tang^2\frac{1}{2}r}+\frac{2\tang^2\frac{1}{2}r}{1+\tang^2\frac{1}{2}r}\cot N\text{, d'où}$$

$$\tang^2\tfrac{1}{2}r-\frac{2\tang\frac{1}{2}r\cot N}{1+n}=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)\text{, d'où}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}r=\tfrac{1}{2}(n^2-1)\frac{\tang N}{n+1}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}(n^2-1)^2\frac{\tang^3 N}{n+1}+\text{etc.}$$

Ainsi la formule de réfraction est de la forme

$$\tang\tfrac{1}{2}r=A\tang N+B\tang^3 N+C\tang^5 N+\text{etc.}$$

N étant l'angle du rayon rompu avec la perpendiculaire à la surface réfringente.

8. Ptolémée imagina donc que la lumière venant des astres, ayant eu à traverser l'éther, qu'il supposait moins dense et

moins grossier que l'air atmosphérique, devait en entrant dans l'air, éprouver une réfraction qui rapprochait l'astre du zénit. Mais cette idée de Ptolémée resta ensevelie avec son Optique. Alhazen la reproduisit, mais ni Ptolémée ni Alhazen n'entreprirent de déterminer la quantité des réfractions.

9. Tycho qui s'était aperçu que la hauteur de l'équateur, déduite des deux solstices, n'était pas le complément exact de la hauteur du pôle, avait tenté de déterminer la réfraction qui convient à chaque distance zénitale; sa table ne suppose aucune formule, sa réfraction est de 34′ à l'horizon, elle n'est déjà plus que de 5″ à 45°, et plus haut il la supposait nulle, au lieu que Ptolémée dit expressément qu'elle ne doit cesser qu'au zénit.

10. D. Cassini supposa l'atmosphère sphérique, ainsi que la terre, et, le premier entre les modernes, il établit une hypothèse régulière.

11. Soit CO (fig. 46) le rayon de la terre sphérique, OB′ la hauteur de l'atmosphère CB = CB′ le rayon de la courbe supérieure, D un astre vu à l'horizon astronomique, c'est-à-dire, à 90° du zénit Z de l'observateur en O. Le lieu D n'est que le lieu apparent, l'astre sera plus bas, en A par exemple; ABE sera l'angle d'incidence ou l'angle que fait le rayon lumineux avec la perpendiculaire DE; DBE l'angle rompu; on aura

$$n = \frac{\sin ABE}{\sin DBE} = \frac{\sin (DBE+R)}{\sin DBE} = \frac{\sin (OBC+R)}{\sin OBC}$$
$$= \cos R = \sin R \cot OBC = \cos R + \sin R \operatorname{tang} u$$

R étant, comme on voit, la réfraction horizontale, et $u = OCB$ $= ZOD - EBD =$ distance du zénit E au zénit Z.

Soit $1 = CO =$ rayon de la terre;

$$CB = CB' = \sec u = 1 + \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u,$$
$$OB = \text{hauteur de l'atmosphère} = \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u;$$

$OE = \operatorname{tang} u$; c'est la demi-corde horizontale de l'atmosphère.

12. Soit un autre rayon FG, rompu de manière que l'astre paraisse sur le rayon HGO; FGI sera l'angle d'incidence, HGI

l'angle rompu, et l'on aura

$$n = \frac{\sin(\mathrm{HGI}+r)}{\sin \mathrm{HGI}} = \cos r + \sin r \cot \mathrm{HGI} = \frac{\sin(y+r)}{\sin y},$$

d'où $\sin(y+r) = n \sin y$; mais on a

$$\mathrm{CG} : \mathrm{CO} :: \sin \mathrm{COG} : \sin \mathrm{OGC} = \left(\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OG}}\right) \sin \mathrm{COG}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CG}}\right) \sin \mathrm{GOZ} = \left(\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CB}}\right) \sin \mathrm{N} = \left(\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CB}}\right) \sin \mathrm{N}$$

$$= \sin \mathrm{CBO} \sin \mathrm{N} = \cos u \sin \mathrm{N} = \sin y;$$

$$\sin \mathrm{N} - \sin y = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} u \sin \mathrm{N};$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\mathrm{N}-y) \cos \tfrac{1}{2}(\mathrm{N}+y) = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} u \sin \mathrm{N};$$

$$\sin(y-r) = n \sin y = (\cos \mathrm{R} + \sin \mathrm{R} \operatorname{tang} u) \cos u \sin \mathrm{N}$$

$$= (\cos \mathrm{R} \cos u + \sin \mathrm{R} \sin u) \sin \mathrm{N} = \cos(u - \mathrm{R}) \sin \mathrm{N}.$$

13. Tout dépend donc de cet angle u, en place duquel Cassini emploie la hauteur de l'atmosphère $= h = \mathrm{OB}' = \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} u$; il la détermine par des essais successifs.

$$\text{On a } n = \frac{\sin(y+r)}{\sin y} = \frac{\sin(y + \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r)}{\sin(y + \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r)}$$

$$= \frac{\sin(y + \frac{1}{2} r) \cos \frac{1}{2} r + \cos(y + \frac{1}{2} r) \sin \frac{1}{2} r}{\sin(y + \frac{1}{2} r) \cos \frac{1}{2} r - \cos(y - \frac{1}{2} r) \sin \frac{1}{2} r}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} r \cot(y + \frac{1}{2} r)}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} r \cot(y + \frac{1}{2} r)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \cot(y + \tfrac{1}{2} r) = \frac{n-1}{n+1} = \frac{\sin \mathrm{R} \operatorname{tang} u + \cos \mathrm{R} - 1}{\sin \mathrm{R} \operatorname{tang} u + \cos \mathrm{R} + 1}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \mathrm{R} \cos \frac{1}{2} \mathrm{R} \operatorname{tang} u - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \mathrm{R}}{2 \sin \frac{1}{2} \mathrm{R} \cos \frac{1}{2} \mathrm{R} \operatorname{tang} u + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \mathrm{R}}$$

$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \left(\frac{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{R}}{1 + \operatorname{tang} u \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{R}}\right)$$

$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \operatorname{tang}(u - \tfrac{1}{2} \mathrm{R}),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{R} \operatorname{tang}(u - \tfrac{1}{2} \mathrm{R}) \operatorname{tang}(y + \tfrac{1}{2} r),$$

$$r = 58'' 7265 \operatorname{tang}(y + \tfrac{1}{2} r)$$

$$= 58'',7265 \operatorname{tang}(\mathrm{N} - x)$$

en faisant $x = (\mathrm{N} - y - \frac{1}{2} r)$.

14. Ainsi la théorie de Cassini conduit à une équation où l'on voit que la réfraction est proportionnelle à une constante multipliée par la tangente de la distance au zénit, diminuée d'une variable qui dépend de la réfraction même que l'on cherche, et qui variera avec la distance et la réfraction. Si nous nous arrêtons à la formule $r = p \text{ tang } (N - qr)$, la réfraction dépend de deux constantes que donnera l'observation; l'une sera $p = R \text{tang} (u - \frac{1}{2} R)$, l'autre, q facteur de r dans l'arc $(N - q\,r)$.

En supposant, comme Cassini, $R = 32' 20''$ et $r = 5' 28''$ à 80° de distance au zénit, j'ai trouvé $u = 2° 0' 12''$, d'où $h = \text{tang } u \text{ tang } \frac{1}{2} u = 0.0001158$ pour le rayon $CO = 1$; mais si nous faisons $CO = 3271200$ toises, nous aurons $h = 2000^T 4$; Cassini supposait 2000.

15. Il est bien sûr que l'atmosphère surpasse de beaucoup 2000^T, puisqu'on peut vivre et respirer sur le Mont-Blanc, qui en a 2400, que M. Humboldt s'est élevé, au Pérou, à plus de 3000^T, et que M. Gay-Lussac s'est élevé en ballon à 3600; mais il faut considérer que l'air est un fluide élastique dont les couches inférieures, affaissées sous le poids des couches supérieures, sont d'une densité plus grande; que la densité va ainsi en diminuant graduellement depuis la surface de la terre, jusqu'à la hauteur où l'air n'a plus assez de densité pour produire une réfraction sensible; que le rayon de lumière rencontrant sans cesse des couches plus denses, s'infléchit continuellement; que la route de la lumière, au lieu d'être rectiligne, comme le suppose Cassini, doit être une courbe; que nous devons voir l'astre sur la tangente de la courbe; et qu'en supposant la route rectiligne, Cassini supposait tacitement une atmosphère d'une densité constante et moyenne, et que son atmosphère de 2000^T équivaut à notre atmosphère dépouillée de son élasticité et ramenée à cette densité moyenne et constante. La formule de Cassini ne peut donc être qu'approximative; mais son hypothèse donnait, par des règles simples, des réfractions sensiblement exactes, surtout pour le tems.

16. Bradley donna sans démonstration la formule $r = 57''$ tang $(N - 3r)$, formule toute semblable à celle que je tire de l'hypothèse de Cassini, excepté que le facteur 3 est constant, au lieu que le facteur q était variable.

Tous les astronomes adoptèrent la formule de Bradley; Simpson, Boscovich et Duséjour, en partant de quelques hypothèses physiques non démontrées, donnèrent la formule $m \sin N = \sin (N - nr)$.

Supposons $N = 90°$; r deviendra la réfraction horizontale R, nous aurons $m = \sin (90° - nR) = \cos nR$ et la formule sera $\cos nR \sin N = \sin (N - nr)$,

d'où $1 : \cos nR :: \sin N : \sin (N - nr)$,

$1 + \cos nR : 1 - \cos nR :: \sin N + \sin(N - nr) : \sin N - \sin (N - nr)$,

$1 : \text{tang}^2 \frac{1}{2} nR :: \text{tang} (N - \frac{1}{2} nr) : \text{tang} \frac{1}{2} nr$,

$\text{tang} \frac{1}{2} nr = \text{tang} \frac{1}{2} nR \ \text{tang} \frac{1}{2} nR \ \text{tang} (N - \frac{1}{2} nr) \ldots\ldots (a)$

ou $r = p \ \text{tang} (N - qr)$.

17. C'est toujours à peu près la formule de Cassini. En développant la formule (a), on obtient

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nr + \left(\frac{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} nR}{\text{tang } N}\right) \text{tang} \tfrac{1}{2} nR = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR,$$

et

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} nr = -\frac{\cot N}{2\cos^2 \frac{1}{2} nr} \pm \left(\frac{\cot^2 N}{4\cos^4 \frac{1}{2} nR} + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} nR\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\cot N}{2\cos^2 \frac{1}{2} nR} \left[(1 + \sin^2 nR \ \text{tang}^2 N)^{\frac{1}{2}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\text{tang } x = \sin nR \ \text{tang } N$, notre équation devient

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} nr = \frac{\cot N \ \text{tang } x \ \text{tang} \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} nR} = \frac{\cot N \sin nR \ \text{tang} N \ \text{tang} \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} nR}$$
$$= \frac{\sin nR \ \text{tang} \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} nR} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} nR \ \cos \frac{1}{2} nR \ \text{tang} \frac{1}{2} x}{2 \cos^2 \frac{1}{2} nR}$$
$$= \text{tang} \tfrac{1}{2} nR \ \text{tang} \tfrac{1}{2} x; \quad \text{et } r = R \ \text{tang} \tfrac{1}{2} x,$$

sans erreur de plus de $0'',003$ même à l'horizon, ensorte que

le calcul se réduit aux formules suivantes qui ont toute l'exactitude que comporte cette hypothèse;

$\text{tang}\, x = \sin n\text{R} \text{ tang N}$; $r = \text{R tang } \frac{1}{2} x$, et $r' = \text{R cot } \frac{1}{2} x$;

r et r' sont les réfractions pour les distances zénitales N et 180° — N; cette dernière est toujours la plus forte et les réfractions vont toujours en augmentant même au-dessous de l'horizon.

18. Cette même équation se développera en série de la forme $r = \text{tang N} + \text{B tang}^3 \text{N} + \text{C tang}^5 \text{N} + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots$, $r = 56'',64775 \text{ tang N} - 0'',04664,\ 6958 \text{ tang}^3 \text{N} + 0'',00007,\ 78129 \text{ tang}^5 \text{N} - 0'',00000.0158 \text{ tang}^7 \text{N} + \text{etc.}$ On ne peut regarder ces divers coefficiens que comme des approximations qui nous fourniront au moins des remarques utiles.

Dans ce système, comme dans celui de Cassini, il suffit de deux réfractions observées pour déterminer les deux constantes n et R, en effet $\frac{r'}{r} = \frac{\text{R tang } \frac{1}{2} x'}{\text{R tang } \frac{1}{2} x} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} x'}{\text{tang } \frac{1}{2} x}$;

Mais

$$\text{tang}\, x = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2} x}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x}, \text{ donc } \frac{r'}{r} = \frac{\frac{1}{2} \text{ tang } x'}{\frac{1}{2} \text{ tang } x} \cdot \frac{(1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x')}{(1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x)}$$

$$= \frac{\text{tang N}'}{\text{tang N}} \cdot \frac{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x'}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x} = \frac{\text{tang N}'}{\text{tang N}} \cdot \frac{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} x'}{1 - \left(\frac{r}{r'}\right) \text{tang}^2 \frac{1}{2} x'};$$

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} x' = \frac{\text{tang N}' \cot \text{N} - \frac{r'}{r}}{\text{tang N}' \cot \text{N} - \frac{r}{r'}}.$$

Connaissant x' on aura

$\text{tang } \frac{1}{2} x = \frac{r}{r'} \text{ tang } \frac{1}{2} x'$; $\text{R} = r' \cot \frac{1}{2} x' = r \cot \frac{1}{2} x$. Sin R $= \text{tang } x \cot \text{N} = \text{tang } x' \cot \text{N}'$; $n = \frac{n\text{R}}{\text{R}}$ et le problème est résolu, quelles que soient les réfractions r et r, mais si $r' = \text{R}$; $\text{tang } \frac{1}{2} x' = 1$, $\text{tang } \frac{1}{2} x = \frac{r}{\text{R}}$,

$$\sin nR = \tang x \cot N = \frac{2\frac{r}{R}\cot N}{1-\frac{r^2}{R^2}} = \frac{2Rr\cot N}{(R+r)(R-r)}.$$

En prenant dans la table de Cassini $\frac{r}{R} = \frac{5'\,28''}{32'\,20''}$,

on trouvera $n = 6{,}5299$; $\frac{1}{2}n = 3{,}26495$; r à $45° = 59'',5$.

En prenant dans la table de Bernoulli $\frac{r}{R} = \frac{5'\,28''}{34.53}$,

on trouve $\frac{1}{2}n = 2{,}7931$ et r à $45° = 59''\,26$, au lieu de $63''$ que donne Bernoulli.

En prenant dans la table de Newton $\frac{r}{R} = \frac{4'\,51''}{33.45''}$

$\frac{1}{2}n = 2.646$ et à $45°$ $r = 52''\,55$, au lieu de $54''$ que donne la même table.

La table de Mayer n'est, comme celle de Bradley, qu'un corollaire de la formule de Simpson, il fait $\frac{1}{2}n = 3,15$.

19. M. Laplace, d'après une théorie plus complète et plus approfondie, donne la formule

$r = (a + \frac{2}{3}a^3 - ab)\tang N - ab\tang^3 N$ en faisant $b = 0.00125251$.

Quant au coefficient a, je l'ai tiré d'une multitude d'observations, et je l'ai trouvé de $57'',2$ à fort peu près.

Cette formule ne sert que jusqu'à $74°$ de distance zénitale, pour les $16°$ suivans, la formule est plus compliquée et ne peut se mettre en table que par des artifices de calculs que nous ne pouvons exposer ici ; mais il m'a semblé curieux de voir ce que les réfractions de cette table donneraient pour n. En y prenant $\frac{r}{R} = \frac{5'\,19''\,8}{33'\,46''5}$, j'ai trouvé $\frac{1}{2}n = 2.91255$. Avec ces valeurs nos deux formules serviront à construire une table qui ne différerait d'avec la théorie de M. Laplace, que des quantités suivantes qui sont toutes au-dessous des variations irrégulières qu'on observe continuellement d'un jour à l'autre entre les réfractions pour ces distances. Ainsi la formule de Simpson, sans être rigoureuse, est d'une exactitude presque toujours suf-

fisante et celles que nous en avons déduites, sont d'une simplicité qui les rendent très-utiles dans la pratique.

N	Erreurs de Simpson.	Hypothèse de Cassini.
45°	— 0″3	— 1
80	0,0	0
81	+ 1,0	+ 1
82	+ 2,0	4
83	+ 4,0	8
84	+ 5	14
85	+ 9	26
86	+ 12	+ 0.48
87	+ 24	1.29
88	+ 36	2.46
89	+ 14	+ 4.16
90	0	0. 0

20. En prenant dans la même table d'autres réfractions, nous aurions eu d'autres valeurs un peu différentes pour $\frac{1}{2}n$. Ainsi le coefficient de r, dans la formule $r = p \tang(N - \frac{1}{2}nr)$, n'est pas constant, comme le supposait Bradley; il est variable comme dans la formule qui se tire de l'hypothèse de Cassini.

En prenant dans la table de M. Laplace, les réfractions 5′ 19″,9 et 33′ 46″,3, je trouve $u = 1° 53' 46''$, $u - R = 1° 20' 0$; $r = 57'',134 \tang(y + \frac{1}{2}r) = 57'',134 \tang(N - 2r)$. Les différences entre les deux tables sont telles qu'on les voit (19) sous le titre *Hypothèse de Cassini.*

21. Jusqu'ici nous n'avons parlé que de réfractions moyennes, c'est-à-dire, que nous avons supposé que la réfraction est toujours la même, pour une même distance au zénit; mais la réfraction dépend de la densité de l'atmosphère; cette den-

sité varie et fait varier la hauteur de la colonne de mercure dans le baromètre.

Soit B la hauteur du baromètre pour laquelle on a observé la réfraction r, on aura

$$B : B + dB :: r : r + dr = \frac{r(B + dB)}{B} = r\left(1 + \frac{dB}{B}\right).$$

La densité de l'air varie avec la température, elle décroît quand la chaleur augmente.

Si la réfraction r a été observée lorsque le thermomètre marquait t degrés de chaleur, et que le thermomètre monte jusqu'à $(t + dt)$, la réfraction $r + dr = \frac{r}{1 + mdt}$, m étant un coefficient que l'on tire de l'observation; en effet, soit r la réfraction pour le thermomètre t; la même réfraction pour le thermomètre t' sera

$$r' = \frac{r}{1 + mdt'};$$

pour le thermomètre t'',

$$r'' = \frac{r}{1 + mdt''};$$

on en conclut

$$\frac{r'}{r''} = \frac{1 + mdt''}{1 + mdt'};$$

$$r' + r'mdt' = r'' + r''mdt''; \quad -r''mdt'' - r'mdt' = r' - r'';$$

$$m = \frac{r' - r''}{r''dt'' - r'dt'}.$$

22. Supposons dt successivement exprimé en parties du thermomètre de Réaumur, c'est-à-dire en $\frac{1}{80}$ de l'intervalle entre la glace et l'eau bouillante, et en $\frac{1}{100}$ de ce même intervalle, on a trouvé pour m les valeurs suivantes :

	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{100}$
Bradley.	0.0055	0.0044
Lemonnier.	0.005455	0.004348
Mayer.	0.004527	0.003622
La Caille.	0.00370	0.00296
Bonne.	0.0040	0.0032
Laplace.	0.0049	0.003933

23. Ainsi la réfraction vraie $r+dr=\left(\frac{1+\frac{dB}{B}}{1+mdt}\right)r$, d'où j'ai déduit $dr=r\left(\frac{dB}{B}-\frac{mdt}{1+mdr}-\frac{dB}{B}\cdot\frac{mdt}{1+mdt}\right)$.

On peut faire une table des logarithmes $\left(\frac{1+dB}{B}\right)$ et des complémens arithmétiques des logarithmes $(1+mdt)$; ces deux logarithmes, ajoutés au logarithme de r, donneront $\log(r+dr)$.

On peut faire des tables en nombres de $\frac{dB}{B}$, et $\frac{mdt}{1+mdt}$, et se servir de ces nombres pour multiplier r, et l'on saura, d'après l'état du baromètre et du thermomètre, réduire une réfraction à la réfraction moyenne; on ajoutera à la distance zénitale observée la valeur de dr; on réduira cette distance à celle qu'on aurait trouvée dans l'état moyen de l'atmosphère; elle ne sera plus affectée que de la réfraction moyenne. Mais on voit que cette correction n'est pas parfaitement sûre, puisque les astronomes sont peu d'accord sur le coefficient m.

24. Toutes les formules et les tables de réfraction dépendent de la distance apparente au zénit, et c'est ce qu'il y a de plus commode pour corriger une observation; mais si l'on a une distance calculée, qui ne peut être qu'une distance vraie, à changer en une distance apparente, on amènera facilement

les formules à ne dépendre que de la distance vraie $=V$; en effet, $V=N+r$, et $N=V-r$;

$$r=p\,\text{tang}(N-\tfrac{1}{2}nr)=p\,\text{tang}\,(V-r-\tfrac{1}{2}nr)$$
$$=p\,\text{tang}[V-(\tfrac{1}{2}n+1)r]=p\,\text{tang}\left[V-\left(\frac{n+2}{2}\right)r\right].$$

En traitant cette formule comme celle qui dépend de V, j'ai trouvé que si l'on faisait

$$\text{tang}\,u=\left(\frac{2(n^2+2n)^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}n\text{R}}{n+(n+2)\text{tang}^2\frac{1}{2}n\text{R}}\right)\text{tang}\,V,$$

on aurait

$$r=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}\text{R}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}n\,,$$

et supposant $n=6$ et $\text{R}=33'$,

$$\text{tang}\,u=0.0662437\,\text{tang}\,V,$$
$$r=1709'',36\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u=\text{R}\sin 60^\circ\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u.$$

25. Après avoir établi les formules, donnons les moyens de trouver les constantes.

Il est bien reconnu que la réfraction est nulle au zénit, qu'elle est de 10″ à 10° de distance, et que dans les dix premiers degrés elle croît d'une seconde par degré.

Observez donc une étoile qui passe près du zénit; à la distance observée N, ajoutez N.1″, vous aurez la distance vraie; à cette distance ajoutez $PZ=(90^\circ-H)$, vous aurez la distance polaire; mais il faudrait connaître PZ exactement; or la réfraction ayant élevé la polaire de r dans son passage supérieur, et de r' dans son passage inférieur, vous avez pris pour PZ le milieu entre ces deux distances, et vous connaissez véritablement $PZ-\frac{1}{2}(r+r')$.

Vous en concluez $\Delta'=N+N.1''+PZ-\frac{1}{2}(r+r')$; donc votre distance est trop faible de $\frac{1}{2}(r+r')$; cette erreur est inévitable dans une première recherche; mais nous la corrigerons ensuite.

Vous observerez ensuite la même étoile à différentes distances, depuis 45° jusqu'à l'horizon.

Vous calculerez $\cos N = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D$; vous commettrez une erreur sur $\cos N$ et sur $\sin N$; mais en différentiant,

$$\begin{aligned}
-dN \sin N &= -dH \cos P \sin H \cos D - dD \cos P \cos H \sin D \\
&\quad + dH \cos H \sin D + dD \sin H \cos D \\
&= -dH \cos P (\sin H \cos D + \cos H \sin D) \\
&\quad + dH (\sin H \cos D + \cos H \sin D) \\
&= -dH \cos P \sin (H + D) + dH \sin (H + D) \\
&= +dH \sin(H+D)(1 - \cos P) = -2dH \sin^2 \tfrac{1}{2} P \sin(H+D),
\end{aligned}$$

$$dN = -\frac{2dH \sin^2 \frac{1}{2} P \sin (H + D)}{\sin N}.$$

Telle est la correction dont N aurait besoin ; or vous faites $r = N -$ distance observée ; donc

$$\begin{aligned}
dr = dN &= -\frac{2dH \sin^2 \frac{1}{2} P \sin (H + D)}{\sin N} \\
&= -\frac{(r' + r'') \sin^2 \frac{1}{2} P \cos (H + D)}{\sin N}.
\end{aligned}$$

La hauteur du pôle étant trop grande, vous aurez des réfractions trop petites.

Si l'étoile passe près du zénit, $H+D$ différera peu de $2H$; $\sin^2 \frac{1}{2} P$, vers 6 heures ou environ, différera peu de $\frac{1}{2}$; $\sin N$ vers l'horizon, différera peu de l'unité ; vous aurez donc $dr = -dH \sin 2H$, c'est-à-dire que dans tous climats, dr diffère très-peu de dH en valeur, et en diffère par le signe.

26. Tycho imagina une autre méthode; il fut imité par Bradley.

Soit S la distance solsticiale apparente au zénit en été, ω l'obliquité de l'écliptique ;

$$H - \omega = S + r,$$

la dist. apparente au solstice d'hiver $H + \omega = S' + r'$,

d'où $$2H = S + S' + r + r'.$$

Soit Δ la distance polaire d'une étoile voisine du pôle,

dans le passage supérieur $N + \varrho = 90° - H - \Delta$;

inférieur $N' + \varrho' = 90° - H + \Delta$

$$N + N' + \varrho + \varrho' = 180° - 2H.$$

$$2H = 180° - N - N' - \varrho - \varrho' = S - S' + r + r'$$

$$180° - N - N' - S - S' = r + r' + \varrho + \varrho'$$

$$\begin{aligned} 180° - N - N' - S - S' &= A\,\mathrm{tang}N + B\,\mathrm{tang}^3N + A\,\mathrm{tang}N' \\ &\quad + B\,\mathrm{tang}^3N' + A\,\mathrm{tang}S + B\,\mathrm{tang}^3S \\ &\quad + A\,\mathrm{tang}S' + B\,\mathrm{tang}^3S' \\ &= A(\mathrm{tang}N + \mathrm{tang}N' + \mathrm{tang}S + \mathrm{tang}S') \\ &\quad + B(\mathrm{tang}^3N + \mathrm{tang}^3N' + \mathrm{tang}^3S + \mathrm{tang}^3S') \end{aligned}$$

$$A = \frac{\left\{\begin{matrix} 180° - (N + N' + S + S') \\ - B(\mathrm{tang}^3N + \mathrm{tang}^3N' + \mathrm{tang}^3S + \mathrm{tang}^3S') \end{matrix}\right\}}{\mathrm{tang}N + \mathrm{tang}N' + \mathrm{tang}S + \mathrm{tang}S'}.$$

Nous ne dépendons plus de H, mais il faut supposer B bien connu.

Dans la formule de Bradley, que nous pouvons regarder comme une approximation, $B = -0'',0466$; donnons à B différentes valeurs, à commencer de $0'',05$, nous aurons

B	A	H	dA	dH
— 0″05	56″92	51° 28′ 39″65	+ 0″44	— 0″33
0,10	57,36	39,32	0,45	0,32
0,15	57,81	39,00	0,44	0,33
20	58,25	38,67	0,45	0,33
25	58,70	38,34	0,44	0,33
30	59,14	38,01		

Ici $dA = -\frac{4}{3}dH$, on voit donc que le premier terme de la réfraction s'augmente de ce que perd la latitude, à fort peu près; ainsi le problème serait indéterminé si la théorie n'avait pas déterminé le terme B, ou du moins le rapport de B au premier terme A.

27. Bradley, en imitant Tycho, a donné plus d'extension à la méthode.

Soit ZE′, ZF′ (fig. 47) deux distances apparentes au zénit égales entr'elles, et observées vers les deux équinoxes, les distances apparentes étant égales, les réfractions le seront aussi, et les distances vraies ZE, ZF le seront pareillement. Soit O le point solsticial sur l'écliptique FOE, les triangles ZOE, ZOF seront parfaitement égaux; les arcs EO, OF ou les distances au solstice seront égales; les distance ♈E, ♎F seront égales, ainsi que les déclinaisons AE, BF.

Si l'on a comparé ces deux jours, le soleil à la même étoile ε, on connaît le chemin AB du soleil en ascension droite; on connaîtra donc ♈A et ♈B, on saura ainsi l'instant où le soleil sera arrivé en ♈ et ♎ à 90° du point solsticial.

28. En observant le mouvement du soleil en déclinaison, on aura la distance zénitale apparente de l'équateur à l'instant où le soleil aura été dans les deux points équinoxiaux. En combinant ainsi les observations de quatre équinoxes,

Bradley trouve.....	$N = 51° \; 27' \; 28''$
Par un grand nombre d'observations de la polaire à ses deux passages, il trouve.....	$N' = 38 \;\; 30 \;\; 35$
La somme qui devrait être de 90°, n'est que de.....	$89 \;\; 58 \;\; 3$
La somme des deux réfractions ou de $r + r' =$.	$1 \;\; 57$

$$r + r' = A \text{ tang} N + A \text{ tang } N' = A \; (\text{tang } N + \text{tang } N')$$
$$= \frac{A \sin (N + N')}{\cos N \cos N'}, \text{ d'où } A = 57''046.$$

Dans les calculs on a égard à la parallèle du soleil 8″,6 sin N que l'on retranche des distances zénitales observées, parce qu'elle augmente les distances

$$N + 57'' \; 046 \text{ tang } N = 51° \; 28' \; 39'' \; 6$$
$$N' + 57 \; 046 \text{ tang } N' = 38 \;\; 31 \;\; 20 \;\; 4$$
$$90 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0$$

On a donc par cette méthode deux réfractions et la hauteur du pôle, mais en supposant B $\text{tang}^3 N$ et B $\text{tang}^3 N' = 0$.

En supposant $B = 0'',1$, on aurait eu $A = 57'',067$, et H $51° 28' 39'',56$, A serait plus fort et la hauteur du pôle plus faible.

Cette méthode donne assez bien le coefficient A, mais rien de plus. D'ailleurs elle dépend de la bonté de l'instrument.

29. Pour ne rien admettre qui ne soit donné par l'observation, j'ai pris quatre étoiles circompolaires observées avec grand soin par Méchain à Barcelone : chacune de ces étoiles donne une équation de la forme $180° - 2H = N + N' + A(\text{tang}N + \text{tang}N') + B(\text{tang}^3N + \text{tang}^3N') + C(\text{tang}^5N + \text{tang}^5N')$.

J'avais quatre équations et les quatre inconnues H, A, B C, la plus forte distance au zénit était de $82° \frac{1}{2}$, c'est supposer que trois termes suffisent pour cette distance (18).

L'élimination m'a donné

$r = 61'',1766 \text{ tang}N - 0'',2648 \text{ tang}^3N + 0'',002485 \text{ tang}^3N.$

Méchain avait corrigé ses distances zénitales des variations de la refraction par le coefficient n de Bradley (22). En employant celui de Mayer et recommençant les calculs, j'ai trouvé

$r = 63'',302 \text{ tang } N - 0'',34396 \text{ tang}^3 N + 0'',0033923 \text{ tang}^5 N.$

Tout cela s'écarte considérablement des réfractions admises généralement; mais les observations ne sont pas moins satisfaites, seulement la hauteur du pôle se trouve diminuée de l'augmentation du terme A (19).

En supposant successivement $A = 57'',131$, j'ai trouvé

$$r = 57'',131 \text{ tang } N + 0'',1495 \text{ tang}^3 N - 0'',02069 \text{ tang}^5 N + 0'',0029707 \text{ tang}^7 N,$$

En supposant $A = 58'', 59'', 60''$, j'ai trouvé

$$r = 58'' \text{ tang } N + 0'',060369 \text{ tang}^3 N - 0'',015727 \text{ tang}^5 N + 0'',0002563 \text{ tang}^5 N$$

$$= 59'' \text{tang } N - 0'',04077 \text{ tang}^3 N - 0'',01015415 \text{ tang}^5 N + 0,00016243 \text{ tang}^7 N$$

$$= 60'' \text{tang } N - 0'',14207 \text{ tang}^3 N - 0'' 0045053 \text{ tang}^5 N + 0'',000090099 \text{ tang}^7 N.$$

Les observations étaient également satisfaites, et la hauteur du pôle diminuait toujours, ensorte que $dH = dA$; et il est à re-

marquer qu'en supposant A plus petit et donné par d'autres observations, les signes des coefficiens cessent d'être alternatifs.

Avec trois étoiles seulement, j'ai trouvé

$$r = 57'',48 \text{ tang } N - 0'',07177 \text{ tang}^3 N ;$$

mais était-il permis de négliger les $\text{tang}^5 N$ à $82° \frac{1}{2}$?

30. La Caille a employé une méthode qu'on peut ramener à des formules analogues aux précédentes. Il avait observé à Paris un étoile E dont la distance véritable était ZPE, et la distance apparente ZPE'. S'étant transporté au cap de Bonne-Espérance, il voyait la même étoile éloignée de son zénit vrai V de l'angle VCE''; la distance véritable devait être VCE, et sans la somme des deux réfractions, la somme des deux distances aurait été égale à CKP + CEP; mais CEP est insensible, ainsi que nous le verrons (leçon VI); ainsi,

$$N + N' + r + r' = CKP,$$

on a donc

$$PKC - N - N' = (\text{tang}N + \text{tang}N') + B(\text{tang}^3N + \text{tang}^3N') + \text{etc.}$$

Autant il observait d'étoiles différentes, autant il pouvait avoir d'équations, telles que

$$PKC = Am + Bn + Cp + Dc \text{ etc.};$$

avec quatre étoiles, il pouvait déterminer PKC et trois coefficiens; avec cinq il avait un coefficient de plus.

31. Il s'y prit d'une autre manière; par des combinaisons ingénieuses, il détermina nombre de réfractions qu'il mit dans sa table, et il interpola les autres par la formule de Bernoulli, la seule qui fût connue. Il trouva des réfractions plus fortes qu'on ne croit généralement, et il crut voir qu'elles étaient plus petites de $\frac{1}{40}$ au cap qu'à Paris; on croit aujourd'hui qu'elles doivent être les mêmes dans toutes les parties habitables de la terre.

Voici la principale de ces combinaisons: La Caille détermina trois distances zénitales d'environ 60° chacun, dont la somme devait être de 180°; elle se trouva moindre de trois fois la réfraction qui convient à 60° distance; il prit le tiers

de cet arc pour la réfraction à 60°. La conclusion était indépendante de toute théorie ; mais on objecta que si son arc de 60° avait en moins une erreur de 12″, cette erreur se trouvait toute entière dans sa réfraction. On a cru, en conséquence, que ses réfractions renfermaient la correction des erreurs de son instrument, et cette conjecture est d'autant plus vraisemblable qu'avec ses tables, il a déterminé la latitude de Paris, telle que nous l'observons, l'obliquité et les déclinaisons des étoiles, telles que les ont trouvées Bradley et Mayer, avec d'autres instrumens et d'autres tables, qui peut-être aussi renfermaient les erreurs de leurs quarts de cercle.

M. Burg, qui a déterminé les réfractions d'après les observations mêmes de Bradley, les a trouvées plus fortes seulement d'une seconde à 45° ; mais si l'arc de Bradley était trop grand, ses réfractions seront trop petites.

32. J'ai voulu voir ce que je pourrais tirer des nombreuses observations de La Caille ; j'ai toujours trouvé **A** de 63″ au moins et souvent plus fort ; moins d'accord il est vrai que par les observations faites au cercle répétiteur, mais il est remarquable que les deux méthodes qui n'emploient que les étoiles, donnent toutes deux des réfractions plus fortes que celles qui emploient aussi le soleil. Quelques astronomes ont cru que les réfractions sont plus fortes la nuit que le jour, c'est ce qui est fort problématique ; on pourrait vérifier la chose en observant les étoiles circompolaires en des saisons différentes de jour et de nuit : on prendrait un nombre d'étoiles supérieur de l'unité à celui des coefficiens qu'on se proposerait de déterminer, afin d'avoir en même tems la hauteur du pôle ; les étoiles qu'on pourrait choisir sont la polaire, γ Céphée, β petite Ourse, α du Dragon, α, ζ ou ε ou δ, et enfin η de la grande Ourse ; ou bien la polaire γ, β, α de Céphée à Cassiopée et α du Cygne. Il faudrait, autant que possible, observer par des températures moyennes, afin d'éviter l'incertitude de la correction thermométrique.

33. On voit ce qu'on a fait pour déterminer les réfractions. Depuis le zénit jusqu'à 80° on peut faire, soit par la formule de Simpson et Bradley, soit même par celle de Cassini,

des tables qui diffèrent très-peu entr'elles, et moins que la meilleure de toutes ne diffère quelquefois des observations. En effet, à 90° du zénit, j'ai trouvé, d'un jour à l'autre, des différences de quatre minutes, quoique le baromètre et le thermomètre fussent à la même hauteur; à 89 degrés elles étaient de 45″ à 88° de 35″, à 86° de 30″, de 36″ à 82°, de 15″ à 79°, de 10″ à 78, de 6 à 7″ à 75°. Voyez les observations de Piazzi, vous y trouverez des différences pareilles. Il paraît donc impossible d'avoir des tables parfaitement exactes; mais les erreurs un peu sensibles n'ont lieu qu'à des distances où l'on observe rarement, et où les planètes ne descendent guères; ainsi on peut conclure que les réfractions sont assez bien connues pour l'usage; qu'il faut avec chaque table de réfraction employer la hauteur du pôle déterminée par les mêmes réfractions: alors toutes les tables seront à peu près aussi bonnes. Le baromètre et le thermomètre nous donnent l'état de l'atmosphère à l'endroit où le rayon lumineux entre dans la lunette; mais ces instrumens ne nous instruisent pas de l'état où sont les différentes couches de l'atmosphère qu'il a traversées. La réfraction que nous observons est la somme des réfractions qu'a subies le rayon lumineux dans les différentes couches de l'atmosphère, et il nous sera toujours impossible de calculer ces réfractions partielles, non plus que la quantité dont elles diffèrent des réfractions moyennes.

Au reste, MM. Oriani, Borda et Laplace ont reconnu que jusqu'à 74° cet inconvénient était insensible, et que la réfraction ne dépendait guères que de l'état de l'atmosphère à l'ouverture de la lunette.

Autres effets des réfractions.

34. Les réfractions augmentent avec les distances au zénit. La réfraction du bord inférieur du soleil est donc plus grande que celle du bord supérieur, le bord inférieur est donc plus élevé que le supérieur par la réfraction, il se rapproche de l'autre, et le diamètre vertical est diminué. Toutes les cordes parallèles à ce diamètre sont aussi diminuées dans la même raison; car les variations des réfractions sont propor-

tionnelles à celles de la distance au zénit dans l'espace d'un demi-degré; le disque du soleil paraîtra donc elliptique au lieu de paraître rond, et cet effet sera surtout sensible auprès de l'horizon où les réfractions varient plus rapidement, il peut aller jusqu'à 2′ 9″ sur le demi-diamètre du soleil.

35. Les demi-axes de l'ellipse du disque déformé seront l'un le demi-diamètre vrai ou δ, l'autre le demi-diamètre accourci par la réfraction; le rapport de ces demi-diamètres sera donc $\frac{\delta - dr}{\delta}$.

Soit cos I ce rapport; $1 - \cos I = 2\sin^2 \frac{1}{2} I = 1 - \frac{\delta - dr}{\delta} = \frac{dr}{\delta}$;

$\sin^2 \frac{1}{2} I = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{\delta}\right)$; dr est le changement de réfraction pour un changement $= \delta$ dans la distance vraie au zénit, il se prendrait dans une table de réfractions pour les distances vraies, et l'on aurait

$dV : d\varrho :: \delta : dr$, ainsi $\frac{dr}{\delta} = \frac{d\varrho}{dV}$; $d\varrho$ est le changement qui dans la table répond à la variation dV de distance vraie;

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} I = \frac{d\varrho}{dV} = \frac{d\varrho}{d(N - r)} = \frac{d\varrho}{d(N - dr)} = \frac{\frac{dr}{dN}}{1 - \frac{dr}{dN}};$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} I = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dN}\right)}{1 - \left(\frac{d\varrho}{dN}\right)}; \quad \cos^2 I = \frac{1 - \frac{3}{2}\frac{d\varrho}{dN}}{1 - \frac{d\varrho}{dN}};$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} I = -\frac{\frac{1}{2}\frac{d\varrho}{dN}}{1 - \frac{3}{2}\frac{dr}{dN}};$$

I sera l'inclinaison qui changerait le cercle égal au disque vrai du soleil en un disque elliptique égal au disque déformé par la réfraction; or, soit a l'inclinaison apparente d'un demi-diamètre quelconque par rapport à l'horizon, j'ai prouvé que l'accourcissement

l'accourcissement du demi-diamètre sera

$$\delta - \delta' = 2\delta \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \sin^2 a + \delta \sin^2 a \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} I \,(4\cos^2 a - 1);$$

on peut se contenter du premier terme et faire

$$\delta - \delta' = 2\delta \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \sin^2 a = \delta \sin^2 a \left(\frac{\frac{d\varrho}{dN}}{1 - \frac{2}{3}\frac{d\varrho}{dN}} \right).$$

δ peut être la ligne des cornes dans une éclipse, δ' serait la ligne apparente.

Pour avoir l'inclinaison, il faut mesurer la ligne des cornes apparente c et la hauteur verticale h de cette même ligne, on aura $\sin a = \frac{h}{c}$.

36. Le demi-diamètre horizontal éprouve lui-même une petite diminution qui provient de la convergence des verticaux vers le zénit.

Soit SMO (fig. 49) le diamètre du soleil ; ZS, ZO les verticaux qui sont tangens aux deux bords S et O, ZM l'arc perpendiculaire qui coupe en deux l'angle SZO. La réfraction portera le centre M en m, le bord S en a, ensorte que le demi-diamètre apparent sera ma. Soit $MS = \delta$; $ma = \delta'$, les triangles rectangles ZMS et Zma donnent

$$\sin SM : \sin am, \text{ ou } \sin \delta : \sin \delta' :: \sin ZM : \sin Zm,$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') :: \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(ZM - Zm) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(ZM + Zm),$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \cot (Zm + \tfrac{1}{2} r)$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \cot (N + \tfrac{1}{2} r) \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} r,$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta - \delta') = 28'',5 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \operatorname{tang}(N - 3r) \cot (N + \tfrac{1}{2} r),$$

$$\delta - \delta' = 57'' \operatorname{tang} \delta \text{ sans erreur sensible;}$$

ce qui fait constamment 0",5 pour le diamètre du soleil.

37. La réfraction accélère le lever des astres et retarde leur coucher. En effet, soit un astre A (fig. 50) à l'horizon astronomique. $ZA = 90°$. Le lieu vrai de l'astre est dans le vertical ZS à 90° 33′ du zénit. Du pôle P décrivez l'arc SB du

parallèle de l'étoile, sans la réfraction l'astre se serait levé en B avec l'angle horaire ZPB, au lieu qu'il paraît se lever en A avec l'angle horaire ZPS, la différence est l'angle BPS; or

$$\cos ZPS = -\sin R \sec D \sec H - \tang H \tang D$$
$$\cos ZPB = \qquad\qquad\qquad\qquad - \tang H \tang D$$

R étant la réfraction horizontale, D la déclinaison de l'astre, H la hauteur du pôle

$$\cos ZPB - \cos ZPS = \sin R \sec D \sec H$$
$$2 \sin \tfrac{1}{2} dP \sin (P + \tfrac{1}{2} dP) = \sin R \sec D \sec H,$$

d'où en développant et négligeant les termes du 3e ordre,

$$dP = \frac{R}{\cos D \cos H \sin P} - \frac{R \sin R \cot P}{\cos^2 D \cos^2 H \sin^2 P}$$
$$= \frac{R}{\cos D \cos H \sin P} - \frac{R \sin R \cos P}{\cos^2 D \cos^2 H \sin^3 P}$$
$$= \frac{R}{\cos D \cos H \sin P} + \frac{R \sin R \tang D \tang H}{\cos^2 D \cos^2 H \sin^3 P};$$

si la déclinaison était australe, tangente D serait négative, le second terme se retrancherait du premier, et l'effet serait moins considérable.

38. La réfraction qui varie rapidement près de l'horizon, fait que l'astre ne suit pas exactement un parallèle à l'équateur, et que si une étoile a suivi un des fils du réticule, le fil perpendiculaire ne représente plus un cercle horaire; alors les différences de passage à ce fil ne sont plus des différences d'ascension droite; on peut corriger cet effet par le calcul, mais on évite autant qu'on peut d'observer près de l'horizon.

39. La réfraction produit les crépuscules. Quand le soleil est à plus de 90° 33′ du zénit, la réfraction n'est pas assez forte pour que les rayons du soleil parviennent à notre œil, ils passent au-dessus de nos têtes, ils sont réfléchis irrégulièrement par les molécules atmosphériques; nous ne voyons pas l'image du soleil, mais une partie plus ou moins grande

de la voûte céleste est éclairée; cette lumière qui nous annonce le lever du soleil, va toujours en augmentant à mesure que le soleil approche de l'horizon ; on l'appelle *le crépuscule*.

Dès que l'on commence à distinguer les objets, on dit que le crépuscule du matin commence ; quand on cesse de les voir et de pouvoir se conduire, on dit que le crépuscule du soir finit.

40. Si l'on remarque un certain jour à quelle heure le crépuscule aura commencé ou fini, on peut calculer pour cet instant la distance du soleil au zénit, l'excès de cette distance sur 90° s'appelle *l'abaissement crépusculaire*. Les anciens supposaient cet abaissement de 18°. La Caille, dans la zône torride, l'a trouvé de 16 à 17° ; en France, suivant Lemonier, il varie depuis 17° jusqu'à 21. Cette observation n'est susceptible d'aucune précision.

Mais l'abaissement étant supposé, le triangle ZPA donne

$$\cos ZPA = -\frac{\sin 2a}{\cos H \cos D} - \tang D \tang H.$$

Quand le soleil est à l'horizon,

$$\cos ZPS = -\tang D \tang H,$$

d'où l'on conclut comme pour l'accélération du lever

$$\sin \tfrac{1}{2}(P'-P) = \frac{\sin 2a}{2 \sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \cos H \cos D}.$$

$(P'-P)$ divisé par 15, donnera la durée du crépuscule; cette expression prouve que la durée du crépuscule croît avec la déclinaison et avec la hauteur du pôle. Elle est la plus courte, quand H et D sont $=0$, car alors $\sin \frac{1}{2}(P'+P) = 1$, et $(P'-P) = 2a = 1^h\ 12'$.

41. Le crépuscule ne finit pas quand le soleil au méridien inférieur n'est pas à 18° au-dessous de l'horizon.

L'expression générale du plus grand abaissement sous l'horizon est de $(90° - H) + (90° - D) - 90° = 90° - (H + D)$, donc si $90° - (H + D) < 18°$ ou $72° < (H + D)$, le cré-

puscule ne finira pas; si $(H+D) = 72°$ le crépuscule du matin succédera immédiatement au crépuscule du soir; il n'y aura pas de nuit close, c'est ce qui a lieu à Paris vers le solstice d'été.

Le problème du plus court crépuscule a fort occupé les astronomes et les géomètres, mais il n'est que de simple curiosité. On a démontré qu'au jour du plus court crépuscule

$$\sin D = -\tang a \sin H;\ \sin \tfrac{1}{2}(P'+P) = \frac{\cos a}{\cos D};$$

$$\text{pour la demi-durée } \sin \tfrac{1}{2}(P'-P) = \frac{\sin a}{\cos H}.$$

$\tang a \tang H = \cos Z$ donne l'azimut du soleil au commencement du crépuscule; à la fin l'azimut est $180° - Z$.

LEÇON VI.

Des Parallaxes.

1. Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent suppose que l'axe de la révolution des fixes passe par l'œil de l'observateur, et que cet œil est le centre de la sphère qui paraît entraîner tous les astres dans son mouvement diurne. Mais cette supposition ne pourrait être rigoureusement vraie que pour un seul lieu de la terre, et très-probablement elle est également fausse pour tous. Il reste donc à voir si l'effet de la distance de l'observateur à l'axe et au centre des mouvement est toujours aussi insensible qu'elle nous a paru jusqu'ici; et pour cela il faut avoir des formules pour calculer cet effet.

2. Soit O (fig. 51) le lieu de l'œil, Z le zénit, C le centre des mouvemens, p le pôle, Cp le demi-axe de la révolution diurne,

ZOp sera la distance du pôle au zénit pour l'observateur O, ZCp la distance de ce même pôle au zénit pour le centre des mouvemens; or le triangle OPC donne

$$Cp : \sin O :: OC : \sin p = \frac{OC}{Cp} \sin ZOp,$$

ou

$$\sin p = \left(\frac{r}{R}\right) \sin (ZCp + OpC) = \left(\frac{r}{R}\right) \sin (N + p). \text{ (A)}$$

$$\sin p = \left(\frac{r}{R}\right) \sin N \cos p + \left(\frac{r}{\ }\right) \cos N \sin p,$$

$$\text{tang}\, p = \left(\frac{r}{R}\right) \sin N + \left(\frac{r}{R}\right) \cos N \text{ tang}\, p,$$

et

$$\text{tang}\, p = \frac{\left(\frac{r}{R}\right) \sin N}{1 - \left(\frac{r}{R}\right) \cos N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)},$$

ou (X. 211),

$$p = \left(\frac{r}{R}\right) \frac{\sin N}{\sin 1''} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{\sin 2N}{\sin 2''}$$
$$+ \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{\sin 3N}{\sin 3''} + \text{etc.} \ldots\ldots \text{(C)}.$$

La formule (A) est connue de tout tems; j'en ai d'abord déduit la formule (B) nécessaire quand on ne connaît que la distance vraie au zénit; mais elle avait été donnée par Mallet dans les Transactions philosophiques pour 1766; et comme elle n'est pas très-commode, j'en ai tiré la série (C) que je n'ai encore vue que dans des ouvrages de beaucoup postérieurs à la publication que j'en ai faite en 1789.

3. Ce que nous avons dit du pôle, ou d'une étoile qui serait au pôle, nous le dirons d'un astre quelconque, et quelle que soit la distance R de cet astre au centre des mouvemens et la distance $OC = r$ de l'observateur au centre des mouvemens; ainsi nos trois formules sont générales. La première sert quand on connaît la distance apparente au zénit, c'est-

à-dire, la distance augmentée de l'angle p. Les deux autres sont plus commodes quand on connaît la distance zénitale vraie, c'est-à-dire, telle qu'elle serait vue du centre des mouvemens.

4. L'angle p se nomme *parallaxe* de hauteur de l'astre p. Parallaxe est un mot grec qui signifie *changement*, et on entend spécialement par ce mot le changement qui s'opère dans la position apparente d'un astre, quand on l'observe d'un point qui n'est pas le centre de ses mouvemens.

Il y a diverses parallaxes que nous ferons connaître à mesure que l'occasion se présentera. Il ne s'agit dans ce chapitre que de celles que la position excentrique de l'observateur à la surface de la terre, produit dans les mouvemens diurnes.

Il est aisé de voir que l'effet de la parallaxe est tout entier dans le plan vertical ZCp, ou en général dans un plan qui passe par l'astre, le centre des mouvemens et l'observateur.

5. Il suit de nos formules que la parallaxe est insensible, si le rapport $\frac{r}{R}$ est fort petit; et qu'elle sera comme nulle si la distance R de l'astre au centre des mouvemens est incomparablement plus grande que celle de l'observateur à ce même centre; et c'est ce qui a lieu pour toutes les étoiles en qui on n'a pu jusqu'ici reconnaître la moindre parallaxe.

Pour que la parallaxe fût absolument nulle, il faudrait que l'on eût $R = \infty$ ou $r = o$, ce qui n'est nullement possible, mais si $\frac{r}{R} = \sin 1'' = \frac{1}{206264,8}$ la parallaxe sera de $1''$ au plus, et il sera impossible de s'en assurer par les observations.

6. Dans la formule (A), supposons $N + p = 90°$, nous aurons $\sin p = \left(\frac{r}{R}\right) \sin 90° = \frac{r}{R}$; l'astre paraîtra à l'horizon et la parallaxe sera la plus grande possible. Cette parallaxe s'appelle *horizontale;* désignons-la par la lettre ϖ. La pa-

rallaxe de hauteur ou de distance zénitale sera $\sin p = \sin \varpi \sin (N + p)$.

Le sinus de la parallaxe est donc proportionnel au sinus de la distance apparente au zénit, la parallaxe diminuera donc également, soit que l'asire soit au-dessus ou au-dessous de l'horizon, en quoi la parallaxe diffère des réfractions qui augmentent toujours avec la distance au zénit.

7. Si l'observateur, au lieu d'être en O au-dessus de l'axe, était au-dessous, la formule serait la même; il suffirait de rendre négative la distance r, d'où il suivrait que ϖ et p seraient aussi des quantités négatives, et la parallaxe diminuerait les distances au zénit, au lieu de les augmenter.

8. De la formule générale, on tire

$$1 : \sin \varpi :: \sin (N + p) : \sin p,$$

$$1 + \sin \varpi : 1 - \sin \varpi :: \sin (N + p) + \sin p : \sin (N + p) - \sin p,$$

$$\tang (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varpi) : \tang (45^\circ - \tfrac{1}{2}\varpi) :: \tang (\tfrac{1}{2}N + p) : \tang \tfrac{1}{2}N,$$

$$\tang (\tfrac{1}{2}N + p) = \tang \tfrac{1}{2}N \frac{\tang (45^\circ + \frac{1}{2}\varpi)}{\tang (45^\circ - \frac{1}{2}\varpi)} = \tang \tfrac{1}{2}N \tang^2 (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varpi).$$

Cette formule a été donnée par Lexell, qui l'avait d'abord démontrée d'une manière analytique fort longue.

9. $\tang (N + p) = \dfrac{\tang N + \tang p}{1 - \tang N \tang p}$; substituez pour $\tang p$ la valeur (B) ci-dessus, vous aurez après les réductions

$$\tang (N + p) = \frac{\sin N}{\cos N - \sin \varpi},$$

et

$$\cot (N + p) = \frac{\cos N - \sin \varpi}{\sin N}.$$

Soit, $a = 90^\circ - N$; $\tang (a - p) = \dfrac{\sin (90^\circ - a) - \sin \varpi}{\cos a}$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a - \varpi) \cos \frac{1}{2} (a + \varpi)}{\cos a},$$

a sera la hauteur vraie de l'astre, $(a-p)$ la hauteur apparente.

J'ai cherché cette formule pour un astre dont la parallaxe serait très-grande; tant que ϖ ne passera pas 1°, la formule (C) sera preferable.

10. La parallaxe, en portant l'astre de A en B, change l'angle horaire vrai ZPA en angle apparent ZPB$=$ZPA$+$APB $=(P+\Pi)$, et la distance polaire vraie ZA $=\Delta$ en ZB $=(\Delta+\pi)$; de là deux autres espèces de parallaxes qu'il faut aussi savoir calculer.

Parallaxe d'angle horaire $=\Pi$.
Parallaxe de distance polaire $=\pi$.

11. Le triangle parallactique APB donne

$$\sin PA : \sin B :: \sin AB : \sin APB = \sin \Pi = \frac{\sin AB \sin B}{\sin PA}$$
$$= \frac{\sin \varpi \sin (N+p) \sin B}{\sin \Delta}.$$

Mais le triangle ZBP donne

$$\sin ZB : \sin ZPB :: \sin PZ : \sin B = \frac{\sin PZ \sin ZPB}{\sin ZB}$$
$$= \frac{\cos H \sin (P+\Pi)}{\sin (N+p)};$$

donc

$$\sin \Pi = \left(\frac{\sin \varpi \cos H}{\sin \Delta}\right) \sin (P+\Pi) \ldots\ldots (D);$$

développez comme ci-dessus (2), et vous aurez

$$\tang \Pi = \frac{\left(\frac{\sin \varpi \cos H}{\sin \Delta}\right) \sin P}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \cos H}{\sin \Delta}\right) \cos P} \ldots\ldots (E);$$

d'où je tire comme ci-dessus,

$$\Pi = \left(\frac{\sin\varpi\cos H}{\sin\Delta}\right)\frac{\sin P}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin\varpi\cos H}{\sin\Delta}\right)^2\frac{\sin 2P}{\sin 2''}$$
$$+\left(\frac{\sin\varpi\cos H}{\sin\Delta}\right)^3\frac{\sin 3P}{\sin 3''} + \text{etc.}\ldots(F).$$

12. $\cot(P+\Pi) = \frac{1-\tang P\tang\Pi}{\tang P+\tang\Pi}$; mettez pour $\tang\Pi$ sa valeur ci-dessus, et vous aurez après les réductions,

$$\cot(P+\Pi) = \cot P - \frac{\sin\varpi\cos H}{\sin\Delta\sin P}\ldots\ldots(G).$$

Soit $\cot u = \frac{\sin\varpi\cos H}{\sin\Delta\sin P}$, et vous aurez

$$\cot(P+\Pi) = \cot P - \cot u = \frac{\sin(u-P)}{\sin u\sin P}.$$

Nous pouvons donc calculer la parallaxe horaire au moyen de l'angle horaire apparent, formule (D), ou de l'angle horaire vrai (formule E ou série F), et enfin l'angle horaire apparent (formule G).

13. Pour la distance polaire PB, les triangles ZPA et ZPB donneront

$$\cos Z = \frac{\cos PA - \cos PZ\cos ZA}{\sin PZ\sin ZA} = \frac{\cos PB - \cos PZ\cos ZB}{\sin PZ\sin PA};$$

d'où

$$\frac{\cos\Delta - \sin H\cos N}{\sin N} = \frac{\cos(\Delta+\pi) - \sin H\cos(N+p)}{\sin(N+p)},$$

et

$$\cos(\Delta+\pi) = \frac{\left\{\begin{array}{c}\cos\Delta\sin(N+p) - \sin H\cos N\sin(N+p)\\ +\sin H\cos(N+p)\sin N\end{array}\right\}}{\sin N}$$
$$= \frac{\cos\Delta\sin(N+p)}{\sin N} - \sin H\left(\frac{\sin(N+p)\cos N - \cos(N+p)\sin N}{\sin N}\right)$$
$$= \frac{\cos\Delta\sin(N+p)}{\sin N} - \frac{\sin H\sin p}{\sin N}$$
$$= \frac{\cos\Delta\sin(N+p)}{\sin N} - \frac{\sin\varpi\sin(N+p)\sin H}{\sin N}$$
$$= \frac{\sin(N+p)}{\sin N}(\cos\Delta - \sin\varpi\sin H)\ldots\ldots(I);$$

mais

$$\sin ZA : \sin ZPA :: \sin PA : \sin Z = \frac{\sin PA \sin ZPA}{\sin ZA} = \frac{\sin \Delta \sin P}{\sin N},$$

$$\sin ZB : \sin ZPB :: \sin PB : \sin Z = \frac{\sin PB \sin ZPB}{\sin ZB}$$

$$= \frac{\sin(\Delta+\pi)\sin(P+\Pi)}{\sin(N+p)};$$

d'où

$$\frac{\sin(N+p)}{\sin N} = \frac{\sin(\Delta+\pi)}{\sin \Delta} \cdot \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} \quad (a);$$

donc

$$\cos(\Delta+\pi) = \frac{\sin(\Delta+\pi)\sin(P+\Pi)}{\sin \Delta \sin P}(\cos \Delta - \sin \varpi \sin H),$$

et

$$\cot(\Delta+\pi) = \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P}\left(\cot \Delta - \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta}\right)$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P}(\cot \Delta - \cot \omega)$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)\sin(\omega-\Delta)}{\sin P \sin \omega \sin \Delta} \ldots\ldots (K).$$

Lexell avait donné cette formule avant moi (Éphémérides de Berlin, 17..), j'en tire

$$\cot\Delta - \frac{\cot(\Delta+\pi)\sin P}{\sin(P+\Pi)} = \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta},$$

$$\cot\Delta - \cot(\Delta+\pi) + \cot(\Delta+\pi) = \frac{\cot(\Delta+\pi)\sin P}{\sin(P+\Pi)} + \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta},$$

$$\cot\Delta - \cot(\Delta+\pi) = \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta} - \cot(\Delta+\pi) + \frac{\cot(\Delta+\pi)\sin P}{\sin(P+\Pi)},$$

$$\frac{\sin \pi}{\sin\Delta \sin(\Delta+\pi)} = \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta} - \frac{\cot(\Delta+\pi)[\sin(P+\Pi) - \sin P]}{\sin(P+\Pi)}$$

$$= \frac{\sin \varpi \sin H}{\sin \Delta} - \frac{2\sin\frac{1}{2}\Pi \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)\cot(\Delta+\pi)}{\sin(P+\Pi)},$$

$$\sin\pi = \sin \varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \frac{2\sin\frac{1}{2}\Pi \sin\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)\cos(\Delta+\pi)}{\sin(P+\Pi)},$$

$$\sin\pi = \sin \varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \frac{\sin\Pi \sin\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)\cos(\Delta+\pi)}{\cos\frac{1}{2}\Pi \sin(P+\Pi)}.$$

Mais

$$\frac{\sin\Pi\sin\Delta}{\sin(P+\Pi)} = \sin\varpi\cos H \ (10.D);$$

donc

$$\sin\pi = \sin\varpi\sin H\sin(\Delta+\pi) - \frac{\sin\varpi\cos H\cos(P+\frac{1}{2}\Pi)\cos(\Delta+\pi)}{\cos\frac{1}{2}\Pi} \ (L),$$

formule rigoureuse que j'ai donnée le premier; ou, pour abréger,

$$\begin{aligned}\sin\pi &= m\sin(\Delta+\pi) - n\cos(\Delta+\pi)\\ &= m\left(\sin(\Delta+\pi) - \frac{n}{m}\cos(\Delta+\pi)\right)\\ &= m\left[\sin(\Delta+\pi) - \operatorname{tang} x\cos(\Delta+\pi)\right]\\ &= m\frac{(\sin(\Delta+\pi)\cos x - \cos(\Delta+\pi)\sin x)}{\cos x}\\ &= \frac{\sin\varpi\sin H\sin(\Delta-x+\pi)}{\cos x},\end{aligned}$$

quand on a fait

$$\operatorname{tang} x = \frac{n}{m} = \frac{\sin\varpi\cos H\cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\sin\varpi\sin H\cos\frac{1}{2}\Pi} = \frac{\cot H\cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\cos\frac{1}{2}\Pi};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\pi = \frac{\left(\frac{m}{\cos x}\right)\sin(\Delta-x)}{1-\left(\frac{m}{\cos x}\right)\cos(\Delta-x)} \ldots\ldots (N),$$

et

$$\pi = \left(\frac{m}{\cos x}\right)\frac{\sin(\Delta-x)}{\sin 1''} + \left(\frac{m}{\cos x}\right)^2\frac{\sin 2(\Delta-x)}{\sin 2''} + \left(\frac{m}{\cos x}\right)^3\frac{\sin 3(\Delta-x)}{\sin 3''} + \text{etc.};$$

ainsi connnaissant $(\Delta+\pi)$, on aura π par la formule (L).

Connaissant Δ, on aura tang π par la formule (N), ou par la série dont les trois premiers termes suffiront toujours, ou bien on aura cot $(\Delta+\pi)$ par la formule (K), dont le calcul exige des attentions plus minutieuses.

14. Dans le triangle parallactique APB (fig. 52), menez

PM qui partage en deux également l'angle APB ; et sur PM abaissez l'arc perpendiculaire $Zamb$, et vous aurez

$$\text{tang}\,Pm = \text{tang}\,PZ \cos ZPm = \cot H \cos(P + \tfrac{1}{2}\Pi).$$

Les triangles rectangles mPa, mPb donnent

$$\text{tang}\,Pa = \frac{\text{tang}\,Pm}{\cos mPa} = \frac{\cot H \cos(P + \frac{1}{2}\Pi)}{\cos \frac{1}{2}\Pi} = \text{tang}\,x,$$

$$\text{tang}\,Pb = \frac{\text{tang}\,Pm}{\cos mPb} = \frac{\cot H \cos(P + \frac{1}{2}\Pi)}{\cos \frac{1}{2}\Pi} = \text{tang}\,x;$$

donc

$$x = Pa = Pb; \quad Aa = PA - Pa = (\Delta - x);$$
$$Bb = PB - Pb = (\Delta + \pi - x);$$

donc

$$\text{tang}\,\pi = \frac{\left(\frac{\sin\varpi \sin H}{\sin\Delta}\right)\sin Aa}{1 - \left(\frac{\sin\varpi \sin H}{\sin\Delta}\right)\cos Aa}.$$

Supposez une parallaxe horizontale ϖ' telle que

$$\sin\varpi' = \left(\frac{\sin\varpi \sin H}{\sin\Delta}\right),$$

faites

$$\text{tang}\,\pi = \frac{\sin\varpi' \sin Aa}{1 - \sin\varpi' \cos Aa},$$

π sera la parallaxe de distance au point a dans le vertical aA.

Supposons l'angle horaire nul, les points a, m, b coïncideront avec Z, x deviendra PZ, aA deviendra

$$ZA = \Delta - PZ = 90° - D - 90° + H = (H - D).$$

La parallaxe de distance polaire se trouvera par la formule

$$\text{tang}\,\pi = \frac{\left(\frac{\sin\varpi \sin H}{\sin H}\right)\sin(H-D)}{1 - \left(\frac{\sin\varpi \sin H}{\sin H}\right)\cos(H-D)} = \frac{\sin\varpi \sin(H-D)}{1 - \sin\varpi \cos(H-D)}.$$

La parallaxe de distance polaire serait la même que celle de distance zénitale, ce qui d'ailleurs est évident.

Quand le pôle et le zénit se confondent $x = 0$; la parallaxe horaire est nulle, la parallaxe de distance polaire devient celle de distance zénitale; car la formule se réduit à

$$\tang \pi = \frac{\sin\varpi \sin\Delta}{1 - \sin\varpi \cos\Delta} = \frac{\sin\varpi \sin N}{1 - \sin\varpi \cos N}.$$

15. La formule (K) ci-dessus donne encore

$$\cot\Delta - \cot(\Delta + \pi) = \cot\Delta - \frac{\cot\Delta \sin(P+\Pi)}{\sin P} + \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)}{\sin\Delta \sin P},$$

$$\frac{\sin\pi}{\sin\Delta \sin(\Delta+\pi)} = \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)}{\sin\Delta \sin P} - \frac{\cot\Delta}{\sin P}[\sin(P+\Pi) - \sin P]$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H}{\sin P} \cdot \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} - \frac{2\cot\Delta \sin\frac{1}{2}\Pi \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\sin P},$$

$$\sin\pi = \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin\Delta} . \sin\varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \frac{2\sin\frac{1}{2}\Pi \cos\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\sin P} \sin(\Delta+\pi)$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} . \sin\varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \frac{\sin\Pi \cos\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi) \sin(\Delta+\pi)}{\sin P \cos\frac{1}{2}\Pi}$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} . \sin\varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \frac{\sin\varpi \cos H \sin(P+\Pi) \cot\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi) \sin(\Delta+\pi)}{\sin P \cos\frac{1}{2}\Pi}$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P}\left(\sin\varpi \sin H - \frac{\sin\varpi \cos H \cot\Delta \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\cos\frac{1}{2}\Pi}\right)\sin(\Delta+\pi)$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)}{\sin P}\left(1 - \frac{\cot\Delta \cot H \cos(P+\frac{1}{2}\Pi)}{\cos\frac{1}{2}\Pi}\right)\sin(\Delta+\pi)$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)}{\sin P}(1 - \cot\Delta \tang x) \sin(\Delta+\pi)$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)}{\sin P}\left(\frac{\sin\Delta \cos x - \cos\Delta \sin x}{\sin\Delta \cos x}\right) \sin(\Delta+\pi)$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H \sin(P+\Pi)\sin(\Delta-x)\sin(\Delta+\pi)}{\sin P \sin\Delta \cos x}$$

$$= \frac{\sin\varpi \sin H}{\sin\Delta} \cdot \frac{\sin(P+\Pi)\sin(\Delta-x)}{\sin P \cos x} \sin(\Delta+\pi) \quad (b)$$

$$= q \sin(\Delta+\pi);$$

d'où
$$\tang\pi = \frac{q\sin\Delta}{1-q\cos\Delta}$$

et
$$\pi = \frac{q\sin\Delta}{\sin 1''} + \frac{q^2\sin 2\Delta}{\sin 2''} + \frac{q^3\sin 3\Delta}{\sin 3''} + \text{etc.},$$

formules un peu moins commodes, mais aussi exactes que les précédentes.

16. Ces dernières formules supposent le rapport $\frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P}$, qui est incommode quand P est un petit angle.

$$\sin a : \sin ZA :: \sin AZa : \sin Aa,$$
$$\sin ZB : \sin b :: \sin Bb : \sin AZb.$$

Mais $AZa = AZb$ et $b = a$; on aura donc

$$\sin ZB : \sin ZA :: \sin Bb : \sin Aa,$$

$$\frac{\sin(N+p)}{\sin N} = \frac{\sin Bb}{\sin Aa} = \frac{\sin(\Delta+\pi-x)}{\sin(\Delta-x)}$$
$$= \frac{\sin(\Delta+\pi)\sin(P+\Pi)}{\sin\Delta \sin P} \quad (a.13);$$

donc
$$\frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} = \frac{\sin(\Delta+\pi-x)}{\sin(\Delta-x)} \frac{\sin\Delta}{\sin(\Delta+\pi)};$$

donc (15. b)
$$\sin\pi = \frac{\sin\varpi \sin H}{\sin\Delta \cos x} \cdot \frac{\sin(\Delta+\pi-x)}{\sin(\Delta-x)} \sin(\Delta+\pi).$$

17. Nous pouvons donc calculer tous les effets de la parallaxe, soit relativement au zénit, soit relativement au pôle de l'équateur.

Soit maintenant p un point quelconque de la sphère céleste (fig. 53). Si nous menons les arcs pA et pB au lieu vrai et au lieu apparent de l'astre, nous pourrons de même calculer les effets de la parallaxe sur l'angle ZpA et sur la distance pA qui deviendra pB; il est évident que nous au-

rons des formules toutes semblables, à l'exception qu'au lieu de $PZ = 90° - H$, nous aurons pZ, et qu'au lieu de l'angle $ZPA = P$, nous aurons ZpA, dont il faudra préliminairement déterminer la valeur, comme celle de pZ. Tout cela est vrai, quel que soit le point p.

18. Supposons que p soit le pôle de l'écliptique (fig. 53), EMQ l'équateur, E le point équinoxial, l'arc EM sera ce qu'on appelle l'*ascension droite* du milieu du ciel ou du zénit, ZM sera la déclinaison du zénit, laquelle est toujours égale à la hauteur du pôle.

Soit EO l'écliptique; sur l'équateur EQ prenez $ED = 90° = MQ$, il en résultera $DQ = EM =$ ascension droite du milieu du ciel $= M$; menez $DCPp$, les angles D et C seront droits, $EC = 90° = DP$; et si vous prenez, à partir de C, sur CP un arc de 90°, il aboutira au pôle p de l'écliptique, et vous aurez $Pp = CD = E =$ obliquité de l'écliptique $= \omega$.

Menez $pZNI$ qui sera un cercle de latitude, puisqu'il part du pôle de l'écliptique et en même tems un vertical, puisqu'il passe par le zénit. Les angles N et I seront droits; le point O sera le pôle de $pZNI$. Les arcs NO et IO seront tous deux de 90°.

$Zp =$ distance du pôle de l'écliptique au zénit $= 90° - pr = 90° -$ hauteur du pôle de l'écliptique sur l'horizon $= 90° - ZN = NI = NOI =$ angle de l'écliptique avec l'horizon; les anciens le nommaient *angle de l'Orient;* les modernes le nomment *hauteur du point* n, ou *hauteur du nonagésime;* c'est-à-dire, du nonantième degré, hauteur du point de l'écliptique qui est à 90° du point orient O. Ainsi la hauteur du nonagésime et le complément de la hauteur du pôle de l'écliptique, comme la hauteur du point M de l'équateur qui est au méridien, ou la hauteur de l'équateur est complément de la hauteur du pôle de l'équateur.

19. Dans le triangle ZPp, nous connaissons $PZ = 90° - H$; $Pp = \omega$, et $ZPp = 180° - ZPD = 180° - MD = 180° - (ED - EM) = 180° - 90° + EM = 90° + EM = 90° + M$, pour abréger.

Nous pourrons calculer les trois autres parties du triangle, qui sont

$PpZ = npC = nC = 90° - En = 90° -$ longit. nonagésime.

$pZ = 90° - nZ = nI =$ hauteur nonagésime $= 90° - pr$
$= 90° -$ hauteur du pôle de l'écliptique.

$pZP = HZI = HI = 90° - IQ = QO =$ amplitude du point orient.

20. Le triangle PZp donne

$$\cos Zp = \cos Pz \cos Pp + \sin PZ \sin Pp \cos ZPp$$
$$= \sin H \cos \omega + \cos H \sin \omega \cos (90° + M)$$
$$= \sin H \cos \omega - \cos H \sin \omega \sin M,$$

ou

$$\sin \text{haut. pol. écliptique} = \cos \omega \sin H - \sin \omega \cos H \sin M,$$

$$\cot PpZ = \tang n = \frac{\sin \omega \tang H}{\sin (90° - EM)} - \cos \omega \cot (90° + EM)$$
$$= \frac{\sin \omega \tang H}{\cos M} + \cos \omega \tang M,$$

$$\sin pZ : \sin ZPp :: \sin Pp : \sin PZp = \sin OQ$$
$$= \frac{\sin Pp \sin ZPp}{\sin pZ} = \frac{\sin \omega \cos M}{\cos h},$$

ou

$$\cot QO = \cot \text{amplit. orient.} = \frac{\sin H \cot \omega}{\cos M} + \sin H \tang M.$$

Ainsi, connaissant l'ascension droite du milieu du ciel, ou l'arc EM, nous aurons la hauteur du pôle de l'écliptique sur l'horizon ou h, la longitude du nonagésime n et l'amplitude du point oriental de l'écliptique.

On pourrait trouver les mêmes formules par le triangle EQO, dans lequel on connaît $E = \omega$, $EQO = 90° + H$; $EQ = EM + MQ = M + 90°$, et dont les trois inconnues sont

$EOQ = 90 - h$; $EO = 90° + n$ et $QO =$ amplitude.

21. Le triangle EMd rectangle en M donne

tang

$$\text{tang } Ed = \frac{\text{tang EM}}{\cos E} = \frac{\text{tang M}}{\cos \omega}.$$

On connaîtra donc d qu'on appelle *le point culminant de l'écliptique*, ou *le point de l'écliptique* qui est au méridien,

$$\cos d = \sin \omega \cos EM = \sin \omega \cos M.$$

C'est ce qu'on appelle *l'angle de l'écliptique avec le méridien.*

$$\text{Tang } Md = \sin EM \text{ tang } E = \sin M \text{ tang } \omega,$$

$\delta = Md$ est la déclinaison du point culminant de l'écliptique,

$Hd = HM + Md = 90° - H +$ déclinaison du point culminant.

Alors le triangle HdO rectangle en H donnera

$$\text{tang } Od = \text{tang } (90° + nd) = -\cot nd$$
$$= \frac{\text{tang } Hd}{\cos HdO} = -\frac{\cot(H-\delta)}{\cos d}$$
$$\cot nd = \frac{\cot (H-\delta)}{\sin \omega \cos M}$$

nd est ce qu'il faut ajouter à Ed pour avoir $En = n = Ed + dn$,

$$\sin h = \sin d \cos H d = \sin d \cos (90° - H + \delta)$$
$$= \sin d \sin (H - \delta),$$

Je préfère les formules analytiques de l'article (19).

22. On a encore plusieurs manières de déterminer h et n, mais dans toutes il faut connaître M.

Soit P l'angle horaire du soleil pour l'instant du calcul, Æ son ascension droite vraie.

$M = Æ + P = Æ +$ angle horaire compté du midi vers l'occident,

$M = Æ - P = Æ -$ angle horaire compté du midi vers l'orient.

Les mêmes formules ont lieu si Æ est l'ascension d'un astre quelconque et P son angle horaire; en effet, si PT est le cercle

de déclinaison d'une étoile, ET sera son ascension droite; MPT = P son angle horaire.

Or, EM = ET — MT = Æ — MTF = Æ — P, donc M = Æ — P.

Si T était de l'autre côté du méridien, P changerait de signe, et M = Æ + P.

23. Si un astre est en F dans le vertical cercle de latitude pZn, sa longitude sera celle du nonagésime, et ne sera point altérée par la parallaxe qui agira toute entière dans le vertical Zn, et qui diminuera la latitude nF.

La parallaxe de latitude π sera en même tems parallaxe de distance zénitale, et

$$\text{tang}\,\pi = \frac{\sin\varpi \sin ZF}{1-\sin\varpi\cos ZF} = \frac{\sin\varpi\sin(Zn-nF)}{1-\sin\varpi\cos(Zn-nF)}$$
$$= \frac{\sin\varpi\sin(h-\lambda)}{1-\sin\varpi\cos(h-\lambda)},$$

et la latitude apparente serait $(\lambda-\pi)$; la distance au pôle de l'écliptique serait $(\Delta+\pi)$, Δ étant la distance vraie.

La parallaxe Π de l'angle au pôle Zpn serait nulle, ainsi que l'angle ZpA.

24. Mais si un astre est en A dans le vertical ZAR, la parallaxe le portera en B; le cercle de latitude pA deviendra pB; l'angle ZpA deviendra ZpB, l'angle ApB $= apb = ab$ sera la parallaxe de longitude ou Π; en effet, la longitude Ea deviendra Eb = E$a + ab$.

Nous appliquerons aux triangles ZpA et ZpB les mêmes raisonnemens que nous avons faits sur les triangles ZPA et ZPB de la (fig. 52), nous aurons $pZ = \cos h$, au lieu de PZ = cos H; et au lieu des angles horaires ZPA et ZPB au pôle de l'équateur, nous aurons ZpA $= npa =$ Na = distance au nonagésime = longitude de l'astre — longitude nonagésime = (L—n) et ZpB $= np$B $= npb = nb = na + ab$ $= (L - n + \Pi)$, et $\Delta = p$A; alors

$$\sin \Pi = \frac{\sin \varpi \cos h \sin (L - n + \Pi)}{\sin \Delta}$$

$$\tang \Pi = \frac{\left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \sin (L - n)}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \cos (L - n)}$$

$$\Pi = \frac{(\sin \varpi \cos h) \sin (L - n)}{\sin \Delta \sin 1''} + \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right)^2 \frac{\sin 2(L - n)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

$$\cot (\Delta + \pi) = \frac{\sin (L - n + \Pi)}{\sin (L - n)} \left(\cot \Delta - \frac{\sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right)$$

$$x = \frac{\cot h \cos (L - n + \frac{1}{2}\Pi)}{\cos \frac{1}{2}\Pi}; \ \tang \pi = \frac{\left(\frac{\sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right) \sin (\Delta - x)}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right) \cos (\Delta - x)};$$

$$\pi = \left(\frac{\sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right) \frac{\sin (\Delta - x)}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right)^2 \frac{\sin 2(\Delta - x)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

$$q = \frac{\sin \varpi \sin h \sin (L - n + \Pi) \sin (\Delta + \pi)}{\sin \Delta \sin (L - n) \cos x}; \ \sin \pi = \frac{q \sin \Delta}{1 - q \cos \Delta}$$

$$\pi = \frac{q \sin \Delta}{\sin 1''} + \frac{q^2 \sin 2\Delta}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

$$\frac{\sin (n + p)}{\sin n} = \frac{\sin (\Delta + \pi) \sin (L - n + \Pi)}{\sin \Delta \sin (L - n)} = \frac{\sin (\Delta - x + \pi)}{\sin (\Delta - x)}$$

$$\sin \pi = \frac{\sin \varpi \sin h \sin (\Delta - x + \pi)}{\cos x}$$

$$\cos (\Delta + \pi) = \frac{\sin (\Delta - x + \pi)}{\sin (\Delta - x)} (\cos \Delta - \sin \varpi \sin h);$$

c'est-à-dire, toutes les formules que nous avions relativement à l'équateur, en y changeant H en h, P en $(L - n)$, et Δ devenant la distance au pôle de l'écliptique.

25. Soit $L' = L + \Pi$ ou $\Pi = L' - L$ et $\Delta' = \Delta + \pi$,

$$\sin \Pi = \sin (L' - L) = \frac{\sin \varpi \cos h)}{\sin \Delta} \sin (L' - n),$$

$$\sin L' \cos L - \cos L' \sin L = \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \cos n \sin L'$$

$$- \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \sin n \cos L',$$

$$\text{tang } L' - \text{tang } L = \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \frac{\cos n \text{ tang} L'}{\cos L}$$

$$- \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta}\right) \frac{\sin n}{\cos L},$$

$$\text{tang } L' - \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta \cos L}\right) \cos n \text{ tang } L' = \text{tang } L$$

$$- \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta \cos L}\right) \sin n,$$

$$\text{tang } L' = \frac{\text{tang } L - \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta \cos L}\right) \sin n}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \cos h}{\sin \Delta \cos L}\right) \cos n}$$

$$= \frac{\sin \Delta \sin L - \sin \varpi \cos h \sin n}{\sin \Delta \cos L - \sin \varpi \cos h \cos n};$$

Mais $\sin O : \sin Q :: \sin EQ : \sin EO$,

$\cos h : \cos H :: \cos M : \cos n$; $\cos h \cos n = \cos H \cos M$,

$$\cos h \sin n = \cos h \cos n \text{ tang } n$$

$$= \cos H \cos M \left(\cos \omega \text{ tang } M + \frac{\sin \omega \text{ tang } H}{\cos M}\right)$$

$$= \cos \omega \cos H \sin M + \sin \omega \sin H,$$

$$\text{tang } L' = \frac{\sin \Delta \sin L - \sin \varpi \sin H - \sin \varpi \cos H \sin M}{\cos L \sin \Delta - \sin \varpi \cos H \cos M}.$$

26. Nous avons ci-dessus (24),

$$\cot \Delta' = \frac{(\cos \Delta - \sin \varpi \sin h) \sin (L' - n)}{\sin \Delta \quad \sin (L - n)}$$

$$= \left(\frac{\cos \Delta - \sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right) \frac{\sin L' \cos n - \cos L' \sin n}{\sin L \cos n - \cos L \sin n},$$

$$= \left(\frac{\cos \Delta - \sin \varpi \sin h}{\sin \Delta}\right) \frac{\sin L' - \cos L' \text{ tang } n}{\sin L - \cos L \text{ tang } n}$$

$$= \frac{(\cos \Delta - \sin \varpi \sin h) \cos L'}{\sin \Delta \sin L - \sin \Delta \cos L \text{ tang } n} \left(\text{tang } L' - \text{tang } n\right);$$

$$\cot \Delta' = \frac{(\cos\Delta - \sin\varpi \sin h)\cos L'}{\sin\Delta \sin L - \sin\Delta \cos L \operatorname{tang} n}$$

$$\left(\frac{\sin L \sin \Delta - \sin\varpi \cos h \sin n}{\cos L \sin \Delta - \sin\varpi \cos h \cos n} - \operatorname{tang} n\right),$$

$$= \frac{(\cos\Delta - \sin\varpi \sin h)\cos L'}{\sin\Delta \sin L - \sin\Delta \cos L \operatorname{tang} n}$$

$$\left(\frac{\sin L \sin \Delta - \cos L \sin\Delta \operatorname{tang} n}{\cos L \sin \Delta - \sin\varpi \cos h \cos n}\right),$$

$$= \frac{(\cos\Delta - \sin\varpi \sin h)\cos L'}{\cos L \sin\Delta - \sin\varpi \cos H \cos M},$$

$$= \frac{\cos L'(\cos\Delta - \sin\varpi \sin H \cos\omega + \sin\varpi \cos H \sin\omega \sin M)}{\cos L \sin\Delta - \sin\varpi \cos H \cos M}.$$

On aura donc ainsi la longitude apparente et la distance apparente au pôle de l'écliptique, sans calculer ni parallaxe, ni nonagésime : ce serait un avantage si le calcul était plus court; mais il me paraît plus long et plus pénible; les formules cependant sont curieuses. Elles sont de M. Olbers.

27. Supposez que l'obliquité soit $= 0$, l'écliptique se confondra avec l'équateur; les pôles p et P se confondront en P, la longitude deviendra l'ascension droite; la distance au pôle de l'écliptique sera la distance au pôle de l'équateur; les deux formules deviendront, Δ étant la distance au pôle du monde,

$$\operatorname{tang}(\text{Æ}+\Pi) = \frac{\operatorname{tang}\text{Æ} - \left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta \cos \text{Æ}}\right)\sin M}{1 - \left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta \cos \text{Æ}}\right)\cos M},$$

$$\cot(\Delta + \pi) = \cos(\text{Æ}+\Pi)\left(\frac{\cos \text{Æ} - \sin\varpi \sin H}{\cos \text{Æ} \sin\Delta - \sin\varpi \cos H \cos M}\right).$$

On pourra y mettre pour M sa valeur (Æ $\pm$ P).

28. On peut se passer de toutes ces formules, et s'en tenir aux simples règles de la trigonométrie, en faisant

$$\cos N = \cos P \cos H \sin \Delta + \sin H \cos \Delta,$$

$$\sin Z = \frac{\sin P \sin \Delta}{\sin N}$$

$$\tang p = \frac{\sin \varpi \sin N}{1 - \sin \varpi \cos N}$$

$$\cos(\Delta + \varpi) = \cos Z \cos H \sin(N + p) + \sin H \cos(N + p),$$

$$\sin(P + \Pi) = \frac{\sin(N + p) \sin Z}{\sin(\Delta + \pi)}.$$

On peut encore dans le triangle PZA calculer les angles Z et A et $\frac{1}{2}$ ZA $= \frac{1}{2}$ N par les analogies de Néper, puis

$$\tang(\tfrac{1}{2} ZA + AB) = \tang \tfrac{1}{2} ZA \tang^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varpi),$$

$$ZB = \tfrac{1}{2} ZA + AB + \tfrac{1}{2} ZA\,; \quad AB = ZB - ZA,$$

$$\tang x = \tang AB \cos A\,; \ \tang \Pi = \frac{\tang A \sin x}{\sin(\Delta + x)}.$$

On calculerait par les analogies de Néper,

$$PpZ, \quad PZp \text{ et } \tfrac{1}{2} pZ\,; \ pAZ, \ pZA \text{ et } \tfrac{1}{2} ZA,$$

puis AB, pB et ApB, comme AB, PB et APB; mais le calcul serait plus long et susceptible de moins d'applications.

29. Les réfractions diminuent les demi-diamètres horizontaux, parce qu'elles élèvent les astres dans des verticaux qui convergent vers le zénit, les parallaxes les augmentent, parce qu'elles les abaissent dans des verticaux qui divergent vers l'horizon; elles augmentent les diamètres verticaux, parce que le bord inférieur est plus abaissé que le supérieur, les diamètres inclinés sont augmentés par les deux causes à la fois, mais l'effet total est le même pour tous les demi-diamètres.

30. Le soleil, la lune et les planètes ont des disques sensiblement ronds, mais dans la réalité ce sont des corps sensiblement sphériques. Nous voyons les bords des disques apparens par des rayons tangens autour de ces sphères; la distance de l'observateur au centre de la planète, la distance au point de contingence et le rayon de la sphère planétaire forment des triangles rectilignes rectangles, égaux entr'eux, en nombre égal à celui des points de la circonférence du disque apparent. Les angles de ces triangles qui ont leur sommet dans l'œil de l'observateur sont égaux; ainsi tous les demi-dia-

mètres de la planète sont égaux, puisqu'ils sont vus sous des angles égaux.

31. Les demi-diamètres apparens sont en raison inverse des distances; or,

$$CP : Op :: \sin O : \sin C \text{ (fig. 51)},$$

$$\frac{\sin(\delta+a)}{\sin\delta} = \frac{\sin\delta'}{\sin\delta} = \frac{Cp}{Op} = \frac{\sin O}{\sin C} = \frac{\sin(N+p)}{\sin N}$$

$$= \frac{\sin(\Delta-x+\pi)}{\sin(\Delta-x)} = \frac{(L-n+\Pi)\sin(\Delta+\pi)}{\sin(L-n)\sin\Delta},$$

$$= \frac{\sin(P+\Pi)}{\sin P} \cdot \frac{\sin(\Delta+\pi)}{\sin\Delta} \quad (16)$$

$$= (\cos\Pi + \sin\Pi\cot P)(\cos\pi + \sin\pi\cot\Delta),$$

$$\sin(\delta+a) - \sin\delta = \frac{\sin\delta\sin(\Delta-x+\pi) - \sin\delta\sin(\Delta-x)}{\sin(\Delta-x)}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}a = \frac{2\sin\delta\sin\frac{1}{2}\pi\cos(\Delta-x+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(\Delta+x)\cos(\delta+\frac{1}{2}a)}$$

$$a = \frac{2\delta\sin\frac{1}{2}\pi\cos(\Delta-x+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(\Delta-x)}$$

$$= 2\delta\sin\tfrac{1}{2}\pi(\cot(\Delta-x) - \sin\tfrac{1}{2}\pi),$$

$$= 2\delta\sin\tfrac{1}{2}\pi\cot(\Delta-x) - 2\delta\sin^2\tfrac{1}{2}\pi$$

$$= \delta\sin\pi(\Delta-x) - \tfrac{1}{2}\delta\sin^2\pi.$$

On peut choisir entre toutes ces formules, selon la circonstance.

Celle qui emploie les parallaxes de longitude et de latitude, ou celle d'ascension droite et de déclinaison est de Gertsner.

$$\sin\delta' = \frac{\sin\delta\sin(N+p)}{\sin N} = \sin\delta(\cos p + \sin p\cot N)$$

$$= \sin\delta(1 + \sin p\cot N - 2\sin^2\tfrac{1}{2}p)$$

$$= \sin\delta(1 + \sin p\cot N - \tfrac{1}{2}\sin^2 p)$$

$$= \sin\delta(1 - \sin p\cot N - \tfrac{1}{2}\sin^2\varpi\sin N),$$

$$\delta' - \delta = a = \delta\sin p\cot N - \tfrac{1}{2}\delta\sin^2\varpi\sin^2 N,$$

$$= \frac{\delta\sin\varpi\sin(N+p)\cos N}{\sin N} - \tfrac{1}{2}\delta\sin^2\varpi\sin^2 N,$$

$$= (\delta+a)\sin\varpi\cos N - \tfrac{1}{2}\delta\sin^2\varpi\sin^2 N,$$

$$= \delta\sin\varpi\cos N + \delta\sin^2\varpi\cos^2 N - \tfrac{1}{2}\delta\sin^2\varpi\sin^2 N,$$

$$\frac{\sin \delta'}{\sin \delta} = \frac{\sin (P + \Pi)}{\sin P} \frac{\sin (\Delta + \pi)}{\sin \Delta} = \frac{\cos (\Delta + \pi)}{\cos \Delta - \sin \varpi \sin H}$$

$$= \frac{\cot (\Delta + \pi) \sin (\Delta + \pi)}{\cos \Delta - \sin \varpi \sin H}$$

$$= \frac{\cos \text{Æ}' (\cos \Delta - \sin \pi \sin H) \sin (\Delta + \pi)}{[\cos \text{Æ} \sin \Delta - \sin \varpi \cos H \cos (\text{Æ} + P)] (\cos \Delta - \sin \varpi \sin H)}$$

$$= \frac{\cos \text{Æ}' \sin (\Delta + \pi)}{\sin \Delta \cos \text{Æ} - \sin \varpi \cos H \cos (\text{Æ} + P)}$$

$$= \frac{\cos (L + \Pi) \sin (\Delta_{,} + \pi)}{\cos L \sin \Delta_{,} - \sin \varpi \cos H \cos M};$$

les $\Delta_{,}$ sont les distances au pôle de l'écliptique.

Il est évident d'ailleurs que

$$\cos \text{Æ} \sin \Delta = \cos L \sin \Delta_{,},$$

et

$$\cos \text{Æ}' \sin (\Delta + \pi) = \cos (L + \Pi) \sin (\Delta_{,} + \pi).$$

Ces deux dernières valeurs de δ' sont de M. Olbers.

Les deux numérateurs sont équivalens; les dénominateurs ont une partie équivalente et l'autre identique.

32. Nous avons supposé que la verticale ZO (fig. 54) passe par le centre des mouvemens; si la terre est sphérique, toutes les normales se couperont en effet à ce centre; mais si la terre a une autre courbure, il se pourra que la normale à la surface aille traverser l'axe en C au-dessous du centre K; menez le rayon KO et prolongez-le jusqu'à la voûte céleste V.

Un astre en V n'aurait aucune parallaxe, puisque les trois points K, O, V sont en ligne droite; un astre en Z, au contraire, aurait une parallaxe $\frac{OK}{ZK} \sin VZ$; c'est la distance OK de l'observateur au centre K des mouvemens, la distance AK de l'astre à ce même centre et l'angle VOA, qui déterminent l'angle OAK, différence entre le lieu géocentrique dans la ligne AK et le lieu vu de la surface dans la direction OA. Le plan OVA, dans lequel agit la parallaxe, n'est

pas le même que le plan OZA, et ces deux plans ne se confondent qu'au méridien.

33. C'est donc, en ce cas, au zénit géocentrique V et à KOV qu'il faut appliquer tout ce que nous avons dit du zénit Z et de la normale ZOC.

Le fil à plomb détermine le zénit Z; le zénit V, que j'appelle *géocentrique*, ne peut se trouver que par un calcul qui suppose connue la grandeur et la figure de la terre. Supposons que vous connaissiez $OK=\varrho$, et $KOC=VOZ=VZ=a$, VZ sera la correction qu'il faudra faire à la distance PZ du pôle au zénit, $PV=PZ+VZ=90°-H+a=90°-(H-a)$. On diminuera donc la hauteur du pôle H de l'angle que fait dans le plan du méridien la verticale ZOC avec le rayon OK; c'est cette hauteur corrigée que l'on emploiera dans le calcul de la distance zénitale, qui sera VA au lieu de ZA; dans celui de l'azimut, qui sera PVA au lieu de PZA; et enfin dans le calcul du nonagésime et de la hauteur. Cette manière si simple de tenir compte de la figure de la terre, est due à Mayer.

34. Si le point V était sur PZ au lieu d'être sur le prolongement, tout serait encore de même, à la réserve que la correction du zénit $=a=$ angle de la verticale changerait de signe, et que H deviendrait $(H+a)$.

L'horizon des parallaxes, le cercle dans lequel les parallaxes seront les plus grandes, sera partout à 90° de V (fig. 55); il sera hOr, qui fera aux deux points est et ouest l'angle $HOh=ROr=VZ=a$, avec l'horizon astronomique dont Z est le pôle.

Ces deux horizons n'auront que ces points de commun; en tout autre point, les parallaxes à l'horizon astronomique seront moindres que la parallaxe horizontale.

35. L'observation ne pourra donner que la distance apparente ZB, le calcul donnera VA et VB; elle ne pourra donner que l'azimut PZB, le calcul donnera PVA=PVB.

AZB sera la parallaxe d'azimut. Le triangle AZB se calculera comme le triangle APB; ils ont même base, et toute

la différence viendra de VZ substitué à PZ ou PV ; nous aurons donc des formules pareilles, et

$$\mathrm{AZB} = \left(\frac{\sin\varpi \sin a}{\sin \mathrm{ZA}}\right) \frac{\sin \mathrm{VZA}}{\sin 1''} + \text{etc.};$$

le premier terme suffit, ou

$$d\mathrm{Z} = \frac{\sin\varpi \sin a \sin \mathrm{Z}}{\sin n}; \quad \sin\varpi = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{AK}}.$$

Soit $\mathrm{ZA} = n$; $\mathrm{ZB} = n + dn$, on aura

$$\sin dn = \sin\varpi \sin(n+dn)\,(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 a \sin^2 \mathrm{Z}).$$

Le petit terme ne peut produire que $0'',0223 \sin^2 \mathrm{Z} \sin(n+dn)$; on peut toujours le négliger ; ainsi, quand on a observé une distance apparente $\mathrm{ZB} = n + dn$, on peut calculer la parallaxe $\sin dn = \sin\varpi\,(n+dn)$, sans s'embarrasser de la petite correction qui dépend de a et de Z ; on aura donc..... $\mathrm{ZA} = (n + bn) - dn$, il ne restera à calculer que

$$d\mathrm{Z} = \frac{a \sin\varpi \sin(\mathrm{Z}+d\mathrm{Z})}{\sin n} = \frac{12'',775 \sin(\mathrm{Z}+d\mathrm{Z})}{\sin n}, \text{ tout au plus.}$$

Ces corrections, qui dépendent de la figure de la terre, ne sont d'usage que pour la lune, dont la parallaxe peut aller à 62′; on peut les négliger pour toutes les autres planètes.

Méthodes pour observer les parallaxes.

36. La parallaxe est nulle au zénit; observez donc un astre qui passe au méridien très-près du zénit; ajoutez la réfraction à la distance zénitale, vous en conclurez les distances polaires. Répétez l'observation plusieurs jours de suite; si la distance polaire reste la même, elle vous sera bien connue; si la distance change, vous en aurez la variation diurne et vous pourrez calculer la distance polaire pour un instant quelconque entre deux passages au zénit. Observez le même astre à 75 ou 80° de distance au zénit; vous aurez l'angle horaire et les deux côtés qui le comprennent; calculez le

troisième côté; s'il est plus grand que la distance observée, l'astre a une parallaxe qui l'abaisse; $(n+p)$ sera la distance apparente observée et corrigée de la réfraction; C étant la distance calculée, vous aurez $p=(n+p-C)$, et $\sin \varpi = \frac{\sin p}{\sin(n+p)}$; soit $(n+p)=75°$, $\sin \varpi = \frac{\sin p}{0966}$; une distance de 75° donnera donc la parallaxe horizontale, à $\frac{1}{30}$ près, aussi bien qu'une distance de 90°, et l'on n'aura pas à craindre autant l'inconstance des réfractions. Appliquez ce procédé à toutes les étoiles qui passent près du zénit, et vous verrez qu'elles n'ont aucune parallaxe. En comparant les distances polaires déduites des passages supérieurs et inférieurs, vous vous assurerez que les circompolaires n'ont de même aucune parallaxe sensible. Par analogie, vous étendrez la même conclusion à toutes les étoiles, et vous la vérifierez par la comparaison des distances zénitales observées, avec les distances calculées.

37. Observez le soleil au méridien, dans l'été, quand il approche le plus du zénit; déterminez sa distance polaire, qui ne peut être affectée que d'une parallaxe fort petite; observez ensuite vers 75° de distance, vous verrez que sa parallaxe horizontale doit être en 6 ou 12″ au plus; dans la réalité, elle est de 8″,7. Nous dirons par la suite comment on l'a pu déterminer avec cette précision; mais il y a un siècle, Lahire la croyait de 6″ au plus; Cassini et les autres astronomes la faisaient de 10 à 11″. Les Grecs la supposaient de 2′ 51″; mais on l'a toujours diminuée, à mesure que les instrumens se perfectionnaient.

38. La même méthode fera voir que la parallaxe de la lune est de 53 à 62′; nous en parlerons plus amplement par la suite.

Les astres errans que nous avons désignés sous le nom de *planètes*, ont tous une parallaxe différente; la plus forte, qui est celle de Vénus, ne passe guères 30″; on la déterminera de même par les distances zénitales, en ayant égard au mouvement vers le pôle en 24 heures (36).

39. La parallaxe de l'angle horaire fournit un second moyen qui s'emploie pour les planètes qu'on peut observer la nuit. De l'équation (D. 12) on tire

$$\sin \varpi = \frac{\sin \Pi \sin \Delta}{\cos H \sin(P+\Pi)}.$$

On connaît H, on connaît Δ, comme nous avons dit (36); il reste à connaître Π, P et $P+\Pi$; observez plusieurs jours le passage au méridien, où la parallaxe horaire est nulle, vous en déduirez le mouvement horaire de la planète en ascension droite; vous aurez son ascension droite pour un instant quelconque entre deux passages.

Observez à la machine parallactique le passage de la planète et celui d'une étoile qui soit à fort peu près sur le parallèle de la planète; si l'intervalle des deux passages est égal à la différence des ascensions droites, la planète n'a point de parallaxe; si l'intervalle observé diffère, il y a une parallaxe. En effet, soit E l'étoile observée au fil horaire EV, qui se confond avec le cercle de déclinaison EVP; une heure après, l'étoile E sera parvenue en E', ensorte que $E'PE = 15°$. Supposons que V soit alors au fil en V, son angle horaire apparent sera $ZPV = (P+\Pi) = ZPE =$ angle horaire de l'étoile, quand elle était sous le fil; mais Vénus est en v, sa parallaxe horaire est vPV; donc la parallaxe fait paraître l'angle horaire trop grand; mais vous connaissez $E'Pv = Æ$ planète$-Æ$ étoile.

Vous connaissez donc

$$\Pi = vPV = EPE' - vPE' = 15° (T - t) - (V - E),$$

T étant le tems sidéral du passage de l'étoile, E son ascension droite en degré, t le tems sidéral du passage de la planète, V son ascension droite.

40. Ceci suppose que l'étoile passe la première, et que l'observation a été faite à l'orient; si la planète passait la première, son ascension droite serait la plus faible, et $(T - t)$ serait négatif; la formule subsisterait, elle subsisterait à l'oc-

cident du méridien, et dans tous les cas il suffit d'avoir égard aux signes.

On aura donc

$$\sin \varpi = \frac{\sin [15 (T-t) - (V - E)] \sin \Delta}{\cos H \sin \text{angle horaire connu}},$$

quantité toujours positive, car l'angle horaire est négatif quand $H = 15 (T - t) - (V - E)$ est négative; la formule est générale.

41. Quand la distance de l'astre diminue, sa parallaxe augmente; le diamètre apparent augmente dans la même raison, car sinus parallaxe $= \frac{\text{rayon de la terre}}{\text{distance de l'astre}}$;

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{ diamètre} = \frac{\text{rayon de l'astre}}{\text{distance de l'astre}}.$$

Donc

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \text{ diamètre}}{\sin \text{parallaxe hor}} = \frac{\text{rayon de l'astre}}{\text{rayon de la terre}},$$

$$\frac{\text{distance de l'astre}}{\text{distance de la terre}} = \frac{\text{rayon de l'astre}}{\text{rayon de la terre}}.$$

Ce rapport est constant, car le rayon de l'astre sphérique est constant, ainsi que le rayon de la terre pour un lieu donné.

42. Quand la parallaxe est sensible et qu'elle varie rapidement, la direction du mouvement diurne apparent n'est plus la même que celle du mouvement vrai. La route de l'astre n'est plus parallèle à l'équateur. Si l'on fait suivre à cet astre le fil équatorial d'une lunette, ce qui s'obtient en inclinant le réticule; alors le fil équatorial cesse d'être parallèle à l'équateur, le fil perpendiculaire ne se confond plus avec le cercle de déclinaison, les différences de passage et de déclinaison sont altérées; les astronomes ont des formules pour avoir égard à ces changemens; il est plus simple et plus sûr d'éviter les observations dans le voisinage de l'horizon.

LEÇON VII.

Formation d'un catalogue d'étoiles.

1. Un catalogue d'étoiles est une liste ou un tableau dans lequel les différentes étoiles sont rangées selon l'ordre de leur passage au méridien. La première colonne offre le nom de l'étoile, la lettre grecque ou latine, ou enfin le numéro qui sert à la distinguer.

La seconde contient un chiffre qui marque la grandeur, depuis la première jusqu'à la sixième; on s'était borné là avant l'invention des lunettes. Les catalogues modernes vont jusqu'à la neuvième et la dixième grandeur, le reste est insensible dans les lunettes ordinaires. On n'a pas de moyen bien certain pour distinguer les grandeurs, et sur ce point les astronomes ne sont pas bien d'accord; les uns mettent parmi les étoiles de première grandeur, des étoiles que d'autres rangent dans la deuxième classe; mais peu importe.

La troisième colonne donne, en tems sidéral, l'heure du passage au méridien.

La quatrième donne ce même tems transformé en arc de l'équateur, ou multiplié par $15 = \frac{60}{4}$, c'est ce qu'on appelle l'*ascension droite*.

La cinquième donne la distance polaire, ou la déclinaison, qui en est le complément.

On y ajoute deux autres colonnes pour les mouvemens annuels des étoiles, soit en ascension droite, soit en déclinaison. Nous allons déterminer ces mouvemens, qui ont été long-tems incertains ou mal connus.

2. Pour former ce catalogue, on commence par prendre une étoile quelconque pour point de départ; le choix paraît d'abord indifférent, mais il est bon que cette étoile soit

brillante, c'est-à-dire, de première ou de deuxième grandeur, pour être plus facilement observée en tout tems. Il convient aussi qu'elle soit voisine de l'équateur, pour que son passage par le fil de la lunette étant plus rapide, le tems de son passage soit déterminé avec plus de précision.

Vous ferez que la pendule marque 0° 0′ 0″ quand cette étoile sera sous le fil du milieu de la lunette méridienne; s'il y a quelques minutes et quelques secondes de plus, vous regarderez cet excès comme l'avance de la pendule; s'il y a moins, la pendule sera censée retarder d'autant.

Vous noterez exactement le tems du passage des autres étoiles; vous les observerez toutes plusieurs jours de suite, pour prendre un milieu entre toutes les observations, et chaque jour vous corrigerez le passage observé, en retranchant l'avance de la pendule, ou ajoutant la quantité dont elle retarde.

Vous vous attacherez principalement aux étoiles les plus brillantes, afin d'en mieux connaître le passage et de pouvoir vous en servir pour corriger votre pendule, quand quelque circonstance vous aura empêché d'observer l'étoile fondamentale.

Vous observerez la distance de chaque étoile au zénit, à son passage; à cette distance vous ajouterez la réfraction et vous aurez la distance vraie. A la distance vraie vous ajouterez la distance du pôle au zenit, la somme sera la distance polaire si l'étoile passe au midi du zénit.

Si elle passe entre le zénit et le pôle, vous retrancherez de la distance du pôle au zénit la distance observée et corrigée; le reste sera la distance polaire.

Si elle passe au-dessous du pôle, la distance du pôle au zénit se retranchera de la distance zénitale corrigée, pour avoir la distance polaire.

3. En peu de mois vous pourrez avoir ainsi un millier d'étoiles dispersées dans la voûte céleste.

Vous observerez les passages aux cinq fils, et prendrez le milieu entre les cinq, si pourtant les fils sont bien espacés.

4. Pour connaître en tems l'intervalle de vos fils, observez toutes les étoiles qui sont très-voisines de l'équateur, ou dans l'équateur même, la seule inspection vous fera connaître si les intervalles sont égaux, sinon vous prendrez le milieu entre tous les intervalles observés entre les deux mêmes fils, vous en formerez une table qui vous servira à réduire au fil du milieu l'observation faite à un fil quelconque, quand vous aurez manqué le fil du milieu.

L'intervalle des fils en tems croît avec la déclinaison : la remarque ne peut échapper, et la raison n'est pas difficile à trouver.

Quand la lunette est dirigée à l'équateur, l'intervalle entre deux fils couvre une corde d'un arc de l'équateur, et comme la lunette est toute entière dans le plan de l'équateur; ainsi que votre œil, la partie du fil horizontal qui sépare deux fils verticaux couvre l'arc de l'équateur, ainsi que la corde. Quand vous dirigez votre lunette à une étoile qui a 60° de déclinaison, ou 30° de distance au pôle, votre fil qui n'a pas changé de longueur, couvre une corde du petit cercle à 30° du pôle, et comme ce cercle n'est que moitié de l'équateur, si votre fil a couvert 1° de l'équateur, il couvrira la corde de deux degrés du petit cercle, et le tems du passage sera doublé; car un petit cercle tourne en 24 heures, comme l'équateur même.

5. Les parallèles à l'équateur ont pour rayon le sinus de la distance polaire. Si donc t est l'intervalle des fils sur l'équateur, $\frac{t}{\sin \Delta}$ sera l'intervalle pour une distance polaire quelconque.

Ainsi, soit $t' = \frac{t}{\sin \Delta}$ l'intervalle observé par une étoile quelconque, vous en conclurez $t' \sin \Delta = t$; c'est-à-dire que, pour avoir la valeur de vos intervalles en tems pour une étoile dans l'équateur, il faudra multiplier l'intervalle observé par le sinus de la distance polaire: toute étoile est donc bonne pour trouver l'intervalle équatorial, je préfère les étoiles qui sont

sont très-voisines de l'équateur : d'autres ont préféré les étoiles voisines du pôle dont le passage est très-lent ; mais l'incertitude de l'observation réduit à moins que rien l'avantage qu'on a cru trouver dans la grandeur de l'intervalle observé.

6. Près du pôle la formule $t' = \frac{t}{\sin \Delta}$ n'est plus assez exacte ; on fera donc

$$\sin \tfrac{1}{2} (15 t') = \frac{\sin \frac{1}{2} (15 t)}{\sin \Delta}.$$

7. Si les intervalles des fils ne sont pas parfaitement égaux, on ne pourra plus prendre le milieu entre les cinq fils ; on serait obligé de réduire séparément chaque fil à celui du milieu, avant d'en faire la somme pour la diviser par le nombre des fils ; mais il sera plus court de prendre le milieu comme si les intervalles étaient égaux, et d'y ajouter la correction

$$\frac{a + b - c - d}{5 \sin \Delta};$$

a, b, c, d sont les quatre intervalles équatoriaux des cinq fils ; on fera de cette correction une table pour tous les degrés de distance polaire.

8. Il n'est pas toujours possible de prendre la distance zénitale quand l'étoile est au méridien ; on la prend quelquefois plusieurs secondes avant ou après le passage ; l'erreur est souvent insensible, et la correction toujours additive a pour expression,

$$\tfrac{1}{2} (15t)^2 \sin 1'' \sin^2 \Delta \cot N,$$

t étant l'angle horaire en tems et en secondes à l'instant de l'observation, et N la distance zénitale observée.

9. Pour avoir exactement les différences de passages ou d'ascension droite entre les étoiles, il est absolument nécessaire que la lunette tourne exactement dans le plan du méridien. En effet, supposons que la lunette bien vérifiée d'ailleurs, au lieu de décrire le méridien TZH (fig. 56), décrive le cercle vertical ZABQ, une étoile qui passerait au zénit Z serait la

seule qui pût être observée sous le fil de la lunette à son passage au méridien, une étoile qui serait observée en A, aurait un angle horaire ZPA dont le 15e serait l'erreur du passage; une étoile qui passerait en B aurait une erreur proportionnelle à l'angle ZPB plus grand que ZPA, enfin une étoile qui serait observée en O à l'horizon aurait encore une erreur différente; l'arc HO de l'horizon, mesure de l'angle HZO, est ce qu'on appelle *la déviation horizontale de la lunette.*

10. Le triangle ZPA donne sin PA : sin ZA :: sin Z : sin ZPA

$$= \frac{\sin Z \sin ZA}{\sin PA} = \frac{\sin HO \sin N}{\sin \Delta} = \frac{\sin HO \sin(\Delta - 90° + H)}{\sin \Delta}$$

$$= -\frac{\sin x \sin[90° - (H+\Delta)]}{\sin \Delta} = -\frac{\sin x \cos(H+\Delta)}{\sin \Delta}$$

$$= -\frac{\sin x}{\sin \Delta}(\cos H \cos \Delta - \sin H \sin \Delta)$$

$$= -\sin x\,(\cos H \cot \Delta - \sin H),$$

ou

$$c = +x(\sin H - \cos H \cot \Delta) = +x \cos H(\operatorname{tang} H - \cot \Delta)$$
$$= x \cos H(\operatorname{tang} H - \operatorname{tang} D).$$

Cette formule suppose la déviation orientale.

La correction deviendrait soustractive du passage observé si x ou la déviation était à l'occident, au lieu d'être à l'orient.

11. Une autre étoile aurait pour correction

$$c' = x \cos H(\operatorname{tang} H - \operatorname{tang} D') = n' x,$$

d'où

$$c' - c = (n' - n)\,x; \text{ et } x = \left(\frac{c' - c}{n' - n}\right).$$

On pourra faire une table des nombres

$$n = \cos H(\operatorname{tang} H - \operatorname{tang} D) = -\frac{\cos H \sin(H - D)}{\cos D \cos H} = \frac{\sin(H - D)}{\cos D};$$

alors pour trouver la déviation x d'une lunette méridienne, il suffirait de connaître la différence $(c' - c)$ de deux passages observés; or on connaîtra cette différence si l'on connaît la

différence d'ascension droite de deux étoiles fort différentes en déclinaison. Le catalogue donne le passage vrai $P = p + c$

et pour l'autre étoile $P' = p' + c'$,

d'où

$$(P' - P) = (p' - p) + c' - c \text{ ; ou } c' - c = (P' - P) - (p' - p).$$

12. On pourra donc employer cette méthode pour connaître et corriger la déviation, si l'on a un bon catalogue d'étoiles; car ayant $(P' - P)$ par le catalogue, $(p' - p)$ par l'observation, et $(n' - n)$ par le calcul, on aura x, et par suite nx et $n'x$ ou les corrections des deux passages observés.

13. Connaissant $x = HO$, on saura de combien il faut tourner la lunette dans le plan de l'horizon pour l'amener de O en H dans le méridien, et mettant une mire en H, on aura un moyen certain de ramener la lunette au méridien si elle venait à s'en écarter.

14. Si l'on n'a pas de catalogue auquel on puisse se fier, on prendra une étoile circompolaire à ses deux passages, l'un au-dessus et l'autre au-dessous du pôle; on sera sûr que $P' - P = 12^h$, on observera $(p' - p)$, on aura $c' - c = 12^h - (p' - p)$ et

$$x = \frac{12^h - (p' - p)}{n' - n} = \frac{12^h - (p' - p)}{\cos H(\tang H - \tang D' - \tang H + \tang D)}$$
$$= \frac{12^h - (p' - p)}{\cos H\,(\tang D - \tang D')} = \frac{12^h - (p' - p)}{2 \cos H \tang D},$$

car

$$\tang D' = - \tang D.$$

En effet, une étoile, quand elle passe sous le pôle, peut être considérée comme une étoile différente dont l'ascension droite serait $180^\circ + AR$, et la déclinaison $180^\circ - D$, si AR et D sont l'ascension droite et la déclinaison véritables.

Je suppose que le premier passage observé p est au-dessus du pôle, le second au-dessous, si c'est le contraire, on ajoute 24 heures ou la révolution des fixes en tems de la pendule au passage inférieur observé, et alors il suivra le passage supérieur.

15. Quand vous connaîtrez ainsi la déviation de la lunette par les étoiles circompolaires, vous pourrez commencer votre catalogue. Quand vous aurez ainsi formé votre catalogue, vous serez curieux de le comparer à quelque catalogue plus ancien, pour voir comment vous vous accorderez, et reconnaître si les étoiles sont bien véritablement fixes. Comparons de cette manière le catalogue de Piazzi pour 1800, à celui de La Caille pour 1750, l'intervalle est de 50 ans.

16. Pour cette comparaison, vous prendez la même étoile pour point de départ, c'est-à-dire, pour celle dont l'ascension droite doit être zéro, vous formerez ainsi le tableau suivant; vous y remarquerez d'abord des différences beaucoup trop fortes pour qu'on puisse les attribuer aux erreurs des observations.

Les variations en ascension ne paraissent d'abord suivre aucune loi ni pour la quantité ni pour le signe; celles de la distance polaire décroissent continuellement, changent de signe et vont croissant jusqu'à près de 17′, décroissent ensuite jusqu'à 0, puis changent de signe et vont en croissant jusqu'au bout, ou elles ont l'air de redevenir ce qu'elles étaient en commençant.

Elles sont négatives depuis 0 d'ascension droite jusqu'à 90°, deviennent positives, croissantes jusqu'à 180°, décroissent jusqu'à 270°, où, redevenues négatives, elles croissent jusqu'à 360.

17. Cette marche est évidemment celle d'un cosinus; ainsi l'on peut conjecturer avec beaucoup de vraisemblance que la formule pour 50 ans est

$$-16' 43'' \cos \text{Æ},$$

et pour un an — 20″ 063 cos Æ, et en effet calculez par cette formule les différences ou variations de la distance polaire, vous serez surpris de la précision avec laquelle cette formule repré-ente les observations de toutes les étoiles des différens catalogues. Avec un peu d'attention, on reconnaîtra la loi des différences d'ascension droite.

ÉTOILES.	Ascens. dr. comparées.	Différences.	Dist. polair. comparées.	Différences.
γ Pégase.....	0° 0′ 0″ 0. 0. 0	0′ 0″	76° 12′ 22″ 75.55.39	— 16′ 43″
Polaire.....	10.35. 4 12.21.48	1°46.44	2. 1.58 1.45.36	— 16.22
β Baleine.....	36.34.41 34.21	— 0.20	90.45.45 90.32.27	— 13.18
γ Persée.....	41.37. 1 41.51.48	+ 14.47	38.29.41 37.17.19	— 12.22
γ Éridan.....	56.29.59 56.26.14	— 3.45	104.14.19 104. 5. 8	— 9.11
α Orion.....	85.18.50 20.56	+ 2. 6	82.39.45 38.34	— 1.11
μ ♎.....	91.51.30 58.38	+ 7. 8	67.23.03 67.23.50	+ 0.47
ζ grand Chien..	92.35. 8 25.15	— 9.53	119.58. 9 58.56	+ 0.47
ζ ♊.....	102.12.54 19.20	+ 6.26	69. 5.14 8.54	+ 3.40
α Hydre.....	138.43.48 42. 2	— 1.46	97.35.12 97.47.49	+ 12.37
α grande Ourse.	161.55.51 162. 4.41	+ 8.50	26.54.19 27.10.21	+ 16.02
γ grande Ourse.	175. 2.13 4.26	+ 2.13	34.54.53 35.11.35	+ 16.42
δ Corbeau....	184. 8.40 8.46	+ 0. 6	105. 7.16 105.23.58	+ 16.42
ε grande Ourse.	190.38.11 33.40	— 4.31	32.42.39 32.57. 6	+ 14.27
α Dragon.....	209.18.30 0.31	— 17.59	34.25.20 24.39.52	+ 14.32
δ ♏.....	236.18. 7 23.42	+ 5.35	111.53.14 112. 2.19	+ 9. 5
γ Dragon.....	267.36. 8 15.16	— 20.52	38.28.17 38.28.53	+ 0.36
δ ♐.....	271. 8.44 18.38	+ 9.54	119.54.15 53.47	— 0.28
α Lyre.....	277. 1.12 276.48.17	— 12.55	51.25.59 23.38	— 2.21
α ♑.....	286.31.52 45.49	+ 13.57	131. 3.21 130.58.28	— 4.53
α Cygne.....	308. 7.44 307.54.58	— 12.46	45.36. 5 25.38	— 10.27
δ ♒.....	340.14.23 16. 0	+ 1.37	107. 8.35 106.52.45	— 15.50
α Andromède..	358.46.49 46.53	+ 0. 4	62.17.25 62. 0.48	— 16.37

18. En effet dans les 180 premiers degrés d'ascension droite, toutes les étoiles boréales, c'est-à-dire, dont la distance polaire est de moins de 90°, ont leurs mouvemens positifs, et dans la dernière moitié de l'équateur, les étoiles boréales ont un mouvement négatif; ces variations de signe sont celles d'un sinus; ainsi la formule dépendra du sinus de l'ascension droite; mais elle doit aussi très-probablement dépendre de la distance polaire, car on remarquera de plus que la variation est forte quand la distance polaire est petite, petite quand la distance est grande; la formule dépend donc de $\cos\Delta$ ou de $\cot\Delta$; mais le cosinus ne change de signe que deux fois, la cotangente en change à chaque quart; ce sera donc la cotangente; la formule sera donc

$$+ m \sin \text{Æ} \cot \Delta.$$

Pour déterminer m, nous avons autant d'équations que d'étoiles; choisissons la polaire, à cause de la grandeur du mouvement.

$$1^\circ\, 46'\, 44'' = m \sin \text{Æ} \cot \Delta;$$

$$m = \frac{1^\circ\, 46'\, 44^h}{\sin \text{Æ} \cot \Delta} = \frac{1^\circ\, 46'\, 44''}{\sin 11^\circ\, 28'\, 26'' \cot 1^\circ\, 53'\, 47''};$$

car ne sachant s'il faut prendre l'ascension droite de 1750, ou celle de 1800, je prends le milieu entre les deux, et je trouve par cette raison un résultat un peu incertain

$$m = 21'',3.$$

Si je choisis γ Persée

$$m = \frac{14'\, 47''}{\sin 41\ 44\ 25 \cot 37\ 23\ 30} = 20'',36,$$

quantités qui diffèrent si peu de ce que donnent les distances polaires, que nous devons croire que la formule générale est $+20'',06 \sin \text{Æ} \cot \Delta$, comme elle est $20'',06 \cos \text{Æ}$ pour les distances polaires; et c'est en effet ce que j'ai trouvé par une multitude de comparaisons.

19. La première conséquence à tirer de tout ceci, c'est que les positions des étoiles ne sont pas aussi fixes que nous

avions cru, du moins par rapport à l'équateur et à son pôle. En conséquence, pour avoir les positions des étoiles à une époque, il faudrait les observer toutes le meme jour; et comme la chose est impossible, il reste à ramener toutes les observations à une même époque en les corrigeant du mouvement qu'ont eu les étoiles depuis l'époque choisie. On prend toujours le dernier jour d'une année. Ainsi, supposons que nous ayons observé certaines étoiles 100 jours après le dernier jour de l'an ou le dernier décembre, nous dirons les étoiles passent tous les jours au méridien $\frac{20''\ 06 \sin Æ \cot \Delta}{365\ 25 \times 15} = 0'',003667$ $\sin Æ \cot \Delta$ plus tard que la veille; au bout de 100 jours elles passeront au méridien $0'',366 \sin Æ \cot \Delta$ plus tard que le 31 décembre. J'ôterai donc cette quantité des ascensions droites observées.

Les distances polaires diminuent par jour de $0''\ 055 \cos Æ$, au bout de 100 jours elles seront plus faibles de $5''\ 5 \cos Æ$, j'ajouterai cette quantité à mes distances, et mes observations, ainsi corrigées, seront telles qu'elles eussent été si je les eusse faites toutes le 31 décembre.

20. Mais quelle peut être la cause de tous ces mouvemens si différens? Ne serait-il pas plus simple d'imaginer que le pôle se baisse vers l'étoile qui a o d'ascension droite, et s'éloigne d'autant de l'étoile qui est à 180°?

Soit OBRA (fig. 57) l'équateur, P le pôle, A le point o de l'équateur, B le point 180°, R et O les points 90° et 270°; que le pôle s'abaisse de P en p de $16'\ 43''$ en 50 ans, la distance polaire des étoiles situées sur PA changera de $16\ 43''$ en moins; la distance des étoiles situées sur PB augmentera d'autant, les étoiles situées vers R et O ne changeront pas sensiblement; et nous voyons déjà en gros que les observations seront reproduites. Soumettons cette idée au calcul.

Soit une étoile quelconque E, sa distance polaire PE deviendra pE, son ascension droite $Aa = APE$ deviendra ApE,

$$\cos pE = \cos APE \sin Pp \sin PE + \cos Pp \cos PE,$$

$$\cos(\Delta + d\Delta) = \sin Pp \sin \Delta \cos \text{Æ} + \cos Pp \cos \Delta$$
$$= \sin m \sin \Delta \cos \text{Æ} + \cos \Delta - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} m \cos \Delta,$$

$$\cos(\Delta + d\Delta) - \cos \Delta = \sin m \sin \Delta \cos \text{Æ} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} m \cos \Delta,$$

$$-2 \sin \tfrac{1}{2} d\Delta \sin(\Delta + \tfrac{1}{2} d\Delta) = \sin m \sin \Delta \cos \text{Æ} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} m \cos \Delta,$$

$$-\sin \tfrac{1}{2} d\Delta = \frac{\sin m \sin \Delta \cos \text{Æ} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} m \cos \Delta}{\sin(\Delta + \tfrac{1}{2} d\Delta)}.$$

Négligez les quantités du second ordre $d\Delta = -m \cos \text{Æ} = -20'' \cos \text{Æ}$, ainsi que par l'observation.

21. Le même triangle donne

$$\cot PpE = -\cot ApE = -\cot(\text{Æ} + d\text{Æ})$$
$$= \frac{\sin Pp \cot PE}{\sin P} - \cos Pp \cot P,$$
$$-\cot(\text{Æ} + d\text{Æ}) = \frac{\sin Pp \cot \Delta}{\sin \text{Æ}}$$
$$-\cot \text{Æ} + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} Pp \cot \text{Æ},$$

$$\cot \text{Æ} - \cot(\text{Æ} + d\text{Æ}) = \frac{\sin Pp \cot \Delta + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} Pp \cos \text{Æ}}{\sin \text{Æ}},$$

$$\sin d\text{Æ} = (\sin Pp \cot \Delta + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} Pp \cos \text{Æ}) \sin(\text{Æ} + d\text{Æ});$$

d'où

$$\text{tang}\, d\text{Æ} = \frac{\sin Pp \sin \text{Æ} \cot \Delta + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} Pp \sin \text{Æ} \cos \text{Æ}}{1 - \sin Pp \cot \Delta \cos \text{Æ} - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} Pp \cos^2 \text{Æ}},$$

et en négligeant les termes du troisième ordre

$$d\text{Æ} = Pp \sin \text{Æ} \cot \Delta + Pp \sin Pp \sin \text{Æ} \cos \text{Æ} (\tfrac{1}{2} + \cot^2 \Delta);$$

comme par l'observation si nous négligeons les carrés.

22. Nous voyons que les observations seront suffisamment représentées, si le pôle descend de 20″ 06 par an vers la première étoile de notre catalogue, ou vers le point o de l'équateur. Dans ce cas le pôle décrira le grand cercle PA en 64800 ans environ; l'étoile qui se trouve maintenant au point *o* de l'équateur dans 16200 ans, serait au pôle.

Le grand cercle PA a pour pôle les points O, R; c'est autour de ces deux pôles que se mouvrait le pôle du monde;

le mouvement angulaire POp aurait pour mesure l'arc Pp; mais Pp n'étant en 50 ans que de $17'$ de grand cercle, diffère si peu d'une ligne droite, que nous ne saurions décider s'il est un arc de grand ou de petit cercle. Supposons que le pôle P ait un mouvement angulaire PCA autour d'un point quelconque C, le petit arc Pq différera si peu de Pp, qu'il nous sera impossible d'en voir la différence, l'arc $Pq = PCq \sin PC$ et $PCq = \frac{Pq}{\sin PC} = \frac{16' 43''}{\sin PC}$ en 50 ans; nous ne connaîtront que Pq et non PCq qui serait plus grand que $16' 43''$. Le pôle décrivant un petit cercle, le décrirait d'un mouvement $PCq > Pq$.

23. Le mouvement du pôle (fig. 58) ne se dirigerait plus toujours vers la même étoile, il se dirigerait successivement vers tous les points de l'équateur.

En effet, menons les deux arcs PA et CA perpendiculaires à CP, A sera le pôle de PC; le pôle partant de P se dirigera vers A; mais quand CP aura pris la position Cq, menons les arcs qA' et CA' perpendiculaires à Cq, le pôle se dirigera vers le point A'; dans l'intervalle, il sera dirigé successivement vers tous les points de l'arc AA' de grand cercle décrit du pôle C.

Par le point A' menez l'arc perpendiculaire $RA'F$, ce sera l'équateur qui aura changé de position, car auparavant il avait la position EAQ, puisque $PA = 90°$.

Continuons indéfiniment le grand cercle AA', il sera $SA'ALT$, et nous aurons $TQ = 90° - PT = CP$.

Ainsi le grand cercle décrit du pôle C, fait avec l'équateur un angle $TAQ = CP$; il fait avec l'équateur déplacé $RA'S$, un angle $T'A'F = TF = Cq = CP$. En général la distance des pôles de deux grands cercles mesure l'angle d'inclinaison des deux cercles; et si l'un des pôles a un mouvement PA dans un sens, l'intersection A tourne dans le même sens et décrit $AA' = PCq$, mouvement angulaire de l'un des pôles autour de l'autre; car il est évident que

$$AA' = ACA' = 90° - ACq = qCP.$$

Or, les ascensions, pour le calcul de nos formules, doivent se compter du point vers lequel le pôle se dirige actuellement; ainsi, dans l'hypothèse plus générale d'un pôle quelconque C, les formules ci-dessus ne peuvent servir que pour un tems assez borné.

24. Menons CEL par le pôle C à l'étoile E, et prolongeons-le jusqu'en L au cercle A'ALT; dans le triangle ECq, nous connaissons pC et CE $= \delta$, et l'angle qCE $=$ ECA' $=$ ACL $+$ ACA' $=$ L $+ dL$;

$$\cos qE = \sin Cq \sin CE \cos qCE + \cos Cq \cos CE,$$
$$\cos(\Delta + d\Delta) = \sin\omega \sin\delta \sin(L + dL) + \cos\omega \cos\delta,$$

Le triangle PEC donne

$$\cos PE = \sin CP \sin CE \cos PCE + \cos CP \cos CE,$$
$$\cos\Delta = \sin\omega \sin\delta \sin L + \cos\omega \cos\delta,$$
$$\cos(\Delta + d\Delta) - \cos\Delta = \sin\omega \sin\delta \sin(L + dL) - \sin\omega \sin\delta \sin L,$$

d'où
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2} d\Delta \sin(\Delta + \tfrac{1}{2} d\Delta)$$
$$= -2\sin dL \sin\omega \sin\delta \cos(L + \tfrac{1}{2} dL),$$

ou
$$2\sin\tfrac{1}{2} d\Delta \cos\tfrac{1}{2} d\Delta \sin\Delta + 2\sin^2\tfrac{1}{2} d\Delta \cos\Delta$$
$$= -2\sin\tfrac{1}{2} dL \sin\omega \sin\delta \cos(L + \tfrac{1}{2} dL),$$

et
$$2\sin\tfrac{1}{2} d\Delta \cos\tfrac{1}{2} d\Delta + 2\sin^2\tfrac{1}{2} d\Delta \cot\Delta$$
$$= -\frac{2\sin\tfrac{1}{2} dL \sin\omega \sin\delta \cos(L + \tfrac{1}{2} dL)}{\sin\Delta}.$$

Cette formule est rigoureuse et ne dépend que de constantes et de dL qui croît comme les tems. On peut la réduire en série (IV. 72).

25. Les mêmes triangles donnent

$$\tan AR = \tan L \cos\omega - \frac{\sin\omega \cot\delta}{\cos L},$$
$$\tan(AR + dAR) = \tan(L + dL)\cos\omega$$
$$- \frac{\sin\omega \cot\delta}{\cos(L + dL)} = \frac{\tan AR + \tan dAR}{1 - \tan dAR \tan AR} = n,$$
$$\tan AR + \tan dAR = n - n \tan AR \tan dAR,$$
$$\tan dAR + n \tan AR \tan dAR = n - \tan AR,$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\, d\text{Æ} = \frac{n - \text{tang Æ}}{1 + n\,\text{tang Æ}} = \frac{\text{tang}(\text{Æ} + d\text{Æ}) - \text{tang Æ}}{1 + \text{tang}(\text{Æ} + d\text{Æ})\text{tang Æ}}$$

$$= \frac{\cos\omega\,\text{tang}(L+dL) - \dfrac{\sin\omega\cot\delta}{\cos(L+dL)} - \text{tang Æ}}{1 + \left(\cos\omega\,\text{tang}(L+dL) - \dfrac{\sin\omega\cot\delta}{\cos(L+dL)}\right)\text{tang Æ}}$$

$$= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}dL\cos\tfrac{1}{2}dL\cos\omega - 2\sin\tfrac{1}{2}dL\sin\omega\cot\delta\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)}{\left\{\begin{array}{l} 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}dL - \sin^2\omega\sin L\sin(L+dL) \\ -2\sin\omega\cos\omega\cot\delta\cos\tfrac{1}{2}dL\sin(L+\tfrac{1}{2}dL) \\ +\sin^2\omega\cot^2\delta \end{array}\right\}}$$

formule incommode, mais qui ne suppose que les données primitives.

26. On a plus facilement une formule plus simple, mais qui dépend de ($\Delta + d\Delta$),

$$\text{tang}(\text{Æ}+d\text{Æ}) = \cos\omega\,\text{tang}(L+dL) - \frac{\sin\omega\cot\delta}{\cos(L+dL)}$$

$$\text{tang Æ} = \cos\omega\,\text{tang}\,L - \frac{\sin\omega\cot\delta}{\cos L}$$

$$\text{tang}(\text{Æ}+d\text{Æ}) - \text{tang Æ} = \cos\omega\,[\text{tang}(L+dL) - \text{tang}L]$$
$$- \sin\omega\cot\delta\left(\frac{1}{\cos(L+dL)} - \frac{1}{\cos L}\right)$$

$$\frac{\sin d\text{Æ}}{\cos\text{Æ}\cos(\text{Æ}+d\text{Æ})} = \frac{\sin dL\cos\omega}{\cos L\cos(L+dL)}$$
$$- \frac{2\sin\omega\cot\delta\sin\tfrac{1}{2}dL\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)}{\cos L\cos(L+dL)}$$

$$= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}dL\sin^2\delta}{\sin\Delta\sin(\Delta+d\Delta)}\left[\cos\tfrac{1}{2}dL\cos\omega - \sin\omega\cot\delta\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)\right],$$

$$\sin d\text{Æ} = n\cos^2\text{Æ}\cos d\text{Æ} - n\sin\text{Æ}\cos\text{Æ}\sin d\text{Æ},$$

$$\text{tang}\, d\text{Æ} = n\cos^2\text{Æ} - n\sin\text{Æ}\cos\text{Æ}\,\text{tang}\, d\text{Æ},$$

$$\text{tang}\, d\text{Æ} + n\sin\text{Æ}\cos\text{Æ}\,\text{tang}\, d\text{Æ} = n\cos^2\text{Æ},$$

$$\text{tang}\, d\text{Æ} = \frac{n\cos^2\text{Æ}}{1 + n\sin\text{Æ}\cos\text{Æ}},$$ ou remettant pour n sa valeur,

$$= \frac{[\sin dL\cos\omega - 2\sin\tfrac{1}{2}dL\sin\omega\cot\delta\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)]\dfrac{\cos^2\text{Æ}}{\cos L\cos(L+dL)}}{1 + [\sin dL\cos\omega - 2\sin\tfrac{1}{2}dL\sin\omega\cot\delta\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)]\dfrac{\sin\text{Æ}\cos\text{Æ}}{\cos L\cos(L+dL)}}$$

Soit, pour abréger,

$$a = \frac{\sin dL \cos\omega - 2\sin\frac{1}{2}dL \sin\omega \cos\delta \sin(L + \frac{1}{2}dL)}{\cos L \cos(L + dL) + \sin dL \cos\omega - 2\sin\frac{1}{2}dL \sin\omega \cot\delta \sin(L + \frac{1}{2}dL)}$$

vous aurez

$$\tang d\text{Æ} = \frac{a\cos^2 \text{Æ}}{1 + a\cos\text{Æ}\sin\text{Æ}} = \frac{(a\cos\text{Æ})\cos\text{Æ}}{1 + (a\cos\text{Æ})\sin\text{Æ}}$$
$$= \frac{a'\cos\text{Æ}}{1 + a'\sin\text{Æ}} = \frac{a'\sin(90^\circ - \text{Æ})}{1 + a'\cos(90^\circ - \text{Æ})},$$

et

$$d\text{Æ}\sin 1'' = a'\cos\text{Æ} - \tfrac{1}{2}a'^2\sin 2\text{Æ} - \tfrac{1}{3}a'^3\sin 3\text{Æ} + \tfrac{1}{4}a'^4\sin 4\text{Æ}$$
$$+ \tfrac{1}{5}a'^5\cos 5\text{Æ} - \tfrac{1}{6}a'^6\sin 6\text{Æ} - \tfrac{1}{7}a'^7\cos 7\text{Æ} + \text{etc.},$$

formule rigoureuse et régulière, mais longue à évaluer; négligez les troisièmes puissances, vous la réduirez à

$$d\text{Æ} = a\cos^3\text{Æ} - \tfrac{1}{2}a^2\cos^6\text{Æ}\sin 2\text{Æ}.$$

27. Les formules $d\text{Æ} = dL\cos\omega + dL\sin\omega\sin\text{Æ}\tang D$,
$+ dD = dL\sin\omega\cos\text{Æ}$

ne sont guères sûres que pour un an; elles servent à réduire d'une année à la suivante, les catalogues qu'on insère annuellement dans les Éphemerides. Différentions-les, en faisant varier $d\text{Æ}$, dD, Æ et D;

$$d^2\text{Æ} = dL\,d\text{Æ}\sin 1''\sin\omega\cos\text{Æ}\tang D$$
$$+ dL\sin\omega\sin\text{Æ}\frac{dD\sin 1''}{\cos^2 D} - dL\,d\omega\sin\omega$$
$$+ dL\,d\omega\sin 1''\cos\omega\sin\text{Æ}\tang D,$$
$$-d^2 D = dL\,d\text{Æ}\sin 1''\sin\omega\sin\text{Æ} + dL\,d\omega\cos\omega\cos\text{Æ}.$$

Ces expressions donneront les variations qu'éprouvent les mouvemens d'une année à la suivante, ou les différences secondes des ascensions droites et des déclinaisons en prenant les mouvemens annuels pour différences premières. Ces secondes différences seraient proportionnelles aux carrés des tems.

En différentiant une troisième fois, on aurait les diffé-

rences troisièmes proportionnelles aux cubes. Mais on ne laissera jamais assez vieillir les catalogues d'étoiles pour que ces diverses formules soient jamais bien utiles.

28. Nous verrons plus loin que dans ces formules, $\omega = CP =$ obliquité de l'écliptique, que le cercle A'ALT est l'écliptique même, que dL est le mouvement annuel du point équinoxial; mais supposez $\omega = 90°$; les formules générales se réduiront à celles qui sont données par les mouvemens des étoiles en 50 ans; car $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$, et les formu seront $Pp \sin AR \tang D$ et $Pp \cos AR$.

29. Nous avons un grand nombre de catalogues d'étoiles. Les plus célèbres sont ceux de Ptolémée, de Tycho, d'Hévélius, de Flamstéed, de Lemonnier, de La Caille, de Mayer, de Bradley, de Maskelyne, de Cagnoli et de Piazzi; on ne fait guère usage que des six derniers. Ceux de Wollaston et de Bode sont de simples recueils.

Les constellations ou astérismes sont des groupes d'étoiles renfermées dans une figure d'homme ou d'animal, ou même d'un objet quelconque; le nombre des constellations va sans cesse en augmentant, en voici les noms :

Les constellations de Ptolémée sont au nombre de 48.

1. Petite Ourse, ou Cynosure, queue du Chien.
2. Grande Ourse.
3. Dragon.
4. Céphée.
5. Le Bouvier.
6. La Couronne boréale.
7. L'Agenouillé (Hercule).
8. La Lyre.
9. La Poule, ou le Cygne.
10. Cassiépée (Cassiopée).
11. Persée.
12. Le Cocher.
13. Ophiuchus, ou le Serpentaire.

14. Le Serpent.
15. La Flèche (et le Renard).
16. L'Aigle et Antinoüs.
17. Le Dauphin.
18. Section antérieure du Cheval (petit Cheval).
19. Le Cheval. Pégase.
20. Andromède.
21. Le Triangle.

Toutes ces constellations sont au nord; les suivantes sont dans le zodiaque.

22. Le Bélier (et la Mouche).
23. Le Taureau.
24. Les Gémeaux.
25. Le Cancer, ou l'Écrevisse.
26. Le Lion (auquel on a joint quelques étoiles de la Chevelure de Bérénice.
27. La Vierge.
28. Les Serres (la Balance).
29. Le Scorpion.
30. Le Sagittaire.
31. Le Capricorne.
32. Le Verseau.
33. Les Poissons.

Constellations australes.

34. La Baleine.
35. Orion.
36. Le Fleuve (l'Eridan).
37. Le Lièvre.
38. Le Chien.
39. Procyon, ou le Chien précurseur.
40. Argo.
41. L'Hydre.

42. La Coupe.
43. Le Corbeau.
44. Le Centaure.
45. La Bete (le Loup).
46. L'Autel.
47. La Couronne australe.
48. Le Poisson austral.

Les constellations ajoutées par Hévelius sont :

1. Antinoüs au-dessous de l'Aigle.
2. Le Mont Menale auprès du Bouvier.
3. Les Chiens de chasse Asterion et Chara.
4. La Giraffe.
5. Cerbère entre les mains d'Hercule.
6. La Chevelure de Bérénice.
7. Le Lézard.
8. Le Lynx.
9. L'Écu de Sobieski.
10. Le Sextant d'Uranie.
11. Le petit Triangle.
12. Le petit Lion.

Les constellations ajoutées par Halley dans la partie austr. sont :

1. La Colombe.
2. Le Chêne de Charles II.
3. La Grue (Voyez Bayer).
4. Le Phénix.
5. Le Paon.
6. L'Oiseau Indien ou sans pied.
7. La Mouche.
8. Le Caméléon.

Sans compter le Cœur de Charles II, qu'il a placé sur le collier de Chara, l'un des Chiens d'Hévelius.

Constellations australes de Bayer.

1. L'Indien.
2. La Grue.
3. Le Phénix.
4. L'Abeille, ou la Mouche.
5. Le Triangle austral.
6. L'Oiseau de Paradis.
7. Le Paon.
8. Le Toucan.
9. L'Hydre mâle.
10. La Dorade.
11. Le Poisson volant.
12. Le Caméléon.

Constellations australes de La Caille.

1. L'Atelier du sculpteur.
2. Le Fourneau chimique.
3. L'Horloge astronomique.
4. Le Réticule rhomboïde.
5. Le Burin du graveur.
6. Le Chevalet du peintre.
7. La Boussole.
8. La Machine pneumatique,
9. L'Octant.
10. Le Compas et le Cercle.
11. L'Équerre et la Règle.
12. Le Télescope.
13. Le Microscope.
14. La Montagne de la Table.
15. Grand et petit Nuage.
16. La Croix. Cette dernière est de Royer.

Autres

Autres constellations modernes.

Le Renne.....	*Lemonnier.*
Le Solitaire.....	*Idem.*
Le Messier	*Lalande.*
Le Taureau de Poniatouwski...	*Poczobut.*
Les Honneurs de Frédéric.....	*Bode.*
Le Sceptre de Brandebourg....	*Idem.*
Le Télescope de Herschel.....	*Idem.*
Le Globe aérostatique.....	*Idem.*
Le Quart de cercle mural.....	*Idem.*
Le Chat.....	*Idem.*
Le Loch.....	*Idem.*
La Harpe de George.....	*Hell.*

Voyez, pour de plus grands détails, le catalogue de 17240 *étoiles, nébuleuses et amas d'étoiles*, publié par M. Bode en 1801, pour servir de suite à son grand Atlas, et le premier volume de l'Astronomie de Lalande.

On appelle *nebuleuses* des étoiles qui ressemblent à des nuages et qui, pour la plupart, sont des *amas de petites étoiles* imperceptibles qu'on distingue dans les forts télescopes.

LEÇON VIII.

Route annuelle du soleil.

1. Au moyen du catalogue d'étoiles, nous sommes en état de vérifier chaque jour le mouvement de la pendule. Il suffit pour cela, d'ajouter à l'ascension droite du catalogue le mouvement que l'étoile a eu dans l'intervalle; l'ascension droite ainsi corrigée et réduite en tems, nous indiquera l'instant du passage de l'étoile au méridien, et cet instant, comparé à celui de l'observation, donnera la correction de la pen-

dule. Cette correction peut varier d'un jour à l'autre; deux passages consécutifs de la même étoile au méridien donneront cette variation, d'où l'on conclura, par une simple règle de trois, la correction de la pendule pour un instant intermédiaire; au lieu d'une seule étoile, on en emploie trois ou quatre, pour plus de sureté, et l'on prend un milieu.

Le passage du soleil au méridien, observé en tems de la pendule corrigé, sera l'ascension droite du soleil, que nous pourrons déterminer ainsi chaque jour.

Le passage ne suffit pas, on observe la distance zénitale des deux bords, on les corrige de la réfraction; la demi-somme est la distance du centre du soleil au zénit; on la corrige de la parallaxe $= 8'',6 \sin N$, on y ajoute la distance du pôle au zénit, et l'on a la distance polaire.

2. L'observation de distance se fait en rendant les bords du fil curseur, tangens successivement aux deux bords du soleil; la différence entre les deux distances est le diamètre du soleil, augmenté de l'épaisseur du fil.

Pour connaître cette épaisseur, on roule un fil pareil à celui de la lunette, sur un cylindre, en observant que les tours se suivent sans intervalle ni superposition; on couvre ainsi le cylindre dans une longueur de quelques millimètres; on divise le nombre des millimètres par celui des tours; on divise ensuite le quotient par la longueur focale de l'objectif; ce second quotient est le sinus du diamètre du fil; on retranche ce diamètre de la différence corrigée des deux distances au zénit, le reste est le diamètre vertical du soleil.

3. Pour connaître le diamètre horizontal, on observe les tems qui s'écoulent entre les deux instans où les deux bords sont tangens au même bord du fil. On multiplie cet intervalle $\frac{15 \sin \text{distance polaire}}{1 + \frac{x}{86400''}}$, x étant le nombre de secondes que la pendule a comptées au-delà de 24 heures pendant la durée du jour vrai, c'est-à-dire entre deux passages consécutifs du soleil au méridien.

On comparera ce diamètre au diamètre vertical, pour s'assurer si le soleil est parfaitement rond; on a cru y voir quelques légères différences, mais elles ne sont pas bien constatées.

En comparant les diamètres observés en différens tems, on remarquera qu'ils croissent de l'été à l'hiver, et décroissent de l'hiver à l'été fort régulièrement, la différence va jusqu'à $\frac{1}{60}$ en plus ou en moins; d'où il résulte que la distance du soleil à la terre est plus grande de $\frac{1}{60}$ en été que vers les équinoxes, et qu'elle est plus petite de $\frac{1}{60}$ en hiver.

4. On voit plus aisément encore que la distance zénitale décroît continuellement du solstice d'hiver à celui d'été, et croît ensuite du solstice d'été à celui d'hiver. La variation est presque nulle au solstice; elle est de près d'une minute par jour à l'équinoxe. De la plus grande à la plus petite distance, la différence est maintenant de 46° 55′ 40″; elle était de 47° 42′ au tems d'Hipparque. La moitié de cette différence, 23° 27′ 50″, est la quantité dont le soleil s'écarte de l'équateur, au-dessus en été et au-dessous en hiver.

Si l'on pouvait compter sur les observations d'Hipparque, l'obliquité aurait décru de 23′ en 2000 ans, ce qui ferait 0″,64 par an.

Ptolémée dit avoir trouvé 23°. 51′, comme Hipparque, ce qui est très-suspect, la diminution aurait été nulle pendant près de 300 ans, et elle aurait été ensuite de plus de 0″,8, ce qui est surement trop fort. Les observations modernes paraissent donner 0″,48; la théorie paraît indiquer 0″,52; tout cela est fort approché, mais encore un peu incertain.

5. La première chose que nous ayons à examiner, c'est la loi suivant laquelle croissent ou décroissent les distances polaires, et si le soleil se meut dans un même plan, ce que nous reconnaîtrons en cherchant si le soleil paraît parcourir un grand cercle de la sphère.

Supposons qu'un jour on ait observé la distance polaire *PA* (fig. 59) et l'ascension droite FD, c'est-à-dire le point *D* de l'équateur qui passe avec le soleil.

Qu'à un mois ou deux de là on ait observé la distance PC et le point E de l'équateur, on connaîtra $DE = DPE = P = d\text{Æ}$; le triangle APC donne

$$\tang A = \frac{\sin P}{\sin PA \cot PC - \cos PA \cos P}.$$

Le triangle ADF donne

$$\begin{aligned}\tang DF &= \tang A \sin AD = \tang A \cos PA \\ &= \frac{\sin P \cos PA}{\sin PA \cot PC - \cos PA \cos P} = \frac{\tang PC \cot PA \sin P}{1 - \tang PC \cot PA \cos P} \\ &= \frac{\tang \Delta' \cot \Delta \sin(\text{Æ}' - \text{Æ})}{1 - \tang \Delta' \cot \Delta \sin(\text{Æ}' - \text{Æ})}.\end{aligned}$$

Si le soleil a parcouru le grand cercle FAC, nous connaîtrons la position de ce cercle, son intersection F avec l'équateur, et l'intersection L qui est nécessairement à 180° de la première.

Nous connaîtrons l'angle F, car

$$\begin{aligned}\tang F &= \frac{\cot \Delta}{\sin DF} = \cot \Delta \operatorname{cosec} DF = \cot \Delta (1 + \cot^2 DF)^{\frac{1}{2}} \\ &= \cot \Delta \left(\frac{1 - 2\tang \Delta' \cot \Delta \cos P + \tang^2 \Delta' \cot^2 \Delta \cos D}{\tang^2 \Delta' \cot^2 \Delta \sin^2 P}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\cot \Delta}{\tang \Delta' \cot \Delta \sin P} (\tang^2 \Delta' \cot^2 \Delta' \sin^2 P + 1 - 2\tang \Delta' \cot \Delta' \cos P \\ &\qquad + \tang^2 \Delta' \cot^2 \Delta' \cos P)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\cot^2 \Delta - 2\Delta' \cot \Delta \cos P + \cot^2 \Delta')^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Il est plus court de s'en tenir à

$$\tang F = \frac{\cot \Delta}{\sin DF} = \frac{\cot \Delta'}{\sin EL};$$

on aura aussi

$$\cos AF = \sin \Delta \cos DF; \qquad \cos CF = \sin \Delta' \cos EL.$$

6. Si toutes ces observations, prises deux à deux, s'accordent pour le point F et l'angle F, nous serons sûrs que la route du soleil est un grand cercle, et c'est ce que les

astronomes ont reconnu de tout tems, parce que les observations s'accordaient dans les limites des erreurs probables de l'observation.

Soit $\Delta = \Delta'$, ou $\tang \Delta' \cot \Delta = 1$, la formule devient

$$\tang DF = \frac{\sin P}{1 - \cos P} = \frac{2\sin\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P}{2\sin^2\frac{1}{2}P}$$
$$= \cot\tfrac{1}{2}P = \cot\tfrac{1}{2}DE = \cot\tfrac{1}{2}d\text{Æ};$$

car le triangle est isoscèle, l'arc perpendiculaire PmM coupe en deux l'arc AmC et l'arc DE; $DM = 90° - DF$, ce qui dispense du calcul.

Mais que les côtés PA, PC soient égaux ou inégaux, la perpendiculaire PmM, menée du pôle, tombera toujours aux points solsticiaux m et M; en effet, $\cot m = \tang F \cos Fm$; ainsi pour que $m = 90°$, il faut que $Fm = 90°$.

Si l'observation ne donne pas tout-à-fait $PC = PA$, on compare deux observations consécutives, dont l'une donne $PK < PA$ et $PI > PA$, on en conclura le point E, en disant $PI - PK : PA - PK :: GH : GE = \frac{d\text{Æ}(PA - PK)}{d\Delta}$.

7. C'est le procédé dont les astronomes se sont contentés jusqu'ici; celui que je viens d'indiquer est plus général, on est beaucoup moins limité dans le choix des observations; il suffit qu'il n'y ait pas une trop grande inégalité entre les deux distances, et que l'angle au pôle ne soit pas trop petit.

8. Soit $\Delta + \Delta' = 180°$, ou $\tang \Delta' = -\tang \Delta$ (fig. 60);

$$\tang DF = -\frac{\sin P}{1 + \cos P} = -\frac{2\sin\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P}{2\cos^2\frac{1}{2}P} = -\tang\tfrac{1}{2}P;$$

dans ce cas, le point F est sur le milieu de DE et hors de l'angle P; l'inconvénient, dans ce cas, qui est encore fort simple, c'est que les distances zénitales étant assez inégales, l'erreur qu'on peut craindre dans les réfractions ne sera pas la même et pourra laisser quelqu'incertitude sur la situation du point F, mais le remède est facile; on répétera les mêmes observations vers l'équinoxe suivant; alors supposons que par

l'erreur des réfractions, le point A ait été porté en d, C en e et F en f; à l'équinoxe suivant, les mêmes causes produiront un effet tout contraire; l'arc FF, qui devrait être de 180°, sera $180° - 2Ff$, le milieu des ff sera toujours le point solsticial; on en conclura les points équinoxiaux, en retranchant et ajoutant 90°, et l'on connaîtra Ff, qui fera juger de l'erreur commise sur les réfractions.

8. Ce que nous disons de l'erreur des réfractions se dira de même de l'erreur sur la hauteur du pôle, qui sert à conclure la distance polaire; elle agira en sens contraire dans les deux équinoxes, et se compensera; ces deux effets se combineront et l'on ne pourra connaître que la somme ou la différence; mais il sera difficile de les séparer. Cette méthode, appliquée aux observations de La Caille, en 1750, et à celle de Maskelyne, en 1800, m'a donné la position du point F à ces deux époques, et m'a fait voir que le point F avait un mouvement rétrograde de 46″ par an.

9. En 1750, le point F et l'étoile γ de Pégase, première de notre catalogue, différaient à peine de 6′; en 1800, la différence était augmentée de 36′ 20″; il paraît donc que c'est vers le point équinoxial de l'équateur que le pôle s'abaisse, c'est donc du point équinoxial de l'équateur que nous devons compter les ascensions droites qui servent aux calculs des mouvemens des étoiles, car il est difficile de déterminer, à un degré près, par les distances polaires, vers quel point le pôle se dirige; il paraît donc certain que les ascensions droites des étoiles et celles du soleil doivent se compter également du point équinoxial. Ce point rétrograde de 46″ par an le long de l'équateur; ce terme doit s'ajouter annuellement à l'ascension de toutes les étoiles; réuni avec le terme $Pq = 20'',06$, il va nous servir à trouver le point autour duquel tourne le pôle; en effet $Pq = dL \sin PC = 20'',06$, (fig. 58); nous trouvons..... $dL \cos PC = 46,00$; donc

$$\text{tang}\, PC = \frac{20,06}{46} = \text{tang}\, 23° \; 28';$$

le point C est donc le pôle de l'écliptique; c'est autour de ce pôle que le pôle du monde tourne d'un mouvement angulaire de $\frac{46''}{\cos\omega} = 50'',1$ tous les ans; ainsi nos formules deviennent

$$d\text{Æ} = 50'',1 \cos\omega + 50'',1 \sin\omega \sin\text{Æ} \cot\Delta,$$
$$d\Delta = -50'',1 \sin\omega \cos\text{Æ},$$
$$dL = 50'',1.$$

10. Le cercle oblique décrit par la rétrogradation du point équinoxial est l'écliptique; l'angle au pôle de l'écliptique, entre la distance de l'étoile à ce pôle et l'arc de grand cercle mené au point équinoxial, a pour mesure un arc de grand cercle oblique, et cet arc se nomme *la longitude de l'étoile;* le complément de la distance au pôle de l'écliptique s'appelle *latitude;* ces latitudes, ainsi que les distances au pôle de l'écliptique, sont constantes; ainsi les longitudes augmentent de 50″ 1 par an, et les latitudes sont invariables, ce qui a fait croire aux anciens que toutes les étoiles tournaient d'un mouvement commun autour des pôles de l'écliptique, comme si elles étaient enchâssées dans une calotte sphérique. Cette révolution est d'environ 25869 ans, dont on n'a encore observé qu'une bien faible partie, puisque la découverte ne date pas de 2000 ans. Elle est due à Hipparque qui déterminant le lieu des étoiles par le soleil, et rapportant tout à la route du soleil, s'aperçut que de son tems l'épi de la Vierge était à 6° de l'équinoxe d'automne, tandis que par des observations de Timocharis, elle en était à 8°; il remarquait, en outre, que la latitude était restée la même. Quelques autres étoiles le menèrent à croire que l'équinoxe rétrogradait; au moins, l'un de ses ouvrages mentionnés par Ptolémée, avait-il pour titre *de la rétrogradation des points équinoxiaux*. Ptolémée, au contraire, suppose les points équinoxiaux fixes et donne leur mouvement aux étoiles, mais en sens contraire; Hipparque ne proposait son idée que comme une conjecture; Ptolémée la mit hors de doute; mais il se trompa

sur la quantité du mouvement, qu'il ne faisait que de 36″; cependant les observations de Ptolémée, comparées aux nôtres, donneraient de 52 à 53; celles d'Hipparque, par un milieu, donnent 50″, et tous les astronomes se sont accordés à supposer de 50″ à 50″ $\frac{1}{3}$, ce qui a fait penser que Ptolémée n'avait pas réellement composé son catalogue, et qu'il n'avait fait que copier celui d'Hipparque, en ajoutant 2° 40′ à toutes les longitudes, à raison de 36″ par année. Cette conjecture est très-vraisemblable; on ne peut pas dire pourtant qu'elle soit absolument démontrée.

11. Ce mouvement de 50″,1 est ce qu'on appelle *la précession des équinoxes*; on devrait l'appeler *rétrogradation des points équinoxiaux*, et réserver le mot de précession pour l'anticipation du moment de l'équinoxe; car le point équinoxial venant à la rencontre du soleil, cet astre n'a plus que 359° 59′ 9″ 9 à faire chaque année pour se retrouver dans l'équateur. L'équinoxe avance donc de 0^h 20′ 20″ environ tous les ans, et l'année est de 20′ 20″ plus courte que si l'équinoxe était immobile. Par extension on dit, la précession en ascension droite, ou en déclinaison, ainsi qu'en longitude.

12. Ptolémée faisait donc tourner la sphère étoilée toute entière en 36000 ans autour des pôles de l'écliptique, suivant l'ordre des signes, et il faisait tourner cette même sphère en 24^h en sens contraire autour des pôles de l'équateur pour expliquer la révolution diurne. Pour concevoir ces deux mouvemens opposés et si différens, il fallait supposer deux calottes solides et concentriques, dont l'une tournait très-rapidement autour de l'axe de l'équateur, et entraînait dans ce mouvement la calotte extérieure qui par son mouvement restait tous les jours un peu en arrière, ensorte que la situation respective des deux calottes changeait continuellement et ne devait se retrouver la même qu'après 36000 ans.

Nous épargnerons cette complication en supposant que la terre tourne sur son axe en 24^h sidérales, et que son axe, au lieu de se diriger constamment aux mêmes points du ciel,

a un mouvement conique et fort lent qui lui fait décrire un petit cercle autour du pôle de l'écliptique en 25869 ans.

13. Ce mouvement est si lent, que l'axe de la terre est sensiblement parallèle à lui-même pendant l'année que la terre emploie à tourner autour du soleil dans le plan de l'écliptique. Ce système, qui a l'avantage, incontestable de la simplicité, a d'ailleurs cet autre avantage, que tous les mouvemens s'expliquent dans l'Astronomie moderne, qu'ils forment un système où tout est lié, tandis que tout est inexplicable et incohérent dans l'hypothèse du mouvement du soleil.

14. Les modernes dans leurs observations rapportent tout à l'équateur, mais dans leurs calculs ils sont obligés sans cesse de rappeler à l'écliptique, non seulement les mouvemens du soleil, mais ceux de la lune et des planètes dont les orbites sont moins éloignées de l'écliptique qu'elles ne le sont de l'équateur. On est donc obligé sans cesse de convertir les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes et en latitudes, et réciproquement. Les astronomes ont pour cela trois méthodes principales. Le triangle CPE (fig. 58) par les règles de la trigonométrie nous donne les relations suivantes :

$$\cos Æ \sin \Delta = \cos L \sin \delta,$$

$$\operatorname{tang} L = \cos\omega \operatorname{tang} Æ + \frac{\sin\omega \cot \Delta}{\cos Æ},$$

$$\cos\delta = \cos\omega \cos\Delta - \sin\omega \sin\Delta \sin Æ,$$

$$\operatorname{tang} A = \cos\omega \operatorname{tang} L - \frac{\sin\omega \cot\delta}{\cos L},$$

$$\cos\Delta = \cos\omega \cos\delta + \sin\omega \sin\delta \sin L,$$

$$\cot E = \frac{\cot\omega \sin\delta}{\cos L} - \cos\delta \operatorname{tang} L$$

$$= \frac{\cot\omega \sin\Delta}{\cos Æ} + \cos\Delta \operatorname{tang} Æ,$$

δ = distance au pôle de l'écliptique,
Δ = distance au pôle de l'équateur,
L = longitude sur l'écliptique,
$Æ$ = ascension droite,
E = angle à l'étoile ou de position.

Ces formules sont générales, mais peu commodes, et elles ne servent guères que dans les calculs analytiques. Lalande accrédita la méthode suivante :

Si vous connaissez l'ascension droite AF et la déclinaison FE, faites (fig. 61)

$$\cos AE = \cos AF \cos FE \qquad \text{ou } \cos h = \cos Æ \cos D,$$

$$\text{tang } FAE = \frac{\text{tang } FE}{\sin AF} \qquad \text{tang } x = \frac{\text{tang } D}{\sin Æ},$$

$$\text{tang } AL = \cos BAE \text{ tang } AE \qquad \text{tang } L = \cos(x-\omega) \text{ tang } h,$$

$$\sin EL = \sin BAE \sin AE \qquad \sin \lambda = \sin(x-\omega) \sin h,$$

Maskelyne fait comme Lalande,

$$\text{tang } x = \frac{\text{tang } D}{\sin Æ}; \text{ mais ensuite}$$

$$\text{tang } L = \frac{\cos(x-\omega) \text{ tang } Æ}{\cos x} \text{ et tang } \lambda = (x-\omega) \sin L,$$

Tycho faisait

$$\text{tang } BF = \text{tang } \omega \sin Æ; \text{ tang } AB = \frac{\text{tang } Æ}{\cos \omega};$$

$$\cot ABF \text{ tang } \omega \cos AB,$$

$$BE = FE - FB = (D - FB); \text{ tang } BL = \text{tang } BE \cos B; L = AB + BL, \sin EL = \sin B \sin BE; \cot BEL = \text{tang } B \cos BE,$$

Six analogies fort simples résolvaient le problème en entier, et il avait réduit les trois premières en tables, qui lui donnaient AB arc de l'écliptique, qui répondait à l'ascension droite AF, BF déclinaison du point B de l'écliptique et l'angle B de l'écliptique avec le cercle de déclinaison. Dans la méthode de Lalande, il faut six analogies, si l'on veut aussi avoir l'angle de position, mais on en a rarement besoin.

15. Dans le problème inverse, vous avez, suivant Lalande,

$$\cos h = \cos L \cos \lambda; \qquad \text{tang } y = \frac{\text{tang } \lambda}{\sin L} = \text{tang } EAL;$$

$$\text{tang } Æ = \text{tang } h \cos(y+\omega); \quad \sin D = \sin h \sin(y+\omega);$$

$$\cot AEL = \cos h \text{ tang } y, \qquad \cot AEF = \cos h \text{ tang } (y+\omega).$$

Ces six formules ont une grande analogie avec les précédentes ; dans les unes comme dans les autres, on fait attention à la règle des signes.

16. Suivant Tycho, vous prolongiez EL en G,

$$\text{tang AG} = \frac{\text{tang AL}}{\cos\omega} = \frac{\text{tang L}}{\cos\omega}\ ;\ \text{tang LG} = \sin \text{L tang}\,\omega\ ;$$

$$\cos\text{G} = \sin\omega\cos\text{L}\ ;\ \text{EG} = \text{EL}+\text{LG}\ ;\ \text{tang FG} = \text{tang EG}\cos\text{G}\ ;$$

$$\text{AF} = \text{AG} - \text{FG}\ ;\ \sin\text{D} = \sin\text{EF} = \sin\text{EG}\sin\text{G}\ ;$$

$$\cot\text{FEG} = \cos\text{EG}\,\text{tang G}.$$

Ces six analogies ressemblent aux premières et résolvent le problème.

17. L'écliptique, comme l'équateur, se partage en 360°; on la partage encore en 12ʃ de 30° chacun, que les Grecs appelaient *dodécatémories*, ou douzièmes parties, et qui font chacun à peu près le chemin du soleil en un mois.

Ces 12 signes sont désignés par les caractères et les noms suivans :

♈	♉	♊	♋	♌	♍
Aries,	*Taurus*,	*Gemini*,	*Cancer*,	*Leo*,	*Virgo*,
le Bélier,	le Taureau,	les Gémeaux,	l'Écrevisse,	le Lion,	la Vierge,
0.	1.	2.	3.	4.	5.

♎	♏	♐	♑	♒	♓
Libra,	*Scorpius*,	*Arcitenens*,	*Caper*,	*Amphora*,	*Pisces*.
la Balance,	le Scorpion,	le Sagittaire,	le Capricorne,	le Verseau,	les Poissons.
6.	7.	8.	9.	10.	11.

18. Autrefois on désignait ces différens signes par leurs caractères, et non par leurs nombres ordinaux; cette habitude incommode est heureusement perdue, mais on a encore besoin de connaître cette notation, pour lire les ouvrages qui ont plus de 60 ans de date. Aujourd'hui le mot *signe* ne signifie plus qu'un arc de 30°, et les caractères sont réservés exclusivement aux constellations, qui autrefois répondaient à chaque signe, mais qui, par l'effet de la précession, en sont éloignés et s'en éloigneront de plus en plus. La dénomination de signe sera probablement bientôt bannie de l'Astro-

nomie pratique. Pour dire qu'une planète a 276° de longitude, on écrit encore 9♑.6°; autrefois on aurait mis ♑.6°. Les tables des planètes sont encore en signes, mais les ascensions droites, les déclinaisons, les latitudes ne se comptent qu'en degrés.

LEÇON IX.

Circonstances du mouvement diurne.

1. Tout ce qu'on peut dire sur le mouvement diurne est compris dans la formule fondamentale de la Trigonométrie,

$$\cos ZA = \cos PA \cos PZ + \sin PA \sin PZ \cos P \quad \text{(fig. 62)}.$$

Si $P = 0$, l'astre sera dans le vertical qui passe par le pôle; on aura $\cos P = 1$, et

$$\cos ZA = \cos PA \cos PZ + \sin PA \sin PZ = \cos(PA - PZ);$$
$$ZA = PA - PZ.$$

L'astre sera à sa plus grande proximité du zénit, car on aura $ZA + PZ = PA$, au lieu qu'en général on a

$$ZA + PZ > PA \quad \text{et} \quad ZA > PA - PZ.$$

Si P augmente, $\cos P$ diminue et fait diminuer le second membre de l'équation, $\cos ZA$ diminue, ZA augmente; ainsi après le passage au méridien, la distance zénitale ZA ira toujours en augmentant.

Soit $ZA = 90$, nous aurons $\cos ZA = 0$, et

$$\cos PA \cos PZ = - \cos P \sin PA \sin PZ,$$
$$\cos P = - \cot PA \cot PZ = - \operatorname{tang} D \operatorname{tang} H.$$

2. Cette formule bien simple donne l'angle horaire pour les deux instans où l'astre est à l'horizon, c'est-à-dire, pour le lever et le coucher vrai.

Le second membre est négatif quand la déclinaison est boréale, ainsi cos P est une quantité négative; P surpasse donc 90°, la demi-durée du jour surpasse 6 heures.

Si $D = 0$, $\cos P = 0$, $P = 90° = 6^h$. Ainsi un astre dans l'équateur emploie 6 heures à monter de l'horizon au méridien, 6 heures à redescendre; son jour est de 12 heures et sa nuit est aussi de 12 heures, du moins en négligeant les réfractions, qui augmentent le jour de 4 à 10′.

Si la déclinaison est australe, le second membre sera positif, P sera moindre que 90°, le demi-jour sera moindre que 6 heures; ainsi quand le soleil est au-dessous de l'équateur, le jour n'est pas de 12 heures, la nuit est plus longue que le jour, puisque les deux réunis font toujours 24 heures.

Si la déclinaison n'a pas varié dans l'intervalle, l'angle P du coucher est le même que celui du lever; il y a même intervalle entre le lever et le passage au méridien, et entre le passage au méridien et le coucher; c'est ce qui a fait donner le nom de *méridien* au vertical qui passe par le pôle. Il n'est pourtant vraiment méridien que pour les astres qui ne changent pas leur déclinaison en 24 heures, c'est-à-dire, pour les étoiles; car pour le soleil, la lune et les planètes, le changement de déclinaison fait que les angles horaires du coucher sont ou plus grands, ou plus petits que ceux du lever, selon que l'astre monte vers le pôle élevé ou s'en éloigne.

A Paris, à l'équinoxe du printems, la seconde moitié du jour est plus grande de 1′ 12″ que la première; c'est le contraire à l'équinoxe d'automne; au solstice, les deux moitiés sont sensiblement égales, parce que la déclinaison n'a pas de variation sensible.

3. Remarquons en passant, que l'heure du lever, jointe à l'heure du coucher, fait toujours, à 1′ près, une somme de 12 heures; car l'heure du matin se compte de minuit, elle est 12^h — angle horaire; l'heure du soir est au contraire égale à l'angle horaire. La somme est donc toujours $12^h \pm 1'$ environ.

Si $D = -D'$, c'est-à-dire, si vous prenez deux declinai-

sons égales, mais l'une australe et l'autre boréale, vous aurez $\cos P = -\cos P'$; les deux angles horaires du lever auront même cosinus, au signe près, les angles seront supplémens l'un de l'autre; d'où il résulte que l'angle semi-diurne de l'un sera l'angle semi-nocturne de l'autre, et réciproquement. On appelle *angle semi-diurne* l'angle au lever ou au coucher, compté du méridien supérieur. On appelle *angle semi-nocturne* l'angle au lever ou au coucher, compté du méridien inférieur; ils sont toujours supplémens l'un de l'autre à 180°.

4. Quand $ZA > 90°$, son cosinus est négatif et augmente quand l'arc augmente; il faut, dans ce cas, que..... $\cos PA \cos PZ + \sin PA \sin PZ \cos P$ soit une quantité négative.

$\cos PZ$, $\sin PA$ et $\sin PZ$ sont toujours positifs; il faut donc que $\cos PA$ soit négatif et plus grand que $\sin PA \tang PZ \cos P$, $\cos ZA$ augmentera donc à mesure que $\cos P$ diminuera, ainsi ZA augmentera encore avec P; mais si $\cos P$ lui-même est négatif, les deux termes seront négatifs, le second membre ira toujours croissant, ZA augmente donc toujours.

Si $P = 180°$, $\cos P = 1$.

$$\cos ZA = \cos PA \cos PZ - \sin PA \sin PZ = \cos (PA + PZ);$$

ZA est le plus grand possible, puisque $ZA = PA + PZ$, et que dans tout autre cas, $ZA < PA + PZ$, qui sont supposés ne pas changer.

5. L'équation $ZA = PA - PZ$, ou $N = 90° - D - (90° - H) = H - D$ donnera $H = N + D$; c'est ainsi qu'on trouve la hauteur du pôle en prenant au méridien la distance zénitale d'un astre dont on connaît la déclinaison.

La même équation donne $D = H - N$; c'est ainsi qu'on trouve la déclinaison d'un astre, quand on connaît la hauteur du pôle.

$\cos (PA - PZ) = \cos (PZ - PA) = \cos ZA$; si $PZ > PA$, ou si $D > H$, l'astre passe entre le zénit et le pôle, ... $N = PZ - PA = D - H$, et cette équation sert à trouver de même la hauteur du pôle par la déclinaison, et la déclinaison par la hauteur du pôle.

Au méridien inférieur $ZA = PA + PZ$;

$$N = 90° - D + 90° - H = 180° - (H + D);$$

cette équation sert aux mêmes usages que les précédentes, quand on a observé la distance zénitale d'une étoile au-dessous du pôle; il faut pour cela $H + D > 180° - N$, ou $90° N < 90°$, et $180° - (H + D) < 90°$, ou $(H+D) > 90°$; alors l'étoile ne fait que tourner autour du pôle sans se coucher; ces étoiles se nomment *circompolaires*.

Le passage supérieur donne $ZA = PZ - PA$,
le passage inférieur $ZA' = PZ' + PA$;

d'où

$$ZA + ZA' = 2PZ; \quad PZ = \tfrac{1}{2}(N + N'),$$

et

$$H = 90° - \tfrac{1}{2}(N + N');$$

c'est la manière la plus simple de trouver la hauteur du pôle et la distance polaire de l'étoile tout à la fois, car PZ étant connu par les deux distances observées, on a

$$PA = PZ - ZA \quad \text{et} \quad PA = ZA' - PZ.$$

6. L'usage le plus direct de l'équation

$$\cos ZA = \cos PA \cos PZ + \sin PA \sin PZ \cos P$$

est de trouver la distance zénitale d'un astre dont on connaît la distance polaire; il suffit alors de connaître l'angle horaire P, qui est proportionnel au tems écoulé depuis le passage au méridien.

En la retournant on a

$$\cos P = \frac{\cos ZA - \cos PA \cos PZ}{\sin PA \sin PZ},$$

qui sert à calculer l'heure ou l'angle horaire par les trois côtés connus; nous avons vu comment on a modifié cette formule, pour l'adapter mieux au calcul logarithmique.

7. Les formules de Néper donnent un moyen commode pour calculer à la fois les trois inconnues du triangle, quand on a pour données l'angle horaire et les deux côtés qui le

comprennent ; faites

$$\tang \tfrac{1}{2}(Z - A) = \frac{\cot \frac{1}{2} P \sin \frac{1}{2}(PA - PZ)}{\sin \frac{1}{2}(PA + PZ)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(Z + A) = \frac{\cot \frac{1}{2} P \cos \frac{1}{2}(PA - PZ)}{\cos \frac{1}{2}(PA + PZ)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} ZA = \frac{\tang \frac{1}{2}(PA + PZ) \cos \frac{1}{2}(Z + A)}{\cos \frac{1}{2}(Z - A)},$$

$$\cot Z \sin P = \cos H \tang D - \sin H \cos P,$$

$$\cot Z \sin P + \sin H \cos P = \cos H \tang D,$$

$$\frac{\cot Z \sin P}{\sin H} + \cos P = \cot H \tang D,$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \sin P + \cos P = \cos H \tang D,$$

$$\sin P \sin x + \cos P \cos x = \cos x \cot H \tang D,$$

$$\cos(P - x) = \cos x \cot H \tang D.$$

Voulez-vous l'azimut tout seul ? vous aurez

$$\cot Z = \left(\frac{\cos H}{\sin P}\right) \tang D - \sin H \cot P.$$

8. Nous avons vu que la direction des ombres indiquait le vertical du soleil. A un instant connu, au moyen d'une montre ou d'une pendule bien réglée, marquez dans une chambre la direction de l'ombre d'un mur bien vertical, ou si votre mur n'est pas assez vertical, marquez l'ombre de l'angle supérieur de la fenêtre. Par cet angle, et le point d'ombre, tendez une ficelle, au moyen d'un fil à plomb, abaissez deux ou plusieurs perpendiculaires de cette ficelle sur le parquet ; par les pieds de ces perpendiculaires, tracez une droite sur le parquet jusqu'au mur où vous avez marqué le point d'ombre, continuez cette ligne verticalement sur le mur, elle passera par le point d'ombre et vous indiquera toute l'année le retour du soleil au même azimut. Au moyen de l'équation précédente, calculez l'azimut du soleil pour le jour et l'heure de l'observation, vous connaîtrez l'azimut de votre ligne. Calculez pour chaque déclinaison du soleil

soleil l'heure à laquelle il aura cet azimut; faites-en une table qui vous donnera l'heure toutes les fois que l'ombre passera par votre ligne. Pour trouver l'angle P, faites

$$\tang x = \frac{\cot Z}{\sin H}; \quad \cos B = \cos x \cot H \tang D; \quad P = (B + x);$$

tracez ainsi autant de lignes que vous pouvez dans la maison, pour multiplier les moyens de savoir l'heure, sans avoir l'embarras de tracer un cadran solaire.

9. Si $Z = 90°$, pour calculer l'heure on n'a besoin que de la distance zénitale et de la déclinaison; en effet, le triangle PZA rectangle en Z donne

$$\sin P = \frac{\sin ZA}{\sin PA} = \frac{\sin N}{\cos D}.$$

On a donc l'heure indépendamment de la hauteur du pôle. Le même triangle donne $\cos PA = \cos SZ \cos ZA$; $\sin D = \sin H \cos N$ et $\sin H = \frac{\sin D}{\cos N}$.

La même observation donnera donc l'heure et la hauteur du pôle: comme la latitude n'influe en rien sur l'heure au premier vertical, c'est aux environs du premier vertical, ou au premier vertical même qu'on observe la distance zénitale pour régler une pendule.

10. *On a mesuré les distances zénitales ZA et ZB de deux étoiles connues; on a marqué le tems des observations; on demande l'heure et la hauteur du pôle* (fig. 63).

Si les observations étaient simultanées, le triangle APB donnerait le côté AB par les deux distances polaires PA, PB et la différence d'ascension droite APB; il donnerait aussi les angles PAB et PBA.

Dans le triangle AZB on aurait les trois côtés, on calculerait les angles ZAB et ZBA, on aurait PAZ=PAB—ZAB et PBZ =ZBA—PBA; alors dans le triangle PAZ on aurait les côtés PA, ZA et l'angle compris, on calculerait PZ, APZ angle horaire et PZA azimut:

Dans le triangle PBZ on aurait PBZ, PB et ZB, on calculerait PBZ, PZ et PZB.

Il est presque impossible que les observations soient simultanées, s'il y a un intervalle entre les deux ; il faut de plus une attention qui n'est pas difficile.

Quand on a observé ZB, l'étoile A aurait eu la distance ZA, si les deux observations eussent été faites au même instant, si l'observation ZA a eu lieu une heure après, A sera descendu en A′ à la distance ZA′ qui a été observée, l'angle sera BPA′, $=(\text{Æ}'-\text{Æ}+15^\circ t)$, t étant l'intervalle écoulé ; avec cet angle, vous calculerez A′B et le triangle ZBA′.

Si l'observation a eu lieu une heure avant, A′ sera entre B et A et l'angle sera $(\text{Æ}'-\text{Æ}-15^\circ t)$; ainsi les données générales du problème sont PB, PA et l'angle $(\text{Æ}'-\text{Æ}\pm 15^\circ t)$ le signe + ; si l'observation de A a suivi celle de B, le signe — si elle a précédé, si l'intervalle est nul $t=o$ et l'angle $(\text{Æ}'-\text{Æ})$ Æ′ est l'ascension droite de l'étoile B, Æ celle de l'étoile A. On suppose les observations faites après le passage au méridien.

11. Si l'on est pas sûr de son instrument, on observera les deux étoiles à la même distance zénitale, on aura (fig. 64)

$$\cos ZB = \cos ZPB \sin PZ \cos PB + \cos PZ \cos PB$$
$$\cos ZC = \cos ZPC \sin PZ \sin PC + \cos PZ \cos PC,$$

d'où par la soustraction,

$$o = \cos H\,(\cos P \cos D - \cos P' \cos D') + \sin H\,(\sin D - \sin D'),$$
$$\text{et } \operatorname{tang} H = \frac{\cos P \cos D - \cos P' \cos D'}{\sin D - \sin D'}.$$

Soit $P = \frac{1}{2}(P'+P) - \frac{1}{2}(P'-P)$ et $P' = \frac{1}{2}(P'+P) + \frac{1}{2}(P'-P)$,

il viendra

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\cos\tfrac{1}{2}(P'-P)$$
$$+\cot\tfrac{1}{2}(D'-D)\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)\sin\tfrac{1}{2}(P'-P),$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(D'-D)\operatorname{tang} H}{\sin\frac{1}{2}(P'-P)} = \sin\tfrac{1}{2}(P'+P)$$
$$+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'-D)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{1}{2}(P'-P)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(P'+P) + \operatorname{tang} x \cos\tfrac{1}{2}(P'+P),$$

$$= \frac{\sin x \cos \frac{1}{2}(P'+P) + \cos x \sin \frac{1}{2}(P'+P)}{\cos x} = \frac{\sin\left(\frac{P'+P}{2}+x\right)}{\cos x}$$

d'où

$$\sin\left(\frac{P'+P}{2}+x\right) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(D'-D)\operatorname{tang}H\cos x}{\sin\frac{1}{2}(P'-P)},$$

et

$$\left(\frac{P'+P}{2}+x\right) - x = \frac{P'+P}{2};$$

on aura donc l'angle horaire pour le milieu de l'intervalle par ces deux formules quand on aura fait

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'-D)\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{1}{2}(P'-P).$$

On connaît $\frac{1}{2}(P'-P)$ par l'intervalle écoulé et la différence d'ascension droite, car $(P'-P) = (Æ - Æ' \pm 15^\circ t)$, le signe $+$ si l'étoile Æ a été observée la première, le signe $-$ si l'étoile Æ a été observée la dernière; Æ, D, P appartiennent à l'étoile plus avancée en ascension droite, Æ', D', P' à celle qui l'est moins.

Connaissant $\frac{1}{2}(P'+P)$ et $\frac{1}{2}(P'-P)$, on aura P et P'; on pourra calculer les distances égales ZA, ZC, les comparer aux distances observées et connaître l'erreur de l'instrument.

12. Une étoile circompolaire peut être observée deux fois dans un jour au même vertical; chacune des deux observations peut donner l'azimut de ce vertical; ainsi l'on aura (fig. 65)

$$\cot Z = \frac{\sin PZ}{\sin P}\cos PA - \cos PZ \cot P = \frac{\sin PZ}{\sin P'}\cot PA' - \cos PZ \cot P';$$

et comme $PA' = PA$ on aura

$$\cos PZ\ (\cot P' - \cot P) = \sin PZ \cot PA \left(\frac{1}{\sin P'} - \frac{1}{\sin P}\right),$$

$$\frac{\cos PZ \sin(P-P')}{\sin P \sin P'} = \frac{\sin PZ \cot PA\ (\sin P - \sin P')}{\sin P \sin P'},$$

$$\sin(P-P') = \operatorname{tang} PZ \cot PA\ 2\sin\tfrac{1}{2}(P-P')\cos\tfrac{1}{2}(P+P'),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(P-P') = \cot H \operatorname{tang} D \cos\tfrac{1}{2}(P+P'),$$

ou

$$\cos\tfrac{1}{2}(P+P') = \cos\tfrac{1}{2}(P-P')\cot D \operatorname{tang} H.$$

13. Ainsi, quand on aura observé l'intervalle des deux passages au même vertical, on connaîtra $\frac{1}{2}(P-P')$, on en conclura $\frac{1}{2}(P+P')$ et l'on aura deux manières de calculer l'azimut Z. Si l'observation s'est faite à une lunette méridienne qui n'est pas exactement dans le méridien, vous pourrez calculer la déviation Z. Si elle est dans le méridien, vous aurez $\cos\frac{1}{2}(P-P') = \cos 90° = o$ $\cos\frac{1}{2}(P+P') = o$ et les deux angles horaires seront $o + 180°$.

Si la lunette est hors du méridien, vous l'en rapprocherez jusqu'à ce que l'intervalle des deux passages d'une même étoile soit exactement de 12 heures.

14. Plus l'azimut Z sera grand, moindre sera l'intervalle entre les deux passages; si le vertical est tangent au parallèle de l'étoile, les deux passages se réduiront à un seul. Au point de contingence le parallèle et le vertical se confondront, le triangle PZA sera droit en A, vous aurez

$$\tang PA = \cos P \tang PZ; \quad \cos P = \cot D \tang H.$$

Cet angle P vous donnera l'instant où le mouvement de l'étoile se confond avec le vertical, et par conséquent l'instant où le mouvement en hauteur est le plus rapide; mais pour cela il faut, comme on voit, que PA soit moindre que PZ; si $PA = PZ$ le point de contingence est au zénit car $P = o$ à l'instant du passage au méridien, et le mouvement est tout entier dans le sens de la hauteur.

15. Si $PA > PZ$, le mouvement sera toujours oblique par rapport au vertical, il fera avec le vertical un angle d'autant plus grand, que l'astre approchera plus du méridien. Ce sera donc aux environs du premier vertical qu'il faudra observer la hauteur pour en conclure l'heure, si l'on veut avoir la précision la plus grande. En effet, l'angle du mouvement avec le vertical est complément de l'angle du cercle de déclinaison avec le vertical; soit a l'angle que fait la direction du mouvement avec le vertical

$$\cos a : \sin PZ :: \sin Z : \sin PA;$$

$$\cos a = \frac{\sin PZ \sin Z}{\sin PA} = \frac{\cos H \sin Z}{\cos D},$$

$\cos a$ sera d'autant plus grand et a d'autant plus petit que Z sera plus grand ; car $\left(\frac{\cos H}{\cos D}\right)$ est une quantité constante pour un même astre.

16. Au lieu d'observer l'étoile deux fois dans un même vertical, on peut chercher l'heure par l'observation de deux étoiles dans un même vertical. On peut avec un fil à plomb suspendu devant l'œil, observer l'instant où une étoile circompolaire brillante se trouve dans le même vertical que la polaire ; pour en déduire l'heure sidérale (fig. 66),

Soit A la polaire, B une autre étoile quelconque, ZAB le vertical commun ; du pôle abaissez l'arc perpendiculaire PQ, faites $\omega = APB = A' - A$; $\varphi = APQ$; $\omega + \varphi = BPQ$; $\downarrow = QPZ$, vous aurez

$$\text{tang } PQ = \text{tang } PB \cos(\omega + \varphi) = \text{tang } PA \cos\varphi = \text{tang } PZ \cos\downarrow,$$
$$= \cot D' \cos(\omega + \varphi) = \cot D \cos\varphi = \cot H \cos\downarrow,$$

d'où

$$\text{tang } D' \cot D = \frac{(\cos\omega + \varphi)}{\cos\varphi} = \cos\omega - \sin\omega \text{ tang } \varphi ;$$

$$\text{tang } \varphi = \cot\omega - \frac{\text{tang } D' \cot D}{\sin\omega} = \cot\omega - \cot y = \frac{\sin(y - \omega)}{\sin\omega \sin y},$$

et

$$\cos\downarrow = \text{tang } H \cot D' \cos(\omega + \varphi) = \text{tang } H \cot D \cos\varphi ;$$

enfin

$$P = \omega + \varphi + \downarrow ;$$

mais faites

$$(\omega + \varphi) = \tfrac{1}{2}\omega + (\tfrac{1}{2}\omega + \varphi) \text{ et développez,}$$

vous aurez

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}\omega + \varphi) = \frac{\sin(D - D') \cot\frac{1}{2}\omega}{\sin(D + D')},$$

$\cos\downarrow$ comme ci-dessus.

et $P = \psi + (\omega + \varphi)$ passage inférieur,
$P = \psi - (\omega + \varphi)$ passage supérieur.

Ces dernières formules sont de Lambert.

17. Si la hauteur du pôle était nulle, les deux pôles seraient dans l'horizon, l'équateur et ses parallèles seraient perpendiculaires à l'horizon, tous les astres se leveraient perpendiculairement, parce qu'à l'horizon leurs parallèles se confondraient avec le vertical, l'équateur serait lui-même un vertical. On dirait alors que la sphère est droite, au lieu que dans toutes les régions où l'équateur est oblique à l'horizon, on dit que la sphère est oblique.

18. Soit (fig. 67) PZP′ le méridien P et P′, les deux pôles dans l'horizon PEP′, QEZ l'équateur, ♈S l'écliptique, S le lieu du soleil, menez le cercle de déclinaison PSQP′ par le lieu du soleil, le point Q de l'équateur tournera en même tems que le soleil autour des deux pôles; il arrivera à l'horizon en E, quand le soleil sera à l'horizon en S′; il passera au méridien en Z, quand le soleil y passera en S″. Le point Q de l'équateur, déterminé par le cercle de déclinaison PSQ, indiquera donc le lever ou l'ascension du soleil sur l'horizon de la sphère droite; c'est de là que l'arc ♈Q de l'équateur a reçu chez les Grecs le nom d'*ascension dans la sphère droite*. Les modernes, en abrégeant l'expression, ont dit que l'arc ♈Q est l'ascension droite du point S de l'écliptique.

Ce point Q se trouvera avec le soleil, non-seulement dans l'horizon de la sphère droite, mais dans un cercle horaire quelconque, et dans le méridien; il marquera donc le passage du soleil au méridien, non-seulement dans la sphère droite, mais dans une position quelconque de la sphère. C'est pour cela que les termes d'ascension droite et de passage au méridien sont synonimes dans l'astronomie, tant ancienne que moderne.

19. Dans la sphère oblique le point Q n'indique pas le lever, le soleil S se lève avec un autre point qui s'appelle *l'ascension oblique*, c'est-à-dire l'ascension dans la sphère oblique. L'ascension oblique diffère de l'ascension droite, la diffé-

rence de ces deux ascensions est la différence ascensionnelle; l'ascension droite ♈Q se trouve en faisant

$$\text{tang } Æ = \text{tang } ♈Q = \cos\omega \text{ tang } ♈S = \cos\omega \text{ tang } ☉.$$

20. Pour trouver l'ascension oblique (fig. 68), soit RPMH le méridien, MEBI l'équateur, FAOS l'écliptique. Le point O de l'écliptique passera à l'horizon avec le point E de l'équateur; il passera au méridien avec le point B du cercle de déclinaison POB, AE sera l'ascension oblique de O, AB sera l'ascension droite de O, BE = AB — AE = différence ascensionnelle, or

$$\sin EB \text{ tang } OEB = \text{tang } BO,$$
$$\sin EB = \text{tang } BO \cot OEB = \text{tang } D \text{ tang } H.$$

Ainsi, pour connaître l'ascension oblique AE, il faut calculer l'ascension droite AB et la différence ascensionnelle EB.

Soit une étoile quelconque T qui est à l'horizon en même tems que le point E de l'équateur,

$$\sin EI = \text{tang } TI \cot TEI = \text{tang } D \text{ tang } H.$$

EI sera la différence ascensionnelle de T dont l'ascension droite est AI et l'ascension oblique AE; la règle est donc générale.

Ascension oblique = ascension droite — différence ascensionnelle. Soit $dÆ$ la différence ascensionnelle,

$Æ - dÆ$ = ascension oblique d'un point de l'écliptique,

$Æ' - dÆ'$ = ascension oblique d'un autre point,

$(Æ' - dÆ') - (Æ - dÆ) = (Æ' - Æ) - (dÆ' - dÆ) =$ différence d'ascension oblique de deux points de l'écliptique, = tems que l'arc de l'écliptique emploie à traverser l'horizon dans la sphère oblique.

En effet, si le point O se lève avec le point E, et le point S avec le point E', l'intervalle sera évidemment marqué par l'arc EE' de l'équateur.

21. La différence ascensionnelle sert encore à trouver le lever ou le coucher héliaque. On appelle ainsi le tems où

l'on commence, et le tems où l'on cesse d'apercevoir une étoile le matin ou le soir à l'horizon dans le voisinage du soleil.

Soit (fig. 69) une étoile N qu'on aperçoit à l'horizon le matin quand le soleil est encore en S abaissé de l'arc MS au-dessous de l'horizon. Nous aurons sin. RV = sin différence ascensionnelle, sin $d\text{Æ}$ = tang D tang H ; nous connaissons $\Upsilon V = \text{Æ}$, nous aurons ΥR = ascension oblique $= \text{Æ} - d\text{Æ}$.

Le triangle ΥRO où nous connaissons deux angles et le côté compris ΥR, donnera

$$\cot \Upsilon O = \cot B = \cos \omega \cot (\text{Æ} - d\text{Æ}) - \frac{\sin \omega \tang H}{\sin (\text{Æ} - d\text{Æ})},$$

Nous aurons la longitude ΥO du point orient; nous connaissons pour l'instant la longitude $\odot = \Upsilon S$, nous aurons

$$OS = \Upsilon S - \Upsilon O = \odot - B;$$

le même triangle donne

$$\cos RO\Upsilon = \cos a = \cos \omega \sin H + \sin \omega \cos H \cos (\text{Æ} - d\text{Æ}),$$

ou

$$\frac{\sin (\text{Æ} - d\text{Æ}) \cos H}{\sin \Upsilon O} = \sin RO\Upsilon = \sin a;$$

enfin

$$\sin MS = \sin OS \sin O = \sin (\odot - B) \sin a.$$

22. Nous connaîtrons l'abaissement du soleil le jour où l'on commence à appercevoir l'étoile.

Le jour précédent quand N était à l'horizon, l'arc ΥO était le même; mais OS était moindre de 1°, MS était donc moindre, le soleil était plus près de l'horizon, le crépuscule plus fort rendait l'étoile invisible; mais le lendemain de l'observation OS était au contraire plus fort et le soleil plus bas, le crépuscule plus faible, et l'on avait plus de facilité pour voir l'étoile.

23. L'année suivante, quand l'étoile sera apperçue pour la première fois, on sera sûr que le soleil sera revenu au même

point S de son cercle oblique ; le lever héliaque pourrait donc servir sans calcul à déterminer la longueur de l'année. Ainsi, avant la fondation de l'Astronomie, les levers héliaques des étoiles annonçaient aux Egyptiens le débordement du Nil, le tems des semailles, des récoltes et des autres travaux agricoles.

24. Après l'invention de l'Astronomie on a pu calculer l'abaissement MS, on le faisait de 10° pour Sirius, mais il devait être plus fort pour une étoile moins brillante ; il devait varier aussi suivant la pureté de l'atmosphère et suivant les lieux, car la hauteur du pôle entre dans le calcul.

25. Les anciens négligeaient la réfraction qui leur était inconnue. Quand l'étoile paraît en N, elle est 33′ plus bas en n ; la déclinaison VN, qui est nécessaire pour calculer la différence ascensionnelle, est la déclinaison apparente ; l'ascension droite ♈V est l'ascension droite apparente, et non la vraie.

26. Mais ce n'est pas là la seule cause d'erreur ; les déclinaisons, les ascensions droites varient par la précession ; l'écliptique se rapproche de l'équateur, tous les élémens du calcul varient. Il est donc impossible de juger bien exactement aujourd'hui à quel jour de l'année une étoile comme Sirius, devait se lever héliaquement ; quoi qu'il en soit, voici les formules :

$$\sin d\text{Æ} = \tang D \tang H,$$

$$\cot B = \cos \omega \cot (\text{Æ} - d\text{Æ}) - \frac{\sin \omega \tang H}{\sin (\text{Æ} - d\text{Æ})},$$

$$\cos a = \cos \omega \sin H + \sin \omega \cos H \cos (\text{Æ} - d\text{Æ})$$

$$\sin a = \frac{\sin (\text{Æ} - d\text{Æ}) \cos H}{\sin B},$$

$$\sin (\odot - B) = \frac{\sin MS}{\sin a} = \frac{\sin MS \sin B}{\cos H \sin (\text{Æ} - d\text{Æ})},$$

$$\odot = (\odot - B) + B.$$

On mettra pour D, Æ, ω, les quantités qui avaient lieu à l'époque pour laquelle on calcule, et pour MS la valeur

que supposaient les anciens; mais tout cela est fort incertain. Si l'étoile est australe, tang D est négatif, $d\text{Æ}$ change de signe. Supposez MS$=o$, vous aurez le lever cosmique, c'est-à-dire le jour où l'étoile se lève avec le soleil, mais il est invisible.

27. Ajoutez 180° à la longitude trouvée ci-dessus, vous aurez le lieu du soleil au lever acronyque ou lever du commencement de la nuit. On disait qu'une planète était acronyque quand elle se levait au coucher du soleil pour demeurer visible toute la nuit, *de l'une à l'autre extrémité de la nuit.*

28. Pour le coucher héliaque il suffit de changer le signe de $d\text{Æ}$, le signe du second terme de cot B, le premier de cos a, et de faire $\odot = B - (B - \odot)$.

29. La différence ascensionnelle sert encore à calculer la table des climats. On appelle climats des zônes du globe terrestre enfermées entre deux parallèles pour lesquels le plus long jour diffère d'une heure, d'un jour, d'un mois, selon que l'on veut, des climats, d'heures, de jours ou de mois. Le mot κλίμα signifie inclinaison.

30. L'angle horaire du point orient de l'équateur est toujours de 90° ou de 6^h; car le point E de l'horizon étant le pôle du méridien (fig. 68), l'angle EPZ$=$90° l'angle EPO est l'excès de l'angle horaire ZPO sur 90°, ainsi EB $=$ EPO, et le quinzième de la différence ascensionnelle sera toujours l'excès du demi-jour sur 6 heures.

31. Voulons-nous que la durée du plus long jour soit de 13^h, c'est-à-dire, d'une heure de plus que le jour de l'équateur qui est toujours de 12^h, la moitié du jour sera $6^h\ 30' = 97°\ 30'$; sin EB $=$ sin EPO $=$ sin 7° 30′ $=$ tang D tang H $=$ tang ω tang H; car au plus long jour D $= \omega = 23°\ 28'$, nous aurons donc

$$\text{tang H} = \sin 7°\ 30' \cot \omega = \sin 7°\ 30' \text{ tang } 66°\ 32',$$

nous aurons H $= 16°\ 44'$; c'est sous ce parallèle que le plus long jour sera de 13^h.

Pour avoir celui de 14^h, nous mettons $2(7°\ 30') = 15°$, ou en général nous ferons

$$\text{tang } H = \text{tang } 66^\circ 32' \sin \tfrac{1}{2} n \, (15^\circ),$$

n étant le nombre d'heures que nous voulons donner au jour de plus que 12^h.

Voulons-nous le jour de 24^h, $n = 12$, $\frac{1}{2} n = 6$, $\frac{1}{2} n \, (15^\circ) = 90^\circ$ tang H = tang $66' \, 30$, $H = 66^\circ \, 30$.

Ainsi à $66^\circ \, 30'$ de l'équateur, c'est-à-dire, sous le cercle polaire, le plus grand jour est de 24^h, le soleil ne se couche pas; il arrive à minuit à l'horizon et au méridien si le solstice arrive à minuit.

32. Si la latitude surpasse $66^\circ \, 30'$, le soleil ne descendra pas jusqu'à l'horizon; il ne fera que circuler autour du pôle, plus ou moins haut, et il n'atteindra l'horizon que le jour où la déclinaison sera le complément de la hauteur du pôle; il sera visible tout le tems que le soleil met à décrire l'arc de l'écliptique compris entre les deux déclinaisons complémentaires.

33. Si la hauteur du pôle est de 90° degrés, le soleil circulera autour de l'horizon pendant six mois, et sera invisible pendant les six autres mois. Entre 1 et 6 mois on pourra faire des climats de mois; le calcul en serait moins simple, mais il est bien inutile : d'ailleurs toute cette théorie des climats néglige le demi-diamètre du soleil, les réfractions, les crépuscules qui augmentent considérablement la durée du jour : ainsi au pôle le crépuscule ne finira que quand la déclinaison australe sera de 18°; il y aura donc bien peu de nuit au pôle, et le jour sera de plus de neuf mois.

34. Il nous reste à parler des hauteurs correspondantes; on appelle ainsi deux hauteurs égales prises l'une avant l'autre après le passage au méridien pour en conclure l'instant précis de ce passage.

Le quart de cercle, ou autre instrument propre à mesurer des distances au zénit, étant placé bien verticalement, et le fil sur zéro ou la bulle entre ses repères, dirigez le plan de l'instrument dans le vertical de l'astre, arrêtez la lunette sur une division du limbe, et attendez que l'astre vienne traverser le fil horizontal; marquez l'heure, la minute, la se-

conde de l'observation. Si c'est le soleil que vous observez, attendez que l'un de ses bords soit tangent au bord du fil.

Fixez la lunette à 10 ou 20′ de là sur le limbe, et notez de même le tems où l'astre sera au fil; prenez de cette manière 10, 15, 20 distances zénitales; en marquant les tems de la pendule. Après le passage, à mesure que l'astre redescendra, notez de même les tems où il se sera trouvé aux mêmes distances du zénit.

Faites la somme des tems de la pendule pour chaque couple de distances égales au zénit.

Prenez la demi-somme, ce sera le passage de l'étoile au méridien.

Vous aurez autant de demi-sommes que de couples d'observations, toutes devront s'accorder à une fraction de seconde si vous avez bien observé; vous prendrez le milieu dont vous pourrez à l'ordinaire répondre à $\frac{1}{2}$ de seconde près. C'est ainsi que les astronomes, depuis plus de cent ans, réglaient leurs horloges avec une précision qu'on n'aurait pas cru possible auparavant. Mais la méthode suppose que l'astre dans l'intervalle des observations n'a pas changé sa distance polaire, s'il en a changé, le midi conclu des hauteurs correspondantes aura besoin d'une correction. En effet :

35. Vous avez observé le soleil le matin quand il était à la distance ZA (fig. 70), si la distance polaire n'eût pas changé, le soir quand il serait revenu à la distance ZB = ZA, vous auriez eu deux triangles ZPA, ZPB parfaitement égaux, puisque les trois côtés sont les mêmes, vous auriez eu les angles horaires ZPA = ZPB, et le méridien PZM aurait partagé également l'angle APB qui mesure l'intervalle de tems écoulé. Mais si le soleil s'est rapproché du pôle, s'il a été de B en B′, il se sera rapproché du zénit; il faudra donc, pour avoir une distance égale à celle du matin, attendre que le soleil ait continué de descendre, ce qui donnera un angle horaire ZP*b* plus grand que ZPB ou ZPA, la différence des angles horaires sera l'angle BP*b* : en prenant la demi-somme des deux tems marqués par la pendule, vous avez le tems où le soleil ét ai

dans le milieu de l'angle APb ; or la moitié de cet angle $= \frac{1}{2}$ (APB + BPb) $= \frac{1}{2}$ APB + $\frac{1}{2}$ BPb ; le midi conclu est donc trop fort de $\frac{1}{30}$ BPb. Il s'agit donc de déterminer cet angle ou la correction $- \frac{1}{30}$ (BPb).

36. Le triangle ZPA donne....

$$\cos N = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D.$$

Il faut faire varier P et D, de manière que le second membre ne change pas de valeur, puisque le premier ou cos N doit rester le même. Nous avons en différentiant

$$o = -dP \sin P \cos H \cos D - dD \cos P \cos H \sin D + dD \sin H \cos D,$$

ou

$$dP = + \frac{dD \sin H \cos D - dD \cos P \cos H \sin D}{\sin P \cos H \cos D},$$

$$= \frac{dD}{\sin P} (\text{tang } H - \text{tang } D \cos P),$$

et la correction

$$= \frac{dD}{30 \sin P} (\text{tang } D \cos P - \text{tang } H),$$

correction dont tous les astronomes se sont contentés. Pour avoir une formule exacte, je fais....

$$\cos ZA = \cos APZ \sin PZ \sin PA + \cos PZ \cos PA,$$
$$\cos Zb = \cos bPZ \sin PZ \sin Pb + \cos PZ \cos Pb,$$

d'où

$$o = \sin PZ (\cos APZ \sin PA - \cos bPZ \sin Pb)$$
$$+ \cos PZ (\cos PA - \cos Pb),$$
$$o = \cos P \cos D - P' \cos D' + (\sin D - \sin D') \text{tang } H,$$

et

$$(\sin D' - \sin D) \text{tang } H = \cos P \cos D - \cos P' \cos D',$$

mettez pour D la valeur $\frac{1}{2}$ (D′+D) $- \frac{1}{2}$ (D′—D) et pour D′ sa valeur $\frac{1}{2}$ (D′ + D) + $\frac{1}{2}$ (D′—D) vous aurez après tous les développemens et les réductions, et après avoir tout divisé par 2 cos $\frac{1}{2}$ (D′—D) cos $\frac{1}{2}$ (D′ + D).

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)=$$

$$\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'-D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}\left(\frac{\text{tang}\,H}{\cos\tfrac{1}{2}(P'-P)}-\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right)$$

$$=\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'-D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}\,H-\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right]$$

$$+\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'-D)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(P'-P)\,\text{tang}\tfrac{1}{4}(P'-P)\,\text{tang}\,H}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)},$$

37. Il est visible que le dernier terme est toujours insensible, il est du troisième ordre; en négligeant les quantités de cet ordre, vous pouvez mettre

$$\tfrac{1}{2}(P'-P)=\frac{\tfrac{1}{2}(D'-D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}H-\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\right],$$

et la correction sera

$$\frac{\tfrac{1}{15}(D'-D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}\left[\text{tang}\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)-\text{tang}\,H\right];$$

$P'+P$ est donné par les observations $\sin\frac{1}{2}(P'+P)=\sin\frac{15}{2}(T'-T)$, T et T' étant les tems marqués par la pendule, $-(D'+D)$ est la déclinaison qui avait lieu à midi non corrigé, laquelle ne diffère jamais, de 0″,5, de la déclinaison à midi vrai, soit D'' cette déclinaison et m le mouvement horaire en déclinaison qui est proportionnel au tems, la correction devient

$$\frac{+\frac{m}{30}(T'-T)}{\sin\frac{15}{2}(T'-T)}\left[\text{tang}\,D''\cos\tfrac{15}{2}(T'-T)-\text{tang}\,H\right].$$

38. Cette formule est identique à celle que donne le calcul différentiel, mais nous savons ce que nous avons négligé, et nous pouvons le calculer.

39. Nous avons supposé que les premières observations étaient à l'orient, et les secondes à l'occident. Supposons le contraire, et que T soit toujours le tems de la première observation, T' le tems de l'observation correspondante, nos triangles bPZ et APZ seront toujours les mêmes; mais le change-

ment de déclinaison sera bien plus considérable, puisqu'il sera proportionnel au tems écoulé qui sera triple ou quadruple. En effet, de 9 heures du matin à 3 heures, tems qu'on choisit ordinairement, l'intervalle est de 6 heures, le changement de déclinaison ne peut être plus que de 6′; mais de 3 heures après midi à 9 heures du lendemain matin, l'intervalle est 18^h; le changement de déclinaison sera 18′.

Les angles horaires, au lieu d'être $\frac{15}{2}(T'-T)$, seront

$$\frac{15}{2}[24^h-(T'-T)]=15\left(12^h-\frac{T'-T}{2}\right)$$

et la correction du minuit conclu des observations

$$\frac{m(T'-T)}{\sin 15\left(12^h-\frac{T'-T}{2}\right)}\left[\tang D''\cos 15'\left(12^h-\frac{T'-T}{2}\right)-\tang H\right].$$

40. C'est sur ces formules que j'ai construit les tables générales de formes diverses que j'ai données à la suite de mes tables solaires et dans mon Astronomie.

Pour que ces tables soient générales, il faut laisser les deux termes séparés, et faire deux tables; si on veut les réunir, la table ne conviendra qu'au parallèle dont la hauteur du pôle sera H.

41. Il peut arriver que le ciel soit couvert le soir pendant tout le tems où le soleil reviendrait aux distances observées le matin, et qu'il se découvre trop tard. On pourra dans ce cas observer plusieurs distances qui seront plus grandes que celles du matin, on en conclura le midi par les demi-sommes des tems et la correction se trouvera par la formule suivante:

$$\sin\tfrac{1}{2}(P'-P)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(N'-N)\sin\frac{1}{2}(N'+N)}{\cos H\sin\frac{1}{2}(P'+P)\cos\frac{1}{2}(D'+D)\cos\frac{1}{2}(D'-D)}$$
$$+\frac{\tang\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin\frac{1}{2}(P'+P)}\left[\tang\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P'+P)\cos\tfrac{1}{2}(P'-P)\right.$$
$$\left.-\tang H\right].$$

42. On voit maintenant pourquoi nous avons dit que la méridienne, tracée par le moyen des ombres égales, avait besoin d'une correction. Pour la trouver vous songerez que l'angle formé

par deux ombres égales est un angle azimutal. Ainsi, au lieu de chercher l'inégalité des deux angles horaires, il faudra chercher celle des deux azimuts; or, par des procédés analogues, j'ai trouvé

$$\sin \tfrac{1}{2}(Z'-Z) = \frac{\sin \frac{1}{2}(D'-D)}{\cos H \cos \frac{15}{2}(T'-T)}$$

$$\tfrac{1}{2}(Z'-Z) = \frac{\frac{1}{2} m (T'-T)}{\cos H \cos \frac{15}{2}(T'-T)}.$$

Soit CM la longueur de deux ombres égales, vous décrirez du pied du style un arc de cercle du rayon CM, vous partagerez cet arc en deux, et le point de bissection ne sera pas le point de midi; mais à partir de ce point, vous prendrez vers l'orient un arc $= \dfrac{CM \sin 1'' \, m \left(\frac{T'-T}{2}\right)}{\cos H \cos \frac{15}{2}(T'-T)}$

Si m est négatif, vous prendrez cet arc vers l'occident.

43. La valeur de $\frac{1}{2}(Z'-Z)$ serait la correction du point midi trouvé sur un cercle azimutal, en prenant les demi-sommes des azimuts marqués sur le cercle aux deux observations comparées.

44. Il peut arriver quelquefois, surtout dans l'hiver, que les réfractions soient plus petites ou plus grandes le soir que le matin; dans ce cas, toutes les hauteurs du soir répondent à des angles horaires différens de ceux que nous avons corrigés. On verra par les observations en combien de tems les distances au zénit changeaient de 10 ou 20′, c'est-à-dire, de la différence de hauteur entre deux observations consécutives. Supposons que l'astre ait monté de 20′ ou 1200″ en 2′ ou 120″ de tems, nous dirons 1200″ : 120″ ou 10″ : 1 :: d réfraction : $dt = \frac{dr}{10''}$ on en prendra la moitié $\frac{dr}{20}$ qu'on retranchera du midi si les réfractions sont plus fortes le soir, et qu'on ajoutera si elles sont plus faibles.

45. Soit $\frac{1}{2}(N'-N) = \frac{1}{2}$ diamètre ☉, la formule

sin

$$\sin \tfrac{1}{2}(P'-P) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(N'-N) \sin \tfrac{1}{2}(N'+N)}{\cos H \sin \tfrac{1}{2}(P'+P) \cos \tfrac{1}{2}(D'+D) \cos \tfrac{1}{2}(D'-D)}$$

donnera le tems que le soleil emploie à s'élever de son demi-diamètre, $\cos \frac{1}{2}(D'-D)$ sera sensiblement $= 1$, $\cos \frac{1}{2}(D'+D) = \cos D$, et $\sin \frac{1}{2}(P'+P) = \sin P$. Le tems qu'il emploierait à traverser un vertical quelconque, se trouverait par la formule

$$\sin(P'-P) = \frac{\sin \delta}{\sin S \cos D},$$

δ étant le demi-diamètre, S l'angle entre le vertical et le cercle de déclinaison du soleil; pour avoir cet angle, faites

$$\text{tang } S = \frac{\text{tang } H \cos D}{\sin P} - \sin D \cot P.$$

Ce procédé n'est pas rigoureux, mais il est d'une exactitude suffisante.

LEÇON X.

Du Soleil et du mouvement elliptique.

1. Nous avons déterminé la position du grand cercle que le soleil parait décrire par son mouvement annuel; nous avons vu comment on détermine le point équinoxial, par deux distances polaires dont la somme est 180°. Si cette somme n'est pas exactement de 180°, l'équinoxe ne tiendra pas exactement le milieu entre les deux ascensions droites observées; mais nous aurons (fig. 71)

$$\text{tang } AC = \text{tang } E \sin EC, \quad \text{et} \quad \text{tang } BD = \text{tang } E \sin ED;$$

d'où

$$\text{tang } AC : \text{tang } BD :: \sin EC : \sin ED,$$

$$\text{tang}\,AC + \text{tang}\,BD : \text{tang}\,AC - \text{tang}\,BD :: \sin EC + \sin ED : \sin EC - \sin ED,$$

$$\sin(AC + BD) : \sin(AC - BD) :: \text{tang}\tfrac{1}{2}(EC + ED) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(EC - ED),$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(EC - ED) = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(EC + ED)\sin(AC - BD)}{\sin(AC + BD)} = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}CD\sin(PA + PB - 180^\circ)}{\sin(PA - PB)}.$$

On connaît CD mouvement en ascension droite entre les deux observations; on connaît PA et PB, on aura donc $\frac{1}{2}(EC - ED)$ et les deux arcs EC et ED.

CD : 24^h sol. :: CE : tems qu'il faut ajouter à celui de l'observation en A, c'est-à-dire, au midi qui précède l'équinoxe, pour avoir le tems où le soleil était au point équinoxial.

2. Un an après on répétera les observations, et l'intervalle entre les deux équinoxes donnera la longueur de l'année. On cherchera cette longueur par des équinoxes éloignés de 50 ou 100 ans, et plus encore si l'on peut, et la détermination sera d'autant plus sûre, en supposant les observations également bonnes. Le résultat d'un nombre considérable de comparaisons pareilles a donné $365^j\ 5^h\ 48'\ 51''$.

3. On pourrait trouver la même chose par la comparaison de deux solstices; mais l'instant du solstice est plus difficile à bien distinguer, on s'en tient donc aux équinoxes. Nous donnerons ci-après une manière plus exacte de faire le calcul.

4. Le soleil emploie donc $365^j\ 5^h\ 48'\ 51'' = 365^j,24225694$ à parcourir les 360° de son cercle; divisons les 360° par ce nombre, nous aurons pour le mouvement diurne $59'\ 8'',32977411$.

C'est la quantité dont le soleil devrait s'avancer par jour sur l'écliptique, s'il la parcourait uniformément. C'est ce qu'il faut vérifier.

5. L'observation journalière des ascensions droites fait remarquer tout d'abord des inégalités; mais elles pourraient venir de ce que des arcs égaux de l'équateur ne répondent pas aux arcs égaux de l'écliptique; en effet,

$$Æ = L - \tang^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2L + \tang^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4L - \tang^6 \tfrac{1}{2}\omega \sin 6L,$$

$$dÆ = dL - 2dL \tang^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos 2L + 4dL \tang^4 \tfrac{1}{2}\omega \cos 4L - 6dL \tang^6 \tfrac{1}{2}\omega \cos 6L,$$

$$\frac{dÆ}{dL} = 1 - 2\tang^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos 2L + 4\tang^4 \tfrac{1}{2}\omega \cos 4L - 6\tang^6 \tfrac{1}{2}\omega \cos 6L.$$

Supposez $L = 0$,

$$\frac{dÆ}{dL} = 1 - 2\tang^2 \tfrac{1}{2}\omega + 4\tang^4 \tfrac{1}{2}\omega - 6\tang^6 \tfrac{1}{2}\omega,$$

et $dÆ$ est évidemment plus petit que dL.

Supposez $L = 90°$,

$$\frac{dÆ}{dL} = 1 + 2\tang^2 \tfrac{1}{2}\omega + 4\tang^4 \tfrac{1}{2}\omega + 6\tang^6 \tfrac{1}{2}\omega,$$

$dÆ$ sera $> dL$.

Supposez $L = 45°$,

$$\frac{dÆ}{dL} = 1 - 4\tang^4 \tfrac{1}{2}\omega - 8\tang^8 \tfrac{1}{2}\omega,$$

$dÆ$ sera presqu'égal à dL; ainsi $dÆ$ croîtra de l'équinoxe au solstice, et décroîtra du solstice à l'équinoxe, si nous supposons dL constant.

6. Soit Æ l'ascension droite observée, D la déclinaison, $\cos Æ \cos D = \cos$ longitude sur l'écliptique; nous aurons donc chaque jour la longitude, et nous verrons que cette longitude croît inégalement, d'une manière à peu près uniforme deux jours de suite; mais pour de plus grands intervalles la différence est très-sensible. L'équation $\cos Æ \cos D = \cos L$, la veille du solstice, nous donnera $L < 90°$, le lendemain, $L > 90°$; nous en conclurons l'heure du solstice.

7. Déterminons, par les méthodes exposées ci-dessus, les deux équinoxes et les deux solstices; nous trouverons ainsi :

De l'équinoxe du printems au solstice d'été...	$92^j\ 21^h 36'$
Du solstice d'été à l'équinoxe d'automne.....	93. 13. 44
De l'équinoxe d'automne au solstice d'hiver...	89. 16. 56
Du solstice d'hiver à l'équinoxe du printems....	89. 1. 33
Durée de l'année.....	365. 5. 49.

Or les équinoxes et les solstices partagent le cercle annuel en quatre arcs de 90° chacun; il est donc bien évident que la marche du soleil est inégale, puisqu'il est $7^j \frac{2}{3}$ dans les signes septentrionaux, plus que dans les méridionaux.

Les anciens, prévenus d'idées chimériques de perfection qu'ils croyaient de l'essence des corps célestes, et persuadés que le mouvement circulaire et uniforme est le plus parfait, en conclurent que nous n'étions pas au centre du cercle décrit par le soleil.

8. Soit ACBH (fig. 72) la route du soleil; que la terre, au lieu d'être au centre C, soit quelque part en T; par ce point, menez à angles droits les cordes FE, GL; que F et E soient les points équinoxiaux, G et L les points solsticiaux; les angles droits FTG, GTE, ETL, LTF seront la mesure du mouvement apparent du soleil; mais l'arc FG du cercle sera plus petit que GE, GE sera plus grand que EL, et EL plus grand que LF; ainsi FG sera décrit en moins de tems que GE; GE exigera plus de tems que EL, et EL plus que LF, puisque nous supposons le mouvement uniforme. Par les points T et C menons le diamètre XTCφ; le point φ sera le point du cercle le plus éloigné de la terre. Les Grecs le nommèrent *apogée*. Le point X sera le plus voisin; les Grecs le nommèrent *périgée*.

9. Il s'agit de déterminer la position du point T, la ligne TC, qu'on nomme l'*excentricité*, ou *distance au centre*, et la position du diamètre XTCφ, que l'on nomme *ligne de l'apogée*, ou *des apsides*.

A raison de $59' \; 8'',33$ par jour, les $92^j \; 21^h \; 36'$ du printems donneront FG..... $91°33' \; 20''$
Les $93^j \; 13^h \; 44'$ de l'été donneront GE..... $92.13.45$

$$FG + GE = FA + AB + BD + DE = 183.47.\ 5.$$

Mais $(AB + BD) = 180°$, et $AF = DE$; donc

$2AF =$..... $3°47' \; 5''$
$AF =$..... $1.53.32,5$

$$\left.\begin{array}{l} FG = FB - BG \\ EG = BE + BG \end{array}\right\} EG - FG = BE - FB + 2BG = 2BG,$$

$$BG = \tfrac{1}{2}(EG - FG) = \tfrac{1}{2}(40' \; 25'') = 20' \; 12'',5.$$

Or

$$\text{tang } GT\varphi = \text{tang } BC\varphi = \text{tang } TCK = \frac{TK}{CK} = \frac{\sin CB}{\sin AF}$$

$$= \frac{\sin 20' \; 12'',5}{\sin 1^\circ 53' \; 32'',5} = \text{tang } 10^\circ \; 5' \; 37'';$$

c'est la distance angulaire de l'apogée φ au solstice G; nous connaissons $GB = 20' \; 12'',5$

$B\varphi = BC\varphi = TCK = 10^\circ \; 5.37$

donc $G\varphi = 10.25.50.$

10. Nous saurons le tems que le soleil doit employer à décrire un arc de $10^\circ \; 25' \; 50''$, nous saurons le tems où le soleil sera apogée. La longitude du solstice est de 90° ou 3^s. La longitude apparente du soleil apogée sera de $3^s \; 10^\circ \; 5' \; 37''$.

Le soleil périgée aura $9^s \; 10^\circ \; 5' \; 37''$, c'est-à-dire, 6^s de plus que le soleil apogée.

Nous aurons

$$TC = \frac{CK}{\cos TCK} = \frac{\sin 1^\circ \; 53' \; 32'',5}{\cos 10^\circ \; 5' \; 37''} = 0.03354 = \tfrac{1}{30},$$

en prenant pour unité le rayon CA du cercle;

la distance apogée $T\varphi$ sera $1 + 0.03354 = 1 + \frac{1}{30}$,
la distance périgée TX.... $1 - 0.03354 = 1 - \frac{1}{10}$,
la distance moyenne..... 1.

11. Or, les diamètres apparens des objets sont en raison inverse de la distance; si δ est le diamètre à la moyenne distance, le diamètre apogée sera $\frac{\delta}{1+\frac{1}{30}} = \delta\,(1 - \frac{1}{30})$, le diamètre périgée $\frac{\delta}{1-\frac{1}{30}} = \delta(1 + \frac{1}{30})$, ainsi les variations du diamètre seront en plus et en moins $\frac{1}{30}$ de ce diamètre. L'observation prouve en effet qu'ils augmentent pendant six mois

et diminuent pendant 6 autres ; il est vrai que les variations ne sont que de $\frac{1}{60}$: les anciens qui n'avaient pas de lunettes, n'avaient pu apercevoir les défauts qu'avait leur hypothèse ; elle était beaucoup plus exacte pour représenter l'inégalité du mouvement.

12. En effet, soit S le lieu actuel du soleil ; par le nombre de jours écoulés depuis l'apogée, nous connaîtrons l'arc

$$\varphi S = \varphi CS = \psi,$$

nous connaîtrons donc $\varphi CS = TCP$; or le triangle TCS donne

$$\text{tang } S = \frac{PT}{SP} = \frac{TC \sin TCP}{SC + TC \cos TCP} = \frac{e \sin \psi}{1 + e \cos \psi},$$

donc

$$S = \frac{e \sin \psi}{\sin 1''} - \frac{e^2 \sin 2\psi}{\sin 2''} + \frac{e^3 \sin 3\psi}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

$e = 0.03354$, nous en conclurons,

$$S = 1^\circ\ 55'\ 18'',4 \sin \psi - 1'\ 56'' \sin 2\psi + 2''\ 6 \sin 3\psi - \text{etc.},$$

suivant mes tables construites sur des principes tout différens ;

$$S = 1^\circ\ 55'\ 26'' \sin \psi - 1'\ 12'' \sin 2\psi + 1''\ 1 \sin 3\psi ;$$

la différence ne peut aller à 1′ à beaucoup près.

13. Le même triangle donne....

$$\sin S = \frac{CT}{CS} \sin CTS = 0.03354 \sin (\psi - S) ; \quad \text{car}$$

$$\varphi CS = \psi = CTS + S.$$

Le même triangle donne encore

$$\begin{aligned} TS &= CS \cos S + CT \cos T = \cos S + e \cos (\psi - S), \\ &= 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} S + e \cos \psi \cos S + e \sin \psi \sin S, \\ &= 1 + e \cos \psi \text{ à fort peu près ;} \end{aligned}$$

nos formules modernes donnent....

$$TS = 1 + \tfrac{1}{2} e \cos \psi \text{ à peu-près.}$$

14. Cette hypothèse de l'excentrique était donc plus exacte

qu'il ne fallait pour les anciens qui étaient loin d'observer les angles à la minute; mais pour les modernes, elle est insuffisante pour le soleil même dont l'excentricité est petite; elle l'est surtout pour les planètes dont l'excentricité est en général beaucoup plus forte.

15. Les anciens avaient imaginé une autre hypothèse qui donne exactement le même résultat. Ils plaçaient la terre au centre de l'écliptique; ils faisaient ensuite tourner le soleil dans un petit cercle qu'ils appellaient *épicycle*. Le soleil faisait en un an le tour de l'épicycle d'un mouvement égal et rétrograde, et le centre de l'épicycle faisait en un an, d'un mouvement uniforme et direct, le tour de l'écliptique ABH, qu'ils nommaient *le déférent*, parce que ce cercle portait le centre de l'épicycle (fig. 73).

16. Soit donc le cercle ABD ou le déférent dont la terre occupe le centre; l'épicycle décrit du point A avec le rayon $A\varphi$ se mouvait uniformément de A vers B, l'apogée φ de l'épicycle étant toujours sur le rayon vecteur $CB\varphi$; pendant ce tems le soleil avait rétrogradé de φ vers S, de sorte que $SB\varphi = ACB$ et que BS était toujours parallèle à CA, ligne de l'apogée.

Quand le centre de l'épicycle avait fait 180° et qu'il était venu de A en D, le soleil, parti de l'apogée φ avait aussi fait 180°, et il était arrivé en π, c'est-à-dire au périgée.

En B, la distance moyenne du soleil à l'apogée était l'angle ACB; son lieu vrai était en S à la distance ACS de l'apogée; la différence entre le lieu vrai et le lieu moyen était BCS; or, le triangle BCS donnait

$$\text{tang } C = \frac{\frac{SB}{CB} \sin B}{1 + \frac{SB}{CB} \cos B} = \frac{e \sin \psi}{1 + e \cos \psi} \text{ comme ci-dessus.}$$

Il suffisait de supposer BS = rayon de l'épicycle (fig. 73) = TC = excentricité (fig. 72). Le triangle était le même; il n'était que retourné. Dans l'excentrique, c'est l'angle en S qui est la différence entre le lieu vrai et le lieu moyen.

17. Nous avons vu que cette hypothèse donnait au rayon vecteur TS des variations doubles de celles qu'on observe ; il fallait donc chercher une autre courbe ; il fallait qu'elle fût rentrante ; après le cercle, la courbe la plus simple et la mieux connue était l'ellipse. Képler essaya de faire les orbites elliptiques ; il plaça le soleil au foyer, et fit parcourir à la terre la périphérie de l'ellipse. Suivons encore les apparences, plaçons la terre au foyer, et le soleil sur la courbe, et avant d'exposer les idées de Képler, parlons d'une hypothèse moins exacte, mais dont le calcul est plus facile.

18. D'après une idée de Boulliaud, Seth-Ward et Cassini, plaçant la terre en T au foyer de l'ellipse, prirent pour centre des mouvemens uniformes ou moyens le foyer supérieur F ; la distance apogée TA étant AC + CΓ = 1 + e (fig. 74), la distance périgée TP = 1 — e, en prenant le demi-axe de l'ellipse pour unité. L'inégalité du mouvement était TSF = AFS — ATS. Cette inégalité dépendait de la double excentricité TF = 2e, la variation de la distance dépendait de la simple excentricité ; par-là, en faisant TF = TC de la figure 72, on avait la même équation que dans l'excentrique à fort peu près, et les variations de la distance étaient moitié moindres, comme l'exigeaient les observations.

19. Voyons maintenant comment on peut calculer l'angle S et le rayon vecteur.

Prolongez FS en L, ensorte que SL = ST, vous aurez FS + SL = FS + ST = AP = 2 par la propriété de l'ellipse. Le triangle TSL sera isoscèle, l'angle extérieur FST sera égal à la somme des angles intérieurs L et T ou FST = 2L.

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{FST} = \text{tang L} = \frac{\text{TE}}{\text{LE}} = \frac{\text{TE}}{\text{LF} + \text{FE}}$$

$$= \frac{2\,\text{TE}\sin\text{F}}{2 + 2\,\text{TF}\cos\text{F}} = \frac{e\sin\psi}{1 + e\cos\psi},$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{S} = \frac{e\sin\psi}{\sin 1''} - \frac{e^2\sin 2\psi}{\sin 2''} + \frac{e^3\sin 3\psi}{\sin 3''} - \text{etc.},$$

$$\text{S} = \frac{2e\sin\psi}{\sin 1''} - \frac{2e^2\sin 2\psi}{\sin 2''} + \frac{2e^3\sin 3\psi}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

valeur qui est à fort peu près la même que dans l'excentrique, puisque l'excentricité de l'ellipse n'est que moitié de celle de l'excentrique.

20. Quant au rayon vecteur que nous désignerons par V, nous aurons

$$SE = ST \cos S = V \cos S = SF + FE = 2 - V + 2e \cos \psi,$$
$$V + V \cos S = V(1 + \cos S) = 2V \cos^2 \tfrac{1}{2} S = 2 + 2e \cos \psi,$$
$$V = \frac{1 + e \cos \psi}{\cos^2 \frac{1}{2} S} = (1 + e \cos \psi)(1 + \tang^2 \tfrac{1}{2} S),$$
$$= (1 + e \cos \psi)\left(1 + \frac{e^2 \sin^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2}\right)$$
$$= 1 + e \cos \psi + \frac{e^2 \sin^2 \psi}{1 + e \cos \psi},$$
$$= 1 + e \cos \psi + e^2 \sin^2 \psi - e^3 \sin^2 \psi \cos \psi + e^4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \text{etc.}$$

21. Cette hypothèse, qui n'est qu'une espèce de simplification de celle de Képler, ou plutôt une simple approximation, n'a été imaginée que postérieurement, mais elle m'a paru un passage naturel, un intermédiaire utile entre l'excentrique des anciens et l'ellipse de Képler.

L'angle ψ est ce qu'on appelle *anomalie moyenne*, c'est la distance moyenne à l'apogée ; la distance vraie au même apogée s'appelle *anomalie vraie*. Le mot anomalie signifie *inégalité ;* mais dans l'Astronomie moderne il signifie l'angle, soit moyen, soit vrai, qui sert à calculer l'inégalité.

Mouvement elliptique.

22. Quand on considérait le mouvement comme uniforme sur l'excentrique, on avait en tems égaux des arcs égaux sur la circonférence, des angles égaux au centre du mouvement, et enfin des secteurs égaux.

En renonçant au cercle pour y substituer l'ellipse, on se privait des angles égaux ; on ne voyait pas trop quel parti l'on pourrait tirer des arcs égaux sur la courbe elliptique ; Képler imagina de conserver l'égalité des secteurs pour avoir

dans son ellipse une quantité qui fût proportionnelle au tems écoulé depuis l'apogée, et qui pût être connue en tout tems.

23. Supposons l'ellipse divisée en secteurs égaux, c'est-à-dire en secteurs d'un jour. A mesure que les rayons vecteurs diminueront, il faudra que l'angle au foyer devienne plus ouvert pour conserver l'égalité de surface ; ainsi le mouvement angulaire s'accélérera depuis l'apogée jusqu'au périgée ; il se ralentira du périgée à l'apogée, comme le demandent les observations.

A l'apogée l'aire du secteur $= \frac{1}{2}(1+e)^2$ sin mouvement apogée.

Au périgée l'aire..... $= \frac{1}{2}(1-e)^2$ sin mouvement périgée.

Képler aurait pu voir que ces deux quantités étaient égales, et étendre ce raisonnement à tous les secteurs ; il s'y prit autrement ; mais en exposant ses découvertes, nous tâchons de les présenter d'une manière plus simple et plus naturelle.

24. Le fait vérifié à peu près, il restait à en chercher la cause. Képler la chercha dans une certaine force attractive qui résidait dans le soleil, et forçait la planète à courber son mouvement qui, sans cette force, ne pouvait être que rectiligne suivant la tangente. Il voulut calculer les effets de cette force, et voici comme il raisonna :

Cette force attractive ou magnétique réside dans le soleil ; elle agit de tout côté selon des droites divergentes qui ont leur origine commune au centre du soleil ; un certain nombre de ces droites enveloppe la terre, la saisit et l'attire ; la terre étant sphérique, ces droites forment la surface d'un cône ; la base de ce cône est un cercle dans lequel sont tous les points de contingence. Cette circonférence croîtra comme les distances de la terre au soleil, la force disséminée sur tous les points de cette circonférence sera en raison inverse de la distance ; l'effet de cette force sera donc en raison inverse de cette même distance.

25. On sent tous les vices de ce raisonnement ; Boulliaud, en voulant réfuter le principe des aires égales, reprocha,

avec raison à Képler, de n'avoir pas supposé l'effet en raison inverse de la surface, puisque la force devait agir sur tous les points de la terre, de n'avoir pas vu que toutes les droites divergentes devaient former un cône et non une surface conique, que la force serait disséminée sur la base de ce cône et non sur la circonférence seulement, et que les bases étaient comme les carrés des distances au sommet.

Telle est en effet la loi supposée depuis par Newton, et confirmée par son accord merveilleux avec les observations; nous pouvons donc la prendre comme un fait et en déduire toutes les propriétés du mouvement elliptique.

26. C'est un autre fait, que le soleil paraît décrire une courbe rentrante autour de la terre, puisque les mêmes phénomènes se reproduisent tous les ans, et que le retour des mêmes diamètres dans les mêmes saisons prouve que les distances reviennent aussi les mêmes.

Ce fait va nous donner l'égalité des aires en tems égaux; il n'est pas même besoin que la route du soleil soit curviligne; l'égalité des aires ne suppose que l'égalité du mouvement, si la route est rectiligne.

27. Soit (fig. 75) SABC la route du soleil S et T la terre. Si le soleil décrit en une heure la droite SA; dans l'heure suivante il décrira AB = SA; dans la troisième heure il décrira BC = AB = SA, les aires STA, ATB, BTC seront égales; l'aire STB de deux heures sera double de celle d'une heure, celle de trois heures sera triple, et ainsi de suite. Car rien ne troublant le soleil, il n'y a aucune raison pour que son mouvement se ralentisse ou s'accélère. L'égalité des aires est donc mieux démontrée pour le mouvement rectiligne qu'elle ne pouvait l'être pour le mouvement circulaire en suivant les idées des anciens; mais pour que le mouvement qui de sa nature serait rectiligne se change en mouvement circulaire, il faut qu'il éprouve une attraction Aa qui le ramène de la tangente SA à l'arc Sa; l'effet de l'attraction sera $Aa = ST\text{séc}STA - ST = ST(\text{séc}T - 1) = V \tang T \tang \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} V . T^2 . \tang^2 1''$, V étant le rayon vecteur ST.

28. Soit a l'effet de l'attraction à la distance moyenne; à la distance V, il sera $\frac{a}{V^2}$, et l'on aura, si la courbe est un cercle,

$$\frac{a}{V^2} = \frac{1}{2} VT^2 \text{ ou } a = \frac{1}{2} V^3 T^2,$$

si $\frac{a}{V^2} > \frac{1}{2} VT^2$ le soleil descendra plus bas que l'arc circulaire; il entrera dans le cercle on aura dans ce cas $a > \frac{1}{2} V^3 T^2$, la courbure sera plus grande que celle du cercle,

si $\frac{a}{V^2} < \frac{1}{2} VT^2$ ou $a < \frac{1}{2} V^3 T^2$, le soleil ne descendra pas jusqu'au cercle, la courbure sera moindre que celle du cercle; *mais quelle que soit cette courbure, les aires seront toujours égales en tems égaux* (fig. 76).

29. Soit en effet T la terre, ab le petit arc décrit par le soleil en une heure ou une minute; sans l'attraction le soleil dans la minute suivante décrirait $bc = ab$ et le secteur bTC serait égal au secteur aTb; mais une force magnétique pendant qu'il décrit bc tend à le faire tomber en u de la quantité bu, il ne décrira donc ni bc ni bu; achevons le parallélogramme $budc$, il décrira la diagonale bd, il décrira le secteur bTd=bTC; car ces deux triangles ont même base bT et les sommets c et d sont dans la ligne cd parallèle à la base, les hauteurs sont donc égales comme les bases, les aires sont donc égales; donc bT$d = b$TC$=a$Tb; donc s'il y a une attraction, les aires seront encore égales comme s'il n'y avait pas d'attraction, mais l'attraction rend la route curviligne.

30. Il est évident que $bd > bc$ ou $bd > ab$, donc l'attraction accélère le mouvement, du moins quand l'angle Tbc de la tangente avec le rayon vecteur est aigu; si cet angle était obtus, la diagonale serait plus courte que le côté, le mouvement serait retardé sur la courbe.

Dans l'angle aigu l'attraction accélère le mouvement angulaire en diminuant le rayon vecteur; car bT$d > b$Tc; dans

l'angle obtus le mouvement angulaire se retarde, et le rayon vecteur augmente.

31. Dans tous les cas l'attraction rend le mouvement inégal sur la périphérie; Képler avait donc heureusement choisi en plaçant l'uniformité dans les aires et non dans les arcs.

La nature de la courbe dépendra du rapport $\frac{a}{T^2}$ à $\frac{1}{2}V^3$.

Cette égalité des secteurs est ce qu'on appelle *la seconde loi de Képler*, la première est l'ellipticité des orbites.

32. La troisième loi est tout aussi remarquable et n'est pas plus difficile à démontrer.

Dans le cercle dont le rayon est V on a

$$a = \tfrac{1}{2} V^3 T^2.$$

Dans un cercle dont le rayon serait V′ on aurait $a = \frac{1}{2} V'^3 T'^2$ par la même raison, car a est la même quantité pour les deux corps qui circulent autour de la terre ou du soleil; on aura donc

$$V^3T^2 = V'^3T'^2, \text{ ou } V^3 : V'^3 :: T'^2 : T^2;$$

donc les cubes des distances sont comme les carrés des mouvemens angulaires dans un même tems, dans une heure, par exemple.

Mais les tems des révolutions entières sont en raison inverse des vitesses angulaires dans un même tems, car les 360° de la révolution entière exigeront d'autant plus de tems, que le mouvement horaire sera moindre. Soient R et R′ les deux révolutions; donc

$$V^3 : V'^3 :: T'^2 : T^2 :: R^2 : R'^2;$$

donc les carrés des tems des révolutions sont comme les cubes des distances, quand deux corps décriront des cercles inégaux autour d'un même corps doué d'une force attractive en raison inverse du carré des distances.

33. Substituons deux ellipses inscrites aux deux cercles, la révolution dans l'ellipse aura même durée que dans le cercle, la seule différence est qu'elle ne se fera pas d'un mouvement égal; la planète regagnera vers le périhélie ce qu'elle

aura perdu vers l'aphélie. La troisième loi de Képler est donc vraie pour l'ellipse comme pour le cercle.

C'est ainsi que Newton a démontré les deux dernières lois que Képler avait découvertes, par des essais qui exigèrent des calculs immenses, et qu'il n'avait appuyées que de preuves très-peu concluantes, pour ne rien dire de plus. Aussi les astronomes ont-ils été fort long-tems sans les adopter, du moins avec une certaine confiance.

34. Cette troisième loi de Képler s'est trouvée vérifiée d'une manière admirable, quand on a supposé le soleil immobile au foyer commun de toutes les ellipses planétaires; elle n'avait pas lieu dans le système qui faisait de la terre le centre de tous les mouvemens; autre raison de la faire rejeter par tous ceux qui n'admettaient pas le mouvement de la terre; mais dans le système de Tycho, qui fait tourner autour du soleil toutes les planètes, excepté la terre, la loi de Képler aurait lieu pour ces mêmes planètes, comme elle a lieu dans les satellites de Jupiter, dans ceux de Saturne et dans ceux d'Uranus.

Voyons maintenant comment l'égalité des aires en tems égaux nous fera trouver toutes les circonstances du mouvement elliptique (fig. 77).

35. Sur le grand axe AP décrivons un cercle AKP circonscrit à l'ellipse sur laquelle l'astre circule; soit M la position de l'astre, ASM sera l'anomalie vraie, c'est-à-dire la distance angulaire vraie à l'apogée.

Soit X le lieu d'un astre qui décrirait le cercle AKP d'un mouvement égal, ACX sera l'anomalie moyenne ou la distance angulaire de cet astre au point de contact de l'ellipse et du cercle; menons l'ordonnée NMR, et nous aurons par la loi des aires proportionnelles au tems,

$$ACX : ASM :: \text{surface du demi-cercle} : \text{surface } \tfrac{1}{2} \text{ ellipse}$$
$$:: CK : CD :: NR : MR :: ASN : ASM;$$

donc

$$ACX = ASN = ACN + CSN;$$

donc

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{AX} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AN} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CS.NR},$$
$$\mathrm{AX} = \mathrm{AN} + \mathrm{CS.NR},$$

ou

$$z = x + e \sin x;$$

x est ce qu'on appelle *anomalie excentrique*, $e =$ excentricité; z est l'anomalie moyenne.

Cette formule est de Képler; elle est la base de toutes les solutions postérieures.

36. x étant supposé connu, ainsi que l'excentricité, on aura donc z par un calcul facile; mais z étant donné, on ne peut en conclure x que par tâtonnement; ce problème est connu sous le nom de *problème de Képler*.

Soit le demi-grand axe $= 1$, le demi-petit axe $= b$, $\mathrm{SM} = \mathrm{V}$, l'anomalie vraie $\mathrm{ASM} = u$. On aura par la propriété de l'ellipse $\mathrm{SD} = 1$,

Le triangle SCD donne $b^2 = 1 - e^2$.

Le triangle SMR donne

$$\begin{aligned}\mathrm{SM}^2 = \mathrm{SR}^2 + \mathrm{MR}^2 &= (e + \cos x)^2 + b^2 \sin^2 x \\ &= e^2 + 2e \cos x + \cos^2 x + b^2 \sin^2 x \\ &= e^2 + 2e \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - e^2 \sin^2 x \\ &= 1 + e^2 \cos^2 x + 2e \cos x = (1 + e \cos x)^2,\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{V} = \mathrm{SM} = 1 + e \cos x = \mathrm{CN} + \mathrm{CT} = \mathrm{NT}.$$

Cette formule est encore de Képler.

37. Le triangle rectangle STN donnera

$$\begin{aligned}\mathrm{SN}^2 &= (e + \cos x)^2 + \sin^2 x = e^2 + 2e \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x \\ &= 1 + e^2 + 2e \cos x;\end{aligned}$$

le triangle rectangle SRM donne aussi

$$\mathrm{MR} = \mathrm{V} \sin u = b \sin x, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{V} = \frac{b \sin x}{\sin u},$$

$$\operatorname{tang} u = \frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{SR}} = \frac{b \sin x}{e + \cos x} = \frac{\mathrm{V} \sin u}{e + \cos x},$$

d'où

$$\cos u = \frac{e + \cos x}{\mathrm{V}} = \frac{e + \cos x}{1 + e \cos x},$$

et

$$\sin u = \frac{b \sin x}{1 + e \cos x} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin x}{1 + e \cos x};$$

or

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} u = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u} = \frac{1 - \dfrac{e + \cos x}{1 + e \cos x}}{1 + \dfrac{e + \cos x}{1 + e \cos x}} = \frac{1 + e \cos x - e - \cos x}{1 + e \cos x + e + \cos x}$$

$$= \frac{(1-e) - (1-e)\cos x}{(1+e) + (1+e)\cos x} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right) \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{(1-e) \,.\, 2\sin^2 \frac{1}{2} x}{(1+e) \,.\, 2\cos^2 \frac{1}{2} x} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right) \tang^2 \tfrac{1}{2} x,$$

équation dont le premier auteur paraît être La Caille; du moins je n'ai pu la trouver dans aucun ouvrage plus ancien.

38. Soit $\cos \varphi = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}$, on aura $\tang \frac{1}{2} u = \cos\varphi \tang \frac{1}{2} x$,

$$\tfrac{1}{2}(x - u) = \frac{\tang^2 \frac{1}{2}\varphi \sin x}{\sin 1''} - \frac{\tang^4 \frac{1}{2}\varphi \sin 2x}{\sin 2''} + \frac{\tang^6 \frac{1}{2}\varphi \sin 3x}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\tang^2 \frac{1}{2}\varphi \sin u}{\sin 1''} + \frac{\tang^4 \frac{1}{2}\varphi \sin 2u}{\sin 2''} + \frac{\tang^6 \frac{1}{2}\varphi \sin 3u}{\sin 3''} + \text{etc.};$$

de la valeur de $\cos u$ on tirera

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} u = \left(\frac{1-e}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos x}{1 + e \cos x}\right), \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} u = \left(\frac{1+e}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos x}{1 + e \cos x}\right);$$

on aurait de même

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} x = \left(\frac{1+e}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos u}{1 - e \cos u}\right), \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} x = \left(\frac{1-e}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos u}{1 - e \cos u}\right);$$

la même équation donne

$$\cos x = \frac{\cos u - e}{1 - \cos u}, \quad \sin x = \left(\frac{\sin u}{1 - e \cos u}\right)(1 - e^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou $\sin x = \dfrac{b \sin u}{1 - e \cos u}$, et par conséquent

$$V = b \sin x = \frac{b^2 \sin u}{1 - e \cos u} = \frac{(1 - e^2) \sin u}{1 - e \cos u},$$

tang

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin u\,(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{\cos u - e} = \frac{b \sin u}{\cos(u-e)};$$

et

$$V = \frac{b \sin x}{\sin u} = \frac{b}{\sin u} \cdot \frac{\sin u \sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos u} = \frac{b^2}{1 - e \cos u} = \frac{1-e^2}{1 - e \cos u}.$$

39. Toutes ces formules sont faciles à calculer, si l'on connaît x ou u, mais rarement connaît-on u et jamais x; on ne connaît guères que z; alors les formules sont indirectes, on ne peut les résoudre que par tâtonnement; cependant elles suffisent pour calculer une table de l'équation du centre ou prostaphérèse, c'est-à-dire de la différence $(z-u)$ entre l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie; calculez pour toutes les valeurs de x, de degré en degré, ou même de 10 en 10 minutes, la valeur de $\frac{e \sin x}{\sin 1''}$, vous aurez $z = x + e \sin x$; calculez ensuite $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \cos\phi \operatorname{tang} \frac{1}{2} x$, ou cherchez $(z-u)$ par la série en x, vous aurez une suite de valeurs de $(z-u)$ pour un grand nombre de valeurs de z; tous les arcs z auront des degrés, des minutes, des secondes et des fractions; mais si vous avez calculé de 10 en 10′ les valeurs de x, les différences de $(z-u)$ seront sensiblement proportionnelles aux différences de z; et par de simples règles de trois, vous en conclurez les équations pour tous les z, de 10 en 10′, et vous aurez une table qui vous servira à changer une anomalie moyenne quelconque z en une anomalie vraie, c'est-à-dire, à calculer rigoureusement le lieu vrai d'une planète pour un instant quelconque, puisque z ne dépend que du tems écoulé depuis le passage à l'apogée. Voici un exemple pour une excentricité 0,25, c'est-à-dire pour l'excentricité la plus grande à fort peu près que l'on connaisse.

x	z	Δz	u	Δu	$E = z - u$	ΔE
0° 0′	0° 0′ 0″ 0	12′ 30″	0° 0′ 0″ 0	7′ 44″ 8	0° 0′ 0″ 0	4′ 45″ 2
10	0.12.30,0	12.30	0. 7.44,8	7.44,7	0. 4.45,2	4.45,3
20	0.25. 0,0	12.30	0.15.29,5	7.44,8	0. 9.30,5	4.45,2
30	0.37.30,0	12.30	0.23.14,3	7.44,7	0.14.15,7	4.45,2
40	0.50. 0,0	12.30	0.30.59,0	7.44,8	0.19. 0,9	4.45,3
50	1. 2.30,0	12.30	0.38.43,8	7.44,8	0.23.46,2	4.45,2
1. 0	1.15. 0,0		0.46.28,6		0.28.31,4	

d'où je conclus, par de simples règles de trois,

z	E −	ΔE	u	E +	ΔE
0° 0′	0° 0′ 0″ 0	3′ 48″ 2	0° 0′	0° 0′ 0″ 0	6′ 8″ 2
10	0. 3.48,2	3.48,2	10	0. 6. 8,2	6.8,3
20	0. 7.36,4	3.48,2	20	0.12.16,5	6.8,2
30	0.11.24,6	3.48,2	30	0.18.24,7	6.8,2
40	0.15.12,8	3.48,2	40	0.24.32,9	
50	0.19. 1,0	3.48,1	50		
1. 0	0.22.49,1		1. 0		

Ayant ainsi u pour chaque valeur de z, on en déduirait les rayons vecteurs par la formule $V = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos u}$. Nous avons supposé le demi-grand axe $= 1$; s'il était a nombre quelconque, il faudrait multiplier par a tous les rayons vecteurs trouvés.

40. Cette méthode est la plus élémentaire et la plus courte peut-être pour calculer les tables du mouvement elliptique; mais si l'on n'a qu'une seule anomalie vraie à calculer par l'anomalie moyenne, on peut s'y prendre de la manière suivante :

Nous avons dit que l'angle au foyer supérieur différait peu de l'anomalie moyenne, et qu'on avait à fort peu près

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,u = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,z,$$

$\frac{1}{2}z$ donné et $\frac{1}{2}u$ trouvé ainsi, nous aurons $\frac{1}{2}(z+u)$ c'est-à-dire, la moyenne arithmétique entre z et u; mais x diffère peu de cette moyenne arithmétique. Nous pouvons regarder $\frac{1}{2}(z+u)$ comme une valeur approchée de x, soit ainsi $x' = \frac{1}{2}(z+u)$.

Nous calculerons $\quad z' = x' + e\sin x'$,

la véritable valeur serait $\quad z = x + e\sin x$;

d'où

$$\begin{aligned}(z-z') &= (x-x') + e(\sin x - \sin x'),\\ &= x - x' + 2e\sin\tfrac{1}{2}(x-x')\cos\tfrac{1}{2}(x+x')\\ \tfrac{1}{2}(z-z') &= \tfrac{1}{2}(x-x') + e\sin\tfrac{1}{2}(x-x')\cos\tfrac{1}{2}(x+x'),\\ &= \tfrac{1}{2}(x-x')\left(1+e\cos\tfrac{1}{2}(x+x')\right);\end{aligned}$$

car $(x-x')$ sera toujours un arc de peu de minutes, que nous pourrons supposer égal à son sinus.

Donc

$$\tfrac{1}{2}(x-x') = \frac{\frac{1}{2}(z-z')}{1+e\cos\frac{1}{2}(x+x')};$$

mais

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(x+x') &= \tfrac{1}{2}\left(x'+x'+\frac{x-x'}{2}\right) = \left(x'+\frac{x-x'}{2}\right)\\ &= x' + \frac{\frac{1}{2}(z-z')}{1+e\cos\left(\frac{x'-x}{2}\right)}\\ &= x + \tfrac{1}{2}(z-z') - \tfrac{1}{2}e(z-z')\cos\left(x'+\frac{z-z'}{2}\right),\\ &= x'' - \tfrac{1}{2}e(z-z')\cos x'',\end{aligned}$$

donc

$$\tfrac{1}{2}(x-x') = \frac{\tfrac{1}{2}(z-z')}{1+e\cos\left[x''-\tfrac{1}{2}e(z-z')\cos x\right]}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}(z-z')}{1+e\cos x''\cos\tfrac{1}{2}\left[e(z-z')\cos x''\right]+\tfrac{1}{2}e^2\sin(z-z')\cos x''},$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2}(z-z')}{1+e\cos x''+\tfrac{1}{2}e^2\sin(z-z'')\sin x''\cos x''}.$$

Ainsi le calcul se réduit aux formules suivantes :

$$\tan y = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)\tan\tfrac{1}{2}z;\ x' = (\tfrac{1}{2}z+y),$$

$$z' = x'+e\sin x';\ x'' = x'+\tfrac{1}{2}(z-z'),$$

$$x-x' = \frac{z-z'}{1+e\cos x''+\tfrac{1}{2}e^2\sin(z-z^2)\sin x''\cos x''},$$

$$x = x'-(x'-x);$$

et vous calculerez enfin $z = x+e\sin x$ pour servir de preuve à l'opération. Cette méthode est un composé de celles de La Caille, de Simpson et de Cagnoli. Elle est plus directe et moins longue. Connaissant x, vous aurez.....

$$\tan\tfrac{1}{2}u = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)\tan\tfrac{1}{2}x.$$

41. Voici deux autres manières de trouver x. Suivant Cassini le triangle CSX donne.....

$$CX+CS : CX-CS :: \tan\tfrac{1}{2}(CSX+CXS) : \tan\tfrac{1}{2}(CSX-CXS)$$

$$1+e : 1-e :: \tan\tfrac{1}{2}Z : \tan\tfrac{1}{2}y,$$

$$\sin CSX : \sin SCX :: CX : SX = \frac{\sin z}{\sin\tfrac{1}{2}(z+y)};$$

prolongez NC en T, abaissez la perpendiculaire $ST = e\sin x = NX$; menez Xba perpendiculaire sur ST, et par conséquent parallèle à NT, vous aurez

$$CbX = ACN = x.$$

Mais

$$CbX = CSX + aXS = x = \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}y+\text{arc}\sin = \frac{aS}{SX}$$

$$= \tfrac{1}{2}(z+y)+\text{arc.}\left(\sin = \frac{TS-aT}{SX} = \frac{NX-\sin NX}{SX}\right.;$$

Cassini s'arrête à cette équation ; mais on a.....

$$\frac{NX - \sin NX}{SX} = [\, e \sin x - \sin (e \sin x)\,] \frac{\sin \frac{1}{2}(z+y)}{\sin z},$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(z+y)}{\sin z}\left(\frac{e^3 \sin^3 x}{1.2.3} - \frac{e^5 \sin^5 n}{1.2.3.4.5.} + \text{etc.}\right).$$

Pour avoir l'arc dont cette expression est le sinus, il faudrait y ajouter le sixième du cube qui sera toujours insensible. On pourra mettre $\sin \frac{1}{2}(z+y)$ en place du $\sin x$; on aura la petite différence qui peut se trouver entre ces deux derniers arcs, et l'opération se réduit aux formules suivantes :

$$\text{Tang}\, \tfrac{1}{2} y = \left(\frac{1-e}{1+e}\right) \text{tang}\, \tfrac{1}{2} z,$$

$$x = \tfrac{1}{2}(z+y) + \frac{e^3 \sin^4 \frac{1}{2}(z+y)}{\sin z \sin 6''} + \sin 3''\left(\frac{e^3 \sin^4 \frac{1}{2}(z+y)}{\sin z \sin 6''}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2}(z+y)$$

$$- \frac{e^5 \sin^6 \frac{1}{2}(z+y)}{\sin z \sin 120''} + \frac{e^7 \sin^8 \frac{1}{2}(z+y)}{5040 \sin z \sin 1''},$$

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} u = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \text{tang}\, \tfrac{1}{2} x.$$

42. Ou bien

$$Sa = Sb \sin abS = Sb \sin ACN = Sb \sin x;$$

donc

$$Sb = \frac{Sa}{\sin x} = \frac{e^3 \sin^2 x}{1.2.3} - \frac{e^5 \sin^4 x}{1.2.3.4.5.} + \text{etc.}$$

d'ailleurs

$$\text{tang}\, x = \text{tang}\, Qbx = \frac{QX}{Qb} = \frac{\sin z}{SQ - Sb} = \frac{\sin z}{e + \cos z - Sb};$$

d'où je tire

$$\log.\ \text{tang}\, x = \log\left(\frac{\sin z}{e + \cos z}\right) + K\left(\frac{e^3 \sin^2 x}{1.2.3(e+\cos z)}\right)$$

$$- \frac{e^5 \sin^4 x}{1.2.3.4.5\,(e+\cos z)} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^3 \sin^2 x}{1.2.3.\,(e+\cos z)}\right)^2,$$

$$- \frac{e^7 \sin^8 x}{1.2.3.4.5.6.7\,(e+\cos z)} + \left(\frac{e^8 \sin^6 x}{1.2.3.1.2.3.4.5.(e+\cos z)^2}\right),$$

ce qui se réduit aux formules suivantes :

$$\text{tang } x' = \frac{\sin z}{e + \cos z},$$

$$\log. \text{tang } x'' = \log. \text{tang } x' + \left(\frac{K\ e^3}{6}\right)\left(\frac{\sin^2 x'}{e + \cos z}\right)$$

$$- \left(\frac{K\, e^3 \sin^2 x'}{6\,(e + \cos z)}\right)\left(\frac{e^2 \sin^2 x'}{20}\right),$$

$$+ \left(\frac{K\, e^3 \sin^2 x'}{6\,(e + \cos z)}\right)^2 \frac{1}{2\,K} - \left(\frac{K\, e^3 \sin^2 x'}{6\,(e + \cos z)}\right)^3 \frac{1}{3\,K^2},$$

$$\log. \text{tang } x = \log \text{tang } x'' + \left(\frac{K e^3 \sin^2 x'}{6\,(e + \cos z)}\right) 2 \cot x' \sin (x'' - x'),$$

$$K = \frac{1}{\log. \text{hyperb.} 10}\ ; \quad \log. K = 9.6377843.$$

Cette formule a été mise sous cette forme pour la facilité du calcul logarithmique.

Ces diverses solutions ne sont qu'approximatives, mais elles sont exactes au-delà des dixièmes de secondes pour la plus excentrique de toutes les planètes connues.

43. $\text{tang } \frac{1}{2} u = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \text{tang } \frac{1}{2} x = \cos \omega \text{ tang } \frac{1}{2} x$

pour abréger,

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{1 - \sin \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon} = \text{tang}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} \varepsilon)$$

$$\cos \omega = \text{tang } (45^\circ - \tfrac{1}{2} \varepsilon) = \frac{1 - \text{tang } \frac{1}{2} \varepsilon}{1 + \text{tang } \frac{1}{2} \varepsilon}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \varepsilon = \frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega} = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \omega,$$

$$\tfrac{1}{2}(x - u) = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \omega \sin u + \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} \omega \sin 2u + \tfrac{1}{3} \text{tang}^6 \tfrac{1}{2} \omega \sin 3u + \text{etc.}$$

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin x + \tfrac{1}{2} \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin 2x + \tfrac{1}{3} \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin 3x + \text{etc.}$$

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2} \omega \sin x - \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} \omega \sin 2x + \tfrac{1}{3} \text{tang}^6 \tfrac{1}{2} \omega \sin 3x - \text{etc.}$$

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin x - \tfrac{1}{2} \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin 2x + \tfrac{1}{2} \text{tang}^3 \tfrac{1}{2} \varepsilon \sin 3x - ;$$

mais d'ailleurs

$$\left(\frac{z - x}{2}\right) = \frac{e \sin x}{2} = \frac{\sin \varepsilon \sin x}{2},$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}(z-u) = (\tfrac{1}{2}\sin\varepsilon + \tang\tfrac{1}{2}\varepsilon)\sin x - \tfrac{1}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2x$$
$$+\tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 3x - \text{etc.}$$

$$z - x = e\sin x = \frac{eb\sin u}{1-e\cos u} = \frac{e(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin u}{1-e\cos u}$$
$$= \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin u}{1-\sin\varepsilon\cos u};$$

mais

$$(x-u) = 2\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin u + \tfrac{1}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2u + \text{etc.}$$

Donc

$$z - u = \left(\frac{\frac{1}{2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-\sin\varepsilon\cos u} + 2\tang\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)\sin u,$$
$$+\tfrac{2}{2}\tang^2\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2u + \tfrac{2}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u\sin 3u + \text{etc.}$$

44. Ces deux séries donneraient l'équation du centre pour x et u; mais il faut l'avoir en fonction de z.

Or l'aire d'un secteur elliptique décrit dans un instant très-court, est $\frac{1}{2}V^2\,du$; l'aire du cercle circonscrit décrite dans le même instant, serait $\frac{1}{2}\,dz$; l'aire elliptique correspondante est $\frac{1}{2}bdz$; donc $V^2\,du = bdz$ et $du = \frac{bdz}{V^2} = \frac{bdz\,(1-e\cos u)^2}{b^4}$

$$\frac{du}{dz} = b^{-3}(1-2e\cos u + e^2\cos^2 u) = b^{-3}(1-2e\cos u + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}e^2\cos 2u),$$
$$= \frac{1+\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon - 2\sin\varepsilon\cos u + \frac{1}{2}\sin^3\varepsilon\cos 2u.}{\cos^3\varepsilon}$$

On se sert de ces diverses formules pour calculer le mouvement horaire vrai des planètes.

45. De l'équation

$$dz = \frac{b^3du}{(1-e\cos u)^2} = (1-e^2)^{\frac{3}{2}}du\,(1-e\cos u)^{-2},$$

on tire une formule

$$dz = du\,(1 + a\cos u + b\cos 2u + c\cos 3u + \text{etc.});$$

d'où, par l'intégration, il viendra

$$z = u + a\sin u + \tfrac{1}{2}b\sin 2u + \tfrac{1}{3}c\sin 3u + \text{etc.}$$

Cette équation a été développée par M. Cagnoli jusqu'aux e^9; il a trouvé

$$\begin{aligned} z - u = {} & 2e \sin u + \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{3}{64} e^6 + \frac{3}{128} e^8\right) \sin 2u \\ & + \left(\frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{8} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{7}{192} e^9\right) \sin 3u \\ & + \left(\frac{5}{32} e^4 + \frac{3}{32} e^6 + \frac{15}{256} e^8\right) \sin 4u \\ & + \left(\frac{3}{40} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{3}{64} e^9\right) \sin 5u \\ & + \left(\frac{7}{192} e^6 + \frac{5}{128} e^8\right) \sin 6u \\ & + \left(\frac{9}{56} e^7 + \frac{3}{128} e^9\right) \sin 7u \\ & + \left(\frac{9}{1024} e^8\right) \sin 8u \\ & + \left(\frac{5}{1152} e^9\right) \sin 9u. \end{aligned}$$

Toutes ces formules se rapportent à l'apside supérieure; pour les rapporter à l'apside inférieure, lisez $(u-z)=2e\sin u-$etc., en changeant les signes des termes pairs.

46. Il faut changer cette série en une autre série qui dépende des sinus des multiples de z; c'est-à-dire, étant donné la série

$$a \sin u + b \sin 2u + c \sin 3u + \text{etc.},$$

trouver la série égale

$$A \sin z + B \sin 2z + C \sin 2z + \text{etc.};$$

en différentiant vous aurez

$$\begin{aligned} & (a \cos u + 2b \cos 2u + 3c \cos 3u + \text{etc.}) \frac{du}{dz} \\ & = A \cos z + 2B \cos 2z + 3C \cos 3z + \text{etc.} \end{aligned}$$

Substituez pour $\frac{du}{dz}$ sa valeur donnée ci-dessus (44) et réduisez, vous aurez

$$a' \cos u + b' \cos 2u + c' \cos 3u + \text{etc.}$$
$$= A \cos z + 2B \cos 2z + 3C \cos 3z + \text{etc.}$$

Faites successivement $u = 0$, $u = 180°$, ce qui donne en même tems $z = 0$ ou $z = 180°$, vous aurez les deux équations suivantes :

$$a' + b' + c' + \text{etc.} = A + 2B + 3C + \text{etc.}$$
$$-a' + b' - c' + \text{etc.} = -A + 2B - 3C + \text{etc.}$$

$$b' + d' + f' + h' = 2B + 4D + 6F = \tfrac{1}{2}\,\text{somme.}$$
$$a' + c' + e' + g' = A + 3C + 5E + 7G + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}\,\text{différ.}$$

Différentiez de nouveau deux fois de suite l'équation (2), en y substituant à chaque fois la valeur de $\frac{du}{dz}$; dans l'équation qui en résultera, faites successivement $u = 0$ et $u = 180°$ vous aurez deux nouvelles équations du même genre que les précédentes ; en continuant de même vous aurez des équations au nombre de 6, 8, 10, 12, etc., d'où, par l'élimination, vous tirerez les valeurs des coefficiens A, B, C, etc.

47. M. Lagrange a donné une méthode plus savante ; M. Oriani l'a modifiée de manière à en tirer l'équation algébrique des divers coefficiens ; mais malgré les efforts des plus grands géomètres, les développemens sont d'une longueur excessive. Au reste, ces calculs sont faits et vérifiés ; voici la formule numérique de M. Oriani.

$$
\begin{aligned}
E = &-\left(2e - \frac{1}{2^2}e^3 + \frac{5}{2^5.3}e^5 + \frac{107}{2^9.3^2}e^7 + \frac{6217}{2^{13}.3^2.5}e^9 + \frac{565879}{2^{16}.3^3.5^2}e^{11}\right)\sin z \\
&+\left(\frac{5}{2^2}e^2 - \frac{11}{2^3.3}e^4 + \frac{17}{2^6.3}e^6 + \frac{43}{2^7.3^2.5}e^8 + \frac{677}{2^9.3^3.5}e^{10} + \frac{7237}{2^{10}.3^2.5.7}e^{12}\right)\sin 2z \\
&-\left(\frac{13}{2^2.3}e^3 - \frac{43}{2^6}e^5 + \frac{95}{2^9}e^7 - \frac{973}{2^{12}.3.5}e^9 + \frac{19503}{2^{16}.5.7}e^{11}\right)\sin 3z \\
&+\left(\frac{103}{2^5.3}e^4 - \frac{451}{2^5.3.5}e^6 + \frac{4123}{2^8.3^2.5}e^8 - \frac{1367}{2^7.3^3.7}e^{10} + \frac{111929}{2^{13}.3^3.5.7}e^{12}\right)\sin 4z \\
&-\left(\frac{1097}{2^6.3.5}e^5 - \frac{5957}{2^9.3^2}e^7 + \frac{164921}{2^{12}.3^2.7}e^9 - \frac{3949663}{2^{17}.3^3.7}e^{11}\right)\sin 5z \\
&+\left(\frac{1223}{2^6.3.5}e^6 - \frac{7913}{2^7.5.7}e^8 + \frac{7751}{2^{10}.6}e^{10} - \frac{82021}{2^{11}.3.5.7}e^{12}\right)\sin 6z \\
&-\left(\frac{47273}{2^9.3^2.7}e^7 - \frac{1773271}{2^{11}.3^2.5}e^9 + \frac{93521363}{2^{17}.3^4.5}e^{11}\right)\sin 7z \\
&+\left(\frac{556403}{2^{10}.3^2.5.7}e^8 - \frac{4745483}{2^9.3^4.5.7}e^{10} - \frac{32431949}{2^{12}.3^4.5.7}e^{12}\right)\sin 8z \\
&-\left(\frac{10661993}{2^{14}.3^2.5.7}e^9 - \frac{101836961}{2^{17}.5^2.7}e^{11}\right)\sin 9z \\
&+\left(\frac{7281587}{2^{10}.3^4.5.7}e^{10} - \frac{76972457}{2^{11}.3^4.7.11}e^{12}\right)\sin 10z \\
&-\left(\frac{6303951210 1}{2^{17}.3^4.5^2.7.11}e^{11}\right)\sin 11z \\
&+\left(\frac{7218065}{2^{15}.3.7.11}e^{12}\right)\sin 12z.
\end{aligned}
$$

48. Par des moyens analogues, M. Jeaurat a trouvé la formule de V en fonction de u :

$$
\begin{aligned}
V = 1 - \frac{1}{2}e^2 &+ \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 - \frac{7}{9216}e^7\right)\cos u \\
&- \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{16}e^6 - \frac{1}{180}e^8\right)\cos 2u \\
&+ \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 + \frac{567}{5120}e^7\right)\cos 3u \\
&- \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 + \frac{8}{45}e^8\right)\cos 4u \\
&+ \left(\frac{125}{384}e^5 - \frac{4375}{9212}e^7\right)\cos 5u \\
&- \left(\frac{27}{80}e^6 - \frac{81}{140}e^8\right)\cos 6u \\
&+ \frac{16807}{46080}e^7\cos 7u - \frac{128}{315}e^8\cos 8u + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

49. M. Oriani l'a donnée en fonction de z :

$$
V = M\left\{
\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2}e^2 + \left(e - \frac{3}{2^3}e^3 + \frac{5}{2^6.3}e^5 - \frac{7}{2^{10}.3^2}e^7 + \frac{1}{2^{14}.5}e^9\right)\cos z \\
&- \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{2^4}e^6 - \frac{1}{2^2.3^2.5}e^8 + \frac{1}{2^7.3^3}e^{10}\right)\cos 2z \\
&+ \left(\frac{3}{2^3}e^3 - \frac{5.3^2}{2^7}e^5 + \frac{7.3^4}{2^{10}.5}e^7 - \frac{3^6}{2^{13}.5}e^9\right)\cos 3z \\
&- \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 + \frac{2^3}{3^2.5}e^8 - \frac{2^3}{3^3.7}e^{10}\right)\cos 4z \\
&+ \left(\frac{53}{2^7.3}e^5 - \frac{7.5^4}{2^{10}.3^2}e^7 + \frac{5^6}{2^{13}.7}e^9\right)\cos 5z \\
&- \left(\frac{3^3}{2^4.5}e^6 - \frac{3^4}{2^2.5.7}e^8 + \frac{3^6}{2^8.7}e^{10}\right)\cos 6z \\
&+ \left(\frac{7^5}{2^{10}.3^2.5}e^7 - \frac{7^6}{2^{15}.5}e^9\right)\cos 7z \\
&- \left(\frac{2^7}{3^2.5.7}e^8 - \frac{2^9}{3^4.7}e^{10}\right)\cos 8z \\
&+ \left(\frac{3^{12}}{2^{15}.5.7}e^9\right)\cos 9z \\
&- \left(\frac{5^7}{2^8.3^3.7}e^{10}\right)\cos 10z.
\end{aligned}
\right.
$$

50. Par les mêmes moyens, j'ai cherché l'expression de log V :

$$\log V = \log M + K \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{32}e^4 + \frac{1}{96}e^6 + \frac{5}{1024}e^8 \\ + \left(e - \frac{3}{8}e^3 - \frac{1}{64}e^5 - \frac{127}{2^{10}.3^2}e^7 - \frac{1741}{2^{11}.3.5}e^9\right)\cos z \\ - \left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{3}{64}e^6 - \frac{9}{640}e^8\right)\cos 2z \\ + \left(\frac{17}{24}e^3 - \frac{77}{128}e^5 + \frac{743}{2^{10}.5}e^7 - \frac{3539}{2^{13}.3.5}e^9\right)\cos 3z \\ - \left(\frac{71}{96}e^4 - \frac{129}{160}e^6 + \frac{387}{1280}e^8\right)\cos 4z \\ + \left(\frac{523}{640}e^5 - \frac{10039}{2^{10}.3^2}e^7 + \frac{94739}{2^{13}.3.7}e^9\right)\cos 5z \\ - \left(\frac{899}{960}e^6 - \frac{6617}{2^7.5.7}e^8\right)\cos 6z \\ + \left(\frac{355081}{2^{10}.3^2.5^7}e^7 - \frac{986099}{2^{15}.3.5}e^9\right)\cos 7z \\ - \left(\frac{47259}{2^{10}.5.7}e^8\right)\cos 8z \\ + \left(\frac{16541017}{2^{15}.3^2.5.7}e^9\right)\cos 9z. \end{array} \right.$$

51. Ces séries peuvent servir dans quelques recherches analytiques, et alors on se contente des termes principaux; elles peuvent servir pour calculer des tables, d'une manière très-uniforme, mais bien longue encore. J'en ai déduit des formules plus expéditives.

Nous avons

$$E = a \sin z + b \sin 2z + c \sin 3z + d \sin 4z + \text{etc.}$$
$$E' = a \sin z' + b \sin 2z' + c \sin 3z' + d \sin 4z' + \text{etc.};$$

d'où

$$\begin{aligned} E' - E = \Delta E &= 2a \sin \tfrac{1}{2}(z' - z) \cos \tfrac{1}{2}(z' + z) \\ &+ 2b \sin \tfrac{2}{2}(z' - z) \cos \tfrac{2}{2}(z' + z) \\ &+ 2c \sin \tfrac{3}{2}(z' - z) \cos \tfrac{3}{2}(z' + z) + \text{etc.} \\ &= 2a \sin \tfrac{1}{2}\Delta z \cos (z + \tfrac{1}{2}\Delta z) \\ &+ 2b \sin \tfrac{3}{2}\Delta z \cos \tfrac{1}{2}(z + \tfrac{1}{2}\Delta z) + \text{etc.}; \end{aligned}$$

par des procédés semblables,

$$\Delta E - \Delta E' = \Delta^2 E = 4a\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta z \sin(z+\Delta z) + 4b\sin^2\tfrac{3}{2}\Delta z \sin(z+\Delta z).$$

Au moyen de cette dernière formule, vous ferez une table des secondes différences de degré en degré de z, à commencer de $z=0$.

Vous calculerez, par la première, les premières différences de 30 en 30°, en commençant à $z=0$. Vous remplirez les intervalles au moyen de la table des secondes différences.

Quand $z=0$, $E=0$; quand $z=180°$, $E=0$; en partant de ces deux points, on arrive, par des chemins contraires, à la valeur de E pour 90°; on trouvera la même valeur si l'on a bien opéré, et toute la table sera vérifiée. Cette méthode m'a complètement réussi pour Mercure.

Si l'on veut interpoler ensuite, de 10 en 10′, on le pourra par les formules, ΔE et $\Delta^2 E$, qui seront alors bien plus convergentes, parce que $\frac{1}{2}\Delta Z$ sera de 5′ au lieu de 30′.

Vous aurez de même

$$\Delta \log V = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Delta z \sin(z+\tfrac{1}{2}\Delta z) + 2b\sin\tfrac{3}{2}\Delta z \sin 2(z+\tfrac{1}{2}\Delta z) + \text{etc.}$$
$$\Delta^2 \log V = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta z \cos(z+\Delta z) + 4b^2\sin^2\tfrac{3}{2}\Delta z \cos 2(z+\tfrac{1}{2}\Delta z).$$

52. Dans les recherches précédentes entreprises pour arriver au calcul de la marche inégale du soleil dans son ellipse, nous avons pu prendre pour unité le demi-grand axe de l'ellipse, et nous continuerons de faire de même, quand nous parlerons du soleil; pour les planètes, nous appellerons a le demi-grand axe, b le demi-petit axe, et nous aurons $b = a\cos\varepsilon$, l'excentricité $e = a\sin\varepsilon$.

L'angle ε est l'angle formé au sommet du petit axe par le rayon vecteur, ou CDS (fig. 77). On nomme *paramètre* la double ordonnée qui passe par le foyer. Soit $2p$ le paramètre, nous aurons la valeur de p en faisant $u=0$ dans la formule $V = \dfrac{a\cos^2\varepsilon}{1 - a\sin\varepsilon\cos u} = a\cos^2\varepsilon$.

Quand il s'agit du soleil, il est indifférent de compter de l'apside supérieure ou inférieure. Pour les planètes et les

comètes surtout, il convient de compter de l'apside inférieure; alors

$$z = x - e \sin x, \quad V = 1 - e \cos x = \frac{a \cos^2 \varepsilon}{1 + \sin \varepsilon \cos u}.$$

53. Pour trouver l'anomalie moyenne dans une ellipse quelconque, nous aurons recours à la troisième loi de Képler, qui dit que les carrés des tems sont comme les cubes des demi-axes, ou $a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}} :: T : T'$.

Soit pour le soleil $a' = 1$ et $T' = 365,256364$, tems que le soleil emploie à revenir au même point du ciel, nous aurons

$$a^{\frac{3}{2}} = \frac{T}{T'} \text{ et } T = a^{\frac{3}{2}} . 365,256364.$$

T sera le tems de la révolution; soit m le mouvement diurne moyen,

$$T : 1 :: 360° : m = \frac{360°}{T} = \frac{360°}{T' . a^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit t un nombre de jours quelconque; le mouvement moyen pour ce nombre de jours sera

$$\frac{3548'',1676\, t}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{ct}{a^{\frac{3}{2}}} = z = x - \sin \varepsilon \sin x;$$

nous aurons pour l'aire double du secteur elliptique,

$$V^2 du = abdz;$$

en intégrant,

$$\int V^2 du = abz = \frac{a^2 \cos \varepsilon ct}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \varepsilon ct = ct \sqrt{p};$$

ce sont autant d'expressions de l'aire elliptique pour un nombre de jours.

54. On a généralement

$$z = u + a \sin u + b \sin 2u + c \sin 3u,$$
$$z' = u' + a \sin u' + b \sin 2u' + c \sin 3u',$$

Soit $u' = 180° + u$,

$$z' = 180^\circ + u - a\sin u + b\sin 2u - c\sin 3u,$$
$$z' - z = 180^\circ - 2a\sin u - 2c\sin 3u,$$
$$180^\circ - (z' - z) = 2a\sin u + 2c\sin 3u + \text{etc.},$$
$$180^\circ - (\zeta' - \zeta) = 2a\sin v + 2c\sin 3v,$$
$$\begin{aligned} 360^\circ - (z'-z) - (\zeta'-\zeta) &= 2a(\sin u + \sin v) + 2c(\sin 3u + \sin 3v) \\ &= 4a\sin\tfrac{1}{2}(u+v)\cos\tfrac{1}{2}(u-v) \\ &\quad + 4c\sin\tfrac{3}{2}(u+v)\cos\tfrac{3}{2}(u-v), \\ (z'-z) - (\zeta'-\zeta) &= 4a\sin\tfrac{1}{2}(u-v)\cos\tfrac{1}{2}(u+v) \\ &\quad + 4c\sin\tfrac{3}{2}(u-v)\cos\tfrac{3}{2}(u+v). \end{aligned}$$

Divisant la première de ces équations par la seconde,

$$\frac{360^\circ - (z'-z) - (\zeta'-\zeta)}{(z'-z) - (\zeta'-\zeta)} = \frac{\left\{\begin{matrix} 4a\sin\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u-v) \\ +4c\sin\frac{3}{2}(u+v)\cos\frac{3}{2}(u-v) \end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix} 4a\sin\frac{1}{2}(u-v)\cos\frac{1}{2}(u+v) \\ +4c\sin\frac{3}{2}(u-v)\cos\frac{3}{2}(u+v) \end{matrix}\right\}}$$

$$= \frac{\tang\tfrac{1}{2}(u+v)\cot\tfrac{1}{2}(u-v) + \dfrac{\frac{c}{a}\sin\frac{3}{2}(u+v)\cos\frac{3}{2}(u-v)}{\sin\frac{1}{2}(u+v)\cos\frac{1}{2}(u+v)}}{1 + \dfrac{\frac{c}{a}\sin\frac{3}{2}(u+v)\cos\frac{3}{2}(u-v)}{\sin\frac{1}{2}(u-v)\cos\frac{1}{2}(u+v)}}$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}(u+v)\cot(u-v);$$

car $\frac{c}{a}$ est insensible,

$$\tang\tfrac{1}{2}(u+v) = \left(\frac{360^\circ - (z'-z) - (\zeta'-\zeta)}{(z'-z) - (\zeta'-\zeta)}\right)\tang\tfrac{1}{2}(u-v)$$
$$= \frac{R - (T'-T) - (\theta'-\theta)}{(T'-T) - (\theta'-\theta)}\tang\tfrac{1}{2}(u-v),$$

en mettant le tems R de la révolution pour 360°, et les intervalles en tems au lieu des anomalies moyennes.

Si T′ et T sont les tems des deux équinoxes, θ' et θ ceux des deux solstices, $\frac{1}{2}(u-v) = 45^\circ$, et $\tang\frac{1}{2}(u-v) = 1$. Connaissant u et v, vous aurez $2a$ et $2c$ par les deux équations primitives.

55. $z - u = E$; donc $dz - du = dE$; mais à l'instant

où l'équation est la plus grande, $dE = 0$; donc $dz = du$;

$$\frac{du}{dz} = 1 = \frac{b}{V^2} = \frac{(1 - e\cos u)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$1 - e\cos u = (1 - e^2)^{\frac{3}{4}},$$

$$\cos u = \tfrac{3}{4}e + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{8}e^3 + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\,\tfrac{5}{12}e^5 + \text{etc.};$$

on a aussi

$$\frac{du}{dz} = 1 = \frac{b}{V^2} = \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 + e\cos x)^2},$$

$$(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + e\cos x),$$

$$\cos x = -\tfrac{1}{4}e - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{8}e^3 - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{8}\,\tfrac{7}{12}e^5 + \text{etc.};$$

il en résulte que x est un angle obtus, u un angle aigu

$$\text{Soit}\quad \left.\begin{array}{l} x = 90^\circ + m \\ u = 90^\circ - n \end{array}\right\} x - u = m + n,$$

$$z = x + e\sin x = 90^\circ + m + e\cos m.$$

On aura donc x et u, et par conséquent z pour le tems de la plus grande équation. Ces formules sont suffisantes; mais on en a déduit quelques autres que nous donnerons sans démonstration. Soit E la plus grande équation....

$$E = 2e + \frac{11}{48}e^3 + \frac{599}{5120}e^5 + \frac{17219}{229375}e^7,$$

$$e = \tfrac{1}{2}E - \frac{11}{2^4.3}E^3 - \frac{587}{2^{16}.3.5.}E^5 - \frac{40583}{2^{23}.5.7.9}E^5 - \text{etc.}$$

$$z = 90^\circ + \tfrac{5}{4}e + \frac{25}{2^7.3}e^3 + \frac{1383}{2^{13}.5}e^5 + \frac{29877}{2^{18}.7}e^7 + \text{etc.}$$

Ces formules peuvent être utiles pour trouver l'excentricité par la plus grande équation observée.

56. D'un point quelconque (fig. 78), menons aux deux foyers de l'ellipse les droites MF et MT, et partageons également l'angle FMT par la ligne MN.

MT

$$MT:MF::TN:FN::TC+CN:FC-CN::e+y:e-y$$
$$MT+MF:MT-MF::2e:2y,$$
$$2:V-2+V::2:2V-2::1:V-1::e:y=e(V-1)$$
$$=e(1+e\cos x-1)=e^2\cos x,$$
$$e+y=e+eV-e=eV=TN \text{ et } \frac{TN}{MT}=\frac{eV}{V}=e,$$

de N abaissez la perpendiculaire NP sur MT,

$$\text{tang}NMT=\frac{NP}{MP}=\frac{TN\sin NCM}{MT-TN\cos NCM}=\frac{\frac{TN}{MT}\sin NCM}{1-\frac{TN}{MT}\cos NCM}$$
$$=\frac{e\sin u}{1-e\cos u},$$
$$NMT=e\sin u+\tfrac{1}{2}e^2\sin 2u+\tfrac{1}{3}e^3\sin 3u,$$

l'angle au foyer supérieur

$$AFM=FTM+FMT=u+2NMT$$
$$=u+2e\sin u+\tfrac{2}{2}e^2\sin 2u+\tfrac{2}{3}e^3\sin 3u;$$

mais

$$z=u+2e\sin u+\tfrac{3}{4}e^2\sin 2u+\tfrac{1}{3}e^3\sin 3u,$$
$$AFM-z=\tfrac{1}{4}e^2\sin 2u+\tfrac{1}{3}e^3\sin 3u.$$

C'est l'erreur de l'hypothèse elliptique simple; elle irait à $54'\frac{1}{2}$ pour une ellipse dont l'excentricité serait 0,25; elle ne va pas à 15″ pour le soleil.

Par le point M, menez Mt perpendiculaire à MN, Mt sera la tangente à l'ellipse, donc.....

$$TMt=90^\circ-e\sin u-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2u-\tfrac{1}{3}e^3\sin 3u-\text{etc.}$$

dont TMT est un angle aigu dans la première moitié de l'ellipse, depuis l'apogée jusqu'au périgée; il est obtus dans l'autre moitié. Donc dans l'ellipse le mouvement doit s'accélérer, et la distance diminuer dans la première moitié; le mouvement doit se retarder, et la distance augmenter dans l'autre moitié (30).

57. Dans le cercle l'angle reste toujours droit, le mouvement est toujours le même, la force tangentielle ou cen-

trifuge est exactement contrebalancée par la force centrale ou centripète qui attire l'astre. Mais supposons que la force tangentielle soit tant soit peu moindre, la force attractive prévaudra, la planète descendra vers le foyer, la courbure sera plus grande que celle d'un cercle, l'angle, au lieu de rester droit, deviendra aigu, la distance diminuera, le mouvement s'accélérera, c'est ce qui arrive dans l'ellipse jusqu'au périhélie; mais à force de s'accélérer, le mouvement fera que la force tangentielle qui était un peu plus petite que la force attractive, commencera à prendre le dessus, la distance augmentera, l'angle deviendra obtus, le mouvement diminuera jusqu'à ce qu'à l'aphélie il soit redevenu tel que la force tangentielle sera de nouveau inférieure à la force attractive; ainsi l'attraction combinée avec une force tangentielle un peu moindre fait décrire une ellipse à la planète; mais sans que l'attraction cesse, les distances décroîtront et croîtront alternativement, le mouvement s'accélérera et se retardera.

Ainsi, pour que le soleil décrivît un cercle, il faudrait que la force attactive a, que la terre exercerait sur lui, fût $= \frac{1}{2}$ tang^2 1″ $(147'')^2$; 147″ est le mouvement horaire moyen. On connaît donc a.

Dans l'apogée $\frac{a}{(1-e)^2} > \frac{1}{2}$ tang^2 1″ (mouvement apogée)^2,

l'angle devient aigu et le mouvement s'accélère (30).

Dans le périgée $\frac{a}{(1-e)^2} < \frac{1}{2}$ tang^2 1″ (mouvement périgée)^2

la distance augmente et l'angle devient obtus, le mouvement se ralentit (30).

La force centripète et la force centrifuge sont à peu près égales, la force centripète varie peu; elle ne change guère que de $4ae$, quantité fort petite; (mouvement horaire vrai)^2 varie plus considérablement, ensorte que le second membre $\frac{1}{2}$ tang^2 1″ (mouvement vrai)^2 est alternativement plus faible et plus fort. L'observation donne le mouvement horaire vrai dans toutes

les parties de l'ellipse ; c'est un fait que le mouvement est alternativement trop grand et trop petit pour que le soleil se maintienne à la même distance de la terre ; il s'éloigne donc ou se rapproche, la conséquence est nécessaire.

Ceci répond aux objections de Bouillaud, qui reprochait à Képler d'avoir donné au soleil une force attractive dans une moitié de l'ellipse, et une force répulsive dans l'autre moitié. La force attractive existe toujours, mais elle est tantôt dominante et tantôt dominée ; elle domine quand elle est réellement plus faible, mais c'est qu'elle est relativement la plus forte ; elle est dominée quand elle est réellement la plus forte, mais c'est qu'elle est alors relativement la plus faible ; elle ne varie que d'une manière insensible, la force tangentielle, au contraire, varie bien davantage : ainsi tout est expliqué, c'est-à-dire, que les effets observés dépendent d'une combinaison qui n'est nullement impossible et dont l'existence est prouvée par ces effets mêmes.

58. Après cette théorie générale des mouvemens elliptiques, retournons au soleil.

Les distances au foyer sont égales à pareilles distances angulaires de part et d'autre, soit de l'apogée, soit du périgée, puisque $V = \frac{1 + e^2}{1 + e \cos u}$; quand les distances sont égales, les diamètres apparens sont égaux ; ainsi quand on aura observé deux diamètres égaux en deux points différens de l'ellipse, on en conclura que dans le milieu de l'intervalle le soleil a passé par l'apogée ou le périgée ; à égales distances de l'apogée ou du périgée, les mouvemens horaires ou diurnes sont égaux ; car nous avons vu que $du = \frac{abdz}{V^2}$; ainsi quand nous aurons observé des mouvemens diurnes égaux en deux points de l'ellipse, nous en conclurons comme ci-dessus le tems et le lieu, soit de l'apogée, soit du périgée.

59. En répétant après 600 ans des observations équivalentes, Albategnius s'aperçut que l'apogée du soleil avait un mouvement propre de 11 à 12″ par an, suivant l'ordre des

signes; l'équinoxe rétrograde de 50″, 1 par an. Ainsi, la distance de l'apogée à l'équinoxe augmente de 62″ par an.

La méthode des anciens pour trouver à la fois l'excentricité et l'apogée, supposait des observations distantes de six mois, et l'apogée fixe ; elle ne pouvait donner le lieu de l'apogée qu'à quelques secondes près, puisqu'en six mois l'apogée avait avancé de 31″. D'ailleurs cette méthode supposait l'épicycle ou l'excentrique, qui ne sont pas la vraie courbe. Voici une méthode dont la première idée est due à Kepler, mais qui a été perfectionnée par La Caille.

60. Vers le maximum les variations sont insensibles ; ainsi le mouvement apogée est sensiblement le même pendant plusieurs jours. Il en est de même du mouvement périgée.

On a observé le soleil en B vers l'apogée (fig. 80). Soit a le mouvement diurne apogée et x le tems qui a dû s'écouler jusqu'à l'apogée, $T+x$ sera le tems du passage par l'apogée et ax sera l'arc AB. $\Upsilon TB+ax$ ou $B+ax$ sera la longitude de l'apogée.

Vers le périgée, vous observerez la longitude C ou $\Upsilon'TC$ comptée de l'équinoxe mobile Υ' ; pour la réduire à l'équinoxe primitif Υ, vous en retrancherez l'angle $\Upsilon'T\Upsilon = 25''$ mouvement de précession en 6 mois. Ainsi $\Upsilon TC = \Upsilon'TC - 25'' = C - 25''$.

L'angle BTC des rayons vecteurs sera $C-B-25''$; si l'apside AP était immobile, la distance au périgée serait CP; mais en 6 mois l'apogée aura avancé de 6″, il sera en p.

Soit y le tems qui doit s'écouler jusqu'au passage en p, π le mouvement périgée, nous aurons $\pi y = Cp : T'+y$ sera le tems du passage en p.

$$C-25''+\pi y = \text{longit. } p;\ C-25''+\pi y-6'' = \text{longitude } P = C-31''+\pi y;$$

$$180^\circ = \text{longit. } P - \text{longit. } A = C-31''+\pi y-B-ax;\ \pi y-ax = 180^\circ+B-C+31''; \text{ mais } \pi > a \text{ soit } \pi = (1+m)\ a = a+ma,$$

$$ay+may-ax = may+a(y-x) = 180^\circ+B-C+31'' = 180^\circ\ 0'\ 31''+B-C;\ may = 180^\circ\ 0'\ 31''+B-C-a(y-x);$$

$$y = \frac{180^\circ\, 0'\, 31'' + B - C}{ma} - \frac{y-x}{m}$$
$$= \frac{180^\circ\, 0'\, 31'' + B - C - a(\frac{1}{2}R + T - T')}{ma = \pi - a};$$

Car le tems du périgée $= T' + y$,
le tems de l'apogée $= T + x$,
$\frac{1}{2}$ révolution..... $= T' - T + (y - x)$,
$y - x = \frac{1}{2}R + T - T'$.

Nous connaissons B, C, a, T', T, $\pi - a$, si nous connaissions R, il ne nous manquerait rien pour connaître y, $x = T' - T + y - \frac{1}{2}R$; ax, longit. $A = B + ax$, c'est-à-dire la *longitude de l'apogée dans la première observation*, celle de $p = 180^\circ + x + 6''$; enfin $T' + y$ et $T + x$ les tems des deux passages, et le problème serait résolu. Or $360^\circ - 50'',1 : 360^\circ + 11'',8 ::$ durée de l'année tropique : tems de la révolution du soleil sur son ellipse $= R =$ $\left(\frac{360^\circ\, 0'\, 11'',8}{359^\circ\, 59'\, 9'',9}\right)(365^j\, 5^h\, 49'\, 51'',6)$; nous trouverions ainsi $R = 365^j\, 6^h\, 10'\, 21''$ et $\frac{1}{2}R = 182^j\, 15^h\, 5'\, 10''$.

En effet, il est évident que le soleil partant de l'apogée A pour y revenir, aura à décrire 360° plus les $11'',8$ de mouvement de l'apogée en un an; tandis que pour revenir à l'équinoxe il n'a à parcourir que $359^\circ\, 59'\, 9'',9$; les tems sont proportionnels aux espaces.

$$a = \frac{bdz}{(1+e)^2};\ \pi = \frac{bdz}{(1-e)^2};\ \pi - a = \frac{bdz[(1+e)^2 - (1-e)^2]}{(1-e)^2(1+e)^2}$$
$$= \frac{4ebdz}{(1-e)^2(1+e)^2} = \frac{4edz(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-e)^2(1+e)^2} = \frac{4edz(1-e)^{\frac{1}{2}}}{(1-e)^2} = \frac{4edz}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{a}{\pi - a} = \frac{(1-e)^2}{4e};\quad \left(\frac{\pi}{\pi - a}\right) = \frac{bdz}{(1-e)^2}\,\frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4edz}$$
$$= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-e)^2.4e} = \frac{(1-e^2)^2}{4e(1-e)^2} = \frac{(1-e)^2(1+e)^2}{(1-e)^2.4e} = \frac{(1+e)^2}{4e};$$

61. $$\frac{a}{\pi}=\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}, \qquad \sqrt{\frac{a}{\pi}}=\frac{1+e}{1-e};$$

$$e=\frac{1-\sqrt{\frac{a}{\pi}}}{1-\sqrt{\frac{a}{\pi}}}=\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{a}}.$$

Les mouvemens apogée et périgée suffisent donc pour donner une idée de l'excentricité.

L'observation des diamètres fournit un autre moyen. Soit d le diamètre apogée, D le diamètre périgée, δ le diamètre moyen.

$$d=\frac{\delta}{1+e}, \quad D=\frac{\delta}{1-e}, \quad \frac{\delta}{D}=\frac{1-e}{1+e} \quad \text{et} \quad e=\frac{D-d}{D+d}.$$

62. La plus grande équation a lieu dans les deux points de l'ellipse, où $du=dz$; la différence entre les deux longitudes donnerait le double de la plus grande équation. On aurait dans l'une $u=Z-E$,
dans l'autre $u'=Z'+E$,

$$u'-u=(Z'-Z)+2E,$$

$$2E=(u'-u)-(Z'-Z), \qquad E=\frac{(u'-u)-(Z'-Z)}{2}.$$

Si l'on a observé deux longitudes, on aura les deux équations

$$Z=u+a\sin u+b\sin 2u+c\sin 3u,$$
$$Z'=u'+a\sin u'+b\sin 2u'+c\sin 3u'.$$
$$\begin{aligned}(Z'-Z)-(u'-u)&=a(\sin u'-\sin u)+b(\sin 2u'-\sin 2u)\\&\quad+c(\sin 3u'-\sin 3u)\\&=2a\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)\\&\quad+2b\sin\tfrac{3}{2}(u'-u)\cos\tfrac{3}{2}(u'+u)\\&\quad+2c\sin\tfrac{5}{2}(u'-u)\cos\tfrac{5}{2}(u'-u)+\text{etc.}\end{aligned}$$

63. Soit $u'=180^\circ+u$, $u'-u=180^\circ$, $\frac{1}{2}(u'-u)=90^\circ$, $u'+u=180^\circ+2u$, $\frac{1}{2}(u'+u)=90^\circ+u$.

$$\begin{aligned}(Z'-Z)-180^\circ &= 2a\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)+2c\cos\tfrac{3}{2}(u'+u)\\ &= -2a\sin u+2c\cos\tfrac{3}{2}(180^\circ+2u)\\ &= 2a\cos\left(\frac{180^\circ+2u}{2}\right)+2c\cos 3\left(\frac{180^\circ+2u}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z'-Z-180^\circ &= 2a\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)-2c\cos\tfrac{3}{2}(u+u)\\ &= 2a\cos\left(\frac{180^\circ+2u}{2}\right)+2c\cos 3\left(\frac{180^\circ+2u}{2}\right)\\ &= 2a\cos(90^\circ+u)-2c\cos 3(90^\circ+u)\\ &= -2a\sin u-2c\cos(270^\circ+3u)\\ &= -2a\sin u-2c\sin(360^\circ-270^\circ-3u)\\ &= -2a\sin u+2c\sin(90^\circ-3u)\\ &= -2a\sin u+2c\cos 3u,\end{aligned}$$

$$2a\sin u = 180^\circ-(Z'-Z);$$

et si $u=90^\circ$,

$$a = 90^\circ-\tfrac{1}{2}(Z'-Z).$$

64. Si l'on a quatre observations distantes deux à deux de 180°, on a

$$\begin{aligned}2a\sin u &= 180^\circ-(Z'-Z),\\ 2a\sin v &= 180^\circ-(\zeta'-\zeta),\\ 2a(\sin u+\sin v) &= 360^\circ-(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta),\\ 2a(\sin v-\sin u) &= (Z'-Z)-(\zeta'-\zeta),\\ 4a\sin\tfrac{1}{2}(v+u)\cos\tfrac{1}{2}(v-u) &= 360^\circ-(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta),\\ 4a\sin\tfrac{1}{2}(v-u)\cos\tfrac{1}{2}(v+u) &= (Z'-Z)-(\zeta'-\zeta),\\ \cot\tfrac{1}{2}(v-u)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v+u) &= \frac{360^\circ-(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)}{(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)},\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v+u) &= \left(\frac{360^\circ-(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)}{(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)}\right)\cot\tfrac{1}{2}(v-u)\\ &= \frac{360^\circ-(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)}{(Z'-Z)-(\zeta'-\zeta)}\cot\tfrac{1}{2}(L'-L+31'');\end{aligned}$$

car les différences de longitudes observées sont égales aux différences d'anomalies + le mouvement de l'apogée dans l'intervalle. Mais si les quatre observations sont deux équinoxes et deux solstices.

$$v = 90^\circ - A, \qquad u = 0^\circ - A,$$

$$\tfrac{1}{2}(v+u) = \tfrac{1}{2}(90^\circ - A + O - A) = \tfrac{1}{2}(90^\circ - 2A) = 45^\circ - A,$$

$$L' - L + 31'' = 90^\circ + 31'',$$

$$\text{tang}(45^\circ - \text{apogée}) = \left(\frac{360^\circ - (Z' - Z) - (\ ' - \ )}{(Z' - Z) - (\ ' - \ )}\right)\cot(45^\circ\, 0'\, 15'',6)$$

$$= \frac{R - (T' - T) - (\theta' - \theta)}{(T' - T) - (\theta' - \theta)}\cot(45^\circ 0' 15'',6),$$

en mettant les tems au lieu des arcs d'anomalie moyenne. R est ici la révolution anomalistique du soleil, $365^j\, 6^h\, 10'\, 20''$, T′ et T les tems des deux équinoxes, θ' et θ ceux des solstices. On aura donc le lieu de l'apogée, après quoi les deux équations primitives donneront $2a = 4e$.

LEÇON XI.

Comparaison du système qui fait mouvoir le soleil, avec celui qui fait tourner la terre autour du soleil immobile.

1. Le soleil paraît décrire une ellipse autour de la terre, qui en occupe un des foyers; nous avons montré que ce mouvement curviligne serait le résultat d'une force attractive qui résiderait dans la terre, et serait capable de courber à chaque instant la route du soleil. Mais nous avons vu que le volume du soleil est au moins un million de fois aussi grand que celui de la terre. Il est peu naturel qu'un corps aussi petit que la terre puisse exercer une telle action sur le soleil, dont elle n'est pas la millionième partie, on concevrait bien plus facilement que le soleil résidant au foyer de l'ellipse, forçât la terre à circuler autour de lui, au lieu de suivre le mouvement rectiligne, selon la tangente à l'ellipse.

2. Les mouvemens que nous croyons observer ne seraient-ils que des illusions optiques du genre de celles qu'on éprouve

tous les jours dans un carrosse ou dans un bateau qui va rapidement entre deux rangées d'arbres? Quoique l'observateur, dans ce cas, ne doute en aucune façon de son propre mouvement, il a peine à se défendre de l'erreur qui le lui fait attribuer aux arbres. Cette illusion serait bien plus forte encore, si le carrosse ou le canot était moins borné, et l'on conçoit qu'elle pourrait être invincible si ce vaisseau était la terre qui nous emportât tous d'un mouvement commun et fort doux. Nous ne douterions pas de notre repos ni de celui de la terre, et les mouvemens des corps extérieurs, c'est-à-dire des astres, nous sembleraient très-réels, quoiqu'ils ne fussent qu'apparens. Il n'est donc pas impossible que la terre soit en effet pour nous un vaisseau qui nous entraînerait dans l'espace, ou comme un ballon qui serait emporté dans l'air.

3. Les voyages autour du monde ont prouvé que la terre est sphérique et qu'elle n'est soutenue sur rien, qu'elle est comme le ballon qui nage dans l'atmosphère. Indifférent à se mouvoir dans un sens ou dans un autre, il reçoit toutes les directions que lui imprime une cause quelconque, et une seconde force qui se combinerait avec la première pourrait lui faire modifier son mouvement et sa direction.

4. Entre deux hypothèses, dont l'une se présente naturellement, et l'autre qui, à l'examen, acquiert plus de probabilité, nous n'avons que les phénomènes qui puissent nous déterminer. Voyons s'ils s'expliquent également bien dans les deux systèmes.

5. Soit C la terre au centre du monde (fig. 81), S le soleil, qui décrit autour d'elle une ellipse aST, ♈ le premier point de l'écliptique ou une étoile dans l'écliptique même; la terre verra le soleil S, qui lui paraîtra répondre au point E de l'écliptique; la longitude vraie et apparente sera l'angle ♈CE = ☉.

6. Supposons le soleil immobile en C, et la terre en T décrivant autour du soleil l'ellipse aST; la terre verra le soleil C sur le rayon TCSE répondre exactement au même point E de l'écliptique; mais la longitude apparente sera l'angle

$$\Upsilon TE = \Upsilon CE = T\Upsilon C = \odot - T\Upsilon C;$$

or

$$\text{tang}\,T\Upsilon C = \frac{TP}{\Upsilon P} = \frac{TC\sin C}{\Upsilon C + CP} = \frac{TC\sin C}{\Upsilon C + TC\sin C} = \frac{\frac{TC}{\Upsilon C}\sin\odot}{1+\frac{TC}{\Upsilon C}\cos\odot}$$

$$= \frac{\frac{V}{D}\sin\odot}{1+\left(\frac{V}{D}\right)\cos\odot}\,;\quad \text{et}$$

$$T\Upsilon C = \left(\frac{V}{D}\right)\frac{\sin\odot}{\sin 1''} - \left(\frac{V}{D}\right)^2\frac{\sin 2\odot}{\sin 2''} + \left(\frac{V}{D}\right)^3\frac{\sin 3\odot}{\sin 3''} - \text{etc.}$$

ainsi la longitude apparente sera

$$\Upsilon TE = \odot - \left(\frac{V}{D}\right)\frac{\sin\odot}{\sin 1''} + \left(\frac{V}{D}\right)^2\frac{\sin 2\odot}{\sin 2''} - \left(\frac{V}{D}\right)^3\frac{\sin 3\odot}{\sin 3''} + \text{etc.}$$

Dans la première moitié de l'écliptique, ΥTE sera plus petit que la longitude vraie, et dans la deuxième moitié, elle sera plus grande, parce que $\sin\odot$ aura changé de signe.

7. On n'a point remarqué cette inégalité annuelle dans la longitude du soleil; il faut donc, ou que la terre occupe le centre C, ou que le rapport $\left(\frac{V}{D}\right)$ du rayon vecteur V de la terre à la distance D de l'étoile soit une quantité si petite, que l'angle $\left(\frac{V}{D}\right)\frac{\sin\odot}{\sin 1''}$ échappe à l'observation. Il en résultera que l'ellipse entiere aST ne sera que comme un point en comparaison du cercle de l'écliptique, ou d'un grand cercle quelconque de la sphère étoilée Du reste, tout sera égal dans les deux hypothèses; en effet :

8. Que la terre soit en T au centre de l'équateur $\Upsilon Q\simeq$, et de l'écliptique $\Upsilon C\simeq$, et le soleil dans le point équinoxial Υ, nous verrons commencer le printems; si le soleil est au centre, pour avoir les mêmes apparences, il suffira de placer la terre en $\simeq$; nous verrons le soleil dans la ligne $\simeq S$ répondant au point équinoxial Υ, le printems commencera. Il n'y a aucune différence. Que le soleil paraisse en $\simeq$, la terre étant en T, pour voir le soleil S en $\simeq$, il suffira de mettre la terre en Υ, si le soleil occupe le centre.

Ce que nous disons des points équinoxiaux, nous le dirons des points solsticiaux; quand le soleil nous paraîtra occuper un de ces points, c'est que la terre occupera l'autre. Si le soleil paraît de 23° 28′ au-dessus de l'équateur, c'est que la terre sera de 23° 28′ au-dessous; il en sera de même pour un autre angle quelconque.

9. Ceci est pour le centre de la terre; voyons ce qui arrivera pour la surface.

Soit PEP′Q (fig. 83) le méridien céleste, P, P′ les deux pôles, ESQ l'équateur céleste. Pour que le soleil qui occupe le centre de la sphère, nous paraisse en L, 23° 28′ au-dessus de l'équateur, il faut que la terre soit au point opposé T, 23° 28′ au-dessous. Soit Tp l'axe de la terre parallèle à P′P; la distance polaire du soleil nous paraîtra pTS = 66° 32′ = 90° — 23° 28′; la distance de la terre, vue du soleil au pôle P, sera PST = 90° + 23° 28′ = 180° — pTS.

Six mois après, la terre sera en L; la distance polaire du soleil sera pLS = 90° + 23° 28′ = 180° — PSL.

Le point o de la terre verra le soleil à son zénit : et ce point est dans l'hémisphère austral, au lieu que dans le premier cas, o' était dans l'hémisphère boréal; ainsi les observations solsticiales sont expliquées aussi bien que les équinoxes; le soleil sera successivement à 90°—23° 28′ et 90°+ 23° 28′, on en pourrait conclure immédiatement qu'il doit avoir successivement toutes les distances intermédiaires. Mais soit T (fig. 84) la terre en un point quelconque de son orbite, la distance polaire sera pTS=180°—P′TS, et la déclinaison du soleil sera S′SV = EST. Le soleil nous paraîtra toujours avoir la déclinaison égale et contraire à celle qu'aurait la terre vue du soleil; les phénomènes des différentes saisons s'expliquent donc également bien dans les deux hypothèses; il suffit pour cela que dans son mouvement autour du soleil, l'axe de la terre soit toujours parallèle à l'axe céleste PSP′; et dans le fait, quelle serait la cause qui détruirait ce parallélisme, si la terre se meut dans un milieu non-résistant, dans un vide parfait?

10. La terre tournant en 24 heures autour de cet axe, présentera successivement ses deux hémisphères au soleil qui en éclairera toujours un, tandis que l'autre sera dans les ténèbres ; la nuit succédera régulièrement au jour : la terre tournant en 365 $\frac{1}{4}$ jours autour du soleil, nous verrons les saisons se succéder dans l'ordre qu'on observe effectivement.

11. Tout est à peu près égal jusqu'ici, ou s'il y a une différence, c'est que l'hypothèse du mouvement de la terre laisse en repos des milliards d'étoiles qui, sans ce mouvement, seraient obligées de circuler toutes en 24 heures autour de la terre avec des vîtesses qui étonnent l'imagination ; mais voilà une autre raison de préférence. Nous avons vu par les mouvemens des étoiles, que le pôle de l'équateur doit tourner en 26000 ans autour de l'écliptique ; ce mouvement est si lent, que le parallélisme de l'axe de la terre n'en est pas altéré sensiblement dans l'espace de quelques heures. Au lieu de supposer un parallélisme absolu, supposons que l'axe de la terre ait un mouvement conique autour d'un axe parallèle à l'axe de l'écliptique, et ce mouvement insensible expliquera tous les changemens observés dans les ascensions droites et les déclinaisons des étoiles. L'hypothèse du mouvement de la terre a donc à la fois l'exactitude et la simplicité que l'on peut desirer. Ajoutons que tous les phénomènes sont liés et découlent les uns des autres ; nous aurons dans la force attractive du soleil une raison très-suffisante du mouvement elliptique de la terre, et cette même force attractive expliquera le mouvement conique de l'axe qui résulte de la figure sphéroïdique que les observations donnent à la terre et des attractions combinées du soleil et de la lune sur le sphéroïde, ainsi que Newton l'avait indiqué, et que l'ont démontré des géomètres du 18e siècle ; au lieu que ces phénomènes sont isolés et inexplicables dans l'hypothèse du soleil autour de la terre.

12. Tout paraît donc prouver en faveur du système de Copernic et de quelques philosophes anciens qui plaçaient le soleil au centre du monde. Il ne faut pourtant pas dissimuler une objection qui revient à ce que nous avons vu (6) ; abstraction

faite du mouvement de précession, qui n'est que de 20″ dans la région du pôle, l'axe de la terre paraît, dans sa révolution annuelle, répondre toujours au même point du ciel; cependant il est certain que si la terre tourne autour du soleil, dans un cercle dont le rayon est de plus de 30 millions de lieues, le pôle de la terre, en décrivant ce cercle immense, devrait, au bout de 6 mois, répondre à un point du ciel éloigné de plus de 60 millions de lieues du point auquel il répondait d'abord.

Or, quelle apparence qu'un déplacement de plus de 60 millions de lieues soit insensible à nos yeux? Il faudrait en conclure que ce cercle annuel dont le rayon passe 30 millions de lieues, ne serait, pour ainsi dire, qu'un point mathématique, en comparaison du diamètre de la sphère céleste (7).

13. Soit TRE (fig. 85) le cercle que la terre décrit autour du soleil, l'axe prolongé Tp ira marquer dans le ciel le point où répond le pôle : six mois après, la terre sera en E, l'axe prolongé aboutira en p'; il faut donc que l'arc Pp' soit insensible, que l'angle TPE ne soit pas de deux secondes. Or TPE = 2SPT et

$$\text{tang SPT} = \frac{\text{TS}}{\text{SP}} = \frac{30 \text{ millions de lieues}}{\text{SP}} = \text{tang } 1'';$$

donc SP = 30 millions cot 1″ = 6188000 millions de lieues, en supposant TS = 30 millions de lieues et la parallaxe des étoiles de 1″. Ainsi l'étoile qui n'aurait qu'une seconde de parallaxe, serait à plus de *six millions de millions de lieues* de la terre.

14. Cette conséquence nécessaire a révolté d'abord le plus grand nombre des astronomes, mais ils se sont familiarisés peu à peu à cette idée qui n'avait contre elle que sa nouveauté.

Il est certain que la terre n'est qu'un point imperceptible en comparaison de la distance des étoiles; les anciens et Ptolémée lui-même sont convenus de cette vérité. Il est prouvé par des observations certaines, que la parallaxe du soleil n'est pas de 9″; le rayon du globe terrestre est donc à la distance du soleil, environ comme le sinus de 9″ est au rayon, ou comme 1 : 23000 environ. On était accoutumé à regarder la terre comme un point

en comparaison de la distance des étoiles, on regardera comme un point une ligne 23,000 fois plus grande.

15. Au reste, personne aujourd'hui n'attache la moindre importance à cette objection qui paraissait si forte; on a été conduit par degrés à recevoir cette conséquence. Un examen approfondi des phénomènes nous fera voir que toutes les planètes ont le soleil pour centre de leurs mouvemens; que les distances des planètes supérieures, à commencer de mars, sont 1,52; 5,2; 9,6 et 19,9, en prenant pour unité la distance de la terre; que la parallaxe du soleil n'étant pas de 9", sa distance à la terre est d'environ 34000.000 de lieues; qu'Uranus étant 20 fois plus éloigné, est à une distance de 680,000,000. Entre Uranus, qui est la planète la plus éloignée de notre système solaire, et les étoiles qui semblent étrangères à ce système, il doit y avoir encore une distance considérable. Ainsi l'univers s'est prodigieusement agrandi pour nous, et l'on peut, au gré de son imagination, en étendre indéfiniment les bornes.

16. On fit encore à Copernic d'autres objections, on prétendit que son système était manifestement contraire à l'Écriture, qui paraît indiquer en plusieurs endroits que la terre est stable et le soleil en mouvement; on citait le passage où il est dit que Josué ordonna au soleil de s'arrêter; mais on a répondu que Josué n'était pas obligé d'en savoir davantage, qu'il s'était exprimé commme font encore les Coperniciens, c'est-à-dire tous les astronomes, quand ils disent, le soleil se lève et se couche. Il en est de même de tous les autres passages, et il n'en est aucun que l'on puisse opposer aux conséquences nécessaires de l'observation et du calcul.

17. Un autre genre d'objection se tirait d'expériences qu'on interprétait mal : si du haut d'une tour vous laissez tomber un corps pesant, il suivra, dans sa chute, une direction parallèle au mur, et le fait est vrai : or, disait-on, si la terre tourne d'occident en orient, pendant les quatre ou cinq secondes que la pierre emploie à tomber, le pied de la tour aurait dû s'éloigner de plusieurs mètres, et la pierre tomber à plusieurs mètres du pied de la tour, si on l'a laissé tomber

au sud, au nord ou à l'occident, et elle doit être frappée par le mur si elle est tombée à l'orient.

18. On ajoutait maladroitement que si on laissait tomber un boulet du haut d'un mât quand le navire est en mouvement, il n'arriverait pas au pied du mât; on invoquait une expérience qu'on n'avait pas faite, et qui depuis a été répétée nombre de fois. Toujours on a vu le corps pesant tomber au pied du mât, comme si le vaisseau eût été en repos. L'explication que l'on donnera pour le vaisseau servira de même pour la terre : cette explication n'est pas difficile.

La pierre placée au haut de la tour participe comme la tour au mouvement de la terre; ce mouvement acquis, elle le conserve tant qu'il ne sera pas détruit par une cause quelconque. La pierre, en tombant, est animée de deux forces, l'une qui la fait persister dans le mouvement qu'elle a reçu, l'autre qui la fait approcher de la terre; elle doit donc avancer comme la tour, d'occident en orient, pendant tout le tems de sa chute, et elle doit tomber au pied de la tour.

19. Après avoir ainsi pleinement satisfait à l'objection, on a voulu tirer de cette expérience même une preuve du mouvement de la terre, et l'on a dit : la pierre, au haut de la tour, décrit un cercle plus grand que celui qui est décrit par le pied de la tour; elle le décrit en un tems égal; elle a donc plus de vîtesse que le pied de la tour, elle doit donc tomber un peu plus à l'orient; et comme on connaît aujourd'hui les dimensions de la terre et son mouvement diurne, on peut calculer de combien la pierre doit s'écarter de la tour vers l'orient. La conséquence est juste, mais cet écart ne peut être que de quelques millimètres.

Suspendez au haut de la tour un fil chargé d'un poids; après quelques oscillations, il s'arrêtera en un point qui sera le pied de la perpendiculaire. Marquez ce point, remontez le poids, et laissez-le tomber librement de ce même point de suspension : s'il tombe à l'orient du point marqué, la terre tourne; s'il tombe sur ce même point, la terre est en repos. Cette expérience a été tentée à Bologne, par M. Guglielmini; en Alle-

magne, par M. de Benzenberg; en Hollande, par MM. Breda et Heyneberger. Le résultat le plus constant a été favorable à l'idée du mouvement de la terre; mais l'expérience a donné des variations comparables à la quantité absolue qui était à déterminer, et qui, suivant le calcul de M. Laplace, ne devait être que de $3^{li},09$, ou $0^{mét.},087$ dans le vide; elle doit varier suivant la hauteur du pôle dans le lieu de l'expérience.

20. Ces variations ont prouvé combien cette épreuve est délicate et difficile : la moindre agitation dans l'air peut aisément produire une déviation supérieure à l'effet cherché; et la chûte des corps est tellement rapide, qu'il est fort difficile de trouver des hauteurs assez considerables pour que l'effet soit sensible, et qu'il ne soit pas troublé par l'agitation de l'atmosphère. La manière dont on laisse tomber le poids peut lui donner une direction un peu oblique : on a essayé divers procédés, on a brûlé le fil de suspension, au lieu de le couper, mais aucun moyen n'a donné de résultats véritablement uniformes. On songe à répéter l'expérience, mais elle présente des difficultés peut-être insurmontables.

21. Le tems de la rotation de la terre est à fort peu près l'intervalle de deux passages de la même étoile au méridien, c'est-à-dire de 24^h sidérales, ou $23^h\ 56'\ 4''$ de tems solaire moyen. Nous verrons au chapitre de la grandeur et de la figure de la terre, que la circonférence de l'équateur terrestre est de 40059950 mèt. Divisez ce nombre par $23^h\ 56'\ 4''$, ou $86164''$, vous aurez pour le mouvement d'un point de l'équateur en une seconde de tems moyen, $464^m,93$; et pour un lieu dont la hauteur du pôle est H, ce mouvement en $1''$ sera $464^m,93 \cos H$; pour Paris, il sera 306^m.

Si ce mouvement paraît considérable, quel serait donc celui d'une étoile placée dans l'équateur? Dans tous les systèmes possibles, la parallaxe horizontale des étoiles est insensible. Ptolémée lui-même convient qu'il ne lui paraît pas décidé que le soleil ait une parallaxe. Supposons $1''$, l'étoile aurait en une seconde de tems un mouvement de 95,898,000 mètres, ou 96 millions de mètres; le mouvement du soleil en une seconde

serait

serait de plus de dix millions de mètres, et le volume du soleil est plus d'un million de fois celui de la terre.

22. La parallaxe du soleil étant de $8'',7$, r le rayon du globe terrestre, π la circonférence dont le rayon est $1''$, E la circonférence de l'équateur, $E = 2r\pi$.

La circonférence du grand cercle que le soleil décrirait autour de la terre, serait $\frac{E}{\sin 8'',7}$; il décrirait ce cercle en $365^j,2564$ environ, le mouvement du soleil autour de la terre en $1''$ de tems, serait

$$\frac{E}{365,2564 \times 86400 \times 8'',7 \sin 1''} = 30095^m,94.$$

Quelque grand que puisse paraître ce mouvement de révolution annuelle, il est bien peu de chose en comparaison du mouvement diurne qu'il faudrait attribuer au soleil, si la terre ne tournait pas sur son axe. Nous voilà donc comme forcés à admettre la rotation de la terre en 24 heures autour de son axe; nous pouvons de même la charger du mouvement de révolution de 30096 mètres par seconde, pour l'épargner au soleil qui est plus d'un million de fois aussi gros.

23. Ce mouvement si rapide de la terre a de quoi effrayer l'imagination, mais nous avons la preuve qu'il existe des mouvemens plus rapides. Nous verrons que la planète Vénus est presque aussi grosse que la terre, sa vîtesse angulaire sera $\frac{v}{a^{\frac{3}{2}}}$, v étant celle de la terre, et a le demi-grand axe de l'ellipse décrite par Vénus; l'arc décrit par Vénus en $1''$ sera

$$\frac{av}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{30095.94}{(0.72333)^{\frac{1}{2}}} = 35476 \text{ mètres.}$$

24. Appliquons la même formule à toutes les planètes, en supposant leurs demi-grands axes et leurs révolutions que nous déterminerons par la suite; nous aurons pour leurs vîtesses en $1''$ de tems moyen, les quantités contenues dans le tableau

suivant. Pour la lune, la formule est

$$\frac{E}{\text{mois lunaire} \sin \text{parall.}} = \frac{E}{2360585'' \sin 57'} = 1023^{m},5.$$

Mouvement moyen de révolution des planètes en 1″ de tems solaire moyen.

Planètes.	Noms.	Mètres.	Toises.
☿	Mercure.	48384	24825
♀	Vénus.	35476	18201
♁	la Terre.	30096	15441
♂	Mars.	24387	12512
⚳, ⚴, ⚵, ⚶	Cérès, Junon, Pallas et Vesta.	18669	9583
♃	Jupiter.	13198	6772
♄	Saturne.	9745	5000
♅	Uranus.	6882	3531
☾	la Lune.	1024	526

LEÇON XII.

Différentes espèces de tems et de jours; retours au méridien; levers et couchers des planètes.

1. AVANT de quitter le soleil, expliquons ce qu'on entend par le tems solaire vrai et moyen.

Nos premières observations étant faites sur les étoiles dont les retours au méridien se font plus régulièrement, nous avons

réglé nos horloges sur les étoiles pour avoir une mesure uniforme et constante du tems.

Nous avons ensuite reconnu dans les étoiles un mouvement de précession dont la valeur moyenne est de 46″ ou 3″,0666 de tems en une année. En tenant compte de ce déplacement apparent des étoiles qui est si peu sensible, nous avons réglé nos horloges sur le passage du point équinoxial au méridien.

2. Ce tems devrait s'appeler équinoxial; mais pour éviter une équivoque plus importante, nous lui avons conservé le nom de tems sidéral.

Mais nous avons remarqué tout aussitôt, que le soleil ne revient pas au méridien, comme l'équinoxe, en 24^h siderales, ce qui provient de ce que le soleil s'éloigne ou paraît s'éloigner continuellement de l'équinoxe, d'une quantité de 59′ 8″,33 chaque jour; ainsi, pour les usages civils, on a eu raison de régler les horloges communes sur les retours du soleil au méridien. Les 24^h solaires ne répondent pas, comme les 24 heures sidérales, à un mouvement de 360° de la sphère, mais bien à un mouvement de 360° 59′ 8″,33.

On a trouvé ce nombre de 59′ 8″,33, en divisant les 360° de l'équateur par le nombre de jours 365^j, 5^h 48′ 51″, qui est à peu près le tems qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil par le même point équinoxial.

3. Dans le cours d'une année le soleil répond successivement à tous les points de l'équateur; si son mouvement rapporté à tous les points de l'équateur y était uniforme, il paraîtrait avancer tous les jours de 59′ 8″,33 : son passage retarderait chaque jour de $(\frac{1}{365})(59' 8'',33) = 3' 56'' 33'''32$ à l'horloge sidérale. Ces 3′ 56″ 33‴,32 de tems sidéral sont la différence en excès du jour moyen sur le jour sidéral.

En abaissant convenablement la lentille d'une horloge sidérale, on fera qu'au lieu de marquer 24^h 3′ 56″,5554, elle marquera 24 heures justes, et ces 24^h seront ce qu'on appelle heures solaires moyennes.

4. La durée de l'heure de tems moyen est à la durée de l'heure sidérale, comme 360° 59′ 8″,33 est à 360°, ou comme

$24^h\,3'\,56'',5552 : 2^h$, et l'on a l'équation

$$\frac{\text{durée de l'heure moyenne}}{\text{durée de l'heure sidérale}} = \frac{360°\,59'\,8'',33}{360.0.0} = \frac{24^h 3' 56'',5554}{24^h.0.0}$$
$$= \frac{86636,5554}{86400} = \frac{43318,2777}{43200} = \frac{14439,4259}{14400}$$
$$= 1.002737909722.$$

Ainsi la durée de l'heure moyenne $= (1,0027379722)$ heure sidérale, et la durée de l'heure sidérale

$$= \frac{\text{durée de l'heure moyenne}}{1.002737909722}.$$

5. Si nous appelons s une durée quelconque exprimée en tems sidéral, la même durée exprimée en tems moyen sera $m = \frac{s}{1.002737909722}$; elle sera donc exprimée par un nombre plus petit en tems moyen qu'en tems sidéral.

De l'équation $s = 1.002737909722$, on déduit

$$s - m = (1,0027379097)m - m = 0,0027379097\,m;$$

ainsi, quand on connaît m, on y ajoute $0,0027379097\,m$, et l'on a s. Ainsi, en supposant $m = 1^h$, on trouvera $9'',8568$ à ajouter pour avoir $s = 1^h\,0'\,9'',8568$.

6. Une heure sidérale vaut 15° du mouvement de la sphère céleste.

Une heure moyenne vaudra $15° + 2'\,27'',8526 = 15°\,2'\,27'',852$; c'est sur ce principe que l'on a calculé la table pour convertir en degrés les heures du tems moyen.

$1'$ de tems moyen vaut $15'\,02''\,27'',852 = 15'\,2'',4642$.

$1''$ de tems moyen vaut $15'',04107$ de degré.

Cette table est nécessaire aux astronomes qui règlent encore leurs horloges sur le tems solaire moyen, pour trouver les angles horaires des étoiles, ou les différences d'ascensions droites moyennes,

$$m = s(1 - 0,0027379097) + (0,002738)^2 - \text{etc.}$$
$$= s - 0,0027304355.$$

Soit $s = 1^h$ sidérale, $m = 1^h - 9'',82920$.

c'est sur cette formule qu'on a calculé la table pour réduire en heures moyennes les heures siderales, à raison de 9",82920 par heure, et de 3' 55",901 par 24^h.

7. Cette table est nécessaire aux astronomes qui règlent leur pendule sur le tems sidéral equinoxial. Quand ils ont observé le tems d'un phénomène, ils ne le connaissent qu'en tems sidéral; pour le connaître en tems moyen, ils calculent le lieu moyen du soleil rapporté à l'équinoxe apparent. Cette longitude moyenne, convertie à raison de 1^h pour 15°, est l'ascension droite moyenne du soleil, ou le tems sidéral au passage du lieu moyen du soleil par le méridien, ou enfin le tems sidéral à midi moyen : ce tems, retranché du tems sidéral de l'observation, leur donne un intervalle de tems sidéral qu'il faut convertir en tems moyen.

8. Supposons, par exemple, qu'on ait observé un phénomène quelconque, à 17^h 9' 23"5 de tems sidéral; que la longitude moyenne du soleil à midi moyen, par les tables, ait été de ..... 5ʃ29° 4' 7",0

Équation des points équinoxiaux.....	+ 13,0
Ascension droite moyenne ☉.....	5.29. 4.20
	11^h 56' 17"20'''
Tems sidéral à midi moyen.....	11.56.17,33
Tems sidéral du phénomène.....	17. 9.23,5
Intervalle de tems sidéral.....	5.13. 6,17
La table donne à retrancher pour 5^h...	— 49,15
13'...	— 2.13
6"...	— 0,02
Intervalle de tems moyen.....	5.12 14,87 :

c'est le tems moyen écoulé depuis le passage du soleil moyen au méridien ; c'est ce qu'on appelle *le tems moyen d'une observation*. Ainsi, nous supposons la marche du soleil uniforme sur l'équateur; et c'est le passage du point de l'equateur où il répondrait par son mouvement uniforme, qui détermine ce qu'on appelle *midi moyen;* et la distance a ce midi constitue le tems moyen, comme l'intervalle ecoulé depuis le midi vrai, constitue ce qu'on appelle *tems vrai*.

9. Le tems moyen diffère du tems vrai pour deux causes. La première est que le soleil n'avance pas tous les jours d'une même quantité sur l'écliptique ; la seconde est que cette variation inégale de longitude produit une variation plus inégale encore, quand elle est rapportée à l'équateur.

10. Supposons que le soleil se soit trouvé au point équinoxial à midi juste, ce qui arrive nécessairement chaque année pour l'un des méridiens de la terre. Quelque tems après, quand le soleil sera revenu à ce même méridien, il sera éloigné du point équinoxial d'un arc qu'on appelle *longitude vraie du soleil.*

Soit VA (fig. 86) le mouvement moyen du soleil pour le nombre de jours écoulés, VA sera la longitude moyenne $= M$: de M, retranchez le lieu du périgée, vous pourrez calculer l'équation du centre $E = AB$, et vous aurez

$$\text{longitude elliptique} = VA + AB = M + E.$$

Soit de plus $BC = P =$ somme des perturbations planétaires, la longitude vraie sera $VC = M + E + P$ comptée de l'equinoxe moyen ; mais l'équinoxe duquel on compte le tems sideral est l'equinoxe apparent $=$ équinoxe moyen $+ 18'' \sin N$, N étant le supplément du nœud de la lune ; ainsi

$$\text{longitude vraie} = M + E + P + 18 \sin N.$$

$$\text{Soit} \quad R = -\frac{\tang^2 \frac{1}{2}\omega \sin 2\odot}{\sin 1''} + \frac{\tang^4 \frac{1}{2}\omega \sin 4\odot}{\sin 2''} - \text{etc.}$$

R sera la réduction à l'équateur, et l'ascension droite du soleil vraie sera

$$M + E + P + R + 18'' \sin N.$$

Mais l'ascension droite moyenne croît tous les jours de $59' 8'',33$, comme la longitude moyenne ; ainsi elle serait toujours $= M$ égale à la longitude moyenne, si l'équation des points équinoxiaux était la même pour l'équateur que pour l'écliptique ; elle est seulement $18'' \cos\omega \sin N$. Ainsi l'asc. droite moyenne $= M + 18 \cos\omega \sin N$; ainsi ascension droite vraie — ascens. droite moyenne,

$$M + E + R + P + 18'' \sin N - M - 18'' \cos\omega \sin N, \quad \text{ou}$$

$$E + P + 18'' \sin N (1 - \cos\omega) = E + P + 18'' \sin N \, 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

$$= E + P + R + 36'' \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin N,$$

ce qui, en tems, fait

$$\frac{4}{60}(E + P + R) + 0'',09925 \sin N.$$

11. C'est la quantité dont le soleil vrai passe au méridien plus tard que le soleil moyen; c'est ce qu'il faut ajouter au midi moyen pour avoir le midi vrai, ou retrancher du midi vrai pour avoir le midi moyen: c'est ce qu'on appelle *équation du tems;* pour en calculer la table, on prend l'expression par parties.

Le terme $\frac{4}{60}(E)$ dépend de l'excentricité et de la position de l'apogée, et ces deux quantités sont variables; le terme $\frac{4}{60}(R)$ dépend de l'obliquité apparente de l'écliptique, qui est sujette à une diminution de 50″ environ par siècle, et d'une inégalité dont la période est 18 ans.

Les termes $\frac{4}{60}R$ et $0'',09925 \sin N$ dépendent d'argumens différens qu'il est impossible de ramener à une même expression; on est donc obligé de les calculer séparément; heureusement ils sont petits, P ne donne pas 3″, et N ne donne au plus que 0″,1. Quant aux deux autres, on peut les ramener à la longitude vraie ☉, puisque c'est l'argument naturel de R et que nous avons une formule de l'équation... $E = 2e \sin(☉ - ☊) +$ etc. Ainsi en donnant à ☊ une valeur, on fera une table de $\frac{4}{60}(E+R)$ qui ne dépendra que de la longitude vraie du soleil.

12. On ramènerait la formule à l'argument M, en mettant pour ☉ sa valeur $M + 2E \sin(M - ☊) +$ etc. Il est vrai que la valeur de ☊ change de 62″ par an; mais il est facile d'ajouter un terme qui exprime l'effet de ce changement.

C'est ainsi que j'ai fait, pour différens usages, des tables de l'équation du centre, dépendant de M, de $(M - ☊)$, et que d'autres astronomes en ont fait pour la longitude vraie; mais toutes ces tables, qu'on appelle *composées*, ne peuvent servir long-tems; elles peuvent être en erreur de 14″ au bout de 100 ans; aussi j'ai cru indispensable d'ajouter à ma table une colonne où l'on trouve la variation séculaire.

13. Il arrive, la moitié du tems, que $(E + R)$ est une

quantité additive, et qu'elle est soustractive la moitié du tems, et comme elle peut aller à 16′, il arrive quelquefois que le soleil vrai passe au méridien plus tard que le soleil moyen, de 16′, et dans d'autre tems, que le soleil moyen passe 13′ 37″ plus tôt que le soleil vrai.

14. L'équation peut varier d'un jour à l'autre de 30″; ainsi la durée du jour vrai peut différer de 30″ de la durée du jour moyen; ces deux espèces de jour ne sont égales que quatre fois par an. Vers le 23 mars, le jour vrai est plus court de 18″,6; c'est la plus grande différence en moins : vers le 15 mai, les jours sont égaux; ensuite les jours vrais sont plus longs, et l'excès va jusqu'à 13″ vers le 23 juin; cet excès est nul et les jours redeviennent égaux vers le 27 juillet; les jours vrais deviennent alors plus courts et la différence est de 21″ le 17 septembre; il y a de nouveau égalité le 3 novembre, alors les jours vrais commencent à être plus longs, et l'excès va jusqu'à 30″ vers le 23 décembre; il va ensuite en diminuant jusqu'au 12 février. Mais il y a compensation parfaite au bout de l'année, et les $365^j \frac{1}{4}$ moyens sont égaux aux $365^j \frac{1}{4}$ vrais, abstraction faite cependant des équations planétaires et des petites variations séculaires.

15. Le tems vrai est trop inégal pour servir de mesure aux astronomes, il est suffisant pour les usages civils. Les horloges ne peuvent marquer que le tems sidéral ou moyen, parce que ces deux tems sont uniformes; elles ne peuvent marquer le tems vrai que par des constructions particulières qui ne sont jamais d'une exactitude rigoureuse. Ainsi tous les astronomes règlent leurs horloges sur le tems sidéral, quand ils ont un observatoire fixe, et sur le tems solaire moyen, quand ils sont en voyage.

16. Le tems vrai ne sert qu'à trouver le tems moyen ou sidéral.

Si l'on observe le passage du soleil au méridien, à une pendule sidérale dont la marche soit bien connue d'ailleurs, on a par là même l'ascension droite du soleil; si la marche de l'horloge est inconnue, on compare le tems de l'observation

du soleil à l'ascension vraie calculée ou prise dans une Éphéméride, la différence est la correction de la pendule. On calcule en même tems l'équation du tems ou l'ascension droite moyenne du soleil, et l'on a la différence des heures de la pendule au tems moyen, pour l'instant du midi vrai.

17. Si l'observation du passage du soleil vrai au méridien a été faite à une horloge du tems moyen, on compare le tems de la pendule à l'ascension droite moyenne du soleil en tems; la différence est l'erreur de la pendule à l'instant du midi vrai, et si l'on fait la même comparaison plusieurs jours de suite, on a l'erreur pour un tems donné et le progrès diurne de l'erreur; on est en état d'assigner le tems moyen d'une observation quelconque.

18. Si l'on a observé la distance du soleil au zénit, avec la hauteur du pôle, la déclinaison du soleil et la distance, on calcule l'angle horaire vrai, on prend dans une Éphéméride l'équation du tems pour le moment, et l'on a le tems moyen de l'observation, et par conséquent l'erreur actuelle de l'horloge; plusieurs comparaisons pareilles donnent les progrès de l'erreur, et l'on connaît la marche de son horloge.

Le tems moyen, multiplié par $\frac{60}{4}$, donne l'angle horaire moyen; cet angle, ajouté à l'ascension droite du soleil, calculée pour ce tems, donne l'ascension droite du milieu du ciel, ou le tems sidéral.

Ainsi le tems vrai ne sert aux astronomes que pour calculer le tems moyen ou le tems sidéral.

Retours au méridien.

19. Les étoiles qui sont fixes, au moins sensiblement, reviennent au méridien en 24 heures sidérales; mais les planètes ont en 24 heures sidérales un mouvement m qui augmente leur ascension droite et les fait arriver plus tard au méridien. Ainsi supposons qu'une planète et une étoile aient passé aujourd'hui au méridien en même tems, quand l'étoile

sera revenue au méridien et aura paru accomplir ses 360° de révolution diurne, la planète ne paraîtra avoir fait que $360° - m$, et nous dirons

$$360° - m : 360° :: 24^h \text{ sidérales} : \frac{24^h . 360°}{360° - m} = \text{tems}$$

de la révolution de la planète, ou intervalle de ses retours au méridien $= T$; donc

$$T = 24^h \text{ sid.} \left(\frac{1}{1 - \frac{m}{360°}} \right) = \left(\frac{24^h}{1 - \frac{m}{1296000''}} \right)$$

si m est donné en secondes.

20. Dans l'analogie ci-dessus, au lieu de la révolution entière 360° mettons $P = n.360°$, nous aurons $t = nT$, tems qui répond à cet angle, et

$$t = \frac{\frac{P}{360°} . 24^h}{1 - \frac{m}{360°}} = \frac{n . 24^h}{1 - \frac{m}{1296000''}}.$$

Ainsi le jour planétaire ou le jour d'une planète quelconque sera

$$\frac{24^h}{1 - \frac{m}{1296000''}},$$

et réciproquement,

$$360° - m = \frac{360° . 24^h}{T}, \quad m = \frac{360°}{T} (T - 24^h);$$

ainsi pour le soleil on a trouvé $T = 24^h\ 3'\ 56'',5554$, d'où $m = 58'\ 58'',642$; c'est le mouvement moyen du soleil le long de l'équateur en 24 heures sidérales. Au lieu de diviser l'équateur en 360°, divisez-le en 24 heures, le mouvement sera $3'\ 55'',9093$; nous avons déjà vu que cette quantité sert à construire la table de réduction du tems sidéral au tems moyen.

21. Cette table sert à trouver le tems moyen du passage d'une étoile au méridien.

Cherchez l'ascension droite de l'étoile pour le jour en question; corrigez-la de l'aberration et de la nutation dont nous parlerons dans deux chapitres particuliers; ces deux corrections ont été long-tems inconnues; l'ascension droite vraie sera le tems sidéral du passage de l'étoile.

Calculez l'ascension droite moyenne du soleil pour midi moyen, retranchez-la de l'ascension droite de l'étoile, le reste sera le tems sidéral qui doit s'écouler depuis le midi moyen jusqu'au passage demandé; pour réduire cet intervalle de tems sidéral en tems moyen, faites-y des corrections pareilles à celles de l'article 8, le reste sera le tems moyen du passage. Au tems moyen ajoutez l'équation du tems, la somme sera le tems vrai du passage.

22. Pour trouver le tems sidéral du passage d'une planète au méridien, il suffit de calculer l'ascension droite de la planète en tems pour le midi moyen, et d'y ajouter le mouvement propre pour l'intervalle qui doit s'écouler entre midi et le tems du passage sidéral.

23. Mais supposons qu'on demande le passage en tems vrai, et soit S le mouvement du soleil en 24^h solaires vraies; en imitant ce que nous avons fait pour le tems moyen, nous dirons

$$360^\circ : 360^\circ + S :: 24^h \text{ sidérales} : 24^h \text{ solaires vraies},$$

ou

$$\frac{360^\circ + S}{360^\circ} = \frac{24^h \text{ solaires}}{24^h \text{ sidérales}} = 1 + \frac{S}{360^\circ} = 1 + \frac{S}{1296000''},$$

$$24^h \text{ solaires} = 24^h \text{ sidérales} \left(1 + \frac{S}{1296000''}\right);$$

l'intervalle sidéral entre deux passages de la planète au méridien est

$$T = \frac{24^h}{1 - \frac{m}{360^\circ}},$$

l'intervalle T′ en tems solaire vrai sera

$$T' = \frac{24^h \cdot \left(1 + \frac{S}{1296000''}\right)}{1 - \frac{m}{1296000''}},$$

mais m est le mouvement pour 24 heures sidérales; les Éphémérides donnent le mouvement m' pour 24 heures solaires;

$$\frac{m'}{m} = \frac{360° + S}{360°} = 1 + \frac{S}{1296000''},$$

et

$$m = \frac{360°\, m'}{360° + S};$$

portons cette valeur dans l'équation ci-dessus,

$$T' = \frac{24^h\left(1 + \frac{S}{1296000''}\right)}{1 - \frac{m'}{1296000''} \cdot \frac{360°}{360° + S}} = \frac{24^h\left(1 + \frac{S}{1296000''}\right)}{1 - \frac{m'}{1296000''} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S}{1296000''}}}$$

$$= \frac{24^h}{1 + \frac{S}{1296000''} - \frac{m'}{1296000''}} = \frac{24^h}{1 + \frac{S - m'}{1296000''}}.$$

24. Telle sera la durée du jour planétaire en tems solaire vrai. Soit P l'angle horaire de la planète; cet angle en tems solaire sera

$$\frac{\frac{P}{360°} \cdot 24^h}{1 + \frac{S - m}{1296000''}} = \frac{\frac{1}{15} P}{1 + \frac{S - m}{1296000''}} = \frac{\frac{1}{15} P}{1 - \frac{m - S}{1296000''}}; \text{ si } m > S,$$

$$= \tfrac{4}{60} P \left[1 + \frac{m - S}{1296000''} + \left(\frac{m - S}{1296000''}\right)^2 + \left(\frac{m - S}{1296000''}\right)^3 + \text{etc.} \right]$$

Cherchez l'angle horaire P de la planète à midi vrai, et cette formule vous donnera le tems vrai solaire du passage de la planète. L'angle horaire à midi sera la différence vraie

d'ascension droite à midi entre le soleil et la planète. Soit $\text{Æ}'$ l'ascension droite de la planète à midi, Æ celle du soleil, $\text{Æ}' - \text{Æ} = \text{P}$, tems solaire vrai du passage $= \dfrac{\frac{4}{60}(\text{Æ}' - \text{Æ})}{1 - \dfrac{m' - \text{S}}{1296000''}}$.

Si m et S sont donnés en tems, le tems solaire vrai du passage $= \dfrac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 - \dfrac{m' - \text{S}}{86400''}} = \dfrac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 - \dfrac{d\text{Æ}' - d\text{Æ}}{86400''}}$; il faut donc connaître les deux ascensions droites et leurs variations en 24 heures de tems solaire vrai.

25. Si la planète est rétrograde m est négatif;

$$\text{passage} = \frac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 - \dfrac{-m' - \text{S}}{86400''}} = \frac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 + \dfrac{m' + \text{S}}{86400''}}.$$

Si $m = 0$, la planète sera stationnaire, la formule se réduit à $\dfrac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 + \dfrac{\text{S}}{86400''}}$, et elle sert de même pour les étoiles, puisqu'elles n'ont pas de mouvement sensible en ascension droite en 24 heures.

Si S est le mouvement moyen du ☉ en un jour moyen, et m' le mouvement de la planète dans ce même tems, mettons M au lieu de S,

$$\text{T} = \frac{\text{Æ}' - \text{Æ} = \text{P}}{1 - \dfrac{m' - \text{M}}{1296000''}} = \frac{24^h.\text{P}}{24^h.(m' - \text{M})}.$$

26. Pour la lune on trouve $\left(\dfrac{m' - \text{S}}{86400}\right)$ en minutes et secondes, au moyen des Éphémérides, où l'on a tous les jours pour midi l'ascension droite de la lune en degrés; on prend $\frac{4}{60}$ de cette ascension droite, on en retranche l'ascension droite du soleil en tems; on a $m' - \text{S}$,

$$\text{et le passage} = \frac{\text{Æ}' - \text{Æ}}{1 - \frac{m' - S}{86400''}} = \frac{24^h(\text{Æ}' - \text{Æ})}{24^h - (m' - S)}.$$

27. En général, pour la conversion des degrés en tems, ou réciproquement, si 24 heures répondent à 360° du mouvement de la sphère,

$$T = \frac{24^h . P}{360°}, \quad \text{et} \quad P = \frac{360°}{24^h} . T;$$

si 24 heures répondent à $360° + x$ du mouvement de la sphère,

$$T = \frac{24^h . P}{360° + x}, \quad \text{et} \quad P = \frac{T}{24^h}(360° + x).$$

Si pendant ces 24 heures l'astre a un mouvement $-m$, c'est-à-dire contraire au mouvement de révolution diurne,

$$T = \left(\frac{24^h . P}{360° + x}\right)\left(\frac{360° + x}{360° + x - m}\right) = \frac{24^h . P}{360° + x - m},$$

et

$$P = \frac{T}{24^h}(360° + x - m);$$

si ce mouvement est dans le même sens que le mouvement diurne,

$$T = \frac{24^h . P}{360° + x + m}, \quad \text{et} \quad P = \frac{T}{24^h}(360° + x + m);$$

enfin si la pendule, au lieu de marquer les 24 heures qu'elle doit marquer, donnait $24^h + y$,

$$T = \frac{(24^h + y)P}{360° + x \pm m}, \quad \text{et} \quad P = \left(\frac{T}{24^h + y}\right)(360° + x \pm m),$$

et cette équation renferme toute la théorie de la conversion des degrés en tems.

Levers et couchers des planètes.

28. Les passages au méridien n'intéressent que les astronomes, mais ils sont nécessaires pour calculer les levers et les couchers, qui intéressent plus particulièrement le public.

Quand on a le passage au méridien et la déclinaison de l'astre, on calcule son angle horaire semi-diurne par la formule

$$\cos \text{angle semi-diurne} = \frac{\sin R}{\cos D \cos H} - \operatorname{tang} D \operatorname{tang} H \quad (V[illegible]).$$

Cet angle, converti en tems par l'une des formules précédentes, donne la demi-durée du jour de l'astre; cette demi-durée, ajoutée ou retranchée du passage, donne le coucher ou le lever de l'astre, si la déclinaison n'a pas varié dans l'intervalle; si elle a changé, on a du moins une approximation; pour cette demi-durée approchée, on cherche le mouvement en déclinaison, qu'on retranche pour le lever et qu'on ajoute pour le coucher; ensuite on recommence le calcul de la demi-durée du jour. Si la différence des deux calculs est considérable, on regarde le second comme une approximation et l'on recommence; mais comme les demi-durées moyennes sont de 6 heures, avant de calculer la demi-durée, on ajoutera et l'on retranchera de la déclinaison au méridien le mouvement pour 6 heures, et l'on aura une demi-durée moins inexacte, avec laquelle il suffira d'une seconde approximation.

29. Si l'ascension droite va croissant, ce qui est le plus ordinaire, le passage au méridien retardera tous les jours; le lever et le coucher retarderaient de la même quantité, si la sphère était droite ou la déclinaison constante; le changement de déclinaison, s'il se fait vers le pôle élevé, accélère le lever et retarde le coucher; c'est le contraire s'il se dirige vers le pôle abaissé. L'effet du changement en ascension droite, et celui du changement en déclinaison, peuvent se compenser en partie ou s'ajouter l'un à l'autre, suivant les

cas; on a remarqué qu'ils se détruisent par fois pour la lune, qui se lève plusieurs jours de suite à la même heure sensiblement, ce qui arrive surtout quand la pleine lune arrive dans le point équinoxial du printems; le soleil est alors dans l'équinoxe d'automne. Le phénomène a lieu le 22 septembre; c'est le tems des moissons en Angleterre, où l'on désigne ce phénomène sous le nom d'*Harvest-moon*, *lune des moissons*. Voyez mon Traité d'Astronomie, chap. XXIII.

LEÇON XIII.

Construction des tables du soleil, détermination plus exacte de l'équinoxe et de l'obliquité de l'écliptique.

1. QUAND on a observé un équinoxe, on sait à quel instant le soleil avait o de longitude, on a l'anomalie vraie du soleil = (o^s — longit. périgée), on calcule l'équation du centre, on a la longitude moyenne; on en retranche le mouvement moyen pour le tems écoulé depuis le commencement de l'année, on a ce qu'on appelle l'*époque*, c'est-à-dire la longitude moyenne pour le midi du premier jour d'une année donnée. A cette époque ajoutez les mouvemens pour 365 jours trois fois de suite, et la quatrième fois pour 366 jours, vous aurez les époques suivantes pour autant d'années que vous voudrez.

Faites la même opération pour le périgée et pour tous les argumens de perturbation, vous aurez *la table des époques*. Le mot ἐποχὴ signifie proprement le lieu d'un astre pour un instant donné.

2. Calculez pour tous les jours des douze mois de l'année, les mouvemens moyens de la longitude, du périgée et des argumens de perturbation, en ajoutant 366 fois de suite les

mouvemens

mouvemens diurnes, vous aurez la table du mouvement pour les mois et les jours.

Faites une table pareille pour les heures, les minutes et les secondes de tems moyen.

Faites ensuite une table de l'équation du centre pour toutes les anomalies moyennes de 10 en 10′ de degré, avec les différences et la variation séculaire.

Ajoutez-y des tables de toutes les perturbations, une table des logarithmes du rayon vecteur et de ses perturbations, des tables des mouvemens horaires des demi-diamètres en degrés et en tems, une table de l'équation du tems avec sa variation séculaire, enfin une table de l'obliquité de l'écliptique pour toutes les années depuis la fondation de l'Astronomie; vous aurez *des tables du soleil* propres à vous donner en tout tems le lieu vrai du soleil dans l'écliptique, et la quantité fort petite dont les perturbations peuvent l'écarter de ce grand cercle.

3. Pour trouver le demi-diamètre du soleil en tems, c'est-à-dire le tems qu'il emploie à traverser le méridien, soit δ le demi-diamètre en degrés, l'angle horaire du centre quand le bord est au méridien, sera

$$\frac{\delta}{\cos \text{déclinaison}} = \frac{\delta}{\cos D},$$

et le tems du passage en tems solaire vrai sera

$$\frac{\delta}{15 \cos D}.$$

Pour l'avoir en tems moyen, on multipliera cette expression par le rapport $\frac{24 \text{ heures solaires moyennes}}{24 \text{ heures solaires vraies}}$; mais la différence qui peut résulter de cette multiplication ne va pas à $\frac{1}{40}$ de seconde; les astronomes la négligent. Pour l'avoir en tems sidéral, on doit multiplier $\frac{\delta}{15 \cos D}$ par le rapport com-

posé $\frac{24^h \text{ moyennes}}{24^h \text{ vraies}} \cdot \frac{24^h \text{ vraies}}{24^h \text{ sidérales}} = \frac{24^h \text{ moyennes}}{24^h \text{ sidérales}}$; on aura

$$\frac{\delta}{15 \cos D}(1 + 0.0027379).$$

Soit t le tems vrai ou moyen; j'ai trouvé

$$t = 66'',904 - 1'',525 \sin \odot + 0'',02385 \sin 3\odot$$
$$+ 0'',1812 \cos \odot - 2'',8802 \cos 2\odot - 0'',3343 \cos 3\odot$$
$$+ 0'',0716 \cos 4\odot.$$

Soit t' le tems sidéral; j'ai trouvé

$$t' = 67'',0876 - 1'',1356 \sin \odot + 0'',02391 \sin 3\odot$$
$$+ 0'',1817 \cos \odot - 2'',881 \cos 2\odot - 0'',03392 \cos 3\odot$$
$$+ 0'',0718 \cos 4\odot.$$

4. Plusieurs astronomes ont ajouté à leurs tables les tables de la réduction de l'écliptique à l'équateur. Nous en avons donné la formule (X. 5). La même table suffit pour réduire l'équateur à l'écliptique; il suffit d'ajouter 90° à l'ascension droite donnée, et d'entrer dans la table avec cet argument.

On donne encore la table des déclinaisons de tous les points de l'écliptique, dont la formule est $\sin D = \sin \omega \sin \odot$; et la table des angles de l'écliptique avec le méridien, dont la formule est $\cot A = \tang \omega \cos \odot$.

Toutes ces tables exigent des colonnes de variation pour le changement $d\omega$ de l'obliquité.

La table de l'angle donnera les complémens des déclinaisons correspondantes à tous les points de l'équateur.

La table des déclinaisons donnera le complément de l'angle opposé à tous les arcs de l'équateur; il suffit, comme pour la réduction, d'ajouter 90° à l'ascension droite du point de l'équateur.

5. La variation de réduction est, pour $100'' = d\omega$,

$$- 21'',651 \sin 2\odot + 1'',8656 \sin 4\odot;$$

la variation de déclinaison,

$$-97'',80 \sin \odot + 2'',13 \sin 3\odot - 0'',066 \sin 5\odot.$$

6. En tête des tables du soleil on met une table des différences des méridiens en tems, pour tous les observatoires connus; cette différence est exprimée en degrés et en tems; par là on sait quelle est la constante qu'il faut ajouter aux époques, quand on veut faire servir les tables du soleil pour un autre méridien. Cette constante est le mouvement moyen pour la différence en tems des méridiens.

7. Enfin il est utile de joindre une table de la correction du midi pour les hauteurs correspondantes (IX. 37), en faveur des voyageurs.

8. L'obliquité de l'écliptique est un élément très-important; car il entre dans tous les calculs. Voici comme je l'ai déterminé. Chacun des dix ou douze jours qui précèdent ou suivent le solstice, je prenais au cercle de Borda environ 20 distances du soleil au zénit; j'en concluais la distance qui avait lieu à midi, et la déclinaison au même instant.

Soit u la distance du soleil au point solsticial, comptée sur l'écliptique et exprimée en dixaines de minutes, et D la déclinaison observée,

$$\omega = D + 0'',37484.19u^2 - 0'',00000.04181.662u^4 + 0'',00000.00000.00621.7635u^6 - \text{etc.}$$

Cette formule suffirait même en supposant $u = 90$, c'est-à-dire 15°.

La correction pour un changement de $-100''$ dans l'obliquité, sera $-0'',079577(\omega - D)$.

9. Les distances du soleil au zénit, observées auprès du méridien, sont plus grandes que les distances au moment de midi. Chacune des distances observées aura besoin d'une correction dont voici le calcul.

Soit N la distance observée, H la hauteur du pôle, D la déclinaison, P l'angle horaire vrai, M la distance méridienne :

$$\cos N = \sin H \sin D + \cos H \cos D \cos P$$
$$= \cos(H-D) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos H \cos D$$
$$= \cos M - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} P \cos H \cos D,$$
$$2\sin \tfrac{1}{2}(N-M)\sin \tfrac{1}{2}(N+M) = 2\cos H \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$
$$2\sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{2}(2M+x) = 2\cos H \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou

$$x = \frac{2\cos H \cos D \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin \frac{1}{2}(N+M)},$$

faites donc

$$x' = \frac{2\cos H \cos D \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin \frac{1}{2}(N+M)\sin 1''}$$
$$= \frac{2\cos H \sin D \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin M \sin 1''},$$

puis

$$x = \frac{2\cos H \cos D \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin(M+\frac{1}{2}x')\sin 1''},$$

ou bien

$$2\sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{2}(M+M+x) = 2\sin \tfrac{1}{2} x \sin(M+\tfrac{1}{2}x)$$
$$= 2\sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x \sin M + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} x \cos M = 2\cos H \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$
$$2\sin \tfrac{1}{2} x \cos \tfrac{1}{2} x + 2\sin \tfrac{1}{2} x \cot M = \left(\frac{2\cos H \cos D}{\sin M}\right) \sin^2 \tfrac{1}{2} P = 2b \sin^2 \tfrac{1}{2} P.$$

Soit, de plus, $\cot M = a$, nous aurons (IV. 72)

$$x = 2b - 2b^2 a + 4(\tfrac{1}{3} + a^2)\, b^3 - \text{etc.},$$
$$x = \frac{2b}{\sin 1''} \sin^2 \tfrac{1}{2} P - \frac{2b^2}{\sin 1''} \cot M \sin^4 \tfrac{1}{2} P + 4(\tfrac{1}{3} + \cot^2 M) b^3 \sin^6 \tfrac{1}{2} P.$$

Ce dernier terme est presque toujours insensible; le second même est déjà fort petit pour le soleil. On peut réduire cette formule en tables. (Voyez mon Astronomie, ch. XXIV.)

Si la série des distances au zénit est composée de 20 observations, on a l'heure de la pendule pour chaque observation; on connaît l'heure du passage au méridien, on en conclut l'angle horaire, qui sert à prendre dans la table les corrections dues à chaque distance; on fait la somme de ces corrections, on en prend le vingtième, s'il y a vingt observations, et l'on a la correction de la distance moyenne ob-

servée. On calcule aussi la réfraction et la parallaxe pour la distance moyenne non corrigée, pour la réduire à une distance vraie.

10. Le changement de déclinaison exige encore une correction qui est presqu'insensible dans les solstices; on ne pourrait la négliger dans les équinoxes.

Si la déclinaison va approchant l'astre du pôle élevé, les distances au zénit qui précéderont le passage seront plus grandes que si la déclinaison eût été constamment telle qu'à midi; celles qui suivront le passage seront plus faibles. Ces variations seront proportionnelles aux angles horaires. Ces variations de distance dN seraient $dD \cos A$, A étant l'angle au centre du soleil entre le vertical et le cercle de déclinaison : cet angle est toujours fort petit, ainsi la somme des dN sera égale à la somme des dD, le matin comme le soir, et elles seront de signe contraire, ainsi la correction serait $\frac{dD}{n}(E - O)$, dD étant le mouvement en déclinaison pour 1′, n le nombre des observations, E la somme des angles horaires à l'est, et O la somme des angles à l'ouest. Ces angles doivent être exprimés en minutes.

Nos distances à l'est sont plus grandes et nous donneraient une distance méridienne trop grande; les distances à l'ouest sont trop petites, elles donneraient une distance méridienne trop petite; la correction moyenne sera donc soustractive si dD est positif et $E > O$; elle sera donc

$$-\frac{dO}{n}(E - O) = +\frac{dD}{n}(O - E),$$

formule qui suppose que l'astre se rapproche du pôle élevé, ce qui a lieu depuis le solstice d'hiver jusqu'au solstice d'été; au contraire, de l'été à l'hiver, la correction change de signe avec dD.

Cette correction est surtout sensible quand on veut déterminer le moment de l'équinoxe et l'erreur des tables en longitude moyenne.

11. La manière d'observer l'équinoxe est la même qu'on emploie pour le solstice. Pendant l'espace de 20 à 25 jours on observe des distances zénitales avec le cercle répétiteur; on réduit ces distances à la distance méridienne, on en conclut la déclinaison pour chaque jour; on calcule la longitude $\sin \odot = \frac{\sin D}{\sin \omega}$; la déclinaison étant beaucoup plus petite que l'obliquité, quand on commettrait une petite erreur sur ω, il n'en résulterait aucune erreur sensible sur la longitude; en effet, différentiez la formule, vous aurez

$$d\odot = -\frac{d\omega \sin D \cot \omega}{\sin \omega \cos \odot} = -\frac{d\omega \cot \omega \sin \omega \sin \odot}{\sin \omega \cos \odot} = -d\omega \cot \omega \operatorname{tang} \odot,$$

or $\operatorname{tang} \odot$ est une petite fraction qui même change de signe au passage du soleil par l'équinoxe; ainsi les petites erreurs se détruisent presqu'entièrement.

On comparera cette longitude à celle des tables, dont on connaîtra ainsi les erreurs. On divisera la somme des erreurs par le nombre des observations, pour avoir l'erreur moyenne. Cette erreur moyenne ne peut être que celle de la longitude moyenne, car les équations sont bien connues. On aurait donc fort exactement la correction des époques de la longitude moyenne par l'observation d'un équinoxe, si l'on pouvait compter sur la hauteur du pôle et les réfractions.

12. Pour avoir la déclinaison on fait $D = H - N$, ainsi $dD = dH - dN$,

$$d\odot = \frac{dD \cos D}{\sin \omega \cos \odot} = \frac{(dH - dN) \cos D}{\sin \omega \cos \odot};$$

ainsi les longitudes auront une erreur qui viendra de l'erreur sur la hauteur du pôle, et une erreur qui viendra de dN, erreur sur les réfractions. Mais ces deux erreurs sont sensiblement égales et de signe contraire (V. 25); elles se réduiront donc à fort peu de chose, et les longitudes auront à fort peu près la même exactitude que les observations.

13. Pour diminuer l'incertitude, répétez les observations

à l'équinoxe suivant ; elles auront une erreur contraire, parce que $\cos\odot$ aura changé de signe; en prenant le milieu entre les deux résultats, vous ferez évanouir l'erreur $(dH - dN)$, qui sera revenue la même pour ce qui concerne la hauteur du pôle et les réfractions ; l'erreur dN, si elle venait du défaut de l'instrument, disparaîtrait de même ; mais si le résultat de 20 jours d'observations pouvait être en erreur de 1″, ce qui paraît bien difficile, et si cette erreur changeait de signe, par hasard, d'un équinoxe à l'autre, il resterait une erreur de 1″ sur la longitude moyenne qu'on aurait conclue des quarante jours d'observations.

Après tout, ce serait toujours le meilleur parti à suivre, et si les deux équinoxes donnent $d\odot$ et $d\odot'$ pour la correction des tables, on aurait

$$d\odot' - d\odot = \frac{(dH - dN)\cos D'}{\sin\omega\cos\odot'} - \frac{(dH - dN)\cos D}{\sin\omega\cos\odot}$$
$$= -\frac{2(dH - dN)\cos D}{\sin\omega\cos\odot},$$

et

$$(dH - dN) = \tfrac{1}{2}(d\odot' - d\odot)\frac{\sin\omega\cos\odot}{\cos D} = \tfrac{1}{2}(d\odot' - d\odot)\sin\omega,$$

à fort peu près.

Ayant ainsi comparé quatre équinoxes, deux de printems et deux d'automne, je n'ai pas trouvé $(dH - dN) = 0'',2$, d'où j'ai conclu que $dH - dN$ était insensible, ou que ma latitude et mes réfractions étaient également bonnes, ou avaient besoin d'une même correction, mais de signe différent.

14. Avec les longitudes corrigées on a des ascensions droites également bonnes, et ces ascensions droites, comparées à celles des étoiles observées les mêmes jours, feront connaître les corrections des ascensions droites calculées de ces étoiles, et ces étoiles corrigées serviront à corriger toutes les autres.

Deux époques moyennes du soleil ainsi corrigées à un grand intervalle, feront connaître le mouvement moyen du soleil pour le tems écoulé ; on en conclura facilement le mouvement séc.-

laire, par rapport à l'équinoxe mobile, et si l'on connaît bien le mouvement de précession, on aura le mouvement sidéral ; mais s'il reste une incertitude sur le mouvement séculaire de l'équinoxe, une erreur égale aura lieu sur le mouvement sidéral.

Différentes espèces d'années.

15. Pendant long-tems les astronomes ont cherché la longueur de l'année par la comparaison de deux équinoxes observés à une grande distance. Mais cette méthode exige une attention minutieuse, au mouvement de l'apogée, au changement de l'équation du centre et aux perturbations, qui ne seront jamais les mêmes pour les deux époques. Il est bien plus simple de déterminer la longueur de l'année par le mouvement moyen du soleil en cent années juliennes composées de 36525 jours.

En 36525 jours, le soleil décrit $1200^{s}\ 0^{h}\ 0^{\circ}\ 45'\ 45''$; plus anciennement j'avais trouvé $54''$. M. de Zach dit avoir trouvé $48''$; La Caille trouvait $54'',6$; Lalande, $46'\ 0$; Mayer, $46'\ 23''$; mais ces derniers résultats sont certainement trop forts.

Ainsi nous dirons

$$1200^{s}\ 0\ 0\ 45'\ 45'' : 1200^{s} :: 36525 : 36525 - x ;$$

d'où

$$1200^{s}\ 0\ 0\ 45'\ 45'' - 1200^{s} : 1200^{s}\ 0\ 0\ 45'\ 45'' :: x : 36525,$$

$$x = \frac{36525\,(45'\ 45'')}{1200^{s}\ 0\ 0\ 45'\ 45''} = \frac{36525 \times 2745''}{12960\,2745} = 0.77360340631 6 ;$$

cent années moyennes vaudront $36524^{j},2263965936 84$, et l'année $365^{j},242264$, ou $365^{j}\ 5^{h}\ 48'\ 51'',6$.

Chaque seconde de plus sur le mouvement séculaire diminuerait l'année de $0'',2433$ environ; j'estime qu'elle ne doit guères différer de $365^{j}\ 5^{h}\ 48'\ 50''$ ou $51''$.

16. Telle est l'année moyenne; mais l'année vraie sera tantôt plus longue, tantôt plus courte, par le changement des perturbations et par le mouvement de l'apogée et la diminution de l'excentricité.

La fraction de jour est assez incommode; dans le calen-

drier Julien, on supposait 365 4; on faisait trois années de 365 seulement, et la quatrième de 366; on commettait donc une erreur de 0.7736, ce qui fait 3.0944 jours en 400 ans; le calendrier grégorien retranche 3 jours en 400 ans, en faisant trois années séculaires de 365 jours, et la quatrième seulement de 366; on a donc en 400 ans une erreur de $0^j,0944$; en quatre mille ans l'erreur serait de 0.944: j'avais proposé de rendre communes toutes les années, de 4 en 4000 ans; l'erreur eût été de $0^j,066$, qu'on aurait corrigée de trois en trois fois 4000; on aurait eu l'erreur de 0,2, ou 2 jours pour 120000 ans, ou 1 jour pour 60000 ans; on aurait donc rétabli le jour intercalaire au bout de 60000 ans.

17. Nos tables sont réglées sur le calendrier grégorien; dans l'usage civil, l'année commence à minuit qui sépare le 31 décembre du 1er janvier; les astronomes commencent le jour et l'année 12 heures plus tard; c'est ce qui fait la différence du tems civil au tems astronomique.

Les tables ne peuvent être réglées que sur le tems moyen, qui est égal et uniforme; c'est ce qui a fait que les astronomes ont long-tems réglé leurs horloges sur le tems moyen, et qu'aujourd'hui même que le tems sidéral a justement prévalu dans les observatoires, on ramène ce tems au tems moyen pour les calculs planétaires.

18. L'année déterminée par les équinoxes s'appelle *tropique*, parce qu'anciennement on l'avait conclue du retour du soleil à un même tropique.

L'équinoxe rétrogradant de 50″,1 par an, le soleil n'a réellement que 359° 59′ 9″,9 à parcourir pour rencontrer le point équinoxial, l'année tropique est donc plus courte que l'année sidérale, qui ramènerait le soleil à la même étoile ou au même point de l'écliptique, nous dirions

360° — 50″,1 : 360° :: année tropique : année sidérale.

Soit donc T l'année tropique, S l'année sidérale,

$$S = \frac{360^\circ . T}{360^\circ - 50'',1} = \frac{T}{1 - \frac{50'',1}{1296000''}}$$

$$= T\left[1 + \left(\frac{501}{1296000''}\right) + \left(\frac{501}{1296000''}\right)^2 + \text{etc.}\right];$$

d'où

$$S - T = 20'\ 19'',9 \quad \text{et} \quad S = 365^j\ 6^h\ 9'\ 11'',5.$$

Cette année est celle qu'on emploie pour calculer les révolutions de toutes les planètes par la troisième loi de Képler.

19. Nous avons encore parlé d'une année anomalistique qui ramène le soleil à la même anomalie, c'est-à-dire au même point de son ellipse mobile.

Cette année est plus longue que l'année sidérale, parce que l'apogée ou l'apside a un mouvement annuel de $11'',8$ dans le même sens que le soleil. Soit M cette année,

$$360^\circ : 360^\circ\ 0'\ 11'',8 :: S : M = \left(\frac{360^\circ\ 0'\ 11'',8}{360^\circ}\right) S,$$

$$M - S = 4'\ 47'',33 \quad \text{et} \quad M = 365^j\ 6^h\ 13'\ 58'',8;$$

on peut trouver M par l'année tropique, en faisant

$$360^\circ - 50'',1 : 360^\circ\ 0'\ 11'',8 :: T : M;$$

d'où l'on tirera

$$M - T = \frac{61'',9T}{360^\circ - 50'',1} = \frac{T\left(\frac{619}{1296000''}\right)}{1 - \frac{501}{1296000''}} = 25'\ 7'',2,$$

et $M = 365^j\ 6^h\ 13'\ 58'',8$, comme ci-dessus.

20. On compte encore diverses années qu'on nomme *synodiques*, c'est-à-dire qui ramènent les différentes planètes en conjonction avec le soleil.

Soit M le mouvement de la terre en une année sidérale de $365^j,256384 = A$, m le mouvement moyen de la planète dans le même tems; nous dirons :

$$M - m : 360^\circ :: A : a = \text{année synodique};$$

donc

$$a = \frac{360^\circ . A}{M - m} = \frac{360^\circ A}{360^\circ - m} = \frac{A}{1 - \frac{m}{360^\circ}};$$

mais suivant la loi de Képler, $m = \frac{M}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{360^\circ}{r^{\frac{3}{2}}}$; donc

$$a = \frac{A}{1 - \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}} = \frac{A}{1 - r^{-\frac{3}{2}}},$$

et $$r = \left(\frac{a}{a - A}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

En donnant d'avance à r les valeurs que nous trouverons par la suite pour les demi-grands axes ou les distances moyennes des planètes au soleil, nous formerons la table suivante.

Années synodiques qui ramènent en conjonction les différentes planètes.

Planètes.	r	a
☿	0.38710	115j,877
♀	0.7233324	583,920
♂	1.5236927	779,936
⚳	2.6.....	479,672
♃	5.202792	398,867
♄	9.5387705	378,090
♅	19.183305	369,656

On voit que plus une planète supérieure est éloignée du soleil, plus son année est courte.

L'année synodique observée donnerait la distance moyenne de la planète.

LEÇON XIV.

De la Lune.

1. Après le soleil, ce que le ciel nous offre de plus intéressant, c'est la lune, et nous supposerons que l'astronome qui aura commencé un cours régulier d'observations sur les étoiles et le soleil, n'aura négligé aucune occasion d'observer de même l'heure du passage de la lune au méridien, et la distance de l'un de ses bords au zénit.

2. Il aura remarqué que le passage au méridien retarde tous les jours de plus de $\frac{3}{4}$ d'heure, que la distance au zénit varie assez rapidement, et surtout que la figure sous laquelle la lune se montre varie presque tous les jours.

3. Le soleil nous offre en tous tems un disque rond et parfaitement terminé, la lune n'est sensiblement ronde que pendant quelques heures, et dans l'espace de 29 à 30 jours qu'elle emploie à faire le tour du ciel et à se rejoindre au soleil, elle nous offre toutes les différences possibles entre un disque ou parfaitement clair ou presqu'entièrement obscur.

4. Ces diverses apparences, qu'on nomme les *phases de la lune*, ont fourni aux hommes un moyen facile pour partager le tems en périodes, qu'on a nommées *mois;* du moins on voit une analogie frappante entre le mois μὴν, μηνὸς et μήνη, qui signifie *la lune*. Les quatre phases les plus remarquables, qui se succèdent à sept ou huit jours d'intervalle, ont même pu donner l'idée de la semaine ou période de sept jours.

5. Tous les mois la lune disparaît entièrement pendant deux jours environ, après quoi elle reparaît le soir un peu après le coucher du soleil, sous la forme d'un croissant (fig. 87), c'est-à-dire d'un segment circulaire fort étroit,

dont la circonférence extérieure est un demi-cercle, et la circonférence intérieure une demi-ellipse peu aplatie, qui a pour grand axe le diamètre même du demi-cercle. La lune se couche peu de tems après le soleil, et l'on remarquera facilement que la convexité du segment lumineux est tournée vers le soleil; les deux pointes sont également éloignées du soleil; enfin un grand cercle, que l'on concevrait perpendiculaire sur le milieu du diamètre qui joint les deux cornes, irait passer par le soleil. Cette remarque est également vraie, quelle que soit la phase de la lune.

6. De jour en jour le segment lumineux augmente de largeur, la courbe intérieure s'aplatit, la lune se couche plus tard, le septième jour la lune paraît comme un demi-cercle, la ligne des cornes est dans toute sa longueur la limite de la partie lumineuse; les astronomes disent alors que la lune est *dichotome*, c'est-à-dire coupée par le milieu; cette phase s'appelle aussi le *premier quartier*.

7. Dès le lendemain la courbe elliptique redevient ce qu'elle était la veille, mais en sens contraire, c'est-à-dire qu'elle tourne sa concavité vers le soleil; la partie lumineuse augmente chaque jour, la lune passe plus tard au méridien, et elle éclaire une partie plus considérable de la nuit (fig. 87).

8. Du quatorze au quinzième jour elle est entièrement ronde, et elle passe au méridien vers minuit; c'est la phase qu'on nomme *pleine-lune;* mais quoiqu'éclairée en totalité, sa lumière n'est pas d'une teinte uniforme, on y remarque des points plus lumineux, des espaces plus ternes, auxquels on a donné les noms de *mers*, dénomination impropre cependant, car à l'aide des lunettes on remarque dans ces mers des trous ronds comme des puits et qui paraissent éclairés jusqu'au fond. On distingue des parties plus saillantes et d'autres plus enfoncées, mais aucune ombre qui se projette des parties élevées sur les plus basses, et l'on fera bien de saisir cette circonstance pour se bien mettre dans la mémoire, ou fixer par un dessin les formes et les situations respectives des parties les plus remarquables. Plusieurs astronomes ont donné

de ces dessins; Hévelius a tracé la figure de la lune pour tous les jours, entre deux disparitions consécutives. Voyez sa Sélénographie, c'est-à-dire, sa Description de la lune.

9. Dès le lendemain le bord occidental de la lune commence à paraître moins bien terminé et comme raboteux, la lune est en déclin, la partie lumineuse décroît de jour en jour. Le vingt-deuxième jour la lune est de nouveau dichotome; c'est ce qu'on nomme le *dernier quartier*. Tous les phénomènes *se reproduisent en sens inverse*, les montagnes de la lune jettent des ombres qui vont en augmentant de jour en jour, comme elles avaient été en diminuant pendant la première moitié de la révolution, le segment devient de plus en plus étroit, la lune se rapproche du soleil, elle le précède de fort peu à l'horizon oriental; enfin elle disparaît pour deux ou trois jours, et c'est le milieu de cet intervalle qu'on nomme la *nouvelle lune*.

10. Dans tout le cours de sa révolution, la partie éclairée est toujours la plus voisine du soleil, la partie obscure en est la plus éloignée, les taches ou points remarquables conservent la même position sur le disque. La partie obscure ne l'est pas assez pour qu'avec un peu d'attention, et surtout avec une lunette, on n'aperçoive le disque tout entier et qu'on ne reconnaisse les taches principales.

11. De ces remarques, faites de tout tems, il suit que *la lune nous* présente en tout tems la même face, qu'elle n'a pas de lumière propre et qu'elle ne brille que d'un éclat emprunté.

On en a conclu que la lune n'est pas un disque simple, mais un globe dont la moitié éclairée n'est pas toujours tournée directement vers nous. La courbe elliptique qui termine la partie éclairée doit être celle d'un grand cercle qui, vu obliquement, doit prendre la forme d'une ellipse; telles seraient en effet les phases d'un globe que nous verrions la nuit, éclairé successivement de face et sous tous les degrés possibles d'obliquité.

12. On ne voit dans le ciel que le soleil qui brille d'un

éclat assez grand pour fournir à la lune toute la lumière qu'elle nous renvoie.

On se confirmera dans cette idée par les remarques suivantes : quand la lune est pleine, elle passe au méridien supérieur à minuit, c'est-à-dire à l'instant où le soleil est au méridien inférieur, le soleil et la lune sont donc alors éloignés de 180° ; ils occupent les parties presque diamétralement opposées de la sphère céleste. Je dis presque diamétralement opposées, car si la lune et le soleil étaient dans le même diamètre de la sphère dont la terre occupe le centre, la terre devrait jeter son ombre sur la lune, ce qui nous indique en passant, la cause des éclipses de lune ; mais à l'ordinaire on verra par la hauteur de la lune au méridien, comparée avec celle du soleil, que les déclinaisons ne sont pas égales et de signe contraire, comme elles le seraient si les deux astres étoient diamétralement opposés, et comme elles le sont les jours d'éclipse.

13. Dans cette position, il est tout naturel que la lune nous paraisse presque entièrement éclairée, si c'est du soleil qu'elle emprunte sa lumière ; car il est évident qu'elle nous montre la même face, le même hémisphère qu'au soleil.

Soit (fig. 88) S le soleil ; L la lune, OM et O'M' les rayons solaires tangens à la fois aux deux globes ; la partie de la lune éclairée par le soleil aura pour largeur l'arc MBM', la calotte éclairée aura pour base le petit cercle dont le diamètre est MM'. Cette calotte ne serait un hémisphère que dans le cas où le globe lunaire serait de même grosseur que le globe solaire ; ce petit cercle aura pour pôle le point B tourné directement vers le soleil, et BM sera la distance de ce cercle à son pôle.

Si la terre était en *t* sur la ligne des centres SBL, ce point B serait pour nous, comme pour le soleil, le centre de la lune, et la partie éclairée visible s'étendrait également tout autour du pôle ou centre B, le disque nous paraîtrait rond et fort lumineux ; nous verrions une partie de la surface moindre que la partie éclairée, comme on peut s'en convaincre, en imaginant du point *t* des tangentes tout autour du

globe lunaire : ces tangentes divergent du point t ; au contraire, les tangentes OM et OM′ sont convergentes ; ainsi les points de contact de ces dernières sont en arrière du centre L, et les premières sont en avant. Ainsi, dans les oppositions de la lune, nous devons lui voir un disque rond et plein.

14. Supposons maintenant la terre en T sur le côté, la partie éclairée sera toujours MBM′ autour du pôle B ; la partie visible sera NAN′ autour du pôle A pris sur la ligne LAT, A sera pour nous le centre de la lune ou le pôle de vision, B sera le centre pour le soleil, ou le pôle d'illumination ; nous perdrons de vue la partie éclairée M′N′ ; notre vue s'étendra de l'autre côté sur la partie obscure MN ; nous ne verrons donc que la partie MAN′ dont le pôle A n'occupera pas le milieu.

15. Supposons la terre en E sur le prolongement de M′M, toute la partie visible de M vers B sera lumineuse, toute la partie visible sur l'arc MN sera obscure ; nous serons dans le plan qui séparera la lumière de l'obscurité ; le cercle dont MM′ est le diamètre, ne sera vu que par son épaisseur ; il nous paraîtra une ligne droite : la lune sera en quartier ; elle ne sera pas tout-à-fait dichotome, puisqu'elle ne sera pas partagée en deux parties égales, mais la différence sera insensible. La partie éclairée nous paraîtra un demi-cercle : cette partie éclairée aura toujours été en diminuant, depuis l'instant où la terre était en t jusqu'à celui où elle est arrivée en E ; car dans ce mouvement la tangente TN ira toujours s'enfonçant au-dessous de MM′ ; nous perdrons continuellement des parties éclairées qui seront remplacées par des parties obscures ; en E, nous ne voyons plus que la moitié d'un disque. Quand nous serons en t' sur le prolongement de SL, nous ne verrons plus que des parties obscures : la lune sera nouvelle ; elle sera entre nous et le soleil, qu'elle éclipsera même si la conjonction est parfaite, c'est-à-dire si le centre de la lune est bien précisément sur la ligne St' ; mais à mesure que nous avancerons de t' vers t, nous perdrons des parties obscures pour en gagner d'éclairées ; le disque d'abord fort

fort étroit ira s'élargissant jusqu'en E′, où la lune nous paraîtra de nouveau dichotome; au moins sensiblement. de E′ en t, la lune approchera de plus en plus de la phase ronde.

16. Il y a donc un rapport sensible entre les phases de la lune et l'angle SLT dont la mesure est BLA distance des pôles B et A de la partie éclairée et de la partie visible; quand cet angle sera o, nous aurons la phase pleine; quand il sera 180°, nous aurons la phase nulle; quand il sera 90°, nous aurons la dichotomie; on entrevoit déjà un rapport entre la largeur de la partie éclairée et le cosinus de $\frac{1}{2}$BLA $= \frac{1}{2}$SLT.

L'angle LTN′ est celui sous lequel nous voyons le rayon du globe lunaire; $\frac{\text{LN}'}{\text{LT}} = \sin \text{LTN}' = \sin \delta$; le reste de la partie éclairée est AM, qui sera vu sous l'angle LTM. Or

$$\text{tang LTM} = \frac{\left(\frac{\text{LN}}{\text{LT}}\right) \sin \text{TLM}}{1 - \left(\frac{\text{LN}}{\text{LT}}\right) \cos \text{TLM}} = \frac{\sin \delta \sin \text{TLM}}{1 - \sin \delta \cos \text{TLM}},$$

$$\text{LTM} = \frac{\sin \delta \sin \text{TLM}}{\sin 1''} + \frac{\sin \delta \sin 2\text{TLM}}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

TLM est un peu plus grand que (90° — BA), car BLM est un peu plus grand que 90°. Soit BLM $= 90° + y$, nous prouverons au chapitre des éclipses que y est un angle dont le sinus est égal au sinus du demi-diamètre du soleil moins le sinus de la parallaxe; ensorte que

$$\sin y = (\sin d - \sin \pi) = 2 \sin \tfrac{1}{2} (d - \pi) \cos \tfrac{1}{2} (d + \pi),$$

et que sensiblement $y = (d - \pi) =$ environ 15′,

$$\text{TLM} = 90° + y - \text{SLT} = 90° + y - \text{BLA} = 90° - (\text{BLA} - y);$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{LMT} &= \sin \delta \cos (\text{BLA} - y) + \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos (\text{BLA} - y) \\ &= \sin \delta \cos \text{BLA} \cos y + \sin \delta \sin \text{BLA} \sin y + \tfrac{1}{2} \sin \delta \cos \text{BLA},\end{aligned}$$

et mettant les arcs au lieu des sinus

$$\begin{aligned} NAM &= \delta + \delta \cos BLA - 2\delta \cos BLA \sin^2 \tfrac{1}{2} y + \delta \sin y \sin BLA \\ &= \delta (1 + \cos BLA) + \text{etc.} = 2\delta \cos^2 \tfrac{1}{2} BLA \\ &= 2\delta \cos^2 \tfrac{1}{2} SLT : \end{aligned}$$

telle est donc à fort peu près la largeur de la partie éclairée et visible de la lune ; car les termes négligés

$$2\delta \sin \tfrac{1}{2} y (\cos^2 \tfrac{1}{2} y \sin BLA - \sin \tfrac{1}{2} y \cos BLA) + \tfrac{1}{2} \sin^2 \delta \cos^2 BLA$$
$$2\delta \sin \tfrac{1}{2} y \sin (BLA - \tfrac{1}{2} y) + \tfrac{1}{2} \sin^2 \delta \cos BLA$$

sont absolument insensibles ; nous pouvons d'autant plus les négliger, qu'il est fort difficile de mesurer avec précision la partie éclairée dont la limite est toujours raboteuse, et que nous avons été obligés, pour simplifier, de supposer la terre, le soleil et la lune dans l'écliptique, ce qui n'a jamais lieu que pour quelques instans. Notre formule des phases n'est qu'une approximation.

Nous avons d'ailleurs calculé pour le centre de la terre ; il y aurait quelques légères différences en plus et en moins pour les différens points de la surface de la terre ; mais cette approximation sera commode et suffisante, et rendra raison de tout ce qu'on observe réellement.

17. En effet, soit $SLT = 0$, l'expression se réduit à 2δ, le disque est donc éclairé tout entier ; soit $SLT = 90°$, comme en E, $2\delta \cos^2 \frac{1}{2} SLT = 2\delta \cos^2 45° = \delta$; la lune sera dichotome : soit $SLT = 90°$, $2\delta \cos^2 \frac{1}{2} SLT = \delta \cos^2 90° = 0$, la lune sera toute obscure ; ainsi de 0° à 180°, la largeur diminuera progressivement de 2δ jusqu'à 0, et de 180° à 360°, elle augmentera de 0 à 2δ.

18. Quand la terre est en E, la lune est sensiblement dichotome, la limite de l'ombre est une ligne droite, on peut mesurer ou calculer l'angle LES dans le triangle E*l*S rectangle en L, on aura

$$ES = lE \text{ séc. } lES = \frac{lE}{\cos lES} ;$$

on aura le rapport entre les distances de la terre au soleil et

à la lune. A la vérité *l*E est un peu plus petit que l'hypoténuse LE, mais la différence est insensible.

19. C'est ainsi qu'Aristarque de Samos trouva que le soleil est éloigné de la terre plus que 18 fois autant que la lune, et un peu moins que 20 fois.

Dans le fait, ES = 380 LE = 19.20.LE; Aristarque faisait donc la distance du soleil 20 fois trop petite en comparaison de celle de la lune; mais l'idée était ingénieuse, et si elle n'a pas eu un plus grand succès, il faut l'attribuer à la difficulté de l'observation. La limite de la lumière et de l'ombre est toujours raboteuse et incertaine (voyez les fig. 13 et 30 de la Sélénographie d'Hévélius); on peut se tromper de plusieurs heures sur l'instant de la dichotomie, et chaque heure dont on se trompera changera de $\frac{1}{2}$ degré l'angle E. Aristarque supposait cet angle de 87°; Longomontan l'augmentait de 30′. Riccioli le trouvait de 89° 28′ 26″; il est de 89° 51′ à 89° 52′, car il est variable. Ainsi Aristarque a dû trouver 19, Longomontan 23, Riccioli 109, et si l'observation était bien faite, on trouverait de 380 à 430.

20. Pour la faire aussi exactement qu'il est possible, amenez les deux pointes ou cornes de la lune en contact avec l'un des fils de la lunette; si la limite de la lumière et de l'ombre se confond partout avec le fil, la lune sera dichotome. En suivant ainsi la lune pendant plusieurs heures, et prenant le milieu entre les deux instans où la limite aura paru un peu courbe en sens divers, on pourra espérer une observation qui ne sera pas trop inexacte.

21. Les parallaxes du soleil sont en raison inverse des distances; si la parallaxe du soleil est de 9″, celle de la lune sera de 9″ × 380 = 3420 = 57′ 0″ environ.

Les anciens, qui faisaient la parallaxe du soleil de 2′ 51″ ou 171″, devaient trouver 19 × 171, environ 54′, ou 20 × 171 = 3420″ = 57′ 0″.

22. La terre, qui est un globe comme la lune, doit avoir des phases semblables quand on la considère de la lune; la phase de la lune = $2\delta \cos^2 \frac{1}{2}$SLT (fig. 88); la phase de la terre

doit être $2\delta' \cos \frac{1}{2} LTS$, en nommant δ' le demi-diamètre de la terre vu de la lune : or l'angle TSL n'étant au plus que de 9′, ce qui arrive quand la terre est en E, on aura toujours, à moins de 9′ près,

$$LTS + SLT = 180^\circ; \quad \tfrac{1}{2}(LTS) + \tfrac{1}{2} SLT = 90^\circ;$$

ainsi
$$2\delta' \cos^2 \tfrac{1}{2} LTS = 2\delta' \sin^2 \tfrac{1}{2} SLT,$$
$$2\delta \cos \tfrac{1}{2} SLT = 2\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} LTS.$$

Ainsi les phases de la terre et de la lune seront toujours complément l'une de l'autre. Quand la lune sera pleine, la terre sera toute obscure; quand la lune sera toute obscure, la terre sera pleine et ronde; quand la lune sera dichotome, la terre le paraîtra de même. Quand nous verrons la lune en croissant fort étroit, comme deux jours après la nouvelle lune, un observateur placé dans la lune, verrait la terre presque pleine, qui éclairerait fortement l'hémisphère presque tout obscur de la lune. Cette lumière, réfléchie de la terre à la lune, sera renvoyée avec perte de la lune à la terre, et c'est la raison pour laquelle la partie de la lune, qui n'est pas éclairée directement par le soleil, est visible cependant, et paraît d'une couleur terne qu'on appelle *lumière cendrée :* ce sont les anciens qui lui ont donné ce nom, et ils la croyaient la lumière propre de la lune. C'est un peintre célèbre, Léonard de Vinci, qui a donné le premier cette explication adoptée depuis par tous les astronomes.

23. Nous avons prouvé (X. 60) que l'observation des diamètres donnait une idée de l'excentricité de l'orbite, et qu'on avait $e = \frac{\delta' - \delta}{\delta' + \delta}$. Pour la lune, on trouvera $\delta' = 33' 30''$, $\delta = 29' 20''$, on en conclura

$$e = \frac{4'}{63'} = 0{,}0635.$$

On doit donc s'attendre à trouver dans le mouvement de la lune des inégalités bien plus fortes que dans ceux du soleil,

dont l'excentricité n'est guères que de 0,0168; ainsi la lune doit avoir une équation du centre qui peut aller à 7°.

24. Il importera donc de savoir le lieu de l'apogée. Observez la longitude de la lune à deux jours différens, lorsque le diamètre sera de la même grandeur, comme 30′, vous serez sûr que l'apogée est sur le milieu de l'arc qui a pour extrémités les deux longitudes observées.

En répétant ces observations à diverses époques, vous verrez que le lieu de l'apogée change rapidement, et qu'il fait le tour du ciel en 9 ans, ou plus exactement, $3231^j\ 8^h\ 34'\ 57''$ environ, ainsi qu'on l'a trouvé par des méthodes plus précises. Mais l'observation des diamètres suffira pour vous prouver que le mouvement de l'apogée est de $6'\ 41''$ par jour environ.

25. Ces déterminations de la parallaxe, de l'excentricité, du lieu de l'apogée et de son mouvement diurne, ne sauraient être bien exactes; mais elles ne nous ont rien coûté, et seront utiles pour les recherches suivantes. Nous pouvons encore déterminer le moyen mouvement par un procédé qui n'exige ni théorie, ni instrumens, et qui par là convenait fort aux anciens, qui l'ont en effet employé les premiers.

26. Supposons que vous ayez deux observations d'éclipse, dans lesquelles la déclinaison de la lune ait été égale, mais de signe contraire à celle qu'avait alors le soleil, vous en conclurez qu'au milieu de l'éclipse la lune était diamétralement opposée au soleil, et qu'elle avait dans l'intervalle accompli un nombre entier de révolutions synodiques.

Soit M le mouvement diurne de la lune, m le mouvement diurne du soleil, $(M-m)$ sera le mouvement relatif avec lequel la lune peut rejoindre le soleil et se retrouver en conjonction. On aura donc

$$M - m : 1^j :: 360° : \text{révolution synodique} = \left(\frac{360°}{M-m}\right).$$

On sait par l'observation des phases, que la révolution synodique de la lune est de $29\frac{1}{2}$ à peu près; on saura donc le nombre de révolutions synodiques qui auront eu lieu dans

l'intervalle ; soit n ce nombre ; on aura $n.\left(\frac{360°}{M-m}\right)=N$, d'où $\left(\frac{N}{n}\right) 360° = M-m$. Cette équation vous donnera le mouvement relatif, d'où vous conclurez le mouvement propre $= M = \left(\frac{n}{N}\right) 360° + m$, et la révolution synodique $= \left(\frac{360°}{M-m}\right)$ sera connue.

On a trouvé de cette manière que le mois synodique est de 29j 12h 44′ 3″, et le moyen mouvement diurne 13° 10′ 35″. Ptolémée trouvait ainsi 13° 10′ 34″ 58‴ 33iv 30v 30vi.

27. Nous avons supposé deux éclipses centrales, c'est-à-dire où le centre de la lune passait exactement devant le centre du soleil, ces éclipses sont infiniment rares; mais supposons qu'aulieu de décrire le diamètre du cercle, qui est la section perpendiculaire du cône d'ombre, la lune ait au moins décrit deux cordes égales dans les deux éclipses, et qu'elle les ait décrites en un tems égal ; les tems du milieu des deux éclipses ne seront pas exactement ceux de la conjonction, mais ils en différeront également; l'intervalle entre les deux milieux sera le même qu'entre les deux conjonctions, les deux éclipses auront présenté les mêmes phases, la partie éclipsée aura été la même ; l'égalité de durée prouvera que le mouvement de la lune était le même, et qu'elle était sur le même point de son ellipse, pourvu qu'on soit certain d'ailleurs qu'elle était du même côté de l'apogée ; elle prouvera que son équation du centre était la même, et que la différence entre les lieux vrais est la même qu'entre les lieux moyens, et qu'ainsi le mouvement moyen conclu doit être exact.

28. Mais si la lune eût été dans une éclipse, 60° par exemple en-deçà de l'apogée, et dans l'autre, 60° au-delà, le mouvement aurait bien été le même ; mais dans l'une, le lieu moyen eût été augmenté de l'équation, dans l'autre il en eût été diminué ; la différence des lieux vrais différerait de la différence des lieux moyens de deux fois l'équation du centre,

et le mouvement moyen serait en erreur de $\frac{2E}{N}$, c'est-à-dire du double de l'équation divisé par le nombre de jours écoulés. Si l'intervalle était grand, l'erreur serait peu considérable; mais on l'évitera, en comparant deux éclipses apogées ou deux éclipses périgées, ou une éclipse apogée avec une éclipse périgée, ou plus généralement deux éclipses égales en durée et en quantité, et dans lesquelles la lune avait la même anomalie moyenne; toutes ces circonstances sont assez difficiles à réunir parfaitement; mais le milieu entre un grand nombre de comparaisons semblables ne peut différer sensiblement de la vérité, et l'on a au moins une bonne approximation que l'on pourra corriger ensuite par d'autres moyens.

29. Notre première recherche maintenant doit être celle de la parallaxe horizontale; nous avons (VI. 36) donné des moyens généraux pour la déterminer, mais la lune exige des attentions particulières.

On ne peut, à cause de l'inclinaison de la ligne des cornes, mesurer la distance au zénit que pour l'un des bords; il faut en conclure la distance du centre; il faut pour cela connaître le demi-diamètre. On mesure la ligne des cornes au moyen du micromètre, soit filaire, soit objectif. Cette ligne est un diamètre incliné; il est accourci par la réfraction (VI. 31): pour le corriger, mesurez la différence de hauteur h des deux cornes et la distance c, vous aurez $\frac{h}{c} =$ sin inclinaison du diamètre : avec cette inclinaison et le diamètre mesuré, vous trouverez dans la table la correction r, et $(c+r)$ sera le diamètre apparent de la lune.

30. Ce diamètre est augmenté par l'effet de la parallaxe (VI. 36) vous calculerez cet effet $= a$ et $(c+r-a)$ sera le diamètre vrai de la lune.

Soit N la distance zénitale du bord de la lune déja corrigée de la réfraction qui convient à la distance N du bord; $N \pm (c+r) = N'$ sera la distance du centre de la lune au zénit, affectée de la parallaxe.

31. Pour connaître la parallaxe de distance au zénit, il faudrait avoir, comme pour le soleil, la distance vraie au zénit calculée N″, et (N″—N′) serait la parallaxe de laquelle vous pourriez conclure la parallaxe horizontale $\varpi = \frac{N'' - N'}{\sin N'}$.

Pour calculer N″ il faudrait avoir l'angle horaire vrai de la lune, sa distance polaire et la distance polaire du zénit, ainsi qu'on l'a vu (VI. 36); les inégalités sensibles de la lune font que le calcul de ces quantités n'est pas aussi simple que pour le soleil. Voici comment on peut l'exécuter avec toute la précision desirable. Pour mieux nous faire entendre, prenons des observations réellement faites, et cherchons la parallaxe comme si elle nous était totalement inconnue.

32. Je prends les observations suivantes dans le recueil de M. Maskelyne.

1784.	Dist. zénit.	1er bord au mérid.	Δ′	Δ″	Δ‴	Δ IV
31 janv.	24° 48′ 13″ 5 bord inf.	4h 35′ 34″				
			24h 56′ 1″			
1 févr.	23. 12. 13,3 b. sup.	5. 31. 35		—0′ 8″		
			24. 55. 53		—1′ 13″	
2	23. 53. 43,2 b. sup.	6. 27. 28		—1. 21		+0′ 22″
			24. 54. 22		—0. 51	
3	25. 19. 0,9 b. sup.	7. 22. 0		—2. 12		
			24. 52. 20			
4	28. 19. 27,0 b. sup.	8. 14. 20				

33. On voit d'abord que les intervalles des retours au méridien sont assez inégaux, qu'ils décroissent de 24h 56′ 1″ jusqu'à 24h 52′ 20″, et qu'ainsi le mouvement de la lune en ascension droite se ralentit, que l'ascension droite augmente toujours, mais inégalement.

On voit que pour avoir l'angle horaire de la lune 8 heures après le second passage, par exemple, il ne suffira pas de faire cette analogie

$$24^h\,55'\,53'' : 360^\circ :: 8^h : P = \frac{360^\circ . 8^h}{24^h\,55'\,53''} = 115^\circ\,31'\,2'';$$

ce serait supposer le mouvement en ascension droite uniforme.

34. Pour avoir égard aux différences des divers ordres que nous fournissent les observations, voici comme on peut faire le calcul.

L'angle horaire d'un astre est la différence d'ascension droite entre l'astre et le point de l'équateur qui est au méridien. Soit M le milieu du ciel, Æ l'ascension droite de l'astre.

$$P = M - Æ.$$

A l'instant du passage, l'ascension droite du milieu du ciel était $5^h\,31'\,35'' = 82^\circ\,52'\,45''$,
8 heures après, $8 = 120$

$$M = 13.31.35 = 202.52.45.$$

Il reste donc à connaître Æ, 8 heures sidérales après le passage; or nous voyons que d'un jour à l'autre l'ascension droite de la lune au passage croît de 56′ 1″; 55′ 53″; 54′ 32″ et 52′ 20″, puisque le passage retarde successivement de ces quantités.

35. Soit i l'intervalle pour lequel on calcule; ici, par exemple, $i = \frac{8^h}{24^h\,55'\,53''} = 0.32088$; vous aurez, suivant une formule d'interpolation qui n'est autre chose que le théorème de Taylor, l'ascension droite en tems =

$$\tfrac{1}{15} Æ = 5^h\,31'\,35'' + i\Delta' + \frac{i(i-1)}{1.2}\Delta'' + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\Delta''' + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\Delta^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

On voit que ces divers coefficiens sont ceux que fournit la doctrine des combinaisons. Vous aurez donc, en multipliant tout par 15 pour changer le tems en degrés,

$\mathbb{R}$ =	82° 52′ 45″		
+	4.28.58,6	pour Δ'	= + 55′ 53″
+	2.12,4	pour Δ''	= — 1.21
—	49,4	pour Δ'''	= — 0.51
—	14,4	pour Δ^{iv}	= + 0.22
	87.22.52,2		
M =	202.52.45		
M — $\mathbb{R}$ =	115° 29′ 52″,8 = P		
mouvem. uniforme..	115.31. 2		
différence	1 9,2.		

36. Cet angle horaire n'est encore que celui du bord précédent de la lune; nous en déduirons l'angle horaire du centre quand nous connaîtrons la distance polaire. Il suffira de diviser le sinus du demi-diamètre vrai, par celui de la distance polaire, pour avoir la différence d'ascension droite entre le bord et le centre; cette différence s'ajoute à l'ascension droite du bord précédent, et se retranche de celle du bord suivant.

37. La parallaxe ne change en rien l'instant du passage du bord au fil du milieu, qui fait partie d'un vertical. L'augmentation du diamètre qui est produite par la divergence des verticaux, n'affecte en rien la durée du passage au fil du milieu. La parallaxe peut altérer un peu le passage aux fils latéraux; mais si l'on a l'observation aux cinq fils, on peut prendre le milieu comme à l'ordinaire, car deux fils correspondans auront même parallaxe. Cette parallaxe est celle d'ascension droite.

Pour connaître la distance polaire il faut réduire les cinq distances observées au méridien, en les corrigeant de la réfraction; en ajoutant le demi-diamètre augmenté quand on a observé le bord supérieur, ou en le retranchant quand on a observé le bord inférieur, on a alors la distance zénitale, mais affectée de la parallaxe. Soit ϖ la parallaxe horizontale, $(N+p)$ la distance zénitale apparente du centre,

p la parallaxe de hauteur $= \varpi \sin (N+p)$; la distance vraie sera $N = (N+p) - \varpi \sin (N+p)$. Nous venons de déterminer $(N+p)$; si nous connaissions ϖ, nous calculerions p et nous aurions la distance vraie N, pour en conclure la distance polaire $= \Delta = N + 90° - H$.

38. Si nous n'avions aucune idée de la parallaxe, nous serions obligés de négliger p, nous aurions des distances zénitales et polaires trop fortes de la quantité p ; avec PZ, ZPA et PB, plus fort que PA, nous aurions ZB plus grand que ZA, et comparant cette distance à celle qui aurait été réellement observée 8 heures après le passage, nous aurions une parallaxe trop forte, avec laquelle nous recommencerions le calcul, qui nous donnerait une parallaxe trop faible, une distance zénitale trop faible, et par suite une parallaxe trop faible ; mais à chaque fois l'erreur diminuerait et deviendrait bientôt insensible.

39. Nous pouvons nous servir avantageusement de la connaissance que nous avons de la parallaxe, par la méthode d'Aristarque. Cette parallaxe doit être de 57′ environ ; elle est toujours en raison constante avec le diamètre (VI. 41) ; nous avons vu que les diamètres varient de $\frac{4}{53}$ ou $\frac{1}{13}$, la parallaxe variera donc à peu près de $3' \frac{1}{2}$; elle peut donc varier de 53′ à 61 ou 62′, et toujours nous pourrons estimer la parallaxe pour l'instant de l'observation, par le diamètre observé le moment d'avant ou d'après.

40. Ainsi nous corrigerons nos cinq distances zénitales en employant la parallaxe horizontale qui soit au diamètre observé dans la raison $\frac{57'}{31'\ 30''}$, par approximation ; dans le fait suivant nos dernières tables, ce rapport est $\frac{57'}{31'\ 7''}$ ou $\frac{60'}{32'\ 45''}$, ce qui ne diffère pas beaucoup ; nous aurons donc des valeurs fort approchées de p pour chaque jour, car les distances zénitales au méridien sont médiocres, et l'on peut choisir les instans où la lune a sa plus grande déclinaison boréale ; alors la distance au zénit n'est guères que de 20°, et à cette dis-

tance la parallaxe de 57′, se réduit à 19′ 30″; l'erreur sera donc réduite au tiers.

41. De nos cinq distances ainsi corrigées nous conclurons les cinq distances zénitales, et par la formule d'interpolation nous chercherons la distance zénitale pour l'instant de l'observation, 8 heures après le second passage.

42. La formule d'interpolation pour les distances zénitales est la même que pour les ascensions droites; les coefficiens $\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}$, etc. sont numériquement les mêmes, les Δ', Δ'', Δ''' et Δ^{IV} sont des nombres différens.

43. Connaissant Δ pour l'instant de la distance zénitale observée près de l'horizon, nous calculerons la distance vraie au zénit $\cos N = \cos P \sin\Delta \cos H + \cos\Delta \sin H$, et comparant cette distance N à $(N+p)$ trouvée par observation, nous aurons $p = (N+p) - N$ et $\varpi = \frac{p}{\sin(N+p)}$.

44. Mais supposons que nous n'eussions eu aucune idée de la parallaxe, et que nous eussions été obligé de la négliger au méridien, j'ai trouvé qu'on aurait encore fort exactement la parallaxe horizontale, par la formule

$$\varpi = \frac{(N+p) - N}{\sin(N+p) - \frac{\sin n}{\sin N}(\cos H \sin\Delta - \sin H \cos\Delta \cos P) + \frac{1}{2}\sin\varpi \sin^3 n \cot N},$$

$(N+p)$ est toujours la distance observée près de l'horizon, N la distance calculée, n la distance dans le méridien.

On négligerait d'abord le petit terme $\frac{1}{2}\sin\varpi \sin^3 n \cot N$, pour avoir une première valeur de ϖ avec laquelle on calculerait le petit terme, pour l'ajouter au dénominateur.

On aura de cette manière, à quelques secondes près, la parallaxe horizontale pour l'instant de l'observation; par la parallaxe comparée au diamètre observé, on connaîtra le rapport constant de la parallaxe au diamètre, et en répétant ces opérations plusieurs fois dans le même mois, on aura ces diverses quantités avec une précision assez grande.

45. C'est ainsi que les anciens auraient pu déterminer la parallaxe, s'ils avaient eu de meilleurs instrumens; c'est ainsi qu'on pourrait encore la vérifier aujourd'hui, si l'on n'avait pas de meilleures méthodes. Telle est entre autres celle de La Caille : elle suppose deux observateurs placés à la plus grande distance possible sur le globe, et à peu près dans le même méridien.

46. Soit C le Cap de Bonne-Espérance (fig. 89), et Z son zénit; B Berlin, et Z′ son zénit, L la lune. Un observateur au centre de la terre, observerait ZKL distance de la lune au zénit du Cap, et Z′KL au zénit de Berlin; la somme ZKZ′ serait la différence des deux latitudes : mais les distances observées seront

$$\begin{aligned} ZCL &= ZKL + CLK \\ Z'BL &= Z'KL + BLK \\ \hline \text{Somme } ZCL + Z'BL &= ZKZ' + CLK + BLK \\ &= ZCZ' + \varpi(\sin ZCL + \sin Z'BL), \end{aligned}$$

$$N + N' = H + H' + \varpi(\sin N + \sin N'),$$

$$\varpi = \frac{(N + N') - (H - H')}{2\sin\frac{1}{2}(N - N')\cos\frac{1}{2}(N + N')}.$$

On suppose les deux observations simultanées et les deux observateurs sous le même méridien : s'il y a une petite différence, on calcule de combien la distance polaire de la lune a dû changer dans l'intervalle des observations. Soit dN ce changement, on emploie $(N + N' + dN)$ au lieu de $(N + N')$. Je suppose que dN ait rapproché la lune du zénit du second observateur; si le contraire a lieu, on fait dN négatif.

47. La Caille, en partant pour le Cap, avertit tous les astronomes de son projet, en les invitant à observer de leur côté tous les passages de la lune au méridien; Bradley, Wargentin firent des observations correspondantes. Lalande fit tout exprès le voyage de Berlin, avec le mural de Lemonnier. La Caille, à son retour, calcula toutes ces observations, et en déduisit la parallaxe, en tenant compte de

l'aplatissement de la terre, ce qui se réduit à faire $N + N'$ = somme des deux latitudes géocentriques (VI. 33), et à mettre $\varrho \sin N$ et $\varrho' \sin N'$ au lieu de $\sin N$ et $\sin N'$, c'est-à-dire à faire $\varrho \sin N = \sin A$, $\varrho' \sin N' = \sin B$, et

$$\varpi = \frac{(N + N') - (H - a + H' - a')}{2 \sin \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A + B)}.$$

48. Duséjour a refait tous ces calculs par ses méthodes, et il a trouvé que la parallaxe devait être connue à fort peu près à la seconde. J'ai refait tous les calculs de Duséjour par les formules précédentes, qui sont beaucoup plus expéditives et au moins aussi sûres, et j'ai retrouvé avec beaucoup moins de peine exactement les mêmes résultats.

49. Le rapport du demi-diamètre à la parallaxe est le rapport du rayon du globe lunaire au rayon du globe terrestre; ce rapport est à fort peu près $\frac{1}{2}\left(\frac{32.45}{60'}\right)$ (40) $= \frac{32' 45''}{120'}$ $= 0.27292$; le rapport des surfaces sera donc $(0.27292)^2 = 0.074484$; celui des volumes $(0.27292)^3 = 0.020328$, ou en fractions ordinaires,

$$\frac{1}{3,3641} = \frac{3}{10,923}; \quad \frac{1}{13,426} = \frac{3}{40,278}; \quad \frac{1}{49,195};$$

le rapport des masses dépend ensuite des densités.

50. Nous sommes en état maintenant de calculer les observations de la lune au méridien, d'en conclure les ascensions droites et les déclinaisons vraies, et par conséquent les longitudes et les latitudes. Nous aurons le mouvement vrai entre chaque paire d'observations, et nous verrons que ce mouvement est très-inégal; nous trouverons que la lune est presque toujours ou au-dessus ou au-dessous de l'écliptique, que son orbite coupe l'écliptique en deux points qu'il s'agit de déterminer, et que cette orbite fait avec l'écliptique un angle d'environ 5° qu'il faut aussi déterminer avec plus de précision.

51. Parmi nos observations, choisissons les deux plus voisines du passage par l'écliptique. Soient L et V, fig. 90, les

deux lieux de la lune ; LA, VB les deux latitudes, l'une boréale et l'autre australe, et AB le mouvement en longitude :

$$\text{tang AL} = \text{tang C} \sin \text{AC}\,; \quad \text{tang VB} = \text{tang C} \sin \text{BC},$$

$$\text{tang AL} + \text{tang VB} = \frac{\sin(\text{AL} + \text{VB})}{\cos \text{AL} \cos \text{VB}}$$

$$= 2\,\text{tang C} \sin \tfrac{1}{2}(\text{AC} + \text{BC}) \cos \tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{BC})\,;$$

donc

$$\text{tang C} = \frac{\sin(\text{AL} + \text{BV})}{2\cos\frac{1}{2}(\text{AC} - \text{BC}) \cos \text{AL} \cos \text{BV} \sin \frac{1}{2}(\text{AC} + \text{BC})}$$

$$= \frac{\sin(\lambda + \lambda')}{2\cos\lambda \cos\lambda' \sin\frac{1}{2}\text{AB} \cos\frac{1}{2}(\text{AC} - \text{BC})}.$$

De plus,

$$\frac{\text{tang AL}}{\text{tang BV}} = \frac{\sin \text{AC}}{\sin \text{BC}}; \quad \text{tang AL} : \text{tang BV} :: \sin \text{AC} : \sin \text{BC},$$

$$\text{tang AL} + \text{tang BV} : \text{tang AL} - \text{tang BV} :: \sin \text{AC} + \sin \text{BC} : \sin \text{AC} - \sin \text{BC},$$

$$\sin(\text{AL} + \text{BV}) : \sin(\text{AL} - \text{BV}) :: \text{tang}\tfrac{1}{2}(\text{AC} + \text{BC}) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{BC})$$

$$\sin(\lambda + \lambda') : \sin(\lambda - \lambda') :: \text{tang}\tfrac{1}{2}\text{AB} : \text{tang}\tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{BC}) = \frac{\sin(\lambda - \lambda')\,\text{tang}\frac{1}{2}\text{AB}}{\sin(\lambda + \lambda')}.$$

52. Nous aurons donc à la fois la longitude du point C; qui sera celle du nœud et l'inclinaison C de l'orbite ; mais le nœud sera mieux déterminé que l'inclinaison.

Les deux nœuds de l'orbite lunaire, comme ceux de toute autre orbite, s'appellent l'un *ascendant*, ἀναβιβάζων, qui fait monter au-dessus, et l'autre *descendant*, καταβιβάζων, qui fait descendre au-dessous ; l'un se désigne par le symbole ☊, l'autre par le symbole ☋. Les nœuds de la lune s'appelaient anciennement la *tête* et la *queue du dragon*.

53. Si nous faisons des observations pareilles à chacun des passages de la lune par son nœud, nous trouverons que le nœud rétrograde de 1° 28′ par mois lunaire, ensorte qu'en comparant des observations éloignées, ce mouvement rétro-

grade se trouvera de 19° 19′ 43″ par an, et que le nœud fait le tour du ciel en 6798 jours.

On trouvera que l'inclinaison est sujette à plusieurs inégalités, et que la principale, qui a été découverte par Tycho, est d'environ $8' \frac{1}{3}$, puisque l'inclinaison va de 5° à 5° 17′; nous pouvons, en attendant, supposer 5° 8′.

54. Le mouvement sur l'écliptique n'est donc pas le véritable mouvement de la lune. Il faut réduire chaque longitude à l'orbite, en y ajoutant (IV. 69).

$$\frac{\tang^2 \frac{1}{2} I \sin 2(☾ - ☊)}{\sin 1''} + \frac{\tang^4 \frac{1}{2} I \sin 4(☾ - ☊)}{\sin 2''} + \text{etc.},$$

ou $\quad +7'\,4'',13 \sin 2(☾ - ☊) + 0'',4262 \sin 4(☾ - ☊).$

55. Donnons encore un moyen pour déterminer la parallaxe et l'inclinaison tout à-la-fois.

On choisira le tems où le nœud de la lune se trouve dans l'équateur à l'un des deux points équinoxiaux, ce qui arrive tous les neuf ans.

Soit EQ l'équateur (fig. 91), ECQ l'écliptique, ELQ l'orbite de la lune, Z le zénit, $ZA = H$, $ZC = ZA - AC = H - \omega$, $ZL = ZA - AC - CL = H - \omega - I$.

La parallaxe abaissera la lune en l, d'une quantité

$$Ll = \varpi \sin Zl = \varpi \sin N, \quad \text{d'où}$$

$$Zl = N = H - \omega - I + \varpi \sin N \text{ et } I = H - \omega - N + \varpi \sin N,$$

Quinze jours après, dans la partie australe de l'orbite, on aura Zl' ou

$$N' = H + \omega + I + \varpi' \sin N' \text{ et } I = N' - H - \omega - \varpi' \sin N'.$$

Retranchant la première équation de la seconde, il viendra

$$N' + N - 2H - \varpi' \sin N' - \varpi \sin N = 0 :$$

or $\quad \varpi' : \varpi :: \delta' : \delta; \quad$ donc $\quad \varpi' = \frac{\delta'}{\delta} \varpi;$

donc

donc

$$0 = N' + N - 2H - \varpi\left(\frac{\delta'}{\delta}\sin N' + \sin N\right)$$
$$= N' + N - 2N - \varpi(\sin N'' + \sin N)$$
$$= (N' + N) - 2H - 2\varpi \sin\tfrac{1}{2}(N'' + N)\cos\tfrac{1}{2}(N'' - N)$$
$$\varpi = \frac{N' + N - 2H}{2\sin\frac{1}{2}(N'' + N)\cos\frac{1}{2}(N'' - N)}.$$

La parallaxe ainsi connue, on aura l'inclinaison par l'une des deux équations primitives.

56. Cette méthode, qu'on appelle celle des plus grandes latitudes, a fort bien réussi à Lemonnier. Ptolémée n'avait pas été aussi heureux; on peut être fort étonné qu'il s'y soit trompé si considérablement; elle suppose à la vérité que la lune est à la fois au méridien, à 90° des nœuds, et le nœud au point équinoxial. Ces circonstances difficiles à réunir dans l'une des deux observations sont tout-à-fait impossibles à réunir dans les deux. Il faut donc ajouter quelques considérations nouvelles, pour ne rien supposer qu'on ne puisse obtenir tous les neuf ans.

57. Soit donc Υa l'équateur (fig. 92), $\Upsilon C \simeq$ l'écliptique, ☊L☋ l'orbite de la lune, Z le zénit, Zu=dist. zénit. observée au méridien $= N$, P le pôle, $PZlua$ le cercle de déclinaison; $lu = \varpi \sin N$,

$$Zu = N = Za - cl + \varpi \sin N = Za - ac - cl + \varpi \sin N$$
$$= H - D - cL + \varpi \sin N.$$

En nommant D la déclinaison du point c de l'écliptique, nous avons

$$\text{tang}\, ac = \text{tang}\, D = \text{tang}\, \omega \sin \Upsilon a = \text{tang}\, \omega \sin \text{ÆC},$$
$$\text{tang}\, cl = \frac{\text{tang}\, I \sin ☊c}{\sin c + \cos c \cos ☊c\, \text{tang}\, I} = \text{tang}\, E.$$

Nous connaissons assez bien I et ☊ pour calculer E, qui est un petit arc; nous avons

$$\cot c = \tang \omega \cos \Upsilon c, \quad \sin c = \frac{\sin \Upsilon a}{\sin \Upsilon c} = \frac{\sin \text{Æ}}{\cos \Omega},$$

$$\cos c = \sin \omega \cos \Upsilon a = \sin \omega \cos \text{Æ}, \quad \sin \Omega c = \sin (90^\circ + \Omega);$$

donc

$$\tang E = \frac{\tang I \cos \Omega}{\frac{\sin \text{Æ}}{\cos \Omega} + \sin \omega \cos \text{Æ} \cos (90^\circ + \Omega) \tang I}$$

$$= \frac{\tang I \cos^2 \Omega}{\sin \text{Æ} - \sin \omega \cos \text{Æ} \sin \Omega \cos \Omega \tang I}.$$

On voit que E différera peu de I; nous aurons donc

$$N = H - D - E + \varpi \sin N.$$

Une seconde observation faite quatorze ou quinze jours après la première, donnera

$$N' = H + D' + E' + \varpi' \sin N',$$

$$N' + N = 2H - (D - D') - (E - E') + \varpi \sin N + \varpi' \sin N',$$

$$\varpi = \frac{(N + N') - 2H + (D - D') + (E - E')}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' + N) \cos \frac{1}{2}(N'' - N)}.$$

E et E′ différeront très-peu de (I—I′) et se détruiront presqu'entièrement; on aura donc ϖ fort exactement; mais il serait bon pourtant de connaître un peu les inégalités principales de la latitude, pour en dépouiller N et N′.

58. Cherchons d'abord celles de la longitude, et commençons par l'excentricité.

Nous y emploierons, avec quelques modifications, la méthode qui a réussi pour le soleil.

Soit Z, Z′, Z″ trois anomalies moyennes inconnues, $(u-p)$, u, $(u+q)$ les trois anomalies vraies inconnues; on sait seulement que

$$Z = (u - p) + a \sin (u - p) + R,$$
$$Z' = u + a \sin u + R',$$
$$Z'' = (u + q) + a \sin (u + q) + R'';$$

en désignant par R, R′, R″ les petits termes de l'équation du centre,

$$Z'-Z = p + a[\sin u - \sin(u-p)] + R'-R,$$
$$Z''-Z' = q + a[\sin(u+q) - \sin u] + R''-R',$$
$$Z'-Z-p-(R'-R) = 2a\sin\tfrac{1}{2}p\cos\tfrac{1}{2}p\cos u + 2a\sin^2\tfrac{1}{2}p\sin u,$$
$$Z''-Z'-q-(R''-R') = 2a\sin\tfrac{1}{2}q\cos\tfrac{1}{2}q\cos u - 2a\sin^2\tfrac{1}{2}q\sin u,$$
$$\frac{Z'-Z-p-(R'-R)}{\sin p} = a\cos u + a\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}p\sin u,$$
$$\frac{Z''-Z-q-(R''-R')}{\sin q} = a\cos u - a\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}q\sin u,$$

$(Z'-Z-p)$, $(Z''-Z'-q)$ sont les différences des mouvemens moyens aux mouv. vrais en longit. $(M'-M)-(L'-L)$, etc.

$p =$ mouv. vrai en longit. $-$ mouv. apogée $= L'-L-m$,
$q = L''-L'-n$;

ainsi

$$\frac{(M'-M)-(L'-L)-(R'-R)}{\sin(L'-L-m)} = a\cos u + a\sin u\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(L'-L-m),$$
$$\frac{(M''-M')-(L''-L')-(R''-R')}{\sin(L''-L'-n)} = a\cos u - a\sin u\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(L''-L'-n).$$

Ces deux équations donneront $(a\cos u)$ et $(a\sin u)$, $\mathrm{tang}\,u$ et a; le calcul sera du reste le même que pour le soleil.

59. Nous combinerons ainsi trois à trois différentes observations de la lune, et nous serons surpris de trouver pour a des quantités assez différentes; un peu de réflexion nous fera penser que ces différences doivent venir des perturbations.

La lune a fourni la première preuve de la pesanteur universelle. C'est un fait constaté, que par l'effet de la pesanteur, un corps élevé de 2',5173 au-dessus de la terre, y tombe en une seconde de tems; si tel est l'effet de la pesanteur à cette distance du centre de la terre, nous pouvons calculer ce qu'il serait à la distance de la lune; car l'effet de la pesanteur est en raison inverse du carré des distances.

La distance de la lune à la terre $= \frac{1}{\sin 57'}$; l'effet de la pesanteur dans la région de la lune sera

$$2',5173 \sin^2 57' = 0.000692;$$

voyons maintenant de combien la lune tombe en effet vers la terre, en 1″ de tems.

La chute d'une planète qui décrit un cercle est (X. 27)

$$\tfrac{1}{2} r(du)^2 \tang^2 1''; \quad r = \frac{3271200}{\sin 57'}; \quad du = 32'',94 = 0'',5490,$$

$$\tfrac{1}{2} r \tang^2 \tfrac{1}{2} 1'' (0.549)^2 = 0.000699,$$

à très-peu près comme ci-dessus.

Donc la lune pèse sur la terre à la manière des graves; c'est ce calcul qui a conduit Newton à la loi de la pesanteur universelle.

60. Si la terre agit aussi sensiblement sur la lune, le soleil, qui est un million de fois plus gros, doit encore agir sensiblement, quoiqu'il soit près de 400 fois plus éloigné; et s'il avait même densité que la terre, son action serait $\frac{1000000}{160000} = \frac{100}{16}$, environ 6 fois aussi forte; d'où il résulte qu'il est d'une densité moindre, mais dont l'effet cependant est probablement très-sensible, puisqu'il agit sur la terre pour lui faire décrire son ellipse.

61. Le soleil en S (fig. 93) attire la terre T, la distance à la lune devient tL et au lieu de TL, l'angle LTS devient *LtS*; il augmente de

$$\mathrm{TL}t = \left(\frac{\mathrm{T}t}{\mathrm{TL}}\right) \sin \mathrm{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{T}t}{\mathrm{TL}}\right)^2 \sin 2\mathrm{T} + \text{etc.}$$

Le soleil attire la lune de L en *l*; l'angle en *t* diminue de

$$\mathrm{L}tl = \left(\frac{\mathrm{L}l}{t\mathrm{L}}\right) \sin \mathrm{L} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{T}t}{tl}\right)^2 \sin 2\mathrm{L} + \text{etc.}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{L}l}{\mathrm{T}l}\right) \sin \mathrm{T} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{T}t}{\mathrm{TL}}\right)^2 \sin 2\,\mathrm{T} + \text{etc.};$$

car $\mathrm{T} = 180° - \mathrm{L}$ à fort peu près. La différence de ces deux effets est de la forme

$$-\left(\frac{b-a}{TL}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2+a^2}{TL^2}\right)\sin 2T+\text{etc.}$$

Or TL rayon vecteur de la lune $=1+e\cos A+\text{etc.}$, A étant l'anomalie moyenne de la lune,

$$\frac{1}{TL}=1-e\cos A+e^2\cos^2 A-e^3\cos^3 A+\text{etc.}$$

Sin T et sin 2T seront multipliés par cos A et ses puissances; en développant ces termes, il en naîtra des termes dépendans de (T+A) et (T—A), T+2A et T—2A + etc., (2T+A) et (2T—A) + etc.

T est la différence vraie des longitudes du soleil et de la terre; si l'on veut mettre à la place de T l'angle moyen T — somme des inégalités, les développemens deviendront plus longs et plus difficiles. Mais on voit quels seront les principaux argumens des inégalités; on peut même soupçonner que les termes dépendans de (2T—A) pourraient être les plus sensibles, parce que $(b-a)$ sont deux valeurs à peu près égales qui se détruiront presqu'entièrement.

62. La distance de la terre au soleil est $m(1+e\cos a)$, a étant l'anomalie moyenne du soleil; cette anomalie se combinera donc avec tous les argumens précédens.

63. L'orbite de la lune est inclinée à l'écliptique d'un angle de 5°; cette inclinaison modifiera les effets de l'attraction, selon la latitude qui dépend de la distance au ☊; la longitude du nœud se combinera donc aussi dans les développemens, avec tous les argumens précédens.

Les principales inégalités de la lune seront $2e\sin A$, équation du centre, $b\sin 2T$ et $c\sin(2T-A)$.

64. Dans les éclipses de lune qui ont servi aux premières recherches, $T=180°$, $2T=360°$; l'équation $b\sin 2T$ se réduit à zéro, $c\sin(2T-A)$ devient $c\sin(360°-A)=-c\sin A$.

Les trois équations réunies $=(2e-c)\sin A$; ainsi l'équation du centre $2e\sin A$ a dû paraître $(2e-c)\sin A$.

Hipparque trouva de cette manière $(2e-c)=5°\ 0'$; il

dut donc rester persuadé que l'équation du centre n'était que de 5°; cependant les observations de la lune, dans d'autres circonstances, et surtout dans les quadratures, lui avaient indiqué des variations dont il ne put découvrir la loi.

65. Ptolémée s'attacha plus particulièrement à observer des quadratures pour vérifier les inégalités entrevues par Hipparque.

Dans les quadratures, $T = 90°$, $2T = 180°$; les trois inégalités sont $2e \sin A$, $b \sin 180° = 0$ et $c \sin(180° - A) = c \sin A$. total, $(2e + c) \sin A$.

L'équation du centre déterminée dans ces circonstances, était donc $(2e+c) \sin A$; on la trouve de.... 7° 40′
mais ci-dessus $(2e-c) \sin A$..... 5. 0

d'où $4e$..... 12.40
$2c$..... 2.40
$2e$..... 6° 20′
c..... 1.20;

ainsi l'équation du centre sera $6° 20' \sin A$, en négligeant le second terme qui dépend de $\sin 2A$, et se trouve 0 quand $A = 90°$.

L'equation $c \sin(2T - A) = 1° 20' \sin(2T - A)$.

66. Ptolémée conserva l'équation d'Hipparque $5° \sin A$; il l'expliquait par un épicycle qui, s'approchant de la terre, soutendait des angles de plus en plus considérables et qui, de 5°, pouvaient s'accroître jusqu'à 7° 40′; et comme il avait remarqué que ces accroissemens dépendaient de l'angle $2T$, il imagina une combinaison de mouvemens qui le forçaient à corriger l'anomalie moyenne d'une équation de $12° \sin 2T$; ensorte que le tout, réduit en formules, m'a donné à très-peu près l'équivalent des deux équations $6° 20' \sin A$ et $1° 20' \sin(2T - A)$.

67. Boulliaud imagina une autre explication et donna le nom d'*évection* à l'inégalité $c \sin(2T - A)$; ce nom lui est resté. Mais ni Hipparque, ni Ptolémée n'aperçurent l'équation $b \sin 2T$, qui est surtout sensible dans les octans, c'est à-dire lorsque $T = \frac{1}{8} = 45°$; alors en effet $2T = 90°$, et

$b \sin 2T = b = 36'$. Cette inégalité fut aperçue et déterminée assez exactement par Tycho.

68. Képler, en calculant les observations de Tycho, aperçut une inégalité dont la période était d'un an, et qui lui parut dépendre de l'anomalie moyenne du soleil. Il l'appelle *équation annuelle ;* elle est d'environ $11' \sin a$; dans les éclipses, elle doit se confondre avec l'équation du centre du soleil, qui en est augmentée : voilà sans doute la cause qui a fait que les anciens astronomes ont attribué au soleil une équation du centre plus forte de 11 à 12′ qu'elle n'est réellement.

69. Si l'anomalie moyenne du soleil peut fournir une équation de 11′, l'anomalie moyenne de la lune paraîtrait devoir en fournir une plus considérable, mais elle se confondrait nécessairement avec l'équation du centre, dont jamais elle ne pourrait se séparer ; on doit soupçonner une équation qui dépendra de $\sin \Omega$; Mayer l'avait indiquée sans l'employer, Mason l'avait introduite, M. Laplace l'a démontrée.

70. C'est ainsi que les astronomes auraient pu être conduits à démêler la cause des inégalités principales, et à soupçonner les inégalités moindres, à les déterminer toutes par des observations, en choisissant les tems où elles doivent être les plus sensibles, c'est-à-dire quand l'argument dont elles dépendent est de 90°, à les éluder l'une après l'autre, en choisissant les observations où l'argument est de 0° ou 180° ; mais n'ayant aucune idée de l'attraction ni des perturbations, ils ne pouvaient que reconnaître les inégalités les plus considérables, et l'ordre dans lequel elles ont été découvertes est celui de leur importance réelle. L'équation de 36′, qu'on appelle *variation*, était bien plus facile à démêler et à expliquer, que l'évection ; mais l'évection, qui est de 1° 20′, ou même de 2° 40′ dans l'hypothèse de Ptolémée, quoique bien plus difficile à expliquer, devait attirer plus fortement l'attention de Ptolémée, qu'une équation de 36′, qu'il pouvait attribuer en partie aux erreurs de l'observation et à l'incertitude de la parallaxe. L'équation annuelle, qui

n'est que de 11′ 12″, aurait sans doute échappé à Képler, sans la simplicité de son argument.

71. Pour découvrir une inégalité non encore employée, il faut calculer une longue suite d'observations, et les comparer aux calculs faits sur la formule qui emploie toutes les équations connues. Parmi les erreurs des tables, si l'on en aperçoit une qui revient la même à peu près à certains intervalles égaux, en plus et en moins; on cherche l'argument, qui change de 90° à 270° dans cet intervalle, et l'on a le *maximum* de l'inégalité avec l'argument qui la règle.

Soit V la longitude vraie de la lune, M la longitude moyenne, e l'excentricité, A l'anomalie moyenne.

$$\begin{aligned} V = M &+ a \sin A + a' \sin 2A + b \sin 2A + \text{etc.} \\ &+ b \sin B + c \sin 2B \\ &+ b' \sin B' + c' \sin 2B' \\ &+ b'' \sin B'' + c'' \sin 2B'' \\ &+ x \sin X + x' \sin 2X. \end{aligned}$$

Toutes les équations de la lune sont de cette forme : d'où

$$\begin{aligned} 0 = &- dV + dM + da \sin A + a dA \cos A + db \sin B \\ &+ db' \sin B' + dB' + \text{etc.} + x \sin X + x' \sin 2X; \end{aligned}$$

dV est la différence entre la longitude observée et la longitude calculée, dM la correction de la longitude moyenne, da, db, db', db'' les corrections des coefficiens employés dans la formule; $dA =$ (correct. longit. moy. — correct. périgée).

72. On ne fait pas varier les argumens connus qui n'ont pas d'erreur sensible. x est le coefficient d'une inégalité inconnue à deux termes; on la néglige d'abord, et pour déterminer toutes les corrections, il faut au moins autant d'observations qu'on a d'inconnues, mais on en prend un bien plus grand nombre. Supposons qu'on ait 10 inconnues, on prendra 1000 observations; on réunira les 1000 équations en 10 groupes; dans chaque groupe on réunit les 100 équations où a même e inconnue a les plus forts coefficiens, qu'on rend tous de même signe en changeant, s'il le faut, tous les signes de l'équa-

tion où ce fort coefficient aurait le signe —; on en fait autant pour chaque inconnue. On élimine les inconnues, on en tire les valeurs, qu'on porte dans chaeune des 1000 équations. Si les observations étaient parfaites et les formules complètes, tout se réduirait à 0; mais à cause des erreurs inévitables, et des termes qui manquent, il restera des erreurs. Alors on peut essayer des équations nouvelles; on en calculera les $\sin X$ et $\sin 2X$. Soit y la quantité à laquelle se réduit l'équation de condition ci-dessus; vous ferez

$$y = x \sin X + x' \sin 2X;$$

vous rassemblerez en un groupe toutes celles où $\sin X$ est considérable et dans lesquelles par conséquent $\sin 2X$ est fort peu de chose; vous ferez un autre groupe des équations où $\sin 2X$ est beaucoup plus fort que $\sin X$; vous donnerez le même signe à tous les termes $2X$; les termes X, tant qu'ils seront plus petits, n'auront pas l'uniformité de signe; il se fera une compensation qui les réduira à peu de chose; vous déterminerez x et x'. Vous pourrez introduire ainsi plusieurs équations inconnues, il ne faut qu'avoir un nombre suffisant d'observations.

73. C'est encore la meilleure méthode que l'on ait à suivre pour la lune, car la théorie même la plus approfondie peut bien vous indiquer les équations les plus probables, mais il est trop difficile d'en calculer analytiquement les coefficiens; on ne les a jusqu'ici déterminées que par observation, sauf quelques inégalités qui sont liées par une loi analytique à quelque grande inégalité connue précédemment par expérience.

74. C'est par cette méthode que j'ai fait les tables du soleil, de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et des satellites de Jupiter; c'est ainsi que MM. Bürg et Burckhardt ont fait leurs tables de la lune; que M. Bouvard a perfectionné, d'après les observations plus nouvelles, les tables de Jupiter et de Saturne, et que M. de Lindenau a fait les tables de Vénus et de Mars; c'est ainsi qu'on se propose de perfectionner celles de Mercure et des nouvelles planètes.

75. Cependant pour les planètes on a beaucoup d'avantage; parce que leurs perturbations sont bien déterminées par la théorie, du moins quand les planètes qui les produisent ont une masse suffisamment connue, c'est-à-dire qu'elles ont des satellites bien observés. Mais même pour les perturbations de Jupiter nous avons tenté de corriger, par les observations, la masse de Saturne, déduite des mouvemens et des élongations des satellites.

76. La latitude de la lune a des inégalités; mais elles sont beaucoup moins fortes et la théorie en est plus facile; la seule qui soit vraiment importante est celle que Tycho a reconnue par ses observations; elle a pour argument..... 2T—(☾—☊). Comme l'évection dépend de 2T—(☾—périg.), il y a entre ces deux équations une ressemblance qui pourrait aujourd'hui mettre sur la voie, si elle n'était pas encore connue. Cette équation est de 8′ 48″; les plus fortes ensuite sont 25″, 16″, 9″, 8″. Cette dernière est due à M. Laplace. Les argumens sont des combinaisons de ☾—☉, de A et ☊, comme on pouvait s'y attendre.

77. La hauteur perpendiculaire de la lune au-dessus de l'écliptique est fonction de l'inclinaison, de la distance au ☊ et du rayon vecteur; le soleil, en attirant la lune en ligne droite, approche de lui cette perpendiculaire, et elle diminue de hauteur; mais en s'approchant du soleil, elle peut ou s'approcher ou s'éloigner de la terre, et quoique toutes les perpendiculaires soient diminuées par l'action du soleil, elles peuvent soutendre, pour l'observateur placé sur la terre, des angles souvent plus petits, mais aussi quelquefois plus grands.

78. La parallaxe qui dépend de la distance doit avoir des inégalités correspondantes à celles de la longitude, mais elles doivent dépendre du cosinus au lieu du sinus, comme les rayons vecteurs elliptiques dépendent du cosinus de l'anomalie, tandis que l'équation du centre dépend du sinus. Ces inégalités sont aisées à calculer quand on connaît celles de la longitude; elles

ont toutes été déterminées par le calcul; on pourrait faire la même chose pour la latitude.

79. Le diamètre qui est en rapport constant avec la parallaxe, doit avoir des inégalités qui soient dans le même rapport; mais on se sert du rapport constant pour avoir le diamètre, quand on a calculé la parallaxe.

80. Quand on connaît bien toutes les inégalités périodiques, on est en état de déterminer exactement la longitude moyenne; on en fait le calcul pour deux époques éloignées, et l'on en conclut le mouvement moyen, comme nous avons fait pour le soleil (XIII. 14). En essayant ces comparaisons à différens intervalles, on a remarqué une accélération dans le moyen mouvement. Des astronomes l'ont trouvé de 11′ pour le premier siècle, et ils ont supposé qu'elle croissait comme les carrés des nombres de siècles; mais cette supposition était très-précaire. Les géomètres avaient essayé vainement d'en trouver la cause. M. Laplace l'a reconnue enfin; elle provient du changement d'excentricité de l'orbite solaire; elle s'exprime par une série dont le premier terme dépend en effet du carré des tems, le second dépend du cube, et les termes ultérieurs, des puissances supérieures. M Laplace a expliqué par là la différence constatée qui se trouve entre les mouvemens actuels et les mouvemens déterminés par les Arabes, vers l'an 1000, et par Ptolémée, vers l'an 120; il n'est plus possible de la révoquer en doute.

81. M. Laplace a trouvé, pour les mouvemens du périgée et du nœud, des équations séculaires qui sont en rapport constant avec celles de la longitude, et qu'il eût été bien difficile de déterminer par observation.

Tous les termes des équations de la lune sont de la forme $a \sin A$; dont la différentielle exacte est

$$a \cos A dA - 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} dA \sin A.$$

Soit dA le mouvement horaire de l'argument, et dM le mouvement horaire moyen; le mouvement horaire vrai sera

$$dM + a \cos A dA - 2a \sin^2 \tfrac{1}{2} dA \sin A,$$

pour l'heure qui suit; mais pour l'heure qui précède, il sera

$$-dM - a\cos A dA - 2a\sin^2\tfrac{1}{2}dA\sin A.$$

C'est sur ce principe que j'ai calculé les tables de mouvement horaire dont on se sert aujourd'hui. Jusque-là les astronomes avaient négligé les termes du second ordre, et leurs tables n'étaient pas d'une exactitude suffisante.

Mois lunaires de différentes espèces.

82. La lune a, comme le soleil, différentes espèces de révolutions, elles sont même en plus grand nombre.

Nous avons déterminé le mois synodique, qui ramène la lune en conjonction avec le soleil; elle doit avoir une révolution tropique qui la ramène à une même longitude comptée de l'équinoxe mobile, une révolution sidérale qui la ramène à la même étoile, une révolution anomalistique qui la ramène à un même point de son ellipse mobile, enfin une révolution draconitique qui la ramène au même nœud mobile; une de ces révolutions bien connue, on en déduit toutes les autres facilement.

83. Nous avons déterminé ci-dessus le mouvement relatif, le mouvement propre et le mois synodique,

$$M : M-m :: \text{mois synodique} : \text{mois trop.} = \frac{\text{mois synod.}(M-m)}{M};$$

on en conclut,

$$\text{mois synod.} - \text{mois tropique} = \frac{m}{M}\ (\text{mois synodique}).$$

Le mois tropique ainsi trouvé et p étant la précession pendant la durée de ce mois,

$$360^\circ - p : 360^\circ :: \text{mois trop.} : \text{mois sidér.} = S' = \frac{360^\circ . T}{360^\circ - p},$$

$$S' = \frac{T}{1 - \frac{p}{1296000''}} = T.\left[1 + \left(\frac{p}{1296000''}\right) + \left(\frac{p}{1296000''}\right)^2 + \text{etc.}\right],$$

$$S' - T = T\left[\frac{p}{1296000''} + \left(\frac{p}{1296000''}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

$$= \frac{T.\frac{p}{1296000''}}{1 - \frac{p}{1296000''}}.$$

Soit M le mouvement de l'apside en une révolution en longitude;

$360° - M : 360° ::$ mois tropique : mois anomalistique,

$$\text{mois anom.} = \frac{T.360°}{360° - M} = \frac{T}{1 - \frac{M}{360°}}$$

$$= T\left[1 + \frac{M}{360°} + \left(\frac{M}{360°}\right)^2 + \text{etc.}\right],$$

$$\text{mois anom.} - \text{mois trop.} = T\left[\frac{M}{360°} + \left(\frac{M}{360°}\right)^2 + \text{etc.}\right]$$

$$= \frac{T.\frac{M}{360°}}{1 - \frac{M}{360°}}.$$

Soit M le mouvement du nœud pendant un mois tropique;

$360° + M : 360° ::$ mois tropique : mois draconitique,

et

$$\text{mois trop.} - \text{mois dracon.} = \frac{T.M}{1 + \frac{M}{360°}}.$$

84. On peut déduire tous ces mois des mouvemens séculaires de la lune, du soleil, de la précession, du périgée et du nœud, ainsi que nous l'avons montré pour le soleil. J'ai trouvé de cette manière, que la révolution se fait,

par rapport au nœud, en $27^j,2122222$;
par rapport à l'équinoxe, en 27,3215255;
par rapport aux étoiles, en 27,3215830;
par rapport au périgée, en 27,5545704;
par rapport au soleil, en 29,5305885.

85. Si ces nombres étaient tous des entiers, en les multipliant tous les uns par les autres, on aurait une révolution composée qui serait un multiple de chaque révolution particulière.

En construisant des tables des multiples de chacune de ces révolutions, on verrait d'un coup d'œil les nombres qui seraient communs à plusieurs de ces tables; on y reconnaîtrait les périodes qui ramènent les conjonctions et les oppositions voisines des nœuds, et par conséquent les éclipses.

86. Les anciens s'occupèrent beaucoup de ces périodes composées, soit pour régler leur calendrier luni-solaire, soit pour éviter le calcul des éclipses, qui présentait alors des difficultés qu'on ne savait pas résoudre.

Le plus célèbre est le cycle de Méton, connu sous le nom de *nombre d'or;* il est composé de 19 ans, ou 6990 jours, dans lesquels la lune devait revenir à son nœud 255,04 fois, c'est-à-dire 255 fois à fort peu près, 254 fois à la même longitude, 251,8 fois à son apogée, et 235 fois en opposition.

87. Calippe, en quadruplant cette période et retranchant un jour pour la rendre plus exacte, la fit de 27959 jours, qui donnaient 1020,13 retours au nœud, 1016,02 à l'écliptique, 1015,82 à l'étoile, 1007,42 à l'apogée, et 940,01 au soleil.

88. Hipparque trouva une période de 126007 $\frac{1}{2}$ jours, qui est encore plus exacte. Cette période, qui est d'environ 345 ans, était la plus juste pour le calendrier, mais elle ne ramenait pas aussi bien les éclipses dans le même ordre. Les anciens avaient remarqué qu'elles revenaient presque les mêmes au bout de 18 ans et 10 jours, ou plus exactement en 6585^j,23115. En effet, pendant cet intervalle,

la lune revient au nœud 242,01,
à la même longitude... 241,03,
à la même étoile..... 240,99,
à l'apogée..... 238,99,
à la syzygie..... 223,00.

Une période qui ramènerait les éclipses de même grandeur et de même durée, au même jour de l'année et à la même longitude, ne pourrait être qu'un multiple exact des différens mois lunaires. Le retour à la même distance du nœud donnerait l'éclipse de même grandeur; le retour au même point de l'ellipse donnerait la même durée; le retour à la même longitude donnerait le même jour; rien de tout cela ne peut être parfaitement exact; mais on voit par ce raisonnement comment Hipparque et Ptolémée ont pu trouver à peu près les mouvemens de la lune, de son nœud et de son apogée, par la période des éclipses, dont les Babyloniens avaient fait, dit-on, une ample collection, qui ne suppose d'ailleurs que des yeux, de l'attention, et le soin d'écrire ce qu'on a vu.

89. Au moyen de la période chaldéenne, on pouvait donc, d'après les éclipses observées, prédire les éclipses futures; et c'est ainsi sans doute que Thalès prédit cette éclipse célèbre que rapporte Hérodote, et qui fit jeter bas les armes aux Mèdes et aux Lydiens, effrayés de l'obscurité profonde qui avait subitement succédé au jour. Hérodote en indique l'année d'une manière si vague, que l'on doute si elle est arrivée en l'an 581, 585, 597 ou 607 avant J.-C.; encore aucune de ces éclipses n'a-t-elle dû être totale et ramener cette obscurité qui n'est peut-être qu'une fiction d'Hérodote ou de ceux qui lui en parlèrent.

90. Aujourd'hui que le calcul des éclipses est devenu bien plus facile et plus sûr, on ne fait plus aucune attention à ces périodes; les astronomes ont d'autres moyens pour reconnaître les éclipses qui doivent avoir lieu dans une année, et même pour les calculateurs d'Éphémérides, tous ces moyens sont inutiles. On a les lieux de la lune pour midi et minuit de chaque jour; on voit d'un coup d'œil quelle sera la latitude à l'instant de la conjonction et de l'opposition, et par conséquent s'il est possible qu'il y ait éclipse de soleil ou de lune.

91. A défaut d'Éphémérides, le moyen le plus simple est celui que j'ai indiqué dans la Préface de mes Tables solaires.

Ces tables donnent pour le 1er de janvier de chaque année la distance angulaire de la lune au soleil et le lieu du nœud. Ces angles sont en parties décimales de la circonférence.

Pour qu'il y ait éclipse de soleil, il faut que la distance angulaire soit 0 ou fort petite; pour une éclipse de lune, il faut que la distance angulaire approche beaucoup de la demi-circonférence ou de 500.

La distance étant donnée pour le 1er janvier, on voit ce qu'il y faut ajouter pour qu'elle devienne 1000 ou 500; on cherche dans les mouvemens pour les jours du mois, celui où le mouvement relatif est de ce nombre de parties; on a par ce moyen le jour de la syzygie moyenne; on peut même corriger cette syzygie moyenne, de l'équation du centre, de l'évection et de la variation, et par conséquent avoir à peu près la syzygie vraie; on voit aussi quelle est la distance au nœud. J'ai trouvé que si cette distance est au-dessus de 13° 33′ à la syzygie moyenne, l'éclipse de soleil est sûre, et qu'elle est impossible, au contraire, si elle surpasse 19° 44′. Pour l'éclipse de lune, les limites sont plus étroites; l'éclipse est sûre jusqu'à 7° 47′, et impossible à 13° 21′. Entre ces limites, il faut un calcul plus exact pour lever le doute.

LEÇON XV.

Des Éclipses.

1. Le soleil, la terre et la lune sont trois corps sensiblement sphériques; quand leurs centres se trouvent sur une même ligne droite, dont le soleil occupe toujours l'une des extrémités, la terre et la lune doivent projeter derrière elles une ombre conique; si la terre est entre la lune et le soleil, la lune est enveloppée dans le cône d'ombre, elle cesse de re-

cevoir

cevoir la lumière du soleil et de la réfléchir, l'habitant de l'hémisphère obscur de la terre observe une éclipse de lune.

2. Si c'est la lune qui est entre le soleil et la terre, l'ombre de la lune atteint la terre le plus souvent, et l'habitant de l'hémisphère éclairé se trouve momentanément dans le cône d'ombre, il perd de vue le soleil. C'est ce qu'on appelle *éclipse de soleil*, ἐκλείπει ἥλιος, *sol deficit*. Le mot éclipse signifie *défaillance*.

3. Les éclipses de lune sont plus fréquentes que les éclipses de soleil, surtout pour un pays donné; en effet, quand la lune est éclipsée, elle perd réellement sa lumière, et l'éclipse est vue de tout l'hémisphère tourné vers la lune. Au contraire, si c'est le soleil qui paraît éclipsé, il ne perd rien de sa lumière, il nous est simplement caché par la lune; or la lune étant beaucoup plus petite que la terre, son ombre n'est qu'une tache qui ne couvre qu'une partie de l'hémisphère éclairé. La lune fait alors à peu près l'effet que produisent souvent les nuages qui nous dérobent la vue du soleil, tandis qu'à quelques pas nous voyons des édifices fortement éclairés.

4. La première chose est donc de déterminer, pour ces deux espèces d'éclipses, les dimensions du cône tronqué lumineux qui a sa base au soleil, et celles des cônes d'ombres de la terre et de la lune.

Soit SO (fig. 94) le rayon du globe solaire, TE celui du globe terrestre, L le centre de la lune à l'instant de l'opposition; les trois centres seront sur une même droite STLC. Soit OENC un rayon solaire tangent au globe solaire en O, et au globe terrestre en E; SO et TE seront perpendiculaires au rayon OC, SC sera l'axe du cône; en effet, imaginez que le plan STCEO tourne autour de SC, la droite OC décrira la surface d'un cône lumineux entre le soleil et la terre, et obscur depuis la terre jusqu'au sommet C.

5. Soit LuK une portion de l'orbite de la lune, sa tangente LN sera le demi-diamètre d'une section du cône, faite perpendiculairement à l'axe dans la région de la lune, et cette section sera un cercle; *u* sera le point par lequel le bord de

la lune entrera dans le cône d'ombre, quand le centre de la lune sera en K, si l'on suppose uK = demi-diamètre de la lune vu du centre T de la terre.

Soit TE = 1,

$$\text{TS} = \text{dist. du soleil à la terre} = \frac{1}{\sin \text{parall.} \odot} = \frac{1}{\sin \pi},$$

$$\text{TL} = \text{dist. de la lune à la terre} = \frac{1}{\sin \text{parall.} ☾} = \frac{1}{\sin \varpi},$$

$$\text{TC} = \text{axe du cône obscur} = \frac{1}{\sin \text{C}};$$

et par conséquent,

$$\text{LC} = \text{TC} - \text{TL} = \frac{1}{\sin \text{C}} - \frac{1}{\sin \varpi},$$

ou

$$\text{LC} = \frac{\sin \varpi - \sin \text{C}}{\sin \varpi \sin \text{C}} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\varpi - \text{C}) \cos \frac{1}{2}(\varpi + \text{C})}{\sin \varpi \sin \text{C}}.$$

6. Soit δ le demi-diamètre du soleil vu de la terre,

$$\text{SO} = \text{TS} \sin \delta = \frac{\sin \delta}{\sin \pi};$$

or

$$\text{SO} : \text{TE} :: \text{SC} : \text{TC} = \frac{\text{SC} \,.\, \text{TE}}{\text{SO}} = \frac{\text{SC}}{\text{SO}} = \frac{\text{ST} + \text{TC}}{\text{SO}},$$

ou

$$\frac{1}{\sin \text{C}} = \frac{\frac{1}{\sin \pi} + \frac{1}{\sin \text{C}}}{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \pi}\right)} = \frac{1 + \frac{\sin \pi}{\sin \text{C}}}{\sin \delta},$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \text{C}} = 1 + \frac{\sin \pi}{\sin \text{C}} = \frac{\sin \text{C} + \sin \pi}{\sin \text{C}},$$

donc

$$\sin \delta = \sin \text{C} + \sin \pi \quad \text{et} \quad \sin \text{C} = \sin \delta - \sin \pi,$$

ou

$$\sin \text{C} = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\delta - \pi) \cos \tfrac{1}{2}(\delta + \pi).$$

δ ne passe jamais 16′ 18″, π ne va jamais à 9″; $\delta + \pi$ est donc au plus de 16′ 27″; $\frac{1}{2}(\delta + \pi)$ ne va jamais à 8′ 14″, et $\frac{1}{2}(\delta - \pi)$ à 8′ 5″. Dans ce cas extrême,

$$\sin C = 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \pi)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \pi)$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \pi) - 4\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \pi)\sin^2\tfrac{1}{2}(\delta + \pi).$$

Le petit terme ne saurait aller à $0'',003$; on peut donc supposer que

$$2\sin\tfrac{1}{2}C\cos\tfrac{1}{2}C = 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta - \pi)\cos\tfrac{1}{2}(\delta + \pi)$$

se réduit à

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \sin\tfrac{1}{2}(\delta - \pi),$$

et que

$$C = \delta - \pi.$$

Or

$$CTE = 90^\circ - C = 90^\circ + \pi - \delta = bTE = bE,$$
$$2bE = 180^\circ + 2\pi - 2\delta = EbF = 180^\circ - 2(\delta - \pi).$$

EbF est la partie obscure de la terre; elle est moindre que l'hémisphère; pour la connaître, il faut retrancher de l'hémisphère une zône dont la hauteur $= C = \delta - \pi$.

La partie éclairée EaF est l'hémisphère + zône $(\delta - \pi)$, c'est-à-dire plus la zône dont la hauteur est égale au demi-diamètre du soleil, diminué de la parallaxe.

7. L'angle $LTu = TuE - C = \varpi - C = \varpi - \delta + \pi$
$$= \varpi + \pi - \delta.$$

Ainsi, *la somme des deux parallaxes, diminuée du demi-diamètre du soleil, sera la distance angulaire de la lune à l'axe du cône d'ombre, à l'instant où le centre de la lune entrera dans ce cône; à cet angle ajoutez le demi-diamètre de la lune, vous aurez la distance angulaire à l'axe du cône pour l'instant où le bord de la lune entrera dans le cône;* les deux formules pour les éclipses de lune seront

$$\varpi + \pi - \delta \quad \text{et} \quad \varpi + \pi - \delta + d;$$

c'est la règle donnée de tout tems par les astronomes; rigoureusement ces deux angles sont $\varpi - C$ et $\varpi + d - C$, d étant le demi-diamètre de la lune.

8. $$LC = TC - TL = \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{\sin \varpi} = \frac{1}{\sin\delta - \sin\pi} - \frac{1}{\sin \varpi}$$
$$= \frac{\sin\varpi - \sin\delta + \sin\pi}{\sin\varpi(\sin\delta - \sin\pi)} = \frac{\sin\varpi + \sin\pi - \sin\delta}{\sin\varpi(\sin\delta - \sin\pi)},$$

quantité nécessairement positive ; ainsi le sommet du cône d'ombre est toujours au-delà de la lune, et même LC est plus grand que TL, car $LC - TL = \frac{2\sin\varpi - \sin C}{2\sin\varpi\sin C}$, quantité toujours positive.

9. Plaçons la lune entre la terre et le soleil en L′, et soit L′n' l'orbite de la lune, n' sera le point par lequel le centre de la lune entrera dans le cône lumineux.

$$L'Tn' = Tn'E + C = \varpi + \delta - \pi = \varpi - \pi + \delta.$$

Ainsi *la différence des parallaxes, augmentée du demi-diamètre du soleil, sera la distance angulaire du centre de la lune à l'axe du cône, au moment où le centre de la lune entrera dans le cône lumineux ; à cet angle ajoutez le demi-diamètre* d *de la lune, et vous aurez la distance à l'axe au moment où le bord de la lune entrera dans le cône;* les deux formules pour les éclipses de soleil seront

$$\varpi - \pi + \delta \quad \text{et} \quad \varpi - \pi + \delta + d.$$

C'est encore la règle donnée par les astronomes grecs.

10. Soit L′V′ le rayon du globe lunaire, OV′K le rayon solaire tangent aux deux globes en O et en V′, K sera le sommet du cône d'ombre projeté par la lune.

Nous avons $SO = \frac{\sin\delta}{\sin\pi}$ (6); nous aurons de même $L'V' = \frac{\sin d}{\sin\varpi}$;

or

$$SL' = ST - TL' = \frac{1}{\sin\pi} - \frac{1}{\sin\varpi},$$

et

$$SO : L'V' :: SK : KL' = \frac{L'V'}{SO}.SK;$$

donc

$$\frac{KL'}{SK}=\frac{L'V'}{SO}=\frac{\sin d}{\sin\varpi}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\delta}=\text{constante}=\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi},$$

$$SO-L'V' : SO :: SK-KL' : SK :: SL' : SK,$$

$$\frac{\sin\delta}{\sin\pi}-\frac{\sin d}{\sin\varpi} : \frac{\sin\delta}{\sin\pi} :: \frac{1}{\sin\pi}-\frac{1}{\sin\varpi} : SK,$$

$$1-\frac{\sin\pi}{\sin\delta}\frac{\sin d}{\sin\varpi} : 1 :: \frac{1}{\sin\pi}-\frac{1}{\sin\varpi} : SK=\frac{\left(\frac{1}{\sin\pi}-\frac{1}{\sin\varpi}\right)}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}};$$

donc

$$KL'=\frac{\left(\frac{1}{\sin\pi}-\frac{1}{\sin\varpi}\right)\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}=\frac{\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)\left(1-\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}\right)}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}},$$

$$TL'-KL'=\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)-\frac{\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)\left(1-\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}\right)}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sin\varpi}-\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)\left(\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}\right)-\frac{1}{\sin\varpi}\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)+\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)\left(\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}\right)}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sin\varpi}-\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)\left(\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}$$

$$=\frac{1}{\sin\varpi}\left(\frac{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}}{1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\varpi}}\right)=\frac{\frac{1}{\sin}\left(1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)}{1-\frac{\sin 16'\,28''}{\sin 60'\,20''}\cdot\frac{\sin 8'',6}{\sin 16'}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sin\varpi}\left(1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)}{1-0.27929412\times 0.00895837}=\frac{\frac{1}{\sin\varpi}\left(1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)}{1-0.00245107}$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right)(1.00245110)\left(1-\frac{\sin d}{\sin\delta}\right)$$

$$= \frac{1.0024511}{\sin \varpi} - \frac{1.0024511}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin d}{\sin \varpi}$$

$$= \frac{1.0024511}{\sin \varpi} - \frac{0.2736102}{\sin \delta} = \frac{1}{\sin \varpi} + \frac{0.0024511}{\sin \varpi} - \frac{0.2736102}{\sin \delta}$$

$$= TL' - \frac{0.279996}{\sin \delta} + \frac{0.000700543}{\sin d},$$

$$KL' = + \frac{0.279996}{\sin \delta} - \frac{0.000700543}{\sin d}.$$

11. Ainsi pour que $TL' - KL'$ soit $= 0$, c'est-à-dire, pour que le sommet du cône coïncide avec le centre de la terre, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{\sin \varpi} = \frac{0.2736102}{\sin \delta} - \frac{0.0024511}{\sin \varpi},$$

ou

$$\frac{1.0024511}{\sin \varpi} = \frac{0.2736102}{\sin \delta},$$

et

$$\sin \varpi = \frac{1.0024\,36102 \sin \delta}{0.2736102} = 3.663792 \sin \delta;$$

dans ce cas, l'éclipse ne peut être que totale, avec plus ou moins de demeure dans l'ombre, quelle que soit la position de l'observateur à la surface de la terre.

Si $TL' - KL'$ est une quantité négative, ce qui suppose $\sin \varpi > 3.663792 \sin \delta$, le sommet K dépassera le centre de la terre, l'éclipse sera encore plus grande, c'est-à-dire que la demeure dans l'ombre sera plus longue.

12. Si au contraire $TL' - KL'$ est une quantité positive, ce qui a lieu quand $\sin \varpi < 3.663792 \sin \delta$, la demeure dans l'ombre diminuera pour ceux qui verront l'éclipse totale; elle sera partielle et annulaire pour ceux qui seront plus éloignés de la lune que le sommet du cône; elle sera totale instantanément pour celui qui se trouvera précisément au sommet, et totale avec quelque demeure, pour ceux qui se trouveront dans le cône obscur.

13. On appelle *éclipse annulaire* celle où la lune paraît

toute entière sur le soleil sans le couvrir tout-à-fait, ensorte qu'il reste autour de la lune un anneau lumineux. Dans ce cas, la lumière du soleil est fort affaiblie, mais l'obscurité n'est pas totale, à beaucoup près; car pendant l'éclipse annulaire de 1764, je me souviens très-bien qu'à Amiens, où je demeurais alors, on avait, malgré la pluie qui ne cessa presque pas un instant de toute la matinée, ce demi-jour qu'on observe quelques instans avant le lever du soleil, quand le ciel est tout couvert de nuages sombres.

Sur un faux avis inséré dans la Gazette de France, par un bon curé qui ne savait pas la différence d'une éclipse annulaire à une éclipse totale, le public s'attendait à une obscurité parfaite; mais il était prouvé par les observations précédentes, et notamment par celle de l'éclipse totale de 1724, qu'il suffisait du plus petit filet du disque solaire, pour empêcher ou dissiper l'obscurité.

14. Suppons $TL' - KL' = 1 = \frac{1.002508336}{\sin \varpi} - \frac{0.279996}{\sin \delta}$; le sommet du cône ne pourra toucher la terre qu'au point a, puisque $TA = 1$; alors l'éclipse ne pourra être totale que pour le point a et pour un seul instant; elle sera partielle et annulaire partout ailleurs. De cette équation on tire

$$\sin \varpi' = \frac{1.002508336}{1 + \frac{0.279996}{\sin \delta}};$$

c'est sur cette formule et sur la formule $\sin \varpi = 3.663792 \sin \delta$, que j'ai calculé la table ci-jointe, dans laquelle le demi-diamètre du soleil étant supposé tel qu'il est dans la première colonne, l'éclipse ne pourra être que totale avec plus ou moins de demeure dans l'ombre, si la parallaxe est plus grande que celle qui se trouve dans la seconde colonne; elle ne pourra être que partielle et annulaire, si la parallaxe est telle qu'on la voit dans la troisième colonne; entre ces deux limites, elle sera annulaire ou totale, selon la position de l'observateur, par rapport à l'axe du cône.

Limites des éclipses totales et annulaires.

δ	ϖ	ϖ'	$\varpi - \varpi'$
15′ 45″	57′ 42″	56′ 45″	57″
15.50	58.01	57. 3	58
15.55	58.19	57.21	58
16. 0	58.37	57.39	58
16. 5	58.56	57.56	60
16.10	59.14	58.14	60
16.15	59.32	58.32	60
16.20	59.51	58.50	61

15. Pour la lune, les éclipses sont toujours totales, à moins que sa latitude ne soit trop grande pour qu'elle puisse s'enfoncer de tout son diamètre dans le cône, car le demi-diamètre de la section ($\varpi + \pi - \delta$) est toujours plus grand que le demi-diamètre de la lune, quelles que soient les parallaxes et la valeur de δ.

Éclipses de lune.

16. Soit NF (fig. 95) l'écliptique, O le point opposé au soleil, ou le nadir du soleil; la position de ce point sera connue en tout tems, en ajoutant 180° à la longitude du soleil; le point O sera dans l'axe du cône, et le centre de la section circulaire par un plan perpendiculaire à l'axe. Soit $OE = OG = \varpi + \pi - \delta$ (7); OE sera le demi-diamètre de l'ombre.

17. Soit NAV l'orbite de la lune inclinée de $5° \frac{1}{7}$ environ à l'écliptique, OA sera la latitude de la lune à l'instant de la conjonction. Nous supposerons le point O immobile pendant

toute la durée de l'éclipse. Dans le fait, il avance le long de l'écliptique, de $2' \frac{1}{2}$ environ par heure; la lune s'avance de $32' \frac{1}{2}$ environ pendant une heure; son mouvement vers le point O sera donc de $30'$ environ; c'est ce qu'on appelle le *mouvement relatif sur l'écliptique.*

18. Pendant que la lune ira de N en A (fig. 96), sa latitude, qui en N est 0, sera devenue OA quand la lune sera en conjonction; soit $d☾$ le mouvement de la lune en longitude, $d☉$ celui du soleil, $d\lambda$ le mouvement en latitude, nous aurons

$$\frac{d\lambda}{d☾} = \text{tang inclinaison de l'orbite vraie} = \text{tang N},$$

$$\frac{d\lambda}{d☾ - d☉} = \text{tang inclinaison de l'orbite relative} = \text{tang I};$$

en effet, pendant que la lune allait de N en A par une combinaison des mouvemens $d☾$ et $d\lambda$, le nadir du soleil se mouvait de S en O, ensorte que la lune et le nadir se trouvent au même instant dans le cercle de latitude. Le triangle rectangle ONA donne $\text{tang N} = \frac{OA}{NO}$; mais plaçons le nadir immobile en O; il faudra supposer que la lune est partie du point I, tel que $NI = SO$; IO sera le mouvement relatif $= d☾ - d☉$; le mouvement en latitude sera toujours $d\lambda = OA$, et le triangle AIO donne

$$\text{tang I} = \frac{AO}{IO} = \frac{d\lambda}{d☾ - d☉}.$$

Les mouvemens étant supposés uniformes pendant la durée de l'éclipse, si vous supposez que $d☾$, $d☉$, $d\lambda$ soient les mouvemens horaires, pour une fraction d'heure quelconque n, ils seront $nd☾$, $nd☉$, $nd\lambda$; vous aurez

$$\frac{nd\lambda}{nd☾ - nd☉} = \frac{d\lambda}{d☾ - d☉} = \text{tang I}.$$

Le mouvement relatif de la lune au soleil aura toujours même inclinaison sur l'écliptique; si vous supposez le nadir

du soleil immobile en O, l'orbite relative de la lune sera IA, dont l'inclinaison = I.

19. Ces suppositions simplifient les calculs sans rien leur ôter de leur précision; mais dans le cas où l'on voudrait l'exactitude rigoureuse, on pourrait faire les calculs des distances des centres par les méthodes ordinaires, ou bien on partagerait la durée de l'éclipse en plusieurs portions égales, pour lesquelles on déterminerait l'inclinaison I avec les mouvemens qui auraient lieu pour l'instant.

20. Tous ces mouvemens sont des mouvemens vrais vus du centre de la terre, la parallaxe n'y fait rien; pour savoir si la lune entre dans le cône d'ombre et perd la lumière qu'elle recevait du soleil, il ne s'agit nullement de savoir à quel point de la voûte céleste nous rapporterions la lune, mais de savoir où elle est réellement, pour trouver si elle est dans la lumière ou dans l'ombre.

Les réfractions n'apportent non plus aucun changement à la grandeur ni au tems de l'éclipse; la réfraction ne s'opère que dans notre atmosphère, et l'éclipse s'opère en dehors à une grande distance.

21. Les réfractions expliquent un fait qu'on a quelquefois observé.

Supposons que dans une éclipse totale le centre du soleil soit à 90° 32′ de distance au zénit, la réfraction

l'élevera de.....	32′ 46″
le centre du soleil paraîtra donc à.....	89° 59. 14

il sera élevé d'une minute sur l'horizon.

Le centre de la lune sera à la distance....	89° 28′
la réfraction diminuera cette distance de.....	24. 16″
la distance zénitale apparente sera de.....	89. 3. 44
la parallaxe moyenne abaissera le centre de.....	57
	90° 0′ 44″

Ainsi le centre de la lune sera 1′ au-dessous de l'horizon; on ne verra guères que la moitié des disques du soleil et de la lune; mais dans une éclipse totale, la lune peut avoir

une latitude qui passe 20′, n'en prenons que 15 à cause de l'angle que le cercle de latitude fait avec l'horizon, nous pourrons voir la lune toute entière et la moitié du soleil. Quand la lune est éclipsée et à l'horizon, elle est à très-peu près au point orient ou couchant de l'écliptique; l'angle du cercle de latitude est à fort peu près complément de la hauteur du nonagésime.

22. Connaissant, comme nous avons dit (XIV. 90), le jour et l'heure à peu près de l'opposition, vous pouvez, par le calcul du lieu de la lune, en négligeant même toutes les petites équations, savoir, à une demi-heure près, le tems de la syzygie. C'est alors que commence le véritable calcul de l'éclipse.

Déterminez pour ce moment la longitude exacte du soleil, son demi-diamètre, sa parallaxe et son mouvement horaire; la longitude, la latitude, le demi-diamètre, la parallaxe et les mouvemens horaires de la lune en longitude et en latitude.

Calculez $\tang I = \frac{d\lambda}{d☾ - d☉}$; faites $♄ = 180° + ☉$,

$$(d☾ - d☉) : 3600'' :: (♄ - ☾) : t = \frac{(♄ - ☾)3600''}{(d☾ - d☉)};$$

si T est le tems du calcul, le tems de l'opposition sera

$$T + t = T + \frac{(♄ - ☾)3600''}{(d☾ - d☉)},$$

t sera soustractif si $☾ > ♄$.

$$3600'' : d\lambda :: t : \frac{td\lambda}{3600''},$$

$$\text{latitude à l'opposition} = \lambda + \frac{td\lambda}{3600''} = \lambda + \left(\frac{♄ - ☾}{d☾ - d☉}\right) d\lambda = l;$$

l sera la latitude à l'opposition, si λ est la latitude pour le tems du calcul.

23. $l \cos I$ sera la plus courte distance; en effet, abaissez la perpendiculaire Om sur l'orbite relative NA, le point m sera le plus voisin du centre O de l'ombre, Om sera la plus courte distance du centre de la lune au point O, et Om =

$OA \cos mOA = l \cos I$, et il est évident que $mOA = 90° - mON = 90° - I$.

24. mA sera le chemin que la lune fera sur son orbite, entre le tems de la plus courte distance en m et le tems de la conjonction en A. Or,

$$mA = OA \sin mOA = l \sin I = Om \operatorname{tang} I.$$

25. Abaissez la perpendiculaire mm' sur l'écliptique, vous aurez

$$m'O = mO \cos mOm' = l \cos I \sin mOA = l \sin I \cos I,$$

$$(d☾ - d☉) : 3600'' :: m'O : \text{tems de } m'O = \frac{l \sin I \cos I . 3600''}{(d☾ - d☉)},$$

$$\text{tems de } m'O = \frac{l \sin I . 3600''}{\left(\frac{d☾ - d☉}{\cos I}\right)} = \frac{mA . 3600''}{\left(\frac{d☾ - d☉}{\cos I}\right)}.$$

Ainsi pour convertir en tems un arc mA de l'orbite relative, c'est-à-dire, pour connaître le tems que la lune emploie à décrire un arc quelconque de son orbite relative, il suffit de multiplier cet arc par la constante $\frac{3600''}{\left(\frac{d☾ - d☉}{\cos I}\right)} = \left(\frac{3600'' \cos I}{d☾ - d☉}\right)$; réciproquement, pour connaître l'arc de l'orbite relative quand on connaît le tems, il suffit de diviser le tems par cette constante, ou de le multiplier par $\left(\frac{d☾ - d☉}{3600'' \cos I}\right)$; $\left(\frac{d☾ - d☉}{\cos I}\right)$ est ce qu'on appelle le *mouvement horaire sur l'orbite relative.*

26. Autour de O du rayon $\varpi + \pi - \delta = OE$, décrivez le cercle ERG, ce sera le cercle de l'ombre ou la section du cône d'ombre. Avec le rayon $OL = OV = \varpi + \pi - \delta + d$, marquez les points L et V sur l'orbite relative; des points L et V avec le rayon $LE = VG = d$, décrivez deux cercles qui représenteront le disque de la lune; ces deux cercles se-

ront tangens en E et en G au cercle de l'ombre. Les points L et V seront donc ceux du commencement et de la fin de l'éclipse; les triangles rectangles mOL, mOV auront deux côtés égaux chacun à chacun; on en conclura

$$mL = mV = \sqrt{\overline{OL}^2 - \overline{Om}^2} = \sqrt{\overline{OV}^2 - \overline{Om}^2}$$
$$= \sqrt{(OL - Om)(OL + Om)}$$
$$= \sqrt{(\varpi + \pi - \delta + d - l\cos I)(\varpi + \pi - \delta + d + l\cos I)}.$$

Ainsi nous connaîtrons la valeur de $mL = mV$.

27. Le point m est donc également éloigné du commencement en L et de la fin en V, le point m est celui du milieu de l'éclipse; le tems de m est ce qu'on appelle le *milieu de l'éclipse;* le tems de mL s'appelle la *demi-durée;* ainsi

$$\tfrac{1}{2}\text{ durée} = \frac{mL.3600''\cos I}{(d☾ - d☉)},$$

milieu de l'éclipse $- \frac{1}{2}$ durée = tems du commencement,
milieu de l'éclipse $+ \frac{1}{2}$ durée = tems de la fin.

28. On pourrait faire

$$\sin OLm = \sin u = \frac{Om}{OL} = \frac{l\cos I}{\varpi + \pi - \delta + d},$$

et

$$mL = OL\cos u = (\varpi + \pi - \delta + d)\cos u.$$

29. A mesure que la lune s'avancera de L vers m, sa distance au centre O ira toujours en diminuant, puisque l'on a toujours pour un point quelconque L', $\overline{L'O}^2 = \overline{L'm}^2 + \overline{Om}^2$; la distance ne peut diminuer sans qu'une partie du disque plus ou moins grande n'entre dans l'ombre et ne s'éclipse; la partie éclipsée sera donc

$$LO - LO' = (\varpi + \pi - \delta + d) - \text{distance actuelle des centres};$$

en effet, supposons que le centre soit en L', il est évident que le demi-diamètre dirigé de L' vers O sera dans l'ombre, et que la partie RL' d'un autre demi-diamètre sera aussi dans l'ombre; la partie éclipsée sera donc

$$d + \mathrm{RL}' = d + \mathrm{OR}' - \mathrm{L'O} = d + \varpi + \pi - \delta - \mathrm{L'O}$$
$$= \varpi + \pi - \delta + d - \mathrm{L'O}.$$

30. La plus petite valeur de L'O est Om, ainsi la plus grande quantité de l'éclipse est

$$\varpi + \pi - \delta + d - l \cos \mathrm{I}.$$

31. Si la partie éclipsée est égale au disque lunaire $= 2d$, on aura

$$2d = \varpi + \pi - \delta + d - \mathrm{L'O},$$

ou

$$\mathrm{L'O} = \varpi + \pi - \delta - d = (\varpi + \pi) - (\delta + d)$$
$$= \text{somme des parallaxes} - \tfrac{1}{2}\text{somme des diamètres};$$

prenez donc $\mathrm{L'O} = (\varpi + \pi) - (\delta + d)$ (fig. 97), et décrivez autour des deux points L', L' deux cercles tangens intérieurement au cercle de l'ombre; vous aurez

$$m\mathrm{L}' = \sqrt{(\mathrm{OL}' - \mathrm{O}m)(\mathrm{OL}' + \mathrm{O}m)}$$
$$= \sqrt{(\varpi + \pi - \delta - d - l\cos\mathrm{I})(\varpi + \pi - \delta - d + l\cos\mathrm{I})},$$

et la demi-durée de l'éclipse totale $= \dfrac{m\mathrm{L}' \, 3600'' \cos \mathrm{I}}{d☾ - d☉}$.

32. Pour faire ces calculs de demi-durée, on fait ordinairement le rayon de l'ombre $\frac{61}{60}(\varpi + \pi - \delta)$, parce qu'on a remarqué que les durées observées étaient toujours plus longues que les durées calculées, ce qu'on attribue à l'atmosphère de la terre, qui intercepte la lumière du soleil et fait le même effet que produirait une augmentation d'environ $\frac{1}{60}$ dans le rayon de la terre. Cette évaluation paraît bien considérable.

33. L'usage est d'exprimer la quantité de l'éclipse en doigts, c'est-à-dire en douzièmes du diamètre lunaire; ensorte que la formule (29) deviendra

$$\text{éclipse} = \left(\frac{12}{2d}\right)(\varpi + \pi - \delta + d - l \cos \mathrm{I}).$$

Supposez $l = 0$, c'est-à-dire, que l'opposition arrive dans le nœud, alors

$$\text{éclipse} = (\varpi + \pi) + (d - \delta) = \varpi + d - (\delta - \pi)$$
$$= \frac{60.20}{16.28} d + d - (\delta - \pi) = \left(\frac{76.48}{16.28}\right) d - (\delta - \pi),$$

quantité fort supérieure à $2d$, et qui signifie que la lune s'enfonce d'abord de tout son diamètre, et que si on augmentait ce diamètre de tout l'excédant, elle serait encore éclipsée toute entière.

Soit $2d = \text{éclipse} = \varpi + \pi + d - \delta - l \cos I$; on en conclut

$$l \cos I = \varpi + \pi - \delta - d \quad \text{et} \quad l = \frac{\varpi + \pi - (d + \delta)}{\cos I};$$

dans ce cas l'eclipse sera totale, mais instantanément; si l est moindre, l'éclipse sera totale avec plus ou moins de demeure dans l'ombre; si l est plus grande, l'éclipse ne sera que partielle.

$\varpi + \pi = 53'$ au moins; dans ce cas, $\delta + d$ est de $31'$ au plus,

$$\frac{\varpi + \pi - \delta - d}{\cos I} = \frac{53' - 31'}{\cos I} \text{ au moins} = \frac{22'}{\cos I};$$

ainsi tant que la latitude ne passe pas $22'$, on peut conclure que l'éclipse sera totale.

34. Quand on a mesuré la quantité de l'éclipse

$$E = \varpi + \pi - \delta + d - l \cos I,$$

on peut en conclure

$$\varpi = E - \pi + \delta - d + l \cos I;$$

on connaîtra donc la parallaxe de la lune, si l'on connaît celle du soleil, les demi-diamètres et la latitude l, car $\cos I$ est bien connu. Cette méthode n'a réussi que fort mal aux astronomes grecs; il est trop difficile de mesurer la quantité éclipsée, à cause de la pénombre.

35. La figure de l'ombre est toujours circulaire, ce qui prouve que la terre est sensiblement sphérique; mais comme l'arc de cercle qui termine l'ombre est toujours une petite partie de la circonférence, il est impossible de décider si

cette courbe est véritablement un cercle ou une ellipse peu aplatie.

36. La pénombre qui entoure l'ombre pure rend les observations du commencement et de la fin fort incertaines. On s'attache de préférence à noter soigneusement les instans où le bord de l'ombre atteint ou dépasse les diverses taches que l'on observe sur le disque de la lune. Ainsi une même éclipse peut offrir une centaine d'observations différentes, que l'on peut comparer à celles qui ont été faites en d'autres pays, afin d'en conclure les différences des méridiens. En effet, chacun de ces phénomènes arrive au même instant physique pour tous les observateurs. Si l'un compte minuit tandis que l'autre compte 6 heures du matin, il en résulte que l'angle horaire de l'un diffère de 90° de l'angle horaire de l'autre, et que l'angle au pôle entre les deux méridiens est de 90°; il n'y aura que 15° si la différence des tems n'est que d'une heure, et celui qui compte une heure de plus est à 15° à l'orient de l'autre, car il a vu le soleil à son méridien une heure avant l'autre.

37. Les anciens, qui n'avaient que les éclipses de lune pour déterminer les longitudes terrestres, pouvaient aisément s'y tromper de 2° et plus, car 2° ne font que 8′ de tems, et quand ils auraient eu le tems vrai à la minute, ce qui ne pouvait arriver que par hasard, il était très-facile que les deux observateurs se trompassent de 4′, chacun en sens différens, et l'on voit en effet dans leurs tables géographiques des erreurs encore plus considérables.

38. Il est clair que l'éclipse de lune sera visible pour tous les pays qui verront la lune; on pourra en faire une observation complète dans tous les pays pour lesquels la lune sera sur l'horizon pendant la durée entière, qui peut être de 3^h à $3\frac{1}{2}$.

Le lieu qui verra le milieu de l'éclipse au zénit aura pour latitude géographique la déclinaison de la lune. Élevez le pôle du globe terrestre d'un arc égal à cette déclinaison, mettez Paris sous le méridien et l'aiguille du cercle horaire sur midi; tournez

tournez le globe vers l'est, d'une quantité égale à l'heure du milieu de l'éclipse; vous verrez au zénit le lieu cherché, tout l'hémisphère supérieur de la terre verra le milieu de l'éclipse; tournez le globe, comme il sera à l'instant du commencement, tout l'hémisphère supérieur verra ce commencement; faites la même opération pour la fin, et si vous marquez sur le globe, avec un crayon, la trace de l'horizon pour ces trois instans, la partie commune aux trois hémisphères ainsi déterminés verra l'éclipse entière; les deux fuseaux qui seront de part et d'autre ne verront qu'une partie plus ou moins grande de la durée, la lune se levera éclipsée pour l'un des fuseaux et se couchera éclipsée pour l'autre. Il y aura quelque chose à retrancher des trois hémisphères, pour l'effet de la parallaxe, qui fera plus que détruire l'effet de la réfraction.

39. On peut déterminer, par une construction graphique, toutes les circonstances d'une éclipse, avec une précision d'une demi-minute de tems, ce qui est plus que suffisant pour une annonce.

Soit la ligne AX (fig. 98) qui représente l'écliptique; divisez cette ligne en parties égales par six perpendiculaires qui seront autant de cercles de latitude. Prenez chaque intervalle AA′, A′A″, etc., pour le mouvement horaire relatif sur l'écliptique; divisez chacun de ces intervalles en 60 parties, qui seront des minutes de tems; mettez-y des chiffres de cinq en cinq minutes et marquez o les intersections par les cercles de latitude. Cette figure, une fois construite et divisée, servira pour toutes les éclipses, soit de lune, soit de soleil ou d'étoiles.

40. Que A‴ soit le lieu de la lune pour l'instant du calcul; sur le premier intervalle AA′, prenez

$$AB = d☾ - d☉ = \text{mouv. relatif de la lune sur l'écliptique};$$

par exemple, soit le mouvement horaire relatif $= 32'$, vous ferez AB de $32'$ et la perpendiculaire BD de $60'$; les lignes BD et AB seront entre elles dans le rapport des tems aux mou-

vemens angulaires; par les points A et D menez la droite indéfinie ADH'.

Cela posé, prenez A*c* égale à la latitude pour le tems du calcul, la perpendiculaire *cd* sera la latitude en parties de la figure. Portez *cd* de A''' en *a'''* sur la perpendiculaire, *a'''* sera le lieu de la lune au tems du calcul.

Prenez A*a* égale à la latitude, une heure avant l'instant du calcul; portez la perpendiculaire *ab* de A'' en *a''*, *a''* sera un second point de l'orbite relative. Tirez la ligne indéfinie *a''a'''*, qui sera l'orbite relative.

Prenez A*e* égale à la différence de longitude entre la lune et le soleil à l'instant du calcul, *ef* sera la distance à la conjonction sur la figure, portez donc *ef* de A''' en O, et O sera le lieu de la conjonction et le centre de l'ombre. Si la conjonction est passée au tems du calcul, vous porterez A'''O en retrogradant sur l'écliptique; si elle n'était pas encore arrivée, vous porteriez A'''O de A''' vers X. Vous verrez sur la division de combien de minutes le point O précède ou suit l'instant du calcul, vous aurez l'instant de l'opposition.

41. Menez la perpendiculaire O*m* qui sera la plus courte distance. Abaissez la perpendiculaire *mn*, vous verrez en *n* de combien le milieu précède le tems du calcul, ou de combien il suit le tems de A'', c'est-à-dire le tems de A''' diminué d'une heure.

Prenez $AG' = \varpi + \pi + d - \delta$; faites $OC = G'H'$, et de ce rayon OC marquez les points C et F de commencement et de fin. Les perpendiculaires C*c*, F*f* vous donneront les instans de ces deux phases.

Prenez $AG'' = \varpi + \pi - d - \delta$ et faites $OI = G''H''$, et de ce rayon marquez les points I et E, qui seront ceux de l'immersion et de l'émersion, c'est-à-dire du commencement et de la fin de l'éclipse totale. Les perpendiculaires I*i*, E*e* vous donneront ces deux instans.

Prenez, si vous voulez, AG et $\varpi + \pi - \delta$ et du rayon $OG = GH$ décrivez du point O le cercle GM qui sera la section de l'ombre.

Du rayon CG décrivez des cercles autour des points C, I, m, E, F, vous aurez toutes les phases de l'éclipse.

Prolongez Om en M, $(d+m\mathrm{M})$ sera la quantité de l'éclipse. Il est visible que cette quantité dépend de Om; si $Om < \varpi + \pi - \delta - d$, l'éclipse sera totale; si $Om = \mathrm{OM}$, l'éclipse ne sera que de 6 doigts; si $Om > \varpi + \pi - \delta$, l'éclipse sera moindre encore, et si $Om = \varpi + \pi - \delta + d = \mathrm{OC}$, il n'y aura pas d'éclipse, elle se réduira à un simple contact.

Au lieu d'abaisser les perpendiculaires Cc, Ii, mn, Ee, Ff, af, ab, etc., il suffirait de promener une équerre le long de l'écliptique, pour reconnaître les pieds ou les heures de ces perpendiculaires.

A la réserve de l'écliptique et des six perpendiculaires qui seront marquées à l'encre, vous pourrez tracer le reste au crayon, afin que la figure serve pour une autre éclipse.

42. Les Grecs avaient une autre manière de compter les doigts écliptiques, ils en faisaient des douzièmes de la surface du disque, ce qui était plus exact, mais c'était alonger le calcul sans aucune nécessité. Au reste, pour calculer ainsi la quantité de l'éclipse, voici les formules que j'ai démontrées dans mon Traité d'Astronomie.

Soient R et r les rayons de deux cercles qui s'entrecoupent, d la distance des deux centres, calculez

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{E} = \frac{\left(\frac{\mathrm{R}+r+d}{2} - d\right)\left(\frac{\mathrm{R}+r+d}{2} - r\right)}{rd},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{T} = \frac{\left(\frac{\mathrm{R}+r+d}{2} - d\right)\left(\frac{\mathrm{R}+r+d}{2} - \mathrm{R}\right)}{\mathrm{R}d},$$

$$\text{quantité de l'éclipse} = \frac{12 \text{ doigts}}{\mathrm{C}}\left[(\mathrm{E} - \tfrac{1}{2}\sin 2\mathrm{E}) + \frac{\mathrm{R}'}{r'}(\mathrm{T} - \tfrac{1}{2}\sin 2\mathrm{T})\right].$$

Ces trois formules résolvent le problème d'une manière plus courte et plus exacte que la méthode approximative dont s'est servi Ptolémée. C est la demi-circonférence dont le rayon $= 1$.

Éclipses de soleil.

43. A l'instant où le centre de la lune entre dans le cône lumineux qui s'étend du soleil à la terre, la distance angulaire de la lune à l'axe de ce cône est $\varpi - \pi + \delta$; à l'instant où le bord de la lune entre dans ce cône, la distance est $\varpi - \pi + \delta + d$ (9).

Mais le bord précédent de la lune ne peut pénétrer dans ce cône sans ôter la lumière d'une partie du soleil à l'observateur qui est en E à la surface de la terre (fig. 94), et qui voit le bord du soleil à l'horizon, puisque cet observateur a son zénit sur le prolongement du rayon perpendiculaire TE.

44. Un observateur placé en E′ verrait le centre du soleil sur le rayon E′*r*S, et le bord sur la droite E′*o*O′, et par conséquent à une certaine distance du bord de la lune qui entre en *n*′. Il n'y aurait donc point encore d'éclipse pour l'observateur en E′.

Imaginez le plan L′*ro* tangent à l'orbite V′*n*′L′ de la lune. Ce plan s'appelle le *plan de projection*, *or* sera la projection du demi-diamètre solaire, le point *r* est la projection du centre, *o* est celle du bord. Les observateurs placés en différens points de l'hémisphère éclairé dont la coupe est E*a*F, verront tous le centre du soleil répondre à un point différent sur le plan de projection.

45. La section du cône par ce plan sera circulaire, le rayon de ce cercle, vu du centre de la terre, soutendrait un angle égal à $\varpi - \pi + \delta$; soit donc O le centre du soleil supposé immobile; du rayon OE $= \varpi - \pi + \delta$ (fig. 99), décrivez le cercle ED; il représentera la section du cône. Soit OA la latitude de la lune en conjonction, NLAV l'orbite relative, la perpendiculaire O*m* sera la plus courte distance des centres; soit OL $= \varpi - \pi + \delta + d$, marquez les points L et V, qui indiqueront le premier et le dernier instant de l'éclipse; le point E sera celui par lequel le bord

précédent de la lune entrera dans le cône; le point S sera celui par lequel le bord suivant sortira du cône. En effet, des points L et V avec le rayon $LE = VS = d$, décrivez deux cercles qui représenteront le disque lunaire; les points E et S seront les points de contact de ces deux petits cercles avec le cercle EDS section du cône.

46. Nous aurons, comme pour les éclipses de lune,

$$\text{tang}\, I = \frac{d\lambda}{d☾ - d☉}; \quad Om = l \cos I; \quad Am = l \sin I,$$

$$\text{tems de } Am = \frac{l \sin I \cos I\, 3600''}{d☾ - d☉};$$

$$mL = \sqrt{(OL + Om)(OL - Om)};$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{durée} = \frac{mL\, 3600'' \cos I}{d☾ - d☉}.$$

Au lieu du calcul trigonométrique, nous pourrons employer la construction graphique, comme pour les éclipses de lune, et nous aurons les circonstances générales de l'éclipse de soleil, ou plutôt de l'éclipse de terre; nous saurons le moment où l'ombre de la lune commence à dérober le soleil à quelqu'un des points de la terre, et celui où l'éclipse est entièrement terminée; mais le plus important et le plus difficile est de déterminer quels seront les lieux de la terre qui verront l'éclipse, et de trouver des règles pour calculer toutes les circonstances de l'éclipse pour un lieu donné, car ces circonstances varient avec la position de l'observateur, position qui, relativement à la lune et au soleil, change elle-même à chaque instant par le mouvement diurne.

47. Pour tous ces calculs, il faut tenir compte de la parallaxe, qui est différente pour chaque lieu de la terre, et dont les effets changent à chaque instant; pour éluder l'effet de ces parallaxes, on a fait un usage ingénieux du plan de projection L'*ro* (fig. 94); on est parvenu d'abord à représenter tous les phénomènes par une construction graphique; ensuite, pour plus de précision, on a appliqué le calcul trigonométrique à cette construction; j'ai donné des formules pour

calculer de cette manière toutes les circonstances qui peuvent nous intéresser dans une éclipse de soleil; mais en s'appliquant à perfectionner une méthode assez compliquée dans ses principes, on n'a pas songé à examiner si cette méthode avait encore la simplicité qu'on avait eu d'abord en vue, et s'il n'était pas possible d'obtenir la même précision par des moyens plus faciles et plus naturels. Ce n'est pas le seul exemple que nous ayons en Astronomie, de méthodes qui, comme approximations, avaient un certain mérite, et qui, corrigées successivement pour en diminuer les erreurs, sont devenues plus compliquées que les solutions exactes qu'on aurait trouvées en prenant une autre route. Nous laisserons donc là tout-à-fait le plan de projection et les méthodes, soit trigonométriques, soit analytiques qu'on a successivement proposées pour en tirer le meilleur parti; nous n'emploierons que la simple trigonométrie et la plus simple formule de parallaxe, c'est-à-dire celle de la parallaxe de hauteur. Nous déterminerons par là tous les lieux qui verront l'éclipse, ceux qui la verront centrale ou d'un nombre donné de doigts; la même méthode nous fera trouver toutes les phases pour un lieu donné; mais quant aux conséquences qu'on peut tirer d'une éclipse, soit pour les longitudes géographiques, soit pour corriger les tables de la lune, nous emploierons aussi d'autres méthodes, et nous tâcherons d'indiquer les circonstances où elles peuvent mériter la préférence.

48. Voyons d'abord comment il peut se faire que le soleil soit entièrement éclipsé pour un lieu de la terre, et visible tout entier, dans le même moment, pour un autre lieu. Soit (fig. 100) T le centre de la terre, O un point de la surface dont le zénit est en Z sur le rayon TO prolongé jusqu'à la sphère de la lune, à celle du soleil ou des étoiles, comme on voudra. Soit S le soleil, dont la distance au zénit sera ZTS pour le centre de la terre, et ZOS pour l'observateur; que la lune soit dans le même vertical à la distance ZOL. Cet observateur verra donc le centre de la lune sur le centre du soleil. Supposons égaux les diamètres appa-

rens, qui ne diffèrent jamais que de peu de minutes, tantôt en plus, tantôt en moins; les bords des deux astres seront sur les mêmes droites O*a*, O*b*, et l'éclipse sera totale; tandis que du centre de la terre les bords du soleil seront vus sur les lignes T*a*, T*b*, qui ne rencontrent O*a* et O*b* que derrière la lune; le centre de la terre verrait donc le soleil tout entier et tout lumineux comme à l'ordinaire; des observateurs en A et en B n'auraient aucune éclipse; ils auraient le soleil à leur zénit, et la lune en serait éloignée d'un angle que la parallaxe augmenterait encore; pour des observateurs placés en D ou en E, la lune serait encore beaucoup plus loin du soleil.

49. Soit HR l'horizon (fig. 101), HMPR le méridien de Paris ou de tout autre lieu, PS le cercle de déclinaison du soleil S, PL celui de la lune L, L*a* le demi-diamètre du disque lunaire, S*b* le demi-diamètre du disque solaire; pour le centre de la terre, la distance des bords de la lune et du soleil serait l'arc *ba*; il n'y aurait donc point d'éclipse. Mais si cet arc *ab* n'est que de quelques minutes, la parallaxe qui abaissera la lune L dans le vertical VL diminuera cette distance, pourra la rendre nulle ou même négative, le disque de la lune pourra empiéter plus ou moins sur le disque du soleil et produire une éclipse plus ou moins considérable.

50. Voulons-nous avoir l'effet de la parallaxe tout entier, au lieu de rapporter la lune au zénit V de Paris et au vertical VL, qui est oblique à la distance des centres SL, plaçons sur cette distance prolongée SLM un zénit Z; la parallaxe portera le bord *a* de la terre directement vers S; faisons $aZ = 90°$, L*a* descendra vers S de toute la parallaxe horizontale; *ab* diminuera donc de la quantité de cette parallaxe, et si *ab* est égal à cette parallaxe, la distance des bords se réduirait à 0 si le soleil lui-même n'avait une parallaxe. La distance *ab* diminuera donc de ϖ parallaxe de lune, mais elle s'augmentera de π parallaxe du soleil; la diminution totale sera donc $(\varpi - \pi)$; ainsi dès que la distance vraie *ab*, par le mouvement relatif de la lune, sera réduite à la quantité

$(\varpi - \pi)$, il sera possible de trouver un lieu dont le zénit Z soit à 90° de b sur le prolongement de SL; la parallaxe amènera la lune en b, et le lieu aura un simple contact qui arrivera dès que l'on aura $SL = \varpi - \pi + \delta + d$, ce qui est précisément le rayon qui a servi à nous donner le commencement et la fin de l'éclipse générale (45).

51. Imaginons l'arc ZP, PZ sera le méridien du lieu qui aura le contact, PZ sera la distance du lieu au pôle du monde, ou le complément de sa latitude, HMP est le méridien de Paris, ZPM est donc la différence des méridiens; nous connaissons l'heure de Paris, pour laquelle nous avons calculé la distance vraie LS, nous avons donc l'angle horaire de Paris MPS; si nous pouvons trouver ZPS, nous aurons ZPM = ZPS — MPS; mais dans le triangle sphérique ZPS nous connaissons

$$PS = 90° - \text{déclinaison } \odot,$$
$$SZ = Sb + 90° = 90° + \tfrac{1}{2}\text{diam. } \odot = 90° + \delta;$$

nous pouvons calculer l'angle PSL, nous aurons donc

$$\cos PZ = \sin \text{latit.} = \cos S \sin PS \sin ZS + \cos PS \cos ZS$$
$$= \cos S \cos D \cos \delta - \sin D \sin \delta,$$
$$\cot ZPS = \frac{\cot ZS \sin PS}{\sin S} - \cos PS \cot S$$
$$= \frac{\tang \delta \cos D}{\sin S} - \sin D \cot S.$$

52. ZPS sera donc l'angle horaire du lieu; cet angle est plus grand que l'angle horaire de Paris; le soleil est plus loin du méridien du lieu que de celui de Paris : non-seulement nous connaîtrons la différence des méridiens, mais nous saurons si elle est à l'est ou à l'ouest; ainsi le lieu sera parfaitement connu. Nous aurons

$$\text{longitude cherchée} = \text{longitude de Paris} + (ZPS - MPS)$$
$$= \text{long. de Paris} - \text{ang. hor. de Paris} + ZPS,$$

et cette longitude serait à l'occident de Paris, en supposant que S soit dans la partie orientale du ciel, et l'heure de Paris une heure de la matinée.

Si nous supposons, au contraire, que la figure représente la partie occidentale, l'heure sera une heure de la soirée, l'heure du lieu sera plus avancée, la longitude orientale du lieu sera $=$ longitude de Paris $+$ MPS

$=$ longitude de Paris $+$ ZPS $-$ MPS

$=$ longit. à l'orient. de Paris $-$ angle hor. de Paris $+$ angle horaire du lieu.

Cette méthode est tellement simple, que l'on ne conçoit pas qu'elle n'ait encore été employée par aucun astronome, que je sache, mais même qu'elle n'ait pas été trouvée la première.

53. Le point ainsi déterminé sera le premier qui ait un simple contact.

L'instant d'après la distance vraie LS sera diminuée, ab sera donc moindre que $\varpi - \pi$; pour obtenir un contact, il ne faudra plus une si grande distance au zénit. Soit.....

$ab = (\varpi - \pi) \sin N$, ou $\sin N = \frac{ab}{\varpi - \pi} = \sin bZ$; N sera la distance au zénit qui nous donnera la parallaxe de hauteur $= ab$ et suffisante pour anéantir la distance ab des bords; avec $SZ = bZ + \delta$, PS et l'angle S, nous aurons

$$\cos PZ = \sin \text{latit.} = \cos S \sin PS \sin ZS + \cos PS \cos ZS,$$

$$\cot ZPS = \frac{\cot ZS \sin PS}{\sin S} - \cos PS \cot S,$$

et la longitude par les formules (51) et (52).

ZS sera la distance vraie du soleil au zénit.

54. Il viendra un moment où SL sera $= \varpi - \pi$; en supposant $SZ = 90°$, nos formules deviendront

$$\cos PZ = \sin \text{latit.} = \cos S \sin PS \text{ et } \cot ZPS = -\cos PS \cos S.$$

Ce calcul nous donnera la latitude et la longitude du lieu qui le premier verra l'éclipse centrale.

55. Plus tard la distance SL sera moindre que la parallaxe $(\varpi - \pi)$; il faudra chercher bZ, SZ et le reste par les formules de l'article 53.

Nous aurons ainsi successivement tous les lieux qui verront l'éclipse centrale à différentes heures, tant de Paris que de ces lieux mêmes.

A mesure que SL diminuera, nous pourrons, avec diverses valeurs de SZ, avoir des parallaxes différentes, et par conséquent des éclipses de grandeurs différentes, depuis le simple contact dans la partie boréale, jusqu'à la centralité, et même au-delà, dans la partie australe du soleil; quelquefois même un simple contact du bord austral du soleil avec le bord boréal de la lune, si nous pouvons avoir $\varpi - \pi = SL + \delta + d$, ou si $SL = \varpi - \pi - \delta - d$, ce qui est très-possible.

56. Supposons même que la distance SL soit moindre que $\delta + d$, ensorte que le disque de la lune couvre une partie du disque solaire pour le centre de la terre, il sera possible d'anéantir cette éclipse en cherchant un zénit Z sur le prolongement et au-dessous de LS, qui nous donne une parallaxe $(\varpi - \pi) \sin bZ = ab$, d'où

$$\sin bZ = \frac{ab}{\varpi - \pi}; \quad SZ = bZ - \delta;$$

alors dans le triangle PSZ nous aurions $PSZ = 180° - PSL$, SZ et PS, d'où nous tirerions PZ et ZPS par les formules ci-dessus; mais ici la différence des longitudes MPZ sera la somme des angles horaires et non plus leur différence. Pour tous ces cas divers, ce sont toujours les deux mêmes formules trigonométriques et la même formule de parallaxe de hauteur.

57. Ce n'est pas tout encore; dès que la distance des bords *ab* (fig. 101) sera devenue moindre que la parallaxe horizontale, et que nous serons obligés de recourir à la parallaxe de hauteur pour mettre les bords en contact, nous pourrons obtenir encore un simple contact, en faisant agir obliquement la parallaxe, au lieu de la faire agir directement selon l'arc LS.

Remarquons auparavant un grand avantage de cette méthode; supposons que pour la même heure de Paris nous

ayons déterminé le lieu qui verra un simple contact par la parallaxe de hauteur, l'éclipse centrale par une autre parallaxe de hauteur, et l'éclipse la plus australe par la parallaxe horizontale; tous ces lieux, qui seront dans un même vertical, seront nécessairement dans un grand cercle de la sphère terrestre, et deux de ces points, celui du contact et de la phase la moins boréale ou la plus australe, suffiront pour trouver tous les lieux intermédiaires qui verront une éclipse de grandeur aussi intermédiaire; car deux points donnés sur un globe, rien de plus aisé que de les joindre par un arc de grand cercle, et de pareils arcs tracés de 10′ en 10′ pour toute la durée de l'éclipse, donneraient une idée assez exacte de tous les lieux qui verront l'éclipse, ou de la zône terrestre que parcourt l'ombre de la lune. Venons à l'usage de la parallaxe oblique.

58. Soit donc $LS < (\varpi - \pi) + (\delta + d)$ (fig. 102); sur ce côté connu formons avec les côtés $SV = \delta + d$ et $LV = \varpi - \pi$, le triangle SLV, que nous pouvons considérer comme rectiligne, pour simplifier un peu le calcul, ce qui au reste n'est nullement nécessaire, calculons

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} SLV = \frac{\left(\frac{SL+SV+LV}{2} - SL\right)\left(\frac{SL+SV+LV}{2} - LV\right)}{SL.LV};$$

nous connaîtrons SLV, que nous retrancherons de PLS; nous aurons PLV et $PLZ = 180° - PLV$, $ZL = 90° - (\varpi - \pi)$, $PL = 90° -$ déclin. ☾; nous calculerons

$$\cos PZ = \cos PLZ \sin ZL \sin PL + \cos ZL \cos PL,$$

$$\cot ZPL = \frac{\cot ZL \sin PL}{\sin ZLP} - \cos PL \cot ZLP,$$

$$ZPS = ZPL + LPS = ZPL + (\text{Ⓐ}\odot - \text{Ⓐ}☾);$$

nous aurons donc la longitude et latitude, et toujours par les mêmes formules.

59. Portons LV de l'autre côté en LV′, le triangle LSV′ sera parfaitement égal et semblable à LSV; nous avons donc

déjà SLV′, nous aurons

$$PLV' = PLS + SLV' = PLZ' = 180° - PLV',$$

et nous calculerons PZ′, Z′PL et ZPS par les formules (58), et nous aurons pour le même instant un autre point qui verra un simple contact à l'horizon.

60. Pour abréger ces calculs, on pourra faire, pour toute la durée de l'éclipse, de 10 en 10′, une table des côtés PS, PL, SL, des angles LPS, PSL et SLP; nous donnerons ci-après les moyens les plus expéditifs; on pourra, si l'on veut, en faire une partie au moyen de l'orbite relative LmL, et de la plus courte distance Sm.

61. Après le milieu, entre le milieu m et la conjonction en ascension droite, et après la conjonction, on aura toujours des triangles pareils, toujours les mêmes formules; une figure facile à construire grossièrement suffira pour guider le calculateur dans tous les cas; on peut même disposer les formules de manière à n'avoir pas besoin de figure.

62. Enfin, voulez-vous connaître les lieux qui verront un simple contact ou une éclipse d'un nombre donné de doigts pour plus grande phase, le moyen en est encore assez facile (fig. 103); amenez par la parallaxe le centre V de la lune sur la ligne de plus courte distance Sm, de manière que $SV = \delta + d$, ou $SV = \delta + d - n$ doigts, vous connaîtrez mV, vous aurez mL par l'orbite relative, vous ferez

$$\tang mLV = \frac{mV}{mL}, \qquad LV = \frac{mL}{\cos mLV};$$
$$PLV = PLS - mLV, \qquad PLZ = 180° - PLV,$$
$$\sin ZV = \frac{LV}{\varpi - \pi}, \qquad ZL = ZV - LV;$$

dans le triangle ZLP vous aurez ZL, PL et l'angle compris; vous calculerez PZ, ZPL, ZPS, et vous aurez encore la longitude et la latitude, toujours par les mêmes formules.

63. Dans l'usage des parallaxes obliques, vous pourrez prendre pour donnée l'un des angles avec les côtés SL et SV,

par exemple, LSV; vous en conclurez LV, ZV et ZL; le reste du calcul sera le même.

64. Dès que $SL < (\varpi - \pi) + (\delta + d)$, on a deux points V, V′, deux triangles égaux et semblables SLV, SLV′, deux zénits Z et Z′ qui ont un simple contact à l'horizon; les triangles SLV, d'abord fort obliques, ont l'angle en L fort aigu, l'angle en V ou V′ fort obtus, L s'ouvre de plus en plus, et V se ferme; ainsi que l'angle LSV, ce dernier croîtra depuis o jusqu'à 180°, et l'on aura alors (fig. 102)

$$\varpi - \pi = SL + (\delta + d), \quad \text{ou} \quad SL = (\varpi - \pi) - (\delta + d);$$

dans ce moment les points V et V′ se confondront, on n'aura plus qu'un seul zénit, un seul point de contact à l'horizon; la courbe formée par tous ces zénits, qui donnent ces contacts à l'horizon, finira comme elle a commencé, par un point unique; elle formera une sorte d'ovale dont on peut avoir la largeur à chaque instant, car cette largeur est l'arc ZZ′, qui sépare les deux zénits qui voient simultanément le contact; or $ZL = 90° - LV = Z'L = 90° - LV'$; donc

$$\sin \tfrac{1}{2} ZZ' = \sin ZL \sin SLV = \sin [90° - (\varpi - \pi)] \sin SLV$$
$$= \cos(\varpi - \pi) \sin SLV.$$

La largeur ZZ′ de la courbe ne peut donc devenir o qu'avec sin SLV; les deux branches de la courbe ne se croiseront donc en aucun point; elles ne se toucheront qu'aux points extrêmes.

65. Si la plus courte distance $= (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, ce sera au milieu de l'éclipse générale que l'angle LSV deviendra 180°, et dans l'autre moitié de l'éclipse on verra revenir en ordre inverse tous les mêmes angles S, L, V, les mêmes triangles SLV, mais non les mêmes triangles LPZ, parce que les angles PLS et les côtés PL auront changé.

66. Si la plus courte distance $Sm < (\varpi - \pi) - (\delta + d)$; c'est avant le milieu que l'angle LSV sera de 180° et que cesseront les contacts à l'horizon, pour recommencer après le milieu, quand on aura $SL = \varpi - \pi - (\delta + d)$; par cette

interruption, on voit que la courbe des contacts sera fermée et formera une ovale de largeur inégale.

67. Tant que $SL < (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, les contacts à l'horizon sont impossibles; pour avoir de simples contacts, il faut employer la parallaxe de hauteur.

A la conjonction en ascension droite (fig. 104), si $SL = (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, le zénit Z″ qui voit le contact, est sur SP; ensorte que $SZ'' = 90° - \delta$; mais si $SL > (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, on aura deux zénits Z et Z′, qui verront des contacts à l'horizon, $LZ = LZ' = 90° - (\varpi - \pi)$, ces arcs seront ordinairement $> LP$, et la distance ZZ′ de ces zénits se trouvera par la formule $\sin \frac{1}{2} ZZ' = \cos (\varpi - \pi) \sin SLV$.

La différence de longitude est la somme des deux angles horaires quelque tems après la conjonction. Cette différence de longitude entre Z et Z′ sera la différence des deux angles horaires. Le point V, qui donnait un zénit plus occidental, en donnera un plus oriental; les deux branches auront dû se croiser dans l'intervalle, et l'ovale des contacts à l'horizon prendra la forme d'un 8 de chiffre arabe. Cet entrelacement des deux branches n'aura jamais lieu que pour l'une des deux courbes, et pour celle qui est plus voisine du méridien universel. Dans notre figure, la conjonction suivait le milieu; ce sera la seconde courbe qui aura un nœud; si la conjonction avait précédé le milieu, c'eût été la première courbe.

68. Ces deux courbes auront un point de contact au milieu de l'éclipse, si l'on a $Sm = (\varpi - \pi) - (\delta + d)$; elles seront séparées si $Sm < (\varpi - \pi) - (\delta + d)$; il n'y aura qu'une courbe si $Sm > (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, et cette courbe aura un nœud. Mais, comme nous l'avons dit, toutes ces considérations sont purement curieuses, on n'en a nul besoin pour tracer les courbes.

69. La ligne des simples contacts pour plus grande phase sera unique si la courbe des contacts à l'horizon est unique; il y aura deux courbes dans le cas contraire, l'une au nord,

l'autre au sud du soleil, il y a deux courbes de contact à l'horizon.

70. Pour calculer par cette méthode toutes les circonstances d'une éclipse, je suppose qu'on ait trouvé fort exactement par les tables du soleil et de la lune, et pour un instant qui ne soit pas fort éloigné du milieu de l'éclipse générale ou de la conjonction, la longitude du soleil, son mouvement horaire, sa parallaxe et son demi-diamètre; la longitude et la latitude de la lune, les mouvemens horaires, la parallaxe et son changement diurne, le demi-diamètre.

De ces premières données vous conclurez d'heure en heure les longitudes et les latitudes, desquelles vous déduirez les ascensions droites et les déclinaisons tant de la lune que du soleil.

71. Prenons pour exemple l'éclipse annulaire de 1764, la plus remarquable qu'on ait observée en Europe depuis plus de 80 ans, et supposons que vous ayez trouvé les quantités suivantes :

T. vrai à Paris.	Asc.dr. ☉	Déclin. ☉=D.	Asc. dr. ☾	Décl. ☾ D′	$\varpi - \pi$	d	$d\text{Æ}$	D′ — D
8h matin.	11°5′24″	4°46′28″ B	9°49′14″	4°49′44″	54′2″5	14′47″5	1°16′10″	3′16″
9	7.40	47.26	10.15.34	5. 3.52	2,0	47,3	0.52. 6	16.26
10	9.56	48.24	10.41.55	5.18. 0	1,5	47,2	0.28. 1	29.36
11	12.13	49.22	11. 8.18	5.32. 8	1,0	47,1	0. 3.55	42.46
0 midi.	14.29	50.20	11.34.40	5.46.16	0,5	46,9	+0.20.11	55.56
1 soir.	16.46	51.18	12. 1. 4	6. 0.24	54.0,0	14.46,8	+0.44.18	69. 6

Toutes ces quantités croissent assez régulièrement pour qu'on puisse étendre cette table aux dixaines de minutes de tems, par de simples parties proportionnelles. On fera cette opération pour les déclinaisons du soleil et de la lune, pour

les différences d'ascension droite et de parallaxes. Quant au diamètre, on pourrait supposer partout $d = 14' 47''$, $\delta = 15' 57''$ et $\delta + d = \sigma = 30' 44''$.

On peut supposer le mouvement relatif en ascension $= 24' 6''$ sur l'équateur; il sera $24' 6'' \cos D'$ dans la région de la lune, ou de $23' 59'',8$, et le mouvement relatif en déclinaison $= 13' 10''$.

72. Le calcul de l'orbite relative par rapport à l'équateur, est un peu moins simple que par rapport à l'écliptique, parce que le soleil a un mouvement en déclinaison, aussi bien que la lune. Les astronomes se contentent de multiplier le mouvement relatif d'ascension droite par le sinus de la distance polaire de la lune, pour avoir le mouvement dans la région de la lune; ce mouvement serait donc de $24' 6'' \cos 5° 25' = 23' 59'',5$; la tangente de l'inclinaison de l'orbite relative serait donc $\tang I = \frac{dD'}{dA \cos D'} = \frac{13' 10''}{23' 59'',5} = 28° 45' 26''$, et la plus courte distance $= 44' 54'' 6 \cos I = 39' 22'',3$. Cette méthode est d'une exactitude suffisante, en prenant, comme nous venons de faire, la déclinaison de la lune pour le milieu de l'intervalle. Pour savoir ce qu'on néglige, prenons une voie plus sûre.

73. Soit PL et PC les distances vraies de la lune, une heure avant la conjonction en L, et à la conjonction en C l'angle P sera le mouvement vrai de la lune en ascension droite pendant une heure; pour avoir l'angle C que l'orbite vraie LC fait avec le cercle de déclinaison, le triangle LPC donne

$$\cot PCL = \frac{\cot PL \sin PC - \cos PC \cos P}{\sin P} = \frac{\tang D \cos D' - \sin D' \cos P}{\sin P}$$

$$= \frac{\tang D \cos D' - \sin D' + 2 \sin D' \sin^2 \tfrac{1}{2} P}{\sin P}$$

$$= \frac{\sin D \cos D' - \sin D' \cos D' + 2 \sin D' \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} P}{\sin P \cos D}$$

$$= \frac{\sin (D - D') + 2 \sin D' \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} P}{\sin P \cos D}$$

$=$

$$= -\frac{\sin(D'-D)}{\sin P \cos D} + \frac{2\sin D' \sin^2 \frac{1}{2} P}{2\sin \frac{1}{2} P \cos \frac{1}{2} P}$$

$$= -\frac{\sin(D'-D)}{\sin P \cos D} + \sin D' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P,$$

et

$$\cot LCS = +\frac{\sin(D'-D)}{\sin P \cos D} - \sin D' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} I.$$

74. Cette formule, si le soleil n'avait aucun mouvement, ou si nous mettions une étoile en place du soleil, nous donnerait l'inclinaison de l'orbite relative par rapport au cercle de déclinaison; le premier terme est celui qu'emploient les astronomes; ils négligent le second, qui dans notre exemple produirait presqu'une minute, et pourrait produire beaucoup plus si la déclinaison était plus forte.

Dans le cas d'une étoile, en abaissant la perpendiculaire $Sm = CS \sin LCS$, nous aurions la plus courte distance.

Mais pour avoir l'inclinaison relative dans une éclipse de soleil, il faut mettre pour $(D'-D)$ le mouvement relatif 13′ 10″ au lieu du mouvement propre 14′ 8″, le mouvement relatif $P = 24'\ 6''$ au lieu du mouvement propre 26′ 23″, et prendre la déclinaison D une heure avant la conjonction, dans le premier terme, et la déclinaison à la conjonction dans le second terme. Nous aurons ainsi $\operatorname{tang} I = \operatorname{tang} 28^\circ\ 44'\ 15'',4$, plus faible de 1′ 10″,6 que par la méthode commune; la plus courte distance $Sm = SC \cos I = 44'\ 54'',6 \cos I = 39'\ 22'',7$, plus forte de 0″,4 que par la méthode commune, ce qui est peu important dans cet exemple. $Sm \operatorname{tang} I = Cm = 21'\ 35'',5$ est le mouvement relatif entre le milieu de l'éclipse et la conjonction en ascension droite. $\frac{Sm \operatorname{tang} I\ 3600'' \cos I}{P \cos D} = 47'\ 20'',4$ sera le tems entre le milieu et la conjonction.

Avec ces données, on calculerait le commencement et la fin, comme dans une éclipse de lune.

75. On peut déterminer la conjonction en ascension droite, d'après le tableau suivant (96), où l'on voit qu'à 11 heures la

différence d'ascension droite était encore de 3′ 55″, en disant

$$24'' \ 6^{''} : 1^h :: 3' \ 55'' : 9' \ 46'' ;$$

ainsi la conjonction serait à 11^h 9′ 46″; retranchez-en 47′ 20″,4, vous aurez le milieu à 10^h 22′ 26″.

A 11^h la différence de déclinaison est 42′ 46″, et elle augmente de 13′ 10″ par heure ; ainsi

$$1^h : 13' \ 10'' :: 9' \ 46'' : 2' \ 8'',6,$$

et la déclinaison en conjonction sera 44′ 54″,6, comme nous l'avons supposé dans les calculs précédens.

On peut différer ces calculs jusqu'après l'interpolation, qui étendra aux dixaines de minutes les quantités du tableau (71).

76. Pour calculer les angles S et L et la distance des centres E = SL, on se servira des formules suivantes :

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L-S) = \frac{\sin\frac{1}{2}(D'-D)\cot\frac{1}{2}P}{\cos\frac{1}{2}(D'+D)} = \frac{\frac{1}{2}(D'-D)}{\frac{1}{2}d\text{Æ}\cos\frac{1}{2}(D'+D)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L+S) = \frac{\cos\frac{1}{2}(D'-D)\cot\frac{1}{2}P}{\sin\frac{1}{2}(D'+D)},$$

$$L = \tfrac{1}{2}(L+S) + \tfrac{1}{2}(L-S),$$

$$S = \tfrac{1}{2}(L+S) - \tfrac{1}{2}(L-S),$$

$$\sin E = \frac{\cos D \sin d\text{Æ}}{\sin L} = \frac{\cos D' \sin d\text{Æ}}{\sin S}.$$

77. On remarquera que les angles au soleil vont toujours en diminuant jusqu'à la conjonction, où ils passent par o, changent de position et vont en augmentant jusqu'à la fin.

Que les angles à la lune vont en augmentant jusqu'à la conjonction, où ils arrivent à 180°, après quoi ils vont en diminuant jusqu'à la fin ; on aurait pu les faire plus grands que 180°, et croissant jusqu'à la fin.

$$\left.\begin{array}{l} \varpi - \pi = 54' \ 3'' \\ \delta - d = 30.44 \end{array}\right\} \text{somme} = 84' \ 47''.$$

C'est la distance des centres pour le commencement; on voit par

le tableau que cette distance a dû arriver un peu avant $7^h\ 40'$, où $E = 83'\ 56''$, avec une diminution de $4'\ 3''$ pour $10'$.

$243'' : 10'$, ou $243'' : 600''$, ou $81'' : 200'' :: 51'' : 126'' = 2'\ 6''$;

ainsi le commencement de l'éclipse aura lieu à $7^h\ 37'\ 54''$.

L'angle S change $1°\ 23'\ 20''$ pour $10'$; il changera de $25'$ pour $2'\ 6'' = 2',1$; il sera de $91°\ 6'\ 33''$ pour $7^h\ 37'\ 54''$.

La déclinaison du soleil change de $9''$ pour $10'$, de $0'',9$ pour $1'$; elle changera de $1''$ et sera $4°\ 46'\ 7''$.

Avec ces données, les formules

$$\sin H = \cos D \cos S \sin ZS + \sin D \cos ZS$$
$$= \cos 4°\ 46'\ 7'' \cos 91°\ 6'\ 33'' = \sin \text{lat.} = 1°\ 6'\ 19'' \text{A},$$
$$\cot ZPS = \frac{\cos D \cot ZS}{\sin S} - \sin D \cot S$$
$$= -\sin 4°\ 46'\ 7'' \cot 91°\ 6'\ 33'' = 89°55'\ 17'',$$

angle de Paris $(-4^h\ 22'\ 6'') = 65.31.30$

longitude à l'occident de Paris..... 24.23.47
ou à l'occident de l'île de Fer..... 4.23.47
Heure du lieu ou distance à midi ..... $5^h\ 59'\ 41''\ 8^m$.

En faisant $ZS = 90°$, nous avons mis le centre du soleil à l'horizon; nous aurions pu, sans alonger beaucoup le calcul, y mettre le bord supérieur, en faisant $ZS = 90°\ 15'\ 57''$; nous aurions pu y mettre le centre de la lune, en faisant $ZS = 90°\ 30'\ 44''$, la parallaxe eût été la même, et la réfraction eût élevé le bord en contact de $2'$ au-dessus.

Il n'y a pas d'autre calcul à faire pour cet instant; ce lieu est le seul qui voit un contact; et il le voit à l'horizon. L'éclipse va commencer.

Ce lieu étant fort près de l'équateur, nous avons pu, sans inconvénient, employer la parallaxe équatoriale, qui est la plus grande de toutes.

78. A $7^h\ 40'$, la distance n'est plus que de $83'\ 56''$

$\delta + d = \sigma = 30.44$

la distance des bords n'est plus que de 53.12

Il suffirait d'une parallaxe de $53'\ 12''$ pour opérer un con-

tact dans le vertical; la parallaxe horizontale 54′ 3″ produirait une éclipse de 51″ dans la partie boréale du soleil.

79. Pour trouver le contact on ferait $\sin N = \frac{53' 12''}{54.\ 3}$; $ZS = N + \delta$; ensuite avec D et S pour $7^h\ 40'$ et les formules

$$\sin H = \cos D \cos S \sin ZS + \sin D \cos ZS,$$

$$\cot ZPS = \frac{\cos D \cot ZS}{\sin S} - \sin D \cot S;$$

on aurait la latitude et l'angle horaire, l'heure et la longitude, telles qu'on les trouve dans la table II

Dans ce premier calcul, l'angle S peut être aigu ou obtus, suivant les diverses positions de la lune par rapport au pôle boréal, d'où se compte l'angle PSL; mais la règle des signes suffit pour guider le calculateur. On formerait ainsi la table II.

A $13^h\ 10'$, $E > (\varpi - \pi) + \delta + d$, on cherchera, par une règle, de trois, l'instant où $E = \varpi - \pi + \delta + d$, comme pour le commencement, et par une opération toute semblable on trouve le dernier point qui verra un simple contact à l'horizon.

80. Pour l'opération suivante, ou pour former la table III, on aura

$$ZS = 90° + E - (\varpi - \pi) - d;$$

ainsi, pour $7^h\ 40'$..... $90° + E = 91°23'56''$

$$-(\varpi - \pi) = -54.\ 3$$

$$-d = -14.47$$

$$ZS = 90.15.\ 6;$$

D et S sont comme dans l'opération précédente.

Les formules trigonométriques sont les mêmes, et la règle des signes guidera de même le calculateur.

81. La quantité de l'éclipse est

$$(\varpi - \pi) - (\delta + d) - E = p + \sigma - E,$$

laquelle ira toujours en augmentant à mesure que E diminuera; mais elle ne peut surpasser $2d = 29'\ 34''$; c'est à cette quantité qu'on la réduira si elle est plus grande. Ainsi, à 9^h,

$$p + \sigma = 84'\ 46'',\quad E = 54'\ 27'',\quad p + \sigma - E = 30'\ 19''.$$

Cette quantité est moindre que 2δ et plus grande que $2d$; on la réduit à $29' 34''$. La lune n'atteint pas encore le bord austral, mais elle a déjà dépassé le bord boréal; l'éclipse est annulaire.

A $9^h 10'$, $p+\sigma=84' 46''$, $E=51' 25''$, $p+\sigma-E=33' 21''$, qui surpasse 2δ, ou $31' 54''$ de $1' 27''$; le bord de la lune est par-delà le soleil, l'éclipse est $2d-1' 27''=29' 34''-1' 27''$ $=28' 7''$; ce qui se trouve en faisant.....

$$\begin{aligned} p &= 54' \ 2'' \\ E &= 51.25 \\ \hline p-E &= 2.37 \\ \sigma &= 30.44 \\ \hline E-(p-\sigma)=E+\sigma-p=\sigma(p-E) &= 28.\ 7. \end{aligned}$$

Cette règle servira jusqu'à ce que l'éclipse surpasse $2d$ sans atteindre à 2δ, alors on la réduira à $2d$;

ainsi à $11^h 40'$..... $E = 52' 56''$

$$\begin{aligned} \sigma &= 30.44 \\ \hline E+\sigma &= 83.40 \\ p &= 54.\ 1 \\ \hline E+\sigma-p &= 29.39 > 2d; \end{aligned}$$

l'éclipse sera..... $29.34 = 2d$.

Dès que l'éclipse surpasse 2δ, on en revient à la formule

$$p+\sigma-E=\sigma+(p-E)=\sigma-(E-p),$$

et l'éclipse redevient boréale, ou en général comme elle était en commençant.

82. L'éclipse sera centrale pour un point de la terre, dès que l'on aura $E=\varpi-\pi=54' 2''$; on voit que cela doit arriver entre 9^h et $9^h 10'$. On trouvera cet instant comme on a trouvé le premier contact (75); on aura $ZS=90°$, et les formules du même article serviront encore.

Mais depuis $9^h 10'$ jusqu'à $11^h 40'$ inclusivement, la distance étant moindre que la parallaxe horizontale, il ne faudra qu'une parallaxe de hauteur. On cherchera donc la distance

au zénit par la formule $\sin N = \frac{E}{\varpi - \pi}$, $(N - \pi \sin N) = ZS$; mais on peut sans scrupule faire $ZS = N$. Alors on aura

$$\sin H = \cos D \cos S \sin ZS + \sin D \cos ZS,$$

$$\cot ZPS = \left(\frac{\cos D}{\sin S}\right) \cot ZS - \sin D \cot S.$$

Il suffira de faire attention à la règle des signes.

C'est ainsi que j'ai formé la table IV, qui donne tous les points de centralité. J'aurais pu y ajouter le premier et le dernier, qui ont l'éclipse centrale à l'horizon, et pour lesquels $ZS = 90°$ et $\varpi - \pi = E$

83. Les lieux déterminés par ces trois premières opérations pour le même instant, sont dans un même vertical et dans un même grand cercle du globe. Ainsi en les joignant par un arc de grand cercle, on aura sur ce même arc tous les lieux qui verront l'éclipse de diverse grandeur, depuis le contact jusqu'à la centralité, quand elle aura lieu, et dans tous les cas jusqu'au *maximum* marqué dans la table III.

84. Après avoir achevé le calcul des effets de la parallaxe directe, il faut passer à ceux de la parallaxe oblique, contenus dans les tables V et VI, où l'on trouve le contact à l'horizon.

Il faut d'abord calculer l'angle $SLV = L'$, par la formule

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} L' = \frac{\left(\frac{p + \sigma + E}{2} - E\right)\left(\frac{p + \sigma + E}{2} - p\right)}{pE},$$

on en conclura

$$PLV = PLS - L' = (L - L'),$$

et

$$PLV' = PLS + L' = (L + L'),$$

$$PLZ = 180° - (L - L'),\ ZL = Z'L = 90° - (\varpi - \pi).$$

$$PLZ' = 180° - (L + L'),$$

$$\sin H = \cos PLZ \sin PL \sin ZL + \cos PL \cos ZL$$

$$= -\sin(L - L')\cos D' \cos(\varpi - \pi) + \sin D' \sin(\varpi - \pi),$$

$$\sin H' = -\sin(L + L')\cos D' \cos(\varpi - \pi) + \sin D' \sin(\varpi - \pi),$$

$$\cot ZPL = -\frac{\cos D' \tang(\varpi - \pi)}{\sin(L - L')} - \sin D' \cot(L - L'),$$

$$\cot Z'PL = -\frac{\cos D' \tang(\varpi - \pi)}{\sin(L + L')} - \sin D' \cot(L + L'),$$

$$ZPS = ZPL + LPS = ZPL + d\text{Æ}, \quad Z'PS = Z'PL + d\text{Æ};$$

ce seront les angles horaires des deux lieux. On en conclura les longitudes comme ci-dessus.

85. Ces formules n'éprouveront aucune modification depuis le commencement jusqu'à la conjonction en ascension droite; mais pour que le triangle LSV soit possible; il faut que $E < (\varpi - \pi) + (\delta + d)$ et que $E > (\varpi - \pi) - (\delta + d)$; sans cela point de contact à l'horizon, et il n'y en a qu'un si $E = (\varpi - \pi) - (\delta + d)$.

Si la plus courte distance $Sm = dD \cos I = (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, les points V et V′ se confondent sur LS, il n'y a plus de triangle, et il n'y a qu'un seul point qui donne le contact à l'horizon, et ce contact est sur le prolongement mS; la courbe des contacts au lever se ferme en ce point, qui lui est commun avec la courbe des contacts de l'autre moitié.

Si $Sm = dD \cos I < (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, la courbe des contacts à l'horizon de la première moitié n'aura aucun point de commun avec celle de l'autre moitié; ces deux courbes seront séparées par un intervalle plus ou moins considérable.

Dès qu'on aura de nouveau $E = (\varpi - \pi) - (\delta + d)$ la courbe des contacts recommencera par un point unique.

Dès que $E > (\varpi - \pi) - (\delta + d)$, il y a deux points jusqu'à l'instant où $E = (\varpi - \pi) + (\delta + d)$; alors la courbe se ferme par un point unique qui est le dernier de l'éclipse.

86. Pour cette seconde courbe on a, comme pour la première, les mêmes formules pour L′, pour PLV et PLV′, PLZ et PLZ′, pour H et H′, pour ZPL et Z′PL; mais $ZPS = ZPL - d\text{Æ}$, et $Z'PS = Z'PL - d\text{Æ}$, parce que $d\text{Æ}$ a changé de signe; par ce moyen, ZPS et Z′PS pourraient être négatifs, si ZPL et Z′PL étaient fort petits; dans ce cas, le contact à l'ho-

rizon serait oriental; il sera occidental dès que ZPS deviendra positif. J'en dis autant de Z'PS.

87. La courbe des contacts qui embrassera le pôle aura un nœud; ici c'est celle de la seconde moitié, parce que le milieu précédait la conjonction. Les deux branches se croiseront et l'on s'en apercevra en mettant dans les tables V et VI les résultats du calcul; ainsi la table V renfermait d'abord les quantités données par l'angle (L—L'); la table VI renfermait celles que donnait (L+L'); mais à $10^h\ 20'$ je me suis aperçu que les longitudes et les latitudes suivraient une marche plus régulière en mettant les (L+L') dans la table V, et les (L—L') dans la table VI. Au reste, peu importe, en plaçant tous ces points sur un globe, on voit toujours la figure de la courbe, et l'on peut estimer assez juste le lieu du nœud qui serait plus difficile à déterminer par le calcul.

88. Dans notre exemple, la courbe des contacts à l'horizon (des tables V et VI) n'éprouve aucune interruption, parce que $Sm > (\varpi - \pi) - (\delta + d)$; tous ces points forment une courbe unique dont les branches s'entrelacent, mais dont les parties inférieures sont à une distance considérable sur le globe. Les points inférieurs extrêmes peuvent être joints par une autre courbe qui donnera le simple contact pour plus grande phase. On trouvera les points de cette nouvelle courbe dans la table VII de la limite australe. Cette courbe, jointe à celle des tables V et VI, enfermera tous les lieux qui verront l'éclipse.

89. Pour la calculer sur $Sm = dD \cos I = \varepsilon$, prenons $SV = \sigma = \delta + d$ et menons LV qui sera la parallaxe, nous aurons

$$Lm = Sm \operatorname{tang} mLS = \varepsilon \operatorname{tang}(S - I),$$

$$\operatorname{tang} mLV = \frac{mV}{mL} = \frac{\varepsilon - \sigma}{\varepsilon \operatorname{tang}(S - I)},$$

$$LV = \frac{mL}{\cos mLV}, \quad \sin ZV = \frac{LV}{(\varpi - \pi)};$$

$$ZL = ZV - (\varpi - \pi),$$

$$\begin{aligned}PLV &= PLS - SLV = PLS - (SLm - mLV)\\ &= PLS + mLV - (90^\circ - SLm) = PLS + mLV - 90^\circ (S - I)\\ &= PLS + mLV + (S - I) - 90^\circ,\\ PLZ &= 180^\circ - PLS - mLV - S + I + 90^\circ\\ &= 270^\circ + I - (L + S - mLV).\end{aligned}$$

Alors on a pour calculer le triangle PLZ les formules de l'article (84), et $ZPS = ZPL + d\text{Æ}$.

90. Cette formule servira pour le commencement de l'éclipse, en remarquant que l'angle I changerait de signe si le milieu était après la conjonction.

Après le milieu et avant la conjonction,

$$mL = \varepsilon \operatorname{tang}(S - I) = -\varepsilon \operatorname{tang}(I - S),$$

parce que $I > S$. mL change de position, mais la formule en avertit.

$$\operatorname{Tang} mLV = \frac{\varepsilon - \sigma}{\varepsilon \operatorname{tang}(I - S)},$$

$$LV = \frac{mL}{\cos mLV}; \quad \sin ZV = \frac{LV}{\varpi - \pi}, \quad ZL = ZV - LV,$$

$$\begin{aligned}PLZ &= 180^\circ - PLV = 180^\circ - PLS - SLV\\ &= 180^\circ - L - (SLm - mLV)\\ &= 180^\circ + mLV - L - (90^\circ - mSL)\\ &= 180^\circ + mLV - L - 90^\circ + I - S\\ &= 90^\circ + mLV + I - (S + L)\\ &= 90^\circ + I + mLV - (S + L),\end{aligned}$$

Z est à l'est, à moins que PLZ ne soit négatif; si le milieu suivait la conjonction, I changerait de signe.

Après la conjonction,

$$mL = \varepsilon \operatorname{tang}(I + S), \quad \operatorname{tang} mLV = \frac{\varepsilon - \sigma}{mL}, \quad LV = \frac{mL}{\cos mLV},$$

$$\sin ZV = \frac{LV}{\varpi - \pi}, \quad ZL = ZV - LV,$$

$$\begin{aligned}PLZ &= 180^\circ - PLV = 180^\circ - PLS + SLV\\ &= 180^\circ - L + SLm - mLV\\ &= 180^\circ - mLV - L + S + I = 180^\circ + I - mLV - (L - S);\end{aligned}$$

I change encore de signe si le milieu suit la conjonction: ZPS = ZPL + $d\text{Æ}$; les deux parties de cet angle ont changé de signe à la conjonction. Le lieu est à l'horizon occidental, à moins que ZPS ne soit négatif ou plus grand que 180°.

91. Dans la figure 103, il est évident que la lune avançant de L vers m, et le zénit s'avançant vers PS, les deux causes concourront à détacher la lune du soleil, le contact sera un contact de fin; il n'est pas aussi sûr que le contact n'ait pas été précédé d'une petite éclipse; mais elle aura été bien petite, car le mouvement de la lune est plus rapide que celui du point V.

Dans la figure 104, après l'instant du calcul, les deux causes sépareront la lune du soleil; même raisonnement.

Dans la figure 105, le mouvement de la lune écartera les deux bords; mais le mouvement diurne pourra les rapprocher un peu.

92. Au lieu de faire SV $= \varepsilon - \sigma$, faites SV $= \varepsilon - \sigma - n$ doigts, vous aurez pour plus grande phase n doigts, et la courbe de cette phase se calculera comme celle du simple contact. La table VII donne $\varepsilon - \sigma$ pour toutes les phases, depuis le contact boréal extérieur jusqu'au contact boréal intérieur, à la centralité, au contact austral intérieur et à l'éclipse australe de 7 doigts. Celle de 6 doigts est impossible, parce qu'elle exigerait une parallaxe de 56′ 27″ au moins, pour n'avoir même qu'un seul point.

Je n'ai point calculé ces lignes, qu'on obtiendrait par des moyens tout pareils à ceux qui ont donné la limite.

93. On ajoute encore ordinairement une ligne de milieu au lever et au coucher du soleil.

Ces lignes se calculeront en faisant (fig. 103)

$$LV = (\varpi - \pi); \quad Lm = \varepsilon \tang (S - I);$$

mais il faut que Lm soit $< LV$ ou $< (\varpi - \pi)$;

$$\frac{Lm}{LV} = \frac{Lm}{\varpi - \varepsilon_\pi} = \sin LVm = \cos mLV,$$

$$mV = LV \sin mLV = (\varpi - \pi) \sin mLV, \quad \varepsilon - mV = \text{dist des c.}$$

$$\sigma - SV = \text{quantité de l'éclipse.}$$

Le reste comme pour la limite australe; je n'ai point calculé cette ligne, qui me paraît excessivement inutile. Il est évident que la courbe qui donnera tous ces milieux d'éclipse à l'horizon, devra couper la courbe des simples contacts à l'horizon en deux points, à moins qu'elle ne passe précisément par le nœud, ce qui n'arrivera pas souvent. La Caille, dans ses cartes d'éclipses, qu'il construisait par une opération graphique, confondait ces trois points, qui sont toujours assez voisins et toujours dans les zônes glaciales. Duséjour a vivement reproché cette inexactitude aux astronomes, et le reproche était trop général, car dans les cartes de Manfredi, fort antérieures aux Mémoires de Duséjour, ces trois points sont marqués très-distinctement. Voyez les éclipses de 1730, 1732, 1737, 1739, 1750, 1753, 1758, et 1762, dans les Éphémérides de Bologne, que La Caille connaissait très-bien. C'est donc uniquement pour abréger qu'il s'était permis cette inexactitude absolument indifférente: dans ces cartes on voit les deux intersections de la courbe du milieu placées tantôt au-dessus et tantôt au-dessous du nœud, et quelquefois aussi confondues avec ce nœud, quand la différence était réellement nulle ou insensible.

94. Quand la déclinaison de la lune est moindre que celle du soleil, l'éclipse est fort petite pour nos climats septentrionaux, où la parallaxe ne peut qu'écarter la lune et augmenter la distance du centre, et comme les parties très-australes du globe sont peu habitées, qu'il n'y a aucun observatoire au-delà de l'équateur, les astronomes se mettent peu en peine de ces sortes d'éclipses; il suffira de calculer la ligne de centralité, qui a toujours lieu quand la plus courte distance est moindre que la parallaxe horizontale; on y joint la ligne de limite boréale, et, si l'on veut, celle des contacts à l'ho-

rizon, jusqu'aux latitudes qui peuvent intéresser; on se contente de faire ces derniers calculs d'heure en heure, et l'on a la courbe qui enferme tous les pays connus qui verront l'éclipse; on rapporte tout au pôle austral, si la déclinaison du soleil est australe; du reste, les formules sont les mêmes.

95. Quand on a déterminé par le calcul les principales courbes, on peut les placer par points sur une mappemonde ou sur une carte dont la projection soit telle, qu'elle renferme tous les pays qui verront l'éclipse. Les mappemondes projetées sur l'équateur, et surtout celles qui sont projetées sur un plan incliné à l'équateur, tel que ceux qui passeraient par 23° $\frac{1}{2}$ de latitude nord et sud, seraient préférables; celles qui sont projetées sur l'horizon de Paris, ou sur celui qui a 45° de latitude, seraient encore fort bonnes.

96. Si l'on n'a point de cartes, le mieux serait de prendre le pôle pour centre de la projection; tous les méridiens seraient des lignes droites. Autour du pôle et d'un rayon arbitraire, on tracerait un cercle qui représenterait l'équateur. On le diviserait de 10 en 10 degrés; à chacun de ces degrés on mènerait un rayon, et l'on aurait ainsi 36 méridiens.

Du centre et avec des rayons égaux aux tangentes de la demi-distance polaire, on tracerait les cercles parallèles à l'équateur; ainsi le parallèle qui serait à 120° du pôle nord aurait pour rayon la tangente de 60°; il serait plus grand que l'équateur, ce qui est un inconvénient nul.

Sur cette carte on tracerait la configuration des continens à peu près; on placerait par longitude et latitude les lieux les plus remarquables, et ensuite, également par longitude et latitude, les points calculés des différentes courbes. Cette pratique, qui était celle de Lalande, est la plus commode; elle dispense de tracer des ellipses, tout se fait avec la règle et le compas; elle épargne un tems qui serait perdu sans aucun dédommagement.

ÉCLIPSE GÉNÉRALE. TABLE Ire.

T. de Paris.	D.☉	D'.☾	(Æ'—Æ)	S	L	E=LS
7h 30'	4° 45' 59"	4° 42' 40"	1° 28' 13"	92° 4' 53"	87° 47' 49"	1° 27' 59"
40	4.46. 8	4.45.01	1.24.13	90.41.33	89.11.27	1.23.56
50	4.46.18	4.47.22	1.20.12	89.10.46	90.42.32	1.19.56
8. 0	4.46.28	4.49.44	1.16.10	87.29.36	92.25.20	1.15.57
10	4.46.38	4.52. 5	1.12. 8	85.36. 1	94.17.55	1.12. 5
20	4.46.47	4.54.26	1. 8. 8	83.30.33	96.23.43	1. 8.19
30	4.46.57	4.56.48	1. 4. 8	81.10.39	98.43.55	1. 4.39
40	4.47. 6	4.59. 9	1. 0. 6	78.34.58	101.19.54	1. 1. 5
50	4.47.16	5. 1.30	0.56. 6	75.40.17	104.14.49	0.57.40
9. 0	4.47.26	5. 3.52	0.52. 6	73.23.41	107.31.53	0.54.27
10	4.47.35	5. 6.13	0.48. 5	68.42.39	111.13.13	0.51.25
20	4.47.45	5. 8.34	0.44. 4	64.34.54	115.21.22	0.48.36
30	4.47.55	5.10.56	0.40. 4	59.59. 1	119.57.11	0.46. 5
40	4.48. 4	5.13.17	0 36. 3	54.52.50	125. 4. 2	0.43.53
50	4.48.14	5.15.38	0.32. 3	49.20.12	130.36.38	0.42. 4
10. 0	4.48.24	5.18. 0	0.28. 1	43.17.39	136.39.55	0.40.41
10	4.48.33	5.20.21	0.24. 0	36.55. 1	143. 2.53	0.39.47
20	4.48.43	5.22.42	0.20. 0	30.21. 5	149.37. 7	0.39.24
30	4.48.53	5.25. 4	0.15.59	23.43.27	156.15. 9	0.39.33
40	4.49. 2	5.27.25	0.11.57	17.12.13	162.46.13	0.40.13
50	4.49.12	5.29.46	0. 7.36	11. 0.57	168.58.21	0.41.19
11. 0	4.49.22	5.32. 8	0. 3.55	5.12.30	174.47. 8	0.42.57
10	4.49.31	5.34.29	0. 0. 6	0. 7.37	179.52.23	0.45. 0
20	4.49.41	5.56.50	0. 4. 8	4.59. 4	175. 0.34	0.47 22
30	4.49.51	5.39.12	0. 8. 8	9.19. 2	170.40.14	0.50. 0
40	4.50. 0	5.41.33	0.12. 9	13.12.12	166.46.42	0.52.56
50	4.50.10	5.43.54	0.16.10	16.40.53	163.17.37	0.56. 6
12. 0	4.50.20	5.46.16	0.20.11	19.44.52	160.13.16	0.56 26
10	4.50.29	5.48.37	0.24.12	22.29.41	157.28. 5	1. 2.53
20	4.50.39	5.50.58	0.28.13	24.56.48	155. 0 34	1. 6.33
30	4.50.49	5.53.20	0.32.15	27. 9.13	152.47.45	1.10.18
40	4.50.58	5.55.41	0.36.16	29. 7.23	150.49.13	1.14. 7
50	4.51. 8	5.58. 2	0.40.17	30.54.34	149. 1.38	1.18. 0
13. 0	4.51.18	5. 0.24	0.44.18	32.30.45	147.25. 7	1.21.59
10	4.51.27	6. 2.45	0.48.19	33.57.53	144.57.31	1.26 0

TABLE II. CONTACT DANS LE VERTICAL.

Heures de Paris.	Longitude.	Latitude.	Heure du lieu.
7h 40′	14° 46′ occident.	0° 10′ B	— 5h 19′
7.50	3.11 occident.	2.43	— 4.23
8. 0	2.59 orient.	4.42	— 3.48
8.10	6.40 or.	6.26 B	— 3.23
8.20	10.44	7.58	— 2.57
8.30	13.33	9.19	— 2.36
8.40	15.54	10.22	— 2.16
8.50	17.59	11.26	— 1.58
9. 0	20.11	11.58	— 1.39
9.10	21.11 or.	12.25 B	— 1.25
9.20	22. 9	12.44	— 1.11
9.30	22.52	12.50	— 0.58
9.40	24.13	12.45	— 0.47
9.50	23. 6	12.36	— 0.38
10. 0	22.33	12.29	— 0.30
10.10	21.34	12.30	— 0.24
10.20	20.23	12.46	— 0.19
10.30	18.37	13.25	— 0.16
10.40	16.53 or.	14.35 B	— 0.12
10.50	15.16	15.55	— 0. 9
11. 0	13.46	17.51	— 0. 5
11.10	12.32	20.10	0. 0
11.20	11.40	22.43	+ 0. 7
11.30	11.10	25.27	+ 0.15
11.40	11. 8	28.25	+ 0.25
11.50	11.36	31.32	+ 0.36
12. 0	12.38	34.45	+ 0.51
0.10	14.19	38. 2 B	+ 1. 7
0.20	16.57	41.31	+ 1.28
0.30	20.59	44.51	+ 1.54
0.40	26.14	48.35	+ 2.25
0.50	34.35	52. 7	+ 3. 8
1. 0	49.20 or.	55.29 B	+ 4.17

TABLE III. MAXIMUM DANS LE VERTICAL.

Heures de Paris.	Longitude.	Latitude.	Heure du lieu.	Quantité de l'éclipse.
7h 40′	25° 11′ occ.	0° 41′ A	— 6h 1′	0′ 51″ B
7.50	27.23 occ.	0.50 B	— 6. 0	4.51 B
8. 0	29.55 occ.	2.30 B	— 6. 0	8.50
8.10	32.49 occ.	4.23	— 6. 1	12.41
8.20	35.33 occ.	6.28	— 6. 2	16.27
8.30	37.10 occ.	8.48	— 6. 3	20. 7
8.40	40.50 occ.	11.23	— 6. 3	23.41
8.50	43.22 occ.	14.16	— 6. 4	27. 6 B
9. 0	46.16 occ.	17.34	— 6. 5	29.34 B
9.10	49.30 occ.	22.14	— 5. 6	28. 7 A
9.20	51.54 occ.	25.21	— 6. 8	25.18
9.30	54.50 occ.	29.56	— 6. 9	22.47
9.40	57.52 occ.	35. 1	— 6.11	20.35 A
9.50	61. 2 occ.	40.32	— 6.14	18.46
10. 0	65. 1 occ.	46.33	— 6.20	17.23
10.10	68.25 occ.	54.53	— 6.24	16.29 A
10.20	72.12 occ.	59.23	— 6.29	16. 6
10.30	77. 8 occ.	65.55	— 6 39	16.15
10.40	83.40 occ.	72.17	— 6.55	16.55 A
10.50	93.48 occ.	78.10	— 7.35	18. 2
11. 0	108.42 occ.	83.12	— 8.15	19.40
11.10	169.35 or.	85.34	+ 11.54	21.53 A
11.20	141.47 or.	83.18	+ 8.47	24. 5
11.30	123. 7 or.	79.39	+ 7.22	26.43
11.40	113.44 or.	76. 3	+ 7.15	29.34 A
11.50	107.30 or.	72.43	+ 6.59	28.39 B
12. 0	102.47 or.	69.43	+ 6.51	25.19 B
0.10	98.46 or.	67. 2	+ 6.45	21.51 B
0.20	95.12 or.	64.38	+ 6.41	18.12 B
0.30	91.45 or.	62. 8	+ 6.37	14.26 B
0.40	88.27 or.	60.30	+ 6.34	10.37 B
0.50	85.15 or.	58.46	+ 6.31	6.44 B
1. 0	82.10 or.	57.12	+ 6.29	2.45 B

TABLE IV. ÉCLIPSE CENTRALE.

Heures de Paris.	Longitude.	Latitude.	Heure du lieu.
9h 10′	30° 42′ occ.	21° 42′ B	— 4h 53′
9.20	23.36 occ.	24.55	— 4.14
9.30	19.14 occ.	27.58	— 3.47
9.40	15.47 occ.	30.58	— 3.23
9.50	13. 2 occ.	33.55	— 3. 2
10. 0	10.15 occ.	36.57	— 2.41
10.10	7.47 occ.	40. 2	— 2.21
10.20	5.22 occ.	43.12	— 2. 1
10.30	2.49 occ.	46.29	— 1.41
10.40	0. 1 or.	49.53	— 1.20
10.50	4.55 or.	53.21	— 0.52
11. 0	7.21 or.	57. 8	— 0.32
11.10	12.13 or.	61.15	— 0. 1
11.20	20.38 or.	65.40	+ 0.42
11.30	34. 2 or.	70.24	+ 1.46
11.40	67.10 or.	75.20 B	+ 4. 9

Les longitudes sont comptées du méridien de Paris. Les heures négatives sont des heures du matin comptées de midi; c'est ce qu'il faut retrancher de 12 heures pour avoir le tems civil. La table II donne le *minimum*, et la table III donne le *maximum* dans le même vertical; la table IV donne le lieu qui voit l'éclipse centrale; la lune est toujours dans le vertical du soleil. Les lieux correspondans de ces trois tables sont tous les trois dans un même grand cercle terrestre. Par *maximum* il ne faut pas entendre un *maximum* absolu, mais le plus grand abaissement de la lune dans le vertical du soleil. Si le centre de la lune est au-dessus de celui du soleil, l'éclipse est boréale; elle est australe dans le cas contraire. Les lieux situés sur le même grand cercle, ont tous une éclipse plus ou moins grande, à mesure qu'ils sont plus près ou plus loin du point qui voit l'eclipse centrale. La distance entre le premier et le deuxième lieu, est le grand axe ou la longueur de la figure de l'ombre; les lieux marqués dans les tables VI et V par leur distance, donnent la largeur de l'ombre.

TABLE

TABLE V. CONTACT A L'HORIZON.

Heures de Paris.	Longitude.	Latitude.	Heure du lieu.
7h40	24° 57′ occ.	5° 21′ B	— 6h 4′
7.50	29.12 occ.	15.13	— 6. 7
8. 0	32.14 occ.	21.48	— 6. 9
8.10	35.10 occ.	26.57	— 6.11
8.20	38.10 occ.	32.14	— 6.13
8.30	40.59 occ.	35.26	— 6.14
8.40	44. 2 occ.	40. 6	— 6.16
8.50	47.27 occ.	46.37	— 6.20
9. 0	50.34 occ.	50.18	— 6.22
9.10	54. 1 occ.	54.55	— 6.26
9.20	57.42 occ.	59.27	— 6.31
9.30	61.54 occ.	64.15	— 6.38
9.40	66.58 occ.	69.18	— 6.48
9.50	73.56 occ.	74.33	— 7. 6
10. 0	86.19 occ.	80. 1	— 7.45
10.10	120.44 occ.	84.46	— 9.53
10.20	165. 4 or.	84.10	+ 9.20
10.30	135.38 or.	78.47	+ 7.35
10.40	124.13 or.	72.24	+ 6.57
10.50	117.36 or.	66. 2	+ 6.40
11. 0	112.32 or.	60.17	+ 6.30
11.10	108.55 or.	54.57	+ 6.26
11.20	105.27 or.	50 18	+ 6.22
11.30	102.18 or.	46.24	+ 6.18
11.40	99.20 or.	43.16	+ 6.17
11.50	96.32 or.	40.45	+ 6.14
12. 0	93.53 or.	39. 8	+ 6.13
0.10	91.20 or.	38. 9	+ 6.12
0.20	88.55 or.	37.49	+ 6.12
0.30	86.33 or.	38.15	+ 6.12
0.40	84.11 or.	38.53	+ 6.12
0.50	82.20 or.	41.51	+ 6.14
1. 0	80.42 or.	46.15	+ 6.17

TABLE VI. CONTACT A L'HORIZON.

Heures de Paris.	Longitude.	Latitude.	Heure du lieu.
7h 40′	24° 56′ occ.	6° 50′ A	— 6h 0′
7.50	26.44 occ.	13.39	— 5.59
8. 0	28.52 occ.	16.49	— 5.55
8.10	31. 9 occ.	18. 9	— 5.54
8.20	33. 3 occ.	19.20	— 5.52
8.30	36. 1 occ.	17.53	— 5.51
8.40	38.29 occ.	17.22	— 5.54
8.50	40.55 occ.	17.20	— 5.54
9. 0	43.33 occ.	15.14	— 5.54
9.10	46.14 occ.	12.32	— 5.55
9.20	49. 1 occ.	8.51	— 5.56
9.30	51.51 occ.	4.34 A	— 5.57
9.40	54.46 occ.	0.41 B	— 5.59
9.50	57.41 occ.	6. 8	— 6. 1
10. 0	60.15 occ.	12.20	— 6. 3
10.10	63.47 occ.	18.53	— 6. 5
10.20	67.14 occ.	25.31	— 6. 9
10.30	70. 7 occ.	32. 9	— 6.10
10.40	73.23 occ.	38.24	— 6.14
10.50	76.44 occ.	44.15	— 6.17
11. 0	80.17 occ.	49.58	— 6.21
11.10	83.59 occ.	55.13	— 6.26
11.20	87.57 occ.	60.10	— 6.22
11.30	91.28 occ.	64.48	— 6.40
11.40	97.14 occ.	69. 2	— 6.49
11.50	103.47 occ.	73.36	— 7. 5
12. 0	112.50 occ.	77.49	— 7.31
0.10	127. 6 occ.	81.42	— 8.22
0.30	161.44 occ.	84.40	—10.27
0.30	143.46 or.	84.16	+10. 5
0.40	114.46 or.	81. 2	+ 8. 9
0.50	97.38 or.	75. 9	+ 7.21
1. 0	88.14 or.	67.50 B	+ 6.53

Éclipses du soleil pour un lieu particulier.

97. Ces méthodes pour l'éclipse générale sont nécessaires aux calculateurs d'Ephémérides ; mais il est facile, sans tant de préparation, de savoir si une éclipse de soleil ou d'étoile sera visible dans un lieu particulier. Si la différence de déclinaison, à l'instant de la conjonction moyenne, est moindre que la somme $(\varpi - \pi) + (\delta + d)$, et que la lune soit plus près du pôle que le soleil ou l'étoile, il est presqu'indubitable qu'il y aura éclipse, à moins que la conjonction n'ait lieu très-loin du méridien. Dans tous les cas, il suffira du calcul grossier de deux triangles pour lever le doute.

98. Quand on est bien assuré de l'éclipse, on cherche pour le tems du milieu, connu à une demi-heure ou une heure près, la longitude des deux astres, leurs latitudes, leurs mouvemens horaires, leurs parallaxes et leurs diamètres.

Pour deux instans éloignés d'une heure, et qui appartiennent au tems de l'éclipse, on calcule l'ascension droite du milieu du ciel M, le nonagésime n, la hauteur h du pôle de l'écliptique, les parallaxes de longitude et de latitude, par les formules (XV. 18 et suivans.), en y substituant la parallaxe relative au lieu de la parallaxe absolue. On applique les parallaxes de longitude et de latitude, suivant leur signe, aux lieux de la lune. On compare la position de la lune à celle de l'astre éclipsé; on en conclut les différences apparentes de longitude et de latitude, pour les deux instans du calcul.

99. Ces calculs se font avec la plus grande précision, mais on peut négliger les secondes dans les arcs subsidiaires n et h, ce qui est un des principaux avantages de la méthode du nonagésime. Dans ces calculs on emploie la hauteur du pôle diminuée de l'angle de la verticale, et les parallaxes qui conviennent à cette hauteur du pôle.

Cela posé, voulez-vous seulement vous préparer à l'obser-

vation, vous pouvez achever par une construction graphique toute pareille à celle des éclipses de lune (fig. 98).

Sur les perpendiculaires $A''a''$, $A'''a'''$ marquez les deux latitudes apparentes, si l'éclipse est de soleil, et les deux différences apparentes de latitude, si c'est une éclipse d'étoile ou de planète. Par les sommets des deux latitudes, tracez une droite qui sera l'orbite apparente.

100. L'intervalle entre deux perpendiculaires sera le mouvement horaire; il vaudra 60′ de tems, qui répondront au mouvement relatif de la lune au soleil, ou plus généralement au mouvement relatif multiplié par le cosinus de la latitude de l'astre éclipsé.

Cherchez sur la ligne AX le lieu de la conjonction apparente, comme vous avez cherché le centre de l'ombre dans les éclipses de lune; abaissez de ce point la perpendiculaire sur l'orbite apparente pour avoir la plus courte distance.

Avec la somme des diamètres, marquez les points de commencement et de fin sur l'orbite relative. Avec une équerre, marquez sur AX les points qui répondront à ceux de commencement et de fin.

101. Si l'éclipse de soleil doit être totale ou centrale, marquez les points d'immersion et d'émersion, avec une ouverture de compas égale à la différence des demi-diamètres. Si c'est une planète qui est éclipsée, elle le sera ordinairement toute entière, et ces deux phases différeront peu des deux premières; si c'est une étoile, les points de contacts se confondent avec ceux d'immersion et d'émersion.

Du point m comme centre, décrivez le disque lunaire; du point O comme centre, décrivez le disque de la planète éclipsée, vous aurez la figure de la plus grande éclipse.

Menez du centre O au lieu de commencement C le rayon OC. Par le même point O élevez une perpendiculaire à l'écliptique, elle sera le cercle latitude; avec la déclinaison de l'astre vous calculerez l'angle de position (VIII. 14), et vous placerez le cercle de déclinaison à l'orient, si la tangente de l'angle de position est positive.

102. Pour l'heure du commencement, vous calculerez l'angle du vertical du soleil avec le cercle de déclinaison ou POZ ; formez l'angle POZ sur la figure, OZ sera le vertical.

Or l'éclipse doit commencer par le contact en G sur la ligne OC ; tenez devant les yeux la figure de l'éclipse de manière que OZ soit une ligne verticale ; vous verrez la position du point G, par lequel l'éclipse commencera, et vous pourrez saisir la première impression du disque lunaire sur l'astre éclipsé. Si c'est une étoile ou une planète dont le disque soit petit, par le point C, centre de la lune, menez une parallèle Z'C qui vous indiquera le point par où l'éclipse doit commencer.

Ce soin serait inutile pour le commencement, puisque l'étoile ou la planète se voient à côté de la lune ; mais il sera presque indispensable pour bien saisir la fin ou l'émersion, parce que l'étoile et la planète sont invisibles derrière le disque de la lune ; et que l'on est fort exposé à manquer le premier instant de la sortie, surtout si elle a lieu dans la partie éclairée du disque lunaire.

103. On fera donc pour l'émersion des étoiles et des planètes une opération semblable à celles que nous avons expliquées pour le commencement de l'éclipse de soleil.

Si c'est Jupiter qui est éclipsé, ce soin est ordinairement inutile, il y a presque toujours un ou plusieurs satellites dont les émersions annoncent celle de la planète ; d'ailleurs le disque étant de plusieurs secondes, si l'on manque l'émersion du premier bord, on se rend attentif à celle du second.

104. Dans les occultations d'étoiles ou de planètes, il n'y a d'autre observation à faire que celles de l'entrée et de la sortie.

Dans les éclipses de soleil, on peut continuellement mesurer la ligne des cornes. Cette ligne est accourcie par la réfraction ; pour en calculer la correction (V. 35), il faut connaître l'inclinaison de cette ligne par rapport à l'horizon, on peut la prendre à chaque instant sur la figure (98); la ligne des cornes corrigée est une corde commune du disque

solaire et du disque lunaire; elle peut donner la distance des centres. Ces observations se font avec les micromètres filaire ou objectif; peut-être ne sont-elles pas susceptibles d'une extrême précision, surtout parce que la ligne des cornes change à chaque instant de grandeur et de position; le calcul en est long et le résultat ne vaut guères la peine qu'il coûterait.

105. Une observation plus facile et plus utile, est celle de la plus grande quantité de l'éclipse. Vers le milieu de l'éclipse, la ligne des cornes est d'une grandeur constante, au moins sensiblement, pendant une ou deux minutes; on a tout le tems nécessaire pour la mesurer plus exactement.

Soit donc ab la distance des cornes, la plus grande de toutes celles qu'on a mesurées pendant l'éclipse, et corrigée de l'effet de la réfraction (fig. 106).

$$\frac{\frac{1}{2}ab}{Sa} = \frac{ab}{2\delta} = \sin aSL,$$

$$\frac{\frac{1}{2}ab}{La} = \frac{ab}{2d} = \sin aLS,$$

$\delta \cos aSL + d \cos aLS = SL =$ plus courte distance $= (\lambda - \pi) \cos I$;

ainsi

$$\frac{\delta \cos aSL + d \cos aLS}{\cos I} = \lambda - \pi = \text{latitude apparente.}$$

Calculez la parallaxe de latitude π pour le milieu,

$$(\lambda - \pi) + \pi = \lambda;$$

vous aurez la latitude en conjonction.

SL sin I sera la différence de longitude apparente sur l'écliptique; SL sin I — parall. longitude sera la différence vraie de longitude à l'instant de la plus grande éclipse; vous auriez donc le tems de la conjonction vraie par les mouvemens relatifs vrais, si vous aviez bien juste le tems du milieu de l'éclipse; en calculant pour cet instant la latitude vraie par les tables, vous connaîtrez l'erreur des tables en latitude.

Il est vrai que le mouvement en latitude n'est guères que de 6″ en 1′ de tems, et si vous vous trompiez d'une minute sur le tems du milieu, vous ne connaîtriez qu'à 6″ près l'erreur des tables en latitude.

106. Si parmi vos lignes de cordes mesurées il s'en trouve plusieurs égales deux à deux, elles vous donneront autant de fois le tems du milieu. Vous aurez encore à fort peu près le tems du milieu par les observations du commencement et de la fin. Vous aurez donc à fort peu près l'erreur des tables en latitude.

Si l'éclipse est annulaire, le tems des deux contacts intérieurs, qu'on appelle encore *formation* et *rupture de l'anneau*, vous donneront la différence des diamètres, car l'intervalle de tems entre les deux observations vous donnera le mouvement du centre de la lune sur son orbite relative. Soit m la moitié de ce mouvement, ε la plus courte distance, vous aurez

$$(\delta - d)^2 = + m^2 + \varepsilon^2.$$

D'ailleurs, à l'instant du contact intérieur, la largeur de l'anneau, dans sa partie opposée au contact, sera la différence des deux diamètres.

107. Si l'éclipse est totale, mais sans demeure, et ne dure qu'un instant, c'est que les diamètres apparens sont égaux, et cet instant sera celui de la plus courte distance..... $= (\lambda - \pi) \cos I = 0$; d'où $\lambda = \pi$. Vous calculerez pour cet instant la parallaxe de latitude, qui sera la latitude vraie, et la parallaxe de longitude, qui sera la différence vraie de longitude pour ce moment; l'augmentation du diamètre sera la différence des deux diamètres. Vous aurez donc facilement la correction de trois élémens, la longitude, la latitude et la différence des diamètres.

108. Si le soleil reste quelques instans dans l'ombre, vous aurez le mouvement relatif apparent, et si vous avez conclu de ce qui précède la plus courte distance, vous aurez comme ci-dessus la différence des diamètres; mais outre que ces ob-

servations sont rares, on n'en peut espérer une précision bien grande.

109. Donnons maintenant les moyens de calculer l'éclipse pour un lieu particulier; on peut y employer diverses méthodes, mais la plus répandue est celle du nonagésime.

Pour le moment présumé du commencement, calculez l'ascension droite du milieu du ciel, le nonagésime et sa hauteur, qui est le complément de la hauteur du pôle de l'écliptique; cherchez les parallaxes de longitude et de latitude; vous les appliquerez, suivant leurs signes, à la longitude et à la latitude vraie; vous aurez l'élongation apparente E, la latitude apparente G, vous ferez $E^2 + G^2$, et si cette somme $= \sigma^2$, σ étant la somme des demi-diamètres apparens, l'instant choisi sera celui du commencement; si $E^2+G^2>\sigma^2$, l'éclipse n'est pas encore commencée; elle l'est si $E^2+G^2<\sigma^2$. Vous ferez un calcul semblable pour un instant éloigné de quelques minutes, et par la variation de $(E^2+G^2)^{\frac{1}{2}}$, vous trouverez, au moyen d'une règle de trois, l'instant du contact.

Vous ferez des calculs semblables pour trouver la fin. Vous en ferez de semblables pour avoir la plus courte distance et l'instant précis du milieu.

Vers le milieu, les distances des centres décroissent et augmentent assez inégalement; mais au commencement et à la fin les variations des distances apparentes sont sensiblement proportionnelles au tems.

Vous aurez à 1′ près le commencement et la fin, par l'opération graphique exposée ci-dessus.

110. Au lieu des parallaxes de longitude et de latitude, on peut employer au même usage les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison; mais le calcul des ascensions exige plus de soin que celui du nonagésime, les séries des parallaxes sont moins convergentes et l'opération est plus pénible.

111. Lalande avait une méthode qui lui était particulière, tous les calculs étaient d'une grande simplicité, mais il fallait une attention pénible dans la combinaison d'un nombre assez

considérable d'angles ou d'arcs par lesquels on arrivait enfin à la distance apparente des centres.

On pourrait employer la parallaxe de hauteur avec les différences de hauteur et d'azimut, mais cette méthode est peut-être encore plus pénible.

On pourrait n'employer que les trigonométries rectiligne et sphérique, avec la parallaxe de hauteur, et cette méthode n'aurait contre elle qu'un peu de longueur (VI. 28).

112. Enfin je substitue à la méthode de Lalande une méthode qui donne directement les distances apparentes; elle est indiquée déjà ci-dessus (VI. 17) (fig. 107).

Calculez à l'ordinaire la distance vraie ZS du soleil au zénit, et l'angle PSZ $= a$ au centre du soleil; au moyen de l'orbite apparente, cherchez la distance vraie SL des centres et l'angle PSL $= S$ formé au centre du soleil par le cercle de déclinaison PS et la distance vraie SL $= \varepsilon$; faites

$$\mathrm{PSL} - \mathrm{PSZ} = S - a = S',$$

$$\tang \pi = \tang \mathrm{LSV} = \frac{\left(\frac{\sin \varpi \cos \mathrm{ZS}}{\sin \mathrm{SL}}\right) \sin S'}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \cos \mathrm{ZS}}{\sin \mathrm{SL}}\right) \cos S'}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin \varpi \cos \mathrm{N}}{\sin \varepsilon}\right) \sin S'}{1 - \left(\frac{\sin \varpi \cos \mathrm{N}}{\sin \varepsilon}\right) \cos S'};$$

vous en conclurez

$$S'' = S' + \pi.$$

Alors pour avoir la distance apparente des centres SV faites

$$\cot \mathrm{SV} = \frac{\sin S''}{\sin S'} \left(\cot \varepsilon - \frac{\sin \varpi \cos \mathrm{N}}{\sin \varepsilon}\right);$$

ou bien faites

$$\tang u = \frac{\sin \varpi \cos \mathrm{N}}{\sin \varepsilon},$$

$$\tang \mathrm{SV} = \frac{\tang \varepsilon \cos u \sin S'}{\cos(u + \varepsilon) \sin S''};$$

ou même

$$SV = \frac{\varepsilon \cos u \sin S'}{\cos(u+\varepsilon)\sin S''}.$$

Il est aisé de voir que ces formules sont les mêmes que celles des parallaxes de longitude et de distance apparente au pôle, généralisées.

113. On peut faire des calculs semblables pour tous les instans de la durée, de 10 en 10′ ou de 20 en 20′, principalement vers la fin et le commencement, en former un tableau qui sera fort utile pour comparer les observations aux tables et pour abréger le calcul des différences de longitude pour tous les lieux où la même éclipse aura été observée.

114. Ce tableau vous dispensera des formules différentielles dont on se sert pour déterminer les erreurs des tables.

Pour le commencement et la fin de l'éclipse, recommencez le calcul de la distance apparente, en faisant varier de 10″ d'abord la longitude, puis la latitude, puis la parallaxe, et voyez de combien chacun de ces changemens, pris tout seul, ferait varier l'instant du commencement; soient dt', dt'', dt''', dt^{IV}, etc. tous ces changemens partiels; le changement total $d\text{T}$ sur l'entrée ou la sortie, pour 1″ de variation dans chacun de vos élémens, sera

$$d\text{T} = \left(\frac{dt'}{10}\right) d\text{L} + \left(\frac{dt''}{10}\right) d\lambda + \left(\frac{dt'''}{10}\right) d\varpi + \left(\frac{dt^{\text{IV}}}{10}\right) d\sigma\,;$$

mais $d\text{T}$ est la correction du tems calculé par les tables, et $d\text{T}$ est connu par la comparaison de l'éclipse observée avec l'éclipse calculée.

$d\text{L}$, $d\lambda$, $d\varpi$, $d\sigma$, etc. sont les corrections des tables en longitude, latitude, parallaxe et diamètre; ces erreurs sont les mêmes pour toute la durée de l'éclipse; si vous pouvez réunir deux observations complètes de l'éclipse sous des méridiens connus, vous aurez quatre équations pareilles qui serviront à déterminer $d\text{L}$, $d\lambda$, $d\varpi$ et $d\sigma$, dont les coefficiens seront connus; vous corrigerez ainsi les tables, et quand les

tables seront corrigées, vous appliquerez la même méthode à déterminer les différences des méridiens pour les lieux peu connus où l'on aura observé la même éclipse.

115. En effet, avec la longitude à peu près connue du lieu, calculez par les tables le commencement et la fin, et l'équation

$$dT = \left(\frac{dt'}{10}\right) dL + \left(\frac{dt''}{10}\right) d\lambda ;$$

puisque les tables sont corrigées, les erreurs dL et $d\lambda$ seront proportionnelles à l'erreur commise sur le tems ou sur la différence des méridiens. Vous aurez, en nommant M *et* m les mouvemens horaires vrais et relatifs de la lune, E l'erreur commise sur le tems,

$$3600'' : E :: M : dL = \frac{E.M}{3600''} :: m : d\lambda = \frac{E.m}{3600''},$$

et

$$dT = \left(\frac{dt'}{10}\right)\left(\frac{M}{3600''}\right) E + \left(\frac{dt''}{10}\right)\left(\frac{m}{3600''}\right) E$$
$$= \left(\frac{dt'.M + dt''.m}{36000''}\right) E ;$$

vous connaîtrez donc l'erreur E commise sur la différence des méridiens; vous aurez donc la vraie différence de ces méridiens, et il ne faudra pour cela qu'une seule observation, soit de commencement, soit de fin, puisqu'il n'y a qu'une seule inconnue dans l'équation.

116. Si vous n'êtes pas parfaitement sûr de la latitude du lieu dont vous cherchez la longitude, dans l'équation dT (115) introduisez de plus un terme $\frac{dt'''}{10} dH$ pour 10″ de changement dans la latitude, vous aurez une inconnue de plus, dH=erreur sur la latitude; et si votre observation est complète, vous corrigerez à la fois votre longitude et votre latitude.

LEÇON XVI.

Des Planètes.

1. Les planètes sont des étoiles errantes, ainsi que l'annonce le mot grec πλανήτης; les anciens en comptaient sept, le Soleil, la Lune, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne; les modernes en ont découvert cinq autres, Uranus ou Herschel, Cérès ou Piazzi, Pallas ou Olbers 1ere, Junon ou Harding, Vesta ou Olbers 2e. Les premières se voient facilement, et il suffisait de les observer plusieurs jours de suite pour en apercevoir les mouvemens. D'ailleurs elles ont, dans les lunettes, des disques sensibles qui ne permettent pas de les confondre avec les étoiles fixes, qui ne sont que des points lumineux. Les planètes modernes, excepté Uranus peut-être, ne peuvent être aperçues sans le secours des lunettes, où même on ne les voit pas toujours facilement, ce qui tient à la petitesse de leur disque et à la faiblesse de leur lumière.

2. Le mouvement des planètes présente des irrégularités qu'on ne remarque ni dans le soleil, ni dans la lune, et qui viennent de ce que la terre n'est pas le centre de ces mouvemens; aussi les Grecs, pour établir une théorie fort imparfaite des planètes qu'ils connaissaient, avaient-ils été obligés de réunir les deux hypothèses de l'excentrique et de l'épicycle, dont une seule suffisait pour le soleil. Les observations vont nous prouver l'insuffisance de ces moyens et nous donneront, avec beaucoup moins de peine, une théorie plus simple et plus conforme aux phénomènes.

3. Nous commencerons par la planète la plus brillante, celle qui a dû être remarquée la première; c'est Vénus, que les anciens ont appelée aussi Φωσφόρος, *Lucifer*, ou l'astre

du matin ; Ἑσπερος, *Vesper*, ou l'étoile du soir ou du berger. La raison de ces deux dénominations, c'est que les anciens ne se sont pas aperçu tout d'abord que l'étoile du soir et celle du matin n'était qu'un seul et même astre ; mais pour s'en convaincre il suffira de suivre assidument le cours de cette planète si remarquable.

4. Je suppose donc que vers la fin de juillet 1807 vous ayez aperçu le soir, vers le couchant, une belle étoile qui ait attiré votre attention, parce qu'elle était visible à la simple vue, peu de tems avant le coucher du soleil.

En dirigeant votre lunette sur Vénus, vous aurez remarqué un disque sensible ; il est bon pour cela, d'affaiblir un peu la lumière de la planète, en couvrant en partie l'objectif de la lunette. Le disque vous aura paru un demi-cercle dont la convexité était tournée vers le soleil. Si vous avez observé la planète à la machine parallactique, vous en aurez facilement la déclinaison, l'angle horaire et l'ascension droite ; il n'en faut pas davantage pour l'observer le lendemain au méridien.

5. Je suppose encore que le lendemain, 27 juillet, vous l'ayez observée à son passage, car son éclat permet de l'observer de jour, en tout tems, et à fort peu de distance du soleil. En calculant d'après cette observation, la longitude et la latitude, vous trouverez la latitude fort petite ou nulle, vous aurez la longitude, que vous comparerez à celle du soleil ; la différence de longitude, ou l'élongation, varie d'un jour à l'autre ; elle ira en augmentant jusqu'au 2 août, où elle sera de 45° 42′, avec une latitude de 0° 31′ A. Vous verrez dès-lors que Vénus ne se meut point dans l'écliptique, mais dans un plan incliné, et vous en conclurez que le 27 juillet elle devait être dans un de ses nœuds. Vous ignorez encore à quelle distance elle se trouve de la terre, vous pouvez seulement conjecturer, avec beaucoup de vraisemblance, que puisqu'elle était dichotome, l'angle à Vénus entre la terre et le corps qui éclaire Vénus, devait etre droit comme l'angle à la lune ; on ne voit encore que le soleil qui puisse

éclairer Vénus; dans la dichotomie, l'angle à la terre était de 45° 42′; l'angle au soleil devait donc être de 44° 18′; la distance de Vénus au soleil devait être V sin 44° 18′, V étant la distance du soleil à la terre, ce qui donne 0,72 pour la distance de Vénus au soleil.

6. Les jours suivans vous verrez l'élongation diminuer, et le diamètre s'augmenter dans le sens de la latitude et devenir plus étroit dans le sens de l'écliptique; la latitude augmente aussi de jour en jour; à ces deux symptômes vous reconnaîtrez que Vénus se rapproche de la terre; ses phases, parfaitement analogues à celles de la lune, vous feront voir qu'elle doit être un corps opaque qui nous réfléchit la lumière du soleil. La latitude avait augmenté jusqu'au 7 octobre, où elle était de 7° 55′, après quoi elle a été en diminuant quoique la planète continuât de s'approcher de la terre et que son diamètre, qui n'était d'abord que de 24″, soit devenu de plus de 50″.

7. Non-seulement l'élongation diminue de jour en jour, mais la longitude elle-même diminue; la planète est devenue rétrograde, de directe qu'elle était d'abord. On dit qu'une planète est directe quand elle se meut suivant l'ordre des signes de l'écliptique, et rétrograde quand elle se meut contre cet ordre. Le croissant va toujours alors diminuant de largeur et d'inclinaison à l'écliptique; enfin un jour elle passe au méridien un peu après le soleil, et le croissant n'est plus qu'un filet de lumière, et la ligne des cornes est parallèle à l'écliptique. Le lendemain elle passe au méridien un peu avant le soleil; son élongation, qui était additive décroissante, devient soustractive et croissante.

8. Vers le 17 novembre, la latitude, qui avait diminué constamment, se réduit à 0, comme elle était le 27 juillet; quelques jours après la latitude est boréale. Vénus a donc passé par son nœud ascendant: il s'en faut de beaucoup que les deux longitudes de Vénus, dans ses nœuds, soient éloignées de 180°; la ligne des nœuds ne passe donc pas par la

terre, la terre ne paraît donc pas être le centre des mouvemens de Vénus.

La latitude boréale augmente de jour en jour, mais elle ne passe pas 3° 13′, au lieu que la latitude australe avait été jusqu'à 7° 55′, autre preuve que l'intersection du plan de l'orbite de Vénus avec l'écliptique ne passe pas par la terre, car pour la lune les plus grandes latitudes australes sont égales aux plus grandes latitudes boréales. La plus grande déclinaison boréale du soleil est de 23° 28′, comme la plus grande déclinaison australe.

9. L'élongation soustractive augmente tous les jours, et le diamètre diminue en même tems; Vénus a cependant cessé de rétrograder, et elle est redevenue directe; les phases reviennent en ordre inverse, telles qu'elles ont été avant la conjonction; le croissant éclairé tourne toujours sa convexité du côté du soleil; il est évident que c'est du soleil que Vénus emprunte sa lumière; les diamètres, qui sont en raison inverse des distances, prouvent que la concavité de l'orbite est toujours tournée vers le soleil, et que vers la conjonction, la convexité est tournée vers la terre; il est donc bien probable que Vénus tourne autour du soleil.

10. L'élongation augmente jusqu'à 45° 39′, après quoi elle diminue; il paraît donc que la plus grande élongation ne passe guères 45 ou 46°, d'où il résulte que la distance au soleil, ou le rayon vecteur de Vénus, doit être de 0,72 ou 0,73.

11. L'élongation diminue toujours, Vénus devient presque ronde et son diamètre n'est plus guères que de 10″. Si Vénus tourne autour du soleil à la distance r, sa distance à la terre aura pour limites $1+r$ et $(1-r)$; ces distances sont entre elles dans la même raison que les deux valeurs extrêmes de ses diamètres; ainsi

$$1+r : 1-r :: 60 : 10,$$
$$2 : 2r :: 70 : 50, \quad r = \tfrac{52}{70} = 0,72.$$

12. Le 8 mars Vénus se retrouve dans son nœud descen-

dant; elle a donc fait une révolution entière, à moins que le nœud n'ait un mouvement fort rapide.

Du 27 juillet au 17 novembre il y a 113 jours, du 17 novembre au 8 mars 112 jours; la demi-révolution est donc de 112 ou 113 jours, la révolution entière de 224, ou 226, ou 225 jours; par plusieurs comparaisons pareilles, on aura $224^j\ 16^h\ 42'\ 27'',5$, et par la troisième loi de Képler,

$$T^2 : t^2 :: V^3 : v^3, \qquad v = \frac{Vt^{\frac{2}{3}}}{T^{\frac{2}{3}}} = 0.72333.$$

Tout cela s'accorde trop bien pour être un effet du hasard. Il est donc certain que Vénus décrit autour du soleil une courbe presque circulaire dont le rayon est de 0,72333.

13. Si le diamètre de Vénus nous paraît de $24''$ à la distance 0,7, il sera de $16'',8$ à la distance 1. Le demi-diamètre sera donc de $8'',4$ à cette distance moyenne; mais si la parallaxe du soleil est de $8'',7$, c'est que le demi-diamètre de la terre est de $8'',7$; donc Vénus est presque aussi grosse que la terre, et si elle tourne autour du soleil, pourquoi la terre ne tournerait-elle pas de meme?

14. Vénus, en tournant autour du soleil, s'est trouvée sans latitude en V et en V′ sur la ligne des nœuds qui doit passer par le soleil.

Vénus, le soleil et la terre se trouvaient alors dans un même plan, qui est l'écliptique. Nous avons (fig. 108)

$$VST + TST' + T'SV' = 180°, \quad TST' = 180° - VST - V'ST';$$

nous connaissons les angles T et T′, les côtés VS, ST, V′S, ST′; nous ferons

$$SV : ST :: \sin T : \sin V, \quad SV' : ST' :: \sin T' : \sin V',$$
$$VST = 180° - T - V, \quad V'ST' = 180° - T' - V';$$

nous calculerons

$$TST' = 180° - 180° + T + V - 180° + T' + V'$$
$$= T + T' + V + V' - 180°,$$

et

et nous trouverons ainsi TST′ égal au mouvement de la terre dans l'intervalle des observations; donc nous satisfaisons aux observations, en supposant que Vénus et la terre tournent autour du soleil avec les vîtesses angulaires qui répondent à leurs rayons vecteurs.

15. L'un ou l'autre des triangles TSV ou T′SV′ nous donneront la position de la ligne des nœuds; nous savons calculer les angles TSV et T′SV; retranchant l'un de ces angles de la longitude héliocentrique de la terre, et ajoutant l'autre, nous aurons les positions héliocentriques des deux nœuds en 2^{s} 15° et 8^{s} 15°. Cette ligne est sensiblement immobile et passe par le centre du soleil.

16. A présent supposons la terre en repos en T, nous serons forcés de donner au soleil un mouvement STS′=TST′, mais en sens contraire; nous aurons, comme dans l'hypothèse précédente, les angles en T; les distances TV et TV′ sont les mêmes, car elles sont en raison inverse des diamètres observés 23″ et 41″; les triangles des deux hypothèses seront égaux et semblables, car ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc le troisième côté sera égal, tous les angles seront égaux; donc la ligne des nœuds V′S′ sera parallèle à VS; donc si le soleil tourne autour de la terre, il entraînera avec lui l'orbite de Vénus, de manière que la ligne des nœuds restera toujours parallèle à elle-même. Dans l'hypothèse de Copernic, cette ligne serait immobile comme le soleil; dans les deux hypothèses elle se dirige constamment aux deux mêmes points de la sphère étoilée.

17. Il reste à déterminer l'inclinaison de l'orbite. Quand Vénus a la même longitude que le soleil, on dit qu'elle est en conjonction inférieure si elle se trouve entre le soleil et la terre; son diamètre alors sera de 60 à 61″; la conjonction est supérieure si Vénus se trouve au-delà du soleil, son diamètre alors ne sera guères que de 9″. Choisissez une conjonction inférieure où la latitude soit un peu considérable. La veille de la conjonction, Vénus passera au méridien après

le soleil, le lendemain elle passera avant; vous observerez alors que le mouvement diurne est fort régulier. Soient E et E′ les deux élongations, l'une avant l'autre après la conjonction, T et T′ les tems des deux observations; vous aurez

$$E + E' : T' - T :: E : dT :: E' : dT' ;$$

$T + dT = T' - dT'$ sera le tems de la conjonction, le lieu du soleil pour le tems $T + dT$ sera la longitude géocentrique de Vénus en conjonction; ajoutez-y 180°, vous aurez la longitude héliocentrique.

Soit m le mouvement en latitude, G la latitude géocentrique à la première observation,

$$m : T' - T :: dT : dG ;$$

$G + dG$ sera la latitude géocentrique en conjonction.

18. Soit T (fig. 109) la terre, S le soleil, V Vénus; menez VS et TVN, et abaissez la perpendiculaire VE sur l'écliptique,

$$TS : SV :: \sin TVS : \sin T = \left(\frac{SV}{TS}\right) \sin NVS ,$$

$$\sin T = \left(\frac{v}{V}\right) \sin (T + S), \quad \text{ou} \quad \sin (T + S) = \left(\frac{V}{v}\right) \sin T ,$$

vous connaîtrez $S = TSV =$ latit. héliocentrique de Vénus.

19. Remarquons en passant que $TVN = 180° - TVS = T + S$ détermine le segment éclairé et visible de Vénus en conjonction; que la largeur de ce segment $= 2\cos^2 \frac{1}{2} TVS$ (XIV. 16) $= 2\sin^2 \frac{1}{2} (T + S) = 2\sin^2 \frac{1}{2}$ (latit. géocent. + latit. héliocent.); ces deux latitudes étant d'un petit nombre de degrés, le segment éclairé doit être très-étroit.

20. Nous connaissons la longitude héliocentrique u de Vénus; nous connaissons la longitude du nœud $2^s\ 15°$ si la latitude est boréale, $8^s\ 15°$ si elle est australe, $(u - 2^s\ 15°)$ ou $(u - 8^s\ 15°)$ sera la distance au nœud sur l'écliptique. Soit I l'inclinaison et h la latitude héliocentrique donnée par l'observation,

$$\text{tang}\, h = \text{tang}\, \mathrm{I} \sin (u - 75^\circ),$$

$$\text{tang}\, \mathrm{I} = \frac{\text{tang}\, h}{\sin (u - 75^\circ)};$$

nous aurons ainsi $\mathrm{I} = 3^\circ\, 23'$.

21. Si la distance au nœud se trouvait par hasard.... $= 90^\circ = u - 75^\circ$, ou si $u = 5^s\, 15^\circ$, on aurait $h = 3^\circ\, 23'$, $\mathrm{G} = h \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V} - v \cos h} = 12^\circ \frac{1}{2}$; ainsi dans cette circonstance, qui doit être infiniment rare, la plus grande latitude géocentrique de Vénus serait de plus de 12°, Vénus pourrait s'écarter de l'écliptique de 12°, tant en dessus qu'en dessous. Prenez une zône de la sphère céleste de 24° de largeur et que l'écliptique coupe en deux zônes parfaitement égales; cette double zône sera la partie du ciel d'où Vénus ne saurait jamais sortir. Cette zône est ce qu'on appelle le *zodiaque*, ou *zône des animaux*, ou des 12 signes ou constellations qui divisent l'écliptique. On ne donne guères que 16° de largeur au zodiaque, et cela suffisait pour les planètes anciennement connues; car Vénus est de toutes les planètes celle dont les latitudes géocentriques sont les plus fortes, et nous avons vu que la latitude de Vénus ne passait pas 8°. Cette largeur de 16° ne suffit pas pour les petites planètes qu'on a découvertes de nos jours; mais le zodiaque n'est d'aucun usage réel aux astronomes; peu importe quelle largeur on lui donnera, rien n'empêche de le faire aller jusqu'aux deux pôles.

22. Voici une autre méthode pour trouver l'inclinaison; supposons que vous ayez observé la latitude géocentrique de Vénus quand le soleil aura $2^s\, 15^\circ$ ou $8^s\, 15^\circ$ de longitude. Soit VE la perpendiculaire menée du centre de Vénus sur l'écliptique,

$$\mathrm{VE} = \mathrm{TE}\,\text{tang}\,\mathrm{VTE} = \mathrm{SE}\,\text{tang}\,\mathrm{VSE} = \mathrm{D}\,\text{tang}\,\mathrm{G} = (v \cos h)\,\text{tang}\, h;$$

donc (fig. 110)

$$\text{tang}\, h = \frac{\text{D}\,\text{tang}\,\text{G}}{v \cos h} = \left(\frac{\text{TE}}{\text{SE}}\right)\text{tang}\,\text{G} = \left(\frac{\sin \text{TSE}}{\sin \text{STE}}\right)\text{tang}\,\text{G} = \frac{\sin \text{S}}{\sin \text{T}}\,\text{tang}\,\text{G};$$

mais

$$\text{tang}\, h = \text{tang}\,\text{I} \sin (u - 75^\circ) = \text{tang}\,\text{I} \sin \text{TSE};$$

car si la longitude du soleil est $8^s\ 15^\circ$, la longitude de la terre sera $2^s\ 15^\circ$ = longit. ☊ de Vénus; donc

$$\text{tang}\,\text{I} \sin \text{S} = \left(\frac{\sin \text{S}}{\sin \text{T}}\right) \text{tang}\ \text{G};$$

donc

$$\text{tang}\,\text{I} = \frac{\text{tang}\,\text{G}}{\sin \text{T}};$$

il suffit donc pour avoir I d'observer la latitude et l'élongation de Vénus le jour que le soleil a $8^s\ 15^\circ$ de longitude.

Il est difficile d'observer Vénus en ce moment; mais quand la longitude du soleil est entre $8^s\ 10^\circ$ et $8^s\ 20^\circ$, observez plusieurs jours l'élongation et la latitude; par les mouvemens diurnes de ces quantités, vous déterminerez facilement l'élongation et la latitude G pour l'instant où le soleil était en $8^s\ 15^\circ$, et par conséquent l'inclinaison.

Faites la même chose quand le soleil est vers $2^s\ 15^\circ$, vous trouverez de même l'inclinaison; toute la différence, c'est que la latitude, dans ce dernier cas, est australe.

23. Nous savons que Vénus parcourt les 360° de son orbite en $224^j\ 16^h\ 41'\ 27'',5$, nous en conclurons facilement le mouvement diurne $1^\circ\ 36'\ 8''$, ainsi nous pourrons faire des tables de ce mouvement moyen pour les années, les jours et les heures.

Une conjonction inférieure nous donnera facilement une longitude héliocentrique sur l'écliptique; soit u cette longitude, $(u - ☊)$ sera la distance au nœud; la longitude sur l'orbite sera (IV. 68)

$$u + \frac{\text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\,\text{I} \sin 2(u - ☊)}{\sin 1''} + \frac{\text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\,\text{I} \sin 4(u - ☊)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

$$= u + 180'',80 \sin 2(u - ☊) + 0'',0792 \sin 4(u - ☊).$$

Soit $u = 75°$, la longitude sur l'orbite sera u comme sur l'écliptique; le point 75°, c'est-à-dire le lieu du nœud, est commun à l'écliptique et à l'orbite; il sera $2^s\ 15°$ sur l'orbite comme sur l'écliptique. Prenez ☊A = 75° (fig. 111) en rétrogradant sur l'orbite de Vénus dans la partie australe, vous aurez le point dont la longitude est 0; prenez ☊B = 75° en rétrogradant sur l'écliptique, vous aurez le 0 de l'écliptique. Menez la perpendiculaire Ab, quand Vénus sera en A elle aura 0 de longitude dans l'orbite, mais sa longitude sur l'écliptique sera en

$$b = 0° - 2^s\ 15° + \frac{\tang^2 \frac{1}{2} I \sin 5^s\ 0°}{\sin 1''} = 9^s\ 15° + 3'\ 0'',8 \sin 5^s$$
$$= 9^s\ 15° + 3'\ 0'',8 \sin 30° = 9^s\ 15°\ 1'\ 30'',4,$$

car la différence entre ☊A et ☊b sera $3'\ 0'',8 \sin 2$☊A.

24. De la longitude $u + 3' \sin 2(u - ☊)$ retranchez le mouvement pour les jours et les heures écoulées depuis le commencement de l'année, vous aurez l'époque des moyens mouvemens.

Avec cette époque et la table des moyens mouvemens, nous pourrons calculer en tout tems le lieu de Vénus sur son orbite, en supposant cette orbite circulaire. Nous avons le lieu du nœud et l'inclinaison; nous serons en état de calculer la latitude héliocentrique, en faisant

$$\sin h = \sin I \sin (u - ☊);$$

c'est ce que nous donne le triangle rectangle ☊VE.

Le rayon vecteur de Vénus $= 0.72333$, $v \cos h = 0.72333 \cos h$ sera la projection du rayon vecteur sur l'écliptique, ou ce qu'on appelle la *distance accourcie*. Enfin la longitude réduite à l'écliptique sera $u - 3'\ 0'',8 \sin 2(u - ☊)$.

25. Nous aurons ainsi en tout tems le lieu héliocentrique de Vénus sur son cercle. Pour savoir si cette théorie s'accordera constamment avec les observations, il faut être en état de changer le lieu héliocentrique en un lieu géocentrique.

Nous aurons en tout tems la différence entre les longitudes

héliocentriques de la terre et de Vénus sur l'écliptique, c'est-à-dire, l'angle au soleil entre Vénus et la terre; cet angle s'appelle *commutation*. On connaît les deux côtés qui le comprennent et qui sont V et $v \cos h$. L'angle T à la terre, ou l'*élongation*, se trouvera par la formule

$$\tang T = \frac{\left(\frac{v \cos h}{V}\right) \sin S}{1 - \left(\frac{v \cos h}{V}\right) \cos S}.$$

L'angle à la planète sera $P = 180° - S - T$; il s'appelle *parallaxe annuelle*, ou *parallaxe de l'orbe de la terre*, ou *parallaxe du grand orbe*.

Le même triangle donnera

$$\tang P = \frac{\left(\frac{V}{v \cos h}\right) \sin S}{1 - \left(\frac{V}{v \cos h}\right) \cos S}.$$

26. Supposons que la courbe CP soit l'orbite de Vénus réduite à l'écliptique, et qu'elle la parcourre en allant de C en P, l'angle $S = PST =$ longit. planète sur l'écliptique — longit. hélioc. terre; l'angle $T = STP$ sera la différence de longitude géocentrique entre le soleil et la planète; et si Γ est la longitude géocentrique, on aura

$$\Gamma = S - T;$$

mais si la planète était en P′, on aurait

$$\Gamma = S + T;$$

car la planète serait plus avancée en longitude que le soleil, qui paraît aller de S vers D, si l'on suppose la terre immobile; mais dans ce cas on en est averti par la formule où $\sin S = \sin$ (longit. pl. — longit. terre) est une quantité négative; $\tang T$ sera donc négative, ainsi que T, et $S - T$ deviendra $S + T$.

27. Il est aisé de voir que l'angle P, ou la parallaxe an-

nuelle, est la différence entre la longitude héliocentrique et la longitude géocentrique, et que

$$\begin{aligned}\Gamma &= \text{longit. hélioc. sur l'écliptique} + P\\ &= \text{longit. } ♀ + 180^\circ - S - T\\ &= \text{longit. } ♀ + 180^\circ - (\text{longit. } ♀ - \text{longit. } ♁) - T\\ &= 180^\circ + ♁ - T = ☉ - T.\end{aligned}$$

On voit que les deux valeurs de Γ sont identiques.

28. On aura donc toujours avec facilité l'élongation T et la longitude géocentrique Γ; pour la latitude G nous aurons (23)

$$\text{tang } G = \frac{\text{tang } h \sin T}{\sin S}.$$

29. $$\text{Sin } T : \sin S :: SP : TP = \frac{SP \sin S}{\sin T},$$

$$\text{dist. à la terre} = \frac{v \cos h \sin S}{\sin T} = \frac{v \cos h \text{ tang } h}{\text{tang } G} = v \sin h \cot G,$$

$$\begin{aligned}PT &= Tm - Pm = V \cos T - v \cos h \cos SPm\\ &= V \cos T + v \cos h \cos SPT = V \cos T + v \cos h \cos P.\end{aligned}$$

Cette distance à la terre est mesurée dans le plan de l'écliptique, c'est une distance accourcie ; la distance des centres

$$\begin{aligned}&= \frac{\text{tang } h \sin T}{\sin S \cos G} = \frac{v \sin h \cos G}{\cos G} = \frac{v \sin h}{\sin G}\\ &= \frac{V \cos T + v \cos h \cos P}{\cos G}.\end{aligned}$$

30. La parallaxe horizontale de la planète est égale à la parallaxe moyenne du soleil divisée par la distance actuelle des centres SV, ou

$$\text{parall. horiz.} = \frac{8'',7}{SV} = \frac{8'',7 \sin G}{v \sin h};$$

le diamètre, qui est en raison constante avec la parallaxe,

$$= \frac{\text{diamètre à la distance moyenne}}{\text{distance actuelle des centres}}.$$

Ces formules sont les mêmes pour toutes les planètes,

elles sont toujours suffisantes; celle que nous avons donnée pour l'élongation n'est pas celle dont on se sert communément.

Soient S, T, P les trois angles,

$$\tang \tfrac{1}{2}(P-T) = \cot \tfrac{1}{2} S \frac{1-\frac{v\cos h}{V}}{1+\frac{v\cos h}{V}} = \cot \tfrac{1}{2} S \frac{1-\tang\varphi}{1+\tang\varphi}$$

$$= \cot\tfrac{1}{2}S\cot(45^\circ+\varphi) = \tang(90^\circ-\tfrac{1}{2}S)\cot(45^\circ+\varphi);$$

on fait donc

$$\frac{v\cos h}{V} = \tang\varphi, \quad \tang y = \tang(90^\circ-\tfrac{1}{2}S)\cot(45^\circ+\varphi),$$

$$T = 90^\circ - \tfrac{1}{2}S - y, \qquad P = 90^\circ - \tfrac{1}{2}S + y;$$

après quoi on aurait encore

$$\sin P : \sin T :: V : v\cos h = SE = \frac{V\sin T}{\sin P},$$

et

$$SV = \frac{V\sin T}{\sin P\cos G}.$$

31. Notre formule $\tang T = \dfrac{\left(\frac{v\cos h}{V}\right)\sin S}{1-\left(\frac{v\cos h}{V}\right)\cos S}$ prouve que pour Vénus jamais l'élongation ne peut aller à 90°; en effet, pour que T égalât 90°, il faudrait que sa tangente fût infinie, que le dénominateur fût zéro, ce qui donne... $V = v\cos h\cos S$ et $v\cos h > V$; il n'y a donc que les planètes dont le rayon vecteur v surpasse le rayon vecteur de la terre, qui puissent paraître à 90° du soleil. On appelle ces planètes *supérieures*, on appelle *inférieures* celles qui, comme Vénus, ont un rayon vecteur v plus petit que celui de la terre. Cette remarque est utile pour distinguer à la première apparition, les planètes supérieures d'avec les inférieures.

32. On voit par les formules tang T et tang P, que la planète, outre les inégalités qu'elle peut avoir dans son orbite

autour du soleil, en a une fort importante et qui dépend du mouvement de la terre dans son orbite, ou, si l'on veut, du mouvement du soleil autour de la terre. C'est ce que les anciens appelaient la *seconde inégalité de la planète*, et qu'ils faisaient dépendre du mouvement du soleil; c'est ce qui les avait obligés d'imaginer un épicycle sur lequel tournait la planète, tandis que le centre de l'épicycle tournait autour de la terre, dans un excentrique qui servait à rendre raison de l'inégalité propre de la planète.

33. Au moyen de ces formules, nous pourrons changer les lieux héliocentriques de Vénus sur son cercle, en lieux géocentriques, que nous comparerons aux observations. Nous y trouverons des différences qui passeront un degré; nous en conclurons que l'orbite de Vénus doit être elliptique comme celles du soleil et de la lune, mais que l'ellipticité doit être moins forte.

Pour déterminer cette ellipse de la manière la plus simple, nous choisirons trois conjonctions.

Les conjonctions inférieures reviennent au bout de 584 jours; à chacune des conjonctions, la longitude héliocentrique change de $7^s\ 6°$; il sera donc possible d'en choisir deux vers les apsides et une vers la moyenne distance, ou deux vers les moyennes distances, et une autre qui sera peu éloignée de l'apside. Soient V, V′ et V″ les trois longitudes vraies, M, M′, M″ les trois longitudes moyennes, φ la longitude du périhélie, e l'excentricité,

$$V = M + 2e \sin (V - \varphi),$$
$$V' = M' + 2e \sin (V' - \varphi),$$

$$A = (V' - V) - (M' - M) = 4e \sin \tfrac{1}{2}(V' - V) \cos\left(\frac{V' + V}{2} - \varphi\right),$$

$$B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4e \sin \tfrac{1}{2}(V'' - V') \cos\left(\frac{V'' + V'}{2} - \varphi\right);$$

en développant vous aurez

$$\tang \varphi = \frac{A \sin \frac{1}{2}(V'' - V') \cos \frac{1}{2}(V'' + V') - B \sin \frac{1}{2}(V' - V) \cos \frac{1}{2}(V' + V)}{B \sin \frac{1}{2}(V' - V) \sin \frac{1}{2}(V' + V) - A \sin \frac{1}{2}(V'' - V') \sin \frac{1}{2}(V'' + V')},$$

$$e = \frac{\frac{1}{2} A \sin 1''}{\sin \frac{1}{2}(V'-V)\cos\left(\frac{V'+V}{2}-\varphi\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} B \sin 1''}{\sin \frac{1}{2}(V''-V')\cos\left(\frac{V''+V'}{2}-\varphi\right)},$$
$$M = V - 2e \sin(V-\varphi), \quad M' = V' - 2e \sin(V'-\varphi),$$
$$M'' = V'' - 2e \sin(V''-\varphi).$$

34. Avec ces élémens approchés, vous calculerez toutes les conjonctions observées de Vénus. Soit O la longitude observée, C la longitude calculée, $C+dC=O$, ou $dC=O-C$, dC sera connu. Or, soit E l'époque des moyens mouvemens, m le mouvement annuel, i le nombre d'années entre l'observation et l'époque, z l'anomalie moyenne,

$$C = E + im + a \sin z,$$
$$dC = dE + idm + da \sin z + a \cos z dz = O - C.$$

Chaque observation vous donnera une équation pareille; vous réunirez ces équations en autant de groupes que vous aurez d'inconnues et de manière que dans chaque groupe une inconnue ait le plus fort coefficient possible, et toutes les autres des coefficiens les plus faibles que vous pourrez; vous éliminerez, et vous aurez les corrections de vos tables provisoires.

dE sera la correction de l'époque, dm celle du mouvement annuel, da celle du premier terme de la série de l'équation du centre en z,

$$dz = dM - d\varphi = dE + idM - d\varphi, \quad \text{ou}$$
$$d\varphi = dE + idm - dz.$$

Si vous soupçonnez un mouvement à φ, vous pourrez en tenir compte en introduisant une indéterminée de plus, où vous pourrez chercher $d\varphi$ séparément pour deux époques éloignées; la différence des deux $d\varphi$ que vous obtiendrez sera le mouvement pour l'intervalle entre les deux époques.

35. Les anciens, qui n'avaient pas tous ces moyens, s'attachaient à observer les digressions.

Si l'orbite de Vénus était circulaire, les digressions seraient toutes égales, du moins quand la terre serait elle-même revenue à la même distance du soleil. En effet, quand le rayon visuel est tangent à l'orbite, l'angle à la planète est droit, le sinus de l'élongation est $\frac{v \cos h}{V}$, or $\frac{v}{V} = \frac{a(1+e)}{V}$ dans l'aphélie; $\frac{a(1-e)}{V'}$ dans l'aphélie.

Soient D et D′ les deux digressions,

$$V \sin D = a(1+e), \qquad V' \sin D' = a(1-e),$$

équation d'où l'on peut tirer l'inconnue e, puisque le reste est connu.

36. Mais il est difficile de trouver des digressions qui soient exactement dans les apsides; l'angle à la planète sera donc obtus ou aigu; on pourrait corriger cet angle avec l'excentricité et l'anomalie à peu près connue, et j'ai donné pour cela une formule; mais les moyens analytiques indiqués ci-dessus sont beaucoup plus exacts.

La planète doit avoir, comme la lune, des équations de la forme

$$a \sin S + b \sin 2S + c \sin 3S + \text{etc.}$$

On pourrait les trouver en opérant comme pour la lune (XIV. 71); mais ces termes sont fort petits, la théorie les a déterminés mieux que ne pourrait faire l'observation. Voyez Mécan. Céleste, ou Tables de Vénus de Lindenau.

Passages de Vénus.

37. Vénus revient en conjonction tous les 584 jours, avec une longitude augmentée de 216°; après cinq conjonctions pareilles, la longitude est augmentée de 1080° = 3.360°. Cinq conjonctions arrivent en 5.584 jours = 2920 jours = 8.365, ou huit années de 365 jours; ainsi au bout de huit ans les conjonctions reviennent aux mêmes points du ciel, et il en est de même à peu près pour tous les lieux de Vénus, la pé-

riode de huit ans les ramène tous dans le même ordre, ce qui abrège le calcul des Éphémérides.

38. Supposons qu'une de ces conjonctions arrive précisément dans le nœud, le centre de Vénus couvrira le centre du soleil, le disque noir de Vénus formera une tache d'une minute de diamètre au centre du soleil; cette tache sera trop petite pour être vue sans lunette. C'est la raison pour laquelle il n'en est fait aucune mention dans l'Astronomie ancienne.

Si, à l'instant de la conjonction, Vénus a une latitude géocentrique de quelques minutes, on verra Vénus décrire sur le disque du soleil une corde plus ou moins longue. C'est ce qu'on appelle un *passa e;* la durée en serait de 7^h 52 ou 54′, s'il était central; il durerait plus ou moins de tems, selon que Vénus passerait plus près ou plus loin du centre; il n'y aurait qu'un simple contact, si la plus courte distance était égale à la demi-somme des diamètres.

39. Ces passages se calculeraient, comme les éclipses de lune, par les mouvemens relatifs et l'orbite apparente; mais tout cela serait pour le centre de la terre. La parallaxe doit altérer la durée; en rapprochant Vénus du centre, elle lui ferait décrire une corde plus longue qui demanderait plus de tems; mais pour les pays qui verraient Vénus au-dessous du centre, la parallaxe éloignerait Vénus, elle accourcirait la corde et la durée.

Si la parallaxe du soleil est de près de 9″, celle de Vénus doit être de 30″, la parallaxe relative de 21″ environ.

Le calcul d'un passage pour un lieu déterminé se fera comme celui d'une éclipse de soleil; Vénus remplace ici la lune, le diamètre est beaucoup moindre, le mouvement relatif est rétrograde, les parallaxes étant beaucoup moins considérables seront plus faciles à calculer; voilà toutes les différences.

40. La différence entre la durée pour le centre de la terre et pour un point de la surface, sera l'effet de la parallaxe; cet effet peut donc se calculer; cet effet sera différent pour les différens pays, et surtout pour les pays placés dans les

hémisphères différens; si la parallaxe alonge la durée pour un hémisphère, elle l'abrégera pour l'autre; ainsi les durées observées en deux lieux très-différens en latitude, pourront servir à déterminer la parallaxe qui aura produit les différences observées.

41. On ne songea pas d'abord à cet avantage particulier des passages de Vénus; Képler n'y voyait qu'un phénomène curieux qui n'avait point encore été remarqué. Halley fut le premier qui donna cet avis aux astronomes, en leur annonçant les passages de 1761 et 1769.

42. Puisque Vénus, après huit ans, revient en conjonction dans le même point du ciel, il est naturel, quand on a observé un passage, d'en attendre un pareil huit ans après, et il a lieu en effet quelquefois, et ils reviennent ainsi deux à deux; mais on n'en peut jamais espérer trois en seize ans, parce qu'à chaque passage la latitude change de 20 ou 24′; ainsi un passage austral succède à un passage boréal, et réciproquement; mais au troisième, la latitude surpasse infailliblement le demi-diamètre du soleil, il n'y a point de passage.

Ces passages ne peuvent arriver que tout près des nœuds, c'est-à-dire quand le soleil est en 8ʃ 15°, en décembre, par conséquent, ou en 2ʃ 15°, en juin.

43. Après la période de 8 ans qui ramène les passages près du même nœud, la période la plus courte est celle de 121 ans $\frac{1}{2}$, qui joint quelquefois des passages près des deux différens nœuds; ainsi au passage de 1761 $\frac{1}{2}$

ajoutez.....	121 $\frac{1}{2}$
vous aurez le passage.....	1882 $\frac{2}{2}$ presque, ou du 6 déc. 1882,
retranchez.....	8
vous aurez.....	1874 $\frac{2}{2}$, ou le pass. du 8 déc. 1874.

Ce sont les deux passages les plus prochains.

Outre ces périodes, on a encore celles de 105 et 113; mais ces trois périodes manquent très-souvent, celle de 235

est beaucoup plus sûre, et surtout celle de 243, qui est le double de $121\frac{1}{2}$.

J'ai calculé par ces périodes tous les passages, depuis l'an 900 jusqu'en l'an 3000, et j'en ai trouvé 35 en tout, en comptant même ceux qui sont un peu douteux, par la grande latitude de Vénus, qui fait que la moindre erreur sur le nœud et l'inclinaison, peut faire manquer le passage, qui sera au moins très-court.

44. Pour qu'un passage ait lieu, il faut que la plus courte distance G cos I soit moindre que la demi-somme des diamètres; la latitude géocentrique G dépend de la latitude héliocentrique, laquelle à son tour dépend de la distance de Vénus à son nœud. J'ai trouvé, d'après ces considérations, que la limite des passages, ou la distance au nœud, qui ne donne qu'un simple contact, a pour expression.

$$(♀ - ☊) = \frac{(\sigma + \varpi' - \varpi)(V - \nu)}{\nu \sin I \cos I'},$$

σ étant la demi-somme des diamètres, $\varpi' - \varpi$ la différence des parallaxes horizontales de Vénus et du soleil, V et ν les deux rayons vecteurs, I l'inclinaison vraie de l'orbite, et I' l'inclinaison de l'orbite apparente.

Si la distance au nœud est moindre que cette valeur, le passage aura lieu; si elle est plus grande, il n'y aura point de passage.

45. Le choix des stations est une chose très-importante, puisque de là doit dépendre la précision avec laquelle on pourra déterminer la parallaxe. En général, il faut chercher une station très-boréale et une station très-australe, afin que la parallaxe, agissant en sens contraire pour les deux observateurs, soit doublée s'il est possible. On peut employer à ces recherches la méthode que nous avons donnée pour les éclipses de soleil; mais le calcul en est assez long, et comme on n'a pas besoin d'une grande précision, on peut, avec un globe, trouver sans calcul tout ce qu'on cherche. La difficulté n'est pas de trouver mathématiquement les sta-

tions les plus favorables; il faut chercher, parmi les lieux habités, ceux qui offrent les plus grands avantages.

46. Prenons pour exemple le passage de 1769. La déclinaison du soleil était de $22^\circ\frac{1}{2}$; le parallèle dont la latitude est de $22^\circ\frac{1}{2}$ voyait donc le soleil à son zénit au méridien; élevez le pôle du globe terrestre de $22^\circ\frac{1}{2}$ au-dessus du point nord de l'horizon. La latitude de Vénus était de 4′ 8″ boréale. Ainsi les stations boréales devaient observer une durée plus longue, et les stations australes une durée plus courte que le centre de la terre.

L'entrée devait avoir lieu à $7^h 31'$ tems vrai de Paris.
La sortie à..... 13.46, c'est-à-dire la nuit.
Le milieu à..... $10^h 38'$ du soir.

A ces trois instans l'angle horaire de Paris était $112\frac{3}{4}$, $159\frac{1}{2}$ et $206\frac{1}{2}$; les lieux qui avaient le soleil au méridien étaient, à l'occident de Paris, de 113, 160 et 206°, ou, à l'occident de l'île de Fer, de.... 93, 140 et 186°.

47. Placez sous le méridien du globe le méridien qui a 140° de longitude occidentale comptée de l'île de Fer; le globe sera convenablement placé pour l'iinstant du milieu, l'hémisphère supérieur à l'horizon représentera la partie éclairée, celle qui voit le soleil, et par conséquent le milieu du passage, car la parallaxe est beaucoup trop faible pour faire sortir Vénus de dessus le disque solaire.

48. Dans cette position, vous remarquerez que tous les lieux qui sont au-dessus du parallèle $67^\circ\frac{1}{2}$, ou à moins de $22^\circ\frac{1}{2}$ du pôle, n'auront pas de nuit, qu'ils verront par conséquent le passage tout entier, et que le soleil étant fort peu élevé, la parallaxe sera plus forte, et qu'en rapprochant Vénus du centre, elle doit augmenter la durée. On pouvait choisir Nord-Cap, Wardhus, Kola, la Nouvelle Zemble, les côtes des Samoïèdes et de la Tartarie russe. A Wardhus, le P. Hell observa la durée intérieure de $5^h 53' 31''$; la durée totale eût été de $6^h\frac{1}{2}$.

49. A des latitudes moins hautes où le soleil disparaît seu-

lement pendant quelques heures, on pouvait trouver des lieux où l'entrée était visible un peu avant le coucher du soleil, et la sortie peu de tems après le lever; plusieurs villes de Suède étaient dans ce cas, et particulièrement Cajanebourg, où Planmann a observé la durée, telle à peu près que le P. Hell l'avait à Wardhus.

50. La Tartarie, la Chine, les îles du Japon, le Kamtchatka, qui étaient alors plus ou moins éloignés du méridien, avaient plus de jour qu'il n'en fallait pour voir le passage entier. La partie septentrionale de l'Amérique, la Californie, qui avait déjà passé au méridien, étaient encore dans la partie éclairée à la fin du passage. A l'entrée, c'est-à-dire quand le 93e degré de l'équateur était au méridien, le soleil était presqu'au zénit de la Californie; la sortie avait lieu vers le coucher, quand le 186e degré de longitude occidentale, ou le 174e de longitude orientale était au méridien, le soleil paraissait près de l'horizon, la parallaxe devait retarder la sortie et n'avait rien produit sur l'entrée; Chape y observa la durée de $6^h\ 14'\ 3''$.

Dans la baie d'Hudson, les distances au zénit devaient être plus fortes à l'entrée et à la sortie; le passage y fut observé de $6^h\ 22'\ 00''$ par Dymond et Wales.

51. Dans la partie australe, on n'avait aucun pays habité où la parallaxe dût être aussi forte; mais elle agissait en sens contraire, elle abrégeait le passage; les îles du Saint-Esprit, des Amis, de la Société, les Marquises de Mendoce, devaient voir le passage un peu accourci; Green et Cook, à Taïti, observèrent la durée de $6^h\ 6'\ \frac{1}{2}$, plus courte de 7 à 8′ que la durée centrale. Ainsi le plus grand effet de la parallaxe était de $6^h\ 29'$ à $6^h\ 6'$ ou 23′ environ, c'est-à-dire au moins autant de minutes que la parallaxe relative contient de secondes.

52. Le choix des stations suppose donc qu'on ait déjà calculé le passage pour le centre de la terre; voyons comment on peut faire les calculs et les observations, et comment on déduit la parallaxe.

Mouvement

Mouvement hor. héliocentrique de ♀..... 3′ 58″ 14
de la terre... 2.23,50

mouvement relatif héliocentrique..... 1.34,64
mouvement horaire en latitude..... —14,20,

$$\text{tang inclinaison} = \text{tang I} = \frac{14'',20}{94,64} = 8^\circ\ 31'\ 59'',$$

$$\text{mouvem. hor. géocent.} = \frac{94''64 \cdot \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}} = 237'',84 \text{ rétrograde},$$

mouvement horaire en latitude = — 35″,6863,

$$G = h\,\frac{v}{V\left(1 - \frac{v}{V}\right)} = 623'',5042,$$

plus courte distance G cos I = 616″,6024,
distance entre le milieu et la conjonction G sin I = 92″,5164,
en tems ou multipliée par $\left(\frac{3600''\cos I}{\text{mouvem. hor.}}\right)$..... $0^h 23'\ 4'',5$
tems de la conjonction..... 10.15.2
milieu du passage..... 10.38.6.

53. Soit σ la demi-somme des diamètres, σ' la demi-différence, ε la plus courte distance,

$(\sigma'^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ en tems = demi-durée intér..... 2.48.41
premier contact intérieur..... 7.49.25
dernier contact intérieur..... 13.26.47

$(\sigma^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ en tems..... 3. 7.33
premier contact extérieur..... 7.30.33
dernier contact extérieur, ou fin..... 13.45.39

tems du diamètre = $3^h\ 7'\ 33'' - 2^h\ 48'\ 41'' = 18'\ 52''$.

Nous supposons

$\frac{1}{2}\odot = 943'',7$, $\frac{1}{2}$ ♀ $= 28'',6$, $\sigma = 972'',3$ et $\sigma' = 915'',1$.

54. Soit $\sin A'' = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}\odot}$; A'' sera l'angle que fait l'orbite relative avec la distance des centres, à l'instant où le centre de Vénus est sur le bord du soleil.

55. Le tems de l'entrée du diamètre peut se calculer par la formule

$$\frac{\text{diamètre de } ♀}{\cos A''} \cdot \frac{3600'' \cos I}{\text{mouvement horaire relatif}} = 18'\ 51'',4.$$

$\frac{18'\ 51'',4}{57'',2} = 19'',77$; ainsi chaque seconde du diamètre de Vénus employait $19'',77$, environ $20''$, à entrer sur le soleil. L'observation n'a donné que $18'\ 16''$ pour l'entrée du diamètre, ainsi le diamètre de Vénus n'était guères que de $55'',2$; $55'',2 \times \left(1 - \frac{\nu}{V}\right) = 15'',7$; c'est le demi-diamètre de Vénus à la distance moyenne $= 1$.

56. $$\text{Parallaxe } \odot = \frac{8'',7}{V} = 8'',570,$$

$$\text{parallaxe } ♀ = \left(\frac{8'',7}{1 - \frac{\nu}{V}}\right) = 30,108,$$

$$P = \text{parallaxe relative} = 21,538,$$

$$\text{ou } P = \frac{\varpi . \nu}{V^2\left(1 - \frac{\nu}{V}\right)}; \quad \text{d'où } \varpi = \frac{P . V^2\left(1 - \frac{\nu}{V}\right)}{\nu}.$$

$\varpi = 0.40334P$; ainsi quand on aura trouvé P par la comparaison des durées, on en conclura la parallaxe du soleil.

21'',5 de parallaxe font environ $430''$ de tems, ou $7'\ 10''$; l'effet de la parallaxe sur la durée ne peut donc surpasser $14'\ 20''$, ou $7'\ 40''$ quand on compare les durées de l'hémisphère boréal à celles de l'hémisphère austral; mais nous avons déjà dit qu'on n'en avait pu obtenir que 22 ou 23' au plus,

par le défaut de stations assez convenables; on avait encore été moins heureux en 1761.

57. Pour trouver la parallaxe du soleil par les observations d'un passage de Vénus, il faut savoir dépouiller une entrée ou une sortie observée de l'effet de la parallaxe relative P, et réduire l'observation à ce qu'elle eût été pour le centre de la terre. Cette réduction est une certaine fonction de P. Cherchons cette fonction.

Soit E l'élongation et G la latitude géocentrique pour l'instant de l'entrée, σ la demi-somme des diamètres. On aurait rigoureusement

$$\cos E \cos G = \cos \sigma,$$

d'où j'ai déduit

$$(E^2 + G^2)^{\frac{1}{2}} = \sigma - 0'',00216 = \sigma;$$

mais la parallaxe changera l'élongation et la latitude, qui deviendront $(E + \Pi)$ et $(G + \pi)$, l'égalité ne subsisterait plus; pour la rétablir, il faut faire varier E et G, et l'on aura ainsi

$$(E + dE + \Pi)^2 + (G + dG + \pi)^2 = \sigma^2 = E^2 + G^2;$$

développez, et vous obtiendrez

$$dE^2 + dG^2 + 2dE(E + \Pi) + 2dG(G + \pi) = -2E\Pi - 2G\pi - \Pi^2 - \pi^2;$$

mais $dG = dE \operatorname{tang} I$ (52); donc

$$dE^2 + dE^2 \operatorname{tang}^2 I + 2dE(E + \Pi) + 2dE \operatorname{tang} I (G + \pi)$$
$$= -2E\Pi - 2G\pi - \Pi^2 - \pi^2, \text{ ou}$$
$$dE^2 \sec^2 I + 2dE(E + \Pi + G \operatorname{tang} I + \pi \operatorname{tang} I)$$
$$= -2E\Pi - 2G\pi - \Pi^2 - \pi^2,$$
$$dE^2 + 2dE(E + \Pi + G \operatorname{tang} I + \pi \operatorname{tang} I) \cos^2 I$$
$$= -(2E\Pi + 2G\pi + \Pi^2 + \pi^2) \cos^2 I,$$
$$dE^2 = 2adE = -b, \qquad dE^2 - 2adE + a^2 = (a^2 - b),$$
$$(dE - a)^2 = a^2 - b, \qquad dE = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}\left(\frac{b}{4a^2}\right).$$

Ce dernier terme est insensible, et nous ferons

$$dE = -\frac{b}{2a} = -\frac{2E\Pi + 2G\pi + \Pi^2 + \pi^2}{2(E+\Pi+(G+\pi)\tang I)}$$

$$= -\frac{\dfrac{E\Pi}{E+\Pi} + \dfrac{G\pi}{E+\Pi} + \dfrac{\Pi^2+\pi^2}{2(E+\Pi)}}{1+\left(\dfrac{G+\pi}{E+\Pi}\right)\tang I}.$$

Soit $\tang u = \dfrac{G+\pi}{E+\Pi}$,

$$dE = -\frac{E\Pi + G\pi + \frac{1}{2}(\Pi^2+\pi^2)}{(E+\Pi)(1+\tang u \tang I)}$$

$$= -\frac{E\Pi + G\pi + \frac{1}{2}(\Pi^2+\pi^2)}{E+\Pi}\left(\frac{\cos u \cos I}{\cos u \cos I + \sin u \sin I}\right)$$

$$= -\frac{\cos u \cos I}{\cos(u-I)}\left(\frac{E\Pi + G\pi + \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2}{E+\Pi}\right).$$

Soit m le mouvement relatif, nous changerons dE en tems, en le multipliant par $\left(\dfrac{3600''}{M}\right)$, ou plutôt par $-\left(\dfrac{3600''}{M}\right)$; car si l'élongation augmente, l'entrée sera retardée, puisque la planète est rétrograde.

Soit donc T le tems de l'entrée pour le centre de la terre, nous aurons l'entrée pour la surface,

$$\theta = T + dT = T + \left(\frac{3600''}{m}\right)\frac{\cos u \cos I}{\cos(u-I)}\left(\frac{E\Pi + G\pi + \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2}{E+\Pi}\right);$$

ou

$$T = \theta - \left(\frac{3600''}{M}\right)\left(\frac{\cos u \cos I}{\cos(u-I)}\right)\left(\frac{E\Pi + G\pi + \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2}{E+\Pi}\right).$$

Au moyen de cette formule nous réduirons au centre de la terre le tems de l'entrée observée dans un lieu quelconque de la surface.

58. Pour la sortie nous ferons un calcul tout pareil; mais nous remarquerons que $dG = -dE \tang I$; nous ferons négative l'inclinaison I, et si T′ et θ′ sont les tems, nous aurons

$$T' = \theta' + \left(\frac{3600''}{M}\right)\left(\frac{\cos u \cos I}{\cos(u+I)}\right)\left(\frac{-E'\Pi' + G'\pi' + \frac{1}{2}\Pi'^2 + \frac{1}{2}\pi'^2}{E + \Pi}\right);$$

le terme $E'\Pi'$ a le signe —, parce qu'après la conjonction la parallaxe positive diminue l'élongation.

Soit $\Pi = mP$ et $\pi = nP$; nos formules seront

$$T = \theta - \left(\frac{3600''}{M}\right)\frac{\cos u \cos I \,.\, P}{\cos(u-I)}\left(\frac{-Em + Gn + \frac{1}{2}m\Pi + \frac{1}{2}n\pi}{E + \Pi}\right),$$

$$T' = \theta' + \frac{3600'' \cos u' \cos I}{M \cos(u'+I)}\left(\frac{E'm' + G'n' + \frac{1}{2}m'\Pi' + \frac{1}{2}n'\pi'}{E' - \Pi'}\right),$$

ou

$$\begin{aligned} T &= \theta - aP, \\ T' &= \theta' + a'P, \\ \hline T' - T &= \theta' - \theta + a' + a)P = D + \mu P. \end{aligned}$$

Une seconde observation dans un lieu fort différent en latitude, donnera

$$T' - T = D' + \mu' P = D + \mu P;$$

d'où

$$D' - D = \mu P - \mu' P = (\mu - \mu')P,$$

et $$P = \frac{D' - D}{\mu - \mu'}, \quad \text{et} \quad \varpi = \left(\frac{D' - D}{\mu - \mu'}\right)(0.40394).$$

59. Les calculs pour le centre de la terre donnent les E et les G, pour l'entrée et la sortie; avec la hauteur du pôle on calcule $m = \frac{\Pi}{P}$ et $n = \frac{\pi}{P}$: tout sera donc connu dans l'équation qui donne P; mais la petitesse des parallaxes permet de négliger plusieurs termes qui seraient sensibles pour la lune. En éliminant le nonagésime et sa hauteur, j'ai trouvé

$$m = \frac{\Pi}{P} = \frac{\cos H \cos ♀ \cos M - \cos\omega \cos H \cos ♀ \sin M - \sin\omega \cos ♀ \sin H}{\cos G}$$

$$\begin{aligned} n = \frac{\pi}{P} = {} & \cos\omega \sin H \cos G - \sin\omega \cos H \cos G \sin M \\ & - \sin G \cos H \cos ♀ \cos M - \cos\omega \sin G \cos H \sin ♀ \sin M \\ & - \sin\omega \sin G \sin ♀ \sin H - \tang^2 \tfrac{1}{2}\Pi \sin 2G - \text{etc.} \end{aligned}$$

On peut négliger cos G et tous les termes affectés de sin G; dont aucun ne peut aller à 0″,021.

H est la hauteur du pôle, ♀ la longitude géocentrique de Vénus, M l'ascension droite du milieu du ciel, ω l'obliquité de l'écliptique; si la latitude est australe, il faut changer le signe de sin H.

60. Pour éviter les erreurs de calcul, quand on a déterminé dE, dG et les parallaxes, il n'est pas inutile de voir si en effet on a

$$(E + \Pi + dE)^2 + (G + \pi + dG)^2 = \sigma^2.$$

61. Ayant comparé de cette manière sept durées entières du passage de 1769 observées en différens pays, j'ai trouvé pour la parallaxe relative P et la parallaxe moyenne ϖ du soleil, les quantités qu'on verra dans le tableau suivant.

Le milieu entre les divers résultats fournis par Taïti est	8.58556
Par la Californie	8.40712
Par la Baie d'Hudson	8.75175
Milieu général	8.5693
Les trois résultats de Paris et Pétersbourg	8.9142
Milieu entre les deux précédens	8.7418.

62. Quand les longitudes de deux lieux sont bien connues, comme celles de Paris et de Pétersbourg, rien n'empêche de prendre l'entrée observée dans l'un des deux, et la sortie observée dans l'autre; les deux observations réduites au centre de la terre et au même méridien, donnent la durée totale pour le centre, aussi bien que si elles eussent été faites dans le même lieu.

63. Il résulte de ces comparaisons, que la parallaxe moyenne du soleil est très-probablement renfermée entre 8″,5 et 8″,7. Nous supposerons 8″,6; Lalande s'arrêtait à ce même nombre, Lexell à 8″,63, Dusejour à 8″,8; mais il avait fait concourir plusieurs observations qui paraissent moins certaines ou moins concluantes, telles que celles du passage de 1761.

Observations comparées.	P	ϖ
Taïti. Wardhus	21″561	8″7094
Taïti. Kola	21,166	8,5503
Taïti. Cajanebourg	20,762	8,3865
Taïti. Baie d'Hudson	21,066	8,5036
Taïti. Paris et Pétersbourg	21,730	8,7780
Californie. Wardhus	21,330	8,6160
Californie. Kola	20,765	8,3880
Californie. Cajanebourg	20,208	8,1630
Californie. Baie d'Hudson	20,184	8,1531
Californie. Paris et Pétersbourg	20,576	8,7155
Baie d'Hudson. Wardhus	22,592	9,1260
Baie d'Hudson. Kola	20,941	8,4589
Baie d'Hudson. Cajanebourg	20,233	8,1730
Baie d'Hudson. Paris et Pétersbourg	22,897	9,2491

64. On attendait plus d'accord dans les observations et dans les résultats; mais il faut considérer que dans les stations boréales, où l'on avait une parallaxe plus forte, le soleil était peu élevé, que les bords étaient ondulans, ce qui a pu nuire à l'observation des contacts; enfin, que chaque seconde du diamètre employait 20″ à entrer sur le disque, et l'on ne doit pas être surpris de trouver 20″ d'incertitude, puisque dans la même ville, comme à Paris, à Greenvich, à Londres et à Oxford, où les observateurs étaient en grand nombre, on trouve des différences de 16″, de 25″, de 17 à 21″.

L'effet de la parallaxe était d'environ 20′ sur la durée relative, 20″ en sont le soixantième; on pourrait donc douter du résultat,

à $\frac{1}{60}$ près, si l'on n'avait qu'un seul calcul; mais nous pouvons très-probablement réduire l'incertitude à $\frac{1}{120}$, et ainsi au lieu de 8″,5693, qui est notre résultat moyen, nous pourrions avoir 8″,64 ou 8″,498; on ne se trompera donc guère en supposant 8″,6, d'où il résulte que la distance du soleil à la terre est $\frac{1}{\sin 8'',6}$, c'est-à-dire de 23935, demi-diamètre de la terre, et si l'on donne, en nombre rond, 1500 lieues à ce demi-diamètre, on aura 35,902,500 lieues pour la distance moyenne du soleil; mais si l'on fait les lieues de 2000 toises, comme aux environs de Paris, le demi-diamètre sera de 1635$^{li.}$,6125, et la distance de 39.229.000 li. Au reste, ces estimations en lieues sont de simple curiosité; elles n'entrent dans aucun calcul astronomique, et que l'on fasse la parallaxe de 8″,5 ou 8″,7, il importe assez peu, même dans les recherches les plus délicates.

MERCURE.

65. Vénus nous offrait toutes les facilités possibles par son grand éclat, par sa proximité, son grand diamètre, ses phases bien sensibles et le peu d'excentricité de son orbite. Mercure est beaucoup plus petit, plus loin de nous, et son excentricité est beaucoup plus grande; mais cette planète a d'ailleurs tant d'analogie avec Vénus, que sa théorie ne sera guères plus difficile à déterminer; il nous suffira d'appliquer à Mercure tous les raisonnemens que nous avons faits pour Vénus.

66. Mercure se voit très-difficilement au méridien, du moins dans nos climats septentrionaux; mais on le voit très-aisément dans les lunettes, et même quelquefois à la vue simple, vers le commencement ou vers la fin du jour. Pour l'observer assidument il faut recourir à la machine parallactique.

67. Ainsi au mois de février 1809 on voyait Mercure à l'horizon pendant près d'une heure après le coucher du so-

leil. En le suivant plusieurs jours, on aurait vu que sa latitude était australe décroissante ; que le 12 elle se réduisait à 0, que le 4 mars la latitude était de 3° 41′ boréale ; qu'elle avait été ensuite en diminuant jusqu'au 22 au soir, où elle était nulle, Mercure étant alors dans son nœud descendant.

68. Du 12 février au 22 mars il y a 40 jours; ainsi dans une orbite circulaire, nous pourrions conclure une demi-révolution de 40 à 41 jours; mais le 11 mai Mercure était de nouveau dans son nœud ascendant, ainsi la révolution entière paraîtrait d'environ 89 ou 90 jours. Le 18 juin, Mercure passait par son nœud descendant, d'où l'on conclurait la révolution de 88 jours, par la comparaison avec le 22 mars. Dans la réalité, elle est de $87^j\ 23^h\ 14'\ 34''$.

Les observations de mars et de juin étaient plus faciles, parce que dans l'une la planète passait 1^h avant le soleil, dans la seconde elle passait $1^h\ 43'$ après.

On voit déjà que la révolution est très-courte et la planète fort excentrique.

69. La loi de Képler donnera pour la distance moyenne 0.38710, en admettant que Mercure tourne autour du soleil, ce que prouvent ses phases, toutes semblables à celles de Vénus : seulement elles sont moins faciles à bien voir, parce que le diamètre de Mercure à la distance moyenne du soleil ne serait que de 6″,3, ainsi que je l'ai trouvé par les passages sur le soleil; mais dans ses digressions il est un peu plus grand.

70. Parmi ces digressions on choisira la plus grande et la plus petite, on en tirera une première idée de l'excentricité. Les digressions moyennes s'accorderont avec la distance 0.38710 trouvée par la loi de Képler.

71. Nous trouverons la longitude du nœud et l'inclinaison par les méthodes exposées à l'occasion de Vénus; nous perfectionnerons toutes ces connaissances par les moyens donnés ci-dessus. Trois conjonctions inférieures nous feraient trouver l'aphélie et l'excentricité avec d'autant plus d'exactitude que les perturbations sont peu de chose. La plus grande difficulté

consiste à observer la conjonction inférieure, à moins que Mercure ne passe sur le soleil.

72. Ces passages sont beaucoup plus fréquens que ceux de Vénus; on les calcule de même; les périodes qui les ramènent sont de 6, 7, 13, 46 et 263 ans. On en a observé un nombre suffisant pour bien établir les élémens de Mercure.

73. On ne peut faire que deux hypothèses pour expliquer les mouvemens de cette planète; la première, c'est qu'elle tourne autour du soleil, comme Vénus et comme la terre. La seconde est que le soleil tournant autour de la terre, entraînant avec lui les orbites de Mercure et de Vénus, comme la terre, dans l'autre système, entraîne avec elle l'orbite de la lune.

Les Égyptiens avaient dès-long-tems reconnu la nécessité de faire ainsi tourner autour du soleil deux planètes qui ne s'en séparent jamais. Les digressions moyennes de Vénus sont de 46° 20′; celle de Mercure de 22° 46′. Ces planètes se montrent tantôt le matin, tantôt le soir, en avant ou à la suite du soleil; dans leurs nœuds on les voit passer sur le soleil, mais c'est toujours dans leurs conjonctions inférieures; jamais on n'a observé de passages dans leurs plus grandes distances à la terre, c'est qu'alors elles sont derrière le soleil; donc elles tournent autour du soleil et non de la terre. Cette vérité nous est démontrée par leurs phases; c'est faute d'avoir eu des moyens pour observer ces différentes apparences, que Ptolémée a pu s'aveugler lui-même et persister dans une opinion qu'il n'a pu étayer que par des suppositions au moins fort étranges, et qui l'ont forcé à cet aveu, qu'il ne faut pas s'imaginer que tout se passe dans le ciel comme le disent les astronomes à qui il suffit qu'une hypothèse se prête aux calculs. Mais le système de Ptolémée n'a pas même cet avantage; l'insuffisance en a été reconnue même avant l'invention des lunettes, et par les adversaires les plus obstinés de Copernic.

MARS.

74. Mercure et Vénus s'écartent peu du soleil; les planètes que nous avons encore à considérer peuvent être vues à toutes les élongations possibles, depuis 0° jusqu'à 360°, d'où il résulte déjà (33) que leur distance au soleil est plus grande que celle de la terre; et cette variété indéfinie dans leurs élongations est une grande facilité pour en multiplier les observations.

75. Mars n'a guères que 9″ de diamètre; sa lumière est d'une couleur tirant sur le rouge, qui le fait aisément remarquer; il n'a pas de phases bien sensibles; jamais il ne montre moins que les $\frac{4}{5}$ de son disque; ainsi $\cos^2 \frac{1}{2} P = 0,8$ au moins;

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} P = 0,2, \quad \tfrac{1}{2} P = 26° 34' \quad \text{et} \quad P = 53°.$$

Tel serait à peu près l'angle à la planète entre la terre et le soleil, lorsqu'il est le plus grand. Soit V le rayon vecteur de la terre, V′ celui de Mars;

$$\frac{V}{V'} = \sin 53° \quad \text{et} \quad V' = \frac{V}{\sin 53°} = 1,25 :$$

nous verrons bientôt que ce rayon vecteur est encore plus grand, et par conséquent l'angle plus petit.

76. En suivant le même plan qui nous a réussi pour les planètes inférieures, nous aurions trouvé que le 23 juillet 1807, Mars était dans son nœud descendant; que jusqu'au 16 décembre sa latitude était australe et croissante; le 21 mai 1808 il était dans son nœud ascendant.

L'intervalle est de 302 jours, d'où l'on conclurait une révolution de 604. Le 7 mars 1809, la latitude boréale était de 2° 49′; le 8 juin elle était nulle. Du 21 juillet 1807 au 8 juin 1809, on trouve 687 jours pour le retour au même nœud. Par plusieurs comparaisons de même espèce, on aura $686^j\ 22^h\ 18'\ 19''$. Ainsi par la loi de Képler la distance moyenne

$$1.52369\,; \quad \sin P = \frac{V}{V'} = \frac{1}{1.52369} = \sin 41^\circ\, 1',$$

$\cos^2 \frac{1}{2} P = 0{,}877$; c'est la partie de son disque, telle que nous la voyons dans la plus petite phase; la partie obscure n'est donc que de 0,123, ce qui n'est pas $\frac{1}{8}$; Mars doit donc nous paraître en tout tems presque tout rond.

77. Si nous comparons les intervalles consécutifs des passages par les nœuds que nous avons trouvés de 302 et 385 jours, nous verrons que la ligne des nœuds qui passe par le soleil, coupe l'ellipse en deux secteurs qui sont entre eux dans le rapport $\frac{302}{385}$; la différence est de 83 jours, dont le quart est de 20 à 21; d'après la révolution entière, le mouvement diurne n'est que de $31'\ 27''$, ce qui fait environ $10^\circ \frac{1}{2}$ pour 20 jours, et 11° pour 21; ainsi l'équation de Mars doit être entre $10^\circ \frac{1}{2}$ et 11°; dans le fait, elle est de $10^\circ\ 41'$. Ce calcul facile pourrait donner une équation trop petite, mais il ne peut la donner trop grande, car les deux différences d'anomalie vraie ne peuvent différer tout au plus que de 4 fois la plus grande équation, d'avec les différences correspondantes d'anomalie moyenne. En effet, si dans les passages aux nœuds la planète est au tems de sa plus grande équation, le tems du secteur ☊PS (fig. 112) sera diminué du tems qui correspond à deux fois sa plus grande équation; le secteur ☋A☊ sera alongé de deux fois ce tems; la différence sera donc proportionnelle à quatre fois la plus grande équation.

Soient Δz, $\Delta' z$, $\Delta'' z$, $\Delta''' z$ les différences de ces mouvemens d'anomalie moyenne pour les quatre secteurs; Δu, $\Delta' u$, $\Delta'' u$, $\Delta''' u$ les mouvemens d'anomalie vraie, E la plus grande équation. Les tems sont toujours proportionnels aux différences Δz.

Ainsi de ☊ en P le tems sera comme... $\Delta z = \Delta u - E$

de P en ☋ le tems sera comme... $\Delta' z = \Delta' u - E$

le tems de ☊ à ☋ comme... $\Delta z + \Delta' z = \Delta u + \Delta' u - 2E$

de ☋ en A le tems sera comme.. $\Delta'' z = \Delta'' u + E$

de A en ☊..... $\Delta''' z = \Delta''' u + E$

le second intervalle sera donc comme $\Delta'' z + \Delta''' z = \Delta'' u + \Delta''' u + 2E$

les différences des deux intervalles observés comme

$$(\Delta'' z + \Delta''' z) - (\Delta z + \Delta' z) = (\Delta'' u + \Delta''' u) - (\Delta u + \Delta' u) + 4E$$
$$= 180^\circ - 180^\circ + 4E = 4E;$$

donc la différence des deux intervalles sera proportionnelle à quatre fois la plus grande équation.

Ceci suppose que les deux lieux de la plus grande équation sont en ligne droite avec le foyer, ce qui n'est pas tout-à-fait exact; la somme des deux équations dans les nœuds sera toujours moindre que 2E, et la différence moindre que 4E.

78. On voit avec quelle facilité la simple observation des passages d'une planète par ses nœuds, fait trouver des valeurs assez approchées de la révolution, de la distance, du mouvement moyen et même quelquefois de l'équation. Ici même on voit que la ligne des nœuds doit faire avec celle des apsides un angle assez approchant de 90°; que Mars doit être aphélie quand il est vers la limite boréale de la latitude, et périhélie quand il est vers la limite australe.

79. Cette manière si simple d'ébaucher une orbite inconnue n'est pourtant indiquée dans aucun Traité d'Astronomie, ce qui vient sans doute de ce que nous avons reçu des anciens les théories approchées de toutes les planètes, et qu'on n'a eu aucun intérêt de rechercher ces moyens, qui ne pouvaient plus être utiles que pour des planètes nouvellement découvertes.

80. Si la distance de Mars au soleil est de 1,52, elle ne sera plus plus que de 0,52 quand le rayon vecteur de la

terre se confondra avec celui de Mars, quand l'angle au soleil sera nul ou que l'élongation sera de 180°. On dit alors que Mars est en opposition; alors il passe au méridien supérieur quand le soleil est au méridien inférieur, c'est-à-dire à minuit; il se lève quand le soleil se couche, et se couche quand le soleil se lève; il est visible toute la nuit d'*un bout à l'autre;* il est *acronyque*, suivant l'expression des astronomes grecs. Ce mot est composé du mot ἄκρος, *extremus*, et νὺξ, *nox*.

81. Si l'angle au soleil est de 180°, l'angle à la terre sera 0, ainsi que l'angle à Mars; on dit que Mars est en *conjonction*. Cette conjonction est supérieure; il ne peut avoir de conjonction inférieure; elle est remplacée par l'opposition; c'est la terre qui pour Mars se trouve en conjonction inférieure.

82. Les distances extrêmes de Mars à la terre sont donc 1,52 et 0,52, la distance moyenne est 1. Si son diamètre est de 9″ à la distance moyenne, il sera de près de 18″ à l'opposition, et de 6″ seulement à la conjonction. Il variera du simple au triple. C'est ce qui fait que Mars est si brillant dans ses oppositions, surtout si Mars est périhélie et la terre aphélie; la distance 0,52 se trouve alors diminuée de la somme des deux excentricités, c'est-à-dire de

$$0.017 + 0.142 = 0.159 = \tfrac{1}{6}.$$

La parallaxe de Mars est alors à celle du soleil en raison inverse de $\frac{4}{10}$, ou comme 10 : 4, aussi voyons-nous qu'en attendant les passages de Vénus, les astronomes s'étaient servis de Mars acronyque pour déterminer la parallaxe du soleil.

83. Il est trop difficile d'observer les conjonctions des planètes supérieures, qui sont trop long-tems perdues dans les rayons du soleil; mais leurs oppositions s'observent avec la plus grande facilité; elles ont, comme les conjonctions inférieures de Mercure et de Vénus, l'avantage de donner une

longitude héliocentrique sans aucun calcul qui dépende du rayon vecteur. Ces oppositions sont d'autant plus fréquentes, que le mouvement de la planète est plus lent; celles de Mars reviennent au bout de 780 jours, et dans l'espace de 32 ans on a 15 oppositions dans toutes les parties de l'orbite. On a donc toute facilité pour déterminer l'aphélie et l'excentricité. Quant à l'inclinaison, on la déduit des oppositions observées vers les limites, ou par l'observation de la latitude géocentrique, quand le soleil est dans les nœuds (23).

84. Mercure et Vénus sont rétrogrades vers leurs conjonctions inférieures; la terre, qui est une planète inférieure pour Mars, doit lui paraître rétrograde dans la même circonstance, c'est-à-dire quand Mars est acronyque; mais si la terre est rétrograde pour Mars, Mars doit nous paraître rétrograde; car la longitude marticentrique ou aréocentrique de la terre $= 180° +$ longitude géocentrique de Mars, et si l'une de ces longitudes est décroissante, l'autre décroîtra pareillement, et c'est en effet ce qu'on observe.

85. Les formules données (27) pour calculer les lieux géocentriques de Mercure et de Vénus serviront pour Mars, sans autre différence que celle qui provient de la valeur numérique des rayons vecteurs.

Les élémens de l'orbite elliptique se rectifieront par les méthodes indiquées précédemment pour le soleil, la lune et les planètes. Cette remarque s'applique à toutes sans exception.

JUPITER.

86. Après Mars, en suivant l'ordre des distances, vient Jupiter, la plus importante de tout le système solaire, et par sa masse, et par ses satellites, c'est-à-dire, les quatre lunes dont il est entouré.

Jupiter était dans son nœud descendant en 1794..		286′
il était dans son nœud ascendant en 1800.....		138
la demi-révolution est d'environ.....	5 ans	218
ou 2043 jours, et la révolution entière.....		4086
Il était de nouveau au nœud descendant en 1806.....		239
la révolution entière est donc.....	11 ans	318
ou.....		4332
les deux intervalles entre les nœuds.....		2043
et.....		2289
la différence est.....		246
donc le quart est.....		62.

La révolution donne pour distance moyenne 5.2028, et pour le mouvement en 62 jours 5° 4′, c'est à peu près la plus grande équation; dans la réalité, elle est de 5° 33′. La ligne des nœuds fait un angle de 3ˢ 2° avec celle des apsides.

87. Les oppositions reviennent au bout de 399 jours. La longitude augmente à chaque fois d'un signe, et en moins de 12 ans on a douze oppositions dans tous les points de l'orbite. J'avais fondé mes Tables de Jupiter sur toutes les oppositions observées depuis 1690 jusqu'en 1787, que j'avais toutes calculées de nouveau avec le plus grand soin; mais les perturbations sont si considérables, que les élémens elliptiques, qui d'ailleurs seraient insuffisans pour de bonnes tables, ne peuvent même se calculer avec la précision nécessaire, sans une connaissance au moins approchée des perturbations. Il ne suffirait pas même de déterminer, soit par la théorie, soit par l'observation, l'inégalité commune à toutes les planètes, et dont l'expression générale est

$$a \sin(P-P') + b \sin 2(P-P') + \text{etc.};$$

mais nous reviendrons sur cet objet à l'article de Saturne.

88. Le diamètre de Jupiter nous paraît de 37″ dans les moyennes distances; il est traversé ordinairement de deux bandes,

bandes, quelquefois de trois ou davantage, sensiblement parallèles au plan de l'écliptique, et qui ressemblent à de longs nuages; que ce diamètre, dans le sens de la latitude, est environ $\frac{14}{15}$ du diamètre en longitude, et que l'aplatissement de cette planète est sensible à la vue.

89. Ses phases sont encore moins sensibles que celles de Mars. Sa parallaxe annuelle ne va jamais à 12°; la distance moyenne 5,2028 ne donnerait même que 11°. Ainsi pour un habitant de Jupiter, la terre ne s'écarterait jamais de 12° du soleil, Mars ne s'écarterait que de 17°, Vénus de 8°, Mercure de $4°\frac{1}{4}$; ainsi un habitant de Jupiter ignore probablement l'existence de Mercure et celle de Vénus, peut-être même celle de la terre; ou du moins pour connaître ces planètes inférieures, il n'aurait que leurs passages sur le soleil. Par la même raison, il pourrait se trouver entre Mercure et le soleil une planète qui nous serait inconnue.

Jupiter doit voir le soleil sous un angle de 5 à 6′ au plus.

SATURNE.

90. Saturne est encore une planète bien visible, quoique moins grosse, moins brillante et moins voisine de nous que Jupiter. Son diamètre nous paraît de 18″; il est entouré d'un anneau dont nous parlerons dans un article particulier, et dont le diamètre est de 42″.

91. Le mouvement de Saturne est très-lent. Cette planète était dans son nœud ascendant en..... $1769^a\ 173^j$
il était revenu au même nœud en..... 1798.355

la révolution est de 10754 jours, environ.... 29. 12,
ou plus exactement, 10749 jours.

Si l'on comparait les intervalles d'un nœud à l'autre, on n'y trouverait presqu'aucune différence, ce qui prouve que la ligne des nœuds coïncide à peu près avec celle des apsides; nous avons donc ce moyen de moins pour nous faire une

idée de l'excentricité ; mais nous aurions au moins la moyenne distance 9,54972.

92. Les oppositions reviennent au bout de 378 jours ; la longitude augmente de 11 à 13° à chaque fois, et en 29 ans on a des longitudes héliocentriques dans tous les points de l'orbite. Pour déterminer avec précision les élémens elliptiques, on pourra choisir deux oppositions vers les nœuds et une vers la limite, ou deux vers les limites et une vers les nœuds, on aura de quoi bien connaître l'ellipse : c'est une conséquence de la position relative des nœuds et des apsides.

93. L'équation est de 6° 23′, l'inclinaison de 2° 30′. La distance moyenne 9.54972 à peu près 10 fois celle du soleil ; ainsi pour un habitant de Saturne, le diamètre apparent du soleil n'est guères que de 3′ ½; les digressions des planètes inférieures seront

☿	2°19′,	♂	9°11′,
♀	4.21,	♃	23. 3,
♄	6. 1.		

Un habitant de Saturne ne doit connaître que Jupiter.

94. Nous avons annoncé que Saturne avait de grandes inégalités. Les erreurs des tables elliptiques de Halley allaient jusqu'à 22′, et Lalande s'était assuré qu'on ne pouvait les faire disparaître dans un tems ou dans une portion de l'orbite, sans les porter sur une autre partie. Lambert avait essayé de les déterminer par observation, à peu près ainsi que nous l'avons indiqué plusieurs fois ; il avait fait la même chose pour Jupiter, il avait considérablement diminué les erreurs et les avait réduites à moins de 3′ ; le plus souvent on en pouvait attribuer une partie aux observations et aux méthodes incomplètes de calcul. Plusieurs auteurs célèbres avaient tenté vainement d'expliquer ces inégalités singulières. M. Laplace en trouva la cause dans les termes négligés avant lui par tous les géomètres. Il poussa l'approximation jusqu'aux quatrièmes puissances. La plus remarquable des nouvelles équations est celle qui dépend de 5 fois la longitude de Saturne,

moins 2 fois celle de Jupiter, qui peut ajouter 20′ 50″ au mouvement moyen de Jupiter, et retrancher 48′ 44″ du mouvement moyen de Saturne. La période de cette grande équation est de 918 ans. Par un hasard singulier, elle était nulle au tems de Tycho; elle était au contraire à son *maximum* vers la fin du 18e siècle. De là ces différences énormes sur le mouvement moyen déterminé à différentes époques, depuis Tycho jusqu'à nous.

95. Au moyen de ces équations, M. Laplace avait corrigé les tables de Halley d'une manière bien plus exacte et surtout plus sûre et plus satisfaisante que Lambert. Il restait pourtant quelques erreurs de 2′. Je sentis la nécessité de recommencer le calcul de toutes les oppositions observées depuis Tycho jusqu'à nous. Je formai des équations de condition (35) dont les combinaisons me donnèrent les corrections des mouvemens elliptiques que j'avais provisoirement mis en tables. Je vis que les oppositions de Tycho et d'Hévelius, qui ne sont pas sûres à 2 ou 3′ près, ne pouvaient que nuire, je les abandonnai. J'étais tenté d'en faire autant de celles de Flamsteed, dont l'erreur pouvait quelquefois aller à une minute, mais par là je diminuais trop le nombre de mes équations, et je les conservai, en exprimant le vœu qu'on les abandonnât, à leur tour, quand on aurait un plus grand nombre d'observations sûres. C'est à Bradley et La Caille que commence l'Astronomie moderne, et les occasions sont bien rares où l'on puisse avec quelque confiance remonter plus haut. Mes Tables de Jupiter et de Saturne ne s'écartaient guères que de 10 à 15″ des observations certaines, et de 30″ des observations douteuses. M. Bouvard, en réunissant à mes équations de condition de 1750 et années suivantes, celles qu'il a tirées lui-même des dernières oppositions, a réduit les erreurs à moitié. Ses Tables diffèrent encore des miennes, en ce qu'il les a données sous la forme décimale, c'est-à-dire suivant la division du cercle en 400°, qui se soudivisent en minutes et secondes centésimales.

URANUS.

96. Les planètes dont nous avons parlé jusqu'ici étaient connues de tout tems ; on était bien loin d'imaginer qu'il en existât d'autres, lorsqu'en 1781, M. Herschel, en faisant la revue du ciel avec un grand télescope, aperçut aux pieds des Gémeaux un petit astre qui ressemblait à une étoile de cinquième grandeur, mais auquel il vit un disque parfaitement terminé qui attira son attention pendant plusieurs jours. Il n'en fallait pas davantage pour s'apercevoir que cette étoile avait un petit mouvement. Il fit part de sa découverte à M. Maskelyne, en l'annonçant comme celle d'une petite comète, sans queue et sans nébulosité. Tous les astronomes en firent aussitôt l'objet de leurs observations et de leurs calculs. Dans l'idée que c'était une comète, on essaya des orbites paraboliques qu'il fallait modifier continuellement. M. de Saron eut l'idée de supposer l'orbite circulaire. Il en crut d'abord le rayon égal à 12 fois la distance du soleil; on l'augmenta successivement jusqu'à 19 et 20.

97. Le nouvel astre fut dont reconnu comme une planète supérieure à toutes les autres. On lui donna d'abord le nom d'*Herschel*, de *Planète de George*, et enfin d'*Uranus*.

Son diamètre n'est guères que de 4″; elle ressemble tant à une étoile, que l'on conçut l'espoir d'en trouver quelque ancienne observation, soit dans l'Histoire céleste de Flamsteed, soit dans quelque Recueil plus moderne. M. Bode s'aperçut que la 33ᵉ étoile du Taureau n'était plus à la place qui lui avait été fixée dans le Catalogue britannique; il retrouva l'observation, la calcula, la compara avec les tables qu'on avait alors du cours d'Uranus, et il reconnut l'identité. Il fit le même travail sur le Catalogue de Mayer, il trouva qu'il y manquait encore une étoile, qui pouvait être la planète.

Enfin M. Lemonnier, en feuilletant ses registres, reconnut qu'il avait observé la planète trois fois presque consécutive

en 1765. Chaque fois il la prit pour une de ces petites étoiles zodiacales qu'il ajoutait de tems à autre à son Catalogue, et qu'il observait à l'occasion de la lune. Quand il vit Uranus, cette planète était presqu'en opposition; elle était rétrograde, son mouvement en ascension droite était aussi sensible qu'il pût l'être jamais; la moindre attention aurait accéléré de 16 ans la découverte.

98. L'observation de Flamsteed était de 1690, celle de Mayer, de 1756; celles de Lemonnier, de 1765. Ces observations, par leur date, devenaient extrêmement précieuses pour la théorie d'une planète dont le mouvement est si lent qu'elle met environ 84 ans à faire le tour du ciel. Mais il fallait être bien certain de l'identité, et quoique j'en fusse à peu près persuadé, je crus qu'il était plus prudent de déterminer l'ellipse et les perturbations, sur les observations postérieures à la découverte de M. Herschel. Je calculai les perturbations par la méthode que M. Laplace venait d'appliquer avec tant de succès à la théorie de Jupiter et de Saturne; je déterminai l'ellipse d'après toutes les bonnes observations que je pus rassembler, et que je discutai avec le plus grand soin; ce fut alors que j'examinai les observations anciennes; elles étaient assez bien représentées par mes tables pour qu'il ne me restât plus aucun doute. Je les fis concourir avec les autres, et il en est résulté des tables qui représentaient les observations à 8″ près, et qui, depuis 22 ans qu'elles sont faites, ont conservé à peu près cette même précision.

99. On sent bien qu'une planète dont la révolution est de 84 ans, ne nous offrait aucune des ressources qui s'offraient d'elles-mêmes dans les autres orbites; nous n'avions pas le loisir d'attendre le passage par les nœuds; les oppositions, il est vrai, reviennent plus souvent que pour aucune autre, mais dans l'intervalle la planète ne s'est avancée que de $4^\circ \frac{1}{4}$; pendant long-tems les longitudes héliocentriques qu'on pourra se procurer seront toutes dans la même partie de l'orbite; il faut donc des moyens tout différens.

100. Soit T la terre (fig. 113), S le soleil; P la planète. Si l'élongation T est un angle obtus, ce qui devait arriver au tems de la découverte, parce qu'Uranus ne pouvait s'observer qu'à nuit close et près du méridien; vous saurez par là que la planète est supérieure.

Vous supposerez l'orbite circulaire, et vous ferez pour le rayon SP différentes suppositions; chaque jour vous calculerez les angles P et S dans toutes les mêmes hypothèses, pour $SP = v$. Vous supposerez, par exemple, $v = 1,5$; $2,0$; $2,5$; $3,0$; vous aurez le mouvement diurne de l'angle S, qui est le mouvement de la terre moins celui de la planète.

Soit $d\Pi$ le mouvement héliocentrique ainsi calculé, $d\odot$ celui du soleil; suivant la troisième loi de Képler, vous devez avoir $\left(\frac{d\odot}{d\Pi}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{v}{V}$, ou $v = V\left(\frac{d\odot}{d\Pi}\right)^{\frac{3}{2}}$; l'hypothèse qui satisfera le mieux à cette équation sera préférable. Vous saurez donc en peu de tems quelle est la distance SP de la planète, et c'est ainsi probablement qu'on a reconnu qu'elle était près de 20 fois celle du soleil.

101. Le triangle STP donne

$$v : \sin T :: V : \sin P, \qquad v \sin P = V \sin T;$$

V est bien connu par les tables, T bien déterminé par l'observation; on peut donc considérer V et T comme deux constantes, alors $dv \sin P + v \cos P dP = 0$,

$$dP = -\frac{dv \sin P}{v \cos P} = -\left(\frac{dv}{v}\right) \operatorname{tang} P;$$

or P est un angle qui ne passe guères 3°, $v = 19,18$ environ, et il faudrait une erreur considérable sur v pour affecter sensiblement P et la longitude héliocentrique que l'on en déduit. Soit H cette longitude héliocentrique, O la longitude observée. $H = O + P$; ainsi

$$dH = dP = -\left(\frac{dv}{v}\right) \operatorname{tang} P;$$

c'est un terme à ajouter à l'équation de condition qui se déduit de l'observation. Dans les oppositions, ce terme s'anéantit à cause de tang P = o.

C'est par ce moyen que j'ai pu employer à la détermination des élémens d'Uranus toutes les bonnes observations que j'avais rassemblées et discutées, et notamment celles de Flamsteed, Mayer et Lemonnier, qui n'étaient pas des oppositions.

102. La plus grande équation d'Uranus est de 5° 21′ 3″; son inclinaison est de 46′ 26″, la plus petite de tout le système solaire. Le demi-grand axe est de 19.183305.

CÉRÈS, JUNON, PALLAS ET VESTA.

103. La grande distance et le peu d'éclat d'Uranus avait fait penser que s'il existait encore d'autres planètes, elles étaient probablement encore plus loin de nous et moins brillantes; qu'elles seraient plus difficiles à découvrir et ne nous seraient jamais que d'une utilité très-médiocre. Mais ce qui était arrivé à Lemonnier était un avertissement à tous les astronomes de ne négliger aucun des astres qui se présenteraient dans leur lunette; car de chercher tout exprès un atome perdu dans l'immensité du ciel, c'était un travail effrayant par sa longueur et peu attrayant par le peu d'utilité qu'on en pouvait espérer.

Cependant une idée de Képler fut réveillée par la découverte de Herschel; si vous prenez les différences entre les distances des planètes au soleil; vous remarquerez un saut brusque entre Mars et Jupiter; par cette raison et d'autres également systématiques, Képler croyait qu'il manquait là une planète; c'est une lacune qui a été remplie de nos jours, où l'on s'est amusé à commenter le soupçon de Képler, et à le présenter sous un jour plus séduisant. Si vous vous bornez aux entiers, vous aurez pour les distances des planètes les nombres suivans, qui offrent en effet une marche très-remarquable.

Mercure.....	$4 = 4$
Vénus.....	$7 = 4 + 3.2^0$
La Terre.....	$10 = 4 + 3.2^1$
Mars.....	$16 = 4 + 3.2^2$
Cérès.....	$28 = 4 + 3.3^3$
Jupiter.....	$52 = 4 + 3.2^4$
Saturne.....	$100 = 4 + 3.2^5$
Uranus.....	$196 = 4 + 3.2^6$
.....	$388 = 4 + 3.2^7$.

Supprimez la planète Cérès, qui était alors inconnue, et vous rendez la progression incomplète; il est vrai qu'aucune théorie ne l'explique, et qu'elle n'est pas non plus bien rigoureusement exacte. Presque toutes les distances sont altérées, notamment celles de Mars, Saturne et Uranus. Si cette loi était réelle, nous n'aurions plus de planète à espérer qu'après Uranus, et la distance où elle se trouverait serait double de celle d'Uranus; elle serait difficile à voir et n'aurait qu'un mouvement bien lent, puisqu'elle serait 243 ans à faire le tour du ciel; ainsi elle pourrait être confondue long-tems avec les petites étoiles.

104. Ce fut le 1er janvier 1801, que M. Piazzi découvrit la planète Cérès, en cherchant une étoile que Wollaston avait portée dans son grand Catalogue sous le nom de 87e de Mayer, quoiqu'elle ne se trouve pas dans le Catalogue de cet astronome. C'est à une faute d'impression ou à une transposition, qu'on a dû une découverte curieuse qui en a amené d'autres auxquelles on s'attendait encore moins. A l'endroit indiqué, M. Piazzi ne trouva qu'une étoile très-petite et telle qu'il en existe dans presque toutes les parties du ciel; mais comme on connaît des étoiles changeantes, et qui deviennent périodiquement assez petites pour être invisibles, M. Piazzi voulut déterminer la position de son étoile, et, suivant sa coutume, il répéta les observations plusieurs jours de suite. Il aperçut un mouvement rétrograde de 4′

en ascension droite et de $3' \frac{1}{2}$ en déclinaison. Il suivit la nouvelle planète jusqu'au 23 janvier, et le 24 il en donna connaissance à MM. Bode et Oriani; mais ses lettres n'arrivèrent que deux mois après, lorsque la planète était perdue dans les rayons du soleil. Il n'avait donné que les positions observées le 1er et le 23, se contentant d'ajouter que du 12 au 13 le mouvement était devenu direct. Ces notions ne suffisaient pas pour calculer l'orbite, et la planète est si faible de lumière qu'elle fut très-difficile à retrouver. MM. de Zach et Olbers la cherchèrent avec le même soin et le même succès, car M. de Zach l'observa le 31 décembre, et M. Olbers le 1er janvier 1802, tout juste un an après la première découverte. M. Piazzi, qui sortait d'une maladie dangereuse, avait communiqué toutes ses observations, d'après lesquelles il avait déterminé une orbite circulaire. M. Burckhardt avait calculé une ellipse. M. Gauss en avait quatre peu différentes entr'elles, et qui représentaient l'arc de 9° observé par M. Piazzi. La découverte ne fut plus contestée et l'on cessa de refuser à Cérès le nom de planète. Les raisons sur lesquelles on s'appuyait pour la ranger dans une classe différente, étaient la petitesse de son diamètre et la grandeur de son inclinaison, qui forçait d'élargir considérablement le zodiaque. Mais la largeur du zodiaque avait été bornée aux plus grandes latitudes de Vénus; on lui aurait dès-lors donné plus d'étendue, si l'on avait eu connaissance de planètes qui fussent plus éloignées de l'écliptique.

105. Nous verrons à l'article des stations un théorème de Keill, qui n'est vrai que pour les orbites circulaires, et dont on fit alors une application nouvelle. A l'instant où le mouvement devient direct après avoir été rétrograde, on a

$$\tang^2 T = \frac{a^2}{(1+a)};$$

d'où l'on tire

$$a = \tfrac{1}{2}\tang^2 T + \tang T\,(1 + \tfrac{1}{4}\tang^2 T)^{\frac{1}{2}}.$$

T est l'élongation et a le rayon du cercle de la planète;

on avait $T = 4^{f}\ 2^{\circ}\ 37'\ 40''$, d'où l'on peut conclure $a = 3.2018$. C'était à peu près la distance de la planète au soleil ce jour-là, mais l'orbite pouvait être elliptique, et dans tous les cas, la distance 3.2 ne diffère pas considérablement de 2.8, distance à laquelle, suivant la progression ci-dessus, on voulait une planète. Le vide remarqué par Képler était heureusement rempli.

106. La révolution, qui est de 4 ans $\frac{1}{5}$, aurait permis d'attendre le passage par les nœuds, et de suivre pour la nouvelle planète la marche exposée pour toutes les autres; mais outre que la curiosité des savans était trop fortement excitée pour avoir tant de patience, la petitesse du disque, qui fait qu'on ne peut reconnaître la planète qu'à son mouvement, rendait plus nécessaire une théorie pour calculer d'avance à quel point du ciel on devait la chercher, sans quoi l'observation devenait incertaine et pénible. Une circonstance aussi extraordinaire donnait naissance à un problème dont on ne s'était pas encore occupé. Il s'agissait de déterminer l'ellipse d'une planète, d'après des observations faites sur un arc fort petit. M. Gauss le résolut d'une manière ingénieuse et savante, dont il est impossible de donner ici une idée même imparfaite. On la trouvera exposée avec tous les détails nécessaires, dans mon Traité d'Astronomie, tome II.

Nous nous contenterons de rapporter à la fin de cet article ce qu'on sait aujourd'hui de la planète Cérès et de trois autres dont la découverte a suivi de fort près.

107. Pour retrouver plus facilement Cérès, M. Olbers avait fait une étude particulière des configurations de toutes les petites étoiles qui devaient se trouver sur la route géocentrique de la planète. En continuant cet examen, il aperçut, le 28 mars 1802, une étoile de 7e grandeur, qu'il n'avait jamais vue à cette place; il la suivit pendant quelques heures, et il s'aperçut que l'ascension droite allait toujours en diminuant, et qu'au contraire la latitude boréale était croissante; il put ainsi, dès le premier jour, être certain que son étoile

était une planète. Il communiqua sa découverte aux astronomes, et M. Gauss détermina une ellipse dont l'excentricité était 0.24764, c'est-à-dire plus forte que celle d'aucune planète anciennement connue; l'inclinaison 34° 39′, plus forte que les inclinaisons réunies de toutes les autres planètes, et la distance moyenne 2.770552, presque la même que celle de Cérès; ces trois circonstances font de Pallas, assez peu importante d'ailleurs, une des planètes les plus singulières de notre système.

108. On ne demandait qu'une planète entre Mars et Jupiter; on en avait déjà deux, mais elles étaient presqu'imperceptibles. M. Olbers en conclut qu'elles pourraient bien être des fragmens d'une planète plus considérable, qu'une cause quelconque aurait brisé en éclats qui seraient devenus autant de planètes, qui pouvaient avoir des inclinaisons et des excentricités fort différentes, mais qui auraient conservé la même distance au soleil, ensorte que toutes ces orbites auraient des nœuds communs, et devaient toutes se couper en deux points opposés du ciel. M. Olbers détermina ces deux points, dont l'un se trouve dans la constellation de la Vierge, à 187° de longitude et 10° de latitude boréale, et l'autre dans la constellation de la Baleine, à 7° de longitude et 10 de latitude australe. Il suffit, pour trouver ces points, de connaître les nœuds et les inclinaisons de Cérès et de Pallas; l'une des inclinaisons et le supplément de l'autre sont les angles à la base d'un triangle sphérique; cette base est l'arc de l'écliptique entre les nœuds des deux planètes; le troisième angle est l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et les deux autres côtés sont les distances du nœud commun aux nœuds des deux planètes sur l'écliptique.

109. Il s'ensuivait encore, et cette remarque était la plus importante, que chacune des planètes partielles devait, à chaque révolution, traverser les constellations de la Vierge et de la Baleine, près des deux points indiqués, et que pour découvrir successivement tous les autres fragmens ou les autres planètes, il suffisait d'examiner attentivement tous les mois

ces deux régions du ciel, et de voir si elles ne présentaient rien de nouveau. Cette idée, qui pouvait paraître un peu incertaine, reçut bientôt une espèce de confirmation qui la rendit plus probable.

110. M. Harding, pour faciliter l'observation de Cérès et de Pallas, entreprit un zodiaque de ces deux planètes, c'est-à-dire de grandes cartes où il plaçait soigneusement toutes les étoiles avec lesquelles les deux planètes pouvaient être confondues; en revoyant ces cartes et les comparant avec le ciel, le 2 septembre 1804, M. Harding aperçut au-dessus de la Baleine une étoile de huitième grandeur, à laquelle il reconnut un mouvement; c'était une troisième planète, elle fut nommée *Junon;* son excentricité s'est trouvée plus grande encore que celle de Pallas, son inclinaison n'était guères que de 13°, et sa distance moyenne 2.670367, presqu'égale à celle de Cérès.

111. M. Olbers, en suivant avec constance le plan d'observations qu'il avait tracé d'après son heureuse conjecture, aperçut, le 29 mars 1807, une étoile de sixième grandeur, dans l'aile boréale de la Vierge; c'était une quatrième planète, à laquelle M. Gauss donna le nom de *Vesta.* Le demi-grand axe s'est trouvé de 2.363198 seulement, l'excentricité 0.1838258, l'inclinaison 7° 8′ environ.

112. Le diamètre de ces quatre planètes est d'une petitesse qui échappe aux micromètres ordinaires, et par là fort difficile à mesurer. Suivant M. Herschel, il ne serait que d'une fraction de seconde; mais suivant les mesures de M. Schroëter, Cérès serait à peu près double du premier satellite de Jupiter, c'est-à-dire d'environ 3″. Cérès est entourée d'une nébulosité dont le diamètre lui a paru de 2″,5; le noyau, ou le véritable diamètre de la planète n'était que de 1″,83. Ces diamètres, à la distance moyenne du soleil, soutendraient des angles, l'un de 6″,382 et l'autre de 3″,057; il trouve de même pour Pallas 6″,514 et 4″,504; Junon est plus petite encore; à la même distance elle n'aurait que 3″,257 de diamètre;

elle n'a point de nébulosité sensible. On n'a pas encore le diamètre de Vesta, qui n'est guères plus grosse.

113. Voici les élémens de ces planètes, tels qu'on les connaît jusqu'à présent; ils ont été déterminés un grand nombre de fois par M. Gauss, à Gottingue, $0^h 30' 12''$ à l'est de Paris.

CÉRÈS. 13es *élémens.*

1806. Mérid. de Gottingue, longit. moy..	108° 20′ 11″,9
Mouvement moyen tropique diurne....	770 ,9230
Périhélie.....	146.36. 6 ,6
Mouvement annuel du périhélie	2. 1 ,25
Nœud.....	80.53.41 ,30
Mouvement annuel.....	1 ,48
Demi-grand axe.....	2.767245
Excentricité.....	0.0785028
Inclinaison.....	10°37′ 31″,2
Diminution annuelle.....	8 ,44

PALLAS. *Elémens déterminés en* 1811.

1803. Mérid. de Gottingue, longitude..	221° 34′ 53″,64
Mouvement tropique moyen diurne.....	770 ,5010
Périhélie.....	121. 8. 8 ,54
Nœud.....	172.28.12 ,43
Inclinaison.....	34.37.28 ,35
Excentricité.....	0.2447424
Demi-grand axe.....	2.768261

JUNON.

1811. Mérid. de Gottingue, longitude..	177° 48′ 1″,8
Mouvement moyen tropique diurne	813 ,2486
Périhélie.....	53.14.32 ,4
Nœud.....	171. 9.13 ,5
Inclinaison.....	13. 4.27
Excentricité.....	0.2543634

VESTA.

1811. Mérid. de Gottingue, longitude..	206° 46′ 45″
Mouvement moyen tropique diurne....	976 ,8265
Périhélie.....	250.19.16
Nœud.....	103.10.41
Inclinaison.....	7. 7.51
Demi-grand axe.....	2.363198
Excentricité.....	0.1838258.

114. Cèrès est jusqu'ici la seule de ces quatre planètes dont on ait calculé les perturbations. Ces calculs dépendent de séries ordonnées suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons; or quand les excentricités et les inclinaisons sont aussi considérables que celles de Pallas et de Junon, les séries ne convergent pas assez rapidement, et les calculs sont d'une longueur effrayante. M. Gauss a pourtant entrepris ceux de Pallas; mais en ne considérant que l'attraction de Jupiter, il a déjà 400 équations. On sent combien le calcul d'un lieu de cette planète doit être fastidieux, heureusement on n'en aura pas un besoin très-fréquent.

115. Quand on a découvert une planète inconnue, on peut en deux jours avoir une première approximation de sa distance au soleil. D'abord, si l'élongation observée passe 90°, la planète est supérieure, sa distance surpasse celle de la terre (33); c'était le cas des cinq nouvelles planètes. Soit V le rayon vecteur de la terre, T l'élongation observée, v la distance accourcie de la planète, P l'angle à la planète, H la longitude héliocentrique et O la longitude observée; vous aurez

$$\sin P = \frac{V \sin T}{v} \quad \text{et} \quad H = O + P;$$

donnez à v différentes valeurs, comme 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5; etc.; vous aurez autant de valeurs différentes pour H. Vous pourrez faire ces calculs le lendemain de la découverte.

Dès que vous aurez une seconde observation, traitez-la de même que la première et déterminez H dans plusieurs hypothèses. Vous aurez ainsi le mouvement diurne qui résulte de chaque hypothèse.

Comparez ces mouvemens hypothétiques avec la loi de Képler, qui donne

$$d\Pi = \frac{d\odot}{a^{\frac{3}{2}} \cos h \cos h'} = \frac{3548'',36}{a^{\frac{3}{2}} \cos h \cos h'};$$

h et h' sont les deux latitudes héliocentriques calculées dans chaque hypothèse ; vous verrez aussitôt quelle hypothèse satisfait mieux à la loi de Képler.

Ainsi par les deux premières observations de M. Piazzi, j'ai trouvé pour Cérès

Distances.	Mouvement observé.	Mouvement calculé.	Différences.
2.5	14′ 24″	14′ 56″	+ 32″
3.0	11.14	11.22	+ 8
3.5	9. 5	9. 1	— 4

Il est visible que les distances 2.5 et 3.0 sont trop faibles, et que 3.5 est trop forte. Par une simple règle de trois, je trouve que 3.35 est la distance qui donne le mouvement convenable ; mais remarquons que les différences + 8″ et —4″ ne surpassent guères l'erreur possible des observations, et qu'ainsi le résultat est encore douteux. Mais à mesure que l'arc parcouru deviendra plus grand, l'incertitude diminuera ; ainsi en prenant un intervalle de 40 jours, c'est-à-dire la première et la dernière observation de M. Piazzi, j'ai trouvé, dans mes trois hypothèses,

Distances.	Mouvement observé.	Mouvement calculé.	Différences.
2.5	9° 22′ 13″	10° 12′ 14″	+ 50′ 1″
3.0	8.12.48	7.45.50	— 26.58
3.5	7.25.24	6. 9.43	— 75.41

On voit donc que la distance doit être moindre que 3.0 et plus grande que 2.5; par une règle de trois, je trouve qu'elle est de 2.825, et en recommençant le calcul avec l'hypothèse 2.8, je ne trouve plus que 23″ en moins, d'où je conclus la distance 2,797; c'est le rayon du cercle. Nous avons vu que le demi-grand axe de l'ellipse est 2.767245.

116. Cherchons maintenant l'inclinaison et le nœud. Soient h et h' les deux latitudes héliocentriques calculées avec la distance 2.797, I l'inclinaison, x la distance au nœud, A l'arc héliocentrique de l'écliptique parcouru par la planète.

$$\text{Tang } x = \frac{\sin \text{A} \tan h' \cot h}{1 - \cos \text{A} \tan h' \cot h} \text{ (VIII. 5)},$$

$$\tan \text{I} = \frac{\tan h'}{\sin x} = \frac{\tan h}{\sin (x + \text{A})},$$

$$☊ = \text{H} + x.$$

h était négative, ainsi que h', $h > h'$, la planète s'approchait de son nœud ascendant.

J'ai trouvé $x = 2° 44' 31''$
$\text{H}' = 2\ 17.\ 3.\ 2$
$☊ = 2.19.47.33$
et $\text{I} = 11° 23' 50''$.

Cette inclinaison est trop forte de 46′, la longitude du nœud trop faible de 1°. Par la totalité de ses observations,

M.

M. Piazzi trouvait $\nu = 2.6862$,

$$I = 10^\circ\, 51'\, 12'', \qquad \Omega = 2^s\, 20^\circ\, 45'\, 48''.$$

117. Il résulte de là que par des calculs extrêmement simples, on pouvait déterminer une orbite circulaire qui aurait donné pendant une année entière les lieux géocentriques de la planète, à quelques minutes près, pour la déclinaison, et c'est là l'essentiel; car avec la déclinaison on dirige la lunette de manière que la planète puisse en traverser le champ. Un degré d'erreur sur l'ascension droite ne fera que $4'$ sur le tems du passage; ainsi quand la planète sera dégagée des rayons du soleil, on en sera quitte pour observer à la déclinaison donnée tout ce qui passera par la lunette, pendant dix minutes de tems, soit au-dessus, soit au-dessous du fil équatorial, et si l'on a quelque doute entre plusieurs étoiles, en répétant le lendemain les mêmes observations, on reconnaîtra la planète au mouvement qu'elle aura eu dans l'intervalle. Ces méthodes faciles sont suffisantes pour la pratique, et préférables peut-être aux méthodes plus savantes et plus pénibles, qui ne peuvent elles-mêmes donner que des approximations, jusqu'à ce que les observations s'étant multipliées, on puisse en revenir aux méthodes exposées ci-dessus.

118. Nous allons terminer ce chapitre des Planètes par le tableau synoptique de toutes les recherches précédentes.

On y trouve d'abord la révolution sidérale en jours et fractions décimales; le mouvement tropique de la planète en 100 années juliennes ou 36525 jours; les demi-grands axes des orbites, qui se déduisent du mouvement sidéral en un tems donné, ou par la loi de Képler, ou plus exactement par la formule

$$\text{mouvement plan.} = \frac{\text{mouv. moy. de la terre}\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}};$$

μ est la somme des masses du soleil et de la planète, ou $\mu = 1 + m$, 1 étant la masse du soleil et m celle de la planète. On suppose souvent $\sqrt{\mu} = 1$; l'erreur est peu sensible.

Cette loi s'applique également aux satellites qui tournent autour d'une même planète ; d'où l'on a conclu la formule suivante, pour déterminer la masse d'une planète qui a un satellite.

$$m' = \left(\frac{a''}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{t}\right)^2;$$

m' est la masse de la planète en parties de la masse du soleil, T' la révolution sidérale de la planète, a' son demi-grand axe, t la révolution du satellite et a'' sa distance moyenne à sa planète.

119. Les longitudes de la planète, du périhélie et du nœud sont pour le 1er janvier 1801, à minuit, tems civil.

Les distances au soleil et à la terre sont exprimées en lieues ordinaires de Paris, c'est-à-dire de 2000 toises ou 3898 mètr.; Lalande les a données en lieues de 2283 toises.

La plus grande distance de la planète à la terre se compose des distances aphélies de la planète et de la terre.

La plus courte distance de la planète à la terre est la différence entre la distance périhélie de la terre et la distance aphélie de la planète inférieure.

Si la planète est supérieure, sa plus courte distance à la terre sera la distance périhélie de la planète, diminuée de la distance aphélie de la terre.

Les diamètres sont évalués de même en lieues de Paris.

On a aussi donné les diamètres tels qu'on les observerait à une distance égale à la distance moyenne du soleil.

Les évaluations de distances en lieues sont parfaitement inutiles à l'astronome.

120. On dispute sur la parallaxe des étoiles; mais parmi les quantités qu'on a cru trouver pour cette parallaxe, aucune ne surpasse 5″; les étoiles qui auraient 1, 2, 3, 4 ou 5″ de parallaxe auraient les distances suivantes, exprimées en millions de lieues.

Parallaxes.	Distances en lieues.
1″	8.091 551 millions.
2	4.045 780
3	2.697 187
4	2.092 990
5	1.618 312

121. Les grandeurs des planètes sont entr'elles comme leurs diamètres, leurs surfaces comme les carrés, et les volumes comme les cubes des mêmes diamètres, la masse est égale au produit du volume par la densité. Ni les masses, ni les densités ne sont encore connues avec la précision desirable. Les masses que nous donnons ici, d'après M. Laplace, sont en parties de la masse du soleil, nous les donnons ensuite en parties de la masse de la terre. Les deux points qui séparent l'unité des chiffres suivans, signifient *divisé par*.

Quand une planète n'a pas de satellite, on ne peut en déterminer la masse que par les perturbations qu'elle produit dans les mouvemens des autres planètes. C'est ainsi que j'ai déterminé les masses de Vénus, de Mars et de la lune, par les équations qu'elles fournissent aux tables du soleil ou de la terre. On connaît la forme de ces équations, il ne s'agit plus que d'en chercher les coefficiens par les observations; car les coefficiens sont en rapport donné avec les masses.

Si la planète a des satellites, la difficulté est de mesurer assez exactement la distance moyenne de l'un de ces satellites à sa planète, pour avoir avec précision le rapport $\left(\frac{a''}{a'}\right)$, qui entre dans l'expression de la masse.

TABLEAU DU SYSTÈME SOLAIRE.

Planèt.	Révolutions sidérales.	Mouvemens en 36525 jours.	Demi-grands axes.
☿	87j 969258	415c 2s 14° 4′ 20″	0.3870981
♀	224.700824	162.6.19.30. 0	0.7233323
♁	365.256384	100.0. 0.45.45	1.0000000
♂	686.979619	53.2. 1.42.10	1.5236935
♃	4332.596308	8.5. 6.17.33	5.2027911
♄	10758.969840	3.4.23.31.36	9.5387705
♅	30688.712687	1.2. 9.51.20	19.1833050
Planèt.	**Longit. m. 1801.**	**Longit. périhélie.**	**Longitude du nœud.**
☿	5s 13° 56′ 27″	2s 14° 21′ 47″	1s 15° 57′ 31″
♀	0.10.44.35	4. 8.37. 1	2.14.52.40
♁	3.10. 9.13	3. 9.30. 5	.....
♂	2. 4. 7. 2	11. 2.24.24	1.18. 1.28
♃	3.12.12.36	0.11. 8.35	3. 8.25.34
♄	4.15.20.32	2.28. 8.58	3.21.55.47
♅	5.27.47.18	11.17.21.42	2.12.51.14
Planèt.	**Excentricité.**	**Exc. en parties de ½ axe.**	**Inclinaison.**
☿	0.20551494	0.07955444	7° 0′ 0″
♀	0.00685298	0.00495698	3.23.35
♁	0.01677976	0.01677976	.....
♂	0.09313400	0.14190767	1.51. 0
♃	0.04817840	0.25066215	1.18.52
♄	0.05616830	0.53577652	2.29.38
♅	0.04667030	0.89529060	0.46.25

SUITE DU TABLEAU.

Plan.	Dist. moy. au soleil.	Plus grande dist. au ☉.	Plus courte dist. au ☉.	Diamètres à la distance moyen. ☉.
☿	15 185 465	18 306 306	12 064 624	6″ 6
♀	28 375 600	28 570 058	28 181 142	16,5
♁	39 229 000	39 887 261	38 570 739	17,2
♂	59 772 960	65 339 856	54 206 064	8,9
⚳	204 100 280	213 933 505	194 267 055	186,8
♄	374 196 340	395 244 316	353 178 363	171,7
♅	752 540 172	787 661 512	717 418 832	74,5

Plan.	Dist. moy. à la terre.	Plus grande distance.	Plus petite distance.	Diamètres.
☿	39 229 000	58 193 567	20 264 433	1255
♀	39 229 000	68 457 327	10 000 671	3138
♁	.....	.....	.....	3271
♂	59 772 960	105 227 117	14 318 803	1693
⚳	204 100 280	253 820 766	154 379 794	35527
♄	374 196 340	435 101 578	313 291 102	32655
♅	752 540 172	826 875 829	678 204 515	14169
☉	39 229 000	39 887 261	38 570 739	365540
☾	98 650	107 106	91 433	893

Plan.	Grandeurs.	Volumes.	Masses suivant M. Laplace.	Masses par rapport à la terre.
☿	0.3838	0.0565	1 : 2025810	0.1627
♀	0.9593	0.8828	1 : 356632	0.9243
♁	1.0000	1.0000	1 : 329630	1.0000
♂	0.5174	0.1386	1 : 2546320	0.1294
⚳	10.860	1280.9	1 : 1067	308.94
♄	9.9825	974.78	1 : 3534	93.271
♅	4.3314	81.26	1 : 19504	1.6904
☉	111.74	1395324.	1 : 1	329630.0
☾	0,2730	0.20351	.....	8.0146

LEÇON XVII.

Stations et rétrogradations des Planètes. Comparaison des systèmes de Ptolémée, Copernic et Tycho.

1. Les planètes, dans le système du mouvement de la terre, s'avancent toujours dans le même sens, autour du soleil; mais la combinaison de leurs mouvemens avec celui de la terre, fait que si le plus souvent elles nous paraissent avancer en longitude, comme elles le font toujours réellement, quelquefois aussi elles doivent paraître rétrograder; quoique dans le fait, et si on les considère du centre de leurs mouvemens, elles aillent toujours dans le même sens, d'une manière invariable.

2. En effet l'expression générale de la longitude géocentrique est $\Gamma = \odot - T$, d'où $d\Gamma = d\odot - dT$; mais

$$\text{tang}\, T = \frac{\nu \sin S}{1 - \nu \cos S} \quad (\text{XVI.}27)\,;$$

d'où je tire

$$dT = \frac{\nu \cos T \cos (S + T)\, dS}{1 - \nu \cos S},$$

et

$$d\Gamma = d\odot - dS \left(\frac{\nu \cos T \cos (S + T)}{1 - \nu \cos S}\right).$$

Soit Π la longitude héliocentrique de la planète,

$$dS = d\Pi - d\odot = \frac{d\odot}{\nu^{\frac{3}{2}}} - d\odot = d\odot \left(\frac{1 - \nu^{\frac{3}{2}}}{\nu^{\frac{3}{2}}}\right)$$

et

$$d\Gamma = d\odot\left(1 - \frac{\cos T \cos(S+T)(1-\nu^{\frac{3}{2}})}{(1-\nu\cos S)\nu^{\frac{1}{2}}}\right);$$

dans les conjonctions inférieures où $\cos S = 1$, $\cos T = 1$, $\cos(S+T) = 1$, l'expression se réduit à

$$d\Gamma = d\odot\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}-1}{\nu^{\frac{1}{2}}-\nu^{\frac{3}{2}}}\right) = -d\odot\left(\frac{1-\nu^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}-\nu^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{-d\odot}{\nu^{\frac{1}{2}}+\nu};$$

ainsi $d\Gamma$ est négatif et la planète est rétrograde.

A la conjonction supérieure, $\cos S = -1$, $\cos T = 1$; $\cos(S+T) = -1$; l'expression devient

$$d\Gamma = d\odot\left(\frac{1+\nu^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{3}{2}}}\right),$$

quantité positive; donc à la conjonction supérieure la planète inférieure est directe.

Les mêmes formules, appliquées à une planète supérieure, prouveront de même qu'elle est rétrograde en opposition, et directe en conjonction.

Ainsi c'est une règle générale, que toutes les planètes sont directes dans la syzygie, où elles sont le plus éloignées de la terre, et rétrogrades dans la syzygie périgée.

Ces formules supposent pour la terre $V = 1$.

3. Le mouvement direct, pour devenir rétrograde, diminuera insensiblement, jusqu'à ce qu'il se réduise à 0; dans le passage du positif au négatif, les variations de la longitude géocentrique seront peu sensibles, et la planète paraîtra stationnaire, c'est-à-dire qu'elle sera vue pendant plusieurs heures ou plusieurs jours, à la même longitude. Ce tems, qu'on appelle *tems de la station*, sera plus moins long, suivant le mouvement plus ou moins lent de la planète.

4. Les stations et rétrogradations sont donc un corollaire mathématique des mouvemens autour d'un même foyer. On

n'y aurait jamais mis plus d'importance qu'on n'en met aujourd'hui, si l'on eût toujours connu le véritable système des mouvemens célestes. Mais si les planètes ont toutes le centre de leurs mouvemens au centre de la terre, pourquoi leurs longitudes ne vont-elles pas toujours en augmentant? pourquoi les voit-on s'arrêter, rétrograder, s'arrêter de nouveau, redevenir directes? et pourquoi ces variations s'observent-elles invariablement vers la partie de leurs obites qui avoisinent les conjonctions inférieures et les oppositions? Voilà ce qni est physiquement inexplicable dans le système de Ptolémée, et ce qu'il n'a pu représenter que par une complication de cycles et d'épicycles, qu'en faisant tourner les planètes autour d'un point mathématique tournant lui-même autour d'un autre point mathématique, enfin sans pouvoir assigner la moindre cause vraisemblable à ces mouvemens, au moins singuliers; il est à remarquer que, dans le fait, il a été obligé de renoncer à son idée de faire la terre centre de tous les mouvemens célestes; tout ce qu'il a obtenu, c'est que la terre est immobile dans l'intérienr de toutes les orbites planétaires. Ces orbites, dans ce système, sont des espèces d'épicycloïdes dont D. Cassini a donné la figure dans les Mémoires de 1709.

5. Le problème des stations et des rétrogradations consiste à déterminer, pour chaque planète, les points de l'orbite où elle doit paraître immobile, la distance mutuelle de ces points, ou l'arc de rétrogradation, et enfin le tems que la planète emploie à décrire cet arc.

Ce problème est insoluble quand on considère les ellipticités et les inclinaisons; il devient beaucoup plus facile, quand on considère les orbites comme circulaires et couchées sur l'écliptique. Apollonius l'avait résolu long-tems avant Ptolémée, et la solution qu'il en avait donnée se trouve identique à celle que nous allons trouver par des moyens beaucoup plus simples et plus clairs.

6. Soit Γ la longitude géocentrique, T l'élongation; nous aurons $\Gamma = \odot - T$, et $d\Gamma = d\odot - dT$; on aura $d\Gamma = o$,

c'est-à-dire la station, si $dT = d\odot$; si $dT > d\odot$, $d\Gamma$ sera négatif et la planète rétrograde; si $d\odot > dT$, $d\Gamma$ sera positif et la planète directe.

Mais $\quad V \sin T = \nu \sin P, \quad V \cos T dT = \nu \cos P dP,$

et pour la station,

$$dT = \frac{\nu}{V} \cdot \frac{\cos P}{\cos T} dP = d\odot;$$

on a, de plus,

$$T + P + S = 180^\circ, \qquad dP = -dT - dS;$$

or $S = \Pi - ♁$, S étant l'angle au soleil et Π la longitude héliocentrique de la planète; donc

$$dP = -dT - d\Pi + d♁ = -dT - d\Pi + d\odot;$$

or à la station $d\odot - dT = 0$, on aura donc

$$dP = -d\Pi \qquad \text{et} \qquad d\odot = -\frac{\nu}{V} \frac{\cos P}{\cos T} d\Pi,$$

$$\frac{d\odot}{d\Pi} = -\frac{\nu}{V} \frac{\cos P}{\cos T};$$

or, suivant la loi de Képler, $\frac{d\odot}{d\Pi} = \left(\frac{\nu}{V}\right)^{\frac{3}{2}}$; donc

$$\left(\frac{\nu}{V}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{\nu}{V} \frac{\cos P}{\cos T} = -\frac{\sin T}{\sin P} \cdot \frac{\cos P}{\cos T} = -\frac{\tang T}{\tang P}.$$

7. Cette formule donne une relation fort simple entre les tangentes de l'élongation et de la parallaxe, au moment de la station, mais elle est peu propre à déterminer ce moment.

L'équation primitive $\left(\frac{\nu}{V}\right)^{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{\nu}{V}\right) \frac{\cos P}{\cos T}$ donne encore

$$\left(\frac{\nu}{V}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\cos P}{\cos T}.$$

ou

$$\frac{v}{V} = \frac{\cos^2 P}{\cos^2 T} = \frac{1 - \sin^2 P}{\cos^2 T} = \frac{1 - \left(\frac{V}{v}\right)^2 \sin^2 T}{\cos^2 T}$$

$$= 1 + \tang^2 T - \left(\frac{V}{v}\right)^2 \tang^2 T,$$

$$\left(\frac{V}{v}\right)^2 \tang^2 T - \tang^2 T = \left(1 - \frac{v}{V}\right),$$

et

$$\tang^2 T = \frac{1 - \frac{v}{V}}{\left(\frac{V}{v}\right)^2 - 1} = \frac{v^2\left(1 - \frac{v}{V}\right)}{V^2 - v^2}$$

$$= \frac{v^2\left(\frac{V-v}{V}\right)}{(V+v)(V-v)} = \frac{v^2}{V(V+v)} = \frac{v^2}{V^2\left(1 + \frac{v}{V}\right)};$$

et

$$\tang T = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)}{\left(1 + \frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

C'est le théorème de Keill, dont nous avons fait usage pour Cérès (XVI. 105).

8. Soit donc $\frac{v}{V} = \tang^2 x$, et vous aurez

$$\tang T = \frac{\tang^2 x}{(1 + \tang^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \cos x \tang^2 x = \sin x \tang x;$$

cette formule est déjà plus commode que celle de Keill, mais

$$-\tang P = \tang T \left(\frac{V}{v}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sin x \tang x}{(\tang^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin x \tang x}{\tang^3 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\tang^2 x} = \sin x \cot^2 x = \cos x \cot x,$$

formule aussi simple que la précédente et qui prouve que l'angle P est obtus.

9. T et P ainsi déterminés, on a $S = 180° - T - P$. S sera la distance à la conjonction, qui se réduira en tems au moyen du mouvement relatif de la planète. On aura ainsi la demi-durée de la rétrogradation.

L'arc de rétrogradation sera 2T — mouvement du soleil dans l'intervalle des deux stations, car la longitude à la première station sera $\odot + T$, à la seconde elle sera

$$\odot' - T = \odot + \Delta\odot - T;$$

or

$$(\odot + T) - (\odot + \Delta\odot - T) = 2T - \Delta\odot.$$

10. Pour trouver la durée de la rétrogradation, on dira

$$d\Pi - d\odot : 2S : 1^j : \text{durée} = \frac{2S}{d\Pi - d\odot} = \frac{2S}{\left(\frac{d\Pi}{d\odot} - 1\right)d\odot}$$

$$= \frac{2S}{\left[\left(\frac{V}{v}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]d\odot} = \frac{2S}{(\cot^3 x - 1)d\odot} = \frac{S}{1774{,}36(\cot^3 x - 1)}.$$

En appliquant ces formules à toutes les planètes, j'ai formé le tableau suivant, pour les orbites circulaires.

Carouge en a calculé un de même genre (Astronomie de Lalande, tome I), en tenant compte des excentricités; mais il semble qu'il aurait dû faire coïncider l'aphélie et le périhélie avec le tems de la syzygie.

Stations et rétrogradations.

	☿	♀	♂	♃	♅	♄	♆
T	18° 12′	28° 51′	136° 12′	126° 7′	115° 35′	108° 47′	103° 13′
P	126.14	139. 9	27. 1	18. 6	9.59	5.42	2.55
S	35.34	13. 0	16.47	35.47	54.26	65.31	73.52
A	13.24	15.22	14.41	10.30	9.55	6.47	3.52
Durée.	$22^j,9$	$42^j,2$	$72^j,8$	$97^j,50$	$120^j,7$	$137^j,6$	$151^j,7$

L'ellipticité des planètes peut apporter quelques changemens à ces quantités moyennes; ainsi pour Mercure, l'arc de rétrogradation peut aller de 9 à 16°; pour Vénus, de 14 à 17°; pour Mars, de 10 à 20°; pour les autres planètes, la différence est beaucoup moindre.

Le tems de la durée, pour Mercure, va de $21^j\frac{1}{4}$ à $23\frac{1}{2}$; pour Vénus, de 41^j à $43\frac{1}{2}$; pour Mars, de 61^j à 81; pour Jupiter, de 117^j à 122; pour Saturne, de 135^j à 139; enfin pour Uranus, de 150^j à 153.

11. Nous avons vu qu'il y avait deux moyens d'expliquer les phénomènes; le premier, de supposer que la terre est une planète qui, comme toutes les autres, circule autour du soleil; c'est ce qu'on appelle le *système de Copernic*.

Le second, qui a été proposé par Tycho, est de faire circuler toutes les planètes autour du soleil, et le soleil, accompagné de tout ce cortége, circulerait autour de la terre immobile.

Voyons comment Ptolémée a pu satisfaire aux phénomènes qu'il connaissait, en faisant tourner le soleil et les planètes autour de la terre; nous avons dit qu'il avait fait usage d'un cercle excentrique pour expliquer l'inégalité propre de la planète, et d'un épicycle pour expliquer les apparences que produit le mouvement de la terre.

Faisons abstraction de l'inégalité propre de la planète ou de son équation du centre, qui s'explique comme celle du soleil, en supposant que la terre n'est pas au centre (X. 8); négligeons cette excentricité, la terre sera le centre du monde.

Soit T (fig. 114) le centre de la terre, a le lieu moyen de Vénus et de Mercure, qui est toujours sur la même ligne que le lieu moyen du soleil S; pour expliquer les élongations, supposons que la planète, au lieu d'être en a, soit sur la circonférence de l'épicycle $\downarrow P\pi$, qu'elle parcourt avec son mouvement relatif; soit v le rayon de l'épicyle, V la distance Ta; que la planète soit en M à la distance M$a\pi$ de son périgée. Ptolémée avait M$a\pi$ = mouvement relatif = S; il pouvait calculer l'élongation M'Ta = T par une formule

équivalente à notre formule

$$\text{tang T} = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)\sin S}{1-\left(\frac{v}{V}\right)\cos S} = \frac{\left(\frac{Ma}{Ta}\right)\sin MaT}{1-\left(\frac{Ma}{Ta}\right)\cos MaT};$$

son angle MaT était égal à notre angle S, il suffisait donc qu'il fît $\frac{Ma}{Ta} = \frac{v}{V}$. On voit même qu'il n'avait besoin de connaître ni Ma, ni Ta, il suffisait qu'il en eût le rapport exact; il lui était indifférent de placer le centre de l'épicycle plus près ou plus loin, en a, en S centre du soleil, ou en b par-delà le soleil; la digression STP était toujours d'un même nombre de degrés, et la ligne TPPP est également tangente aux trois orbites, seulement les rayons aP, SP, bP croissent avec la distance et en même raison.

12. Il plaça Mercure plus près de la terre, sans dire à quelle distance, Vénus entre Mercure et le soleil; la raison de cet arrangement était que les conjonctions de Mercure revenant en 116 jours, tandis que celles de Vénus ne reviennent qu'au bout de 584, il crut qu'il fallait mettre Mercure immédiatement après la lune, dont la révolution synodique n'est que de 29 $\frac{1}{2}$ jours. Mais puisqu'il donnait au centre de l'épicycle le même mouvement qu'au soleil, on ne voit pas pourquoi il n'a pas fait du soleil même le centre de ses deux épicycles; ces deux planètes au moins auraient tourné autour de quelque chose, mais c'est peut-être cette raison même qui l'en a empêché; comme il ne pouvait pas en faire autant pour les planètes supérieures, il n'a point voulu établir une différence qui aurait pu faire douter de la vérité de son système. Aujourd'hui le choix ne serait plus arbitraire; les phases de Mercure et de Vénus, et les variations de leurs diamètres, prouvent que les deux orbites embrassent le soleil; les passages de Mercure et de Vénus, qu'on n'observe que dans les conjonctions inférieures et jamais dans les conjonc-

tions supérieures, sont encore un argument sans réplique en faveur du système de Copernic, ou de celui de Tycho.

13. Remarquons pourtant deux défauts dans son hypothèse. Son angle MSa est la différence des mouvemens moyens de la terre et de la planète, et la longitude du centre est la longitude moyenne du soleil, au lieu que dans le véritable système, nous employons les mouvemens vrais. De plus, le rayon de son épicycle est constant; il fallait le rendre variable en mettant une ellipse au lieu du petit cercle. Il en résulte que son hypothèse ne pourrait satisfaire que fort imparfaitement aux mouvemens que nous observons.

14. Si nous examinons bien ce que nous avons fait pour les planètes inférieures, nous en déduirons ce qu'il faudra faire pour les supérieures. Nous avons donné au centre de l'épicycle, pour mouvement, le mouvement du soleil, ou plutôt celui de la terre, c'est-à-dire, de la planète supérieure; pour Mars, Jupiter et Saturne, nous donnerons de même le mouvement moyen de la planète supérieure, c'est-à-dire le mouvement de Mars, celui de Jupiter et de Saturne suivant la planète dont nous voudrons établir la théorie; nous donnerons à la planète, sur son épicycle, le mouvement relatif $d\Pi - d\text{♃}$; mais comme $d\Pi < d\text{♃}$, ce mouvement sur l'épicycle sera rétrograde; enfin nous ferons le rapport

$$\left(\frac{V}{\nu}\right) = \frac{\text{distance moy. terre}}{\text{distance moyenne de la planète}}.$$

C'est ce qu'a fait Ptolémée, sans peut-être s'en rendre bien raison à lui-même; il enseigne à trouver ce rapport par les observations des digressions, et n'a pas songé à déterminer les distances absolues; et ce rapport, pour Mars, Jupiter et Saturne, est le même à très-peu près que celui des grands axes de leurs ellipses au grand axe de l'ellipse terrestre; nous avons vu que le sinus D de la digression $= \frac{\nu}{V}$ pour Vénus et Mercure, dans l'hypothèse circulaire. Pour les planètes supérieures, il employait les quadratures. Par ce moyen il

a eu, pour calculer les lieux géocentriques des planètes supérieures, des formules qui sont l'équivalent des nôtres, à la réserve des deux défauts que nous avons remarqués (13).

15. Ptolémée a profité de ce que son hypothèse avait d'indéterminé, pour qu'aucun épicycle ne fût coupé par le suivant ou par le précédent. Ainsi soit a le centre de l'épicycle de Mercure, S celui de Vénus, b pourra représenter le centre du soleil ; Ptolémée avait donné aux rayons aP et SP des épicycles de Mercure et de Vénus les longueurs nécessaires pour représenter les digressions observées. Il avait de même placé les épicycles de Mars, de Jupiter et de Saturne au-dessus les uns des autres et au-dessus du soleil, assez loin pour les empêcher de se couper ou même de se toucher. L'épicycle de Mars était extérieur à l'orbite solaire, et si Ptolémée eût connu les quatre petites planètes, il eût été contraint de reculer Jupiter et Saturne, pour faire place aux quatre épicycles dont les rayons auraient été $\frac{1}{2,7}$.

16. On peut, en une seule figure, représenter les trois systèmes, celui de Copernic, celui de Tycho, et enfin celui de Ptolémée; pour éviter de trop grandes dimensions, nous ne considérerons que les planètes supérieures.

Soit (fig. 115) le centre du soleil, T celui de la terre, O celui d'une planète supérieure quelconque, Mars, Cérès, Jupiter, Saturne, ou Uranus.

Les trois centres étant sur une même ligne, la planète supérieure sera en opposition.

Suivant Copernic, au bout de quelque tems la terre aura été de T en t autour du soleil immobile, la planète, qui va plus lentement, aura été de O en P, et l'élongation se trouvera en calculant l'angle StP, par les formules que nous avons données, au moyen des côtés St, SP, et de l'angle tSP $=$ tSO $-$ OSP.

17. Suivant Tycho, la terre est immobile en T; le soleil a le mouvement SS′ $=$ Tt, mais en sens contraire; TS′ est égale et parallèle à tS; la planète a été de O en P′,

car S'P' doit être égale à SO, égale et parallèle à SP, et l'angle TS'P' devant être le mouvement relatif, nous aurons TS'P' = *t*SP; menons *t*P', S'TP' sera l'élongation; mais les triangles *t*SP et TS'P' ayant chacun un angle égal entre deux côtés respectivement égaux, les deux triangles seront parfaitement égaux, TP' sera égal et parallèle à *t*P; nous aurons pour calculer l'élongation la même formule et les mêmes valeurs que dans le système de Copernic.

18. Ptolémée prenant la terre pour centre, au lieu de S, prend OC = S'T, et le point C est le centre de son épicycle, ce qui n'empêche pas qu'à l'opposition il ne place la planète en O, parce que c'est l'instant où la planète a le plus d'éclat, ce qui la fait juger périgée.

Ptolémée amène le soleil de S en S', comme Tycho; le centre de l'épicycle, dans le même tems, avance de C en B; mais la planète, au lieu de rester en O' sur la ligne TB, rétrograde de O' en P' avec son mouvement relatif, ensorte que OB'P' = *t*SP = TS'P'; BP' est parallèle à TS'; c'est le précepte que Ptolémée donne sans en apporter une raison bien claire, pour trouver le lieu du soleil, quand on a déterminé la position de la ligne TB et du rayon BP'.

TB = S'P' = SP; BP' = TS' = *t*S; nous avons encore un angle égal entre deux côtés égaux chacun à chacun; les trois triangles BTP', TS'P', *t*SP sont donc parfaitement égaux, et le côté TP' est la diagonale du parallélogramme TS'B'P, le point P' serait physiquement le même si Ptolémée eût placé en effet le centre de son épicycle en B, mais il l'a porté arbitrairement en B'; il a fait le rayon B'P''' plus grand en proportion; mais si les triangles ne sont plus égaux, ils sont au moins semblables; l'angle B'TP'' = BTP', l'élongation est donc la même; ainsi dès que vous supposez les orbites circulaires, les trois systèmes sont équivalens, vous avez les mêmes angles, les mêmes longitudes, les mêmes rapports entre les distances, mais non les mêmes distances absolues.

19. Mais voulez-vous être plus conforme aux observations,

il faudra substituer l'ellipse terrestre aux épicycles, et vous compliquerez le système, mais vous aurez satisfait à la seconde inégalité. Quant à la première, vous y satisferez à peu près en faisant tourner le centre de l'épicycle, non autour de la terre, mais autour d'un point placé à quelque distance Nous avons donné (X. 12) les moyens d'estimer l'erreur de l'hypothèse des excentriques pour les planètes dont l'excentricité est fort sensible, comme celles de Mercure, de Mars, de Pallas et de Vesta; or cette excentricité n'est la même pour aucune planète; il en résulte qu'il n'y a point de centre unique; que tout le système manque de liaison. Nous devons donc rejeter le système de Ptolémée, comme inexact et insuffisant. Celui de Tycho est moins défectueux; mais tout ce qu'il a de bon est emprunté du système de Copernic; il présente une absurdité physique, le soleil et tout son cortége de planètes, dont quelques-unes sont beaucoup plus lourdes et plus grosses que la terre, circulant autour de la terre, qui n'est en comparaison qu'un atôme. D'ailleurs les ellipses de Képler s'y adaptent moins bien qu'au système de Copernic; il n'y a donc qu'un système pour les observateurs et les calculateurs, et nous placerons le soleil immobile au foyer de toutes les ellipses planétaires. Nous verrons bientôt une preuve certaine que cet arrangement est le seul véritable.

LEÇON XVIII.

Rotation des planètes.

1. Il paraît infiniment probable que toutes les planètes, comme la terre, ont un mouvement de rotation sur leur axe. C'est ce qui a été constaté d'abord pour le soleil, ensuite pour Jupiter, Mars et Vénus, plus nouvellement pour

Saturne et Mercure, et l'analogie nous porte à croire que la même chose a lieu pour les planètes telles qu'Uranus, Cérès, Pallas, Junon et Vesta, dont l'éloignement ou la petitesse ont empêché jusqu'ici qu'on ait observé la rotation.

2. Le moyen général pour observer la rotation d'une planète, est de chercher sur son disque un point bien remarquable. Si ce point est stationnaire, c'est-à-dire, s'il occupe toujours sur le disque la même place, sauf les petits changemens que produiraient à la longue les mouvemens combinés de la terre et de la planète; il n'y a point de rotation, ou du moins elle est très-lente. Mais si le point remarqué change rapidement de position, il n'y a d'autre moyen d'expliquer le phénomène, que de supposer une rotation.

3. De toutes ces rotations, la plus facile à reconnaître et à bien déterminer, était celle du soleil. Presqu'en tout tems son disque nous présente des taches visibles dans les moindres lunettes; il est vrai que leurs formes et leurs dimensions variables nuisent un peu à l'exactitude des observations.

La première découverte des taches du soleil a été réclamée par plusieurs astronomes. Galilée les vit dès le mois d'avril 1611, Scheiner les observait au mois d'octobre de la même année; il a consigné ses observations et sa théorie dans un volume *in-folio* de 800 pages. Fabricius les avait aperçues à peu près dans le même tems.

4. Les taches du soleil sont des parties noires et irrégulières qu'on aperçoit de tems en tems. Y sont-elles adhérentes, ou flottent-elles sur l'océan lumineux qu'on suppose recouvrir la sphère solide et obscure du soleil? sont-elles des scories rejetées à la surface du liquide? sont-elles des rochers, des parties proéminentes? sont-elles élevées au-dessus de cet océan? sont-elles au-dessous du niveau? enfin quelle est leur nature? C'est ce dont il est difficile de s'assurer. Aujourd'hui, l'opinion la plus répandue paraît être celle de M. Herschel, qui en fait les cratères de volcans

qui, lorsqu'ils sont en éruption, écartent le fluide lumineux et laissent voir les parties solides et obscures; mais sans chercher à résoudre ces questions peut-être insolubles, voyons de quelle manière on observe ces taches et comment on en déduit les élémens de la rotation, c'est-à-dire sa durée, la position de l'axe autour duquel elle s'accomplit, celle de l'équateur, ses nœuds et son inclinaison sur l'écliptique.

5. Une tache placée au milieu du disque se voit dans sa forme véritable, parce qu'elle est sur une surface peu courbe et perpendiculaire au rayon visuel. La même tache, quand la rotation la fait arriver près de l'un des bords, est vue très-obliquement; elle perd beaucoup de sa largeur, sans rien perdre en hauteur; la forme des taches est non-seulement irrégulière, mais elle est de plus très-variable. Les taches sont plus ou moins noires, plus ou moins entremêlées de parties moins obscures, les bords mal terminés et changeans; on est réduit à observer le centre de figure, et ce centre n'est pas toujours le même.

6. Outre les taches proprement dites, on remarque aussi sur le soleil des points plus lumineux que le reste du disque. On les appelle *facules;* on a dit que l'apparition des facules précédait quelquefois celle des taches; mais soit taches, soit facules, l'observation et les calculs sont toujours les mêmes.

7. Pour déterminer le lieu d'une tache sur le disque du soleil, on observe la différence d'ascension droite entre la tache et l'un des bords du soleil ou tous les deux; on mesure aussi la différence de déclinaison entre la tache et les bords supérieur et inférieur du soleil. Vous avez observé les tems des passages du bord b (fig. 116) et de la tache T, l'intervalle des tems vous donne l'angle au pôle bPa; vous trouvez dans la Connaissance des Tems le tems qui répond à l'angle SPb, c'est-à-dire le tems que le demi-diamètre du soleil emploie à traverser le méridien; vous direz:

$$\text{le tems de } SPb : \text{tems observé de } ab :: SPb : aPb,$$

$$aPb \cos \text{déclin.} \odot = ab, \qquad Sa = Sb - ab.$$

Vous mesurez la différence de déclinaison cd entre le bord du soleil et la tache;

$$aT = Sd = Sc - cd,$$

$$\text{tang}\, aST = \frac{aT}{aS}, \qquad ST = \frac{Sa}{\cos aST};$$

Soit SE l'écliptique, QV le parallèle à l'équateur; vous connaissez VSE par la formule

$$\text{tang}\, TSE = \text{tang}\, \omega \cos \odot;$$

car $VSE = 90° - PSE =$ complément de l'angle que fait l'écliptique avec le cercle de déclinaison. Vous avez

$$TSE = TSV - VSE;$$

si VSE est plus grand que TSE, la tache sera au-dessous de l'écliptique. Si la tache était au-dessous de l'équateur SV, l'angle TSE serait la somme des deux angles et non leur différence; dans tous les cas, on se guidera par une figure.

8. Abaissez la perpendiculaire Tp sur l'écliptique,

$$ST \sin TSE = \text{latitude géocentrique de la terre},$$

$$ST \cos TSE = Sp = \text{différence de longitude géocentrique},$$

entre le centre de la tache et le centre du soleil.

Les arcs Sp et pT sont assez petits pour que nous ayons pu les regarder comme des lignes droites, mais dans le fait, ce sont des arcs du globe solaire; vus du centre du soleil, ils seraient d'un nombre de degrés qu'il s'agit de déterminer.

9. Soit C (fig. 117) le centre du globe solaire, S le centre observé du disque, T la tache, t la terre; nous connaissons ST (7), c'est-à-dire l'angle StT, sous lequel il nous a paru. Le triangle CtT donne

$$CT : Ct :: \sin t : \sin CTt = \sin CTO = \left(\frac{Ct}{CT}\right) \sin t$$

$$= \frac{\sin t}{\sin \frac{1}{2} \odot} = \frac{\sin t}{\sin \frac{1}{2} \text{ diam. vrai du } \odot},$$

enfin

$$TCt = CTO - t'.$$

Vous aurez ainsi le nombre des degrés, minutes et secondes de l'angle C ou de l'arc observé ST.

Le demi-diamètre du soleil, qui n'est pour nous que de 16′ ou de 960″, vaut 90°, vu du centre du soleil; il en résulte qu'une seconde, dont il est impossible de s'assurer dans l'observation, répond sur le globe solaire à 338″ environ, ou à 5′ 38″; il n'est donc pas impossible de se tromper de 10′ sur un arc héliocentrique. C'est ce qui explique le peu d'accord des observations.

10. Quand vous avez ainsi l'hypoténuse ST en parties du grand cercle solaire; vous en concluez Tp et Sp (fig. 116) en parties semblables, en faisant

$$\text{tang } Sp = \text{tang } ST \cos TSE \quad \text{et} \quad \sin Tp = \sin ST \sin TSE.$$

Tp est la latitude héliocentrique de la tache, Sp est la différence de longitude entre la tache et la terre t; on a toujours longit. $t = 180° + \odot$; on aura donc la longitude héliocentrique de la tache $= 180° + \odot - Sp$, si la tache a passé après le centre du soleil, et $180° + \odot + Sp$, si elle a passé avant le centre.

11. Nous aurons par ce moyen autant de longitudes et de latitudes héliocentriques de la tache, que nous aurons d'observations. Il n'en faut que trois, à la rigueur, pour résoudre le problème, mais on en peut employer à la fois un nombre indéfini, qui pourtant passera rarement onze ou douze, à moins que la tache ne continue d'être visible pendant plusieurs révolutions consécutives.

On a donné une multitude de solutions de ce problème; les plus simples et les plus ingénieuses sont celles de Boscovich, de Pézénas, et surtout celle de Cagnoli; mais elles n'admettent que trois observations, ce qui me fait préférer la méthode suivante (fig. 118).

12. Soit CPEMN le globe solaire, CL le demi-cercle dans

le plan de l'écliptique, E le pôle de ce cercle, P le pole boréal de rotation, N le nœud ascendant de l'équateur NQ, T l'une des positions de la tache. Le triangle PET donne

$$\cos PT = \cos ET \cos PE + \sin ET \sin PE \cos PET,$$

ou

$$\begin{aligned}\sin D &= \sin\lambda \cos I + \cos\lambda \sin I \cos(90^\circ + NET)\\ &= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin NET\\ &= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin NL\\ &= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin(L - N).\end{aligned}$$

On voit que $D = TO = 90^\circ - PT$ est la déclinaison de la tache ou sa distance à l'équateur NQ,

que $\quad PE =$ distance des deux pôles $= QM$
$\quad\quad\quad\quad = QNM$ inclinaison de l'équateur;

que $\lambda = TL = 90^\circ - ET =$ latitude de la tache ou sa distance à l'écliptique; que L est la longitude de la tache, N celle du nœud ascendant; on connaît L et λ par ce qui précède. En développant,

$$\sin D = \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin L \cos N + \cos\lambda \sin I \cos L \sin N,$$

$$\frac{\sin D}{\cos I} = \sin\lambda - \cos\lambda \sin L(\tang I \cos N) + \cos\lambda \cos L(\tang I \sin N).$$

Le premier membre est constant, le second renferme deux inconnues $(\tang I \cos N)$ et $(\tang I \sin N)$; quand elles seront déterminées, on aura $\frac{(\tang I \sin N)}{(\tang I \cos N)} = \tang N$, et

$$\tang I = \frac{(\tang I \cos N)}{\cos N} = \frac{(\tang I \sin N)}{\sin N}.$$

Pour chacune des observations, calculez $A = \sin\lambda$, $B = \cos\lambda \sin L$ et $C = \cos\lambda \cos L$. Soit $x = \frac{\sin D}{\cos I}$, ..., $y = (\tang I \cos N)$, $z = (\tang I \sin N)$; chaque observation fournira une équation

$$x = A - By + Cz.$$

13. Ainsi, par onze observations d'une même tache, j'ai trouvé

13 juin.	$x =$	$+ 0.014799$	$+ 0.379630\, y$	$- 0.925020\, z$,
14	$x =$	$- 0.011088$	$+ 0.623227\, y$	$- 0.781962\, z$,
15	$x =$	$- 0.034010$	$+ 0.793165\, y$	$- 0.608055\, z$,
16	$x =$	$- 0.062722$	$+ 0.920241\, y$	$- 0.386293\, z$,
17	$x =$	$- 0.093151$	$+ 0.984930\, y$	$- 0.145725\, z$,
18	$x =$	$- 0.130559$	$+ 0.987331\, y$	$+ 0.100526\, z$,
19	$x =$	$- 0.162213$	$+ 0.932267\, y$	$+ 0.323368\, z$,
20	$x =$	$- 0.185148$	$+ 0.807352\, y$	$+ 0.560013\, z$,
21	$x =$	$- 0.200826$	$+ 0.642856\, y$	$+ 0.739347\, z$,
22	$x =$	$- 0.214499$	$+ 0.435028\, y$	$+ 0.874506\, z$,
23	$x =$	$- 0.220961$	$+ 0.203032\, y$	$+ 0.953916\, z$.

Ces observations sont tirées d'un Mémoire de Lalande, Acad. des Scienc., 1776, pag. 464. J'ai rectifié les calculs qu'il en avait faits trop négligemment, et j'ai tenu compte de l'irradiation, qu'on supposait de 3″ il y a vingt-cinq ans, lorsque j'ai fait ces calculs. Je suis loin d'assurer qu'il y ait une irradiation ou couronne lumineuse qui entoure le soleil et nous fait paraître le demi-diamètre plus grand qu'il n'est en réalité. En ce cas le diamètre augmenté s'emploierait pour réduire les observations d'ascension droite du bord; mais quand on a déterminé la distance géocentrique ST de la tache au centre du soleil, pour convertir cet arc en arc du globe solaire et trouver l'angle qu'il soutend au centre, c'est le demi-diamètre réel qu'il faut employer.

14. Je réunis en une somme, les équations des 16, 17, 18 et 19 juin; je prends le quart de la somme, ce qui me donne

$$x = -0.1121615 + 0.95619225\, y - 0.02703172\, z \quad (1);$$

je réunis de même les équations des 22 et 23, et celle du 13, dont je change les signes; j'obtiens ainsi

$$x = -0.450259 + 0.258430\, y + 2.753442\, z \quad (2);$$

enfin je prends le quart des équations des 14, 15, 20 et 21;

$$x = -0.107768 + 0.7116650\,y - 0.02266425\,z \quad (3).$$

On voit que dans les équations (1) et (3) le coefficient de y est fort et celui de z très-petit; c'est le contraire dans l'équation (2). Quant à x, qui a toujours le coefficient 1, il disparaît dans la soustraction. De l'équation (2) je retranche successivement (1) et (3), je continue l'élimination et j'ai $N = 2^s\ 20^\circ\ 45'\ 7''$, $I = 7^\circ\ 19'\ 9''$. Je porte ces valeurs dans les 11 équations, j'en conclus onze fois la valeur de D, et le milieu entre toutes est $-5^\circ\ 26'\ 53''$.

15. Soit L^a et λ^a la longitude et la latitude de la première observation, L^ω et λ^ω celles de la dernière, A^a et A^ω les ascensions droites correspondantes, c'est-à-dire les angles NPT de la tache, ou les arcs NO distances au nœud sur l'équateur.

$$\text{Cos}\,A^a = \frac{\cos\lambda^a \cos(L^a - \Omega)}{\cos D} = 4^s\ 1^\circ 49' 49'',$$

$$\cos A^\omega = \frac{\cos\lambda^\omega \cos(L^\omega - \Omega)}{\cos D} = 8.27.15.44$$

$$\text{mouvement en 10 jours} = 4.22.25.55,$$

$$M = \text{mouvement diurne} = 14^\circ,5434,$$

$$\text{révolution} = R = \frac{360^\circ}{14^\circ,5434} = 24^j,753,$$

$$\text{mouv. relat.} = M - d\odot = 14^\circ,5435 - 0^\circ,9857 = 13^\circ,5577;$$

$$\text{révolution synodique} = R' = 26^j,553.$$

Les angles A^a, A^ω, réduits en tems de la révolution R, donneraient le tems du passage de la tache par le cercle PN, un seul de ces passages étant connu, on en déduirait tous les autres; en ajoutant continuellement le tems R de la révolution, on prédirait ainsi le retour des taches, si la révolution était mieux connue.

16. La tache tourne donc autour de son pôle en $24^j,753$,

elle revient en conjonction avec la terre au bout de $26^j,553$, mais alors le plus souvent elle n'est pas visible; mais quand elle reparaît, si on l'observe de nouveau, on peut en réunir les observations aux précédentes, et chercher les élémens d'après la totalité des équations de condition réunies en trois groupes.

17. Par d'autres combinaisons des équations ci-dessus, j'ai trouvé des élémens peu différens et que voici :

	Nœud.	Inclinais.	Déclin.	R	R′
1	$2^J 20^\circ 45' \ 7''$	$7^\circ 19' 17''$	5.26.53	$25^j \ 0^h 17'$	$26^j \ 4^h 17'$
2	2.19.21.35	7.12.37	5.20.20		
3	2.20.33.40	7.16.33	5.26.13		
4	2.19.47.55	7.29. 4	5.19.39		
	2.20. 7. 4	7.19.23	5.23.16	mouv. diur. $14^\circ,394$	

Réduction de l'équateur à l'écliptique $+ 0^\circ,2353 \sin 2(A - \Omega)$.

On ne peut compter qu'à quelques minutes près sur ces élémens; la raison en est celle que nous avons donnée (9). La révolution n'est sûre qu'à quelques heures près, et de tous les élémens c'est le plus incertain. Je ne me suis pas borné, pour l'avoir, aux combinaisons A^a et A^α, j'ai employé successivement toutes les combinaisons possibles, et ce résultat moyen s'est trouvé de $25^j,01154$. On croit communément qu'elle est plus longue de 10 ou 12^h; mais pour l'admettre, il faudrait supposer une erreur de $2^\circ 22'$ sur le mouvement en dix jours; l'erreur de l'observation ne peut aller aussi loin; ou bien il faudrait supposer à la tache un mouvement propre, dans le même sens que le mouvement de rotation, qui lui-même est dirigé dans le même sens que celui de la terre et de toutes les planètes.

18. Le nœud de l'équateur solaire est en $2^{s}\ 20°$; ainsi quand la terre aura cette longitude, ou que celle du soleil sera de $8^{s}\ 20°$, ce qui a lieu vers le 12 décembre, la terre sera dans le nœud; la même chose aura lieu en juin pour l'autre nœud; le plan de l'équateur solaire sera vu comme une ligne droite qui fera avec l'écliptique un angle de $7°\ \frac{1}{3}$; les pôles seront en P et P′ sur les bords du disque (fig. 119), une tache qui serait dans l'équateur traverserait le disque par le centre et décrirait une ligne droite EQ; une tache qui aurait une déclinaison AD décrirait la corde FG. Le mouvement est rétrograde comme celui de Vénus et de Mercure dans *leurs passages. En décembre, les taches paraissent monter* vers le pôle boréal de l'écliptique; en été elles descendent vers le pôle austral. Ce sont les tems les plus avantageux pour l'observation.

19. Dans toute autre saison, le pôle étant en P (fig. 120), prolongez EP jusqu'à 90°; menez le grand cercle QR perpendiculaire à PQ, QR sera l'équateur, la terre répondant toujours au centre T. Dans le triangle EPT vous connaissez $EP = 7°\ \frac{1}{3}$, $ET = 90°$, PET différence de longitude entre la terre et le pôle P; nommez E cet angle,

$$\sin TR = \cos PT = \sin 7°\ 20' \cos(\text{♄} - 11^{s}\ 20)$$
$$= \sin 7°\ 20' \cos(\odot - 5^{s}\ 20°) = \sin 7°\ 20' \cos(\odot + 6^{s}\ 10°).$$

Le même triangle donne

$$\text{tang}\, PTE = \sin E\, \text{tang}\, PE = \text{tang}\, 7°\ \tfrac{1}{3} \sin(\odot + 6^{s}\ 10°);$$

ainsi à la droite du cercle de latitude TE menez une ligne $= \frac{1}{2}$ diam. sin PT, qui fasse l'angle PTE; vous aurez le lieu du pôle, qui sera dans l'hémisphère visible si cos PT est positif, et dans l'hémisphère invisible si cos PT est négatif. *Si tang PTE était négative, c'est-à-dire si* $(\odot + 6^{s}\ 10°) > 180°$, la ligne PT serait à la gauche du cercle de latitude TE.

L'équateur ARB paraîtra comme une demi-ellipse dont le grand axe sera AB diamètre du soleil; le demi-petit axe sera $TR = \frac{1}{2}$ diamètre $\odot \sin 7°\ 20' \cos(\odot + 6^{s}\ 10°)$.

Les parallèles seraient des ellipses semblables. L'ellipse de l'équateur coupera l'écliptique en un point N, tel que $NT = \frac{1}{2}$ diam. sin(☊ — ☋) $= \frac{1}{2}$ diamètre sin (☉ + 3ʃ 10°).

TR sera l'élévation de la terre sur le plan de l'équateur.

Si TR est négatif, la terre sera au-dessous du plan, l'ellipse sera convexe vers le nord.

Le triangle PT*b* donnerait la demi-durée du tems que les taches emploieraient à traverser l'hémisphère visible. Or ce triangle donne

$$\cos TPb = -\tang D \tang TR;$$

c'est l'équation générale de l'arc semi-diurne.

Rotation de la Lune.

20. La rotation de la lune est encore plus lente que celle du soleil; elle nous offre des phénomènes plus singuliers. Mais les taches au moins sont permanentes, ce qui donne la faculté de multiplier indéfiniment les observations.

Soit EPQR (fig. 121) le disque apparent de la lune, PR le cercle de *déclinaison* qui la traverse par le centre C, EQ un arc parallèle à l'équateur, T une tache; les différences d'ascension droite et de déclinaison C*t* et *t*T, l'angle TC*t* et l'arc géocentrique CT se calculeront comme on a vu pour le soleil.

On calculera l'arc sélénocentrique T′C′, c'est-à-dire l'angle sous lequel il serait vu du centre de la lune, par les formules

$$\frac{CT}{\frac{1}{2}\text{ diam. }☾} = \sin(x + C'T') \quad \text{et} \quad C'T' = (x + T'C') - x.$$

On connaîtra PCT $= 90° -$ TC*t*; on imaginera le cercle de latitude CO, mené du centre au pôle O de l'écliptique; on calculera l'angle de position OCP par la formule

$$\cot OCP = \frac{\cos D \cot \alpha}{\cos \text{Æ}} + \sin D \tang \text{Æ};$$

on connaîtra donc OCT. On connaît déjà CT, qui est l'arc sélénocentrique, et CO, distance apparente de la lune au

pôle de l'écliptique, c'est-à-dire, affectée de la parallaxe. Soit λ la latitude apparente $= 90° - CO$; $90° + \lambda = 180° - CO$ sera la distance sélénocentrique de l'observateur au pôle de l'écliptique; on calculera

$$\cos OT = \cos OCT \sin CO \sin CT + \cos CO \cos CT;$$

OT sera la distance de la tache au pôle de l'écliptique pour le centre de la lune.

Dans le même triangle on a

$$\cot COT = \frac{\cos OC \cot CT}{\sin C} - \cos OC \cot C;$$

COT sera l'angle au pôle de l'écliptique, ou la différence de longitude sélénocentrique entre l'observateur et la tache, entre la longitude apparente de la lune, augmentée de 180°, et la tache; on aura donc la longitude et la latitude sélénocentrique de la tache. On conclura pour chaque observation l'équation comme pour le soleil (12). On réunira ces équations en trois groupes, et l'on déterminera les trois inconnues de la même manière, à laquelle on verra bientôt qu'il faut ajouter une petite modification. Mais en la négligeant d'abord, on trouvera cependant deux résultats extrêmement remarquables. Les nœuds de l'équateur lunaire coïncident avec les nœuds de l'orbite de la lune sur l'écliptique, et la durée de la rotation est égale à celle de la révolution sidérale de la lune. Il en résulte d'abord que nous avons commis une erreur en supposant le nœud immobile. L'équation $\sin D = \sin \lambda \cos I + \cos \lambda \sin I \sin(L - N)$ n'est exacte que pour la première observation; pour toute autre, au lieu de $(L - N)$, il faut mettre $L - (N + dN)$, mais dN est négatif; on a donc $L - (N - dN) = L + dN - N$; ainsi à chaque longitude sélénocentrique calculée comme ci-dessus, on ajoutera dN mouvement du nœud depuis la première observation; alors l'inconnue N sera la position du nœud de l'équateur pour le jour de la première observation. dN est d'environ 3′ pour chaque jour d'intervalle écoulé depuis ce jour.

21. On a trouvé de cette manière, que l'équateur lunaire est incliné de 1° 43′ à l'écliptique, et comme l'inclinaison de l'orbite est de 5° 9′ environ, il en résulte que l'équateur et l'orbite sont mutuellement inclinés de 3° 26′, et que l'équateur est partout entre l'orbite et l'écliptique.

22. La durée de la rotation est de $27^j\ 7^h\ 43'\ 3''$, comme celle du mois lunaire (XIV. 84). La lune tourne donc sur son axe en 27 jours; dans ce même tems elle fait 360° autour de la terre, par son mouvement moyen. On conclut que si la lune tournait uniformément dans l'écliptique, elle nous montrerait toujours exactement la même face. Car la terre et une tache qui seraient vues du centre de la lune sur un même rayon visuel et en conjonction, y resteraient perpétuellement, sans pouvoir se séparer, puisque le mouvement est pour l'une comme pour l'autre de 360° en $27^j\ 7^h\ 43'\ 3''$. Réciproquement le centre de la lune et la tache seraient toujours sur le même rayon visuel, la tache paraîtrait immobile au centre de la lune, et la terre, pour l'habitant de la lune placé sur cette tache, paraîtrait toujours au zénit et ferait, comme ce zénit, le tour du ciel en 27 jours.

23. Les anciens avaient remarqué que la lune nous présente toujours le même hémisphère; il est vrai que quelques philosophes la regardaient comme un miroir qui ne faisait que réfléchir les objets terrestres; d'autres faisaient de la lune une terre qui a ses vallées et ses montagnes; d'autres y voyaient un visage toujours le même, et comme cette idée s'est conservée dans le peuple, il en résulte qu'on a toujours supposé tacitement que la lune tournait autour d'elle-même en 27 jours.

24. Mais la lune ne tourne pas autour de la terre d'un mouvement uniforme; elle s'élève ou s'abaisse de 5° au-dessus et au-dessous de l'écliptique; il en résulte que la tache, qui nous paraît au centre de la lune quand la lune est dans l'écliptique, doit paraître au-dessus du centre quand la latitude est australe, et au-dessous quand la latitude est boréale; elle doit paraître à l'orient du centre quand la lune est plus

avancée en longitude qu'elle ne le serait par son mouvement moyen; elle doit paraître à l'occident du centre dans le cas contraire. Ces variations de quelques degrés sont peu de chose sur le disque lunaire, où 16′ vues de la terre répondent à 90° vues du centre de la lune. Une tache qui est au centre ne peut avoir un petit déplacement sans que les taches qui sont aux bords du disque n'éprouvent un déplacement pareil et égal, s'il était vu du centre de la lune. Il sera moindre pour un habitant de la terre, parce qu'il sera vu obliquement; mais il sera plus aisé à remarquer, car une tache qui était tout-à-fait sur le bord pourra cesser d'être visible, et une tache invisible pourra se montrer pendant quelques jours. Ces phénomènes sont désignés sous le nom de *libration*, balancement. On distingue la libration en longitude, en latitude, en ascension droite, en déclinaison; la parallaxe produit aussi des variations diurnes dans toutes ces librations; mais nous nous contentons d'indiquer ces phénomènes, qui ne peuvent plus avoir un grand intérêt quand la cause en est démontrée.

25. Hévelius a beaucoup observé ces phénomènes, Dominique Cassini en a le premier donné une théorie complète, Mayer a fait une belle carte de la lune, accompagnée d'une table qui contient les longitudes et les latitudes sélénocentriques de toutes les taches remarquables, c'est-à-dire de leurs déclinaisons et leurs ascensions droites sélénocentriques rapportées à un premier méridien, on appelle ainsi le cercle de déclinaison qui passerait par le centre de la lune dans les librations moyennes, c'est-à-dire quand le lieu vrai de la lune est le même que le lieu moyen, et que la latitude est nulle. Toutes ces taches ont des noms, qui sont ceux des plus célèbres astronomes anciens et modernes, et qui leur ont été assignés par Riccioli et Schroëter. Hévelius les avait désignées par des noms tirés de la géographie, mais la nomenclature de Riccioli a obtenu et méritait la préférence.

26. On détermine en tout tems la position de l'équateur lunaire et de ses pôles, par des formules analogues à celles que nous avons employées pour le soleil, mais on en fait peu d'usage.

La lune a des montagnes plus hautes à proportion que celles de la terre ; M. Schroëter en a mesuré la hauteur par des moyens dont on ne doit pas attendre une extrême précision. Voyez la carte qu'il en a donnée au tome second de sa Sélénographie. La plus haute de ces montagnes approche de 4000 toises. On y voit aussi celles de Mercure, qui ont jusqu'à plus de 8000 toises, et celles de Vénus, dont la plus haute passe 17000 toises.

27. Il nous reste à exposer la cause physique qui détermine la lune à nous montrer toujours une même face. Il faut voir pour cela le beau Mémoire de M. Lagrange. Il nous suffira de dire ici qu'en vertu de l'attraction la lune a dû s'alonger vers la terre, de manière que son globe, en le supposant primitivement rond et fluide, a dû prendre la forme d'un ellipsoïde irrégulier, s'alonger dans les deux sens opposés, mais quatre fois plus du côté tourné vers la terre que de l'autre côté, et qu'ainsi l'un des deux hémisphères, devenu plus lourd que l'autre, doit, par cet excès de poids, retomber toujours vers la terre. On a quelque raison de croire qu'il en est de même de tous les satellites, et que toujours ils montrent la même face à leur planète principale.

28. La terre est pour les habitans de la lune une espèce de lune bien plus grande et qui n'est visible que pour une moitié de la lune. Seulement la terre doit s'élever de tems en tems de quelques degrés sur l'horizon des taches que la libration nous découvre.

Gregori s'est donné la peine d'exposer en détail tous les phénomènes de la terre pour les habitans de la lune ; mais si elle en a, l'Astronomie doit être pour eux bien plus compliquée que pour nous. Sans doute ils auront commencé par se croire immobiles au centre de l'univers ; ils auront fait tourner le soleil en $29\frac{1}{2}$ jours, et la terre en $27\frac{1}{3}$. Il a dû être pour eux fort pénible de s'élever à l'idée que la terre est le centre de leurs mouvemens, et que le soleil est celui des mouvemens de la terre et des planètes. Si le système de Copernic a trouvé si long-tems des incrédules, s'il n'est uni-

versellement adopté que depuis cent ans, on peut croire qu'il n'est pas même imaginé dans la lune.

Rotation des autres planètes.

29. Les méthodes exposées serviraient pour toutes les planètes; Mercure est si petit et si éclatant qu'il a été difficile de remarquer sur son disque un point assez distinct pour qu'on en pût suivre et mesurer le mouvement; D'ailleurs Mercure suit toujours le soleil de si près, qu'à peine l'observation serait commencée, que le coucher de la planète ou le lever du soleil forcerait de l'interrompre, et quand on retrouverait la tache le lendemain, on douterait si le petit arc de mouvement observé est le véritable mouvement, ou s'il faut l'augmenter d'une ou plusieurs circonférences. Malgré ces difficultés, M. Schroëter est parvenu à distinguer des taches et des montagnes qu'il a suivies assidument, et il en a conclu que le diamètre est de 6″; que cette planète n'offre aucun aplatissement sensible, que les montagnes y sont à proportion plus grandes que dans Vénus ou sur la terre; que les plus hautes sont, comme dans ces deux planètes, situées dans l'hémisphère austral; que l'angle de l'équateur avec l'orbite est très-considérable; que la différence des jours et des saisons y doit être bien plus grande que sur la terre; que son atmosphère, comme celle de Vénus, est assez dense; enfin que la rotation est de 24^h 5′ 30″.

30. La rotation de Vénus est encore fort difficile à observer. Cassini Ier l'avait trouvée de 23^h et quelques minutes; il donnait 75° d'inclinaison à l'équateur. Vénus étant dichotome, il avait aperçu un point dont la route était presque parallèle à la limite de la lumière et de l'ombre.

Bianchini croyait la rotation de 24^j 8^h (*Hesperi et Phosphori nova phænomena*). Cassini II fit remarquer que les observations de Bianchini s'expliquaient en supposant une rotation de 23^h 21′, au lieu que la rotation de 24^j 8^h ne pouvait expliquer les observations de Cassini Ier. M. Schroëter a trouvé

23^h

$23^h\ 21'\ 19''$, l'inclinaison 75° environ, la longitude du nœud $10^s\ 15°$, on n'aperçoit aucun aplatissement; en effet, s'il est de $\frac{1}{300}$ à peu près, comme celui de la terre, il ne doit y avoir qu'un dixième de seconde de différence entre les deux demi-axes. L'atmosphère est assez dense pour produire une réfraction de 30′ 24″, suivant M. Schroëter.

31. Cassini Ier avait trouvé pour la rotation de Mars $24^h\ 40'$, l'inclinaison lui parut fort petite. Maraldi trouvait $24^h\ 39'$; Herschel, $24^h\ 39'\ 21'',67$; l'inclinaison 30° 18′ sur l'écliptique, et le nœud en $2^s\ 17°\ 47'$; l'aplatissement $\frac{1}{10}$.

32. La rotation de Jupiter est de $9^h\ 55'$ ou 56′, suivant Cassini et Maraldi; de $9^h\ 51'\ 46''$ à $9^h\ 56'\ 40''$, suivant Herschel; de $9^h\ 55'\ 33''$, selon Schroëter. Ils supposaient l'inclinaison de 2 à 3° et l'aplatissement $\frac{1}{15}$ fort sensible à la vue. Mais par les éclipses des satellites et la théorie de M. Laplace, j'ai trouvé 3° 12′ 24″, et l'aplatissement $= \frac{1}{13}$ environ.

Jupiter est remarquable par deux bandes très-voisines de son équateur, auquel elles sont parallèles. On a vu quelquefois trois bandes, rarement davantage, cependant M. Messier en a vu le disque presque tout couvert. Les quatre lunes ou satellites de Jupiter tournent autour de lui dans des plans fort peu inclinés à son équateur.

33. On n'avait pu observer la rotation de Saturne. M. Herschel la croit de 10^h et quelques minutes, et l'aplatissement $\frac{1}{11}$; et depuis il a cru remarquer que le plus grand diamètre n'est pas celui de l'équateur, mais celui qui lui est incliné de 46°.

34. Ce qui distingue surtout Saturne, c'est un anneau plan qui l'entoure comme l'horizon entoure un globe terrestre ou céleste; nous y reviendrons. Saturne a six satellites qui tournent à fort peu près dans le plan de l'anneau, qui est aussi le plan de l'équateur. Le septième satellite est le seul qui s'en écarte sensiblement; son inclinaison est d'environ 30°.

35. Uranus a six satellites dont les orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique. Herschel a cru lui voir un anneau. Quant à la rotation, on doit la présumer par analogie,

mais il est douteux qu'on puisse jamais l'observer. Nous en dirons autant des quatre petites planètes.

36. Pour trouver en tout tems la position du pôle et celle de l'équateur, soit (fig. 122) P le pôle de rotation, O celui de l'écliptique; calculez la longitude géocentrique de la planète, ajoutez-y 180°, vous aurez la longitude planéticentrique de la terre $= G$; soit g la latitude géocentrique de la planète, $-g$ sera la latitude planéticentrique. Soit T le lieu planéticentrique de la terre,

$$\sin TV = \cos PT = -\cos I \sin g + \sin I \cos g \sin (G - \Omega).$$

TV sera l'élévation de la terre sur le plan de l'équateur, et elle déterminera l'ouverture de l'ellipse. Quand cette ouverture est la plus grande, $TV = I$,

$$\sin I = \sin I \cos g \sin (G - \Omega) - \cos I \sin g,$$
$$1 = \cos g \sin (G - \Omega) - \sin g \cot I,$$

et

$$\sin (G - \Omega) = \frac{1 + \sin g \cot I}{\cos g}.$$

37. Si l'anneau de Saturne est dans le plan de son équateur, nous aurons tous les phénomènes de l'anneau, en mettant dans cette formule, pour I et Ω, les quantités trouvées pour cet équateur. Si le plan de l'anneau diffère de celui de l'équateur, il faudra mettre d'autres nombres; mais la formule sera encore la même et servira à déterminer ces nombres.

Soit $TV = E$, N la longitude du nœud,

$$\sin E = \sin I \cos g \sin (G - N) - \cos I \sin g.$$

Soit $E = 0$, c'est-à-dire que la terre se trouve pour le moment dans le plan de l'anneau; nous aurons

$$\sin I \cos g \sin (G - N) = \cos I \sin g, \text{ ou } \sin (G - N) = \cot I \tan g.$$

Dans ce cas nous verrons l'anneau par son épaisseur, et si cette épaisseur est peu considérable, l'anneau pourra cesser

d'être visible; Saturne paraîtra rond comme les autres planètes, et c'est ce qu'on observe deux fois à chaque révolution de Saturne, c'est-à-dire tous les quinze ans; l'anneau ne se distingue alors qu'au moyen de grands télescopes, tels que ceux de Herschel.

38. L'anneau peut encore disparaître pour une autre cause, c'est quand le soleil se trouve dans le plan de l'anneau, car alors il n'en éclaire que l'épaisseur; les surfaces planes de l'anneau ne recevant plus aucun rayon du soleil, l'anneau est invisible. L'élévation du soleil sur la surface de l'anneau est alors $= 0$. Soit ε l'élévation du soleil sur la surface de l'anneau, H et h la longitude et la latitude héliocentriques de Saturne; nous aurons, comme pour la terre,

$$\sin\varepsilon = \sin I \cos h \sin(H - N) - \cos I \sin h \quad \text{et} \quad \sin(H - N) = \cot I \tan g h.$$

Cette équation n'est vraie que pour le centre du soleil; mais si le centre du soleil est dans le plan, ε sera le demi-diamètre vu de Saturne, $\varepsilon = \frac{960''}{9,6} = 100'' = 1'\ 40''$; les rayons solaires tombant sur le plan de l'anneau avec une inclinaison si petite, glisseront sur l'anneau et ne nous seront pas réfléchis. Il se pourrait même que l'anneau disparût avant que le centre du soleil fût arrivé dans le plan de l'anneau. Nous ferons abstraction du demi-diamètre du soleil et de l'épaisseur de l'anneau; il est prouvé que l'erreur est insensible.

39. Tant que E et ε, déterminés par les formules précédentes, seront de même signe, la terre verra la surface éclairée, l'anneau sera visible. Tant que E et ε seront de signe différent, l'anneau tournera une face vers le soleil et l'autre vers la terre, il sera invisible; mais cette différence de signe durera peu, par la raison que les différences entre H et G n'iront jamais à 5°, qui sont le mouvement de Saturne pour cinq mois. C'est dans cet intervalle qu'on doit attendre les disparitions et réapparitions, quand Saturne sera voisin de l'un de ses nœuds; quinze ans après on aura des phénomènes semblables dans l'autre nœud.

40. Il n'y aura communément qu'une disparition et une réapparition à chacun des nœuds; mais si la première disparition arrive un peu avant la station, la rétrogradation ramènera bientôt Saturne à la distance (G — N), qui fera que le plan de l'anneau passera de nouveau par la terre; (G — N) venant encore à diminuer, l'anneau reparaîtra. Le plan de l'anneau passant peu après par le soleil, la face éclairée changera; l'anneau disparaîtra de nouveau, jusqu'à ce que la planète étant redevenue directe, le plan passera de nouveau par la terre, après quoi la face éclairée sera visible pendant 15 ans. Quand l'anneau est invisible, on en aperçoit souvent l'ombre qui se projette sur le disque de Saturne.

41. L'anneau paraîtra comme une ellipse. Soit a le rayon de l'anneau et le demi-grand axe de l'ellipse, b le demi-petit axe; $b = a \sin E$, d'où $\sin E = \frac{b}{a}$.

Si E est une quantité positive, nous verrons la face boréale de l'anneau; la demi-ellipse visible sera au-dessous du centre de Saturne; l'autre moitié sera derrière la planète. Si E est négative, nous verrons la demi-ellipse au-dessus du centre.

Les parties qui seront à l'est et à l'ouest de la planète paraîtront comme deux bras ou deux anses. Ces anses seront divisées longitudinalement par le grand axe, qu'on appelle aussi *ligne des anses*.

42. Ces anses seront sujettes à changer de figure. Mal vues dans des télescopes trop faibles, elles ont beaucoup exercé les astronomes. Huyghens, avec de plus grandes lunettes, les vit mieux et reconnut la cause de toutes ces apparences extraordinaires, et l'explication qu'il en donna dans son *Systema Saturnium*, en 1659, est maintenant adoptée généralement; elle a été confirmée par toutes les observations et les calculs faits depuis cette époque.

43. Saturne est donc environné d'un anneau fort mince, et sensiblement plan, qui paraît comme un prolongement de son équateur, mais qui partout est séparé du corps de la

planète. Supposez 9″ pour le rayon de Saturne, le rayon extérieur de l'anneau sera de 21″, le rayon intérieur de 15″ seulement; l'intervalle de 6″, ainsi que la largeur de l'anneau. Si l'épaisseur était d'environ 1″, l'épaisseur de l'anneau serait égale au rayon de la terre, car ce rayon qui, du soleil, est vu sous un angle d'environ 9″, ne serait vu de Saturne que sous un angle de 1″.

Short avait cru que l'anneau était quadruple, c'est-à-dire composé de quatre anneaux différens situés dans un même plan. Cassini n'y voyait que deux anneaux séparés par une raie noire imperceptible. Herschel est de cette opinion.

44. Quand l'anneau disparaît, il n'est vu dans les plus forts télescopes que comme un fil très-délié qui traverserait et déborderait de 12″ de chaque côté le corps de la planète, les satellites qui circulent dans le plan de cet anneau ont paru à Herschel comme des grains de chapelet. C'est dans cette circonstance favorable qu'il a découvert deux satellites, qu'on ne peut guères voir que dans ce tems, parce qu'ils s'écartent trop peu de l'anneau pour être aperçus tant que l'anneau est visible.

45. L'ellipse de l'anneau s'élargit à mesure que la terre s'élève sur le plan, puisque $b = a \sin E$ (41); lorsque.... $b = a \sin E = \frac{1}{2}$ diamètre de Saturne, on voit les bords de l'anneau coïncider avec ceux du disque, mais l'un en avant, l'autre en arrière; c'est ce qui aura lieu quand on aura.... $\sin E = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} = \sin 25° 22'$; si b augmente encore, l'anneau débordera des deux côtés; tant que ce phénomène aura lieu, on pourra mesurer les deux axes de l'anneau, et l'on connaîtra $\sin E = \frac{b}{a} = \sin I \cos g \sin (G - N) - \cos I \sin g$.

Soit $(G - N) = 90°$; $\frac{b}{a} = \sin E = \sin I \cos g - \cos I \sin g = \sin (I - g)$. On aura donc $E = I - g$, ou $E = I + g$, si la latitude était australe.

Si $(G - N) = -90°$,

$$\frac{b}{a} = \sin E = -\sin I \cos g - \cos I \sin g = -\sin (I + g);$$

mais la position des nœuds de l'équateur et de l'orbite de Saturne ne permettent jamais que E surpasse ni même égale l'inclinaison I; il faut toujours combiner plusieurs observations pour déterminer les inconnues.

46. On peut les déterminer toutes à la fois par les disparitions et les réapparitions, puisqu'il suffit de trois ou quatre observations; mais si nous supposons E et ε nulles dans ces phénomènes, il ne restera que deux inconnues, il suffira de deux observations.

Ainsi, par des observations de M. Flaugergues, j'ai trouvé $N = 11^s\ 17^\circ\ 51'$, $I = 35^\circ\ 18'$ et $E = 3'\ 3''$. L'anneau disparaîtrait donc quand l'élévation de la terre serait réduite à 3'. En supposant $E = 0$, j'ai trouvé $N = 11^s\ 17^\circ\ 46'$ et $I = 35^\circ\ 13'$; on peut donc négliger E.

Les observations étaient de 1789; la terre passait à la face australe de l'anneau, dont la partie visible était au-dessus de l'écliptique.

47. Pour prédire les disparitions qui dépendent du soleil, dans l'équation $\sin(H - N) = \cot I \operatorname{tang} h$, mettons pour $\operatorname{tang} h$ sa valeur $\operatorname{tang} I' \sin(H - N')$, I' et N' étant l'inclinaison et le nœud de l'orbite de Saturne, nous aurons

$$\sin(H - N) = \cot I \operatorname{tang} I' \sin(H - N'),$$

ou

$$\sin(H - N) \operatorname{tang} I = \sin(H - N') \operatorname{tang} I',$$

$$\operatorname{tang} I' \cot I = \frac{\sin(H - N)}{\sin(H - N')} = \frac{\sin H \cos N - \cos H \sin N}{\sin H \cos N' - \cos H \sin N'}$$

$$= \frac{\operatorname{tang} H \cos N - \sin N}{\operatorname{tang} H \cos N' - \sin N'};$$

d'où

$$\operatorname{tang} H = \frac{\operatorname{tang} I' \cot I \sin N' - \sin N}{\operatorname{tang} I' \cot I \cos N' - \cos N};$$

nous aurons donc H, qui est une quantité presque constante. On n'avait pas vu cette manière si simple de déterminer le passage du soleil par le plan de l'anneau.

48. Il n'est pas aussi aisé de prédire le passage de la terre par le plan, parce que dans l'équation $\sin(G - N) = \cot I \operatorname{tang} g$,

on ne peut éliminer g sans introduire les distances qui sont bien plus variables. Mais comme g est toujours d'un petit nombre de degrés, on peut faire du second membre une petite table fort commode, qui donne la valeur de sin (G — N) pour toutes les valeurs de g. Quand G approche d'être égale à N, on voit dans une Éphéméride quelle est la valeur de g; alors la table donne (G—N) d'une manière fort approchée; on en déduit G, avec laquelle on cherche de nouveau g dans l'Éphéméride, et (G—N) dans la table. On recommence avec cette nouvelle valeur de G, et après deux ou trois essais, on a la véritable valeur de G, qui donne enfin le jour de la disparition.

Voilà tout ce qu'il faut pour se préparer à l'observation, mais l'observation est fort incertaine; elle dépend de la pureté de l'air, de la vue de l'observateur et de la force de son télescope; aussi voyons-nous que les astronomes ont différé entr'eux, de plusieurs jours, sur les instans des différens phénomènes. Il en résulte plusieurs degrés d'incertitude sur l'inclinaison, que par un milieu je trouve de 31° 56′; les nœuds paraissent moins incertains, je trouve 5^{s} 16° et 11^{s} 16°; en 5^{s} 16° la terre passe à la face boréale, en 11^{s} 16° elle passe à la face australe.

LEÇON XIX.

De l'aberration de la lumière et de la parallaxe annuelle des étoiles.

1. En calculant dans les éclipses, l'instant de la disparition et celui de la réapparition du soleil ou des étoiles, nous avons supposé que les corps lumineux envoyaient à chaque instant, et dans toutes les directions, des rayons composés d'une foule d'atomes ou corpuscules de lumière qui se suivent

à la file et se succèdent sans aucune interruption, à moins qu'un corps opaque ne les vienne arrêter par son interposition, et nous avons calculé comme si, au moment même de l'interposition, nous devions cesser de voir, et comme si, à l'instant où l'interposition a cessé, la lumière devait tout aussitôt frapper notre œil de nouveau. C'était supposer à la lumière une vîtesse infinie et une transmission instantanée. Nous savons en effet que la lumière se propage avec une rapidité surprenante; c'est ce qui nous est prouvé par un canon tiré à une distance de plusieurs lieues et dont le bruit ne nous frappe que long-tems après la lumière. Outre les expériences faites par l'Académie, nous avons deux observations de La Caille, qui prouvent qu'à la distance de $171^{T},35$, le son arrive $1''$ après la lumière; d'où l'on conclut que la vîtesse du son est de $171^{T},35$ pour $1''$, en supposant que la lumière a une vîtesse infiniment plus grande que celle du son. Mais si la lumière n'emploie qu'un tems tout-à-fait inappréciable à décrire 171,35; si elle n'emploie pas une seconde à traverser 17135^{T}, ou $8\frac{1}{2}$ lieues, peut-on en conclure qu'elle n'emploiera pas $1''$ à venir de la lune, de Vénus, du soleil et des étoiles. La conclusion serait fausse et même tout-à-fait invraisemblable.

2. Pour qu'un astronome se détermine à compliquer ses théories et ses calculs, il faut qu'il en sente la nécessité et qu'il soit averti par quelqu'irrégularité sensible dont sa théorie ne lui fournit pas l'explication. Quelqu'invraisemblable que puisse être la transmission instantanée de la lumière, on la supposait tacitement, tant que le tems qu'elle met à traverser les espaces célestes ne produisait aucun effet sensible dans les phénomènes observés. Quand la lune vient arrêter les atomes lumineux que nous lance le soleil, elle ne peut retenir ceux qui ont déjà traversé la région de la lune, et qui sont à une moindre distance de la terre; nous devons encore recevoir ces corpuscules et voir le bord du soleil pendant une seconde; si la lumière emploie une seconde à venir de la lune à la terre, nous verrons commencer l'éclipse une

seconde plus tard qu'elle ne commence réellement; par la même raison, nous la verrons finir une seconde trop tard; la durée de l'éclipse n'en sera pas affectée; pendant une seconde de tems, la lune décrit environ 0",5 de degré; la longitude de la lune, conclue de l'éclipse, sera trop faible d'une demi-seconde; mais l'erreur se trouvera dans toutes les observations que nous pourrons faire; nous n'aurons aucun moyen pour la reconnaître; nos tables représenteront nos observations, une erreur constante est comme nulle, nous ne pouvons ni la constater, ni la corriger. Mais est-il vrai qu'elle soit constante? non; elle s'est manifestée, et voici comment : ce sont les satellites de Jupiter qui l'ont fait soupçonner, et qui ensuite ont servi à donner la première mesure de la vîtesse de la lumière (fig. 123).

Jupiter, éclairé par le soleil comme la terre, doit comme elle projeter derrière lui une ombre d'une forme conique. Un satellite *a* entrant dans ce cône, doit s'éclipser et cesser d'être visible pour la terre placée en T. L'observation de ces éclipses a servi pour dresser des tables de leurs mouvemens. Ces tables, dressées sur la totalité des observations, donnaient assez bien les tems des immersions et des émersions du satellite, quand la terre se trouvait en T dans les quadratures et dans ses distances moyennes au satellite. Mais la terre se trouvait-elle en A, l'immersion arrivait de 8′ environ plus tôt que par le calcul; la terre était-elle en B, l'immersion arrivait plus tard de 8′. Pour expliquer cette irrégularité, Romer imagina que la lumière pourrait bien employer 16′ à venir de A en B, et que par conséquent il lui fallait environ 8′ pour venir du soleil à la terre. La lumière ferait donc environ 40 millions de lieues de 2000 toises en 8′, ou 5 millions de lieues par minute.

3. Cette explication, aussi simple que curieuse, fut cependant rejetée ou négligée. Elle servait à corriger les tables du premier satellite; on conclut avec raison que cette correction devait être commune aux trois autres satellites; mais la théorie de ces satellites était trop peu avancée; cette erreur de 8′ en plus ou en moins, disparaissait parmi des erreurs plus considérables, on n'y songeait plus.

4. Cependant d'autres irrégularités se manifestaient. Picard, qui le premier, de concert avec Auzout, avait appliqué les lunettes aux quarts-de-cercle, observa la polaire dans tous les tems de l'année, de jour comme de nuit. Il trouva dans les distances zénitales de cette étoile des variations de près de 40″, qu'il ne put expliquer. Flamsteed, qui reconnut ces anomalies, voulut les attribuer à la parallaxe; Cassini lui démontra que la parallaxe aurait une marche toute différente. Bradley reprit cette recherche importante. Il plaça dans le méridien un secteur de 12 pieds de rayon, avec lequel il observa assidument les étoiles qui passaient à une distance peu considérable du zénit. Ce choix était motivé par la nécessité de se mettre à l'abri de l'inconstance des réfractions. Bradley reconnut que ces inégalités étaient annuelles, et que, revenant les mêmes tous les ans et dans les mêmes circonstances, elles devaient dépendre du mouvement du soleil ou plutôt de la terre; il les expliqua fort ingénieusement par le mouvement de la lumière combiné avec celui de la terre. Son explication est une conséquence mathématique et rigoureuse de deux mouvemens, dont l'un n'était plus nié, et l'autre, qui ne pouvait se nier, avait déjà été mis en avant pour les satellites. La solution du problème devait appartenir aux géomètres qui s'occupaient de la mécanique céleste : ce fut un astronome qui la trouva.

5. Supposons (fig. 124) une étoile à une distance immense de la terre; nous avons vu que les lignes menées de l'étoile à tous les points de l'orbite terrestre, et qui doivent former un cône plus ou moins oblique, suivant la latitude de l'étoile, sont toujours parallèles entr'elles et comme une simple ligne mathématique; soit donc E cette étoile et T la terre; le rayon ET peut en tout tems représenter un rayon lumineux venu de l'étoile à la terre.

Si la terre et l'étoile sont immobiles, le rayon ET viendra frapper l'œil suivant la direction ET, et l'étoile sera vue sur cette direction, quel que soit le tems employé par la lumière à faire le trajet.

Supposons que la terre ait un mouvement, et que la vîtesse de ce mouvement soit comparable à celle de la lumière; si la vîtesse de la terre est représentée par la droite T*t* (fig. 125), et que la vîtesse de la lumière le soit par la droite A*t*, voici ce qui doit arriver.

Le globule lumineux viendra avec une vîtesse AT frapper l'œil, et l'œil viendra avec une vîtesse *t*T choquer le globule. Le premier choc ferait voir l'étoile sur TA; le second, s'il était seul, la ferait voir sur TC, car l'observateur venant de *t* en T, est affecté comme si la lumière venait avec la même vîtesse de C en T; il doit en résulter, suivant les lois de la composition des forces, une sensation mixte, suivant la diagonale TB du parallélogramme ABCT; ainsi l'étoile paraîtra en B, et sa position apparente B fera avec la position réelle A l'angle ATB, et

$$\text{tang ATB} = \frac{\text{AB}}{\text{AT}} = \frac{\text{TC}}{\text{TA}} = \frac{\text{vîtesse de la terre}}{\text{vîtesse de la lumière}};$$

ainsi l'étoile sera portée en avant d'une quantité ATB, dans le sens et dans le plan où la terre se meut; il ne reste donc qu'à chercher par observation si cet angle est sensible. Cette explication toute mathématique est de d'Alembert; Bradley et Clairaut présentaient la même idée d'une manière différente.

6 Pour observer l'étoile, si la terre est immobile, il faudra diriger la lunette suivant TA; la lumière entrant en A dans la lunette, en parcourra l'axe AT, et la position de la lunette sur l'instrument indiquera le lieu de l'étoile. Mais si la terre a un mouvement *t*T, il faudra incliner la lunette suivant *t*A; la lumière entrant en A à l'extrémité de l'axe de la lunette continuera suivant A*b*; mais dans le même tems le point c de l'axe sera venu en *b*; la lumière sera donc en c dans le même axe; quand la lumière sera en *d*, le point e de l'axe y sera pareillement; enfin quand la lumière sera en T, l'œil et l'oculaire *t* y seront arrivés de même; toujours la lumière aura été dans l'axe de la lunette, qui sera TB, la direction oblique de cette lunette indiquera la position

apparente de l'étoile ; il est visible que

$$\text{tang ATB} = \text{tang TA}t = \frac{t\text{T}}{\text{TA}} = \frac{ed}{\text{A}d} = \frac{cb}{\text{A}b}, \text{ etc.}$$

7. Une planète p (fig. 126) se mouvant avec la vîtesse pP dans le tems dt, envoie un rayon pR ; ce rayon participant au mouvement de la planète, au lieu de suivre la direction pR, arrivera suivant la diagonale pT à la terre immobile en T, et l'observateur verra la planète sur le rayon Tp; il la jugera en p quand elle sera véritablement en P ; il se trompera donc sur le lieu de la planète, de l'angle pTP, mouvement géocentrique de la planète pendant le tems que la lumière emploie pour décrire pT. Ainsi même dans l'hypothèse de Tycho et de Ptolémée, il y aurait une aberration de la lumière pour les planètes.

Supposons maintenant que pendant le même tems dt la terre soit venue de t en T avec la vîtesse tT $= e$T ; la vîtesse pT combinée avec la vîtesse eT produira une sensation composée suivant la diagonale Tq du parallélogramme Tpqe ; on jugera la planète au point q, et l'erreur sera PTq = PTp + pTq = PTp + Tqe = mouvement géocentrique de la planète + mouvement planéticentrique de la terre = mouvement géocentrique total de la planète. Ainsi nous attribuerons à la planète le chemin qu'a fait réellement la terre, mais en sens contraire au mouvement de la planète.

Nous avons supposé que la terre et la planète vont dans des sens différens, ce qui a lieu dans les conjonctions supérieures ; elles vont dans le même sens dans les conjonctions inférieures et dans les oppositions ; au lieu de la somme des deux angles, l'aberration en est la différence, mais toujours elle est le mouvement total géocentrique, dans l'intervalle, (fig. 126 *bis*).

8. Soit l le tems que la lumière emploie à venir du soleil à la terre, ou le tems qui répond à la distance que nous avons prise pour unité. Soit m le mouvement géocentrique de la planète pendant 1″ et D la distance de la planète à la terre ; 1″ : l :: D : lD ; lD sera le tems qu'il faudra à la lu-

mière pour venir de la planète à la terre, car nous supposons la vîtesse uniforme; le mouvement de la planète pendant le tems lD sera mlD; ce sera aussi la différence entre lieu vrai et lieu apparent de la planète; c'est ce qu'on appelle l'*aberration de la planète;* ainsi aberrat. de planète $= ml$D.

Soit A lieu apparent, V le lieu vrai, A $=$ V $-$ mlD.

Cette formule est générale; elle donne l'aberration en longitude, en latitude, en ascension droite, en déclinaison, suivant que m est le mouvement en 1″ pour la longitude, la latitude, etc.

9. Par des recherches exactes et très-étendues sur les satellites de Jupiter, j'ai trouvé $l = 493'',2 = 8'\ 13'',2$; Roemer, dans un tems où la théorie des satellites ne faisait que de naître, avait trouvé $l = 11' = 660''$. Or pendant 8′ 13″,2, la terre, par son mouvement moyen, décrit un arc de 20″,25; ainsi l'aberration moyenne du soleil sera de 20″,25 dont le soleil nous paraîtra moins avancé qu'il ne sera réellement; nous le verrons toujours où il était 8′ 13″,2 avant l'observation. Il en sera de même à proportion pour les planètes, nous les verrons où elles étaient 493″,2 D avant l'observation.

10. Les règles générales de l'aberration ainsi trouvées, il ne reste qu'à en faire l'application aux différens astres, pour en corriger les observations.

Soit EC (fig. 127) l'écliptique, IS un grand cercle quelconque passant par l'étoile S et coupant l'écliptique en un point I sous un angle I qui sera l'inclinaison de ce cercle. Soit Tt le chemin de la terre pendant 493″, abaissons de T et t sur IS les arcs perpendiculaires TX et tx, et soit Tu parallèle au plan SI; tu sera la quantité dont la terre se sera éloignée du plan IS. La distance de la terre à ce plan était $v \sin \mathrm{TX} = v \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{IT}$.

Autant la terre s'écartera de ce plan, autant l'étoile devra s'en écarter, puisque l'étoile (5) est toujours portée dans le plan et dans le sens où va la terre, d'une quantité égale au mouvement de la terre, c'est-à-dire de 20″,25; mais ces 20″, dans le plan de l'écliptique, produiront des quantités diffé-

rentes, suivant le plan auquel on voudra les comparer ; l'étoile sera donc transportée de S en S′ d'une quantité égale et parallèle à Tt, mais l'écart du plan IS sera égal et parallèle à tu.

11. Or $tu = d(v\sin I\sin IT) = dv\sin I\sin IT + v\sin I\cos IT dIT$
$= dv\sin I\sin IT + vdu\sin I\cos IT.$

Ce dernier terme est le plus important.

Cette formule renferme toutes les règles de l'aberration; il ne reste qu'à les développer en mettant pour I et IT les quantités convenables, selon les cercles que nous aurons intérêt de considérer, or (X.44).

$$vdu = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\,dm}{v} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\,dm(1-e\cos u)}{(1-e^2)}$$
$$= \frac{dm}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}(1-e\cos u) = dm(1+\tfrac{1}{2}e^2)(1-e\cos u)$$
$$= 20'',25\,(1 - e\cos u + \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}e^3\cos u)$$
$$= 20'',25285 - 0'',3402\cos u$$
$$= 20'',25285 - 0'',3402\cos(\odot - \text{apogée})$$
$$= 20'',25285 + 0'',3402\cos(\odot - \text{périgée}).$$

On a ensuite

$$dv = d\left(\frac{1-e^2}{1-e\cos u}\right) = -e\,du\sin u,$$

en négligeant les e^3, qui, comme on voit, sont insensibles. On a donc

$$dv = -0'',34\sin(\odot - \text{apogée}) = +0'',34\sin(\odot - \text{périgée}).$$

Évaluons successivement I et IT.

12. Supposons d'abord que IS (fig. 128) est un cercle de latitude, alors l'inclinaison $I = 90°$, IS = latitude de l'étoile, IT = longitude ♁ — longitude de l'étoile = ♁ — E $= 180° + \odot - E$;

$$SS' = tu = \text{aberr.} = vdu\cos(180° + \odot - E) + dv\sin(180° + \odot - E)$$

$$= -v du \cos(\odot - E) - dv \sin(\odot - E)$$
$$= -[20'',253 + 0.34 \cos(\odot - \Pi)] \cos(\odot - E)$$
$$- 0'',34 \sin(\odot - \Pi) \sin(\odot - E)$$
$$= -20'',253 \cos(\odot - E) - 0'',34 [\cos(\odot - E)\cos(\odot - \Pi)$$
$$+ \sin(\odot - E)\sin(\odot - \Pi)]$$
$$= -20'',253 \cos(\odot - E) - 0'',34 \cos(\odot - E - \odot + \Pi)$$
$$= -20'',253 \cos(\odot - E) - 0'',34 \cos(\Pi - E).$$

C'est la quantité dont l'aberration écarte l'étoile du cercle de latitude, ce sera donc l'aberration en longitude dans la région de l'étoile. Par le point S' menons le cercle de latitude Pi, i sera la longitude apparente et Ii l'aberration sur l'écliptique; or $Ii = \frac{SS'}{\cos IS} = \frac{\text{aberration}}{\cos \text{latitude}}$; ainsi l'aberration en longitude $dL = \frac{-20'',253 \cos(\odot - E) - 0'',34 \sin(\Pi - E)}{\cos \lambda = \cos \text{latitude apparente}}$.

13. Supposons maintenant que le cercle IS est un cercle perpendiculaire au cercle de latitude (fig. 129), le point I sera le pôle de SL, l'angle $I = SL = \lambda$; $IT =$ longit. ♁ $-$ longit. $I = 180° + \odot - (\text{longit. } L - 90°) = 180° + \odot - E + 90° = 270° + \odot - E = \odot - E - 90°$.

$$SS' = tu = v du \sin\lambda \cos(\odot - E - 90°) + dv \sin\lambda \sin(\odot - E - 90°)$$
$$= v du \sin\lambda \sin(\odot - E) - dv \sin\lambda \cos(\odot - E)$$
$$= [20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \Pi)] \sin\lambda \sin(\odot - E)$$
$$- 0'',34 \sin(\odot - \Pi) \sin\lambda \cos(\odot - E)$$
$$= 20'',253 \sin\lambda \sin(\odot - E) + 0'',34 \sin\lambda \sin(\odot - E) \cos(\odot - \Pi)$$
$$- 0'',34 \sin\lambda \cos(\odot - E) \sin(\odot - \Pi)$$
$$= 20'',253 \sin\lambda \sin(\odot - E) + 0'',34 \sin\lambda \sin(\odot - E - \odot + \Pi)$$
$$= 20'',253 \sin\lambda \sin(\odot - E) + 0'',34 \sin\lambda \sin(\Pi - E).$$

SS' est la quantité dont l'aberration écarte l'étoile du pôle boréal de l'écliptique; l'aberration en latitude sera donc

$$-20''253 \sin\lambda \sin(\odot - E) - 0'',34 \sin\lambda \sin(\Pi - E);$$

en négligeant les termes $0'',34$, etc., comme faisaient les astronomes, il était aisé de conclure qu'en vertu de l'aber-

ration, l'étoile paraissait décrire autour de son lieu vrai une ellipse dont le grand axe était 20″,253, et le petit axe 20″,253 $\sin\lambda$; cette ellipse deviendrait un cercle pour une étoile placée au pôle de l'écliptique, parce que $\sin\lambda$ serait $= 1$. Au contraire, pour une étoile dans l'écliptique, l'ellipse dégénérerait en ligne droite, parce que $\sin\lambda$ serait $= 0$.

Presque tous les astronomes, à l'exemple de Clairaut, se sont servis de cette ellipse pour trouver l'aberration en ascension droite et en déclinaison; mais elles se déduisent mieux de notre formule générale, qui permet d'avoir égard à l'ellipticité de la terre (fig. 130).

14. Soit donc EC l'écliptique, EQ l'équateur, PST un cercle de déclinaison passant par l'étoile, T la terre. SS′ parallèle à l'équateur sera l'aberration en ascension droite sur le parallèle de l'étoile, et $\frac{SS'}{\cos D}$ l'aberration sur l'équateur,

$$\begin{aligned}
SS' &= v\,du \sin I \cos IT + dv \sin I \sin IT \\
&= v\,du \sin I \cos(ET - EI) + dv \sin I \sin(ET - EI) \\
&= v\,du \sin I \cos(ET \cos EI + \sin ET \sin EI) \\
&\quad + dv \sin I (\sin ET \cos EI - \cos ET \sin EI).
\end{aligned}$$

Or $\sin I \sin EI = \sin Ea = \sin \text{Æ}$, $ET = ♁ = 180° + ☉$,

$$\sin I \cos EI = \sin I \sin EI \cot EI = \sin \text{Æ} \cos\omega \cot \text{Æ} = \cos\omega \cos \text{Æ};$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
SS' &= v\,du \cos\omega \cos \text{Æ} \cos ♁ + v\,du \sin \text{Æ} \sin ♁ + dv \cos\omega \cos \text{Æ} \sin ♁ \\
&\qquad - dv \sin \text{Æ} \cos ♁ \\
&= - v\,du \cos\omega \cos \text{Æ} \cos ☉ - v\,du \sin \text{Æ} \sin ☉ - dv \cos\omega \cos \text{Æ} \sin ☉ \\
&\qquad + dv \sin \text{Æ} \cos ☉ \\
&= - v\,du (\cos\omega \cos \text{Æ} \cos ☉ + \sin \text{Æ} \sin ☉) \\
&\quad - dv (\cos\omega \cos \text{Æ} \sin ☉ - \sin \text{Æ} \cos ☉) \\
&= - 20'',253 (\cos\omega \cos \text{Æ} \cos ☉ + \sin \text{Æ} \sin ☉) \\
&\quad - 0'',34 [\cos\omega \cos \text{Æ} \cos ☉ \cos(☉ - \Pi) \\
&\quad + \cos\omega \cos \text{Æ} \sin ☉ \sin(☉ - \Pi) + \sin \text{Æ} \sin ☉ \cos(☉ - \Pi) \\
&\quad - \sin \text{Æ} \cos ☉ \sin(☉ - \Pi)],
\end{aligned}$$

et

et l'aberration en ascension droite,

$$= -\frac{20'',253}{\cos D}(\cos\omega\cos\text{Æ}\cos\odot + \sin\text{Æ}\sin\odot)$$
$$-\frac{0'',34}{\cos D}(\cos\omega\cos\text{Æ}\cos\Pi + \sin\text{Æ}\sin\Pi);$$

les derniers termes sont encore presque constans et presqu'insensibles.

15. Soit enfin (fig. 131) EC l'écliptique, EQ l'équateur, Sa le cercle de déclinaison de l'étoile S, ISQ un cercle perpendiculaire au cercle de déclinaison; les angles S et a étant chacun de 90°, les points Q et V seront les pôles de Sa, et les angles Q=V=D; on a dans ce cas IT=IE+ET, et par conséquent l'aberration de distance polaire SS′, ou l'aberration de déclinaison — SS′, ainsi

$$\begin{aligned}-SS' &= v\,du\sin I\cos(IE+ET) + dv\sin I\sin(IE+ET)\\ &= v\,du\sin I(\cos IE\cos ET - \sin IE\sin ET)\\ &\quad + dv\sin I(\sin IE\cos ET + \cos IE\sin ET)\\ &= v\,du\sin I(-\cos IE\cos\odot + \sin IE\sin\odot)\\ &\quad + dv\sin I(-\sin IE\cos\odot - \cos IE\sin\odot);\end{aligned}$$

mais

$$\sin V : \sin IE :: \sin I : \sin VE,$$

d'où

$$\sin I\sin IE = \sin V\sin VE = \sin D\cos\text{Æ};$$

car

$$Va = 90^\circ \quad\text{et}\quad Ea = \text{Æ} \quad\text{et}\quad VE = Va - Ea = 90^\circ - \text{Æ}.$$

De plus,

$$\sin I\cos IE = \sin I\sin IE\cot IE = \sin D\cos\text{Æ}\cot IE,$$

et le triangle IVE donne

$$\cos c\cos a' = \cot c''\sin c - \sin a'\cot a'',$$

ou

$$\sin\text{Æ}\cos\omega = \cot IE\cos\text{Æ} - \sin\omega\cot(180^\circ - D),$$
$$\cot IE\cos\text{Æ} = \sin\text{Æ}\cos\omega - \sin\omega\cot D;$$

donc

$$\sin I \cos IE = \sin D \sin \text{Æ} \cos \omega - \sin \omega \cos D;$$

ainsi

$$\begin{aligned}
-SS' = {} & vdu(-\sin D \sin \text{Æ} \cos \omega \cos \odot + \sin \omega \cos D \cos \odot \\
& \qquad + \sin D \cos \text{Æ} \sin \odot) \\
& + dv(-\sin D \cos \text{Æ} \cos \odot - \sin D \sin \text{Æ} \cos \omega \sin \odot \\
& \qquad + \sin \omega \cos D \sin \odot) \\
= {} & vdu \sin D(\cos \text{Æ} \sin \odot - \cos \omega \sin \text{Æ} \cos \odot) \\
& - dv \sin D(\cos \text{Æ} \cos \odot + \cos \omega \sin \text{Æ} \sin \odot) \\
& + vdu \sin \omega \cos D \cos \odot + dv \sin \omega \cos D \sin \odot.
\end{aligned}$$

Mettez pour vdu et dv leurs valeurs ci-dessus, et vous aurez après les réductions,

$$\begin{aligned}
\text{aberr. décl.} = {} & + 20'',253 \sin D(\cos \omega \sin \text{Æ} \cos \odot - \cos \text{Æ} \sin \odot) \\
& - 20'',253 \cos D \sin \omega \cos \odot \\
& + 0'',34 \sin D(\cos \omega \sin \text{Æ} \cos \Pi - \cos \text{Æ} \sin \Pi) \\
& - 0'',34 \cos D \sin \omega \cos \Pi.
\end{aligned}$$

Ces démonstrations seraient des deux tiers moins longues, en négligeant l'ellipticité; elles exigent une attention, c'est de placer toujours la terre dans le premier quart de l'écliptique et dans l'angle aigu I.

16. On remarquera que les termes 0'',34, etc. qui dépendent de l'excentricité de l'orbite terrestre, sont de même forme et de même signe que les termes principaux, à la réserve que le périhélie Π est substitué à la longitude vraie du soleil, et que le terme 0'',34 est à fort peu près $\frac{1}{60}$ de 20'',253; ainsi quand on aura fait pour les premiers termes des tables dépendantes de l'ascension droite de l'étoile et de la longitude du soleil, on entrera dans ces tables avec cette même ascension droite et le périhélie, qui est constamment de 9^s 10°, et l'on y trouvera un nombre qui, divisé par 60, sera la valeur des petits termes.

17. C'est ainsi que je suis parvenu à donner des tables qui ne dépendissent que des quantités Æ et D, que fournit l'observation, et de la longitude du soleil, qui est toujours connue. Mais pour l'usage, je leur ai donné plusieurs formes diffé-

rentes; ainsi j'ai trouvé, en développant,

$$\text{aberr. asc. dr.} = \frac{0'',837\cos(\text{Æ}+\odot) - 19'',416\cos(\text{Æ}-\odot)}{\cos D}$$

$$\begin{aligned}\text{aberr. décl.} &= \sin D[-0'',837\sin(\text{Æ}+\odot)+19'',416\sin(\text{Æ}-\odot)]\\ &\quad -4'',033\cos(\odot-D)-4'',033\cos(\odot+D)\\ &= \sin D[+0'',837\cos(\text{Æ}+\odot+90^\circ)\\ &\quad -19'',416\cos(A-R+90^\circ)]\\ &\quad -4'',033\cos(\odot-D)-4'',033\cos(\odot+D);\end{aligned}$$

par ce moyen j'ai renfermé les deux aberrations en trois petites tables que j'ai publiées, en 1785, dans la Connaissance des Tems pour 1788,

$$\begin{aligned}18.\ \text{Aberr. asc. dr.} &= -\frac{20'',253}{\cos D}\cos\omega\cos\text{Æ}\left(\cos\odot+\frac{\tang\text{Æ}}{\cos\omega}\sin\odot\right)\\ &= -\frac{20'',253\cos\omega\cos\text{Æ}}{\cos D}[\cos\odot+\tang(\text{Æ}+y)\sin\odot]\\ &= -\frac{20'',253\cos\omega\cos\text{Æ}\cos(\text{Æ}+y-\odot)}{\cos D\cos(\text{Æ}+y)};\end{aligned}$$

c'est la formule de La Caille; $(\text{Æ}+y)$ est évidemment l'arc EI de l'écliptique (fig. 130).

$$\begin{aligned}19.\ \text{Aberr. décl.} &= -vdu\sin I\cos(IE+ET)\\ &= -vdu\sin I\cos(180^\circ-CE+ET)\\ &= -vdu\sin I\cos(\odot-CE)\\ &= -vdu\sin C\cos(\odot-\overline{EB+BC})\\ &= -vdu\sin C\cos(\odot-\overline{\text{Æ}+y+BC})\\ &= -vdu\sin C\cos(\text{Æ}+y+BC-\odot)\\ &= +vdu\sin I\cos(IE+\odot)\\ &= +vdu\sin I\cos(\odot+180^\circ-CE)\\ &= -vdu\sin I\cos(CE-\odot).\end{aligned}$$

Or (15) $\sin I = \dfrac{\sin D\cos\text{Æ}}{\sin IE}$, et $\cot IE = \dfrac{\sin\text{Æ}\cos\omega - \sin\omega\cot D}{\cos\text{Æ}}$

$$= \tang\text{Æ}\cos\omega - \frac{\sin\omega\cot D}{\cos\text{Æ}};$$

c'est encore la méthode de La Caille, qui cherchait $I = C$ et $EC = EB + BC$ par les triangles EBa, CBS.

$$20.\ \text{Ab.asc.dr.} = -\frac{20'',253\cos\omega\cos\odot}{\cos D}\left(\cos\text{Æ} + \frac{\tang\odot}{\cos\omega}\sin\text{Æ}\right)$$

$$= -\frac{20'',253\cos\omega\cos\odot}{\cos D}\left[\cos\text{Æ} + \tang(\odot + u)\sin\text{Æ}\right]$$

$$= -\frac{20'',253\cos\omega\cos\odot\cos(\odot + u - \text{Æ})}{\cos D\cos(\odot + u)},$$

$$\text{ab.décl.}\ 1^{\text{re}}\ \text{part.} = 20'',253\sin D\cos\omega\cos\odot\left(\sin\text{Æ} - \frac{\tang\odot}{\cos\omega}\cos\text{Æ}\right)$$

$$= 20'',253\sin D\cos\omega\cos\odot\left[\sin\text{Æ} - \tang(\odot + u)\cos\text{Æ}\right]$$

$$= \frac{20'',253\sin D\cos\omega\cos\odot}{\cos(\odot + u)}\left[\sin\text{Æ}\cos(\odot + u) - \sin(\odot + u)\cos\text{Æ}\right]$$

$$= -\frac{20'',253\sin D\cos\omega\cos\odot\sin(\odot + u - \text{Æ})}{\cos(\odot + u)},$$

il restera à calculer la seconde partie $-20'',253\sin\omega\cos D\cos\odot$.

Ces formules serviraient à calculer les tables que M. Gauss a données sans démonstration; ainsi l'on voit que toutes les méthodes employées dans l'Astronomie pratique découlent de mes formules générales. Mais toutes ces méthodes négligent l'excentricité.

21. Après avoir donné les formules, il reste à voir comment on a pu trouver par observation le coefficient $20'',253$. D'abord la formule d'aberration en déclinaison,

$$\sin D\left[-0'',837\sin(\text{Æ} + \odot) + 19'',416\sin(\text{Æ} - \odot)\right] - 8''\cos\odot\cos D,$$

explique l'inégalité de près de $40''$ observée dans la polaire, car pour cette étoile $\sin D$ diffère peu de l'unité. Le terme $8''\cos\odot\cos D$ est presque nul, et le terme $19'',416\sin(\text{Æ} - \odot)$ donne en six mois une variation de près de $39''$. Soit a le coefficient cherché; on aurait eu, en partant de $39''$,

$$19'',5 = a\cos^2\tfrac{1}{2}\omega \quad \text{et} \quad a = 19'',5\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}\omega = 20'',341;$$

il suffisait donc des observations de Picard, si la théorie eût été connue.

22. Voulez-vous y employer des étoiles voisines du zénit, comme Bradley, la formule

$$\text{ab. décl.} = a \cos \omega \sin D \sin \text{Æ} \cos \odot - a \sin D \cos \text{Æ} \sin \odot - a \sin \omega \cos D \cos \odot$$

nous dit qu'en choisissant une étoile telle que Æ=0 et le tems où $\odot = 90°$ et $270°$, on aurait eu successivement

$$\text{aberr. déclinais.} = - a \sin D \quad \text{et} \quad + a \sin D,$$

dont la différence est $2a \sin D$; on aurait donc connu le coefficient a. Bradley ayant choisi les tems où l'aberration en déclinaison était la plus grande en plus et en moins, trouva pour $2a$ les quantités contenues dans la table ci-jointe,

ÉTOILES.	D—D′	2a
γ Dragon.....	39″	40″4
β Dragon.....	39	40,2
η grande Ourse...	36	40,4
α Cassiopée.....	34	40,8
τ Persée.....	25	41,0
α Persée.....	23	40,2
35 Giraffe.....	19	40,2
La Chèvre.....	16	40,2

et par des formules équivalentes à la nôtre, il en conclut pour $2a$ les quantités qu'on voit à côté de chaque étoile. Le milieu est 40″,4; d'où $a = 20''$,2; en rejetant les deux dernières, comme moins sûres, on aura 20″,25; mille éclipses du premier satellite de Jupiter m'ont donné 20″,253; ainsi des observations d'un genre bien différent nous ont conduit à un même résultat, que toutes les observations faites depuis Bradley n'ont cessé de confirmer; *on ne peut donc plus douter*

du mouvement de la terre, qui se manifeste à nous par les irrégularités observées dans les mouvemens des étoiles, et qui sont inexplicables dans tout autre système. L'équation de la lumière, pour les satellites, ne prouvait rien par elle-même, car elle doit avoir lieu dans le système de Tycho comme dans celui de Copernic.

Aberration diurne.

23. Le mouvement de la terre autour de son axe doit aussi produire une aberration qui sera à l'aberration annuelle comme le mouvement diurne est au mouvement annuel. Or le mouvement de la terre, pour 8′ 13″ de tems, est V sin 20″,253.

Soit r le rayon du globe terrestre; le mouvement d'un point de l'équateur, pour 8′ 13″, sera

$$2r \sin \frac{15}{2} (8' \, 13'') = r\left(\frac{60}{4}\right) \sin 8' \, 13'' = r \sin \left(\frac{8^\circ \, 13'}{4}\right)$$
$$= r \sin 2^\circ \, 3' \, 15''.$$

Le rapport de ces deux mouvemens sera

$$\frac{r \sin 2^\circ \, 3' \, 15''}{V \sin 20'',253} = \frac{8'',6 \, \sin 2^\circ \, 3' \, 15''}{20'',253};$$

le coefficient de l'aberration diurne

$$= 20'',253 \times \frac{8'',6 \sin 2^\circ \, 3' \, 15''}{20'',253} = 8'',6 \sin 2^\circ 3' \, 15'' = 0'',30124,$$

et pour un lieu dont la latitude est H,

$$\text{aberrat. diurne} = 0'',30124 \cos H,$$

et pour Paris, 0″,19823; on voit que l'aberration diurne est assez petite pour être négligée.

24. Soit IQ l'équateur (fig. 132), P le pôle, ISP le cercle de déclinaison de l'étoile S, T′ le lieu de l'observateur, sur son parallèle; on aura, suivant notre formule générale,

$$\text{ab. asc. dr.} = \frac{0'',301 \cos H \sin I \cos IT}{\cos D} = \frac{0'',301 \cos H \cos P}{\cos D};$$

car IT mesure l'angle horaire IPT de l'astre. Tant que cos P sera positif, c'est-à-dire, que P sera entre 270 et 90°, l'aberration diminuera l'angle horaire et augmentera l'ascension droite.

25. Soit IS un cercle perpendiculaire au cercle de déclinaison, ITAQ l'équateur terrestre (fig. 133),

$$\text{ab. décl.} = -0'',301 \cos H \sin I \cos IT = -0'',301 \cos H \sin D \cos IT$$
$$= -0'',301 \cos H \sin D \sin TA = -0'',301 \cos H \sin D \sin P,$$

quantité très-peu sensible et qu'on néglige.

Aberration de la lune et du soleil.

La distance de la lune est $\frac{1}{\sin \Pi} = \frac{1}{\sin 57'}$, quantité moyenne; la distance du soleil $= \frac{1}{\sin 8'',6}$, le tems de la lumière pour la lune sera

$$= \frac{8'',6 \sin 8' 13''}{57'} = 1'',2116,$$

le mouvement de la lune pour ce tems est de 0'',665; c'est à peu près l'aberration de la lune en longitude; elle est presque constante; on la néglige. L'aberration en latitude est encore bien plus petite, puisque le coefficient se multiplie par le sinus de la latitude.

Nous avons donné ci-dessus l'aberration du soleil, qui est aussi presque constante; ainsi, pour plus de commodité dans les calculs ordinaires, elle est renfermée dans les époques de la longitude moyenne; mais quand on a besoin du lieu vrai du soleil, comme dans les calculs des lieux géocentriques des planètes, on ajoute 20'',25 au lieu du soleil tiré des tables ou d'une Éphéméride. Nous pourrions développer la formule

d'aberration pour les planètes, et je l'ai mise en tables dans la Connaissance des Tems de 1794; mais la formule suffit et nous supprimons ici ce développement.

Parallaxe annuelle des étoiles.

26. Il est démontré par les phénomènes de l'aberration, que la terre tourne autour du soleil; les étoiles ont donc une parallaxe annuelle. Pour reconnaître cette parallaxe, il faut savoir en calculer les effets, afin de les comparer aux observations (fig. 134).

Soit TC l'écliptique, T le lieu de la terre, P le pôle de TC, E une étoile quelconque; CE sera la latitude de l'étoile dont le point C marquera la longitude. La parallaxe doit agir dans le cercle TE dont le plan passe par la terre T, l'étoile E et le centre du soleil ou de la sphère; l'étoile sera donc portée en e, la parallaxe sera $Ee = \varpi \sin Te$, la latitude apparente deviendra ce, et la longitude sera augmentée de Ce.

$$Cc = \text{parall. longit.} = \frac{em}{\cos Ce} = \frac{Ee \sin E}{\cos \lambda'} = \frac{\varpi \sin TE \sin E}{\cos \lambda'}$$
$$= \frac{\varpi \sin TC}{\cos \lambda'} = \frac{\varpi \sin (E - ♁)}{\cos \lambda'} = -\frac{\varpi \sin (E - \odot)}{\cos \lambda},$$

$$Em = \text{parall. latit.} = em \cot E = \varpi \sin TC \cot E$$
$$= \varpi \sin TC \cos TE \operatorname{tang} CTE = \varpi \sin TC \cos TC \cos CE \frac{\operatorname{tang} CE}{\sin TC}$$
$$= \varpi \sin CE \cos TC = \varpi \sin \lambda \cos (E - ♁) = -\varpi \sin \lambda \cos (E - \odot).$$

27. Ces formules négligent les secondes puissances de la parallaxe, ce qui est sans inconvénient, puisque l'on doute encore si ϖ est une quantité sensible. Cependant, veut-on des expressions rigoureuses? nous les trouverons dans les formules du chapitre VI; il s'agit de démêler parmi ces formules celles qui peuvent convenir au cas présent. Or je vois que le pôle de l'écliptique tient ici la place du pôle de l'équateur, que la terre tient celle du zénit, que la distance

du zénit au pôle est de 90°, ainsi la hauteur du pôle $=H=0$; la parallaxe de l'angle TPE se calculera comme la parallaxe d'ascension droite. Or (VI. 11)

$$\tang \Pi = \frac{\left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta}\right)\sin P}{1-\left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta}\right)\cos P}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(E-\text{♄})}{1-\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\cos(E-\text{♄})},$$

et

$$\Pi = \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\frac{\sin(E-\text{♄})}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)^2 \frac{\sin 2(E-\text{♄})}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

$$= -\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\frac{\sin(E-\odot)}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)^2 \frac{\sin 2(E-\odot)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

Le premier terme est la formule commune.

28. La formule

$$\sin\pi = \sin\varpi \sin H \sin(\Delta+\pi) - \sin\varpi \cos H \cos(P+\tfrac{1}{2}\Pi)$$
$$\cos(\Delta+\pi)\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \quad \text{(VI. 13)}$$

se réduit au second terme à cause de $\sin H=0$; on aura donc

$$\sin\pi = -\sin\varpi\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \sin(90^\circ-\lambda+\pi)\cos(E-\text{♄}+\tfrac{1}{2}\Pi)$$
$$= +\sin\varpi\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \sin(\lambda-\pi)\cos(E-\odot+\tfrac{1}{2}\Pi);$$

négligez $\text{séc}\,\frac{1}{2}\Pi$ et $\frac{1}{2}\Pi$, dont l'effet est insensible, et vous aurez la parallaxe de la distance polaire; mais si vous voulez que π soit la parallaxe de latitude, il faut changer le signe de π, et vous aurez

$$\pi = -\varpi \sin(\lambda+\pi)\cos(E-\odot), \text{ ou } -\pi \sin\lambda \cos(E-\odot),$$

c'est encore la formule commune.

29. Aberr. longit. $= -\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos(E-\odot)$,

parall. longit. $= -\left(\frac{\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(E-\odot)$,

$$\text{aberr. latit.} = -a \sin\lambda \sin(E - \odot),$$
$$\text{parall. latit.} = -\varpi \sin\lambda \cos(E - \odot).$$

Ces formules ont une analogie remarquable; elles prouvent cependant l'erreur de Flamsteed, qui voulait expliquer par la parallaxe les effets de l'aberration; en effet, on voit que l'aberration sera nulle quand la parallaxe sera au *maximum*, et réciproquement.

30. Supposons $\varpi = a$, c'est-à-dire une étoile qui aurait 20″ de parallaxe; les mêmes tables serviraient à trouver l'aberration et la parallaxe; si elles sont calculées pour l'aberration, il suffira d'ajouter 90° au lieu du soleil; car

$$-\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos(E-\odot-90^\circ) = -\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos[90^\circ-(E-\odot)]$$
$$= -\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\sin(E-\odot) = -\left(\frac{\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(E-\odot);$$

voilà pour la parallaxe en longitude; pour l'autre, nous aurons

$$+a\sin\lambda\sin(E-\odot-90^\circ) = -a\sin\lambda\sin[90^\circ-(E-\odot)]$$
$$= -a\sin\lambda\cos(E-\odot) = -\varpi\sin\lambda\cos(E-\odot).$$

31. Ce que nous disons des parallaxes de longitude et de latitude, s'étendra de même à celles d'ascension droite et de déclinaison; il suffira d'ajouter 90° au lieu du soleil, dans les formules d'aberration, pour avoir les formules de parallaxes. Ainsi

$$\Pi = -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)[\cos\omega\cos A\!\!R\cos(\odot+90^\circ) + \sin A\!\!R\sin(\odot+90^\circ)]$$
$$= -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)(-\cos\omega\cos A\!\!R\sin\odot + \sin A\!\!R\cos\odot)$$
$$= -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)\left[-\frac{\cos\omega}{2}\sin(A\!\!R+\odot) + \frac{\cos\omega}{2}.\sin(A\!\!R-\odot)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\sin(A\!\!R+\odot) + \tfrac{1}{2}\sin(A\!\!R-\odot)\right]$$
$$= -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)\left[\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)\sin(A\!\!R+\odot)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\sin(A\!\!R-\odot)\right]$$

$$= -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)[\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\sin(\text{Æ}+\odot)+\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\sin(\text{Æ}-\odot)]$$

$$= -\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)[0.0415\sin(\text{Æ}+\odot)+0.9585\sin(\text{Æ}-\odot)],$$

$$\varpi = \varpi\sin D[\cos\omega\sin\text{Æ}\cos(\odot+90^\circ)-\cos\text{Æ}\sin(\odot+90^\circ)]$$
$$-\varpi\sin\omega\cos D\cos(\odot+90^\circ)$$
$$= \varpi\sin D(-\cos\omega\sin\text{Æ}\sin\odot-\cos\text{Æ}\cos\odot)+\varpi\sin\omega\cos D\sin\odot$$
$$= -\varpi\sin D(\cos\omega\sin\text{Æ}\sin\odot+\cos\text{Æ}\cos\odot)+\varpi\sin\omega\cos D\sin\odot$$
$$= -\varpi\sin D\left[\begin{array}{l}\frac{\cos\omega}{2}[\cos(\text{Æ}-\odot)-\cos(\text{Æ}+\odot)]\\ +\frac{1}{2}\cos(\text{Æ}-\odot)+\frac{1}{2}\cos(\text{Æ}+\odot)\end{array}\right]+\text{etc.}$$
$$= -\varpi\sin D\left[\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\cos(\text{Æ}-\odot)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)\cos(\text{Æ}+\odot)\right]+\text{etc.}$$
$$= -\varpi\sin D[\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\cos(\text{Æ}-\odot)+\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\cos(\text{Æ}+\odot)]+\text{etc.}$$
$$= -\varpi\sin D[0.9585\cos(\text{Æ}-\odot)+0.0415\cos(\text{Æ}+\odot)]$$
$$+0.3982\,\omega\cos D\sin\odot.$$

J'ai trouvé la même chose par les formules (XVI. 59), en observant que P devient ici ϖ, que $H=0$, que ♀ se change en Æ, M en ♄ $=180^\circ+\odot$, G en λ, et que ω est un arc négatif, par la raison qu'ici nous revenons de l'écliptique à l'équateur, au lieu de monter de l'équateur à l'écliptique, ce qui force à changer le signe de $\sin\omega$. De cette manière nous aurions de plus

$$+\frac{\tang^2\frac{1}{2}\Pi\sin 2\lambda}{\sin 1''}+\frac{\tang^4\frac{1}{4}\Pi\sin 4\lambda}{\sin 2''}+\text{etc.},$$

mais ces termes sont insensibles.

32. On voit que les termes dépendans de (Æ—⊙) seront les plus importans et probablement les seuls qui soient sensibles, surtout si l'on choisit des étoiles à grande déclinaison, qui sont les seules qui puissent avoir une parallaxe un peu sensible en déclinaison. Jusqu'ici tous les efforts des astronomes ont été inutiles pour constater la parallaxe des

étoiles. On a soupçonné une parallaxe de 3 à 5″ à la Lyre, qui a 38° 37′ de déclinaison, et à certaines étoiles de Cassiopée, dont les déclinaisons sont de 60° environ. Bradley n'en a trouvé aucune aux étoiles dont il s'est servi pour l'aberration; je n'en ai trouvé aucune ni à la polaire, ni à β de la petite Ourse, ni à α du Dragon, qui ont servi à mesurer le méridien terrestre. Au reste, nos formules indiquent d'elles-mêmes les circonstances qu'il faut choisir pour observer les effets les plus sensibles de la parallaxe, et pour les avoir en deux sens opposés, ce qui les doublera.

LEÇON XX.

De la nutation.

1. Après avoir expliqué d'une manière si heureuse les mouvemens irréguliers des étoiles, Bradley sentit la nécessité de constater son ingénieuse théorie par une longue suite d'observations. Il eut la satisfaction de voir un accord constant entre les phénomènes et les règles qu'il s'était faites pour les calculer; mais il ne tarda guère à s'apercevoir que l'aberration n'était pas la seule cause qui pût altérer la position des étoiles. Il en découvrit une autre dont les effets, de moitié moins sensibles, suivaient une marche beaucoup plus lente.

Les déclinaisons des étoiles augmentaient ou diminuaient progressivement d'une quantité qui pouvait aller à 9″ en plus ou en moins, et dont la période lui parut de 18 ans. En remarquant que l'aberration avait une période d'un an, il fut conduit à l'idée qu'elle dépendait du mouvement de la terre; en observant que la nouvelle inégalité revenait la même au bout de 18 ans, il dut penser aussitôt à la révolution des nœuds de la lune, qui s'accomplit en 18 ans, par un mouvement rétrograde.

2. Newton avait parlé de cette inégalité, qu'il appela *nutation* ou *balancement*, et dont l'argument devait être en effet la longitude du nœud de la lune. La cause de ce balancement est l'attraction de la lune sur le sphéroïde elliptique de la terre, attraction qui doit avoir des effets différens, suivant la position variable de la lune, par rapport à l'écliptique et à l'équateur terrestre. L'analyse n'était pas encore assez avancée pour que Newton pût calculer ces variations; Flamsteed avait désespéré d'en déterminer la quantité avec les instrumens qu'on avait alors; Roemer en avait promis une théorie fondée sur les observations, mais elle n'a jamais paru.

3. Soit ♈E♎ (fig. 135) l'équateur, ♈C♎ l'écliptique, PCE le colure des solstices, et P le pôle. En 1727, le nœud de l'orbite lunaire était en ♈ à 0° de longitude, le nœud descendant était en ♎ à 180°, et l'orbite de la lune avait la position ♈L♎. Bradley remarqua que le pôle P était descendu en A; ensorte que l'équateur était descendu en E′, et que les déclinaisons des étoiles placées sur le colure AE′ étaient augmentées de 9″, tandis que les déclinaisons des étoiles qui étaient sur le prolongement de l'arc E′A avaient diminué de 9″. Il en résultait encore que l'obliquité de l'écliptique avait augmenté de 9″.

A mesure que le nœud de la lune rétrogradait de 0ˢ à 9ˢ, il voyait les déclinaisons varier comme si le pôle se relevait de A vers P; et quand le nœud fut en 9ˢ, le pôle avait repris sa position primitive, ou plutôt il était parvenu de A en B, car les étoiles placées vers 9ˢ avaient reçu une augmentation de 9″ dans leurs déclinaisons; celles qui étaient dans la partie opposée avaient diminué d'autant.

Quand le nœud fut dans la Balance, en 1736, le pôle paraissait monté en C, ensorte que PC = 9″ = PA; enfin quand le pôle fut revenu en ♈, tous les phénomènes se remontrèrent dans le même ordre que pendant la première période.

4. Pour satisfaire à toutes les observations, il fallait que

le pôle décrivît autour du lieu moyen P un petit cercle d'un rayon de 9″; il supposa donc qu'il rétrogradait de A en B, D, P, O, A, se trouvant toujours plus avancé de 90° sur son petit cercle que le nœud de la lune sur l'écliptique, ensorte que l'angle ☊PA, qui était de 90° en 1727, conservait toujours la même valeur.

5. Supposons le nœud de la lune dans le premier quart (fig. 136), le pôle sera en O; BAO = 90° + ☊, et AO = longit. ☊. Menons PO et prolongeons cet arc jusqu'à l'équateur en a; l'angle Pa♈ = 90°, et l'arc ♈a = 90° + ☊; prenons aI = 90°, I sera le pôle de Pa et ♈I = longit. ☊; prolongeons Oa en b, de sorte que Ob = 90° et ab = PO; menons l'arc de grand cercle bE′I♈′, ce sera la position de l'équateur quand le pôle est en O; bI = 90° et I = ab = 9″ = PO; le point ♈′ sera l'intersection actuelle de l'équateur mobile bI avec l'écliptique immobile ♈C♎; l'angle C♈′b, l'obliquité actuelle de l'écliptique, l'arc ♈♈′ le déplacement du point équinoxial, ou la quantité dont toutes les longitudes seront diminuées.

6. Dans le triangle ♈♈′I nous aurons l'angle ♈ = ω, l'angle I = 9″ et le côté ♈I = ☊;

$$\cos \Upsilon\Upsilon'\mathrm{I} = \cos \Upsilon\mathrm{I} \sin \Upsilon \sin \mathrm{I} - \cos \Upsilon \cos \mathrm{I},$$

ou

$$\cos \mathrm{C}\Upsilon'\mathrm{I} = \cos \omega' = -\cos \Omega \sin \omega \sin 9'' + \cos \omega \cos 9'',$$

ou

$$\cos \omega \cos 9'' - \cos \omega' = \sin 9'' \sin \omega \cos \Omega,$$

$$\cos \omega - \cos \omega' = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) \sin \tfrac{1}{2}(\omega' + \omega)$$
$$= \sin 9'' \sin \omega \cos \Omega + 2 \sin^2 4'',5 \cos \omega,$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) = \frac{\sin 9'' \sin \omega \cos \Omega + 2 \cos \omega \sin^2 4'',5}{\sin \frac{1}{2}(\omega' + \omega)},$$

et sans erreur sensible, $\omega' - \omega = +9'' \cos \Omega$; c'est la variation d'obliquité.

7. On a encore dans le même triangle,

$$\text{tang}\,\Upsilon'\mathrm{I} = \text{tang}\,\Omega' = \frac{\sin\Omega}{\sin 9''\cot\omega + \cos\Omega\cos 9''}$$

$$= \frac{\text{tang}\,\Omega}{\cos 9''\left(1 + \frac{\text{tang}\,9''\cot\omega}{\cos\Omega}\right)} = \frac{\text{tang}\,\Omega}{\cos 9''}\left(1 - \frac{\text{tang}\,9''\cot\omega}{\cos\Omega}\right)$$

$$= \text{tang}\,\Omega + \tfrac{1}{2}\text{tang}^2 9''\,\text{tang}\,\Omega - \frac{\text{tang}\,9''\cot\omega\,\text{tang}\,\Omega}{\cos\Omega},$$

$$\text{tang}\,\Omega - \text{tang}\,\Omega' = \frac{\text{tang}\,9''\cot\omega\,\text{tang}\,\Omega}{\cos\Omega} - \tfrac{1}{2}\,\text{tang}^2\,\text{tang}\,\Omega,$$

$$\sin(\Omega - \Omega') = \text{tang}\,9''\cot\omega\sin\Omega\left(\frac{\cos\Omega'}{\cos\Omega}\right) - \tfrac{1}{2}\text{tang}^2 9''\sin\Omega\cos\Omega',$$

et

$$(\Omega - \Omega') = 9''\cot\omega\,\sin\Omega = \text{correct. des asc. dr.}$$

8. Enfin

$$\text{tang}\,\Upsilon\Upsilon' = \frac{\sin\Omega}{\sin\omega\cot 9'' + \cos\omega\cos\Omega} = \frac{\text{tang}\,9''\sin\Omega}{\sin\omega + \text{tang}\,9''\cos\omega\cos\Omega}$$

$$= \frac{\text{tang}\,9''\sin\Omega}{\sin\omega}\,(1 - \text{tang}\,9''\cot\omega\cos\Omega)$$

$$= \frac{\text{tang}\,9''\sin\Omega}{\sin\omega} - \frac{\text{tang}^2 9''\cot\omega\sin\Omega\cos\Omega}{\sin\omega},$$

ou

$$\Upsilon\Upsilon' = \text{correct. des longitudes} = -\frac{9''\sin\Omega}{\sin\omega}.$$

9. On a donc sans erreur sensible,

correction d'obliquité $= 9''\cos\Omega = \mathrm{PO}\cos\Omega$,
correct. des points équinox. sur l'équat. $= -9''\cot\omega\sin\Omega$
$= -\mathrm{PO}\cot\omega\sin\Omega$.
correct. des points équinox. sur l'éclipt. $= -9''\text{cosec}\,\omega\sin\Omega$.

Ce sont les formules connues, démontrées de manière à faire voir ce qu'on néglige.

Ces corrections sont générales, la seconde s'applique à toutes les ascensions droites, la troisième à toutes les longitudes sans exception.

10. Soit maintenant une étoile quelconque S (fig. 136); menons les cercles de déclinaison PS*h*N, OS*n*H; les angles

h et H sont droits; on aura $\tang nh = \sin Sh \tang S = \sin D \tang S$, $\tang NH = \sin SH \tang S = \sin D' \tang S$; mais le triangle PSO donne

$$\begin{aligned}
\tang S &= \frac{\sin OPS}{\sin PS \cot PO - \cos PS \cos OPS} \\
&= \frac{\tang PO \sin OPS}{\sin PS - \tang PO \cos PS \cos OPS} \\
&= \frac{\tang PO}{\sin PS}\left(\frac{\sin OPS}{1 - \tang PO \cot PS \cos OPS}\right) \\
&= \frac{\tang PO}{\cos D}\left(\frac{\sin (90^\circ - Ih)}{1 - \tang PO \tang D \cos (90^\circ - Ih)}\right) \\
&= \frac{\tang PO \cos Ih}{\cos D}(1 + \tang PO \tang D \sin Ih),
\end{aligned}$$

ou

$$\tang S = \frac{\tang PO \cos (\text{Æ} - \text{☊})}{\cos D};$$

donc

$$\tang nh = \frac{\sin D}{\cos D} . \tang PO \cos (\text{Æ} - \text{☊}),$$

ou

$$nh = PO \tang D \cos (\text{Æ} - \text{☊}).$$

C'est la correction d'ascension particulière à chaque étoile; on voit qu'elle est soustractive. On a de même

$$NH = \frac{PO \sin D'}{\cos D} \cos (\text{Æ}' - \text{☊}');$$

on s'en tient à la première expression.

11. Enfin

$$\begin{aligned}
\cos OS = \sin D' &= \cos OPS \sin PO \sin PS + \cos PO \cos PS \\
&= \sin PO \cos D \sin (\text{Æ} - \text{☊}) + \cos PO \sin D,
\end{aligned}$$

$$\sin D' - \sin D + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} PO \sin D = \sin PO \cos D \sin (\text{Æ} - \text{☊}),$$

$$2\sin \tfrac{1}{2}(D' - D) = \frac{\sin PO \cos D \sin (\text{Æ} - \text{☊}) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} PO \sin D}{\cos \tfrac{1}{2}(D' + D)},$$

ou

$$(D' - D) = PO \sin (\text{Æ} - \text{☊});$$

c'est la correction de déclinaison.

12. On a donc pour la correction totale ou la nutation en ascension droite,

$$-\mathrm{PO}\cot\omega\sin\Omega - \mathrm{PO}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{D}\cos(\mathrm{AR}-\Omega),$$

et pour la correction de déclinaison $+\mathrm{PO}\sin(\mathrm{AR}-\Omega)$, le signe $+$ indique que la nutation rapproche l'étoile du pôle nord.

Ces formules ont une analogie remarquable avec les formules de précession en ascension droite et en déclinaison; en effet la nutation n'est qu'une variation, une espèce de différentielle des formules de précession, et nous voyons que les sinus se changent en cosinus, et réciproquement, comme dans la différentiation.

13. Ces formules satisfaisaient passablement aux observations de Bradley; mais il remarquait lui-même que l'accord était encore plus parfait quand il changeait le petit cercle en ellipse dont les demi-axes étaient de 9″ et 8″; en ramenant les phénomènes de la nutation au principe de l'attraction, d'Alembert a démontré que si le demi-grand axe est 9″, le demi-petit axe sera $\frac{9''\cos 2\omega}{\cos\omega} = 6'',7$. Mayer faisait le grand axe de 9″,66; Maskelyne, 9″,55; M. Laplace, 9″,58; on ne se trompera guère en supposant 9″,6.

14. L'ellipse LDA (fig. 137) sera la projection du cercle LOA; le point O aura sa projection en a, PO deviendra

$$\mathrm{P}a = \frac{\mathrm{PO}\sin\mathrm{PO}a}{\sin\mathrm{P}a\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{PO}\cos\mathrm{APO}}{\cos\mathrm{AP}a} = \frac{m\cos\Omega}{\cos\Omega'};$$

devient

$$ab = \frac{\mathrm{O}b.\mathrm{PD}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{PO}\sin\mathrm{APO}.\mathrm{PD}}{\mathrm{PO}} = \mathrm{PD}\sin\Omega = n\sin\Omega;$$

nous désignerons par m et n les deux demi-axes de l'ellipse;

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{AP}a = \frac{ab}{\mathrm{P}b} = \frac{n\sin\Omega}{m\cos\Omega}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{tang}\,\Omega' = \left(\frac{n}{m}\right)\mathrm{tang}\,\Omega;$$

substituons ces quantités dans nos formules.

15. PO $\cos \Omega$ deviendra

$$Pa \cos \Omega' = \frac{m \cos \Omega \cos \Omega'}{\cos \Omega'} = m \cos \Omega = \text{correct. obliquité ;}$$

$$\text{correct. longit.} = -\frac{PO \sin \Omega}{\sin \omega} \text{ devient } -\frac{Pa \sin \Omega'}{\sin \omega'}$$

$$= -\frac{m \cos \Omega \sin \Omega'}{\cos \Omega' \sin \omega'} = -\frac{m \cos \Omega}{\sin \omega'} \operatorname{tang} \Omega'$$

$$= -\frac{m \cos \Omega}{\sin \omega'} \cdot \frac{n}{m} \operatorname{tang} \Omega = -\frac{n \sin \Omega}{\sin \omega'},$$

expression tout aussi simple.

$$\begin{aligned}
\text{Corr. asc. dr.} &= -PO \cot\omega \sin \Omega - PO \operatorname{tang} D' \cos(\mathcal{A}R - \Omega) \\
&= -Pa \cot\omega' \sin \Omega' - Pa \operatorname{tang} D' \cos(\mathcal{A}R' - \Omega') \\
&= -\frac{PO \cot \omega' \sin \Omega' \cos \Omega}{\cos \Omega'} \\
&\quad - PO \operatorname{tang} D' \frac{\cos \Omega}{\cos \Omega'} (\cos \mathcal{A}R' \cos \Omega' + \sin \mathcal{A}R' \sin \Omega') \\
&= -m \cot\omega' \cos \Omega \operatorname{tang} \Omega' - m \operatorname{tang} D' \cos \Omega \cos \mathcal{A}R' \\
&\quad - m \operatorname{tang} D' \cos \Omega \sin \mathcal{A}R' \operatorname{tang} \Omega' \\
&= -m \cot \omega' \cos \Omega \cdot \frac{n}{m} \operatorname{tang} \Omega \\
&\quad - m \operatorname{tang} D' \cos \Omega \cos \mathcal{A}R' \\
&\quad - m \operatorname{tang} D' \cos \Omega \sin \mathcal{A}R' \frac{n}{m} \operatorname{tang} \Omega \\
&= -n \cot \omega' \sin \Omega - m \operatorname{tang} D' \cos \mathcal{A}R' \cos \Omega \\
&\quad - n \operatorname{tang} D' \sin \mathcal{A}R' \sin \Omega \\
&= -n \cot \omega' \sin \Omega \\
&\quad - m \operatorname{tang} D' \left(\frac{\cos(\mathcal{A}R' - \Omega) + \cos(\mathcal{A}R' + \Omega)}{2} \right) \\
&\quad - n \operatorname{tang} D' \left(\frac{\cos(\mathcal{A}R' - \Omega) - \cos(\mathcal{A}R' + \Omega)}{2} \right) \\
&= -n \cot \omega' \sin \Omega \\
&\quad - \operatorname{tang} D' \left[\left(\frac{m+n}{2} \right) \cos(\mathcal{A}R - \Omega) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{m-n}{2} \right) \cos(\mathcal{A}R' + \Omega) \right].
\end{aligned}$$

16. La correction de déclinaison PO $\sin(\text{Æ} - \Omega)$ devient $Pa \sin(\text{Æ}' - \Omega')$, ou

$$\frac{m \cos \Omega}{\cos \Omega'} (\sin \text{Æ}' \cos \Omega' - \cos \text{Æ}' \sin \Omega') = m \cos \Omega \sin \text{Æ}'$$
$$- m \cos \Omega \cos \text{Æ}' \operatorname{tang} \Omega' = m \cos \Omega \cos \text{Æ}' - n \sin \Omega \cos \text{Æ}'$$
$$= \tfrac{1}{2} m [\sin(\text{Æ} + \Omega) + \sin(\text{Æ} - \Omega)] - \tfrac{1}{2} n [\sin(\text{Æ}' + \Omega)$$
$$- \sin(\text{Æ}' - \Omega)] = \tfrac{1}{2}(m - n) \sin(\text{Æ}' + \Omega) - \tfrac{1}{2}(m + n) \sin(\text{Æ}' - \Omega).$$

Ces formules élégantes sont de Lambert; elles se renferment dans de petites tables avec lesquelles nos petites tables d'aberration ont beaucoup d'analogie.

En adoptant 9″,6 pour le demi-grand axe, je trouve les quantités suivantes :

$$d\omega = + 9''6 \cos \Omega, \qquad d\Upsilon = - 17'',946 \sin \Omega,$$
$$d\Upsilon' = - 16'',462 \sin \Omega, \quad d\Upsilon - d\Upsilon' = - 1'',484 \sin \Omega,$$
$$d\text{Æ} = [- 8'',3732 \cos(\text{Æ} - \Omega) - 1'',2268 \cos(\text{Æ} + \Omega)] \operatorname{tang} D,$$
$$dD = + 8'',3732 \sin(\text{Æ} - \Omega) + 1'',2268 \sin(\text{Æ} + \Omega).$$

17. On voit que la nutation en déclinaison est indépendante de la déclinaison, et que les étoiles qui ont une même ascension droite ont une même nutation en déclinaison.

La correction $d\Upsilon'$ est commune à toutes les étoiles; en la négligeant pour toutes on aurait des différences exactes d'ascension droite, et les ascensions droites absolues seraient rapportées à l'équinoxe moyen. La correction $d\text{Æ}$ est différente; mais pour les étoiles zodiacales, tang D étant une fraction, et les coefficiens constans étant peu de chose, les différences d'ascensions droites ne seront affectées que d'une erreur légère, ainsi le catalogue que nous avons formé (VII) était passablement exact, surtout par le soin qu'on a dû prendre de fixer la position de chaque étoile, par la comparaison avec plusieurs étoiles précédentes et suivantes. Les catalogues anciens qui ont été faits avant la découverte de l'aberration et de la nutation, n'avaient donc à cet égard que des erreurs légères, surtout s'ils étaient le résultat d'un grand nombre d'observations. Mais aujourd'hui, ayant de

mettre une étoile dans un catalogue, on la corrige des effets de l'aberration et de la nutation ; cette attention est indispensable, quand on cherche une grande précision ; elle contribue puissamment à l'accord des observations entr'elles. On ne peut donc la négliger, elle rend plus pénibles les réductions des observations, mais les astronomes ont fait des tables de plusieurs espèces, pour abréger ces calculs.

18. L'aberration et la nutation affectent les lieux des planètes. L'observation ne peut donner que le lieu apparent. D'après l'ascension droite et la déclinaison observée, calculez la longitude et la latitude, en y employant l'équinoxe apparent et l'obliquité apparente, vous aurez la position de la planète rapportée à l'écliptique vraie, qui est immobile ; mais la longitude sera comptée de l'équinoxe apparent. Ajoutez-y $17'',946 \sin ☊$, elle sera comptée de l'équinoxe moyen. Ainsi vous aurez éludé l'effet de la nutation ; il ne restera qu'à calculer l'aberration de la planète en longitude et en latitude, par la formule que nous avons donnée (XIX. 8), mais en changeant les signes, parce qu'il s'agit ici de convertir un lieu apparent en un lieu vrai. Il y a plusieurs manières d'atteindre le même but ; celle-ci me paraît la plus simple.

LEÇON XXI.

Des Comètes.

1. Les comètes sont des planètes qui se meuvent dans des orbites très-excentriques et qui ne deviennent visibles pour nous que vers leurs passages par leur périhélie. La rapidité de leurs mouvemens les emporte bientôt à des distances où il ne nous est plus possible de les apercevoir ; car ces planètes sont fort petites, et d'ailleurs elles sont enveloppées d'une nébulosité, sorte d'atmosphère épaisse qui les rend peu propres

à réfléchir la lumière, ensorte que pour la plupart elles sont télescopiques.

2. On les appelle *comètes*, c'est-à-dire, *astres chevelus;* cette atmosphère ou chevelure prend par fois diverses figures et leur a fait donner par les anciens différens noms que l'on peut voir dans Pline, livre II, chap. 25.

3. Quand les ellipses sont fort excentriques, les formules sont très-incommodes et perdent beaucoup de leur précision dans la pratique; il a fallu les disposer d'une manière différente.

L'équation astronomique de l'ellipse est $V = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos u}$ $= \frac{(a+e)(a-e)}{a+e\cos u}$; soit $h = a - e$ la distance périhélie; $e = a - h$; $a + e = 2a - h$, et la formule devient

$$V = \frac{(2a-h)h}{a+(a-h)\cos u} = \frac{(2a-h)h}{a+a\cos u - h\cos u}$$

$$= \frac{(2a-h)h}{2a\cos^2\frac{1}{2}u - h\left(\frac{1-\tang^2\frac{1}{2}u}{1+\tang^2\frac{1}{2}u}\right)} = \frac{(2a-h)h}{2a\cos^2\frac{1}{2}u - h\cos^2\frac{1}{2}u(1-\tang^2\frac{1}{2}u)}$$

$$= \frac{(2a-h)\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{2a-h+h\tang^2\frac{1}{2}u} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left[1+\left(\frac{h}{2a-h}\right)\tang^2\frac{1}{2}u\right]}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left[1+\left(\frac{m}{2-m}\right)\tang^2\frac{1}{2}u\right]}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left[1+\left(\frac{1-\sin\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}\right)\tang^2\frac{1}{2}u\right]}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\,(1+\tang^2\frac{1}{2}x)} = \frac{h\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u}.$$

x est l'anomalie excentrique qui, dans les ellipses des comètes, est toujours fort petite en comparaison de u, et qui même serait nulle si l'on supposait $\sin\varepsilon = 1$, ou l'excentricité

égale au demi-grand axe. Ainsi $\cos^2 \frac{1}{2} x$ différant peu de l'unité, on aura par approximation, $V = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$, après quoi, pour en déduire la vraie valeur, il suffira de la multiplier par $\cos^2 \frac{1}{2} x$.

$$4.\quad z = x - \sin\varepsilon \sin x = x - \left(\frac{a-h}{a}\right) \sin x$$

$$= x - (1-m) \sin x = \frac{ct}{a^{\frac{3}{2}}} \text{ (X. 53)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} x = \left(\frac{1-\sin\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tang \tfrac{1}{2} u = \left(\frac{m}{2-m}\right)^{\frac{1}{2}} \tang \tfrac{1}{2} u,$$

$$\tfrac{1}{2} z = \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{2} (1-m) \sin x,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} z = \tang \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{5} \tang^5 \tfrac{1}{2} x - \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2} (1-m) \frac{2 \tang \frac{1}{2} x}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} x}$$
$$= m \tang \tfrac{1}{2} x + (\tfrac{2}{3} - m) \tang^3 \tfrac{1}{2} x - (\tfrac{4}{5} - m) \tang^5 \tfrac{1}{2} x$$
$$+ (\tfrac{6}{7} - m) \tang^7 \tfrac{1}{2} x - \text{etc.},$$

et

$$t = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{c} \tang \tfrac{1}{2} x [m + (\tfrac{2}{3} - m) \tang^2 \tfrac{1}{2} x - (\tfrac{4}{5} - m) \tang^4 \tfrac{1}{2} x$$
$$+ (\tfrac{6}{7} - m) \tang^6 \tfrac{1}{2} x - \text{etc.}].$$

Cette équation sera toujours convergente; portons-y la valeur de $\tang \frac{1}{2} x$;

$$t = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{c} \left(\frac{m}{2m-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tang \tfrac{1}{2} u \left[m + (\tfrac{2}{3} - m)\left(\frac{m}{2m-1}\right) \tang^2 \tfrac{1}{2} u \right.$$
$$\left. - (\tfrac{4}{5} - m) \left(\frac{m}{2m-1}\right)^2 \tang^4 \tfrac{1}{2} u + \text{etc.} \right].$$

Développons les puissances de $\left(\frac{m}{2m-1}\right)$, etc. jusqu'aux m^2, nous aurons, après les réductions,

$$t = \frac{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}}{c} (\tang \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} u)$$

$$+ \frac{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}}{c} (\tfrac{1}{4} m \tang \tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{4} m \tang^3 \tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{5} m \tang^5 \tfrac{1}{2} u)$$

$$+ \frac{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}}{c} (\tfrac{3}{32} m^2 \tang \tfrac{1}{2} u - \tfrac{7}{32} m^2 \tang^3 \tfrac{1}{2} u + \tfrac{3}{28} m^2 \tang^5 \tfrac{1}{2} u).$$

5. La première partie de cette expression est indépendante de m, la seconde n'en renferme que la première puissance, la troisième dépend du carré; on peut négliger les puissances supérieures. On voit que si $m = \frac{a}{h}$ est une quantité très-petite, la première donnera une valeur fort approchée du tems par l'anomalie vraie, et de l'anomalie vraie par le tems; mais l'anomalie étant donnée, on aura pour le tems une quantité trop petite, et le tems étant connu, on en déduirait une anomalie trop grande, à moins que $\frac{1}{2} u$ ne surpassât 45°. L'erreur sera d'autant moindre que l'ellipse sera plus alongée.

6. Si m est insensible, on a pour calculer la marche des comètes, les équations fort simples $V = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$, et

$$\tang \tfrac{1}{2} u + \tfrac{1}{3} \tang^3 \tfrac{1}{2} u = \frac{ct}{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}} = \frac{360°}{A} \cdot \frac{t}{2^{\frac{1}{2}} h^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi t}{2^{\frac{1}{2}} . A h^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \pi t}{A h^{\frac{3}{2}}};$$

A est la durée de l'année sidérale de la terre (XIII. 18).

7. Supposons qu'on ait déterminé l'anomalie par la formule

$$\frac{\pi t \sqrt{2}}{A h^{\frac{3}{2}}} = \tang \tfrac{1}{2} u' + \tfrac{1}{3} \tang^3 u',$$

tandis que l'anomalie véritable pour l'ellipse est

$$\frac{\pi t\sqrt{2}}{Ah^{\frac{3}{2}}} = \tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u + (\tfrac{1}{4}m\tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}m\tang^3\tfrac{1}{2}u$$
$$- \tfrac{1}{5}m\tang^5\tfrac{1}{2}u + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

J'ai trouvé, par la comparaison de ces deux équations,

$$\tfrac{1}{2}\sin(u'-u) = \tfrac{1}{4}m\tang\tfrac{1}{2}u\,(\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u' - \sin^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u'$$
$$- \tfrac{4}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}u),$$

et si l'on néglige la différence entre $\cos^2\frac{1}{2}u'$ et $\cos^2\frac{1}{2}u$,

$$\tfrac{1}{2}\sin(u'-u) = m\tang\tfrac{1}{2}u\,(0,3\cos^4\tfrac{1}{2}u + 0,15\cos^2\tfrac{1}{2}u - 0,2),$$

ou

$$\sin(u'-u) = -m\tang\tfrac{1}{2}u\,(0,4 - 0,3\cos^2\tfrac{1}{2}u - 0,6\cos^4\tfrac{1}{2}u).$$

C'est l'équation de M. Laplace; c'est, sous une autre forme, l'équation de Simpson (*Miscellaneous tracts*, *p.* 59); elle donne à fort peu près l'erreur de notre formule approximative.

8. Pour que nos équations (6) fussent rigoureusement exactes, il faudrait que $m = \frac{h}{a}$ fût tout-à-fait nulle, ce qui suppose infini le demi-grand axe a, et que l'ellipse dégénérât en parabole; et en effet tous les auteurs prouvent que la parabole donne nos deux équations; ainsi depuis Newton et Halley, tous les astronomes ont employé la parabole, comme approximation, pour calculer la route d'une comète à son apparition, et cette hypothèse s'est presque toujours trouvée suffisante. Nous aurons

$$t = \frac{Ah^{\frac{3}{2}}}{\pi\sqrt{2}}(\tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u).$$

Supposons, pour plus de simplicité, $h = 1$, $h^{\frac{3}{2}} = 1$, nous aurons $t' = \frac{A}{\pi\sqrt{2}}(\tang\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}u)$.

9. Soit $u = 45^\circ$, $\tang\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}u = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; le tems qui répondra à $u = 90^\circ$ sera donc

$$t' = \frac{4A}{3\pi\sqrt{2}} = \frac{A}{\pi}\sqrt{\frac{8}{9}} = 109^j,6154;$$

ainsi la comète qui aurait 1 de distance périhélie emploierait $109^j,6154$ à décrire les 90° d'anomalie qui s'étendent du paramètre au périgée; son rayon vecteur décrirait en ce tems le secteur de 90°. Cette comète est souvent désignée sous le nom de *comète de* 109 *jours*.

10. Les tems sont proportionnels aux secteurs; on aura donc toujours cette analogie :

$$109^j,6154 : \tfrac{4}{3} :: t' : (\tfrac{1}{3}\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + \text{tang}\tfrac{1}{2}u),$$

et

$$\begin{aligned} t' &= \tfrac{3}{4}(109^j,6154)(\tfrac{1}{3}\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + \text{tang}\tfrac{1}{2}u) \\ &= \tfrac{1}{4}(109^j,6154)(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\text{tang}\tfrac{1}{2}u) \\ &= 27^j,40385\,(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\text{tang}\tfrac{1}{2}u)\,; \end{aligned}$$

ainsi l'anomalie u étant donnée, il sera toujours facile de calculer le tems qui répond à cette anomalie.

Si c'est le tems qui est connu, il n'est pas aussi simple d'en conclure l'anomalie, puisque l'équation est du troisième degré; mais soit $\text{tang}\,B = \frac{54^j,2077h^{\frac{3}{2}}}{t}$; $\text{tang}\,A = \sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}B}$; alors $\text{tang}\,\frac{1}{2}u = 2\cot 2A$. Voyez la Trigonométrie de Cagnoli.

11. On peut ainsi calculer une table des anomalies u pour tous les jours ou fractions de jour, en supposant $h = 1$. Cette table servira pour toutes les comètes. En effet, soit θ le tems du passage de la comète par son périhélie, θ' le tems pour lequel on cherche l'anomalie. Faites $t' = \frac{\theta' - \theta}{h^{\frac{3}{2}}}$, vous aurez le tems t' qu'il faudrait à la comète pour arriver du périhélie à la même anomalie; si $\theta' - \theta$ est une quantité négative, c'est que la comète ne sera pas encore parvenue au périhélie, t' sera négatif, ainsi que l'anomalie u trouvée par la table.

Supposez au contraire que l'anomalie u soit donnée, vous trouverez à côté de u, dans la table, le tems t' de la comète

de 109 jours; vous multiplierez t' par $h^{\frac{2}{3}}$, et vous aurez le tems $t = t'h^{\frac{3}{2}}$ de votre comète; si h est une fraction, la comète ira plus vite, le tems t sera $< t'$; si t' surpasse l'unité, t sera $> t'$, parce que la comète ira plus lentement.

Pour se démontrer ces deux procédés, il suffit de se rappeler l'équation générale

$$\frac{t'}{1} = \frac{t}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{\pi\sqrt{2}}(\tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u) = C(\tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u);$$

la table, avec l'anomalie u, donne t', tems de la comète de 109 $= \frac{t}{h^{\frac{3}{2}}}$; multipliez tout par $h^{\frac{3}{2}}$, vous aurez

$$t'h^{\frac{3}{2}} = t = \frac{Ah^{\frac{3}{2}}}{\pi\sqrt{2}}(\tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u);$$

avez-vous le tems t? divisez tout par $h^{\frac{3}{2}}$, vous aurez

$$t' = \frac{t}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{\pi\sqrt{2}}(\tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u).$$

12. Les équations (10) sont exactes, sans être trop incommodes; mais pour une table un peu étendue, on calcule ces termes de distance en distance, comme de 20 en 20 jours, plus ou moins, et l'on interpole les autres, en différentiant l'équation $t' = C(\tang\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}\tang^3\frac{1}{2}u)$, qui donne

$$dt' = \frac{Cd\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u} + \frac{\frac{3}{2}C\tang^2\frac{1}{2}u\,d\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{Cd\frac{1}{2}u(1+\tang^2\frac{1}{2}u)}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{Cd\frac{1}{2}u}{\cos^4\frac{1}{2}u};$$

d'où

$$d\tfrac{1}{2}u = \frac{dt'\cos^4\frac{1}{2}u}{C},$$

ou

$$du = \frac{dt'\cos^4\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}C} = \frac{dt'\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}{41.105775\sin 1''}.$$

Soit $u = 0$, pour avoir le premier terme de la table,

$du = \frac{dt' \cos^2 \frac{1}{2} du}{41.105775 \sin 1''}$; supposez d'abord $\cos^2 \frac{1}{2} du = 1$, vous aurez la valeur très-approchée $du = \frac{dt'}{41.105775 \sin 1''}$, avec laquelle vous cherchez $\cos^2 \frac{1}{2} du$, pour recommencer le calcul. C'est ainsi que j'ai calculé la table générale avec plus d'étendue et de précision.

La table vous offrira rarement la quantité que vous cherchez; mais vous la déterminerez aisément par des parties proportionnelles.

Quand vous aurez u vous calculerez aisément $\frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$.

On a donné diverses formes à la table générale des comètes. J'ai choisi celle qui m'a paru d'un usage plus commode et plus général; elle est aussi la plus facile à calculer avec précision.

13. Quand on connaît les élémens d'une comète, avec sa distance périhélie et le tems du passage, on peut calculer en tout tems son anomalie; à cette anomalie ajoutez le passage au périhélie, vous aurez la longitude $= \Pi + u$; si l'anomalie est négative, on a la longitude $L = \Pi - u$; les signes changent si la comète est rétrograde, et l'on a après le périhélie $L = \Pi - u$, et avant $L = \Pi + u$, c'est la longitude dans l'orbite; vous en retranchez le lieu du nœud; le reste $L - \Omega$ est l'argument de latitude; soit I l'inclinaison, tang $(L - \Omega) \cos I =$ tang dist. au nœud sur l'éclipt. $= (L' - \Omega)$, ajoutez-y le nœud, vous aurez $(L' - \Omega) + \Omega = L'$; la longitude sur l'écliptique;

$$\sin I \sin (L - \Omega) = \text{tang latit. héliocentrique},$$

ou

$$\text{tang } I \sin (L' - \Omega) = \text{tang latit. héliocentrique};$$

il reste à trouver $v = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} u}{h}$ et $v \cos \lambda = \frac{h \cos \lambda}{\cos^2 \frac{1}{2} u} =$ distance accourcie; avec cette longitude, cette latitude et cette distance accourcie, vous calculerez le lieu géocentrique tout comme celui d'une planète (XVI. 25).

14. Mais pour déterminer les élémens d'une comète qu'on vient de découvrir, les moyens exposés, quoique suffisans, ne sont pas assez commodes.

Soient T et T′ les tems de deux observations, $C=27^j,40385$, vous aurez

$$T = h^{\frac{3}{2}} C\,(\tang^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \tang \tfrac{1}{2} u)$$

$$T' = h^{\frac{3}{2}} C\,(\tang^3 \tfrac{1}{2} u' + 3 \tang \tfrac{1}{2} u')$$

$$T' - T = h^{\frac{3}{2}} C\,[\tang^3 \tfrac{1}{2} u' - \tang^3 \tfrac{1}{2} u + 3(\tang \tfrac{1}{2} u' - \tang \tfrac{1}{2} u)]$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}} C \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{\cos^2 \frac{1}{2} u' \cos^2 \frac{1}{2} u} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} u'} + \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} u} + \frac{\cos \frac{1}{2}(u'-u)}{\cos \frac{1}{2} u' \cos \frac{1}{2} u} \right);$$

or

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} u = \left(\frac{h}{v}\right), \quad \text{et} \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} u' = \left(\frac{h}{v'}\right);$$

substituez, et vous aurez

$$T' - T = \frac{v^{\frac{1}{2}} v'^{\frac{3}{2}} C \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{v'^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} C \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{v v' C \sin \frac{1}{2}(u'-u) \cos \frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}},$$

relation qui donnera $h^{\frac{1}{2}}$, si l'on a deux rayons vecteurs avec l'angle compris. Vous aurez

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{C \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T} \left[v'^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{1}{2}} v'^{\frac{3}{2}} + v v' \cos \tfrac{1}{2}(u'-u) \right]$$

$$= \frac{C (v v')^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T} \left[v + v' + (v v')^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}(u'-u) \right]$$

$$= \frac{2C (v v') \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{(T'-T)},$$

en mettant, par approximation, $3(vv')^{\frac{1}{2}}$ pour la parenthèse.

Les équations

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{3C\nu\nu' \sin\frac{1}{2}(u'u - u)}{T' - T} \quad \text{et} \quad \sin\tfrac{1}{2}(u' - u) = \frac{h^{\frac{1}{2}}(T' - T)}{3C\nu\nu'},$$

quoique simplement approximatives et ne pouvant s'étendre qu'à de petits intervalles, nous seront utiles dans les premières recherches.

15. $\nu' : \nu :: \cos^2\frac{1}{2}u : \cos^2\frac{1}{2}u'$, ou $\nu'^{\frac{1}{2}} : \nu^{\frac{1}{2}} :: \cos\frac{1}{2}u : \cos\frac{1}{2}u'$.

Soit L la première longitude, L′ la seconde, Π celle du périhélie, $u = (L - \Pi)$, $u' = (L' - \Pi)$;

$$\nu'^{\frac{1}{2}} : \nu^{\frac{1}{2}} :: \cos\tfrac{1}{2}(L - \Pi) : \cos\tfrac{1}{2}(L' - \Pi),$$

$$\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} :: 1 : \frac{\cos\frac{1}{2}(L' - \Pi)}{\cos\frac{1}{2}(L - \Pi)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(L - \Pi + dL)}{\cos\frac{1}{2}(L - \Pi)},$$

$$\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(L - \Pi)\cos dL - \sin\frac{1}{2}(L - \Pi)\sin dL}{\cos\frac{1}{2}(L - \Pi)}$$

$$= \cos\tfrac{1}{2}dL - \sin\tfrac{1}{2}dL \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L - \Pi),$$

et

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L - \Pi) = \cot\tfrac{1}{2}dL - \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}dL.$$

Je préfère la formule suivante, qui est de Nicolic.

$$\begin{aligned}
\nu'^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{1}{2}} : \nu'^{\frac{1}{2}} - \nu^{\frac{1}{2}} &:: \cos\tfrac{1}{2}u + \cos\tfrac{1}{2}u' : \cos\tfrac{1}{2}u - \cos\tfrac{1}{2}u' \\
&:: 2\cos\tfrac{1}{4}(u' + u)\cos\tfrac{1}{4}(u' - u) \\
&: 2\sin\tfrac{1}{4}(u' + u)\sin\tfrac{1}{4}(u' - u) \\
&:: 1 : \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u' + u)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u' - u),
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u' + u) = \left\{\frac{1 - \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}\cot\tfrac{1}{4}(u' - u)$$

$$= \left(\frac{1 - \operatorname{tang} z}{1 + \operatorname{tang} z}\right)\cot\tfrac{1}{4}(u' - u)$$

$$= \cot(45^\circ + z)\cot\tfrac{1}{4}(u' - u);$$

on fera donc $\tang z = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}$ et l'on aura $\frac{1}{4}(u'+u)$, $\frac{1}{2}(u'+u)$, u' et u; d'où l'on conclura $\mathrm{L} = \mathrm{L} - u = \mathrm{L}' - u'$, et enfin $h = \nu \cos^2 \frac{1}{2} u = \nu' \cos^2 \frac{1}{2} u'$.

Le problème se réduit donc à déterminer deux longitudes et deux rayons vecteurs, ce qui ne peut se faire que par des essais.

16. $\left.\begin{array}{l} h = \nu \cos^2 \frac{1}{2} u \\ h = \nu' \cos^2 \frac{1}{2} u' \end{array}\right\}$; donc $h^2 = \nu\nu' \cos^2 \frac{1}{2} u \cos^2 \frac{1}{2} u'$,

$$h = (\nu\nu')^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} u \cos \tfrac{1}{2} u',$$

$$h = \tfrac{1}{2}(\nu\nu')^{\frac{1}{2}}\left[\cos \tfrac{1}{2}(u'+u) + \cos \tfrac{1}{2}(u'-u)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(\nu\nu')^{\frac{1}{2}}\left(\cos \tfrac{1}{2}(u'-u) + \frac{1-\tang^2 \frac{1}{4}(u'+u)}{1+\tang^2 \frac{1}{4}(u'+u)}\right);$$

substituez pour $\tang \frac{1}{4}(u'+u)$ sa valeur ci-dessus; développez et réduisez, vous arriverez au théorème suivant, auquel Lambert est parvenu par des voies très-différentes et qui ne suppose que deux rayons vecteurs avec l'angle compris.

$$h = \frac{\nu\nu' \sin^2 \frac{1}{2}(u'-u)}{\nu+\nu'-2(\nu\nu')^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}(u'-u)},$$

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{(\nu\nu')^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}(u'-u)}{\left[\nu+\nu'-2(\nu\nu')^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}(u'-u)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

17. Portez cette valeur de $h^{\frac{1}{2}}$ dans l'expression de $(\mathrm{T}'-\mathrm{T})$ (14), vous aurez, par des réductions faciles, cet autre théorème de Lambert :

$$\mathrm{T}'-\mathrm{T} = \mathrm{C}\left[\nu+\nu'+(\nu'\nu)^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}(u'-u)\right]$$
$$\left[\nu+\nu'-2(\nu\nu')^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2}(u'-u)\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où je tire successivement

$$T'-T=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{(\nu\nu')^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\nu+\nu'}\right)\times\ldots$$

$$\left(1-\frac{2(\nu\nu')^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\nu+\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{1+\frac{\nu}{\nu'}}\right)\times\ldots$$

$$\left(1-\frac{2\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{1+\frac{\nu}{\nu'}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\operatorname{tang} z\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{1+\operatorname{tang}^2 z}\right)\times\ldots$$

$$\left(1-\frac{2\operatorname{tang} z\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{1+\operatorname{tang}^2 z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}\left[1+\sin z\cos z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\right]\times\ldots$$

$$\left[1-2\sin z\cos z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}(1+\tfrac{1}{2}\sin x)(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}$$ quant. touj. positive.

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)\left[2\sin^2\tfrac{1}{2}(45^\circ-\tfrac{1}{2}x)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)(2)^{\frac{1}{2}}\sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}x)$$

$$=C(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x)$$

$$=C.\nu^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\nu'}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x)$$

$$=\frac{C\nu^{\frac{3}{2}}}{(\sin^2 z)^{\frac{3}{2}}}(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x)$$

$$=C\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x)$$ quantité positive

$$=C\left[(\nu+\nu')^{\frac{3}{2}}\cos^3\tfrac{1}{2}x-(\nu+'\nu)^{\frac{3}{2}}\sin^3\tfrac{1}{2}x\right]$$

$$=C\{[(\nu+\nu')\cos^2\tfrac{1}{2}x]^{\frac{3}{2}}-[(\nu+\nu')\sin^2\tfrac{1}{2}x]^{\frac{3}{2}}\}$$

$$=C\left[\left(\frac{(\nu+\nu')(1+\cos x)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{(\nu+\nu')(1-\cos x)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=C\left[\left(\frac{(\nu+\nu')+(\nu+\nu')\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{(\nu+\nu')-(\nu+\nu')\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=C\left[\left(\frac{\nu+\nu'+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{\nu+\nu'-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

k est la corde parabolique qui joint les deux rayons vecteurs ν et ν'; en effet, dans cette supposition,

$$k^2=\nu^2+\nu'^2-2(\nu\nu')\cos(u'-u)=(\nu+\nu')^2-4\nu\nu'\cos^2\tfrac{1}{2}(u'-u),$$

$$k=(\nu+\nu')\left(1-\frac{4\nu\nu'\cos^2\frac{1}{2}(u'-u)}{\nu+\nu'}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=(\nu+\nu')(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}=(\nu+\nu')\cos x;$$

c'est le célèbre théorème de Lambert. Euler l'avait trouvé le premier, mais en avait fait peu d'usage et il était oublié; il me paraît peu commode.

18. Soit $\omega=90^\circ-x$ et $\frac{1}{2}\omega=45^\circ-\frac{1}{2}x$; substituez et vous trouverez

$$\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x=3\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega(1+\tfrac{1}{3}\tan g^2\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$=3\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega+\sin 45^\circ\sin^3\tfrac{1}{2}\omega,$$

et

$$T'-T=3C\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3\sin 45^\circ(\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega+\tfrac{1}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}\omega).$$

M. Burckhardt a donné sans démonstration, dans les Mémoires de l'Institut, une formule analogue,

$$T'-T=C\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3.2\sin 45^\circ(\tfrac{3}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega-\sin^3\tfrac{1}{2}\omega).$$

19. Soit $z=\dfrac{\nu+\nu'+k}{2}$; $\zeta=\dfrac{\nu+\nu'-k}{2}$, A le grand axe de

de l'ellipse $=2a$. Lambert démontre la formule suivante, dans ses Propriétés des orbites cométaires, page 201,

$$\frac{2\sqrt{2}.mT'}{\sqrt{A}}=\int\frac{zdz}{\sqrt{Az-zz}},\qquad \frac{2\sqrt{2}.mT}{\sqrt{A}}=\int\frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{A\zeta-\zeta\zeta}};$$

développez le radical et intégrez, vous aurez

$$T'=\frac{1}{2\sqrt{2}.m}\left(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{5}\frac{z^{\frac{5}{2}}}{A}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{2}{7}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{A^2}+\text{etc.}\right);$$

$$T=\frac{1}{2\sqrt{2}.m}\left(\tfrac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{5}\frac{\zeta^{\frac{5}{2}}}{A}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{2}{7}\frac{\zeta^{\frac{7}{2}}}{A^2}+\text{etc.}\right),$$

ou

$$T'=\frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{10A}z^{\frac{5}{2}}+\frac{9}{56A^2}z^{\frac{7}{2}}+\frac{5}{48A^3}z^{\frac{9}{2}}+\text{etc.}\right);$$

$$T=\frac{n}{3\sqrt{2}}\left(\zeta^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{10A}\zeta^{\frac{5}{2}}+\frac{9}{56A^2}\zeta^{\frac{7}{2}}+\frac{5}{48A^3}\zeta^{\frac{9}{2}}+\text{etc.}\right);$$

le facteur $\frac{n}{3\sqrt{2}}$ de Lambert est notre facteur $C=27',40385$; on aura donc

$$T'-T=C\left((z^{\frac{3}{2}}-\zeta^{\frac{3}{2}})+\frac{3}{10A}(z^{\frac{5}{2}}-\zeta^{\frac{5}{2}})+\frac{9}{56A^2}(z^{\frac{7}{2}}-\zeta^{\frac{7}{2}})\right.$$
$$\left.+\frac{5}{48A^3}(z^{\frac{9}{2}}-\zeta^{\frac{9}{2}})+\frac{105}{1408A^4}(z^{\frac{11}{2}}-\zeta^{\frac{11}{2}})+\text{etc.}\right);$$

équation curieuse, mais peu commode pour le calcul.

Au lieu de $(z^{\frac{n}{2}}-\zeta^{\frac{n}{2}})$ mettons $\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^n(\cos^n\frac{1}{2}x-\sin^n\frac{1}{2}x)$; l'équation devient

$$T'-T=C\left[\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{10A}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5(\cos^5\tfrac{1}{2}x-\sin^5\tfrac{1}{2}x)+\text{etc.}\right]$$

série encore fort incommode; mettez en ω les valeurs de $(\cos^n \frac{1}{2} x - \sin^n \frac{1}{2} x)$, vous aurez

$$T' - T = 58^j,13233 \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \left(\sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega\right)\right.$$

$$+ \frac{7^j,26654}{a}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{4}{5}\sin^4 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$+ \frac{1^j,362476}{a^2}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 4\sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{8}{7}\sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$+ \frac{0^j,28385}{a^3}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^9 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + \tfrac{16}{3}\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 6\sin^4 \tfrac{1}{2}\omega - 4\sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right.$$

$$\left. + \tfrac{78}{9}\sin^8 \tfrac{1}{2}\omega\right) + \text{etc.}$$

a est le demi-grand axe, qui surpasse toujours de beaucoup l'unité; la série est donc ordinairement très-convergente, et pour la parabole, elle se réduit au terme indépendant de a.

20. Quand on aura, par des essais à l'aide de ces formules, satisfait à l'intervalle $T' - T$, on cherchera les élémens paraboliques par les formules (15); mais une parabole qui satisfait à deux observations n'est pas encore la véritable orbite, si ce n'est par un grand hasard; on essaiera donc cette orbite sur une troisième observation, et si elle n'y satisfait pas, on tentera d'autres suppositions.

21. Lambert a tiré quelques conséquences remarquables de son théorème, qui ne suppose que les deux rayons vecteurs et l'angle compris. Supposons $u' - u = 0$, alors $k = v' - v$ et $T' - T = C(v'^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}})$; la comète, dans cette hypothèse, parcourrait l'axe de la parabole; $T' - T$ sera le tems qu'elle mettra à parcourir $(v' - v)$; supposez $v = 0$, $T' - T = Cv'^{\frac{3}{2}}$ sera le tems que mettrait la comète à tomber de v' sur le soleil, ou en général le tems qu'emploierait à tomber sur le soleil, un corps quelconque placé à la distance v'. Donnons à v' les valeurs des demi-grands axes

de toutes les ellipses planétaires; nous aurons les valeurs ci-jointes, pour la chute parabolique des planètes sur le soleil.

Planètes.	Chute parabolique
☿	6j 600
♀	16,858
♁	27,404
♂	51,547
♃	125,850
♅	325,240
♄	806,640
♆	2284,501

Cette chute étant plus rapide qu'aucun mouvement circulaire, parabolique, elliptique ou hyperbolique, Lambert en conclut que jamais aucune comète ne peut, dans les tems donnés par cette table, faire un chemin égal à v'.

Doublez les nombres de cette table, une comète ne peut traverser centralement l'orbite de Mercure en $13^j,2$, celle de Vénus en $33^j,7$, celle de la terre en $54^j,8$, et ainsi des autres.

22. Par cinq points donnés on ne peut imaginer qu'une seule parabole ou une seule ellipse; l'un de ces points est toujours le centre du soleil, il faudrait donc quatre points ou quatre observations; mais trois rayons vecteurs et les deux angles compris déterminent un point qui est le périhélie, il suffira donc de trois observations. Deux latitudes et deux longitudes déterminent le nœud et l'inclinaison; une courbe qui satisferait aux trois longitudes et à deux des latitudes ne satisfera pas également à la troisième latitude, il fau-

drait pour cela que les observations fussent rigoureusement exactes. Toute l'erreur portera sur cette troisième latitude, et l'orbite ne sera qu'une approximation.

23. Tous les géomètres et tous les astronomes les plus célèbres se sont exercés sur le problème difficile de la détermination des orbites cométaires; ils ont donné diverses méthodes qui toutes ont leur mérite particulier; dans l'impossibilité de les exposer dans un simple Abrégé, nous allons en donner une toute différente, laquelle n'emploie que des moyens très-élémentaires, et nous l'appliquerons à l'orbite de la comète la plus célèbre et la mieux connue.

24. Une comète a été observée dans un cercle de latitude qui faisait avec le cercle de latitude qui passe par le soleil, un angle T = élongation (fig. 138).

Abaissez du soleil la perpendiculaire SP sur la distance accourcie TC de la comète. Nous connaissons $ST = V$ et l'angle T, $SP = V \sin T$, $TP = V \cos T$, $TSP = 90° - T$; l'observation n'en donne pas davantage. Soit $SC = \nu \cos \lambda$ la distance accourcie de la comète au soleil; tout ce que nous pouvons conclure, c'est que $SC > SP$; c'est l'une des limites des valeurs possibles de SC, et ce serait un hasard bien singulier si $SC = SP$; mais cela n'est pas impossible. Dans ce cas, $V \sin T = \nu \cos \lambda$; mais par la formule générale on aurait $TP \tang g = (\nu \cos \lambda) \tang \lambda$, $V \cos T \tang g = V \sin T \tang \lambda$ et $\tang \lambda = \frac{V \cos T \tang g}{V \sin T} = \tang g \cot T$; on connaîtrait donc $\nu = \frac{\nu \cos \lambda}{\cos \lambda} = \frac{V \sin T}{\cos \lambda}$; la longit. héliocent. de la comète = longit. géocent. $\pm 90°$

$$= \text{longit. helioc. } ♁ \mp (90° - T) = ☉ + 180° \mp 90° \pm T.$$

25. Dans tous les cas, $x = PSC$, $PC = SP \tang x = V \sin T \tang x$,

$$TC = TP + PC = V \cos T + V \sin T \tang x$$

$$= \frac{V \cos T \cos x + V \sin T \sin x}{\cos x} = \frac{V \cos (T - x)}{\cos x} = \ell,$$

$$SC = \frac{SC}{\cos x} = \frac{V \sin T}{\cos x},$$

$$\tang \lambda = \frac{TC}{SC} \tang g = \frac{V\cos(T-x)\cos x \tang g}{\cos x . V\sin T}$$

$$= \frac{\tang g \cos(T-x)}{\sin T},$$

$$v = \frac{SC}{\cos \lambda} = \frac{V\sin T}{\cos \lambda \cos x}.$$

Tout dépend donc de l'angle x, qui est inconnu.

x pourrait être négatif, il suffirait d'en changer le signe dans les formules précédentes; ρ changerait de valeur, la comète serait beaucoup plus près de la terre, SC resterait le même, λ changerait tant soit peu et v aussi. A moins que la comète ne soit brillante et son mouvement rapide, il sera plus probable que x est positif.

26. Pour montrer l'usage de ces formules, adoptons pour la comète de 1759 les élémens de Klinkenberg. De toutes les ellipses qu'on a données pour cette comète, Pingré a trouvé que la meilleure est celle de La Caille; celle de Klinkenberg n'en diffère presque pas

Soit $a = \frac{1}{2}$ grand axe $= 18.018467$, $h = 0.5829729$,
$\log a = 1.2557179$, $\log h = 0.7656484$,
longit. périhélie $= \Pi = 10^s\ 3^\circ\ 19'\ 18''$,
longit. du nœud $= \Omega = 1.23.45.35$,
inclinaison $= I = 17^\circ\ 40'\ 5''$,
passage au périhélie $1759^{an}\ 71^j,546933$,
mouvement rétrograde.

Au lieu d'employer les observations réelles à la recherche des élémens, calculons sur ces élémens les longitudes et latitudes géocentriques pour tous les jours d'observations, et servons-nous de ces observations fictives pour trouver une parabole et une ellipse; nous jugerons mieux de la sureté des méthodes.

27. D'après ce plan, j'ai calculé pour chaque jour, dans l'ellipse, l'anomalie excentrique, en faisant pour tous les de-

grés d'anomalie vraie,

$$\tang \tfrac{1}{2} x = \left(\frac{h}{2a-h}\right)^{\frac{1}{2}} \tang \tfrac{1}{2} u;$$

j'ai cherché les tems de ces anomalies vraies par la formule

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sin 59' \, 8'',36}\left((1-e)\sin x + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right),$$

que j'ai tirée de la formule connue $z = x - e \sin x$.

Avec la table des t et des u il m'a été facile, par des parties proportionnelles, de déterminer les u par toutes les observations, et de là, suivant les procédés (13), tous les lieux géocentriques.

Soit T le tems de l'observation, θ celui du passage au périhélie; $T - \theta$ ou $\theta - T$, suivant les cas, me donnait le tems t compté du périhélie. Avec ces t divisés par $h^{\frac{3}{2}}$, j'avais les tems de la comète de 109 jours; je cherchais les anomalies paraboliques, que je comparais aux anomalies elliptiques. Soit u' l'anomalie parabolique, j'avais $(u'-u)$; je calculai ensuite les $(u'-u)$ par la formule (7). Jusqu'à 78° $(u'-u)$ était positif, jusqu'à 120° il était négatif; à 36° l'erreur de la formule (7) était de 8'',4; à 72° elle était nulle; négative et petite jusqu'à 106°; positive et croissante jusqu'à 120°, où je me suis arrêté; l'erreur était alors +18'',2; à 110°, $(u'-u) = -37' \, 30''$.

Les rayons vecteurs paraboliques, toujours en excès sur les rayons elliptiques, les surpassaient de 0.00143 à 40° d'anomalie; à 60°, de 0.01136; à 100°, de 0.03220; à 110°, de 0.05750; à 120°, 0.10965; mais les observations avaient cessé à 110°.

On pourrait, d'après ces remarques, douter de la possibilité de trouver une parabole qui pût s'accorder passablement avec les observations.

28. Avant d'aller plus loin, voyons ce que nous devons attendre de nos formules $(T' - T)$.

Le 21 janvier 1759 . $\frac{1}{2}u = 45°39'52''$
le 22 ..... $\frac{1}{2}u' = 45.16.35$
$\frac{1}{2}(u'-u) = -23.17$

$v = 1.17342$.....	0.0694535	log C.....	1.4378116
$v' = 1.15789$.....	0.0636673	log 3.....	0.4771212
$\frac{v}{v'} = \text{tang}^2 z$.....	0.0057862	sin 45°.....	9.8434850
tang $z = 45°\,11'\,27''$..	0.0028931	log C'	1.7644178
		v.....	0.0694535
z.....	0.3010300	$v^{\frac{1}{2}}$.....	0.0347268
sin z.....	9.8509267	C. sin z.....	0.1490733
cos z.....	9.8480337	double.....	0.2981466
cos $\frac{1}{2}(du)$.....	9.9999900	$\cos^2\frac{1}{2}\omega$.....	9.9999902
cos $\omega = 0°32'40''$..	9.9999804	sin $\frac{1}{2}\omega$.....	7.6767993
$\frac{1}{2}\omega = 0.16.20$		log 0.983122...	9.9926075
		C. log 3...	9.5228788
		tang$^2\omega$...	5.3536084
		+ 0.00000,7	4.8690947
		T'—T =	0.98312,9
		erreur parabolique =	0.01687,1

car l'intervalle des observations = 1 jour; mais nous avons employé les rayons vecteurs elliptiques comme nous aurions fait d'après les observations; on voit donc de combien il s'en faut que la formule parabolique ne satisfasse aux observations; on serait obligé d'augmenter les rayons vecteurs, c'est-à-dire, de les falsifier pour trouver un intervalle parabolique d'un jour, ce qui ne pourrait se faire sans s'écarter des véritables élémens. Pour voir si l'intervalle est vraiment satisfait, ajoutons ce qui manque à la formule pour être elliptique.

Log constant = log 7.26654....		0.8613277
C. log a....		8.74428
log constant pour l'ellipse de 1759....		9.60561
$\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)$....		0.18380
quadruple....		0.73520
$\sin \frac{1}{2}\omega$....		7.67680
1er terme elliptique =	0.01590.1	8.20141
parabolique =	0.98312.9	
T′—T =	0.99903.0	
erreur =	0.00097 ;	

mais il reste des termes à calculer, qui sont positifs.

Log 1.362476....		0.13434
C. a^2....		7.48856
log constant pour notre ellipse....		7.62290
$(v^{\frac{1}{2}} : \sin z)$....		0.18380
sextuple....		1.10280
$\sin \frac{1}{2}\omega$....		7.67680
2e terme elliptique =	0.00038.6	6.58630
ci-dessus	0.99903.0	
T′—T =	0.99941.6	
erreur =	0.00058.4 = 50″,5.	

Ainsi notre formule elliptique, arrêtée au second terme, satisfait, à 50″ près, à l'intervalle; or le mouvement de la comète n'étant que de 1″,55 par minute, l'erreur n'est que de 1″,2 pour 50″; on peut donc se contenter de cette exactitude.

29. Ce fut le 21 janvier que M. Messier aperçut pour la première fois la comète.

Soit la latitude observée $= g = 4° 30' 59''$ B,

la longitude G ..... $=$	$11^s 23° 44' 4''$
le lieu du soleil était alors	10. 1.33.56
ce qui donne une élongation orientale T $=$	1.22.10. 8
le logarithme du rayon vecteur de la terre	9.9932170
Si nous supposons l'angle à la comète...	3^s 0. 0. 0
nous aurons pour longit. hélioc. $L = G + 3^s$.	2.23.44. 4.

La distance accourcie $V \cos\lambda = V \sin T = 0.777582$; c'est la plus courte que l'on puisse supposer.

$$\operatorname{Tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang} g \cos(T-x)}{\sin T} = \operatorname{tang} g \cot T = 3° 30' 36'',$$

$$\nu = \frac{\nu \cos\lambda}{\cos\lambda} = \frac{V \sin T}{\cos\lambda} = 0.779043,$$

c'est la moindre que l'on puisse supposer; il est donc presque sûr que $\nu > 0.779043$, $\rho = \frac{V\cos(T-x)}{\cos x} = V\cos T = 0.603831$; cette distance à la terre paraît trop petite, la comète aurait été plus aisée à trouver, on l'eût aperçue quelques jours plus tôt, il est donc très-probable que x est positif, ce qui éloigne la comète de la terre et diminue la longitude héliocentrique.

30. A la supposition $x = 0$ j'ajoute celles de $x = 1°$, $x = 10$ et $11°$, $= 20$ et $21°$, $= 30$ et $31°$, $= 40$ et $41°$, $= 50$ et $51°$, etc., autant que je juge à propos, et par les formules je forme le tableau suivant.

Remarquons en passant, que dans la nécessité d'exposer clairement la méthode, je suis forcé à exécuter un peu longuement des calculs qu'un astronome exercé trouverait les moyens d'abréger sensiblement, et de tenter des essais qu'il omettrait parce qu'il en pressentirait l'inutilité. Je ne serais donc pas surpris qu'on jugeât le procédé beaucoup plus long qu'il ne l'est dans la réalité.

Positions hypothétiques de la comète, le 21 janvier.

x	L	λ	v	ϱ
0	2.23.44.4	3.30.36 B	0.77904	0.60383
1°	2.22.44.4	3.35.18	0.77923	0.61740
10	2.13	4.14.21	0.79174	0.74094
11	2.12	4.18.19	0.79438	0.75595
20	2. 3	4.50.20	0.83045	0.88683
21	2. 2	4.53.27	0.83595	0.90232
30	1.23	5.17.29	0.90172	1.05277
31	1.22	5.19.41	0.91109	1.07105
40	1.13	5.35. 1	1.01990	1.25630
41	1.12	5.36.13	1.03525	1.27977
50	1. 3	5.42.25	1.21573	1.53052
51	1. 2.44.4	5.42.36	1.24175	1.56404

Les colonnes x et L ne coûtent que la peine de les écrire; L diminue de l'augmentation de x, ensorte que toujours $L + x = 2^s\ 23^\circ\ 44'\ 4''$; ϱ nous est inutile, je ne le calcule le premier jour que pour savoir jusqu'où je dois aller; je m'arrête à $x = 51^\circ$, parce que $\varrho = 1.564$, et que rarement les comètes s'aperçoivent à cette distance. Si ces hypothèses ne suffisent pas, on y ajoutera le second jour.

31. Supposons que la comète soit périhélie, nous aurions $h = \nu = 0.77904$, $h^{-\frac{3}{2}} = 1.4543$; le mouvement diurne serait celui de $1^j,4543$ de la comète de 109 jours, il serait de 2°; nous en pouvons conclure que le mouvement de la comète n'est pas de 2° par jour; car l'expression du mouvement diurne $du = \frac{1^\circ\, 23'\, 3''\, h^{\frac{1}{2}}}{\nu^2}$ deviendra, dans le cas de $h = \nu$,

$$du = \frac{1.23.38}{\nu^{\frac{3}{2}}} = 2^\circ\, 1';$$

et comme ν est donné, si $h < \nu$, du diminuera.

Si $x = 51^\circ$, $\nu = 1.24175$, $du = \frac{1^\circ\, 23'\, 34''\, h^{\frac{1}{2}}}{\nu^2} = 1^\circ\, 0'\, 26''\, h^{\frac{1}{2}}$; si h est une fraction, du n'est pas d'un degré. Voilà tout ce qu'on peut savoir le jour où l'on a découvert une comète, et ces calculs faciles se font avec plaisir.

32. Le lendemain, 22 janvier, je suppose $g = 4^\circ\, 35'\, 36''$B, plus forte de $4'\, 37''$ que le 21; on pourra conjecturer que la planète a passé son nœud ascendant, que la latitude héliocentrique augmente, ou que la comète approche de la terre.

Soit.....	G =	11.23.18.21
	☉ =	10. 2.34.57
ainsi le 22.....	T =	1.20.43.24
le 21.....	T =	1.22.10. 8
l'élongation a diminué de.....	dT =	1.26.44
la longitude a diminué de.....	dG =	25.43.

Il faut former un tableau semblable à celui du 21. Nous aurons $L + x = ♄ + T - 90^\circ$ et $dL + dx = d♄ + dT = + 1^\circ\, 1'\, 1'' - 1^\circ\, 26'\, 44'' = -25'\, 43'' = dG$, $dx = -dL - dG$ et $dL = -dx - dG$. Les suppositions différentes que nous pourrons faire pour dx donneront pour dL les quantités ci-jointes :

dx	dL
+ 60′	— 85′ 45″
40	— 65.43
20	— 45.43
0	— 25.43
— 20	— 5.43
— 40	+ 14.17
— 60	+ 34.17
— 80	+ 44.17

Je supposerai x, 0 et 1°, 10° et 11°, etc., comme le 21; la comparaison des deux tableaux me permettra de faire $dx = \pm 60'$, et donnera la valeur correspondante de dL, d'où je pourrai conclure celle qui correspond à d'autres valeurs de dx.

Positions hypothétiques de la comète, le 22.

x	L	λ	ν	ϱ
0°	2.23.18.21	3.45.33	0.76284	0.62333
1	2.22	3.50.29	0.76402	0.63664
10	2.13	4.29.51	0.77634	0.75773
11	2.12	4.33.51	0.77893	0.77149
20	2. 3	5. 5 55	0.81434	0.90075
21	2. 2	5. 9. 1	0.81973	0.91591
30	1 23	5.32.40	0.88425	1.06339
31	1.22	5.34.48	0 89343	1.08130
40	1.13	5.49.22	1.00013	1.26289
41	1.12	5.50.27	1.01519	1.28590
50	1. 3	5.55.30	1.19213	1.53158
51	1. 2.18.21	5.55.32	1.21764	1.51457

33. La simple comparaison des deux tableaux me montre que dans toutes les hypothèses les v diminuent d'un jour à l'autre; que la comète marche vers son périhélie; les latitudes héliocentriques vont en augmentant; la comète s'éloigne de son nœud ascendant; les ϱ prouvent que la comète s'éloigne de la terre; cette augmentation des ϱ, et la diminution des L, concourent à prouver que la comète est rétrograde.

Nous pouvons maintenant essayer des hypothèses et voir celles qui nous donneront $T'-T = 1$; nous pourrions donner l'exclusion à plusieurs de ces hypothèses, par un calcul beaucoup plus court que celui de la formule (28). Soit..... $h = \left(\frac{vv'du}{1^\circ\ 23'\ 37'',9}\right)^2$; si nous trouvons $h > v'$, c'est un signe que la supposition est inadmissible; par exemple, nous aurions par

$$x = 40 \quad L = 1.13.44.\ 4 \quad v = 1.01990,$$

et

$$x' = 41 \quad L' = 1.18.18.21 \quad v' = 1.01519$$

$$dL = \quad 1.25.43.$$

C. $1^\circ 23' 37'',9$....	6.29948
1.25.43.....	3.71122
	0.01070
v....	0.00856
v'....	0.00655
$h^{\frac{1}{2}}$....	0.02581
h....	0.05162.

On voit par les logarithmes mêmes que $h >$ que v', ce qui est impossible; ainsi en supposant $dL = 85'\ 45''$, il faudrait rejeter les hypothèses dans lesquelles v est 1,0 ou au-dessus.

En supposant $dL = 65'\ 43''$, les rayons vecteurs pourraient être 1,0, mais non 1,2.

En supposant $dL = 45'\ 43''$, on pourrait donner à x toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à 50°.

34. Tout cela est encore bien vague, il faut absolument calculer T′—T. Si l'on veut aller par ordre et ne rien omettre, on commencera par $x = 0$ et $dL = 85' 43''$; mais on trouvera que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 30°$ $(T'-T) < 1$. Avec $x = 40°$ on trouvera au contraire $T'-T > 1$; avec $x = 35°$ et $x' = 36°$, $T'-T = 1.0206$; avec ce mouvement il faudrait que x fût entre 34 et 35°, et $\nu < 0.96$.

Avec le mouvement $dL = 65' 43''$,

$$x = 40° \quad \text{et} \quad x' = 40° \; 40', \quad T'-T = 0.913,$$
$$x = 50° \quad \text{et} \quad x' = 50° \; 40', \quad T'-T = 1.104.$$

On en conclura qu'il faudrait faire $x = 45°$ environ, et $\nu = 1.117$ environ, pour avoir une parabole.

Avec le mouvement $dL = 45' 43''$, c'est-à-dire $dx = 20'$; $x = 40°$ donnera $T'-T = 0.9349$; mais $x = 50°$ donne $T'-T = 1.0345$; on entrevoit qu'il faudrait faire $x = 48°$, $\nu = 1,2$.

Enfin avec le mouvement $dL = 25' 43''$, ou $dx = 0$, $x = x' = 50°$, $T'-T = 1.14$, et par conséquent $\nu = 1.215$ est déjà trop fort. Il résulte évidemment de ces calculs, qu'avec des valeurs de ν entre 0.96 et 1.22, on pourra trouver nombre de paraboles qui satisferont aux deux premières observations. Le milieu entre ces deux limites, ou $\nu = 1.09$, ou 1.1, s'écarte probablement très-peu de la valeur de ν. On ne peut rien tirer de plus de ces deux observations, mais c'est déjà une connaissance importante.

35. Le lendemain 23 janvier, M. Messier observa encore la comète. Supposons qu'il ait trouvé, comme par nos calculs, $g = 40° \; 40' \; 9''$, plus forte de $4' \; 33''$ que le 22; $G = 11^s \; 22° \; 35' \; 14''$ et $T = 1^s \; 19° \; 17' \; 17''$, plus faible de $1° \; 26' \; 7''$ que la veille. Il en résulte une marche géocentrique assez régulière, d'où nous pouvons conclure que le mouvement héliocentrique est tout au moins aussi régulier; que les ν doivent diminuer presqu'uniformément, ce qui nous autorise à rejeter toutes les hypothèses où ν s'écarterait trop des limites que nous avons posées. En abandonnant ainsi toutes

les x évidemment inutiles, pour plus grande facilité dans les calculs suivans, nous étendrons aux dixaines de minutes les tableaux des hypothèses pour les trois jours; nous aurons ainsi les trois tableaux suivans:

Tableau des hypothèses. 21 janvier.

x	L	λ	v	dv	ϱ
48° 0	1.5.44. 4	5.41.46	1.16784	380	1.4774
10	1.5.34. 4	5.41.50	1.17164	383	
20	1.5.24. 4	5.41.54	1.17547	386	
30	1.5.14. 4	5.41.58	1.17933	390	
40	1.5. 4. 4	5.42. 2	1.18323	393	
50	1.4.54. 4	5.42. 5	1.18716	397	
49. 0	1.4.44. 4	5.42. 8	1.19113		1.4983
		22 janvier.			
48. 0	1.5.18.21	5.55.27	1.14520	370	1.4708
10	1.5. 8.21	5.55.28	1.14890	372	
20	1.4.58.21	5.55.29	1.15262	375	
30	1.4.48.21	5.55.30	1.15637	378	
40	1.4.38.21	5.55.31	1.16015	380	
50	1.4.28.21	5.55.32	1.16395	383	
49. 0	1.4.18.21	5.55.32	1.16778		1.5008
		23 janvier.			
48.30	1.4.23.14	6. 8.57	1.13301	374	
40	1.4.13.14	6. 8.58	1.13675	378	
50	1.4. 3.14	6. 8.59	1.14053	381	
49. 0	1.3.53.14	6. 8.59	1.14434	384	1.5009
10	1.3.43.14	6. 8.59	1.14818	387	
20	1.3.33.14	6. 8.58	1.15205	390	
30	1.3.23.14	6. 8.57	1.15595		

On voit d'abord avec quelle facilité se continueraient ces tableaux, si dans l'usage qu'on en fait on voyait la nécessité

d'y ajouter quelques lignes, soit à la fin, soit au commencement. Il n'y a que les v dont les différences secondes soient sensibles, et elles sont très-peu de chose.

36. Le grand avantage de ces tableaux, c'est que chaque ligne qu'ils nous offrent représente exactement le lieu géocentrique, dont on n'a plus à s'occuper, et que le lieu géocentrique sera également bien représenté par chacune des hypothèses intermédiaires qu'on voudra former pour x, de minute en minute, ou de seconde en seconde. Ainsi toutes les fois qu'un lieu héliocentrique, calculé d'après les élémens trouvés pour la comète, représentera à la fois la longitude, la latitude et le rayon vecteur qui se trouvent sur une même ligne, on sera sûr qu'il s'accordera également bien avec l'observation. On voit que la même méthode peut s'employer pour une planète nouvelle.

37. Nous avons trois observations, nous pouvons déterminer l'orbite. Dans les recherches du premier jour, nous avons négligé la différence entre les dL et les du, entre le mouvement sur l'écliptique et le mouvement dans l'orbite; c'eût été alonger inutilement les calculs. Au reste, voici comme on déterminerait du.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cos} du &= \cos dL \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \\
&= \cos(\lambda' - \lambda) - 2\sin^2\tfrac{1}{2} dL \cos\lambda \cos\lambda', \\
\sin^2\tfrac{1}{2} du &= \sin^2\tfrac{1}{2} d\lambda + \sin^2\tfrac{1}{2} dL \cos\lambda \cos\lambda' \\
&= \sin^2\tfrac{1}{2} dL(\cos\lambda \cos\lambda')\left(1 + \frac{\sin^2\frac{1}{2} d\lambda}{\sin^2\frac{1}{2} dL \cos\lambda \cos\lambda'}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sin^2\tfrac{1}{2} d\lambda \left(1 + \frac{\sin^2\frac{1}{2} dL \cos\lambda \cos\lambda'}{\sin^2\frac{1}{2} d\lambda}\right) \\
&= \sin^2\tfrac{1}{2} dL (\cos\lambda \cos\lambda')(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) \\
&= \frac{\sin^2\frac{1}{2} dL (\cos\lambda \cos\lambda')}{\cos\varphi};
\end{aligned}$$

$\sin\frac{1}{2} du = \dfrac{\sin\frac{1}{2} dL (\cos\lambda \cos\lambda')^{\frac{1}{2}}}{\cos\varphi}$, quand on a fait

tang

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}d\lambda}{\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}},$$

et $\sin\frac{1}{2}du = \frac{\sin\frac{1}{2}d\lambda}{\cos\varphi}$, quand on a fait

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}d\lambda}.$$

38. *Les calculs des deux premiers jours n'étaient que préparatoires*; c'est ici que commencent les véritables recherches qu'il faut faire avec plus de soin.

Nos tableaux renferment les lieux héliocentriques, il faut seulement les démêler. En trois jours consécutifs les L, les h et les v doivent varier assez régulièrement, les mouvemens dL et du doivent s'accélérer un peu, puisque la comète va vers son périhélie, les dv doivent être un peu décroissans, mais on peut les supposer égaux.

39. Prenons au hasard dans nos trois tableaux, en supposant $dx = 20'$ et $dL = 45'\ 43''$. Si nous prenions $dx = 40'$, ou $0'$, nous verrions bientôt que T′—T serait beaucoup trop faible.

x	L	λ	v
$x = 48.\ 0$	1.5.44. 4	5.41.46	1.16784
$x' = 48.20$	1.4.58.21	5.55.29	1.15262
$x'' = 48.40$	1.4.13.14	6. 8.58	1.13675

$dL = 45.43$ $d\lambda = 13.43$ $1522 = dv$
$dL' = 45.\ 7$ $d\lambda' = 13.29$ $1587 = dv'$

$x = 48.10$	1.5.34. 4	5.41.50	1.17164
$x' = 48.30$	1.4.48.21	5.55.30	1.15637
$x'' = 48.50$	1.4. 3.14	6. 8.59	1.14053

$dL = 45.43$ $d\lambda = 13.40$ $1527 = dv$
$dL' = 45.\ 7$ $d\lambda' = 13.29$ $1584 = dv'$

x	L	λ	v
$x = 48.20$	1.5.24. 4	5.41.54	1.17549
$x' = 48.40$	1.4.38.21	5.55.31	1.16015
$x'' = 49.\ 0$	1.3.53.14	6. 8.59	1.14434
	$dL = 45.43$	13.37	1532 $= dv$
	$dL' = 45.\ 7$	13.28	1581 $= dv'$.

Ces trois hypothèses sont à peu près également probables; elles ont toutes trois le même défaut, les dL se ralentissent au lieu de s'accélérer, les dv s'accélèrent au lieu de se ralentir; mais il est aisé de rendre égaux les dv.

Ainsi dans la première hypothèse l'inégalité des dv est 65, dont la moitié est 32; retranchez cette moitié du second v, ou faites que le second v soit moyen arithmétique entre les deux extrêmes, et par des parties proportionnelles, corrigez les L et les λ de la seconde observation; vous aurez ainsi, pour les trois hypothèses corrigées:

Première hypothèse.

1.5.44. 4	5.41.46	1.16784
1.4.59.13	5.55.29	1.15230
1.4.13.14	6. 8.58	1.13675
$dL = 44.51$		$dv = 1554$
$dL' = 45.59$		$dv' = 1555$.

Seconde hypothèse.

1.5.34. 4	5.41.50	1.17164
1.4.49. 7	5.55.30	1.15609
1.4. 3.14	6. 8.59	1.14053
$dL = 44.57$		$dv = 1555$
$dL' = 45.53$		$dv' = 1556$.

Troisième hypothèse.

1.5.24. 4	5.41.54	1.17547
1.4.39. 1	5.55.31	1.15990
1.3.53.14	6. 8.59	1.14434

$dL = 45.\ 3$	$d\nu = 1557$
$dL' = 45.47$	$d\nu' = 1556.$
milieu $= 45.25$	

40. La troisième hypothèse a un petit avantage sur les deux autres, $d\nu$ va en diminuant; nos dL sont corrigés de leurs défauts, ils vont en s'accélérant. Le choix est presqu'indifférent jusqu'ici entre les trois; calculons la dernière pour servir d'exemple.

$\nu = 1.17547\ldots$	0.0702115	$\cos\lambda = 5°41'54''\ldots$	9.99785
$\nu'' = 1.14434\ldots$	0.0585551	$\cos\lambda' = 6.\ 8.59\ldots$	9.99749
$\tan^2 z\ldots\ldots\ldots\ldots$	0.0116564	$(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}\ldots$	9.99767
$\tan z = 45°23'4''\ldots$	0.0058282	$\sin\frac{1}{2}dL = 45'25''\ldots$	8.12093
$2\ldots$	0.3010300	$\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')\ldots$	8.11860
$\sin z\ldots$	9.8523796	$\sin\frac{1}{2}d\lambda = 13'35''\ldots$	7.59673
$\cos z\ldots$	9.8465513	$\tan\phi = 16°44'10''\ldots$	9.47813
$\cos\frac{1}{2}du\ldots$	9.9999591		
$\cos\omega = 1°\ 6'\ \ldots$	9.9999200	C. $\cos\phi\ldots$	0.01880
$\frac{1}{2}\omega = 33\ 0''$		$\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')\ldots$	8.11860
		$\sin\frac{1}{2}du = 47'10''\ldots$	8.13740

Log constant....	1.7644178
ν....	0.0702115
$\nu^{\frac{1}{2}}$....	0.0351057
C. $\sin z$....	0.1476204
double....	0.2952408
$\cos^2\frac{1}{2}\omega$....	9.9999600
$\sin\frac{1}{2}\omega$....	7.9822334
$T'-T = 1.971467$....	0.2947896

dans la parabole.

	Log constant....	9.60561
	$v^{\frac{1}{2}}$: sin z....	0.18273
	quadruple....	0.73092
	sin $\frac{1}{2}\omega$....	7.98223
terme elliptique...	+ 0.031731	8.50149
	T′—T = 2.003198	dans l'ellipse.

Dans la parabole, T′—T est un peu trop faible ; dans l'ellipse, il serait trop fort, mais nous ne la connaissons pas, ainsi nous augmenterions les v pour avoir T′—T plus fort, et nous nous écarterions des vrais élémens.

41. Nous avons supposé x=48° 20′; en supposant x=48° 30′, j'ai trouvé dans la parabole T′—T = 1.9802 ; en supposant x=48° 50′, j'ai trouvé T′—T=2.000. Dans cette dernière supposition, nous aurions une parabole qui satisferait aux deux observations extrêmes et même à celle du milieu, vu la petitesse de l'intervalle et l'uniformité des mouvemens ; mais cette parabole ne serait pas la vraie courbe.

Au lieu d'augmenter les rayons vecteurs, on peut avec la même facilité voir ce qui résulterait d'un changement de 1′ en plus ou en moins, sur les dx et les dL ; dx = 21′ augmente l'erreur ; dx = 19′ donne une parabole peu différente. Je supprime ces détails pour continuer les recherches dans l'hypothèse de dx = 20′.

42. Commençons par chercher le nœud et l'inclinaison.

λ'' =	6° 8′ 57″		
λ =	5.42. 5		
sin($\lambda''+\lambda'$) =	11.51. 2.....		9.3125152
C. sin($\lambda''-\lambda$) =	0.26.52.....		2.1070645
tang $\frac{1}{2}dL$ =	0.45.25.....		8.1209666
tang ($x+\frac{1}{2}dL$) =	19. 8.44.....		9.5405463
$x+dL$ =	19.54. 9	x =	18° 23′ 19″
$L+dL$ =	1. 3.23.14	L =	1. 4.54. 4
☊ =	1.23.17.23	☊ =	1.23.17.23.

x est la distance au nœud sur l'écliptique pour la première latitude, $x+dL$ la distance au nœud pour la seconde. x est donc la quantité dont la longitude a diminué depuis le nœud, par le mouvement rétrograde de la comète; $L+x$ sera donc la longitude du nœud, $(L-dL)+(x+dL)$ sera de même la longitude du nœud, et dans le fait les deux calculs s'accordent. Dans la parabole, Klinkenberg a trouvé par d'autres observations, ☊ $= 1^s\ 24°\ 7'$, et dans l'ellipse, $1^s\ 23°\ 45'\ 35''$; les autres astronomes, dans l'ellipse, de $1^s\ 23°\ 45'$ à $49'$.

tang λ...	8.9992948	tang λ″...	9.0323656
C. sin x...	0.5010551	C. sin($x+dL$)...	0.4679842
tang I = 17° 33′ 42″...	9.5003499...	17° 33′ 42″...	9.5003498

Klinkenberg, dans sa parabole, a trouvé 17° 28′ 55″, et dans son ellipse, 17° 40′ 5″; les autres astronomes, de 17° 35′ à 17° 41′. On ne sera pas étonné que par d'aussi petits arcs que $d\lambda$ et dL, nous ne nous accordions pas avec des astronomes qui ont calculé un arc beaucoup plus considérable; d'ailleurs on voit qu'ils ne sont pas non plus bien d'accord entr'eux.

	C. cos I...	0.0207281
	tang x...	9.5217067
tang x' =	19° 13′ 23″	9.5424348
☊ =	1.23.17.23	
	1. 4. 4. 0	
		0.0207281
		9.5587617
tang($x'+du$) =	20° 47′ 38″	9.5794898
☊ =	1.23.17.23	
2e longitude =	1. 2.29.45	dans l'orbite
1ere longitude =	1. 4. 0. 4	
mouv. sur l'orbite =	— 1.34.15	= du
moitié =	— 47. 7,5	= $\frac{1}{2}du$
	— 23.33,75	= $\frac{1}{4}du$.

43. Cherchons par la formule (42) les u dont nous n'avons que la différence.

$$\begin{array}{rll} v = & 1.18716\ldots & 0.0745093 \\ v' = & 1.15595\ldots & 0.0629392 \\ \hline & \tan^2 z\ldots & 0.0115701 \\ \tan z = & 45^\circ\,22'\,54''\ldots & 0.0057850 \\ & 45 & \\ \hline \cot(z+45^\circ) = & 90.22.54 & -\ 7.8235680 \\ \cot\tfrac{1}{4}(u'-u) = & 0.23.37,75 & +\ 2.1640525 \\ \hline & -\ 44.11.\ 0,62 & -\ 9.9876205 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{4}(u'-u) = -\tfrac{1}{4}\,du = +23'\,33'',75$$

$$\begin{array}{rlrl} \tfrac{1}{2}u = & -\ 44.34.34,39 & u = & 2^s 29^\circ\ 9'\ 4'' \\ \tfrac{1}{2}u' = & -\ 43.47.26,87 & u' = & 2.27.34,53. \end{array}$$

$$\begin{array}{rlrl} u = & -\ 2.29.\ 9.\ 9 & u' = & -\ 2.27.34.53 \\ 1^{\text{ere}}\ \text{longit.} = & 1.\ 4.\ 4.\ 0 & 2^{\text{e}}\ \text{longit.} = & 1.\ 2.29.43 \\ \hline \Pi = & 10.\ 4.54.51 & \Pi = & 10.\ 4.54.52. \end{array}$$

C'est la longitude du périhélie..... $10^s\ 1^\circ\ 0'\ 24''$ dans la parabole, et $10^s\ 3^\circ\ 19'\ 18''$ dans l'ellipse. Les autres astronomes, quelques minutes de moins.

44. Cherchons la distance périhélie.

$$\begin{array}{rlrl} v\ldots & 0.0745093 & v'\ldots & 0.0629392 \\ \cos^2\tfrac{1}{2}u\ldots & 9.7053820 & \cos^2\tfrac{1}{2}u\ldots & 9.7169192 \\ \hline h = 0.602409 & 9.7798913 & h = 0.602363 & 9.7798584. \end{array}$$

Klinkenberg trouve 0.597075 dans sa parabole ; tous les astronomes, de 0.582 à 0.584 dans l'ellipse.

L'anomalie $u = 89^\circ\ 9'\ 9''$ répond dans la table à $107^j,219$,
l'anomalie $u = 87.34.54$ à $102,956$.

$$\begin{array}{rlrl} 107^j,219\ldots & 2.0302717 & 102^j,956\ldots & 2.0126518 \\ h^{\frac{3}{2}}\ldots & 9.6698369 & h^{\frac{3}{2}}\ldots & 9.6697876 \\ \hline 50^j,131 & 1.7001086 & 48^j,132 & 1.6824394 \\ T = & 21,25 & T' = & 23,25 \\ \hline p = & 71,381 & p' = & 71,382. \end{array}$$

C'est le tems du passage de la comète par le périhélie. Le 71e jour de l'année 1759 est le 12 mars; le passage a donc eu lieu le 12 mars à $9^{h}\ 9'\ 21'',6$. Tous les astronomes ont trouvé le 12 mars à 12^{h} ou 13^{h}.

45. On voit que le calcul d'une orbite n'est pas une chose si longue ni si difficile; toutes les opérations sont de la plus grande simplicité, et à l'exception des formules $(T'-T)$ et $\cot \frac{1}{4}(u'+u)$, bien simples elles-mêmes, les autres calculs sont ceux de l'Astronomie ordinaire. Il n'y a donc d'un peu long que les premiers essais, dans lesquels on est au moins guidé par des remarques faciles et qui abrègent les tâtonnemens.

Cette première ébauche de l'orbite, établie sur un arc de $1°\ 34'\ 15''$ ne saurait être d'une bien grande exactitude, on doit s'attendre qu'elle aura besoin de correction, mais l'approximation est telle qu'on peut s'en contenter; elle suffisait déjà pour reconnaître l'identité de la comète avec celle de Halley, qui faisait $h = 0.5825$, $\Pi = 10^{s}\ 1°\ 36'$, $\Omega = 1^{s}\ 20°\ 48'$, $I = 17.42.0$, et dans l'ellipse $h = 0.58328$, $\Pi = 10^{s}\ 2°\ 52'\ 45''$, $\Omega = 1.21.16.30$, $I = 17.56$. Il faut remarquer que par la précession en 76 ans, le nœud et le périhélie devaient être augmentés de $1°\ 3'\ 8''$; ainsi..... $\Pi = 10^{s}\ 3°\ 55'\ 53''$ et $\Omega = 1^{s}\ 22°\ 19'\ 38''$.

46. Par des recherches semblables, faites sur les observations des 25, 28 et 31 janvier, je déterminai une parabole peu différente. Je trouvai encore des élémens presqu'identiques, par les observations des 1, 3 et 4 février. J'avais trois paraboles trouvées chacune par des calculs indépendans de ceux des autres orbites; mais dans toutes ces observations, les anomalies surpassaient 78°; les anomalies paraboliques étaient toutes plus grandes que les anomalies elliptiques (6); à 78° la différence est nulle, ensuite elle change de signe. Les erreurs de l'hypothèse étant changées, je m'attendais bien à trouver des élémens différens par des observations plus voisines du périhélie. En effet, les observations des 11, 12 et 14 février me donnèrent une parabole très-différente.

Avec $u > 78°$ j'avais, par un milieu entre mes trois paraboles,

$h = 0.605253.$

Avec $u < 78°$, je trouvai ..... $h = 0.56941.$

Milieu..... $0.58733.$

$\Pi = 10.5.14.26$ $p = 71.571$ $\Omega = 1.23.13.35$ $I = 17.31.\ 1$
$\Pi = 10.1.\ 6.\ 7$ $p = 71.761$ $\Omega = 1.22.44.14$ $I = 17.52.40$

mil. 10.3.10. 6.... 71.666..... 1.22.59. 0.... 17.41.50.

Il est évident que toutes ces paraboles sont plus ou moins inexactes, le milieu entre toutes est ce qu'il y a de plus probable; mais cette parabole moyenne aura besoin de correction; elle se rapproche déjà des théories connues et qui ont été calculées sur un bien plus grand arc, dans l'autre branche, et sur des anomalies au-dessus et au-dessous de 78°. Mais personne, que je sache, n'a fait la remarque que le passage par 78° d'anomalie devait faire varier les élémens.

47. Je suppose donc $h = 0.58733$, $\Pi = 10^s\ 3°\ 10'\ 20''$, $p = 71.667$, $\Omega = 1.22.59.0$, $I = 17°\ 41'\ 50''$, et je calcule pour tous les jours d'observations L, λ et v, je forme ainsi le tableau suivant.

Lieux héliocentriques dans la parabole.

Jours.	L	λ	v	$d\lambda$	dv
Janv. 21	1. 4.49.58	5° 40′ 36″	1.19176	— 1′ 30″	+ 297
22	1. 4. 5.57	5.53.46	1.17556	— 1.45	+ 300
23	1. 3.20.42	5. 7.15	1.16013	— 1.41	+ 316
25	1. 1.46.13	6.35.10	1.12829	— 1.53	+ 309
27	1. 0. 6. 7	7. 4.21	1.09659	— 2. 6	+ 323
28	0.29.13.46	7.19.27	1.08077	— 2.10	+ 317
31	0.26.26.45	8. 6.49	1.03347	— 2.22	+ 313
Fév. 1	0.25.27.27	8.23.19	1.01775	— 2.54	+ 320
3	0.23.24.22	8.57.25	0.98649	— 2.42	+ 389
4	0.22.17.37	9.15. 0	0.97095	— 2.38	+ 335
11	0.13.30.45	11.27.59	0.86446	— 2.58	+ 394
12	0.12. 4. 6	11.48.14	0.84972	— 2.27	+ 353
14	0. 9. 1.31	12.29.19	0.82074	— 3.15	+ 450

Si nos élémens étaient exacts, chacun de nos L, de nos λ et de nos ν devrait s'accorder avec les tableaux des hypothèses; ainsi cherchant L dans le tableau du 21 janvier, je devrais trouver sur la même ligne $\lambda = 5° 40' 36''$; mais j'y trouve $5° 42' 6''$, ainsi mon λ est trop faible de $1' 30''$; c'est ce que montre la colonne des $d\lambda$. Je devrais trouver $\nu = 1.19176$, j'y trouve 1.18879, plus faible de 297; c'est ce que montre la colonne $d\nu$. Tous les ν sont trop forts et tous les λ trop faibles; le remède est facile. Pour augmenter les ν, on voit par les tableaux des hypothèses, qu'il faut diminuer les L. Si je diminue tous les L de $10'$, tous mes ν augmenteront de 360 à 560 parties; c'est plus qu'il ne faut. Je vois facilement qu'il suffira d'une diminution de $8'$; je retranche donc $8'$ à toutes mes longitudes, ce qui se fera en diminuant de $8'$ la longitude du périhélie. En effet, $L = u + \Pi$; donc L diminue avec Π. Les L étant diminués, la comète sera plus loin du nœud, qui est plus avancé; les latitudes augmenteront et les erreurs seront diminuées. J'essaie ce changement bien simple, et recommençant tous les calculs, je forme de la même manière le tableau suivant.

Jours.	L	λ	ν	$d\lambda$	$d\nu$
Janv. 21	1^s 4°42′ 17″	5°42′ 55″	1.16156	+ 0′ 46″	— 20
22	1. 3.58.18	5.56. 3	1.17556	+ 0.33	— 5
23	1. 3.12.59	6. 9.33	1.16013	+ 0.37	+ 25
25	1. 1.38.30	6.37.26	1.12829	+ 0.27	+ 3
27	0.29.58.23	7. 6.36	1.09659	+ 0.16	+ 19
28	0.29. 6. 1	7.21.40	1.08077	+ 0.13	+ 0
31	0.26.18.58	8. 9. 0	1.03345	+ 0. 5	+ 21
Fév. 1	0.25.19.40	8.25.29	1.01775	— 0. 1	+ 5
3	0.23.15.11	8.59.31	0.98649	+ 0. 2	+ 11
4	0.22. 9.48	9.17. 4	0.97094	— 0. 3	+ 6
11	0.13.22.48	11.29.51	0.86446	+ 0. 9	+ 26
12	0.11.56. 9	11.49.36	0.84972	+ 0.28	— 40
14	0. 8.52.51	12.31.13	0.82072	+ 0.46	+ 29

48. Il ne s'en faut donc plus que de ces légères quantités, que nos L, nos λ et nos v calculés, ne se trouvent sur une même ligne dans nos tableaux, et ne satisfassent par conséquent aux positions observées. Les $d\lambda$ ne passent pas 46″; on pourrait les réduire à moitié, en changeant de quelques minutes la longitude du nœud; mais une erreur héliocentrique de 46″ ne change que de 30″ environ la latitude géocentrique, parce que le rayon vecteur n'est guères que les deux tiers de la distance de la comète à la terre, et que $dg = \frac{v \cos \lambda d\lambda}{\varrho}$ à très-peu près.

Quant à l'erreur géocentrique qui résulte de dv, elle a pour expression $dG = \frac{dv}{\varrho} \cdot \frac{\sin(S+T)}{\sin 1''}$; la plus forte erreur $dv = 0.00040$, et $dG = \frac{82'',25 \sin(T+S)}{\varrho}$; ϱ surpasse l'unité. Le 21 janvier, $\varrho = 1.76$, $dG = 46'',9 \sin(S+T) = 21''$. Au lieu de $(S+T)$ vous pouvez mettre l'angle à la planète $(H-G)$ = différence des longitudes héliocentriques et géocentriques.

Ces erreurs sont assez petites pour être négligées; nous en conclurons que notre orbite, en diminuant Π de 8′, a toute l'exactitude qu'on peut desirer pour représenter l'arc parcouru, qui est de 26°, et qu'on peut, jusqu'à un certain point, satisfaire avec une parabole aux mouvemens d'une comète dont l'orbite est réellement une ellipse dans laquelle le demi-grand axe n'est que dix-huit fois la distance du soleil à la terre.

49. Une correction bien simple a fait disparaître à-la-fois les erreurs de longitude et de latitude; on ne sera peut-être pas toujours aussi heureux. Voici une méthode de correction plus générale.

Soient L, λ et v les quantités calculées d'après les élémens approximatifs.

$L + dL$, $\lambda + d\lambda$, $v + dv$ les quantités véritables.

L, Λ et V les quantités prises sur une même ligne dans nos tableaux.

Si nous entrons dans le tableau avec la longitude $L+dL$, Λ deviendra $\Lambda + d\Lambda = \Lambda + \frac{ndL}{10'} = \Lambda + \frac{ndL}{600''}$, n étant le nombre de parties dont Λ augmente pour $10'$ d'augmentation dans la longitude L; de même V deviendra..... $V + dV = V + \frac{mdL}{600''}$; nous ne connaissons pas dL, nous savons seulement que pour faire disparaître les erreurs, il faut que nous ayons $\Lambda + \frac{ndL}{600''} = \lambda + d\lambda$, et..... $V + \frac{mdL}{600''} = v + dv$.

De ces équations nous tirons

$$(\Lambda - \lambda) + \frac{ndL}{600''} = d\lambda \quad \text{et} \quad (V - v) + \frac{mdL}{600''} = dv :$$

or

$$L = u + \Pi, \quad dL = du + d\Pi; \quad v = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = h + h \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u,$$

$$dv = dh + dh \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u + v du \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u,$$

ou

$$du = \frac{dh}{\cos^2 \frac{1}{2} u} + v du \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u,$$

et par conséquent

$$(V - v) + \frac{m}{600''}(dv + d\Pi) = \frac{dh}{\cos^2 \frac{1}{2} u} + v du \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u,$$

d'où

$$0 = (V - v) + \left(\frac{m}{600}\right)(du + d\Pi) - v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u du - dh \operatorname{séc}^2 \tfrac{1}{2} u,$$

$$0 = (V - v) + \left(\frac{m}{600}\right) d\Pi + \left(\frac{m}{600} - v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u\right) du - dh \operatorname{séc}^2 \tfrac{1}{2} u.$$

Pour éliminer la variable du, soit T le tems de l'observation, p celui du périhélie, $t = T - p$, d'où $dt = -dp$.

Mais $$t = Ch^{\frac{2}{3}} (\operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u),$$

d'où je tire

$$du = \frac{2h^{\frac{1}{2}}dt}{3\,C\nu^2} - \frac{tdh}{C\nu^2 h^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi

$$0 = (V-\nu) + \left(\frac{m}{600}\right) d\Pi + \left(\frac{m}{600} - \nu \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\right) du - dh\left(\frac{\nu}{h}\right)$$

$$= (V-\nu) + \left(\frac{m}{600}\right) d\Pi + \left(\frac{m}{600} - \nu \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\right) \times \ldots$$

$$\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}dt}{3C\nu^2} - \frac{tdh}{C\nu^2 h^{\frac{1}{2}}}\right) - \left(\frac{\nu}{h}\right) dh$$

$$= (V-\nu) + \left(\frac{m}{600}\right) d\Pi + \left(\frac{\frac{m}{600} - \nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{\nu^2}\right)\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3C}\right) dt$$

$$- \left[\left(\frac{\frac{m}{600} - \nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{\nu^2}\right)\left(\frac{t}{Ch^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{\nu}{h}\right] dh$$

$$= (V-\nu) + \left(\frac{m}{600}\right) \sin d\Pi + \left(\frac{\nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}u - \frac{m}{600}}{\nu^2}\right)\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3C}\right) dp$$

$$+ \left[\left(\frac{\nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}u - \frac{m}{600}}{\nu^2}\right)\left(\frac{t}{Ch^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{\nu}{h}\right] dh.$$

Cette équation ne renferme plus que trois inconnues, qui sont les corrections des trois élémens de la parabole ; on pourrait donc les déterminer au moyen de trois observations choisies; mais il vaut bien mieux les chercher par la totalité des observations.

50. Corrigeons maintenant l'inclinaison et le nœud.

$$\operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang} I \sin(L - \Omega),$$

$$d\lambda = \text{séc}^2 I \cos^2\lambda \sin(L-\Omega)dI + \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)(dL - d\Omega)$$

$$= \text{séc}^2 I \cos^2\lambda \sin(L-\Omega)dI + \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)(du + d\Pi)$$

$$- \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)\, d\Omega$$

$$= (\Lambda - \lambda) + \left(\frac{n}{600}\right)(du + d\Pi),$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \left[\frac{n}{600} - \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)\right](du + d\Pi)$$

$$+ \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)d\Omega - \text{séc}^2 I \cos^2\lambda \sin(L-\Omega)dI,$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \left[\frac{n}{600} - \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)\right] d\Pi$$

$$+ \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)d\Omega - \text{séc}^2 I \cos^2\lambda \sin(L-\Omega)dI$$

$$+ \left[\frac{n}{600} - \text{tang} I \cos^2\lambda \cos(L-\Omega)\right]\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}dt}{3Cv^2} - \frac{tdh}{Cv^2h^{\frac{1}{2}}}\right).$$

On corrigera donc aussi le nœud et l'inclinaison d'après la totalité des observations; nous sommes ainsi parvenus à ramener le problème des orbites paraboliques aux méthodes aujourd'hui universellement adoptées pour les planètes.

51. Il reste à déterminer l'orbite elliptique, qui probablement est toujours la véritable. Ce problème présente deux cas : ou la comète est déjà connue comme celle de 1759, ou bien on la voit pour la première fois.

Si elle est connue, on a le grand axe; ainsi, au lieu de calculer $T' - T$ dans la parabole, on le calculera dans l'ellipse, et quand on aura calculé de cette manière deux intervalles $T' - T$ et $T'' - T'$, on aura trois rayons vecteurs et les deux angles compris, on aura tout ce dont on a besoin pour calculer l'ellipse. Quant au nœud et à l'inclinaison, les méthodes sont les mêmes pour l'ellipse et la parabole.

Si la comète est toute nouvelle et qu'une parabole en représente le cours d'une manière un peu passable, c'est tems perdu que de chercher une ellipse; si l'arc parcouru ne peut

se représenter qu'en le divisant en plusieurs arcs qui donnent des paraboles différentes, on peut essayer un demi-grand axe $= 20, 30, 40, 50$, etc. Si vous parvenez à satisfaire les intervalles $T' - T$ et $T'' - T'$, vous retomberez dans le premier cas.

Si le grand axe choisi ne satisfait pas à toutes les observations, vous en essaierez un autre jusqu'à ce que vous n'ayez plus que des erreurs qui rentrent dans les limites des erreurs d'observations, c'est-à-dire qui ne passent pas 1 ou 2'. Ce problème n'ayant eu jusqu'ici qu'une seule application réelle pour la comète de 1770, nous n'en dirons rien de plus.

52. La formule de Nicolic pour trouver les deux anomalies n'est bonne que pour la parabole. Dans l'ellipse

$$V = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos u} = \frac{a^2\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)}{a + e\cos u}$$

$$= \frac{a\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)}{1 + \frac{e}{a}\cos u} = \frac{a\cos^2\varepsilon}{1 + \sin\varepsilon\cos u};$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{a\cos^2\varepsilon} + \left(\frac{\sin\varepsilon}{a\cos^2\varepsilon}\right)\cos u,$$

$$\frac{1}{V'} = \frac{1}{a\cos^2\varepsilon} + \left(\frac{\sin\varepsilon}{a\cos^2\varepsilon}\right)\cos u',$$

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{V'} = \left(\frac{\sin\varepsilon}{a\cos^2\varepsilon}\right)(\cos u - \cos u')$$

$$= 2\left(\frac{\sin\varepsilon}{a\cos^2\varepsilon}\right)\sin\tfrac{1}{2}(u' - u)\sin\tfrac{1}{2}(u' + u),$$

$$\frac{1}{V} + \frac{1}{V'} = \frac{2}{a\cos^2\varepsilon} + \frac{\sin\varepsilon}{a\cos^2\varepsilon}(\cos u + \cos u')$$

$$= \frac{2 + 2\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}(u' - u)\cos\frac{1}{2}(u' + u)}{a\cos^2\varepsilon};$$

$$\frac{V'-V}{V'+V}=\frac{\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}(u'-u)\sin\frac{1}{2}(u'+u)}{1+\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'+u)}$$

$$=\frac{1-\frac{V}{V'}}{1+\frac{V}{V'}}=\frac{1-\operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\varphi}=\cot(45^\circ+\varphi)=\cot\varphi',$$

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{V}{V'};\ \varphi'=\varphi+45^\circ;\ \cot\psi=\cot\varphi'\cot\tfrac{1}{2}(u'-u),$$

d'où $\cot\varphi'=\cot\psi\operatorname{tang}\frac{1}{2}(u'-u)$, et

$$\sin\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)=\cot\varphi'$$
$$+\cot\varphi'\sin\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u),$$

$$\cot\varphi'=\sin\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)$$
$$-\cot\varphi'\sin\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u),$$

$$\frac{\cot\varphi'}{\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}(u'-u)}=\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)-\frac{\cot\varphi'\cos\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'+u)}{\sin\frac{1}{2}(u'-u)},$$

$$\frac{\cot\psi\operatorname{tang}\frac{1}{2}(u'-u)}{\sin\varepsilon\sin\frac{1}{2}(u'-u)}=\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)-\cot\varphi'\cot\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u),$$

$$\frac{\cot\psi}{\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)}=\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)-\cot\psi\cos\tfrac{1}{2}(u'+u),$$

$$\frac{\cos\psi}{\sin\varepsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)}=\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)\sin\psi-\cos\psi\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)$$
$$=-\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right),$$

ou $\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)=-\dfrac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)\left(1-\frac{h}{a}\right)}$,

et $$\log\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)=-\log\left(\frac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}\right)$$
$$-K\left(\frac{h}{a}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\text{etc.}\right).$$

Si $\frac{h}{a}=0$, la formule convient à la parabole.

On connaît $\frac{h}{a}=m$ à fort peu près; on aura donc assez

exactement $\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)$. On en retranchera ψ, il restera $\frac{1}{2}(u'+u)$: on a $\frac{1}{2}(u'-u)$, on aura donc u' et u et la longitude du périhélie ; $a=\frac{V(1+\sin\varepsilon\cos u)}{\cos^2\varepsilon}=\frac{V'(1+\sin\varepsilon\cos u')}{\cos^2\varepsilon}$. Si a ne se retrouve pas tel qu'on l'a supposé, on recommence le calcul avec la nouvelle valeur de a jusqu'à ce que tout s'accorde.

Cette méthode est indirecte : avec trois observations, c'est-à-dire trois longitudes sur l'orbite et les trois rayons vecteurs, on a des méthodes pour trouver les trois élémens de l'ellipse ; j'en ai donné plusieurs avec des exemples au chapitre XXI de mon Traité d'Astronomie, mais ces méthodes ne sont pas bien indispensables pour les comètes ; nous n'en dirons pas davantage.

53. De toutes les comètes qui ont été observées, il n'y a que celle de 1759 dont l'ellipse soit passablement connue ; et il y a grande apparence qu'on se serait contenté de la parabole, si Halley n'avait remarqué plusieurs retours à 75 et 76 ans d'intervalle. La comète de 1770 est la seule qu'on n'ait pu calculer dans la parabole ; mais il faut que son ellipse ait éprouvé de bien grandes variations, puisqu'elle n'a point reparu depuis 42 ans, quoiqu'elle ait dû revenir sept fois depuis sa première apparition. On croit, avec beaucoup de vraisemblance, que Jupiter, dont elle a dû passer très-près, a causé ces grandes variations. Quoi qu'il en soit, elle n'a point reparu ; et son ellipse, déterminée par Lexell et Burckhardt, nous sera désormais inutile. On a essayé quelquefois des orbites hyperboliques, mais sans grande nécessité : les méthodes exposées ci-dessus suffiront probablement toujours, et nous nous y bornerons ; c'est là pour le présent tout ce qui importe à l'Astronomie.

54. Le public ne s'intéresse aux comètes que quand elles présentent un spectacle extraordinaire : telle a dû être la comète de l'an 117 ou 118, qui était grande comme le soleil, ou celle de l'an 479, qui, suivant Fréret, pourrait avoir causé

une

une éclipse extraordinaire de soleil, observée en ce même tems, au rapport de quelques auteurs; ou celle qui, selon Gainas, fut vue à Constantinople, en l'an 400; elle avait la forme d'une épée, et s'étendait du zénit presque jusqu'à l'horizon. Mais depuis que ce sont des astronomes qui nous donnent l'histoire et la description des comètes, on n'en voit plus qui soient aussi grandes et aussi brillantes que la lune : ce n'est pas que la chose soit impossible; mais de toutes les comètes connues, celle qui s'est le plus approchée de la terre est celle de 1770, qui n'en était pas à 800,000 lieues, et celle-là n'a tourmenté que les astronomes. Il est donc fort probable qu'il y a de l'exagération dans les récits d'historiens superstitieux et privés de connaissances astronomiques.

55. On distingue dans une comète le noyau qui est la partie la plus lumineuse, la plus dense et le corps véritable de la comète. Mais ce corps est peu compact; quelques astronomes ont cru même qu'il était diaphane, et ont cru voir quelquefois une étoile à travers; mais en supposant l'observation sûre, on peut y voir un effet de réfraction, et d'ailleurs il n'est pas aisé de distinguer parfaitement le noyau de la nébulosité qui l'entoure. Ce noyau devrait avoir des phases; Hévélius, Picard et la Hire en ont vues à la comète de 1682. La figure en croissant est nettement dessinée dans les registres de l'Obvatoire. La nébulosité qui entoure la comète peut empêcher le plus souvent de discerner les phases, comme un globe de verre dépoli qui enferme une lampe, empêche de distinguer la forme de la flamme. Quelques auteurs pensent que les comètes et peut-être aussi les planètes ont une lumière qui leur est propre. M. Herschel croit qu'une matière nébuleuse extrêmement rare et foiblement lumineuse est partout répandue dans l'espace, qu'il s'y trouve quelques points plus denses qui forment des centres d'attraction autour desquels le reste se réunit peu à peu; que par cette condensation et ce déplacement, il se forme des corps qui peuvent circuler autour du centre commun de gravité; que la condensation, poussée à un certain point, a produit les comètes, et que les planètes sont

dues à une condensation plus parfaite. Ces idées sont trop nouvelles pour être généralement adoptées, et le doute est encore permis : ce qu'il y a de sûr, c'est que les comètes sont peu denses. On n'a encore aperçu dans les planètes aucun dérangement qu'on pût leur attribuer : la comète de 1770 a passé entre Jupiter et ses satellites, sans y causer aucune perturbation sensible; ainsi, même pour l'astronome, les comètes ne sont guère qu'un objet de curiosité.

56. L'atmosphère de la comète et sa nébulosité sont ce qu'on appelle la chevelure et quelquefois la barbe, quand elle se prolonge d'un côté plus que de l'autre : si elle se prolonge considérablement, elle prend le nom de queue. Dans la figure de la célèbre comète de 1680, que je copie de l'Histoire céleste de Lemonnier (fig. 139), on distingue le noyau ou le disque avec son atmosphère ronde; au-dessus est une espèce de demi-anneau plus large au sommet, plus étroit sur les côtés : dans l'autre moitié à cet anneau se joint et succède une barbe un peu plus longue; vient ensuite une longue queue, en forme de cône alongé, d'une lumière moins vive que celle de la tête.

57. La queue la plus remarquable dont nous ayons une description exacte, est celle de la comète de 1744. Dans la figure que je donne ici d'après Chézeaux (fig. 140), on voit à la queue six branches plus ou moins longues, mais toutes divergentes et sensiblement courbées dans le même sens, à travers desquelles on voit des étoiles. A l'instant où l'on a fait le dessin, la tête de la comète était sous l'horizon, et des lignes ponctuées indiquent la partie invisible des six branches. Les comètes de 1807 et de 1811 ont eu des queues moins remarquables, les plus belles cependant qu'ait pu voir la génération actuelle. La dernière avait une queue composée de deux parties divergentes, sous un angle qui a varié de 90 à 15 ou 20°; elles étaient courbes toutes deux en sens contraire, et descendaient de la tête, comme une espèce de voile; entre les deux branches et autour de la tête même était un espace obscur au moins par comparaison.

La queue de la comète est la seule partie à laquelle le

public, et sous ce nom je comprends tous ceux qui n'ont aucune idée des sciences, prenne une espèce d'intérêt. Dites-lui que sur trois observations, même fort voisines, un astronome détermine tout le cours visible de la comète ; qu'il peut assigner la distance au soleil, le lieu du périhélie et le tems du passage, le lever et le coucher de la comète pour tout le tems de son apparition, et toutes les étoiles auprès desquelles elle passera successivement, il ne vous comprendra, ni même ne vous écoutera, mais il voudra savoir ce qui produit cette queue et ses variations continuelles et souvent assez brusques. Malheureusement la réponse à ces questions n'est pas aisée.

La comète se meut dans un orbite fort excentrique : dans la presque-totalité de sa révolution, elle est à une distance si énorme, qu'elle a dû se refroidir à un degré dont nous n'avons pas d'idée. A mesure qu'elle s'approche du soleil, et surtout dans les jours voisins du périhélie, elle éprouve une chaleur insolite qui doit vaporiser à sa surface tout ce qui en est susceptible ; de là cette atmosphère dont on la voit entourée. Quand l'excès de chaleur a donné à cette atmosphère toute la légéreté, la volatilité possibles, alors l'impulsion donnée à ces vapeurs par les rayons solaires, quelque faible qu'on la suppose, suffit pour leur donner un mouvement qui alonge prodigieusement la chevelure dans le sens opposé au soleil. Aussi observe-t-on que les queues sont remarquables, surtout après le passage au périhélie, et que toujours elles sont dans une direction qui est le prolongement de la ligne menée du centre du soleil au centre de la comète. Apian en a le premier fait la remarque ; mais cette queue a le plus souvent une légère courbure, en voici la raison. Les vapeurs mues par l'impulsion de la lumière ne s'élèvent pas avec une grande rapidité ; pendant qu'elles s'élèvent lentement, la comète s'avance dans son orbite ; les vapeurs détachées de la comète ne la suivent plus dans sa marche, et l'extrémité de la queue est la partie dont la déviation est la plus sensible. Cette explication, qui est de Newton, rend raison des principaux phénomènes ; tout va bien quand les diffé-

rentes branches ont la même courbure comme en 1744; mais quand les deux branches ont une courbure opposée comme en 1811, il faut chercher des explications ultérieures qu'on n'a pas encore trouvées. Au reste, peut-on nous faire un reproche de n'avoir pas une connaissance parfaite de l'atmosphère des comètes; connaissons-nous les phénomènes de notre propre atmosphère? Les astronomes mesurent la queue de la comète, l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur; c'est aux physiciens à rendre raison, s'ils peuvent, des phénomènes observés. Ainsi, dans l'Histoire céleste de Lemonnier, vous trouverez jour par jour ces distances et ces angles. Voilà les faits; il faut bien qu'on nous pardonne d'ignorer ce que nous ne pouvons pas connaître.

58. On a cru long-tems que les comètes étaient des annonces de la colère céleste; ces terreurs sont évanouies depuis qu'on sait calculer la marche de ces astres: mais cette théorie même a fait naître d'autres craintes qui ne sont guères au fond plus raisonnables, et que du moins le calcul peut dissiper toutes les fois qu'elles se renouvellent. On craint que la comète ne tombe sur la terre: si elle pouvait tomber, ce serait sur le soleil, et elle n'y ferait grand dommage; mais elle pourrait rencontrer la terre, et le choc serait terrible. En général, cette idée n'a rien d'impossible; mais aucune comète connue ne peut rencontrer la terre.

Si la distance périhélie est plus grande que la distance de la terre au soleil, l'orbite de la comète, même en la supposant couchée sur l'écliptique, embrassera l'orbite de la terre à une distance plus ou moins grande, et qui doit prévenir toutes les alarmes.

Si la distance périhélie est moindre, et que la comète soit couchée sur l'écliptique, ce qui n'est vrai d'aucune comète connue, l'ellipse de la comète coupera celle de la terre en deux points. Pour que le choc fût possible, il faudrait que la terre et la comète se trouvassent ensemble au même instant à la même intersection, ce qui serait un hasard si singulier et si peu probable, que nous devrions encore être fort tranquilles.

Mais toutes les comètes ont une inclinaison à l'écliptique et le plus souvent fort considérable ; ensorte que quand le rayon vecteur est 1, la latitude est si forte, que la comète passerait beaucoup au-dessus ou au-dessous de la terre ; il faudrait que la distance $= 1$ concourût avec le passage par le nœud, ce qui n'est encore vrai d'aucune comète connue. Aucune comète observée jusqu'ici n'est donc à craindre, et et elles ont toutes passé sans nous faire le moindre mal : il est vrai que le premier jour où l'on aperçoit une comète, on ne sait quelle est sa route ; mais au bout de trois jours, l'astronome peut dire si elle approche ou s'éloigne, à quelle distance elle passera ; et quand le public aperçoit la comète, la route en est déjà calculée, et il n'y a plus rien à craindre. Longtems avant que la comète de 1811 inspirât la terreur ou la curiosité ignorante, on avait mis dans les journaux la route qu'elle devait tenir, et personne n'y avait fait attention, parce qu'elle n'était encore visible que dans les lunettes.

59. La comète ne serait redoutable que dans son nœud ; quand elle est dans son nœud, son anomalie $= u = (☊ - \Pi)$, sa distance $= \dfrac{h}{\cos^2 \frac{1}{2}(☊ - \Pi)}$; si cette distance diffère beaucoup de l'unité, la comète n'est pas dangereuse ; si sa distance est l'unité, il faut ensuite comparer la longitude héliocentrique de la terre à la longitude du nœud ; on sait le tems du passage par le périhélie, le tems de l'anomalie $(☊ - \Pi)$; on sait pour ce tems la longitude héliocentrique de la terre ; on connaît les deux rayons vecteurs et l'angle compris, on peut calculer la corde qui est la distance de la terre à la comète. Soit K cette corde,

$$K^2 = V^2 + \nu^2 - 2V\nu \cos \tfrac{1}{2}\,\text{angle} = V^2 + \frac{h^2}{\cos^4 \frac{1}{2}(☊ - \Pi)} - \frac{2Vh \cos(☿ - ☊)}{\cos^2 \frac{1}{2}(☊ - \Pi)}.$$

60. Sans choquer la terre, la comète pourrait approcher

assez près pour causer, par son attraction, quelques fortes marées qui pourraient produire des inondations; mais on a répondu que la comète passant près de la terre, passerait si rapidement que son attraction n'aurait pas le tems nécessaire pour vaincre l'inertie des eaux, et que les effets seraient très-médiocres. D'ailleurs aucune comète connue ne peut approcher assez près. Duséjour a calculé ces effets pour 13000 lieues de distance, et la comète de 1770, qui est, de toutes, celle qui a le plus approché, était encore à près de 800,000 lieues. Il n'y a donc en tout cela rien que de très-rassurant, et c'est parce qu'on n'avait pas lu le Mémoire de Lalande, que les idées qu'il avait mises en avant comme de simples possibilités excessivement invraisemblables, causèrent en 1774 des terreurs si extravagantes. Au reste, Duséjour combattit même cette probabilité si faible, par des argumens péremptoires.

61. Si la terre ne peut être rencontrée par le corps même de la comète, ne pourrait-elle au moins se trouver enveloppée et embrasée dans cette longue queue qui s'étend à plusieurs millions de lieues? D'abord, il n'est pas sûr que la queue soit embrasée, et l'on sait qu'au contraire Whiston a voulu expliquer le déluge universel par la queue de la comète de 1680, qui a pu alors se trouver près de la terre : l'ouvrage de Whiston est mis aujourd'hui au nombre des romans scientifiques. Mais pour que la terre se trouve engagée dans la queue, il faudrait que la comète fût en conjonction inférieure ou à peu près, et qu'elle fût en même tems dans son nœud, circonstances très-difficiles à réunir, quand elles ne sont pas tout-à-fait impossibles. Ce dernier sujet de crainte, moins grave par lui-même, n'a donc pas plus de probabilité que les autres; concluons donc que les comètes ne peuvent offrir au public qu'un spectacle quelquefois remarquable, et aux savans qu'un sujet de méditations, enfin à l'astronome, qu'une matière souvent renaissante de calculs qui n'ont pourtant d'autre but que de tracer, pour ainsi dire, le signalement de la comète, pour qu'on puisse la reconnaître quand elle

reparaîtra, et déterminer l'ellipse qu'il faudra substituer à la parabole approximative qu'on est réduit d'abord à employer, faute de données nécessaires pour fixer la courbe véritable. C'est dans cette vue que les auteurs d'Astronomie ont donné des listes de comètes qui s'augmentent continuellement, et qne les bornes de cet ouvrage nous empêchent d'insérer ici.

LEÇON XXII.

Des Satellites.

1. Les satellites sont des planètes du second ordre, qui circulent autour des planètes principales; ainsi la lune est le satellite de la terre, mais vu son importance pour nous, il a fallu en traiter à part. Nous allons nous occuper des lunes des autres planètes. Celles de Jupiter sont les plus utiles, les plus faciles à observer, les plus anciennement connues, c'est par elles que nous devons commencer. Elles ont été découvertes par Galilée; Simon Marius et quelques autres astronomes prétendirent qu'ils les avaient vues plus tôt; mais outre que leurs assertions ne sont rien moins que démontrées, cette découverte suivait si naturellement celle du télescope, que l'honneur en reviendrait toujours à Galilée.

2. En observant Jupiter, il vit autour de lui plusieurs petites étoiles rangées presque sur une même ligne droite, dans le prolongement des bandes. Ces étoiles suivaient constamment Jupiter, mais elles changeaient continuellement de position entr'elles. Jamais elles ne s'en éloignent au-delà de certaines limites qui sont toujours les mêmes pour le même satellite, et servent à le distinguer. Le mouvement moins rapide vers la limite indiquait assez naturellement un cercle vu par son épaisseur et dont les arcs, comptés du milieu ou du centre de Jupiter, ont leur sinus pour projection orthographique.

Soit T la terre (fig. 141), C le centre de Jupiter entouré des orbites de ses quatre satellites; le premier satellite placé en A sur son orbite, serait vu sur le disque même dont il occuperait le centre; à 90° de là en a, sa distance au centre serait $Ca = AC \sin 90°$; on dira la même chose des trois autres satellites, B, C, D.

Quelquefois ces satellites paraissent à la droite de Jupiter; ils s'en rapprochent, disparaissent derrière la planète, reparaissent ensuite à la gauche; leur digression est de même grandeur que celle qui a été observée à droite; ils reviennent de a' en A, et leur marche est dirigée d'occident en orient, comme celle de toutes les planètes; ils passent sur le disque de Jupiter, il est presque impossible de les y distinguer, mais on voit alors une tache noire qui est une éclipse partielle de Jupiter; quand les satellites sont en conjonction supérieure pour le soleil, ils doivent, comme notre lune, se plonger dans l'ombre conique que Jupiter doit projeter, et c'est ce qui arrive en effet presque toujours.

3. On se contenta long-tems d'observer les configurations des satellites entr'eux; on avait bien aperçu leurs éclipses, mais les lunettes n'étaient pas assez fortes pour les bien distinguer. On avait donc tâché de déterminer les révolutions par le tems écoulé entre deux digressions, toutes deux orientales ou occidentales; mais les éclipses sont des moyens beaucoup plus sûrs.

4. L'axe du cône d'ombre est toujours le prolongement du rayon vecteur de Jupiter; ce rayon vecteur fait avec la distance TC de la terre à Jupiter, un angle qui peut varier depuis 0° jusqu'à 12°. Quand le premier satellite entre dans l'ombre en e, il peut être vu de la terre, si le soleil est couché; quand il en sort en s, il est caché par Jupiter.

Le second satellite, qui a une orbite plus grande, est par là dans une situation plus favorable; on peut, quand la parallaxe annuelle de Jupiter est grande, voir l'entrée et la sortie.

Pour le troisième et le quatrième, on voit presque toujours

l'entrée et la sortie; quand la parallaxe est négative, que la terre est de l'autre côté du rayon vecteur de Jupiter, ce sont les entrées qui sont plus rares, mais les sorties sont plus faciles, et l'on voit toujours l'une des deux phases de l'éclipse.

5. Le milieu de l'éclipse est sensiblement le tems de la conjonction héliocentrique; le tems écoulé entre deux milieux d'éclipses consécutives est sans erreur sensible le tems de la révolution synodique, qui est toujours de 360° de mouvement relatif; ajoutez-y le mouvement de Jupiter dans l'intervalle, vous avez le mouvement total du satellite. Vous connaissez ainsi sa révolution avec assez d'exactitude; prenez un intervalle de 2, 3, 10, 100, 1000 révolutions, vous la connaîtrez avec plus de précision. C'est ainsi que les Grecs ont déterminé les mouvemens de la lune.

6. Mesurez dans les digressions la distance au centre de Jupiter, comparez ces distances aux tems des révolutions sidérales, qu'il est aisé de conclure des révolutions synodiques, et vous verrez que ces petites planètes suivent la loi de Képler, et quand vous aurez vérifié cette loi, vous pourrez vous en servir pour calculer la révolution du premier satellite, qui est plus difficile à déterminer, parce que ne pouvant observer que l'une des phases, on n'a jamais directement le tems du milieu, ni celui de la conjonction.

Jupiter et ses satellites ont donc une grande analogie avec le soleil et ses planètes. Jupiter nous offre un petit monde où l'on aperçoit tous les phénomènes qui ont lieu dans le grand; et comme les révolutions sont plus promptes, les changemens sont aussi plus rapides; et M. Laplace a tiré un grand parti de cette remarque qui est de lui.

7. Si l'orbite du satellite était couchée sur l'écliptique de Jupiter, c'est-à-dire sur le plan de son orbite, le satellite traverserait le cône d'ombre par l'axe; l'éclipse serait centrale et toujours de la même durée, à moins que l'orbite ne soit elliptique. Soit EC (fig. 142) l'orbite de Jupiter, l'orbite inclinée du satellite : si la conjonction arrive dans le nœud, l'éclipse sera encore centrale; mais à une certaine distance

du nœud, l'orbite *cd* du satellite ne passera plus par le centre; le satellite décrira une corde plus ou moins grande, mais toujours moindre que le diamètre; l'eclipse sera plus courte, les plus longues éclipses observées seront censées dans le nœud dont elles donneront la position; les plus courtes seront observées dans la limite, et donneront l'inclinaison; avec l'inclinaison et le nœud, on saura en tout tems calculer la durée de l'éclipse, le commencement et la fin.

8. La figure sensiblement aplatie de Jupiter fait que l'ombre n'est pas un cône droit, que la section n'en est pas circulaire, mais elliptique; il en résulte une légère complication dans la formule. J'avais déterminé cette formule; M. Laplace en a donné une autre plus commode, et dont l'erreur est presque insensible : je m'en suis contenté pour mes tables.

9. On conçoit qu'avec beaucoup de patience, et par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses, on ait pu composer des tables écliptiques pour les satellites de Jupiter. Il suffisait pour cela des mouvemens moyens, des tems des conjonctions, de la position du nœud et de l'inclinaison; mais les orbites des satellites sont elliptiques, à la réserve pourtant de celle du premier satellite auquel je n'ai pu, malgré de longues recherches, trouver aucune équation du centre. Il résulte de là une première inégalité pour le tems de la conjonction et la durée du tems pour une corde donnée.

Ces quatre satellites ne peuvent circuler si près les uns des autres, sans se troubler réciproquement; il en doit résulter des équations pareilles à celles que nous trouvons pour les mouvemens de la lune et plus variées encore, mais la petitesse de l'orbite et l'éloignement rendent les petites équations insensibles; il en est dont on a reconnu l'existence, sans en pouvoir d'abord assigner la valeur précise.

Les nœuds et les inclinaisons ont aussi leurs variations; tout cela était difficile à démêler.

10. Enfin nous ne voyons jamais l'entrée ou la sortie à l'instant où elle arrive; la lumière emploie 8′ 13″ à venir du soleil; la distance de Jupiter est 5,2 aussi grande; il faudra donc

493″ × 5,2 à la lumière pour arriver de Jupiter. Le satellite, quand il s'éclipse, est toujours plus éloigné de nous que Jupiter; il faudra donc ajouter au tems de la lumière quelques secondes en nombre proportionnel au rayon vecteur du satellite multiplié par le cosinus de la parallaxe annuelle augmentée ou diminuée de l'arc que fait avec l'axe de l'ombre le rayon vecteur du satellite. Cette équation avait du moins l'avantage de n'être plus contestée, et celui d'être bien connue depuis la découverte de l'aberration. Mille éclipses du premier satellite que j'ai fait servir à cette recherche, m'ont conduit à ce nombre de 493″, qui résultait de la totalité des observations de Bradley et de l'aberration de 20″,25 qui s'en déduit. Voilà une première difficulté entièrement levée.

11. Quant aux perturbations, on avait aisément remarqué que les satellites et surtout les trois premiers reviennent aux mêmes positions respectives en 437 jours, on en conclut que tous les dérangemens devaient s'accomplir dans cette période, et revenir continuellement les mêmes à fort peu près. Wargentin s'en servit pour établir les équations du mouvement des trois satellites; c'est lui qui donna le premier des tables un peu exactes de ces éclipses; mais il serait injuste de ne pas se souvenir des grands travaux de D. Cassini, de Pound, de Bradley et de Maraldi. Pound mesura exactement les digressions; Bradley suivit long-tems le premier satellite, et en fit des tables; Cassini en fit pour les quatre, Maraldi découvrit le mouvement des nœuds et des variations d'inclinaison. Wargentin fit de toutes ces recherches l'usage le plus heureux et le mieux entendu; il trouva dans le troisième satellite, des équations très-singulières, qu'il avait d'abord présentées sous la forme véritable et séparément; il voulut ensuite les réunir ce qui était moins heureux : on sentait le besoin d'une théorie pour guider l'astronome dans ce labyrinthe. Bailly s'en occupa le premier; il appliqua séparément à chaque satellite la théorie lunaire de Clairaut, et il eut la gloire de constater par l'analyse les inégalités principales des trois premiers satellites; le quatrième a une ellipticité plus sensible et presque égale à celle de Vénus.

L'Académie proposa ce sujet pour un prix qui fut remporté par M. Lagrange, qui, en grand maître, ouvrit une route nouvelle; il considéra à la fois l'ensemble du système, et résolut le problème des six corps, car il tint compte aussi des effets du soleil. C'était un grand pas, ce n'était pas tout encore : dans un sujet si grand et si difficile, il n'eut pas le loisir de développer toute sa théorie; il démontra d'une manière plus solide et plus élégante, les équations déjà démontrées par Bailly, en trouva quelques autres, mais moins importantes, et l'on n'avait pas songé à en déduire de nouvelles tables; on se contenta de voir enfin rentré dans le domaine de l'analyse des inégalités qui occupaient depuis si long-tems les astronomes.

12. M. Laplace reprit cette matière, et la traita à son tour dignement et en grand maître; sa théorie, plus complète et plus développée, paraît suffire pour avoir de bonnes tables; ses formules sont l'expression de toutes les inégalités qu'il a cru pouvoir être sensibles, et de quelques-unes même qu'il donnait seulement comme possibles absolument, et dont il m'a été impossible de trouver pour le présent la moindre trace. L'ouvrage du géomètre était achevé, mais il restait beaucoup à faire à l'astronome. Ces formules renfermaient les masses inconnues des satellites, l'aplatissement et d'autres indéterminées au nombre de 17, qu'on ne pouvait connaître que par les observations. En décomposant les tables elliptiques de Wargentin, j'en conclus les moyens mouvemens et les époques par la comparaison avec mes tables de Jupiter. Je mis le tout en tables, dans la forme ordinaire employée pour la lune; j'y ajoutai les principales équations dont les valeurs approximatives étaient déjà connues par observation. M'étant ainsi procuré une première approximation, je formai des tables écliptiques dans la forme de celles de Wargentin : mon dessein était d'y comparer la totalité des éclipses pour avoir une connaissance plus précise des constantes arbitraires. L'Académie proposa pour sujet d'un prix les tables des satellites. Le tems donné me força de renoncer pour le moment au

plan que je m'étais formé, sauf à le reprendre par la suite. Mes premières tables n'étaient guères fondées que sur deux mille éclipses, mais calculées plusieurs fois et avec tout le soin dont j'étais capable : elles remportèrent le prix. Lalande les a imprimées dans la troisième édition de son Astronomie; il dit dans la préface, que je m'en suis occupé deux ans, il ne compte guère que du programme de l'Académie : le fait est que je m'en étais occupé beaucoup plus tôt, et je pourrais dire que les premières tables m'ont coûté quatre ans d'un travail qui m'en coûterait plus de dix aujourd'hui. Tous les astronomes les ont adoptées et s'en servent encore.

Les travaux de la méridienne et la suppression de l'Académie qui suivit bientôt, m'empêchèrent de publier mon Mémoire. M. Laplace l'a extrait dans deux mémoires imprimés dans les volumes de 1789 et 1790. Il me suffira de dire qu'ayant formé pour chaque éclipse une équation de condition, j'en tirais, à la manière connue, toutes les inconnues qui devaient me donner la correction de mes tables; mais non-content de ce premier résultat, je l'appliquais aux tables et j'essayais les nouvelles corrections dont elles pouvaient avoir besoin. Ainsi, après l'élimination générale, je fis encore, pour le quatrième satellite particulièrement, jusqu'à six systèmes différens de corrections, que je comparai de nouveau aux observations pour savoir quel était le meilleur.

13. Une difficulté particulière à cette théorie, c'est l'incertitude des observations. Pour le premier satellite même qui entre et sort de l'ombre d'un mouvement plus rapide, il n'est pas rare de voir deux observations d'une même éclipse différer entre elles d'une demi-minute; pour le second, la différence est plus que double; pour le troisième, elle peut aller à 3′, et à plus de 4 pour la quatrième. Les tables construites sur la totalité des observations ne peuvent donner les éclipses que pour des vues moyennes, des lunettes moyennes et un état moyen de l'atmosphère. D'autres causes encore influent sur la bonté des observations : si Jupiter est trop voisin de l'horizon, si Jupiter est trop près du soleil, ou le satellite trop

près de Jupiter, l'observation devient incertaine ; c'est pourquoi je ne balance pas d'affirmer que généralement une éclipse calculée sur ces tables est plus sûre que l'observation faite en un seul lieu par un seul observateur. Mais si l'on a une suite d'éclipses observées en différens lieux dans l'espace d'un mois, et que la différence entre les tables et les observations soit à peu-près constante, on pourra regarder la moyenne comme l'erreur probable de ces tables, et s'en servir pour calculer la longitude d'un lieu inconnu où l'on aura observé une de ces éclipses ; mais à l'ordinaire, quand on n'aura qu'une observation correspondante, dans un seul lieu connu, le plus sûr sera de regarder comme différence des longitudes, la différence entre l'immersion ou l'émersion observée, et le calcul des tables qui sont en tems moyen de l'Observatoire de Paris. C'est ce qu'a fait M. Humboldt, pendant son voyage d'Amérique. Quand on avait des tables plus imparfaites, on avait raison de se méfier du calcul, et aujourd'hui même, pour les différences des méridiens, on fera bien de se borner au premier satellite, ou tout au plus au second, mais avec quelque circonspection. Quand on voit l'immersion et l'émersion dans une même éclipse, on prend ordinairement le milieu entre les deux résultats ; il est douteux que cette pratique soit la plus sûre. Celle des deux phases, qui s'observe plus près du disque, pourrait bien être beaucoup plus incertaine que l'autre ; dans tous les cas, on doit bien s'attendre à une erreur de quelques secondes. Cette manière de trouver la longitude, si elle n'est pas la plus exacte, est au moins la plus commode ; il n'en coûte que la peine de réduire en tems moyen son observation, et de comparer ce tems à celui de la même phase calculée pour Paris dans la Connaissance des Tems. Le résultat est de beaucoup préférable à celui d'une éclipse de lune, et les occasions sont bien plus fréquentes, puisque le premier satellite s'éclipse régulièrement à des intervalles de 42 heures. Il faut excepter les tems où Jupiter est perdu dans les rayons du soleil ; il faut alors se passer des satellites. Les éclipses du second ne reviennent guère que

tous les quatre jours, celles du troisième tous les sept jours, et celles du quatrième tous les dix-sept jours. Ce dernier, dont l'inclinaison est plus considérable, est quelquefois assez long-tems sans s'éclipser; mais quand il perd sa lumière, ainsi que le troisième, on voit toujours l'immersion et l'émersion. Pour le second, rarement peut-on observer les deux phases; jamais on ne le peut pour le premier, et il serait plus vrai de dire qu'il y a des tems où l'une et l'autre phase est invisible.

14. Il est à craindre qu'on ne puisse de long-tems, et peut-être jamais, donner plus de précision aux tables des satellites; ce serait plutôt l'observation qu'il faudrait tâcher de rendre plus exacte; mais comme elle dépend de l'état de l'atmosphère, des yeux de l'observateur, plus ou moins perçans, de la bonté du télescope, il sera bien difficile d'obtenir que les observations soient vraiment comparables; et comme tous les astronomes, et surtout les voyageurs, ne peuvent avoir en leur possession ces grands télescopes qui font voir les immersions plus tard, et les émersions plus tôt, il convient, à ce qu'il me semble, de n'observer les éclipses qu'avec des lunettes médiocres, telles qu'on peut les avoir en voyage. Il nous importe moins de savoir l'instant où un satellite entre dans l'ombre ou en sort, que celui où le voyageur cessera de le voir ou le verra reparaitre.

15. Malgré ces réflexions j'ai repris mon premier plan, de faire des tables sur la totalité des observations faites depuis l'origine jusqu'à nos jours. J'ai, pour chaque éclipse, formé une équation de condition qui devait contribuer à me donner les corrections de mes tables de 1792. J'ai éliminé de nouveau, et pour diminuer un peu un travail aussi long, M. Laplace a fait calculer, d'après ma dernière élimination, les masses des satellites et les coefficiens qui en résultent pour les diverses équations. Je me suis servi de ces calculs pour composer de nouvelles tables dont j'ai de même calculé les erreurs, pour avoir des équations de condition auxquelles on pourra en ajouter d'autres dans dix ou vingt ans, pour

corriger mes secondes tables, qui sont imprimées depuis 3 ans et qui n'ont point encore paru. Il ne reste à composer que quelques pages du Discours préliminaire, et à réimprimer une table des époques du second satellite, qui s'est trouvée défectueuse. L'impression de mon Traité d'Astronomie, en trois vol. *in*-4°, a retardé cette publication, dont je vais bientôt m'occuper, après quoi je mettrai en ordre toutes mes dernières équations de condition, pour que ce travail puisse servir à celui qui voudra donner des tables fondées sur toutes les observations qu'il pourra recueillir à l'époque qu'il choisira.

16. Désignons les quatre satellites par les signes ☾′, ☾″, ☾‴ et ☾ᴵᵛ; leurs distances moyennes au centre de Jupiter, en prenant pour unité le diamètre de la planète, seront renfermés dans le tableau suivant :

	Galilée	Marius.	Schirlæus	Hodierna.	Cassini.	Newton.	Pound.
☾′	6,0	6,0	6,0	7,0	5,67	5,965	1′ 51″ 60
☾″	10,0	10,0	8,0	11,0	9,00	9,494	2.56.47
☾‴	16,0	16,0	12,0	18,0	14,38	15,141	4.42
☾ᴵᵛ	24,0	26,0	20,0	29,0	25,30	26,630	8.16

On ne fera attention qu'aux trois dernières colonnes; les premières mesures étaient trop grossières. Celles de Pound sont en minutes et secondes; celle du ☾‴ 4′ 42″, a été prise avec une lunette de 123 pieds; celle du ☾ᴵᵛ, 8′ 16″, avec un micromètre appliqué à une lunette de 15 pieds; celles du ☾′ et du ☾″ ont été conclues des deux autres par la loi de Képler. D'après cette même loi et les deux observations de Pound, j'ai trouvé les nombres suivans :

5.698491, 9.066548, 14.461895 et 25.439500.

Ces nombres tombent entre ceux de Cassini et Newton, s'approchent

s'approchent en général beaucoup plus des premiers. Ils supposent les révolutions suivantes, résultat de toutes mes recherches.

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}' & 1^j\,18^h\,28'\,35''\,945374812, \\ \mathbb{C}'' & 3.13.17.53,730106062, \\ \mathbb{C}''' & 7.\ 3.59.35,825112810, \\ \mathbb{C}^{\text{IV}} & 16.18.\ 5.\ 7,020984400. \end{array}$$

Ces intervalles ramènent les conjonctions, et d'une éclipse à la suivante, ils ramènent à peu près les immersions et les émersions, parce que les inégalités sont à peu près les mêmes.

17. Les principales inégalités des satellites en tems sont, en nommant $\downarrow'$, $\downarrow''$, $\downarrow'''$, $\downarrow^{\text{IV}}$ les quatre apsides,

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}' \quad & -3'\,13'',079 \sin 2(\mathbb{C}' - \mathbb{C}''), \\
\mathbb{C}'' \quad & +12'',535 \sin(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') - 915'',131 \sin 2(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') \\
& -4'',68 \sin 3(\mathbb{C}''' - \mathbb{C}'') - 5'',728 \sin 4(\mathbb{C}''' - \mathbb{C}^{\text{IV}}) - \text{etc.} \\
& -28'',247 \sin(\mathbb{C}'' - \downarrow''') - 12'',33 \sin(\mathbb{C}'' - \downarrow^{\text{IV}}) \\
& -43'',268 \sin(\mathbb{C}' - 2\mathbb{C}' + \downarrow''') \\
& -19'',574 \sin(\mathbb{C}' - 2\mathbb{C}'' + \downarrow^{\text{IV}}), \\
\mathbb{C}''' \quad & +7'',0 \sin(\mathbb{C}''' - \mathbb{C}^{\text{IV}}) - 23'',9 \sin 2(\mathbb{C}''' - \mathbb{C}^{\text{IV}}) \\
& +125'',105 \sin(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') + \text{etc.} - 263'',73 \sin(\mathbb{C}'' - \downarrow''') \\
& -116'',76 \sin(\mathbb{C}'' - \downarrow^{\text{IV}}) - 11'',473 \sin(\mathbb{C}' - 2\mathbb{C}'' + \downarrow''') \\
& -6'',726 \sin(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'' + \downarrow^{\text{IV}}), \\
\mathbb{C}^{\text{IV}} \quad & -55'\,28'',77 \sin(\mathbb{C}^{\text{IV}} - \downarrow^{\text{IV}}) - 4'',48 \sin 2(\mathbb{C}^{\text{IV}} - \downarrow^{\text{IV}}) \\
& +79'',877 \sin(\mathbb{C}^{\text{IV}} - \downarrow''').
\end{aligned}$$

Les équations $(\mathbb{C} - \downarrow)$ sont des équations du centre. Voyez pour les autres équations la Préface de mes nouvelles Tables.

18. Demi-durées moyennes des éclipses dans les nœuds : $\mathbb{C}' = 1^h\,7'\,52''$, $\mathbb{C}'' = 1^h\,26'\,3''$, $\mathbb{C}''' = 1^h\,46'\,50''$, $\mathbb{C}^{\text{IV}} = 2^h\,22'\,25''$. Ces demi-durées moyennes sont pour des lunettes acromatiques ordinaires.

Masses des satellites en parties de celle de Jupiter :

$$\mathbb{C}' = 0.0000173281, \quad \mathbb{C}'' = 0.0000232355,$$
$$\mathbb{C}''' = 0.0000884972, \quad \mathbb{C}^{\text{IV}} = 0.0000426591,$$

celle-ci est presque égale à celle de notre lune.

Rapports des deux axes de Jupiter, 0.9286992; aplatissement, 0.0713008.

Inclinaison de l'équateur pour 1750, 3° 5′ 5″; l'orbite du ☾″ est incliné de 6″,4 à cet équateur; celle du ☾‴, de 5′ 1″,68; celle du ☾ᴵᵛ, de 24′ 33″,15.

19. On prétend que quelques personnes ont aperçu les satellites à la simple vue; mais aucun astronome, que je sache, n'a pu les voir. Ce n'est pas que dans une lunette ils ne paraissent aussi brillans que les étoiles de sixième grandeur, qu'on peut observer sans lunettes. Mais le voisinage et l'éclat de Jupiter les absorbe; au reste, peu importe, on n'emploie que leurs éclipses, qu'on ne voit pas même assez exactement dans les lunettes trop petites. Quoique de grosseur un peu différente, on serait cependant exposé à les prendre l'un pour l'autre, sans la précaution que l'on prend dans les Éphémérides, de donner leurs configurations pour un instant marqué chaque jour. Un disque blanc au milieu de la figure représente Jupiter; quatre petits points placés à côté, avec des chiffres, indiquent les quatre satellites, et la position du chiffre, par rapport au point, fait voir dans quel sens marche le satellite; s'il s'approche ou s'éloigne de Jupiter. On reconnaît ainsi le satellite dont l'éclipse est annoncée, toute l'attention se porte sur ce point, que l'on voit successivement diminuer de lumière jusqu'à ce qu'il disparaisse. Quelque tems avant l'émersion, on retourne à la lunette et l'on se rend attentif à saisir le premier rayon qui viendra du satellite; comme dans toutes les éclipses, cette seconde observation est plus incertaine que la première. Mais si l'on aperçoit un point extrêmement faible qui augmente progressivement d'éclat, on regarde l'observation comme bonne.

20. Le mouvement des satellites, au tems de leurs éclipses, est toujours suivant l'ordre des signes, comme celui de toutes les planètes dans leurs conjonctions supérieures; le point de l'émersion est toujours plus oriental que celui de l'immersion; ces deux points sont toujours du même côté de Jupiter; mais ce côté dépend de la parallaxe annuelle de Jupiter.

Après la conjonction supérieure de Jupiter, quand cette planète passe au méridien avant minuit, Jupiter nous paraît plus avancé que le satellite; le cône d'ombre, et les satellites sont à l'occident de Jupiter; c'est à l'occident qu'il faut chercher le satellite qui doit s'éclipser; après l'opposition, c'est le contraire. Si l'on emploie une lunette qui renverse, au lieu d'un télescope qui présente les objets dans leur situation véritable, les apparences seront opposées.

21. Pour tracer les configurations, Lalande a décrit un instrument qu'il appelle *jovilabe;* j'ai publié dans la Connaissance des Tems de 1808, des tables qui donnent avec plus d'exactitude et de facilité les positions des satellites, en ayant même égard à leur latitude, que plusieurs astronomes négligent. Quand les satellites sont derrière Jupiter, on les marque sur le côté de la figure par un rond noir; on les représente par des ronds blancs, s'ils sont sur le disque même de Jupiter. On pourrait observer les passages des satellites sur Jupiter, à peu près comme on observe ceux de Mercure et de Vénus sur le soleil. On peut aussi observer leurs ombres; ces passages se calculeraient d'avance comme les éclipses et par les mêmes tables, avec quelques attentions faciles; mais on a cru jusqu'ici ces observations trop incertaines pour en donner les annonces.

22. Les satellites de Saturne n'auront jamais cette utilité. Ils sont beaucoup plus petits, on ne peut les voir que dans les grands télescopes, et les astronomes y font peu d'attention.

Huyghens est le premier qui, avec des lunettes de 12 et 23 pieds, aperçut un satellite à Saturne; c'est le plus gros de tous, on l'a nommé long-tems le quatrième. Dominique Cassini aperçut ensuite le cinquième et puis le troisième, et peu de tems après le premier et le second. Mais tous ces nombres ont changé par les découvertes de M. Herschel, qui aperçut encore deux satellites intérieurs, dans un tems où l'anneau n'était visible que pour lui dans un télescope de 40 pieds. Cassini reconnut tout d'abord que les cinq satellites observaient entr'eux la loi de Képler. Tous ces satellites,

à l'exception du dernier, tournent sensiblement dans le plan de l'anneau. Le septième s'en écarte d'un angle d'environ 30°, qui n'est pas déterminé d'une manière bien sûre. M. Bessel vient d'en faire l'objet d'un Mémoire que je n'ai plus entre les mains, et dont je ne pourrais rien citer avec certitude.

	Révolut. synodique.	Distances.
☾′	0j 22h 40′ 4″6	0′ 27″306
☾″	1. 8.53. 9,0	0.35,058
☾‴	1.21.18.54,8	0.43,5
☾iv	2.17.45.51,0	0.56,0
☾v	4.12.27.55,2	1.18,0
☾vi	15.23.15.20,2	3. 0,0
☾vii	79.22. 3.12,9	8.42,5

23. Les satellites d'Uranus sont encore bien plus difficiles à voir, et par conséquent beaucoup plus inutiles que ceux de Saturne. Jusqu'ici M. Herschel est le seul qui les ait suivis avec quelque constance, et même il n'en a plus parlé depuis long-tems. Méchain en avait vu deux, autant que je puis me rappeler. Il résulte du Mémoire de M. Herschel, que l'orbite de ces satellites est presque perpendiculaire à l'écliptique. J'ai refait en entier le calcul des observations, et j'ai trouvé les nombres que M. Herschel a consignés à la suite de son Mémoire, dans un *Errata*. Il a aussi parlé d'un anneau semblable à celui de Saturne; personne n'a constaté cette découverte, qui n'est au reste qu'un simple objet de curiosité.

24. On a vainement cherché un satellite à Mars, à Mercure; on avait cru en voir un à Vénus, mais c'était une illusion optique, une seconde image de la planète; ce satellite présentait toujours la même phase que Vénus.

LEÇON XXIII.

Grandeur et figure de la Terre.

1. La question de la figure et de la grandeur de la terre serait presque inutile à l'astronome qui ne quitterait pas son observatoire. Il n'a besoin que du rayon de la terre ou de la distance de son œil au centre des mouvemens diurnes pour calculer les parallaxes, au moyen desquelles il peut ramener ses observations à celles qu'il ferait du centre même. Nous n'avons supposé la sphéricité de la terre que pour calculer les éclipses du soleil et les passages de Vénus pour différens pays. Mais quoique cette connaissance ne soit pas indispensable pour parvenir à la connaissance des mouvemens célestes, la figure de la terre est cependant une des questions les plus grandes et les plus utiles de l'Astronomie.

2. Ptolémée a pris la peine de prouver, 1°. que la terre n'est pas un plan, car alors le soleil, la lune et tous les astres se leveraient au même instant pour tous les peuples du monde : or on avait observé qu'au commencement d'une éclipse de lune on comptait en différens pays des heures différentes, et que la lune était inégalement élevée au-dessus de l'horizon.

2° Que la terre n'est pas un prisme, un cylindre, un cône. un solide à facettes; il en donne des raisons excellentes et faciles à imaginer.

L'ombre de la terre est sensiblement ronde dans les éclipses de lune; toutes les planètes qui, comme la terre, circulent autour du soleil, la lune et le soleil lui-même sont certainement autant de sphères. La première idée qui doit se présenter est celle de la terre sphérique, tout au plus pourrions-nous y soupçonner un petit aplatissement comme à Jupiter.

La terre tourne autour d'elle-même en 24 heures sidérales, toutes les autres planètes tournent plus ou moins vîte; voilà des analogies auxquelles on ne saurait résister sans les plus fortes raisons, et nous n'en n'avons pas la moindre.

3. La terre est une surface courbe, et la courbure paraît uniforme. Sur le pic de Ténériffe, M. Humboldt voyait la mer abaissée de toutes parts autour de lui, à près de 92° de son zénit; il voyait le soleil se lever pour lui 12′ plutôt que pour l'habitant de la plaine. De la plaine on voyait la pointe neigée de la montagne éclairée des rayons du soleil 12′ avant le lever; 12′ après le coucher, celui qui habite de l'autre côté de la montagne voyait encore le pic éclairé. Les mêmes phénomènes se remarquent en petit sur toutes les montagnes et sur les tours un peu élevées. A toutes ces vraisemblances, ajoutons des preuves plus directes.

4. Avancez sous un même méridien du sud vers le nord, vous verrez l'étoile polaire se lever et le soleil s'abaisser; marchez vers le sud, le pôle s'abaissera, et l'équateur se relevera d'autant. Faites la même chose sous un autre méridien, vous observerez les mêmes phénomènes, d'où il suit que la surface de la terre est une suite de cercles qui se coupent aux deux mêmes pôles, et que par conséquent la terre est sphérique. Tous les phénomènes du mouvement diurne en différens pays s'expliquent par cette supposition, dont il n'est plus permis de douter. On n'a donc plus que deux choses à vérifier : quelles sont les dimensions de cette sphère; est-elle parfaite, ou bien la terre serait-elle un sphéroïde?

5. Ces questions ont dû de tout tems attirer l'attention des astronomes. Ératosthène enseigna le premier ce qu'il fallait faire pour résoudre la première : quant à la seconde, on la supposait décidée et la terre parfaitement sphérique.

Ératosthène savait qu'à Syené, le jour du solstice à midi, un puits était éclairé jusqu'au fond; que les édifices les plus élevés ne jetaient aucune ombre. Le soleil S (fig. 143) était donc au zénit du puits P; mais au même moment à Alexandrie, au point A, il voyait le soleil à la distance $ZAS = 7° 12'$;

il croyait Alexandrie et Syené sous le même méridien. De l'angle ZAS, il pouvait retrancher la parallaxe de hauteur ASC; elle ne serait pour nous que de 1″,07; pour Ératosthène, elle était de 21″,5; il les négligea. Il aurait eu ACP $= 7° 11' 38'',5$; il supposa ACP $= 7° 12'$, négligeant aussi la réfraction de 7″,5 qu'il ne connaissait pas; ACP était véritablement de $7° 11' 46''$, en supposant les observations exactes; il avait donc, suivant son calcul, AP $= 7° 12'$, ou, comme dit Cléomède, $\frac{2\pi}{50} = \frac{360°}{50} = 7° 12'$; une grande route menait d'Alexandrie à Syené, le long du Nil; il la supposa rectiligne et toute entière dans le méridien dont elle s'écartait pourtant de $2° 59' 13''$. On lui dit que sa longueur était de 5000 stades en nombres ronds; l'arc AP de 5000 stades était donc la 50e partie de la circonférence; la circonférence entière était donc de 50 fois 5000 stades, ou de 250,000. Dans le fait, l'arc AP n'est que de $7° 7' 43''$; il n'était donc pas tout-à-fait la 50e partie; il aurait fallu retrancher quelque chose des 5000 stades pour la déviation de la route : toutes ces corrections auraient changé la grandeur de la terre. Ératosthène l'augmenta pour avoir un degré de 700 stades en nombres ronds, car..... $\frac{5000}{7.2} = \frac{50000}{72} = 694^{st.},444$; on ne peut donc regarder l'évaluation d'Ératosthène que comme un exemple grossier du calcul qu'il faudrait faire quand on aurait mesuré sous le même méridien deux hauteurs de la même étoile, et mesuré soigneusement l'arc terrestre. Ajoutez qu'on dispute encore aujourd'hui sur la valeur du stade d'Ératosthène.

6. Posidonius indiqua une autre méthode, beaucoup plus simple suivant Cléomède, mais dans la réalité beaucoup moins précise. Il supposa Rhodes et Alexandrie sous le même méridien; l'erreur était au moins de $1° \frac{1}{2}$; la distance en ligne droite était estimée 5000 stades. Canobus, belle étoile du vaisseau, est invisible en Grèce; à Rhodes on la voit paraître un instant au méridien tout-à-fait à l'horizon. Cette même étoile, à Alexandrie, s'élève jusqu'à $\frac{1}{4}$ de signe ou $7° 30'$. Un

quart de signe est la quarante-huitième partie du méridien; 5000 pris 48 fois, feront la circonférence de la terre; ... $\frac{5000.48}{360}$ feront un degré, le degré sera

$$\frac{500.48}{36} = \frac{500.4}{3} = \frac{2000}{3} = 666'',66.$$

En admettant tout le reste, il fallait ajouter environ 30′ pour la réfraction; ainsi le degré $= \frac{5000}{8^\circ} = 625$ stades.

Le stade de Posidonius ou le stade de Rhodes était-il le même que celui d'Eratosthène et d'Alexandrie?

7. Ces observations et ces calculs pouvaient donner un premier aperçu de la grandeur de la terre, et les astronomes n'ont pas porté plus loin leurs prétentions; ils seraient sans doute bien étonnés de l'importance qu'on a mise à leurs ébauches grossières. Aristote dit que ceux qui ont voulu estimer la grandeur de la terre ne lui donnent pas plus que 400,000 stades de circonférence; nous lui donnons aujourd'hui 40,000,000 de mètres: en conclurons-nous que le stade d'Aristote était de mille mètres?

8. Ptolémée dit que pour mesurer le degré de la terre sphérique, il n'est pas besoin de le prendre dans le méridien, et qu'il suffit de connaître l'inclinaison au méridien. Soit P (fig. 144) le pôle, Z et Z′ les zénits des deux villes: si vous connaissez les complémens de latitude PZ et PZ′ avec l'angle azimutal, vous pourrez calculer l'arc ZZ′; comparez cet arc avec l'arc terrestre mesuré entre les deux lieux, vous aurez de même le degré. Géométriquement, il a raison, mais l'observation n'est pas facile; il dit l'avoir faite, et suivant son habitude, il a trouvé le même résultat qu'Eratosthène: du reste, il ne donne aucun détail.

9. Almamoun, prince arabe, demanda à ses mathématiciens si le degré terrestre était bien tel que l'annonçait Ptolémée, et leur en prescrivit la vérification. Ils allèrent

dans les plaines de Singiar, se séparèrent en deux bandes, allèrent les uns vers le midi, et les autres vers le nord, jusqu'à ce que la hauteur du soleil fût changée d'un degré ; ils mesurèrent leur route, et trouvèrent la même chose que Ptolémée. Almamoun ne se rendit pas, il fit recommencer l'opération dans un autre lieu : par les mêmes procédés, ils arrivèrent à la même conclusion. Almamoun confessa que Ptolémée avait raison ; Almamoun ne pouvait mieux faire, mais nous n'en dirons pas autant de ses astronomes.

10. Mon compatriote Fernel supposa qu'Amiens est sous le même méridien que Paris, et en effet l'erreur est insensible. Il partit pour Amiens, en comptant exactement les tours de roue de sa voiture ; il s'avança vers le nord jusqu'à ce que la distance du soleil au zénit vers le solstice fût de 1° plus grande qu'à Paris, et il trouva pour le degré d'Amiens 57070 toises. La Caille trouva depuis le même degré de 57074. On peut admirer le bonheur de Fernel.

11. Snellius entreprit enfin une mesure véritable : par des opérations trigonométriques, il détermina la distance d'Alcmaer et de Berg-op-Zoom ; il observa des distances au zénit aux deux extrémités de l'arc, et trouva un degré de 55020^{T}, trop faible de 2050. Muschembroeck corrigea plusieurs parties de l'opération, et Cassini de Thuri, par de nouvelles observations, porta ce degré à 57115, ce qui paraît trop fort.

12. Norwood, en Angleterre, par un mélange des méthodes de Fernel et Snellius, en tâchant de plus d'évaluer les détours de la route au moyen d'un graphomètre, trouva 57424^{T} ; et cette mauvaise mesure, employée par Newton dans ses premiers calculs sur la loi de décroissement de la pesanteur, retarda de quelques années la découverte de cette loi.

13. Picard est le premier qui donna à toutes les parties de l'opération les soins qui pouvaient seuls la rendre exacte. Il mesura une base avec une toise bien étalonnée ; observa tous

ses triangles avec un quart de cercle à lunettes, et les distances au zénit avec un grand secteur, et trouva pour le degré d'Amiens 57066. Mais c'était par la compensation de deux erreurs importantes : d'une part, sa toise était d'un millième plus courte que la toise adoptée depuis par l'Académie des Sciences ; d'un autre côté, il avait négligé la réfraction comme insensible près du zénit ; il ignorait les effets de l'aberration et de la nutation, il ne pouvait réduire ses observations ou à une même époque, ou aux quantités moyennes. Ces dernières erreurs, corrigées par Lemonnier, donnaient un degré de 57183T. beaucoup trop fort ; mais en tenant compte de la différence des toises et de la réfraction, La Caille ramena ce degré à une valeur assez exacte. Ainsi Picard n'avait guères commis que des erreurs inévitables, et par un bonheur qu'il méritait, son degré se trouvait aussi bien qu'on eût alors droit de l'exiger.

14. La mesure de Picard fut continuée jusqu'à Dunkerque par la Hire, et jusqu'à Perpignan par Cassini II, qui publia le tout en 1718, sous le titre de *Grandeur et Figure de la Terre*. On y voit que la longueur moyenne du degré entre Paris et Collioure est de 57097T

Par les observations comparées de Paris et de Bourges, il trouvait 57098

On conservait au degré de Picard, sa valeur..... 57060

Ensuite, entre Paris et Dunkerque, on trouva (p. 236) le degré moyen de..... 56960

On avait donc, en allant de Paris vers le nord, un degré moindre de 100

Et en allant au sud, un degré plus grand de 37 ou... 38

Quoique ces différences ne soient nullement proportionnelles aux intervalles, il en résultait un alongement des degrés en allant vers l'équateur. Cassini, page 238, en conclut une ellipse alongée vers les pôles, et la conclusion était juste. On avait commencé par en tirer une tout opposée, dans les Mémoires de 1701, où l'on concluait que la terre est un

sphéroïde *aplati vers les pôles, ce qui semble favorable aux hypothèses modernes* (de Huygens et de Newton).

15. Richer, envoyé à Cayenne pour vérifier les réfractions et divers points de la théorie du soleil, s'était aperçu que son horloge, réglée à Paris, retardait, et il avait été obligé d'en raccourcir la verge. Il en conclut que la pesanteur était moindre dans le voisinage de l'équateur, ce qui pouvait venir de deux causes : une plus grande distance au centre, et par conséquent un renflement à l'équateur, un aplatissement aux pôles et un sphéroïde elliptique ; mais cette cause n'aurait pu produire que $0^{li},9$, l'effet était presque triple ; l'autre cause plus puissante était le mouvement de la terre plus sensible près de l'équateur qu'à Paris, dans la raison des cosinus de 5° et 49°. Cette cause pouvait produire $1^{li},46$, et elle aurait produit $1^{li},53$ à l'équateur même. Un mouvement circulaire de rotation doit produire une force centrifuge ou tangentielle, et l'effet observé était une preuve sensible du mouvement de la terre autour de son axe.

16. La force centrifuge doit diminuer la pesanteur, puisqu'elle agit dans un sens contraire ; la pesanteur que nous observons n'est que relative ; elle est diminuée de la force centrifuge qui, dans les différens climats, est plus ou moins oblique à la direction de la pesanteur : c'est seulement à l'un des pôles qu'on pourrait observer la pesanteur absolue. Huygens imagina un syphon composé de deux branches formant un angle droit dont le sommet est au centre de la terre ; l'une des branches aboutit à l'équateur, l'autre au pôle ; il suppose les deux branches remplies d'un fluide homogène. Le fluide, renfermé dans la branche polaire, aura tout son poids : dans l'autre, au contraire, le poids sera diminué par la force centrifuge. Cette seconde colonne sera donc moins pesante que la première, et l'équilibre ne pourra s'établir que quand la branche équatoriale aura gagné par sa hauteur ce qu'elle a perdu par le mouvement de rotation ; d'où il suit que pour l'équilibre, les mers équatoriales doivent être plus élevées que

les mers polaires, que les terres doivent avoir une forme analogue, et que la terre doit être un sphéroïde aplati. Il calcula que cet aplatissement devait être $\frac{1}{578}$.

17. Newton avait considéré la question d'une manière plus générale; il eut égard aux attractions de toutes les molécules qui composent le sphéroïde; il leur donnait à toutes une même densité, et il en conclut un aplatissement de $\frac{1}{230}$. Les mesures de Cassini se trouvaient en contradiction avec ces théories qui ne pouvaient passer pour rigoureuses; mais quelles que puissent être les variations de densité du centre à la circonférence, il en résultait toujours un aplatissement; on ne pouvait en révoquer en doute que la quantité précise qu'Huygens faisait trop petite, et Newton trop grande. Le milieu était $\frac{1}{329}$ qui ne s'écartait guères de la vérité. J'ai trouvé depuis $\frac{1}{308,6}$, comme je le dirai bientôt. On attaqua les mesures de Cassini, mais on répondit que la théorie pouvait avoir raison, sans que les observations eussent tort; que si la terre avait été primitivement sphérique, la rotation avait dû l'aplatir, mais que si elle était primitivement alongée d'une certaine quantité, la rotation n'avait fait que diminuer l'alongement. Mais pourquoi la terre eût-elle été d'abord alongée? Il serait difficile d'en donner une raison fondée en principes et sur un calcul rigoureux.

18. Pour décider la question, on proposa de mesurer deux degrés assez éloignés pour que l'erreur des observations fût nécessairement moindre que l'inégalité qu'on cherchait. Godin, Bouguer et La Condamine partirent pour le Pérou, où, en dix années et avec des peines incroyables, ils parvinrent à mesurer trois degrés du méridien dans l'hémisphère austral. Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier, Outhier et Celsius allèrent en Laponie, où il mesurèrent un arc de 57′. Maupertuis et Outhier écrivirent l'histoire de leur voyage; ils trouvèrent au cercle polaire le degré de 57419. En le com-

parant aux degrés de France, ils en conclurent un aplatissement de $\frac{1}{178}$ trouvé depuis beaucoup trop fort.

19. Vers le même tems on songea à vérifier les degrés de France. La Caille, en moins de deux ans, acheva presque seul ce grand ouvrage dont on a les résultats dans le livre de la Méridienne vérifiée, l'un des meilleurs, sans contredit, que nous ayons en ce genre; il prouva que les degrés allaient tous en alongeant du midi vers le nord. Un degré de longitude, que La Caille mesura près d'Arles, conduisit à la même conséquence, qui fut encore confirmée au retour des académiciens du Pérou. Depuis ce tems, tous les degrés mesurés en différens lieux constatèrent de plus en plus cette conséquence de la théorie physique et mathématique. Il est vrai que ces degrés donnent différentes quantités pour l'aplatissement; mais toutes prouvent un aplatissement incontestable, et c'est tout ce que les défauts de plusieurs de ces mesures et les difficultés inhérentes de ces opérations permettent d'exiger.

20. Tous ces degrés ont été mesurés sur les principes de Snellius et de Picard; toute la différence est dans le plus ou moins de perfection des instrumens, l'adresse ou la patience de l'observateur, les attentions plus recherchées et les méthodes plus rigoureuses de calculs. Il en faut pourtant excepter le degré de Pensilvanie, où Mason et Dixon ne firent aucun usage de la Trigonométrie. Au moyen d'une lunette méridienne portative ils tracèrent, dans les plaines de la Pensilvanie et sur les bords de la mer, un long alignement qu'ils mesurèrent à la toise. Quand ils rencontraient quelque obstacle, ils menaient à quelque distance une méridienne parallèle à la première; et observant enfin avec un grand secteur les distances des étoiles aux deux extrémités, ils trouvèrent à 39° 12′ de latitude nord, un degré de 56888 toises. La Caille, au Cap de Bonne-Espérance, dans l'hémisphère austral, trouva par 33° 18′ de latitude, un degré de 57040 qui paraît un peu fort, et pourrait faire soupçonner que l'hémisphère austral est un peu différent de l'hémisphère boréal.

21. Le tracé et la mesure effective d'une ligne de 57 à 58 mille toises est de toute impossibilité dans les pays habités; et même, dans les déserts, on pourrait douter que ce moyen fût le plus expéditif et le plus sûr. On est donc obligé de former un nombre de triangles dans la direction de la méridienne; on mesure un côté et tous les angles; on calcule tous les côtés, et l'on en conclut la valeur de l'arc terrestre. Le cas le plus simple serait celui d'une méridienne AB sur laquelle on établirait des triangles équilatéraux ACD, DEF, EFG, FGB; mais ce cas est encore moins praticable que la mesure réelle de la méridienne AB. Dans l'exposition des procédés qu'on emploie, suivons la marche la plus naturelle, quoiqu'elle soit encore trop souvent impraticable; et commençons par la mesure d'un côté, quoique souvent ce soit par là qu'on finisse; mais c'est une chose presque indifférente et qui ne change presque rien aux calculs.

22. Le côté qu'on mesure s'appelle base; on le prend communément de 4 à 7 mille toises, ou de 8 à 14 mille mètres. Plus courte, la base ne serait pas assez sûre; il est difficile de trouver un local qui permette de passer cette longueur.

Pour aller plus vîte, on emploie à la mesure, des règles multiples exactes d'une mesure connue. La Caille, en employait de 4 toises, Lemonnier en avait de 7 toises: les nôtres n'étaient que des doubles toises.

23. Ces règles étaient ordinairement de bois; elles se terminaient par une tête de clou arrondi, pour que le contact de deux règles consécutives se fît par un point unique; on les mettait donc alternativement l'une au bout de l'autre, ensorte qu'il y en eût toujours trois immobiles sur le terrain pendant qu'on ajustait la quatrième. Quelquefois on les plaçait sur des trépieds qui pouvaient se hausser ou se baisser, ensorte que la toise fût toujours horizontale, ce dont on pouvait s'assurer par le niveau, ou bien on les plaçait sur le terrain dont on aplanissait les plus grandes inégalités; et si elles avaient une inclinaison sensible, on tâchait de l'estimer ou de la mesurer. On avait abondonné les verges métalliques,

parce que les métaux éprouvent des variations sensibles dans leur longueur par les changemens de température. Les variations du bois sont moins fortes, mais elles ne sont pas nulles, et on ne sait pas en tenir compte comme pour les métaux ; ensorte que dans des opérations plus récentes, les Anglais se sont servis d'une chaîne d'acier. Pour nous, nous nous sommes servis de verges de platine auxquelles étaient attachées des verges de laiton un peu plus courtes, qui, fixées invariablement par l'une de leurs extrémités, avaient toute liberté de s'étendre par l'autre bout; elles glissaient donc le long d'un vernier, armé d'un microscope, avec lequel on lisait l'alongement relatif du laiton; d'où l'on calculait, d'après des tables dressées par des expériences fort exactes, l'alongement absolu de la règle de platine. On avoit choisi le platine, qui varie moins qu'aucun autre métal. Ces règles composées étaient placées solidement sur un long madrier de chêne ; elles étaient recouvertes d'un toit qui les garantissait des rayons directs du soleil. Le madrier portait sur deux triangles ou double-équerres de fer que l'on calait avec des vis, et les triangles de fer portaient eux-mêmes sur une pièce de bois soutenue par trois pointes de fer qui entraient dans la terre, ensorte qu'on avait toute la solidité requise.

Pour éviter cependant tout choc qui pût faire rétrograder les règles, on laissait un vide de quelques millimètres entre chaque règle ; et pour mesurer l'intervalle, on avait placé à l'extrémité de chaque règle une languette qui glissait entre deux coulisses, le long d'un vernier qui avait son microscope; les règles étant posées, on poussait la languette du bout du doigt, et l'intervalle se remplissait et se mesurait avec exactitude, sans aucun choc dangereux.

Les toits des règles étaient garnis vers leurs extrémités, de deux pointes bien perpendiculaires à l'axe des règles, de sorte que quand les quatre règles étaient placées à la suite l'une de l'autre sur le terrain, les huit petites pointes devaient se trouver dans une même ligne droite et dans la direction de la base, ce qu'on vérifiait en se plaçant derrière, et en visant à un petit signal portatif placé d'avance sur l'alignement.

Pour mesurer l'inclinaison des règles, on posait sur deux pièces de métal placées sur le toit, à égale distance du milieu de la longueur, un niveau triangulaire à alidade et bulle d'air, qui par une double opération donnait la double inclinaison, sans qu'on eût à craindre l'erreur de collimation.

24. Ces opérations supposent un alignement tracé d'avance; et voici comment. Quand j'eus choisi les deux termes de ma base, j'y avais fait construire sur le roc, des massifs de maçonnerie au centre desquels était scellé un cylindre de cuivre; sur la face supérieure de ce cylindre on avait tracé plusieurs cercles concentriques. Le centre commun était le point où tombait une ligne à-plomb que j'avais fait descendre du sommet d'un signal de 78 pieds de hauteur, que j'avais fait construire à chaque extrémité. Les deux cylindres sont les points extrêmes de la base; ils sont recouverts d'une plaque de plomb, de matières sèches, et d'une voûte solide en pierre, pour que l'on puisse les retrouver en tout tems. Ces énormes signaux, au haut desquels était un observatoire, avaient été nécessaires auprès de Melun, à cause des arbres qui bordent la route, et d'un coude presque insensible qu'elle forme vers le milieu de la longueur.

Ces signaux nous servaient pour nous diriger dans l'alignement que nous faisions, au moyen de la lunette du cercle de Borda, placée dans un plan vertical; je faisais enfoncer en terre, de distance en distance, dans la direction du grand signal, des pieux de bois à fleur de terre, sur lesquels on plaçait ensuite le petit signal portatif.

25. Deux personnes écrivaient sous ma dictée, sur des registres, le numéro des règles, les parties de languette, celles des thermomètres métalliques, et les deux observations de niveau; avant d'aller plus loin, on collationnait les deux registres, et on lisait après moi aux deux microscopes. Il ne restait plus qu'à additionner, à la fin de chaque journée, la somme des toises, celle des languettes, les corrections de température et d'inclinaison, et la réduction au niveau de la mer. La base ainsi corrigée s'est trouvée, à Melun, de

6075^t,90338

6075',90338; celle de Perpignan, corrigée de même, n'était que de 6006',25545. Toutes deux formaient vers le milieu l'une un angle de 179° 10' 41", l'autre un angle de 180° 23' 17". Soient b et c les deux parties de la base brisée, d la ligne droite qui joint les deux extrémités, A l'angle au coude:

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

$$d = (b+c)\left(1 - \frac{4bc\cos^2\frac{1}{2}A}{(b+c)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (b+c)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (b+c)(1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}x^2 - \text{etc.}).$$

26. Supposons la courbure de la terre circulaire, nos règles de deux toises formeront à la surface de la terre deux tangentes d'une toise chacune; il faut donc pour chaque demi-règle, ou chaque toise, chercher la différence entre l'arc dont la tangente est une toise, et la tangente même; on aura la correction de chacune des six mille et quelques parties que contenaient nos bases; mais il était aisé de prévoir que la correction devait être insensible, et c'est ce que le calcul a confirmé.

27. Pour donner une idée de l'exactitude à laquelle on peut arriver par ces moyens, nous rapporterons ce qui nous est arrivé à la base de Perpignan. Un jour un vent impétueux venait à chaque instant déranger nos règles, en les faisant charier le long de leurs supports. Après avoir longtems lutté contre les difficultés, nous prîmes le parti d'interrompre la mesure. Trois jours après, par un tems calme, nous recommençâmes le travail de toute cette journée. Nous ne trouvâmes qu'un quart de ligne de différence entre deux mesures dont l'une nous avait pleinement satisfaits, et l'autre nous avait paru si suspecte que nous nous étions crus obligés à la recommencer.

A la fin de chaque journée, avant de poser définitivement la dernière règle, nous enfoncions dans la terre, un pied au-dessous du sol, un pieu dont la tête était carrée et recouverte d'une lame de plomb. Sur ce plomb nous marquions

par deux intersections l'endroit où tombait un fil à plomb abaissé de l'extrémité de la dernière règle. Nous recouvrions ensuite soigneusement notre pieu, que nous pouvions retrouver le lendemain et les jours suivans. Je ne doute même pas qu'ils ne soient encore à leurs places.

28. De la mesure de la base passons à celle des angles. Sur les montagnes ou dans les hautes plaines, les sommets de nos triangles étaient indiqués par des signaux ou pyramides tronquées quadrangulaires formées de quatre poutres solidement assemblées par le haut; les quatre faces étaient recouvertes de planches jusqu'à quelques pieds du sol, ensorte que la partie pleine soutendît toujours un angle de 31″, vue de la distance la plus grande. Soit H la hauteur et D la distance; je faisais $H = 0.00015\,D$; l'expérience m'avait appris qu'il fallait cette longueur pour que le signal fût bien visible. Je donnais au côté de la base un tiers de la hauteur. Si le signal devait se projeter sur le ciel, je le faisais noircir; s'il devait se projeter sur un objet terrestre voisin, je le faisais blanchir. On reconnaît le point sur lequel doit se projeter un signal vu d'une station donnée, en prenant l'arc entre cette station et le point directement opposé de l'horizon. Si l'arc est de 180° 4 ou 5′, il se projettera sur le ciel; si l'arc est plus petit, il se projettera sur la terre. On examine alors les objets qui se trouvent entre le signal et le point éloigné de l'horizon. On place les arêtes de la pyramide de manière à ne couvrir aucun des signaux voisins, qu'on doit observer du centre, et si une station est plus éloignée que les autres, on fait ensorte que l'une des faces se présente directement à cette station. On note l'angle que fait avec chacune des faces chacun des rayons visuels menés aux autres signaux. La raison en est que si le signal est éclairé obliquement par le soleil, on ne voit communément que la face éclairée, on ne peut viser à l'axe du signal, on n'observe point le véritable sommet du triangle, ce qui nécessite une correction $\frac{a \sin A}{D \sin 1''}$; a étant l'apothème de la pyramide,

A l'angle de la face avec le rayon visuel, et D la distance.

Les meilleurs de tous les signaux seraient des lampes à courant d'air et miroir parabolique; mais on ne pourrait observer que la nuit, et dans les circonstances où nous avons mesuré la méridienne, cette espèce de signal eût été pour nous fort dangereuse.

Dans les villes et dans les pays couverts de bois, on est forcé de recourir aux clochers, qui sont en général médiocrement bons pour l'objet qu'on se propose; la multitude de leurs faces, qui pour la plupart sont gauches et contournées, enfin leur inclinaison, sont autant de sources d'erreurs qui, après tout, ne sont pas bien considérables.

29. Il est rare qu'on puisse observer dans l'axe même du clocher; on est alors forcé de s'éloigner du centre, et l'angle observé a besoin d'une réduction. Soit ABC le triangle (fig. 145), O l'observateur ou le centre du cercle; on a observé AOB au lieu de ACB.

$$ACB = AIB - CBO = AOB + CAO - CBO,$$

ou

$$C = O + \frac{CO}{AC}\frac{\sin COA}{\sin 1''} - \frac{CO}{BC}\frac{\sin BOC}{\sin 1''},$$

$$C = O + \left(\frac{r}{D}\right)\frac{\sin(O+y)}{\sin 1''} - \left(\frac{r}{G}\right)\frac{\sin y}{\sin 1''};$$

C est l'angle réduit, O l'angle observé, y l'angle entre l'objet à gauche B et le centre C de station, D la distance AC de l'objet à droite, G la distance BC de l'objet à gauche, r la distance OC du cercle au centre de station. Cette formule est générale; on peut quelquefois rendre nul un des deux termes, on peut les rendre égaux et la réduction nulle. Voyez *Base du Système métrique*, tome I, page 121 du Discours préliminaire. Cette formule suppose la connaissance des distances D et G; on les obtient avec une exactitude suffisante, en calculant une première fois le triangle avec les angles observés,

sans ces réductions, qui sont ordinairement d'un petit nombre de secondes.

30. Pour l'observation, on dirige alternativement les deux lunettes sur les objets A et B; mais l'une des deux lunettes est excentrique et ne peut donner l'angle bien juste; quand la lunette inférieure est dirigée sur l'objet à droite, l'angle de direction $COA = (O + y)$ est de 90°; quand elle est dirigée sur l'objet C, l'angle de direction $y = 90°$, d'où il résulte pour l'angle double une correction $+\left(\frac{r}{D\sin 1''} - \frac{r}{G\sin 1''}\right)$ et pour l'angle simple, une correction $\frac{r}{D\sin 2''} - \frac{r}{G\sin 2''}$, r étant ici l'excentricité de la lunette.

31. Si les trois points observés étaient dans la surface d'une même sphère, le triangle serait sphérique et la somme de ses trois angles serait $180° + 2r^2 \tang \frac{1}{2} C' \tang \frac{1}{2} C'' \sin A$ — etc. (IV. 70), r est le rayon de la terre. Les distances zénitales de A et de B, vues de C, seraient $90° + \frac{1}{2} AC$ et $90° + \frac{1}{2} BC$; car l'angle entre la tangente CA et sa corde $= \frac{1}{2} CA$. Or c'est ce qui n'arrive jamais; on observe les distances zénitales des points A et B; on connaît alors dans le triangle ABZ (fig. 146) les deux distances ZA et ZB et l'arc ou l'angle entre les deux objets; il faut chercher l'angle Z, qui est l'arc horizontal ou l'angle entre les arcs des signaux A et B à la surface de la sphère.

Nous avons donné (IV. 72) la formule qui exprime la différence entre l'arc AB et l'angle Z; c'est ce qui s'appelle *réduction à l'horizon*. Vos trois angles ainsi corrigés seront ceux du triangle sphérique. Voulez-vous l'angle rectiligne formé par les cordes? vous aurez la correction de l'angle horizontal ou sphérique par la formule (IV. 73). Vos trois angles devront alors faire une somme de 180°; ce qu'il s'en faudra sera la somme des erreurs des trois angles. Vous partagez cette somme en trois, si les observations sont également probables; s'il y en a une moins sûre que les autres, vous pouvez lui attribuer une plus grande partie de l'erreur totale.

Dans le triangle sphérique, quand vous avez calculé l'excès sphérique ω, si la somme diffère de $180° + \omega$, la différence sera la somme des erreurs, que vous distribuerez de même. A l'ordinaire, cette somme d'erreurs ne doit pas surpasser 2″; dans les circonstances difficiles, on ne peut répondre de 4 à 5″.

32. On peut résoudre les triangles comme sphériques ou comme rectilignes.

Soit AB la base mesurée, elle est sensiblement un arc de cercle; vous pouvez la changer en corde par la formule

$$\text{corde AB} = \text{arc AB} - \frac{\frac{1}{24}(\text{arc AB})^3}{(\text{rayon de la terre})^2};$$

vous pouvez la changer en sinus, car

$$\sin \text{AB} = \text{arc AB} - \frac{\frac{1}{6}(\text{arc AB})^3}{(\text{rayon de la terre})^2}.$$

Ces cordes et ces sinus seront exprimés en toises ou mètres, comme le rayon de la terre; vous aurez ensuite (fig. 147)

$$\text{corde AC} = \frac{\text{corde AB} \sin \text{B}}{\sin \text{C}}; \quad \text{corde BC} = \frac{\text{corde AB} \sin \text{A}}{\sin \text{C}}.$$

Dans ce calcul vous employez les angles des cordes; BC ainsi connu, vous calculez de même les cordes BD et CD, et ainsi de triangle en triangle jusqu'à la fin. Vers la fin, si vous avez mesuré un côté de votre triangle, c'est-à-dire une seconde base, vous comparez le côté calculé avec la base mesurée; ainsi à Perpignan j'ai trouvé que la base calculée d'après celle de Melun, différait de 10 pouces, de la base effectivement mesurée. Ces 10 pouces étaient la résultante de toutes les erreurs commises dans les mesures des bases, dans les angles et les calculs des 60 triangles qui joignaient ensemble nos deux bases.

33. Pour calculer les triangles comme sphériques, on emploie les angles réduits à l'horizon et corrigés de l'erreur des observations; vous avez alors

$$\sin AC = \frac{\sin AB \sin B}{\sin C} \quad \text{et} \quad \sin BC = \frac{\sin AB \sin A}{\sin C}, \quad \text{etc.};$$

vous avez ainsi les sinus de tous les côtés de vos triangles, vous pourrez de nouveau les convertir en arcs ou en cordes, à votre volonté. J'ai donné dans la Base du système métrique des tables commodes pour ces conversions.

34. Il arrive rarement que les deux bases soient l'une le premier, l'autre le dernier côté de la chaîne des triangles; mais peu importe, on peut toujours, en partant d'une des deux bases, calculer tous les triangles; on peut même prendre pour unité le premier côté, et calculer en parties de cette unité les triangles suivans, jusqu'à la base qui vous fournit un logarithme constant à ajouter à ceux de tous les côtés précédens.

35. Quand tous les triangles sont calculés, il s'agit de trouver en quel sens la méridienne les traverse, et quelle est la longueur de cette méridienne. On ne peut y parvenir qu'en faisant d'abord des observations azimutales qui donnent l'inclinaison des côtés AB et AC par rapport à la méridienne AM; les observations azimutales sont même nécessaires pour diriger les triangles dans le sens de la méridienne.

Le moyen le plus commode serait d'avoir une lunette méridienne, de la placer exactement dans le méridien, par moyens donnés (VII. 9. 14.), de placer ensuite un signal dans la direction AM de la lunette, et de mesurer directement l'angle BAM; d'où l'on conclurait MAC et par suite les angles a, b, c, d, etc. de la méridienne, avec tous les côtés et même les parties Aa, ac, bc, etc. de la méridienne.

36. On peut déterminer la direction de la méridienne par des azimuts avec le cercle de Borda. On commence par bien régler sa pendule sur le tems vrai, par des hauteurs absolues du soleil : on observe une vingtaine de distances du soleil au zénit; on les réunit quatre à quatre. On prend la moyenne arithmétique de ces quatre distances et celles des tems cor-

respondans de la pendule ; on calcule la distance du soleil au pôle ; et comme la latitude est censée connue, on a les trois côtés d'un triangle sphérique : on calcule l'angle au pôle que l'on convertit en tems. Ce tems, comparé à celui de la pendule, donne la correction de l'horloge. Les mêmes opérations, répétées plusieurs jours, mettent l'observateur en état de connaître le tems vrai et l'angle au pôle pour un instant quelconque de la journée. Cela posé, soit G le signal dont on veut connaître l'azimut. Vous prenez vers 6 heures du matin ou du soir, un peu avant et après, nombre de distances entre le soleil S et le signal G dont vous connaissez la distance zénitale ZG ; vous assemblez ces distances quatre à quatre, et vous en prenez la moyenne.

Vous connaissez PZ, PS′ et ZPS′ ; vous calculez ZS′ distance vraie : vous en retranchez la réfraction moins la parallaxe ; vous avez ZS, ZG et SG distances observées ; vous pouvez calculer SZG et PZS = PZS′, d'où NO = PZO = PZS′ — S′ZG ; NO est l'azimut du point O ou du signal G compté du point nord de l'horizon ; MO = 180° — NO est l'azimut compté du midi, MO mesure l'angle que fait la méridienne avec le signal G du côté du sud de l'horizon.

Vous traitez de même tous vos groupes de quadruples distances, le milieu entre tous les résultats sera l'azimut le plus probable.

L'exactitude de cet azimut dépend du tems ; une seconde d'erreur sur le tems peut dans nos climats produire 10″ d'erreur sur l'azimut. Dans l'expression de cette erreur entre la cotangente de l'angle horaire. A 6 heures cette cotangente = 0 ; elle était positive avant 6 heures, elle était négative après 6 heures, les erreurs se compensent et d'ailleurs sont légères ; et après tout, la dernière précision n'est pas nécessaire : une erreur de 20″ sur l'azimut n'altérerait pas sensiblement la longueur d'une méridienne d'un million de mètres.

37. On peut déterminer l'azimut par l'étoile polaire, et principalement par ses plus grandes digressions. On connaît PZ

et PE, $\cos ZE = \cos PZ \cos PE$, ZG et GE qu'on a mesurés; on calcule GZE, $\sin PZE = \frac{\sin PE}{\sin PZ}$; on a donc (fig. 149)

$$NO = PZG = PZE + EZG = Nn + nO.$$

On pourrait avoir une lunette méridienne dans le vertical ZE, placer un signal en n à l'horizon, mesurer nG, et calculer $GZn = \frac{\cos Gn - \cos Zn \cos ZG}{\sin Zn \sin ZG}$.

Il y a encore d'autres moyens. On peut y employer le tems où l'étoile E est dans un même plan avec P et G; on mesure GE, on connaît EP, PZ et PG; on calcule NO = PZG par le triangle GPZ dont on a les trois côtés, mais la réfraction exige quelques attentions; et si l'on se sert du cercle de Borda pour multiplier les distances, toutes celles qui seront mesurées avant et après le passage en E, auront besoin de corrections analogues à celles qu'on fait aux distances prises aux environs du méridien (XIII. 9). Voyez la Base du Système métrique, tome II.

Si vous observez les distances au cercle répétiteur dont une lunette est excentrique, et que vous ne soyiez pas au centre du signal, la distance observée aura besoin d'une correction (30); mais la formule se réduit à un terme, parce que celle des distances D ou G qui est celle de l'astre est si grande, qu'elle rend insensible le terme où elle se trouve.

38. Le calcul de l'azimut suppose celui de la latitude; pour la connaître, on observe un grand nombre de distances au zénit aux deux passages d'une étoile circompolaire, et principalement de l'étoile polaire; on réduit ces distances par la formule (XIII. 9), on les corrige de la réfraction; la demi-somme des deux distances est le complément de la hauteur du pôle. Ainsi, pour 4800 observations de α et β de la petite Ourse, Méchain et moi avons déterminé la hauteur du pôle à Paris, de 40° 50′ 14″, à moins de 0″,5 près. On fait la même chose aux deux extrémités de la méridienne; la diffé-

rence entre les deux latitudes est ce qu'on appelle l'amplitude de l'arc. Le nôtre, entre Dunkerque et Barcelone, était de 9° 40′ 44″,86, et l'incertitude des réfractions pouvait à peine le changer de 0″,6. Pour en conclure la valeur du degré moyen, il ne reste plus qu'à calculer la méridienne.

39. Nous avons déjà indiqué (37) un moyen bien simple en théorie, mais excessivement pénible dans la pratique. Avant nous, on employait une méthode singulièrement aisée et suffisante pour le tems où l'on avait des instrumens bien moins précis; mais on peut la rendre exacte sans l'alonger beaucoup. Soit (fig. 150) MER le méridien du premier sommet des triangles, BC un côté incliné quelconque qu'il s'agit de reduire au méridien; abaissez les arcs perpendiculaires BE et CR qui, prolongés, se rencontreraient à leur pôle A; ER sera le côté réduit, ou la partie de la méridienne qui correspond à ce côté, ER = A, M est le pôle de la terre; menez MBF méridien du lieu B, et BDO perpendiculaire à BE, le triangle MBE rectangle en E donne

$$\cos MB \operatorname{tang} M = \cot MBE = \cot ABF = \operatorname{tang} FBD$$

ou $\sin H \operatorname{tang} M = \operatorname{tang} x$;

$$\sin BE \doteq \sin MB \sin M = \cos H \sin M = \sin y;$$

le triangle ABC donnera

$$\operatorname{tang} ER = \operatorname{tang} A = \frac{\sin ABC}{\sin AB \cot BC - \cos AB \cot ABC}$$

$$= \frac{\sin ABC \operatorname{tang} BC}{\cos BE - \sin BE \operatorname{tang} BC \cos ABC}.$$

or

$$ABC = 90° - CBD = 90° - CBF - FBD = 90° - (z + x);$$

CBF = z est l'azimut du point C sur l'horizon de B, l'angle que le côté BC fait avec la méridienne BF; donc, en nommant δ la distance BC,

$$\operatorname{tang} ER = \frac{\operatorname{tang}\delta \operatorname{séc} y \cos(z + x)}{1 - \operatorname{tang}\delta \operatorname{tang} y \sin(z + x)}$$

$$= \operatorname{tang}\delta \operatorname{séc} y \cos(z + x) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \tang^2\delta \sec y \tang y \sin(z+x)\cos(z+x) + \text{etc.}$$
$$= \tang\delta\cos(z+x)\,(1 + \tang y \tang \tfrac{1}{2} y)$$
$$+ \tang^2\delta \sec y \tang y \sin(z+x)\cos(z+x) + \text{etc.}$$

Négligez les puissances supérieures de $\tang\delta$, et la séc. y qui diffère si peu du rayon, il restera

$$\mathrm{ER} = \delta\cos(z+x) = \mathrm{BC}\cos\mathrm{CBD},$$

c'est-à-dire le côté incliné multiplié par le cosinus de l'azimut CBD, que l'on trouvait en négligeant la convergence des méridiens. Cette formule incomplète est celle dont on s'était toujours servi.

Pour ne rien négliger, il suffit d'avoir une connaissance assez approchée de la différence M de longitude pour calculer les équations $\tang x = \sin \mathrm{H} \tang \mathrm{M}$ et $\sin y = \cos \mathrm{H} \sin \mathrm{M}$. On voit qu'une petite erreur sur x et y serait insensible dans la formule. Il suffit de connaître aussi l'azimut z, ou même de tirer tout d'un coup l'angle $(z+x)$ de la chaîne des triangles, en supposant les méridiens parallèles.

En effet, dans cette supposition (fig. 147) on a

$$\mathrm{AB}m = a\mathrm{AB}\,,\quad \mathrm{ABC} + \mathrm{AB}m = m\mathrm{BC}$$

et $$180^\circ - m\mathrm{BC} = n\mathrm{BC} = (z+x).$$

quant à y, on a pour un point quelconque C (fig. 150),

$$y' = \mathrm{CR} = \mathrm{RD} + \mathrm{DC} = \mathrm{BE} + \mathrm{BC}\sin(z+x)$$
$$= y + \delta\sin(z+x)\,;$$

à l'origine $y = 0$ et $y' = \delta\sin(z+x)$. Ainsi, quand on a calculé le terme $\delta\cos(z+x)$ comme autrefois, rien de plus aisé que d'y ajouter

$$\tfrac{1}{2}\delta\cos(z+x)\tang^2 y + (\delta\cos(z+x))\tang y \tang\delta\sin(z+x).$$

J'ai réduit ces corrections en tables où on les prend à vue. (Base du Système métrique, tome III.)

40. Par ces moyens et par d'autres équivalens, mais plus longs, j'ai calculé la longueur totale de notre méridienne que j'ai trouvée de 551,583',6385.

Nous ne nous étions pas contentés d'observer les latitudes et les azimuts aux deux extrémités. J'avais observé la hauteur du pôle à Dunkerque, à Paris et à Évaux; les azimuts à Watten, près de Dunkerque, à Paris et à Bourges. Méchain avait observé les latitudes et les azimuts à Carcassonne et à Montjouy, au midi de Barcelone; ainsi nous avons pu partager notre grand arc en plusieurs arcs partiels qu'on voit dans le tableau suivant.

Stations.	Latitudes.	Arcs célestes.	Arcs terrestr.	Degrés.	Latitude moyenne.	Diminution du degré.
Dunkerque...	51° 2′ 9″20					
Panthéon...	48.50.49,37	2°11′19″83	124944′8	57082′63	49°56′29″	5′5
Evaux.....	46.10.42,54	2.40. 6,83	152293,1	57069,31	47.30.46	32,4
Carcassonne.	43.12.54,30	2.57.48,24	168846,7	56977,80	44.41.48	12,9
Montjouy.....	41.21.44,99	1.51. 9,34	105499,0	56946,68	42.17.20	

La première chose à remarquer dans ce tableau, c'est que tous les degrés vont en diminuant de Dunkerque à Montjouy, du nord au sud; il est donc certain que la terre est aplatie, ainsi que nous le verrons ci-après par l'expression analytique des degrés du sphéroïde.

La diminution, lente d'abord, paraît s'accélérer au milieu de l'arc et se ralentir vers la fin. On peut l'attribuer à la petite erreur inévitable dans les observations, aux irrégularités de la terre qui n'est pas un sphéroïde exact, enfin à des irrégularités locales produites par le défaut d'homogénéité de la terre, qui feraient que le fil à plomb ne serait pas partout rigoureusement perpendiculaire à la surface. J'ai discuté ailleurs ces questions peut-être insolubles.

41. L'objet de notre opération était de déterminer le quart du méridien terrestre, dont la millionième partie devait être le mètre, fondement des nouvelles mesures.

Soit μ ce mètre, $C = \frac{0.0000432\,\pi}{\sin 1''}$, π la demi-circonfé-

férence pour le rayon $= 1$, A′ et A l'arc du méridien entre l'équateur et Dunkerque, entre l'équateur et Montjouy, ou généralement entre l'équateur et les deux points dont les hauteurs du pôle sont H′ et H, a l'aplatissement de la terre. J'ai démontré qu'on a

$$\mu = C\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right) + C\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)\frac{\frac{3}{2}a(1+a)\sin(H'-H)\cos(H'+H)}{(H'-H)\sin 1''}$$
$$-\frac{15}{32}aC\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)\frac{\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)}{(H'-H)\sin 1''}$$
$$-C\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)\left[\frac{\frac{3}{2}a(1+a)\sin(H'-H)\cos(H'+H)}{(H'-H)\sin 1''}\right]^2\sin 1''.$$

(A′—A) est l'arc terrestre, et (H′—H) l'arc céleste du méridien ci-dessus. Supposez $a = 0$, vous aurez le mètre dans la sphère. Faites pour a une supposition d'aplatissement, vous aurez une autre valeur du mètre. Comparez deux arcs, vous en tirerez une valeur de a, d'où vous déduirez la valeur de μ; mais nos arcs sont trop voisins l'un de l'autre, et le résultat serait peu sûr. Choisissez un arc tel, que $H' + H = 90°$; tous les termes qui contiennent a s'évanouissent, à cause de $\cos 90° = 0$. Mais pour ne rien perdre, calculons d'abord par l'arc entier.

Remarquons d'abord que dans tout ce qui suit j'ai supposé 48° 50′ 14″ pour la latitude de Paris, c'est ce qui résulte de nos observations calculées avec les réfractions de Bradley. Avec nos réfractions, nous aurions 48° 50′ 13″ à fort peu près; mais tout cela est indifférent pour les différences de latitude (H′ — H).

Il faut savoir encore que Méchain n'a pu accorder qu'à 3″24 près la latitude de Montjouy, tirée des observations faites à Barcelone, avec celle qu'il avait précédemment observée à Montjouy, quoiqu'il eût employé les mêmes instrumens et les mêmes soins. On peut choisir l'une ou l'autre, ou prendre un milieu. Dans ces différentes hypothèses, on formera le tableau suivant :

Valeurs du mètre dans les différentes hypothèses d'aplatissement,

ou *Fraction décimale qu'il faut ajouter à 443 lignes pour avoir le mètre dans diverses hypothèses d'aplatissement.*

a	Dunkerque, Montjouy.	Dunkerque, Barcelone.	Dunkerque, Barcelone, Montjouy.	Panthéon, Montjouy.	Panthéon, Barcelone.	Panthéon, Barcelone, Montjouy.
1 : 150	.24487	.2623	.2456	.25370	.2951	.2744
200	.26368	.3051	.2884	.24980	.2912	.2705
250	.28797	.3234	.3087	.24854	.2899	.2692
300	.30459	.3460	.3253	.24817	.2896	.2689
310	.30730	.3487	.3280	.24814	.2895	.2688
320	.30985	.3542	.3312	.24812	.2895	.2688
330	.31225	.3536	.3329	.24811	.2895	.2688
sphère.	.39271	.4341	.4134	.25171	.2931	.2724

42. Le mètre adopté par la Commission est $443^{li},295936$. Ce mètre, dans la colonne de Montjouy, tombe entre $\frac{1}{250}$ et $\frac{1}{300}$; dans celle de Barcelone, entre $\frac{1}{150}$ et $\frac{1}{200}$; dans celle de Barcelone-Montjouy, entre $\frac{1}{200}$ et $\frac{1}{250}$; dans celle de Panthéon-Barcelone, il s'éloigne peu de $\frac{1}{150}$.

La Commission supposait $\frac{1}{334}$ aplatissement qu'elle avait déduit de la comparaison de l'arc du Pérou avec le nôtre. Il m'a semblé que cet arc avait besoin d'être calculé de nouveau; j'ai trouvé $3^\circ\, 7'\, 3''$ pour l'arc céleste, $(A' - A) = 176877$ toises, $H' = 3^\circ\, 4'\, 32''$, $H = -0^\circ\, 2'\, 31''$, $a = \frac{1}{308,65}$ et $\mu = 445^{li},328$, comme par Dunkerque, Barcelone et Montjouy, avec un aplatissement de $\frac{1}{310}$, d'où je concluais que le mètre fixé à $443^{li},295938$ pour 0° de température, n'a sa longueur véri-

table $443^{li},328$ que quand il est soumis à une température de $6^{\circ},76$ de Réaumur, ou $8^{\circ},445$ du thermomètre centésimal.

43. La latitude de Dunkerque m'a toujours paru la moins sûre des cinq. Pour lever ce doute, j'ai calculé à la suite de mes triangles les triangles mesurés en 1787, par le major-général Roy, et pris pour terme boréal l'observatoire de Greenwich. J'y trouvais encore cet avantage, que je rencontrais sur ma route deux bases mesurées à la même époque avec des soins infinis et beaucoup d'accord; elles confirmèrent pleinement la distance de Dunkerque à Cassel, déduite de la base de Melun. L'arc, ainsi augmenté d'une part, augmenté de l'autre de l'arc entre Barcelone et Formentera, mesuré par MM. Biot et Arago, me donna pour le mètre $443^{li},32520$, le même que je tire de Dunkerque, Barcelone et Montjouy, avec l'aplatissement $\frac{1}{305}$; j'ai trouvé sensiblement la même chose, sans employer Formentera, par Greenwich, Barcelone et Montjouy; l'incertitude qui peut rester est donc extrêmement légère.

44. Nous avons vu (41) que la diminution des degrés n'était pas celle d'une ellipse régulière; on a cherché, par différens moyens, à déterminer l'erreur qu'il faudrait supposer à nos observations pour les ramener à une ellipse rigoureuse, et quel serait l'aplatissement de cette ellipse. La formule qui me sert à exprimer l'arc du méridien me fournit un moyen bien simple pour résoudre ces deux questions; j'en tire

$$(H'-H)=(A'-A)\frac{\pi}{2Q}\left[1+\tfrac{3}{2}a\cos^{2}(H'-H)\cos(H'+H)\right].$$

en négligeant, comme font tous les géomètres, les puissances supérieures de l'aplatissement. Adoptez une valeur pour a, vous en déduirez la différence $H'-H$ des latitudes, et par conséquent l'erreur des observations. Je forme ainsi le tableau suivant :

Erreurs des observations dans diverses hypothèses.

STATIONS.	$a=0.00572=\frac{1}{174,75}$. Latitudes.	dH.	$a=0.0066=\frac{1}{151}$. H.	dH.
Greenvich.....	51°28′38″56	—1″44	51°28′36″35	— 3″65
Dunkerque.....	51. 2. 7,58	—1,66	51. 2. 5,83	— 3,20
Panthéon.....	48.50.49,37	0,00	48.50.49,37	0,00
Evaux.....	46.10.40,17	—2,37	46.10.41,32	— 1,22
Carcassonne....	43.12.57,13	+2,87	43.12.58,13	+ 3,86
Montjouy..... Barcelone.....	41.21.49,84	+3,26	41.21.50,01	+ 3,43
Formentera....	38.39.55,77	—0,34	38.39.53,70	— 2,41
Som. des erreurs.	.....	+0,36	.....	— 3,20

STATIONS.	$a=0.0050=\frac{1}{200}$. H.	dH.	$a=0.0044=\frac{1}{227}$. H.	dH.
Greenvich.....	51°28′40″41	+0″41	51°28′41″93	+ 1″93
Dunkerque.....	51. 2. 9,06	—0,14	51. 2.10,27	+ 1,07
Panthéon.....	48.50.49,37	0,00	48.50.49,37	0,00
Evaux.....	46.10.39,22	—3,32	46.10.38,41	— 4,13
Carcassonne....	43.12.56,30	+2,01	43.12.55.56	+ 1,46
Montjouy..... Barcelone.....	41.21.49,62	+3,11	41.21.49,52	+ 2,98
Formentera....	38.39.55,42	—0,69	38.39.58,76	+ 2,65
Som. des erreurs.	.....	+1,37	.....	+13,96

45. La latitude de Paris me paraît la plus sûre ; en la supposant exacte, je trouve par ma formule et pour divers aplatissemens, les quantités qu'on voit ci-dessus. Avec $a=\frac{1}{174,75}$, la somme des erreurs se réduit à $+0'',36$, c'est-à-dire à rien ; les erreurs négatives forment une somme égale à celle des

positives, et aucune ne passe $5'' \frac{1}{3}$; l'aplatissement $\frac{1}{200}$ ne donne que $+ 1'',37$ pour résultante, aucune erreur ne va à $3'' \frac{1}{3}$; l'aplatissement $\frac{1}{151}$ donne une somme $- 3'',20$, et la plus forte erreur est de $5'',85$; enfin l'aplatisement $\frac{1}{227}$ donne la somme énorme $+ 13,96$, et la plus forte erreur, la seule négative, est de $4''$.

On peut remarquer deux choses; il y a toujours une différence de $5''$ entre Évaux et Carcassonne; les erreurs sur Dunkerque et Greenvich sont toujours de même signe et peu différentes. L'aplatissement $\frac{1}{175}$ est celui qui donne les moindres erreurs et les distribue d'une manière plus égale.

Les géomètres qui ont cherché, par différentes méthodes, l'aplatissement le plus probable de notre arc, ont trouvé des erreurs plus fortes et moins également distribuées, avec un aplatissement plus fort; mais ils ont déterminé les erreurs par leurs formules; il se pourrait qu'en calculant $(L' - L)$ par $(A' - A)$, ils eussent trouvé des quantités différentes.

Il semble qu'on ne devrait chercher ni la moindre somme des erreurs, ni la somme des moindres carrés, mais les moindres erreurs, moitié négatives, moitié positives. Les aplatissemens $\frac{1}{175}$ et $\frac{1}{200}$ satisfont le mieux à ces conditions et presque aussi bien. On voit au reste que cette méthode de déterminer l'aplatissement est fort peu sûre.

On expliquera comme on voudra les erreurs ou les écarts des observations, par les défauts des instrumens ou les irrégularités locales; je ne disputerai rien, sinon la possibilité d'erreur de $5''$. Nous voyons $3'',24$ entre les latitudes de Montjouy et Barcelone; ce serait $1'',62$ sur chacun, ou, si l'on veut, $2''$ sur l'une et $1'',2$ sur l'autre. Je ne croirai pas facilement à des erreurs qui surpassent $2''$.

46. Depuis notre opération, il s'en est fait deux autres qui méritent toute l'attention des savans. Celle de Laponie, par M. Svanberg, qui, comparée à la nôtre, lui a donné $\frac{1}{309}$ d'aplatissement, tandis que l'ancienne opération donnait $\frac{1}{173}$. L'arc de M. Svanberg était presque double de l'ancien, les extrémités étaient changées toutes deux; ainsi je balancerais

à

à reconnaître la possibilité d'une erreur de 12″ en 1736; j'ai examiné scrupuleusement toutes les parties de l'opération, sans pouvoir soupçonner la cause d'une si grande erreur.

La seconde est celle de 3° mesurés en Angleterre; les irrégularités y sont considérables, ce qui est difficile à concevoir avec un secteur comme celui de Ramsden, qui, d'après la description qu'on en a donnée, paraîtrait le chef-d'œuvre de l'art. Le tems éclaicira peut-être ces difficultés; mais il est plus à craindre qu'elles n'augmentent à chaque opération nouvelle que l'on tentera. Aurions-nous atteint les limites, qu'il ne nous sera plus permis de reculer?

47. Il nous reste un problème intéressant à résoudre, c'est de *déterminer les longitudes et les latitudes de tous nos signaux et leurs distances à la méridienne de Dunkerque, ainsi que leurs distances à Dunkerque comptées sur la méridienne.* Ce problème dépend d'un autre: *Connaissant la longitude et la latitude d'un lieu, la distance de ce lieu à un second, et l'angle que cette distance fait avec le méridien du premier, déterminer tout ce que nous avons d'abord énoncé.* Nous allons résoudre ce problème pour la sphère, et nous y joindrons ensuite les corrections légères qu'exige le sphéroïde.

Soit P le pôle (figure 151), A le lieu connu, B le lieu observé, PAM, PBN les deux méridiens. On demande les angles P et B et le côté PB. Si l'on connaît AB en toises, on l'aura facilement en degrés de la sphère, on aura donc pour données PA, AB et l'angle A, le reste dépend de la solution d'un triangle sphérique,

$$\cos PB = \cos A \sin PA \sin AB + \cos PA \cos AB,$$
$$\sin(H + dH) = \sin\delta \cos H \cos A + \cos\delta \sin H.$$

Développez, vous aurez facilement

$$2\sin\tfrac{1}{2}dH \cos\tfrac{1}{2}dH - 2\sin^2\tfrac{1}{2}dH \tang A$$
$$= \sin\delta \cos A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}A \tang H,$$

équation semblable à celle que nous avons résolue (IV. 72); et qui nous donnera

$$dH = \delta \cos A - \tfrac{1}{2} d^2 \sin 1'' \sin^2 A \operatorname{tang} H$$
$$- \tfrac{1}{6} d^3 \sin^2 1'' \sin^2 A \cos A \,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 H) + \text{etc.}$$

Si δ est donné en secondes, on aura dH en secondes; si δ est donné en toises, dH sera en toises la différence des parallèles et l'arc du méridien. Voilà donc une manière bien simple encore de calculer les parties de la méridienne; elle emploie les azimuts vrais, et suppose la convergence des méridiens. Au lieu de sin 1'', il faudra substituer $\frac{1}{\text{rayon de la terre}}$, ou plus généralement, $\frac{1}{\text{normale}}$.

84. Au lieu de l'azimut PAB = A, voulez-vous employer

$$MAB = z = 180° - A,$$
$$dH = -\delta \cos z - \tfrac{1}{2} \delta^2 \sin 1'' \sin^2 z \operatorname{tang} H$$
$$+ \tfrac{1}{6} \delta^3 \sin^2 1'' \sin^2 z \cos z \,(1 + 3 \operatorname{tang}^2 H).$$

49. Le même triangle donne $\sin P = \frac{\sin \delta \sin z}{\cos (H + dH)}$, d'où l'on tire facilement

$$P = \frac{\delta \sin z}{\cos H} (1 - \delta \sin 1'' \cos z \operatorname{tang} H),$$

d'où $$z + dz = 180° + z - \frac{\delta \sin z \sin \frac{1}{2}(H + H')}{\cos H'},$$

en négligeant les δ^3 qui sont insensibles.

50. Le même triangle donne encore

$$\operatorname{tang}\left(90° - \frac{A+B}{2}\right) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} P \sin (H + \frac{1}{2} dH')}{\cos \frac{1}{2} dH},$$

en négligeant les δ^3 toujours insensibles. Ces trois formules suffisent dans les mesures de degré. J'en ai donné de plus complètes, et d'autres qui ont une exactitude indéfinie, mais e n'en ai fait nul usage. (fig. 152).

51. $\delta \sin z = Bb$, c'est la distance de B à la méridienne de A;
$\delta \cos z = Ab$, c'est la dist. AB réduite à la mérid. de A.

Mais supposons que l'on connaisse déjà DA′, et qu'on demande A′B′ et BB′.

Nous avons déjà vu (41) l'expression de A′B′ que l'on peut sans inconvénient réduire à

$$\tang \delta \cos (z + x) [1 + \tang \delta \tang y (z + z)] ;$$

nous aurons de même, avec toute l'exactitude desirable,

$$BB' = AA' + \delta \sin (z + x).$$

la ligne DB′ s'appelle distance à la perpendiculaire du lieu D et BB′ distance à la méridienne.

52. Ces formules suffiraient si la terre était sphérique, l'aplatissement n'y apportera que de légers changemens. D'abord, pour l'azimut la correction serait véritablement insensible; la correction de latitude a pour expression $e^2 \delta \cos Z \cos^2 H$, e est l'excentricité de l'ellipse : or $1 - e^2 = 1 - 2a + a^2$, $e^2 = 2a - a^2 = 2a(1 - a)$. Cette correction n'irait pas à 6″, même en supposant $\delta = 1°$ et $a = \frac{1}{200}$.

La longitude ne devrait avoir aucun besoin de correction, elle est la même dans l'ellipse et le sphéroïde. Mais, pour convertir en secondes l'arc δ donné en toises ou en mètres, la formule est

$$\sin \delta'' = \frac{\sin \delta (1 - a \sin^2 H)}{\text{rayon de l'équateur}} = \frac{\pi \sin \delta}{180° D} (1 - a \sin^2 H) ;$$

$\sin \delta$ étant donné en toises, D étant la longueur du degré à la latitude donnée, et π la demi-circonférence dont le rayon $= 1$, d'où $\log \delta = 8{,}003666 + \log \delta - aK \sin^2 H$, pour la France. $\log K = 9{,}6377843$. Voyez pour la démonstration la Base du Système métrique, ou mon Traité d'Astronomie.

53. J'y ai démontré de même les valeurs de toutes les parties de l'ellipsoïde; je ne mettrai ici que les plus utiles.

Désignons par $\sin \varepsilon$ l'excentricité de l'ellipse, en supposant le grand axe $= 1$; mais soient plus généralement m et n les

demi-axes, $n = m \cos \varepsilon$, $\cos \varepsilon = \frac{n}{m}$, $\sin \varepsilon = \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} \varepsilon = \frac{1 - \frac{n}{m}}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{m - n}{m + n}.$$

L'ellipse peut être considérée comme la projection orthographique du cercle dont l'inclinaison est ε; si l'ordonnée du cercle est $y = \sin Y$, l'ordonnée elliptique sera $\sin Y \cos \varepsilon$; CP, (fig. 153), sera la projection du rayon CP'.

La tangente aT du cercle aura pour projection une ligne droite qui tombera toute entière hors de l'ellipse qu'elle ne touchera qu'en un point; AT, projection de aT, sera tangente à l'ellipse. Menons la normale AM jusqu'à l'axe PCM; menons la normale aC dans le cercle, et joignons CA.

ALT sera la latitude apparente du lieu, l'angle que le fil à-plomb fera avec l'équateur.

ACT sera la latitude géocentrique ou vue du centre de la terre, aCT sera la latitude dans le cercle circonscrit.

ACT = ALT — CAL = (H — ν) = H — angle de la verticale (VI. 33).

$a\mathrm{CT} = h$.

$$\tang \mathrm{FTA} = \cot \mathrm{FAT} = \tang \mathrm{LAF} = \cot \mathrm{ALF} = \cot \mathrm{H} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FT}},$$

$$\tang \mathrm{FT}a = \cot \mathrm{F}a\mathrm{T} = \tang \mathrm{C}a\mathrm{F} = \cot a\mathrm{CF} = \cot h = \frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{FT}},$$

$$\frac{\cot \mathrm{H}}{\cot h} = \frac{\mathrm{AF}}{a\mathrm{F}} = \frac{a\mathrm{F} \cos \varepsilon}{a\mathrm{F}} = \cos \varepsilon,$$

$$\cot \mathrm{H} = \cos \varepsilon \cot h, \quad \tang h = \cos \varepsilon \tang \mathrm{H},$$

d'où

$$(\mathrm{H} - h) = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin 1''} \sin 2\mathrm{H} - \frac{\tang^4 \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin 2''} \sin 4\mathrm{H} + \text{etc.} = \nu',$$

$$\tang h = \frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{CF}}, \quad \tang \mathrm{ACT} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{CF}} = \tang (\mathrm{H} - \nu),$$

$$\frac{\tang(H-\nu)}{\tang h}=\frac{aF\cos\varepsilon}{aF}=\cos\varepsilon,$$

$$\tang(H-\nu)=\cos\varepsilon\tang h=\cos^2\varepsilon\tang H,$$

$$\begin{aligned}
H-(H-\nu)&=\left(\frac{1-\cos^2\varepsilon}{1+\cos^2\varepsilon}\right)\frac{\sin 2H}{\sin 1''}-\left(\frac{1-\cos^2\varepsilon}{1+\cos^2\varepsilon}\right)^2\frac{\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}\\
&=\left(\frac{\text{séc}^2\varepsilon-1}{\text{séc}^2\varepsilon+1}\right)\frac{\sin 2H}{\sin 1''}-\left(\frac{\text{séc}^2\varepsilon-1}{\text{séc}^2\varepsilon+1}\right)^2\frac{\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}\\
&=\left(\frac{\tang^2\varepsilon}{2+\tang^2\varepsilon}\right)\frac{\sin 2H}{\sin 1''}\\
&\quad-\left(\frac{\tang^2\varepsilon}{2+\tang^2\varepsilon}\right)^2\frac{\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}\\
&=\left(\frac{\frac{1}{2}\tang^2\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\tang^2\varepsilon}\right)\frac{\sin 2H}{\sin 1''}\\
&\quad-\left(\frac{\frac{1}{2}\tang^2\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\tang^2\varepsilon}\right)^2\frac{\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Cet angle sert pour le calcul des parallaxes.

54. $$\sin CAa : \sin CaA :: Ca : CA$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{Ca\sin CaA}{\sin CAa}=\frac{Ca\cos h}{\cos(H-\nu)}=\frac{m\cos(H-\nu')}{\cos(H-\nu)}\\
&=\frac{m\cos(H-\frac{1}{2}\nu)}{\cos(H-\nu)}=\frac{m\cos(H-\nu+\frac{1}{2}\nu)}{\cos(H-\nu)}\\
&=\frac{m\left[\cos(H-\nu)\cos\frac{1}{2}\nu-\sin(H-\nu)\sin\frac{1}{2}\nu\right]}{\cos(H-\nu)}\\
&=m\left[\cos\tfrac{1}{2}\nu-\sin\tfrac{1}{2}\nu\tang(H-\nu)\right]\\
&=m\left[1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\nu-\sin\tfrac{1}{2}\nu\tang(H-\nu)\right]\\
&=m\left(1-\tfrac{1}{2}\sin\nu\tang H\right),
\end{aligned}$$

sans erreur sensible

$$\begin{aligned}
&=m\left(1-\tfrac{1}{2}\tang^2\varepsilon\sin 2H\tang H\right)\\
&=m\left(1-\tang^2\varepsilon\sin H\cos H\tang H\right)\\
&=m\left(1-\tang^2\varepsilon\sin^2 H\right)
\end{aligned}$$

CA est le rayon de la terre pour l'observateur en A; ce rayon est la mesure de la parallaxe.

Soit ϖ la parallaxe horizontale pour l'équateur, la pa-

rallaxe pour la latitude H sera

$$\varpi - \varpi \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 H, \quad \text{et} \quad -\varpi \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 H$$

la correction de la parallaxe, sans erreur sensible. Veut-on pour CA des expressions plus exactes, et qu'on puisse developper à volonté,

$$\begin{aligned}
CA &= (1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 h)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varepsilon \sin^2 h - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\sin^4\varepsilon \sin^4 h - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\sin^6\varepsilon \sin^6 h - \text{etc.} \\
&= \left(1 - \frac{\sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon \sin^2 H}{1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon \sin^2 H}{1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H}\right) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\left(\frac{\sin^2\varepsilon \cos^2\varepsilon \sin^2 H}{1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{6}(\qquad)^3 - \text{etc.}
\end{aligned}$$

55. $$\begin{aligned}
CF = Ca\cos h = m\cos h = \frac{m}{\text{séc}\, h} &= \frac{m}{(1 + \operatorname{tang}^2 h)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{m}{(1 + \cos^2\varepsilon \operatorname{tang}^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\cos H}{(\cos^2 H + \cos^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{m\cos H}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

C'est l'abscisse de l'ellipse et le rayon du parallèle. Dans la sphère ce rayon, pour la latitude H, serait $m\cos H$; il sera donc plus grand dans l'ellipsoïde que dans la sphère pour une même latitude H; les degrés de longitude seront donc plus grands dans l'ellipsoïde que dans la sphère.

56. $$\begin{aligned}
AF = aF\cos\varepsilon - m\sin h\cos\varepsilon &= \frac{m\cos\varepsilon}{(1 + \cot^2 h)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{m\cos\varepsilon}{\left(1 + \dfrac{\cot^2 H}{\cos^2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\cos^2\varepsilon}{(\cos\varepsilon + \cot^2 H)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{m\cos^2\varepsilon \sin H}{(\cos^2\varepsilon \sin^2 H + \cos^2 H)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{m \cos^2\varepsilon \sin H}{(\cos^2 H + \sin^2 H - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m \cos\varepsilon \sin H}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \text{ordonnée de l'ellipse},$$

$$AL = \frac{AF}{\cos FAL} = \frac{AF}{\sin H} = \frac{m \cos^2\varepsilon}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$LF = AF \cot H = \frac{m \cos^2\varepsilon \cos^2 H}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$CL = CF - FL = \frac{m \sin^2\varepsilon \cos H}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}},$$

$$LF : CL :: AL : LM,$$

$$LF + CL : LF :: AL + LM : AL,$$

$$CF : LF :: AM : AL, \quad AM = \frac{AL \cdot CF}{LF},$$

$$AM = \frac{AF}{\sin H} \frac{CF}{AF \cot H} = \frac{CF}{\cos H}$$

$$= \frac{m}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

AM est la normale, le point M une espèce de centre, AM le rayon par lequel il faut diviser les petits arcs sphéroïdiques qui ont en A leur origine pour avoir le sinus de l'angle qu'ils soutendent en M;

$$CM = CL \tang H = \frac{m \sin^2\varepsilon \sin H}{(1 - \sin^2\varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le point M est celui où la normale coupe l'axe; il change avec la latitude. Ainsi deux normales ne se rencontrent point dans l'axe, à moins que les latitudes ne soient les mêmes; et si ces deux normales ne sont point dans le même méridien, elles ne se rencontrent nulle part, puisque ces méridiens ne se rencontrent que dans l'axe. Mais si les latitudes sont peu différentes, ce qui a lieu dans les mesures de degré, les deux

intersections dans l'axe différeront très-peu : on pourra prendre indifféremment l'une des deux normales, ou une normale moyenne, et l'on aura une manière approximative d'évaluer l'angle, ou de convertir en secondes les petits arcs donnés en toises. La partie de l'axe entre deux points M et M′ de deux normales a pour expression

$$\sin^2\varepsilon \sin dH \cos H - \tfrac{1}{2}\sin^2\varepsilon \sin^2 dH \sin H$$
$$+ \tfrac{3}{2}\sin^4\varepsilon \sin dH \sin^2 H \cos H + \text{etc.}$$

57. Soit AA′ l'élément de la courbe du méridien,

$$AA' = dA, \quad A'u = dA \sin H = -dCF$$
$$= -d\left(\frac{m\cos H}{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{m dH \sin H}{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{\frac{1}{2}m\cos H d(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)}{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m dH(1-\sin^2\varepsilon)\sin H}{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

$$\frac{dA}{dH} = \frac{m\cos^2\varepsilon}{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} = \text{rayon de courbure du méridien.}$$

$$m = \left(\frac{dA}{dH}\right)\frac{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{\cos^2\varepsilon} = \text{rayon de l'équateur}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{ grand axe,}$$
$$n = \left(\frac{dA}{dH}\right)\frac{(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{\cos\varepsilon} = \text{demi-petit axe,}$$
$$\frac{dA}{dH\,.\,m\cos^2\varepsilon} = (1-\sin^2\varepsilon\sin^2 H)^{-\frac{3}{2}}.$$

Développez, substituez les cosinus des multiples de H aux puissances de sin H, intégrez, vous aurez une série de la forme

$$\frac{A}{\cos^2\varepsilon} = aH - b\sin 2H + c\sin 4H - d\sin 6H + \text{etc.}$$

C'est l'expression générale d'un arc du méridien compté de l'équateur. Un autre arc A′ donnera

$$\frac{A'}{\cos^2\varepsilon} = aH' - b\sin 2H' + c\sin 4H' - d\sin 6H',$$

d'où

$$\frac{A'-A}{\cos^2\varepsilon} = a(H'-H) - b(\sin 2H' - \sin 2H') + \text{etc.}$$
$$= (H'-H) - 2b\sin(H'-H)\cos(H'+H)$$
$$+ 2c\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H) - \text{etc.}$$

Soit Q le quart du méridien, l'expression se réduit à

$$\frac{Q}{\cos^2\varepsilon} = a.90^\circ,$$

$$\frac{Q}{A'-A} = \frac{Q\,\text{séc}^2\varepsilon}{(A'-A)\,\text{séc}^2\varepsilon}$$
$$= \frac{a\,90^\circ}{a(H'-H) - 2b\sin(H'-H)\cos(H'+H) + \text{etc.}};$$

en développant, j'ai trouvé

$$Q = \left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)(90^\circ)\left(1 + \left(\tfrac{3}{4}\sin^2\varepsilon + \tfrac{3}{8}\sin^4\varepsilon\right)\frac{\sin(H'-H)\cos(H'+H)}{(H'-H)}\right.$$
$$+ \tfrac{9}{16}\sin^4\varepsilon\,\frac{\sin^2(H'-H)\cos^2(H'+H)}{(H'-H)^2}$$
$$\left. - \tfrac{15}{128}\sin^4\varepsilon\,\frac{\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)}{H'-H}\right),$$

en négligeant les sixièmes puissances de $\sin\varepsilon$.

Si $(A'-A)$ est en toises, le quart du méridien sera également en toises; pour avoir en lignes, on multipliera tout par 864; pour avoir le mètre, on prendra la dix-millionième partie : c'est ainsi que j'ai trouvé

$$k = \frac{0.0001357168026 35(A'-A)}{H'-H}\left\{\begin{array}{l} 1 + \left(\tfrac{3}{4}\sin^2\varepsilon + \tfrac{3}{8}\sin^4\varepsilon\right)\dfrac{\sin(H'-H)\cos(H'+H)}{(H'-H)} \\ + \tfrac{9}{16}\sin^4\varepsilon\,\dfrac{\sin^2(H'-H)\cos^2(H'+H)}{(H'-H)^2} \\ - \tfrac{15}{128}\sin^4\varepsilon\,\dfrac{\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)}{(H'-H)} \end{array}\right\}$$

58. Les distances au zénit observées à chaque station nous fournissent les moyens de déterminer les hauteurs de tous les signaux au-dessus de la mer, soit à Dunkerque, soit à Barcelone. Soit C le centre de la terre (fig. 154), A et A′ les sommets de deux signaux, ZAA′ l'angle entre le zénit de A et le sommet A′ = δ, VA′A = δ' l'angle entre le zénit de A′ et le sommet A,

$$\left.\begin{array}{l} ZAA' = 180^\circ - CAA' \\ VA'A = 180^\circ - CA'A \end{array}\right\} ZAA' + VA'A = 360^\circ - CAA' - CA'A = 360^\circ - (180^\circ - C) = 180^\circ + C = \delta + \delta'.$$

Ainsi la somme des distances zénitales réciproques de deux signaux devrait être de 180° + l'angle des deux normales, ou 180° + arc *ab* de distance des signaux sur le globe.

Pour que cette équation eût lieu, il faudrait que les distances δ et δ' fussent prises au sommet même des signaux; mais le centre du cercle est toujours au-dessous du sommet A d'une quantité que j'ai nommée *d*H; on a de cette manière une distance zénitale Δ qui est trop faible, et la véritable valeur sera $\delta = \Delta + \left(\frac{dH}{D}\right)\frac{\sin\delta}{\sin 1''}$. Cette correction est l'angle sous lequel *d*H est vu à la distance D = AA′. Les distances Δ sont celles qui servent pour réduire à l'horizon l'angle entre les deux sommets observés (33), la distance corrigée δ celle qui doit servir à calculer les différences de niveau et les hauteurs au-dessus de la mer.

59. Si la terre est sphérique, deux objets seront de niveau quand ils seront à la surface de la sphère, ou dans une surface sphérique concentrique et parallèle à celle de la mer. Dans ce cas, chacune des deux distances sera $90^\circ + \frac{1}{2}C$, et la somme $\delta + \delta' = 180^\circ + C$.

Si la terre est un ellipsoïde, deux signaux seront de niveau à la surface même de l'ellipsoïde, ou à la surface d'un ellipsoïde semblable et concentrique; mais si les latitudes sont différentes, les normales seront inégales, les deux distances δ et δ' différeront d'une quantité qui ne passerait pas 3 ou 4″ dont on ne peut répondre dans ce genre d'observation, et

qu'on peut négliger. J'en ai donné la formule, Base du Système métrique, tome III, p. 739.

On observe que jamais on n'a véritablement $\delta + \delta' = 180° + C$, la somme est toujours trop faible; c'est que la réfraction élève le signal A′ en B′ d'une quantité r', et A en B d'une quantité r; ensorte que

$$\delta + r + \delta' + r' = 180° + C,$$

d'où

$$r + r' = 180° - \delta - \delta' + C :$$

la route de la lumière de A en A′ doit être la même que de A′ en A; c'est une courbe dont A′B et AB′ sont les tangentes. Ainsi

$$r = r' = \tfrac{1}{2}(r + r') \quad \text{et} \quad r = 90° + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta')$$

et

$$\frac{r}{C} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\delta + \delta' - 180°).$$

C'est ce qui aurait lieu, si les deux observations étaient simultanées, ou si l'état de l'atmosphère ne changeait pas dans l'intervalle des deux observations.

Soit ab la corde qui joint les axes des deux signaux à la surface sphérique ou sphéroïdique des mers, Aa et bA′ seront les hauteurs des deux signaux au-dessus de la mer.

60. Soit AA″ parallèle à la corde ab, A′A″ sera la différence de hauteur ou de niveau. Soit A′A″ $= dN$, le triangle AA′A″ donne

$$\sin A' : AA'' :: \sin A : AA'' = dN = \frac{AA'' \sin A}{\sin A'}$$

$$= \frac{K \sin(A'AC - A''AC)}{\sin(\delta + r)} - \frac{K \sin(180° - \delta' - r - baC)}{\sin(\delta + r)}$$

$$= \frac{K \sin(180° - \delta' - r - 90° + \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r)}$$

$$= \frac{K \sin(90° - \delta' - r + \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r)} = \frac{K \cos(\delta' + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C)}$$

$$= \frac{K \cos(\delta' + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C)} \quad (K = AA'').$$

Mais $\delta' = 180° - \delta + C - 2r$ et

$$dN = \frac{K\cos(180^\circ - \delta + C - 2r + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C)}$$

$$= \frac{K\cos(180^\circ + \frac{1}{2}C - r - \delta)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C)} = -\frac{K\cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C)}$$

$$= \frac{K\cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(\delta + r - \frac{1}{2}C)\cos\frac{1}{2}C + \cos(\delta + r - \frac{1}{2}C)\sin\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\left(\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\right)\cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)}{1 + \operatorname{tang}\frac{1}{2}C\cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)}$$

$$= \left(\frac{K}{\cot\frac{1}{2}C}\right)\cot(\delta + r - \frac{1}{2}C)$$

$$- \left(\frac{K}{\cos\frac{1}{2}C}\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\cot^2(\delta + r - \frac{1}{2}C) + \text{etc.}$$

Cette formule suppose la connaissance de δ et de r, mais n'exige qu'une seule observation de distance au zénit. Si $\delta + r - \frac{1}{2}C > 90^\circ$, dN sera négative, et se retranchera de la hauteur connue Aa pour avoir bA'; si c'est bA' qui est connue, on changera le signe de dN.

61. Nous pouvons éliminer $r = 90^\circ + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\delta'$, et la formule deviendra

$$dN = -K\text{séc}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) - K\text{séc}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta);$$

de ces formules je tire

$$\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) = \left(\frac{dN}{K}\right)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin 1''} - \left(\frac{dN}{K}\right)^2\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin 2''} - \text{etc.}$$

formule qui donnerait la différence des distances δ' et δ, si l'on n'en avait qu'une et qu'on voulût connaître l'autre pour réduire à l'horizon un angle observé dans un plan incliné.

62. Soit A l'horizon de la mer observé de A', et vu en B par l'effet de la réfraction $A'AC = 90^\circ$; car le rayon A'A est tangent à la surface de la mer; $VA'A = 90^\circ + C$,

$\delta + r = 90° + C$, $\delta = 90° + C - r = 90° + C - nC = 90°(1-n)C$,

$C = \frac{\delta - 90°}{1-n}$,

$$dN = K \text{séc} \tfrac{1}{2} C \cot (90° + C - r + r - \tfrac{1}{2} C)$$
$$- K \text{séc} \tfrac{1}{2} \text{tang} \tfrac{1}{2} C \cot^2 (90° + C - r + r - \tfrac{1}{2} C)$$
$$= K \text{séc} \tfrac{1}{2} C \cot (90° + \tfrac{1}{2} C) - K \text{séc} \tfrac{1}{2} C \text{tang} \tfrac{1}{2} C \cot^2 (90° + \tfrac{1}{2} C)$$
$$= - K \text{séc} \tfrac{1}{2} C \text{tang} \tfrac{1}{2} C - K \text{séc} \tfrac{1}{2} C \text{tang} \tfrac{1}{2} C \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Mais $K = N \text{tang} C = \frac{R \text{tang} C}{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 K)^{\frac{1}{2}}}$, N étant la normale et R le rayon de l'équateur.

$$dN = - \frac{R \text{tang} C \text{tang} \tfrac{1}{2} C \text{séc} \tfrac{1}{2} C}{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} - \text{etc.}$$

$$= - \frac{\tfrac{1}{2} R \text{tang}^2 C}{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin H)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{\tfrac{1}{2} R \text{tang}^2 \left(\frac{\delta - 90°}{1-n}\right)}{(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= - \frac{\tfrac{1}{2} R \text{tang}^2 (\delta - 90°)}{(1-n)^2 (1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}};$$

dN sera l'abaissement de la mer au-dessous du niveau de A′ et donnera l'élévation de A′ au-dessus de la mer.

63. A Montjouy ainsi qu'à Dunkerque, nous connaissions dN par une mesure effective, nous pourrions en conclure $(1-n)^2$ et n. Autant j'avais de signaux vus l'un de l'autre, autant de fois je pouvais déterminer

$$\frac{r}{C} = n = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} (\delta + \delta' - 180°).$$

Par cette dernière formule j'ai trouvé une seule fois $n = -0.0035$, une fois $+0.0231$, 0.0288 et 0.0297, très-rarement 0.05 ou 0.06 et dans l'été seulement; rarement de 0.14 à 0.15, en hiver, par des tems de brume; plus communément de 0.06 à 0.08, en été; de 0.08 à 0.10, en hiver; quantité moyenne 0.07876, ou 0.08 en nombre

rond; 0.0783 par dix-sept observations de l'horizon de la mer, en été ou en automne.

64. La formule dN (61), appliquée à toutes nos observations suivant toutes leurs combinaisons binaires possibles, m'a donné les hauteurs de tous nos signaux au-dessus de la mer; ainsi pour le sommet du clocher de Rodez, j'ai trouvé

Hauteur au-dessus de la Méditerranée à Barcelone,	360T65.
au-dessus de l'Océan, basse mer à Dunkerque,	361,67.
Différence entre la Méditerranée et la basse mer de l'Océan, ...	1,02.
entre la Méditerranée et l'Océan, mer moyenne, ...	0,05.
Le sommet du clocher est élevé sur le sol, de...	43,5.
Hauteur du sol, à Rodez.....	317,0.

A Amiens, le pavé de la cathédrale n'est qu'à....	21T.
A Paris, la plate-forme de l'Observatoire est à....	44.
Le milieu de la base de Melun.....	42.
A Chapelle-Reine, après Fontainebleau.....	64.
A Orléans, pavé de la cathédrale.....	60.
A Bourges.....	81.
A Evaux, le pavé de l'église.....	239.
A Herment, *idem*.....	422.
Puy-de-Dôme.....	759.
Cantal.....	951.
Mont-d'Or.....	969.
Puy-Violan.....	818.
Puy-Mary.....	851.
Chapelle Saint-Jean, près Rieupeyroux.....	411.
Castelnaudari.....	170.
Carcassonne, pavé de la cathédrale.....	50.
Perpignan.....	37.
Base de Perpignan, hauteur moyenne.....	11.

Ainsi le sol de la méridienne s'élève, de Dunkerque jusqu'en Auvergne, de 400T, et s'abaisse jusqu'à Perpignan.

65. Pour déterminer les différences de niveau par une seule observation de distance au zénit, je tire des formules précédentes, en supposant $n = 0.08$,

$$dN = K \cot \delta + \frac{0^{T},00000.0128\, K^2}{\sin^2 \delta};$$

K est la distance rectiligne entre les deux signaux.

LEÇON XXIV.

Astronomie nautique.

1. A la mer, l'agitation continuelle du vaisseau ne permet l'usage ni du fil à plomb, ni du niveau, ni des horloges à pendule ; il a fallu inventer des instrumens nouveaux. Les pendules sont remplacées par les montres marines ou garde-tems, qui ont été portés de nos jours à un degré étonnant de perfection. On les règle avant de les embarquer, on connaît leur accélération diurne sur le mouvement moyen, on peut donc en tout tems connaître en mer l'heure qu'il est à Paris; on observe l'heure du vaisseau et l'on a la solution la plus simple du problème des longitudes; on n'aurait même rien autre chose à desirer à cet égard, si l'on pouvait être sûr que l'accélération, une fois déterminée, demeurât toujours la même ; mais à chaque fois qu'on relâche dans un endroit dont la longitude est connue, on obtient la correction de la montre, et l'on a une nouvelle détermination de l'accélération diurne ; on s'en sert dans la suite du voyage, jusqu'à ce qu'on aborde de nouveau à une ville connue.

2. Pour remplacer les cercles ou quarts de cercle astronomiques, Newton donna l'idée des instrumens de réflexion ; Hadley les exécuta le premier, Mayer et Borda les perfectionnèrent. En voici l'idée fondamentale. Soit CAB un secteur

de 45° au moins (fig. 155). Sur le rayon CA, perpendiculairement au plan du secteur, est un miroir de verre dont la moitié inférieure seulement est étamée, la moitié supérieure est transparente ; en O est une lunette par laquelle l'observateur vise à l'horizon H de la mer qu'il voit par la partie non étamée; en MC est un autre miroir parallèle au premier, qui reçoit aussi par le rayon IC l'image de l'horizon, qu'il réfléchit de C en R; là, par une autre réflexion, elle est renvoyee suivant RO, et forme dans la lunette une seconde image qui se réunit à la première. Soit CL perpendiculaire au grand miroir M; pour que IC soit réfléchi suivant CR, il suffit que l'on ait $ICL = LCR = \frac{1}{2} ICR$; le parallélisme des deux miroirs donnera $RCI = CRO$; CR sera réfléchi suivant RO parallèle à IC, le rayon direct HR et le rayon IC réfléchi se confondront en RO. Le grand miroir M est porté par une alidade CD, et tourne avec elle au centre de l'instrument. Si vous donnez un mouvement DC à cette alidade; l'angle d'incidence de IC venant à changer, ce ne sera plus le rayon IC qui sera réfléchi suivant CR, mais un autre rayon comme SC, qui fera sur IC un angle $ICS = h$; dans ce mouvement, la perpendiculaire CL sera devenue CL′, ensorte que $LCL' = DE$; on aura toujours $SCL' = L'CR$, par le principe général de l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; $SCL' = L'CR$ donne

$$SCI + ICL' = h + ICL' = L'CR = L'CL + LCR,$$

d'où

$$h = L'CL + LCR - ICL' = DE + LCI - ICL'$$
$$= DE + LCI - (ICL - L'CL) = DE + LCI - LCI + L'CL = 2DE;$$

ainsi la hauteur h du point réfléchi sera le double de DE; pour connaître la hauteur, il suffira de doubler l'arc DE marqué par l'alidade; ou, ce qui est plus simple, on divisera l'arc DA en demi-degrés qui vaudront des degrés. Un arc de 45° sera divisé en 90 et pourra mesurer des arcs de 90°.

3. Soit ICR=90°, ICL=45°=LCR=RCO=ACD=AD. L'instrument sera un octant qui pourra mesurer des angles de 90°.

Soit ICR=60°, ICL=LCR=30°, RCO=90°—ICL=60° =AD; vous aurez le sextant qui mesurera des angles de 120°.

Soit ICR=0, LCR=0, RCO=90°=AD, vous aurez un quart-de-cercle qui mesurera des angles de 180°.

Au lieu d'un quart-de-cercle, joignez ensemble quatre quarts-de-cercle, ou ayez un cercle entier; vous pourrez mesurer des angles de 180°, en prenant pour zéro ou pour origine un point quelconque de la circonference; après avoir mesuré un arc MN, en mettant M sur zéro, vous pourrez le mesurer de nouveau en partant de N, et vous aurez l'angle double, puis l'angle triple, et vous multiplierez indéfiniment les mesures. Cette idée de Mayer a été heureusement perfectionnée par Borda.

4. Au lieu de viser à l'horizon I, visez à un astre quelconque et amenez un second astre en contact avec le premier; l'alidade E vous donnera DE = distance des deux astres.

5. Au lieu de viser à l'horizon I, visez au point opposé I', vous aurez la distance SI' de l'astre à l'horizon I' = 180°—SI. C'est par cet artifice que l'on mesure, avec un octant, des angles plus grands que 90°, et avec un sectant, des angles au-dessus de 120°; avec le cercle entier, on n'a pas besoin de cet artifice, ni d'observer, comme on dit, par derrière, c'est-à-dire en tournant le dos à l'astre. Pour cette observation, on déplace la lunette et l'on a un second petit miroir.

6. Nous avons supposé que, l'alidade étant sur 0, les deux images de l'horizon coïncident, c'est-à dire que les deux miroirs sont exactement parallèles. Si, pour les faire coïncider, il faut donner à l'alidade un petit mouvement D*a*, comme d'une minute; il faudra retrancher cette minute de la hauteur observée, qui sera *a*E et non DE; si le mouvement qui amène la coïncidence est D*b* sur le prolongement de AD, la hauteur vraie sera *b*E et non DE, il faudra ajouter *b*D à la hauteur DE marquée par le limbe.

7. Ceci suppose encore que les rayons HC, IC sont parallèles, c'est-à-dire que le centre C et l'œil sont à la surface de la mer, et que la mer est une surface plane. Tout cela n'est vrai qu'à peu près. L'œil est toujours plus ou moins élevé sur la surface de la mer, et cette surface est courbe; il en résulte que l'horizon de la mer est toujours à plus de 90° du zénit. Nous avons vu (62) que

$$dN = \frac{\frac{1}{2}(R + dN)\,\mathrm{tang}^2(\delta - 90^\circ)}{(1-n)^2},$$

d'où

$$\mathrm{tang}^2(\delta - 90^\circ) = \frac{2dN(1-n)^2}{(R+dN)} = \frac{\left(\frac{2\,dN}{R}\right)(1-n)^2}{\left(1+\frac{dN}{R}\right)}.$$

Soit $I = (\delta - 90^\circ) =$ inclinaison de l'horizon de la mer;

$$\mathrm{tang}\, I = (1-n)\left(\frac{2\,dN}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dN}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1-n}{\sin 45^\circ}\right)\left(\frac{dN}{R}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et $I = 146'',68(dN)^{\frac{1}{2}}$, si vous exprimez dN en toises,

et $I = 106'',51(dN)^{\frac{1}{2}}$, si vous exprimez dN en mètres.

Le centre C est toujours un peu plus haut que la lunette; si la lunette était à l'horizon et CR = 1 pouce, l'inclinaison serait de 17'',5, qu'il faudrait retrancher des hauteurs qu'on aurait comptées d'un horizon abaissé de 17'',5.

Mais supposez la lunette à 24 pieds, l'horizon sera abaissé de 4' 57'',4 au-dessous de la lunette, et de 4' 57'',9 au-dessous du miroir, parce qu'un pouce de plus dans l'élévation n'augmente que de 0'',5 l'inclinaison de l'horizon, d'où il résulte que pour faire l'épreuve du parallélisme des miroirs, il faut s'élever le plus que l'on pourra, afin de rendre insensible la différence de hauteur des deux miroirs. Cette différence n'est d'aucun effet pour les astres qui sont à une distance infiniment grande en comparaison de CR.

L'inclinaison de l'horizon se retranche des hauteurs obser-

vées par devant; elle s'ajoute aux hauteurs observées par derrière.

8. Une attention nécessaire dans toutes ces observations, c'est que le contact des deux images se fasse toujours dans un plan parallèle au plan de l'instrument. Pour faciliter la pratique de cette règle, on place dans la lunette deux fils parallèles au limbe l'un au-dessus de l'autre au-dessous du centre. C'est dans le milieu de l'espace entre ces fils qu'il faut amener les images en contact. Si l'on ne peut y réussir, on estime au moins de combien le contact s'est fait plus près d'un fil que de l'autre; on en conclut la déviation en minutes, d'après l'intervalle connu.

Pour corriger l'erreur, soit BC le plan de l'instrument et l'arc de distance indiqué par le limbe (fig. 156). Cet arc est juste, si le contact s'est fait de B en C; mais s'il s'est fait en b ou en c, prolongez Bb et Cc jusqu'au pôle P du cercle BC,

$$\sin\tfrac{1}{2}bc = \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}\sin \mathrm{P}b = \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cos \mathrm{B}b$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC} - 2\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B}b$$

et
$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC} - \sin\tfrac{1}{2}bc = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{B}b\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{BC} - bc) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\mathrm{B}b\sin\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{BC} + bc)}.$$

Soit d la déviation, dA la correction de l'arc observé sur le limbe

$$d\mathrm{A} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}d\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}}{\sin 1''}\left(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}d\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + \tfrac{2}{3}\sin^4\tfrac{1}{2}d\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{A} + 2\sin^4\tfrac{1}{2}d\,\mathrm{tang}^4\tfrac{1}{2}\mathrm{A} - \text{etc.}\right).$$

On peut presque toujours faire $d\mathrm{A} = d\sin d\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{A}$.

9. Pour observer les hauteurs, il faut donc bien voir l'horizon; il est souvent embrumé, c'est ce qui a fait imaginer les horizons artificiels, qui sont des miroirs plans, soit métalliques, soit de mercure, d'huile ou d'eau. L'embarras était de les maintenir dans une position horizontale; Serson et Smeaton les placèrent à la surface supérieure d'une toupie que le mouvement de rotation maintient dans une position

convenable. Ces mêmes horizons peuvent servir à terre où l'on n'a point d'horizon régulier, comme sur mer. Le miroir horizontal envoie dans la lunette une image réfléchie avec laquelle on fait coïncider l'image directe, et l'instrument donne alors la double distance.

10. Les instrumens destinés aux opérations du pilotage sont la boussole, le loch et l'ampoulette. La boussole est une aiguille aimantée suspendue sur un pivot; elle porte un cercle découpé qu'on appelle *rose des vents*, et qui divise l'horizon en 32 rumbs ou airs de vent. Les quatre pointes principales indiquent le nord, l'est, le sud et l'ouest; l'arc compris est de 90°. Quatre pointes intermédiaires portent les noms composés, *nord-est* et *nord-ouest*, *sud-est* et *sud-ouest;* l'arc compris est de 45°. Ces arcs sont divisés en deux arcs de $22° \frac{1}{2}$, par d'autres pointes dont les noms sont des combinaisons ternaires, telles que *nord-nord-est*, *nord-nord-ouest*, en répétant l'un des noms des combinaisons binaires; enfin les arcs de $22° \frac{1}{2}$ sont divisés en arcs de $11° \frac{3}{4}$, par d'autres pointes dont les noms sont des combinaisons quaternaires, telles que *nord-quart-nord-ouest*, etc.

Tout cela est assez incommode et d'une exactitude assez médiocre, mais offre un avantage, c'est que ces divisions se voient facilement, et tant de précision serait impossible dans la pratique : au reste, cette rose porte des pinnules avec lesquelles on vise au soleil levant ou couchant; on a, par le calcul l'azimut du soleil, par l'alidade l'angle entre le soleil et l'aiguille aimantée. Cet angle est composé de l'azimut et de la déclinaison de l'aiguille, qui par là même devient connue, et sert à diriger la route du vaisseau.

11. Quand on connaît l'angle de la route avec le méridien, il reste à en mesurer la longueur absolue qui est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont le changement en latitude et l'arc du parallèle ou le changement en longitude sont les autres côtés.

Pour mesurer la route, on se sert du loch, qui est un triangle isoscèle de bois, qui porte à sa base un poids qui

fait que tout le système s'enfonce dans l'eau jusqu'au sommet du triangle : à ce sommet est une longue corde. On jette la machine à l'eau, et pour qu'elle reste stationnaire, on devide la corde à mesure que le vaisseau s'éloigne. Cette corde est divisée d'espace en espace par des nœuds. On compte le nombre des nœuds qui passent en 30″ ou une demi-minute; on sait le chemin que fait le vaisseau dans cet intervalle ; on en conclut le chemin pour une heure ou pour un plus long tems; on réitère l'expérience toutes les fois qu'on a raison de croire que la vîtesse du vaisseau peut varier. Le mieux serait d'employer à cette expérience une montre à secondes; on y emploie ordinairement l'ampoulette, composée de deux cônes de verre unis par le sommet. L'ouverture qui communique de l'un à l'autre est telle, que tout le sable qui est dans l'un des cônes emploie 30″ à passer dans l'autre.

12. Cette manière de mesurer le chemin d'un vaisseau et d'en conclure le mouvement en longitude et en latitude, s'appelle *estime*. On sent combien elle est incertaine, et combien elle a besoin d'être corrigée par des méthodes moins défectueuses; mais elle fournit au moins des données indispensables pour procéder à des calculs moins inexacts.

13. On suppose que le loch reste immobile à la même place; mais s'il rencontre un courant, il en suit le mouvement, et alors le nombre des nœuds ne donne plus qu'un mouvement relatif.

On suppose que le vaisseau suit toujours un même rumb, mais le courant le dérange à gauche ou à droite, d'une quantité qu'on appelle *dérive*, et qu'il n'est pas facile d'estimer.

14. Tous les jours à midi on prend la hauteur du soleil pour en conclure la latitude. On corrige cette hauteur de l'erreur de l'instrument, de l'inclinaison de l'horizon de la mer, de la réfraction, de la parallaxe et du demi-diamètre du soleil; alors

hauteur de l'équateur = hauteur observée — déclinaison ☉.

On trouve la même chose par les hauteurs méridiennes des

étoiles ; mais la nuit l'horizon est difficile à bien voir. On peut aussi se servir des hauteurs prises auprès du méridien avant et après le passage, et on les corrige comme on fait à terre quand on observe avec le cercle de Borda.

15. On prend aussi hors du méridien et vers le premier vertical, des hauteurs du soleil pour avoir l'heure du vaisseau. Le calcul de ces hauteurs suppose que l'on connaisse la latitude et la déclinaison du soleil, qui dépend de l'heure, et par conséquent de la longitude *estimée*.

16. L'observation la plus longue à réduire et calculer est celle de la distance de la lune au soleil ou à une étoile, pour en conclure la longitude du vaisseau. Nous venons de voir comme on trouve l'heure du vaisseau ; on trouve l'heure de Paris par la distance de la lune au soleil ou à une étoile calculée par les tables pour le méridien de Paris ; la différence des heures est la différence de longitude, ou la longitude comptée du méridien de Paris. Le mouvement relatif de la lune, par rapport à une étoile peu distante de l'écliptique, est de 13° par jour ; le mouvement relatif de la lune au soleil est de 12° ; 30′ de mouvement répondent à 1 heure de tems ; une minute de mouvement répond à 2′ de tems ou 30′ de l'équateur.

Ainsi, tant qu'on ne commettra dans la distance observée qu'une minute d'erreur, on aura la longitude à un demi-degré près sur l'équateur, ou 28000 toises ; l'erreur décroîtra comme le sinus de la distance polaire. Les tables de la lune donnent les distances exactes à 15″, ce serait $\frac{1}{4}$ ou 7000 toises à ajouter à l'erreur sur l'équateur ; mais avec les sextans modernes et avec le cercle de réflexion de Borda, l'erreur ne doit pas être d'une minute à beaucoup près. Ainsi l'on peut le plus souvent compter sur la longitude à $\frac{1}{4}$ de degré près ; c'en est assez pour se tenir sur ses gardes la nuit, et ne pas donner dans une terre dont on se croit éloigné.

Cette idée d'employer les distances de la lune, ou en général les mouvemens de la lune, est si naturelle, qu'elle a été proposée par Morin, il y a 200 ans. Mais il fallait des tables

exactes de la lune et des instrumens de réflexion : il n'y a guère plus de cinquante ans que cette méthode a pu être employée avec quelque succès.

17. Les distances de la lune aux étoiles et au soleil sont altérées par la réfraction et la parallaxe, on ne peut calculer d'avance pour l'usage des marins que les distances vraies ; il faut donc que l'observateur sache dépouiller la distance des effets qui l'ont altérée. Pour cela, il faut, outre la distance apparente des deux astres, avoir leurs distances apparentes au zénit. On peut les observer en même tems que la distance, et alors il faut trois observateurs ; on peut les calculer, et ce moyen est peut-être le meilleur, alors un observateur peut tout faire.

Soit Z le zénit, L le lieu apparent de la lune, S celui du soleil (fig. 157). La lune est abaissée par l'excès de la parallaxe sur la réfraction, le lieu vrai de la lune sera donc quelque part en V ; le soleil est élevé par l'excès de la réfraction sur la parallaxe ; le lieu vrai du soleil sera donc quelque part en O, et la distance vraie ON croisera toujours en un point I la distance apparente SL ; ce point sera toujours plus voisin de S que de L.

Soient D, H et H′ la distance et les deux hauteurs apparentes du soleil et de la lune, Z l'angle au zénit,

$$\cos Z = \frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'}.$$

Soient d, h et h' la distance et les hauteurs vraies,

$$h = H + p - r, \quad h' = H' + p' - r',$$

$$\cos d = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z$$

$$= \sin h \sin h' + \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'} (\cos D - \sin H \sin H').$$

Tout est connu dans la valeur de $\cos d$, et cette formule suffirait ; on l'a modifiée de bien des manières pour la rendre un peu plus commode pour le commun des calculateurs. En me bornant à l'emploi des sinus, des cosinus et des tangentes, je lui ai donné dix-huit formes toutes différentes ; on a été bien plus loin, en employant les sinus et cosinus verses. Avec

les sinus de supplémens, M. Mendoza a calculé de grandes tables qui réduisent l'opération à ses moindres termes. Ces tables forment un grand volume. Nous nous bornerons à présenter ici la formule de Borda, l'une des plus simples et les plus générales qu'on ait trouvées.

18. $\sin H \sin H' = \cos H \cos H' - \cos(H + H')$

et $\sin h \sin h' = \cos h \cos h' - \cos(h + h')$,

d'où

$$\cos Z = \frac{\cos D + \cos(H + H') - \cos H \cos H'}{\cos H \cos H}$$

$$= \frac{\cos d + \cos(h + h') - \cos h \cos h'}{\cos h \cos h'},$$

ou

$$\frac{\cos D + \cos(H + H')}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d + \cos(h + h')}{\cos h \cos h'}$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}(H + H' - D)\cos\tfrac{1}{2}(H + H' + D)\,\text{séc}\,H\,\text{séc}\,H'$$

$$= \frac{1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}d + 2\cos^2\tfrac{1}{2}(h + h') - 1}{\cos h \cos h'},$$

$$\left(\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)\cos\left(\frac{D + H + H'}{2} - D\right)\cos\left(\frac{D + H + H'}{2}\right)$$

$$= -\sin^2\tfrac{1}{2}d + \cos^2\tfrac{1}{2}(h + h).$$

Soit $S = \dfrac{D + H + H'}{2}$,

$$\left(\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)\cos(S - D)\cos S = -\sin^2\tfrac{1}{2}d + \cos^2\tfrac{1}{2}(h + h'),$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}d = \cos^2(h + h') - \frac{\cos S \cos(S - D)\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}$$

$$= \cos^2(h + h')\left(1 - \frac{\cos S \cos(S - D)\cos h \cos h'}{\cos^2(h + h)\cos H \cos H'}\right)$$

$$= \cos^2(h + h')(1 - \sin^2\varphi),$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}d = \cos(h + h')\cos\varphi,$$

après qu'on a fait

$$\sin\varphi = \text{séc}\,(h + h')\left(\frac{\cos S \cos(S - D)\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'avantage de cette formule, c'est qu'elle n'offre aucune variation de signe, et que le procédé est d'une uniformité constante.

19. Il est presque inutile de s'occuper, dans ces calculs, de la figure sphéroïdique de la terre. On trouvera cette question discutée dans mon Traité d'Astronomie, tome III. J'y ai prouvé que si, pour changer H′ en h', on emploie la parallaxe qui convient à la latitude de l'observateur (XXIII. 55), il suffit toujours d'appliquer à d, trouvé par la formule de Borda, la petite équation

$$-\frac{v \sin \varpi' \sin z \sin (z'-z) \cos h}{\sin d};$$

v est l'angle de la verticale, ϖ' la parallaxe horizontale de la lune pour le lieu de l'observation, z l'azimut du soleil, z' celui de la lune, h la hauteur du soleil. Au lieu de $\frac{\sin (z'-z) \cos h}{\sin d}$, on pourrait mettre sin L ou sin angle à la lune; mais cet angle est inconnu.

20. Si l'on n'a pu faire les observations de hauteur assez près du méridien pour en conclure la latitude, ou si l'on craint de ne pas voir le soleil à midi, on pourra trouver l'heure et la latitude tout à la fois, par la méthode suivante.

Observez deux hauteurs différentes, l'une près du premier vertical, l'autre le plus près qu'il sera possible du méridien. Vous connaîtrez PA, PB, ZA, ZB (fig. 158), car vous savez toujours assez bien l'heure de Paris, par la longitude estimée, pour calculer les déclinaisons du soleil. Soient T′ et T les tems des deux observations, x l'accélération diurne de la montre.

$$24^h + x : 360^\circ :: (T'-T) : APB = \left(\frac{24^h + x}{360^\circ}\right)(T'-T).$$

Les triangles APB, ZAB, PZB donnent

$$\theta = \frac{15\,(T'-T)}{\left(1+\frac{86400''}{x}\right)}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \cot D' \cos\theta,$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\theta \sin\varphi}{\cos(D'+\varphi)}, \qquad \cot C = \cot V \operatorname{tang}(D+\varphi),$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2} W = \frac{\cos\left(\frac{h+h'+C}{2}\right)\sin\left(\frac{h+h'+C}{2}-h\right)}{\cos h \sin C},$$

$$u = V \mp W, \text{ le signe } + \text{ si hauteur du pôle} < D;$$

$$\operatorname{tang} z = \cos u \cot h, \qquad \operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{tang} u \sin z}{\sin(u+z)},$$

$$\sin H = \frac{\sin h \sin(D+z)}{\cos z}.$$

P est l'angle horaire pour l'observation la plus éloignée du méridien, H la hauteur du pôle, h la hauteur et D la déclinaison qui répondent à P.

21. Cette solution, qui n'est que la solution trigonométrique mise en formules générales, est simple et directe; les marins en font peu d'usage; ils préfèrent la méthode des fausses positions, qui est plus longue de beaucoup, et qu'on trouve exposée dans tous les Traités de navigation. On pourrait obtenir la même chose par deux étoiles connues (IX. 10).

Douwes a donné une solution qu'il a mise en tables assez commodes, mais quelquefois peu exactes; les marins en font grand cas; on la trouvera discutée et corrigée, dans mon Traité d'Astronomie, tome III, ainsi que plusieurs autres. La conclusion est que la méthode ci-dessus est toujours la plus sûre et assez souvent la plus courte, et quand les autres méthodes paraissent l'emporter par la facilité, l'avantage est très-médiocre ou nul.

22. Nous avons supposé le vaisseau immobile dans l'intervalle des observations, ce qui n'arrivera presque jamais; ainsi avant de commencer le calcul, il faudra corriger la plus

petite hauteur du mouvement du vaisseau. En voici les moyens.

Quand le soleil était en A (fig. 159), le zénit de l'observateur était en Z; on a observé la hauteur $OA = h = 90° - ZA$; quelques heures après, le soleil était monté en B, le zénit du vaisseau était en Z′, et l'on a mesuré la hauteur..... $h' = 90° - Z'B$.

L'intervalle des observations vous donne APB; vous connaissez PA, PB, vous calculez l'arc AB; tout cela dépend uniquement du mouvement du soleil.

A l'instant de l'observation en A, si le zénit eût été en Z′, vous auriez eu Z′A au lieu de ZA, et l'angle horaire Z′PA, au lieu de ZPA; de Z′ abaissez la perpendiculaire $Z'a$ sur ZA;

$$Z'A = Aa + \tang^2 \tfrac{1}{2} Z'AZ \sin 2ZA = ZA - Za + \tang^2 \tfrac{1}{2} Z'AZ \sin 2ZA$$
$$= ZA - Z'Z \cos Z'ZA + \tfrac{1}{4} \sin^2 Z'ZA \sin 2ZA,$$
$$h' = 90° - Z'A = 90° - ZA + R\cos Q - \tfrac{1}{4}\left(\frac{R\sin Q}{\cos h}\right)^2 \sin 2ZA$$
$$= 90° - 90° + h + R\cos Q - \tfrac{1}{2}\left(\frac{R\sin Q}{\cos h}\right)^2 \sin h \cos h$$
$$= h + R\cos Q - \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 Q \tang h,$$

$R = ZZ'$ étant la route du vaisseau en secondes de degré, et $Z'ZA = Q$ étant l'angle de la route avec le vertical du soleil à l'instant de l'observation en A. Si l'angle Q était obtus, son cosinus changerait de signe.

Au moyen de cette correction, vous rapportez tout au zénit Z′ et vous ramenez la question à ce qu'elle serait si le vaisseau eût été immobile sous le zénit Z′. La latitude se rapportera à ce zénit et les angles horaires seront Z′PA et Z′PB.

23. La route du vaisseau réglée sur la boussole, fait un angle constant avec tous les méridiens qu'elle traverse; il en résulte qu'elle n'est pas un grand cercle, à moins qu'elle ne se confonde avec l'équateur, ni un petit cercle, à moins qu'elle ne se confonde avec un parallèle et que l'angle ne soit 90°. C'est une courbe qu'on appelle *loxodromie*, *course*

oblique. Pour la représenter cependant chaque jour sur la carte par une ligne droite, on a imaginé des cartes où tous les méridiens sont des parallèles, qu'une ligne droite traverse toutes sous un même angle. Il en résulte cet inconvénient, que tous les degrés des parallèles deviennent, sur ces cartes, égaux à ceux de l'équateur. Soit G le degré du méridien, G cos H sera le degré sur le parallèle H; les degrés devraient donc diminuer sur la carte, comme les cosinus de latitude. Pour les avoir constans, on donne aux degrés du méridien la valeur $\frac{G}{\cos H} = G \text{ séc } H$, et aux degrés des parallèles la valeur G; le rapport est le même, mais les degrés des méridiens sur ces cartes croissent comme les sécantes de latitude; c'est ce qu'on appelle *latitudes croissantes*.

24. Soit dH un petit arc du méridien; il sera représenté sur la carte par une ligne

$$= \frac{dH}{\cos H} = \frac{d\sin H}{\cos^2 H}; \left(\text{car } d\sin H = dH\cos H \text{ et } dH = \frac{d\sin H}{\cos H}\right)$$

$$= \frac{d\sin H}{1-\sin^2 H} = \frac{dx}{1-xx} = \tfrac{1}{2} d \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right);$$

d'où $\int \text{arc} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin H}{1-\sin H}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\sin 90^\circ + \sin H}{\sin 90^\circ - \sin H}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2\sin(45^\circ + \frac{1}{2}H)\cos(45^\circ - \frac{1}{2}H)}{2\sin(45^\circ - \frac{1}{2}H)\cos(45^\circ + \frac{1}{2}H)}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left[\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\tan^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) = \log\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}H).$$

Ainsi l'arc du méridien depuis l'équateur jusqu'au parallèle dont la latitude est H sera $\log\tan(45^\circ + \frac{1}{2}H)$; ce logarithme sera népérien. Si l'on a le logarithme tabulaire, on le multipliera par le logarithme népérien de 10, et divisant l'expression par le sinus de 1′ pour avoir l'arc en minutes, on aura

$$\text{arc mérid.} = 7915',7044674 \log\tan(45^\circ + \tfrac{1}{2}H).$$

25. Cette formule est bien simple si l'on n'a qu'un arc

à calculer ; mais pour une table de ces arcs, songeons que $d\,\text{arc} = \frac{dH}{\cos H}$, ou plus exactement,

$$\frac{dH}{\cos(H + \frac{1}{2}dH)} = \frac{dH}{\cos H \cos\frac{1}{2}dH - \sin H \sin\frac{1}{2}dH}$$
$$= \left(\frac{dH \sec\frac{1}{2}dH}{\cos H}\right)(1 + \tang\tfrac{1}{2}dH \tang H);$$

c'est la différence première des nombres de la table. Soit Δ' cette différence première, Δ'' la différence seconde ; on aura $\Delta'' = \Delta' \sin 1'$.

C'est ainsi que j'ai calculé la table des latitudes croissantes ou des *meridional parts* pour la sphère. Pour le sphéroïde, j'ai trouvé qu'il fallait retrancher des arcs sphériques calculés comme ci-dessus, les petits termes

$$e^2 \sin H + \tfrac{1}{3} e^4 \sin^3 H + \tfrac{1}{5} e^6 \sin^5 H + \text{etc.},$$

ou faire la correction

$$-\frac{2a \sin H}{\sin 1'} + \frac{\frac{1}{3} a \sin 3H}{\sin 1'};$$

par ce moyen on peut joindre à la table pour la sphère, diverses colonnes qui donneront la correction sphéroïdique dans diverses hypothèses d'aplatissement.

Pour un arc unique dans le sphéroïde, on peut faire

$$\text{arc mérid.} = \log \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}\,\text{angle de la verticale}).$$

26. Au moyen de ces tables, on trouve facilement le chemin fait en longitude et en latitude, quand on connaît l'espace parcouru et l'angle de route.

Pour la différence de latitude, il suffit de multiplier la route R par le cosinus de l'angle ; prenez ensuite dans la table les deux latitudes croissantes C et C′ qui répondent aux deux latitudes ; alors le chemin en longitude est

$$dL = (C' - C) \tang \text{angle}, \quad \text{et l'on a} \quad H' = H + R \cos A.$$

C'est à ces deux formules que se réduit le calcul; on peut résoudre le problème graphiquement, par les cartes nautiques.

Soit ME l'équateur (fig. 160), MR le méridien, MD la latitude du départ, MA la latitude de l'arrivée; élevez les deux perpendiculaires DT, AX, par le point de départ P pris sur DT, menez PS parallèles au méridien, et PQ, qui fasse SPQ = angle de route; vous aurez au point Q le point d'arrivée.

LEÇON XXV.

Du Calendrier.

1. Un calendrier est une méthode ou un système pour distribuer le tems en périodes plus ou moins longues, et qui pour la plupart sont multiples les unes des autres, telles que les heures, les jours, les semaines, les décades, les mois, les années et les siècles. Les Romains nommaient *calendes* le premier jour du mois, de là le mot de *calendrier*.

2. Le jour se divise en 24 heures. Les astronomes distinguent les heures de tems vrai et celles de tems moyen; la différence est insensible dans les usages civils, où l'on suppose tous les jours égaux et toutes les heures égales entre elles.

3. Les Grecs nommaient *nycthémère* ou *nuit-jour* ce que nous appelons *jour*; ils divisaient le jour ainsi que la nuit en douze heures ou parties égales qu'ils nommaient *heures temporaires*, parce qu'elles variaient de longueur selon les différentes saisons. Les heures du jour étaient alternativement plus longues et plus courtes que celles de la nuit; il n'y avait d'égalité qu'aux deux équinoxes.

4. Les heures du jour ou du nycthémère étaient consacrées aux planètes; la première au Soleil, la seconde à Vénus, la troisième à Mercure, la quatrième à la Lune, la cinquième

à Saturne, la sixième à Jupiter, la septième à Mars, la huitième au Soleil, et ainsi de suite. Par cet arrangement, la lune se trouvait avoir la première heure du second jour, Mars celle du troisième, Mercure celle du quatrième, Jupiter celle du cinquième, Vénus celle du sixième, Saturne celle du septième. Le jour prenait le nom de la planète qui présidait à la première heure du jour. Toutes les planètes revenaient dans le même ordre, après une période de sept jours, nommée *semaine*, qui ne se trouvait ni dans le calendrier des Romains, ni dans celui des Grecs, mais qui paraît d'une haute antiquité et commune à plusieurs peuples orientaux. Les Grecs divisaient le mois de 30 jours en trois décades; cette division était beaucoup plus commode à beaucoup d'égards; et cependant on a vainement tenté de la renouveler en France.

5. Certains peuples comptaient les heures du lever du soleil; ces heures s'appellent *babyloniques*. D'autres et les Italiens encore aujourd'hui les comptent du coucher du soleil, et ces heures s'appellent *italiques*. Cet usage ne pourrait être commode qu'à l'équateur, où le soleil revient à l'horizon à des intervalles toujours égaux; mais dans la sphère oblique les retours réguliers n'ont lieu qu'au méridien, soit inférieur, soit supérieur; de là deux manières de compter les jours. Les astronomes comptent de midi, c'est le jour *astronomique*. Tous les peuples européens comptent de minuit, c'est le jour *civil*. Les astronomes comptent 24 heures de suite : dans l'usage civil, les heures du matin se comptent de minuit, et celles du soir de midi, depuis une jusqu'à 12 heures.

6. Les Grecs nommaient *décade du commencement* et *décade du déclin*, la première et la troisième décade du mois; l'autre s'appelait *décade du milieu*.

Les Romains partageaient leurs mois d'une manière assez bizarre, et comptaient les jours par leurs distances aux *calendes*, aux *nones* et aux *ides*. Les calendes étaient fixées au premier jour de chaque mois; les derniers jours du mois précédent se comptaient en rétrogradant, de cette manière : la veille des calendes, ou deux jours avant les calendes, trois

jours, etc. avant les calendes. Les nones etaient le neuvième jour avant les ides; on disait de meme, la veille des nones, trois jours avant les nones, etc. Les ides étaient placées le 13 ou le 15, comme on le voit dans le tableau ci-joint. Ainsi, dès le lendemain des calendes, on comptait par nones, en commençant par 4 ou 6; le lendemain des nones on comptait par ides, en commençant par le 8, et le lendemain des ides on comptait des calendes prochaines, en commençant suivant les cas, par le 16, le 17, le 18 ou le 19.

Mois.	Calendes.	Nones.	Ides.	Nombre des jours.
Janvier.....	1	5	13	31
Février.....	1	5	13	28
Mars.....	1	7	15	31
Avril.....	1	5	13	30
Mai.....	1	7	15	31
Juin.....	1	5	13	30
Juillet.....	1	7	15	31
Août.....	1	5	13	31
Septembre...	1	5	13	30
Octobre.....	1	7	15	31
Novembre...	1	5	13	30
Décembre...	1	5	13	31

7. Cette méthode était bien barbare, mais il faut la connaître

naître pour entendre une expression des calendriers modernes. Quand César réforma le calendrier romain, et qu'il établit l'année julienne de $365^j \frac{1}{4}$; il régla que ce quart négligé trois années de suite, formerait un 366e jour à la quatrième année. Il plaça ce jour intercalaire en février, à la suite du sixième avant les calendes. Cette année avait deux sixièmes jours avant les calendes : au premier, on disait *sexto calendas;* au second, *bis-sexto calendas*. L'année s'appela *bissextile*, et ce nom est resté.

Les mois de l'année commune avaient le nombre de jours marqué dans la dernière colonne de notre tableau : dans les années bissextiles février avait 29 jours.

8. Les Égyptiens, qui faisaient tous les mois de 30 jours invariablement, ajoutaient à la fin 5 jours *épagomènes* ou *additionnels ;* ils en mettaient 6 dans les années bissextiles : c'est ce qu'on avait voulu imiter dans le calendrier éphémère des Français.

9. La révolution synodique de la lune qui est de vingt-neuf jours $\frac{1}{2}$, a donné la première idée des mois ou lunaisons ; ses phases ont peut-être donné la première idée de la semaine; mais ni les lunaisons, ni les mois de 30 jours, ni la semaine, ni les heures ne sont des aliquotes exactes de l'année ; de là tous les embarras des calendriers luni-solaires.

10. On avait reconnu facilement par les ombres solsticiales ou équinoxiales du gnomon, que l'année solaire était de 365 jours à peu près. On fit donc l'année de 365 jours ; mais si l'équinoxe était arrivé le 22 mars, quatre ans après il arrivait le 23, puis le 24, le 25, et successivement il répondait ainsi à tous les jours de l'année, et ce n'était qu'au bout de 1461 ans qu'il revenait au 22 mars. Cette année, long-tems en usage dans l'Égypte, s'est appelée *vague ;* il en fallait 1461 pour valoir 1460 années juliennes.

11. L'année julienne, trop longue de $11' 10''$, était vague dans un autre sens, quoique d'une manière moins sensible. L'équinoxe, au lieu de retarder d'un jour en quatre ans, avançait au contraire continuellement. Le Concile de Nicée avait at-

taché la célébration de la Pâque au dimanche qui suivrait le quatorzième jour de la lune du premier mois, c'est-à-dire, qui coïnciderait avec l'équinoxe ou le suivrait. Il comptait que l'équinoxe arriverait toujours au 21 mars, mais en 1582 l'équinoxe avait déjà avancé de 10 jours. Le pape Grégoire XIII voulut remédier à ce déplacement, et remettre les choses dans le premier état ; il retrancha 10 jours au mois d'octobre 1582 ; le lendemain du 4 octobre on compta le 15 ; et pour prévenir désormais une pareille anticipation, il ordonna qu'à l'avenir les années séculaires qui étaient toutes bissextiles, ne le seraient plus que de 4 en 4.

12. Le calendrier julien était le plus commode pour les calculs astronomiques ; le calendrier grégorien offre encore une intercalation facile. En effet, pour savoir si une année est bissextile, il suffit de voir si le nombre qui la désigne est divisible par 4. Si la division se fait sans reste, l'année est bissextile ; si la division donne pour reste 1, 2 ou 3, l'année est la première, la seconde ou la troisième après la bissextile. Pour les années séculaires, avant de faire la division, on efface les deux zéros qui sont à la droite du nombre ; ainsi 1900 ne sera pas bissextile, parce que $\frac{19}{4}$ donne 3 pour reste ; 1900 sera la troisième année séculaire qui aura été commune.

13. Cette intercalation suppose l'année trop longue de 25″ environ ; on la rendrait plus exacte encore, en supprimant tous les 4000 ans une bissextile.

14. Quand Jules-César réforma le calendrier romain, le désordre était bien plus grand qu'en 1582. Il fut obligé d'ajouter 90 jours à l'année 47 avant notre ère ; elle fut de 445 jours, on l'appelle l'*année de confusion*.

15. Nous avons conservé les noms des mois du calendrier romain ; septembre, octobre, novembre et décembre prouvent que l'on comptait mars pour le premier mois ; juin et juillet, qui s'appelaient anciennement *quintile* et *sextile*, prouvent la même chose. Les Chrétiens ont long-tems commencé l'année à Pâques. L'usage s'est établi de la commencer au

1er janvier; les dix jours retranchés en 1582, et les bissextiles qui se suppriment le plus souvent aux années séculaires, font la différence de l'ancien au nouveau style; cette différence était d'abord de 10 jours; en 1700 elle a été de 11 jours; en 1800, de 12 jours; elle sera de 13 jours en 1900. Les Russes sont la seule nation de l'Europe qui ait conservé l'ancien style. Les Anglais ont reçu le nouveau en 1752; les peuples catholiques avaient adopté sans délai la réformation grégorienne; pour éviter l'équivoque, on réunit les deux manières de compter, en les présentant sous forme de fraction; ainsi le $\frac{10}{22}$ août signifie le 10 août style ancien, c'est-à-dire 22, nouveau style.

16. L'ère chrétienne n'a été imaginée que plusieurs siècles après l'époque qu'on lui a donnée. On la continue indéfiniment, en remontant au-dessus de cette même époque, mais en suivant la forme du calendrier julien, comme plus simple; pour les années qui ont précédé notre ère, il y a deux manières, celle des chronologistes et celle des astronomes. L'année qui a précédé la première de notre ère, est appelée par les chronologistes, l'année première avant notre ère; celle d'auparavant est l'an 2, et ainsi de suite. La première avant notre ère est l'an 0, suivant les astronomes; l'année d'auparavant est l'an —1, la précédente —2, et ainsi de suite. Par ce moyen, le calendrier julien présente une progression arithmétique non interrompue,

$$-6-5-4-3-2-1, \quad 0+1+2+3+4+5+6+\text{etc.},$$

que l'on peut prolonger autant que l'on voudra, par les deux bouts.

17. Rien de plus simple que le calendrier réglé sur l'année solaire; rien de plus compliqué que le calendrier ecclésiastique, qui a voulu accorder la semaine, le mois lunaire et la révolution tropique du soleil.

L'année composée de 365 jours vaut 52 semaines plus un jour; l'année bissextile vaut 52 semaines plus deux jours. Pour

composer un calendrier ou almanach perpétuel, on ne pouvait indiquer les jours par leur nom, puisque jamais deux années ne commencent par le même jour. On les a désignés par les lettres A, B, C, D, E, F et G. Si l'année commence par un dimanche, tous les jours marqués A seront des dimanches, A sera la lettre dominicale, ou du dimanche; si l'année commence par un samedi, ce sera B qui sera la dominicale, et ainsi des autres. Mais si une année a commencé par un dimanche, l'année suivante commencera par un lundi, A marquera le lundi, et ce sera G qui sera dominicale, puis F, puis E, et ainsi de suite en rétrogradant. Mais l'année bissextile ajoute un jour à l'année sans en ajouter un à la semaine; il y aura donc deux lettres dominicales pour chaque année bissextile; la première servira jusqu'au jour intercalaire, et l'autre servira le reste de l'année.

18. Dans le calendrier julien, la succession des lettres dominicales s'accomplit dans une période de $28 = 7.4$, parce que la semaine est de sept jours, et que l'intercalaire arrive tous les quatre ans; cette période de 28 ans s'appelle *cycle solaire*. On en fait aujourd'hui peu d'usage.

Pour trouver la lettre dominicale d'une année quelconque, il faut savoir que la première année de notre ère commençait par un samedi, et que B était la lettre dominicale de l'an 1.

Soit L le numéro de la lettre dominicale, la formule sera

$$(7n + 3 - a - \tfrac{1}{4}a) = \mathrm{L},$$

c'est-à-dire, prenez un multiple de 7 qui, augmenté de 3, permette la soustraction de $\frac{5}{4}a$, a étant le numéro de l'année. Le reste de la soustraction, en négligeant la fraction de jour, s'il y en a une, sera le numéro de la lettre dominicale. Ainsi pour 1582 avant la réformation,

$$\begin{aligned} 7n + 3 - 1582 - 395 &= 7n + 3 - 1977 = 7n - 1974 \\ &= 7n - 7.282 = 0. \end{aligned}$$

La lettre dominicale sera 0 ou 7, c'est-à-dire G. Cette for-

mule ne peut servir que jusqu'à la réformation. Après la réformation, la formule est

$$7n+6-a-\tfrac{1}{4}a+(S-16)-\tfrac{1}{4}(S-16),$$

S marquant le siècle. En 1582, après la réformation,

$$S=16,\quad S-16=0,$$
$$7n+6-1977=7n-1971=7n-7.281-4$$
$$=7.281-7.280-4=7-4=3;$$

la lettre dominicale était donc C.

En 1813,

$$7n+6-1813-453+3-\tfrac{1}{4}(3)=7n-2266+9$$
$$=7n-2257=7n-7.322+3=3=\text{C}.$$

En 1812,

$$7n+6-1812-453+3-\tfrac{1}{4}(3)=7n+9-2265$$
$$=7n-2256=7n-7.322-2=7-2=5=\text{E};$$

mais 1812 est bissextile, donc les lettres dominicales seront d'abord E, puis D, et 1813 aura C.

19. Nous supprimons, comme peu utiles et trop compliquées, les règles qui servent à trouver le cycle solaire, le nombre d'or, l'indiction et l'épacte; mais on peut desirer un moyen pour trouver la fête de Pâques, qui se règle sur le jour de la semaine, l'équinoxe et la pleine lune moyenne. Cette lune moyenne n'est pas la lune moyenne des astronomes; elle se détermine par des moyens ingénieux, mais longs, difficiles et qui nécessitent des équations de plus d'une espèce. La lune pascale peut différer d'un jour ou deux de la lune vraie et de la lune moyenne des tables astronomiques; de là de nombreuses réclamations qui arrivent toutes les fois que les imperfections des épactes font retarder ou avancer d'un mois la fête de Pâques. Ces inconvéniens ont été sentis par les auteurs du calendrier, mais ils étaient inévitables; il eût fallu, pour les prévenir, régler la célébration de la Pâque sur les mouvemens vrais, et consulter chaque

fois les tables astronomiques les plus récentes, et ce moyen lui-même n'était pas sans incertitude. Il est difficile de répondre de 20″ sur la distance angulaire de la lune au soleil, et par conséquent de 40″ sur l'instant précis de la pleine lune. Ainsi quand les tables auraient annoncé la pleine lune pour $11^h\ 59'\ 20''$ du soir, ou $0^h\ 0'\ 40''$ du matin, on aurait été dans l'incertitude sur le jour de la pleine lune; il était encore plus difficile de connaître en certains cas, le jour de l'équinoxe, parce que le mouvement du soleil est plus lent de beaucoup que le mouvement relatif de la lune; il se serait donc présenté des circonstances, à la vérité fort rares, où l'on n'aurait su si la pleine lune vraie précédait ou suivait l'équinoxe, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit *pascale*. Dans l'impossibilité de trouver une règle infaillible, on s'est contenté d'un à peu près, et pour que la règle adoptée fût perpétuelle, il fallut se contenter de la connaissance qu'on avait alors des mouvemens moyens du soleil et de la lune. On détermina la lune au moyen des épactes.

20. L'épacte est proprement l'âge de la lune quand une année finit. Si la lune a été nouvelle à minuit le premier jour de l'année, elle le sera le plus souvent encore le 354e jour de l'année, et si l'année est commune, la lune aura 11 jours quand l'année finira. Ce nombre 11 est l'épacte de l'année qui commence, et qui servira pendant cette année à déterminer toutes les nouvelles lunes moyennes; l'épacte de l'année suivante sera 22, celle de la troisième année sera 33 ou 3, en rejetant 30 jours dont on fera un mois intercalaire; l'épacte sera ensuite 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 30 et 11; ainsi les épactes reviennent après une période de 30 ans.

21. Les irrégularités des intercalations, soit solaires, soit lunaires, exigent des équations qui dépendent des mouvemens du soleil et de la lune, et de la durée supposée de l'année solaire et du mois lunaire, qui contiennent des fractions de jours; c'est ce qui fait la complication du système

des épactes. Mais comme les épactes n'ont plus aujourd'hui d'autre usage que de déterminer la fete de Pâques, qui règle toutes les autres fêtes mobiles, nous remplacerons toute cette doctrine surannée par une formule de M. Gauss; elle est composée de plusieurs parties.

Divisez le nombre donné de l'année par 19, et soit a le reste de la division.

Divisez le nombre donné par 4, et nommez b le reste de cette seconde division.

Divisez le même nombre par 7, et nommez c le reste de la troisième division.

Divisez $(19a + M)$ par 30, et nommez d le reste de la quatrième division.

Divisez $(2b + 4c + 6d + N)$ par 7, et nommez e le cinquième reste.

Le jour de Pâques sera le $(22 + d + e)$ de mars, ou le $(d + e - 9)$ avril.

Cette règle est générale pour le calendrier julien, où $M = 15$ et $N = 6$ constamment; elle a besoin d'une correction pour le calendrier grégorien. Si le calcul donne le 25 ou le 26 avril, retranchez sept jours.

Dans le calendrier grégorien vous aurez M et N par la table ci-jointe, qui suffira jusqu'en 2500.

	M	N
De 1582 à 1699....	22.	3.
1700 à 1799....	23.	3.
1800 à 1899....	23.	4.
1900 à 1999....	24.	5.
2000 à 2099....	24.	5.
2100 à 2199....	24.	6.
2200 à 2299....	25.	0.
2300 à 2399....	26.	1.
2400 à 2499....	25.	1.

Pour résoudre le même problème, j'ai donné une méthode

plus générale, mais elle suppose deux petites tables, dont l'une est perpétuelle, et l'autre, qui peut se continuer à volonté, s'étend jusqu'à l'an 5000. Voyez mon Traité d'Astronomie, tome III.

Voyez aussi le Traité du calendrier de Clavius, l'Astronomie de Lalande, le Traité du calendrier de Rivard, etc.

22. La période julienne, dont quelques astronomes ont fait usage, est une période de 7980, nombre composé des facteurs 28, 19 et 15, c'est-à-dire des cycles solaire, lunaire et d'indiction.

L'an 1 de notre ère était la 4714e de la période jul.

ajoutez	1812		1812
vous aurez	1813	pour la.....	6526e de la période,

ou bien l'an	0	était la.....	4713e de la période,
ajoutez	1813		1813
	1813		6526.

Il suffit donc d'ajouter 4713 à l'année courante, pour avoir l'année de la période julienne; cette période n'a plus aucune utilité depuis la réformation grégorienne.

FIN.

TABLE DES CHAPITRES.

LEÇON I. *Observations fondamentales*, page 1

II. *De l'Horloge et de la Lunette astronomique*, 14

Manière de régler l'horloge par les étoiles.

III. *Premières observations du soleil, idée de la gnomonique ou de la science des cadrans, et des divers instrumens de l'Astronomie ancienne et moderne*, 25

Formule générale de correction pour les gnomons de toute espèce. Description et vérification des instrumens.

IV. *Trigonométrie sphérique*, 83

Toutes les formules analytiques de la Trigonométrie déduites d'une formule fondamentale; solutions pratiques mises en tableaux; ces solutions sont doubles pour les cas douteux. Séries trigonométriques. Surface du triangle sphérique. Différences finies et différentielles trigonométriques.

V. *Réfractions*, 123

Formule générale de réfraction; formule tirée de l'hypothèse de Cassini; formule tirée de celles de Simpson; corrections barométriques et thermométriques. Méthodes pour observer les réfractions. Méthode de Tycho, méthode de Bradley; incertitude inévitable de ces méthodes. Méthode des étoiles circompolaires, méthode de La Caille. Effets particuliers des réfractions sur les levers, les couchers, sur les diamètres des planètes. Crépuscules.

VI. *Parallaxes*, 148

Formule générale; parallaxe de hauteur, d'ascension droite, de déclinaison, de longitude, de latitude, de parallaxe angulaire et de distance en général; parallaxe dans le sphéroïde. Séries régulières et très-convergentes

pour toutes les espèces de parallaxes. Méthodes pour observer ces parallaxes.

LEÇON VII. *Formation d'un catalogue d'étoiles*, page 174

Intervalle des fils d'une lunette en tems. Rectification d'une lunette méridienne. Mouvemens apparens des étoiles en déclinaison et ascension droite, tirés des observations et réduits en formules. Explication de ces mouvemens. Des divers catalogues d'étoiles.

VIII. *Route annuelle du soleil*, 193

Elle se fait dans un cercle oblique. Formule générale pour trouver les intersections de ce cercle avec l'équateur et l'angle d'inclinaison. Réduction de l'écliptique à l'équateur, ou de l'équateur à l'écliptique, suivant divers astronomes.

IX. *Circonstances du mouvement diurne*, 204

Astronomie sphérique. Ascensions droites et obliques. Différence ascensionnelle. Climats. Lever et coucher héliaque. Hauteurs correspondantes.

X. *Du soleil et du mouvement elliptique*, 225

Excentrique et épicycle des anciens. Ellipse approximative de Bouillaud. Ellipse de Képler. Nouvelles méthodes pour trouver l'anomalie excentrique par l'anomalie moyenne, et pour calculer les tables d'équation et de rayon vecteur.

XI. *Comparaison du système qui fait mouvoir le soleil, avec celui qui fait tourner la terre autour du soleil immobile*, 264

Mouvemens des planètes en 1" de tems moyen.

XII. *Différentes espèces de tems et de jours. Retours au méridien. Levers et couchers des planètes*, 274

XIII. *Construction des tables du soleil*, 288

Moyens exacts pour trouver les équinoxes et l'obliquité. Différentes espèces d'années. Années synodiques des planètes.

XIV. *De la lune*, 300

Phases de la lune et de la terre. Dichotomie. Excentricité. Méthode pour déterminer la parallaxe, l'inclinaison et les nœuds. Inégalités de la lune. Moyen pour les recon-

naître par observation. Mouvemens horaires. Mois lunaires de différentes espèces. Périodes.

LEÇON XV. *Des éclipses*, page 336

Notions générales. Des éclipses totales et annulaires. Des éclipses de lune. Méthode de calcul. Méthode graphique. Quantité de l'éclipse, suivant les anciens et les modernes. Éclipses de soleil. Méthode trigonométrique pour en déterminer les circonstances générales, les lignes d'attouchement ou de phases quelconques. Application à l'éclipse de 1764. Eclipses de soleil pour un lieu particulier. Méthode graphique. Calcul par les parallaxes de longitude et de latitude; par les parallaxes d'ascension droite et de déclinaison; par les parallaxes de distances. Moyen pour en conclure la correction des tables et celle des longitudes graphiques. Conséquences particulières qu'on peut tirer des éclipses annulaires ou totales.

XVI. *Des planètes*, 396

Phases de Vénus. Élongation, digression. Le passage par les nœuds donne la durée de la révolution, la distance au soleil et le lieu des nœuds. Les conjonctions servent à déterminer les nœuds et l'inclinaison, l'excentricité et le périhélie. Passage de Vénus et parallaxe du soleil.

Mercure. Les mêmes méthodes servent à déterminer tous les élémens de l'orbite. Planètes supérieures. Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Cérès, Pallas, Junon et Vesta. Méthodes particulières pour les planètes nouvellement découvertes. Tableau général du système solaire.

XVII. *Stations et rétrogradations. Comparaison des systèmes de Ptolémée, Copernic et Tycho*, 454

XVIII. *Rotation des planètes*, 465

Taches du soleil. Équateur solaire. Son inclinaison et ses nœuds. Méthodes générales pour résoudre le problème de la rotation. Application au soleil, à la lune, à l'anneau de Saturne.

XIX. *De l'aberration de la lumière et de la parallaxe annuelle des étoiles*, 487

Formule générale d'aberration pour les planètes, pour les étoiles. Développement qui donne l'aberration de longitude, de latitude, d'ascension droite et de déclinaison, l'aberration de la lune et du soleil, l'aberration diurne. Formules de parallaxe annuelle. Les mêmes tables peuvent

servir pour l'aberration et la parallaxe. Manière de les trouver par observation.

LEÇON XX. *De la nutation*, page 508

Formules. Manière d'en déterminer les constantes par observation.

XXI. *Des comètes*, 516

Séries elliptiques du rayon vecteur et de l'anomalie. Ces séries deviennent paraboliques quand on n'en conserve que le premier terme. Théorèmes de Lambert et autres, démontrés analytiquement. Construction de la table générale du mouvement parabolique. Formule elliptique du tems pour deux rayons vecteurs et l'angle compris. Elle devient parabolique quand on se borne au premier terme. Méthode nouvelle pour trouver et rectifier les élémens d'une comète. Application à la comète de 1759. Queue des comètes.

XXII. *Des satellites*, 567

Satellites de Jupiter. Moyen de déterminer leurs orbites et leurs éclipses. Des tables écliptiques des satellites. Satellites de Saturne et d'Uranus.

XXIII. *Grandeur et figure de la terre*, 581

Moyens de la déterminer. Mesure de la terre par les anciens et les modernes. Idée des dernières opérations et de la fixation du mètre. Calcul des triangles, des azimuts, de l'arc du méridien terrestre et céleste. Dimensions de l'ellipsoïde. Aplatissement. Différences de niveau.

XXIV. *Astronomie nautique*, 623

Principe fondamental des instrumens de réflexion. Octant, sextant, cercle entier. Inclinaison de l'horizon de la mer. Parallélisme des miroirs. Moyens pour connaître en tout tems l'heure du vaisseau et celle d'un méridien donné. Problème des longitudes. Méthodes pour trouver la latitude et l'heure par des hauteurs prises hors du méridien.

XXV. *Du calendrier*, 638

Division du jour, du mois, de l'année. Intercalations. Calendriers civil et ecclésiastique. Formule de M. Gauss pour trouver la fête de Pâques sans faire usage des épactes.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 3, ligne pénultième, DB, *lisez* DE.
7, ligne dernière, z, *lisez* Z.
16, ligne 20, soit AB, *ajoutez* (fig. 4*).
Ibid. ligne 22, au foyer, *ajoutez* F.
25, titre, *ajoutez* et des divers instrumens de l'Astronomie ancienne et moderne.
28, ligne 21, sera point, *lisez* sera le point.
32, ligne 7 en remontant, TI, *lisez* TIX.
34, ligne pénultième, *lisez* $\frac{BM}{BS}=$.
36, ligne pénultième, DCB, *lisez* DBC.
37, ligne première, BDF, *lisez* DBF.
41, ligne 13, la distance zénitale, *ajoutez* BO.
48, ligne 6 en remontant, *ajoutez* (fig. 20).
54, ligne 8, un cylindre, *lisez* une traverse AC.
Ibid. ligne 28, Bx, *lisez* Bp.
65, lignes 10 et 14, ag, *lisez* Ba.
80, ligne 10, somme, *lisez* corde.
90, ligne pénultième, $A=90°$, *lisez* $A'=90°$.
97, ligne 3, hypoténuse, *lisez* sin hypoténuse.
117, ligne 8, $(1+\tang y)^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $(1+\tang^2 y)^{\frac{1}{2}}$.
126, ligne 1, AZ, *lisez* BZ.
Ibid. ligne 16, VM devient, *lisez* UM devient.
127, ligne 9 en remontant, $\cos R=$, *lisez* $\cos R+$.
128, ligne 9, $\sin(y-r)$, *lisez* $\sin(y+r)$.
131, ligne 4 en remontant, $\sin R$, *lisez* $\sin nR$.
137, ligne 16, $\cos(H+D)$, *lisez* $\sin(H+D)$.
Ibid. ligne 22, tous, *lisez* nos.
147, lignes 16 et 17, ZPA, *lisez* ZPB.
148, ligne 6 en remontant, qu'elle nous, *lisez* qu'il nous.
185, ligne 6, PCA, *lisez* PCq.
Ibid. ligne 5 en remontant, PA, *lisez* Pq.

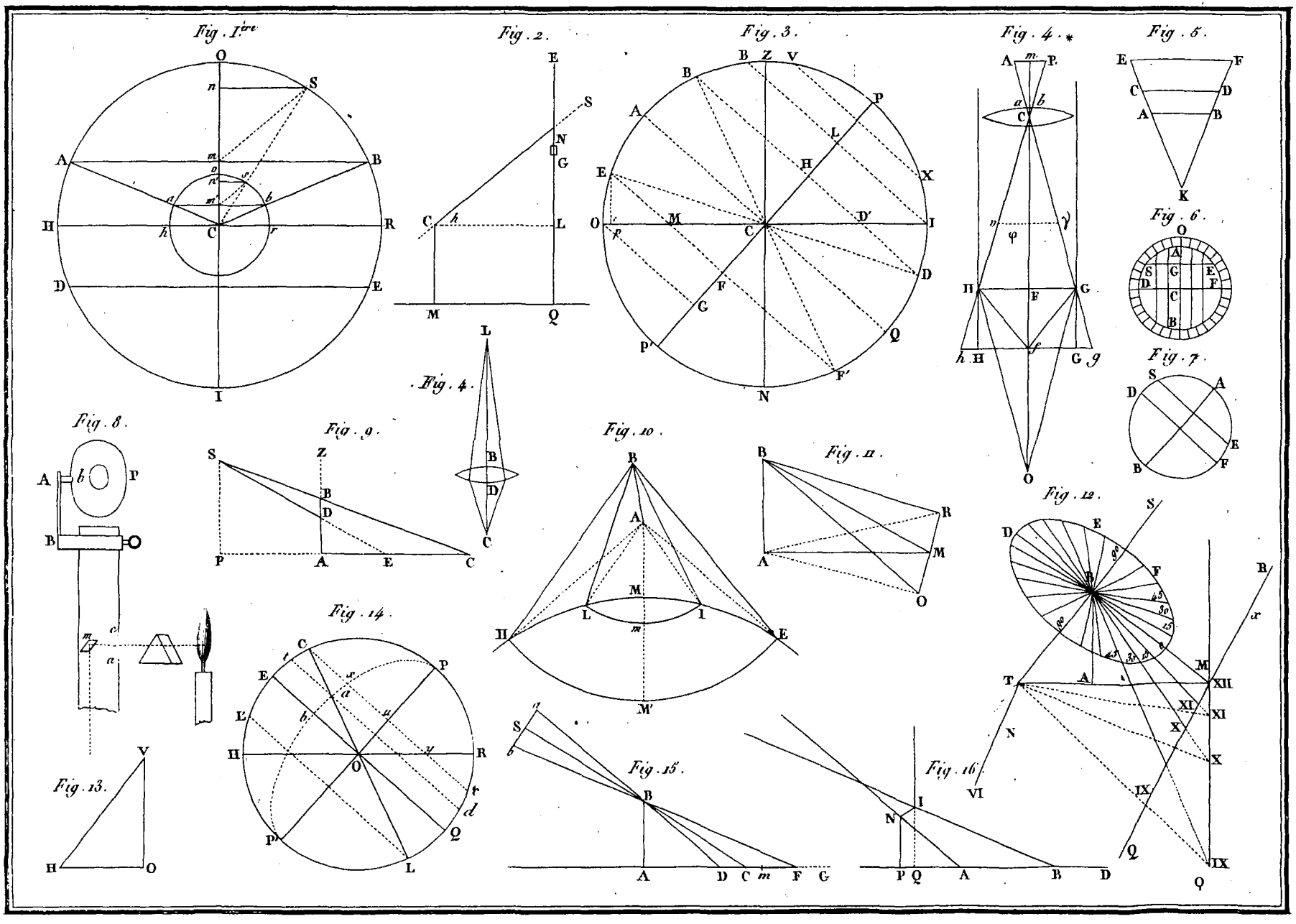


Fig. 1re
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

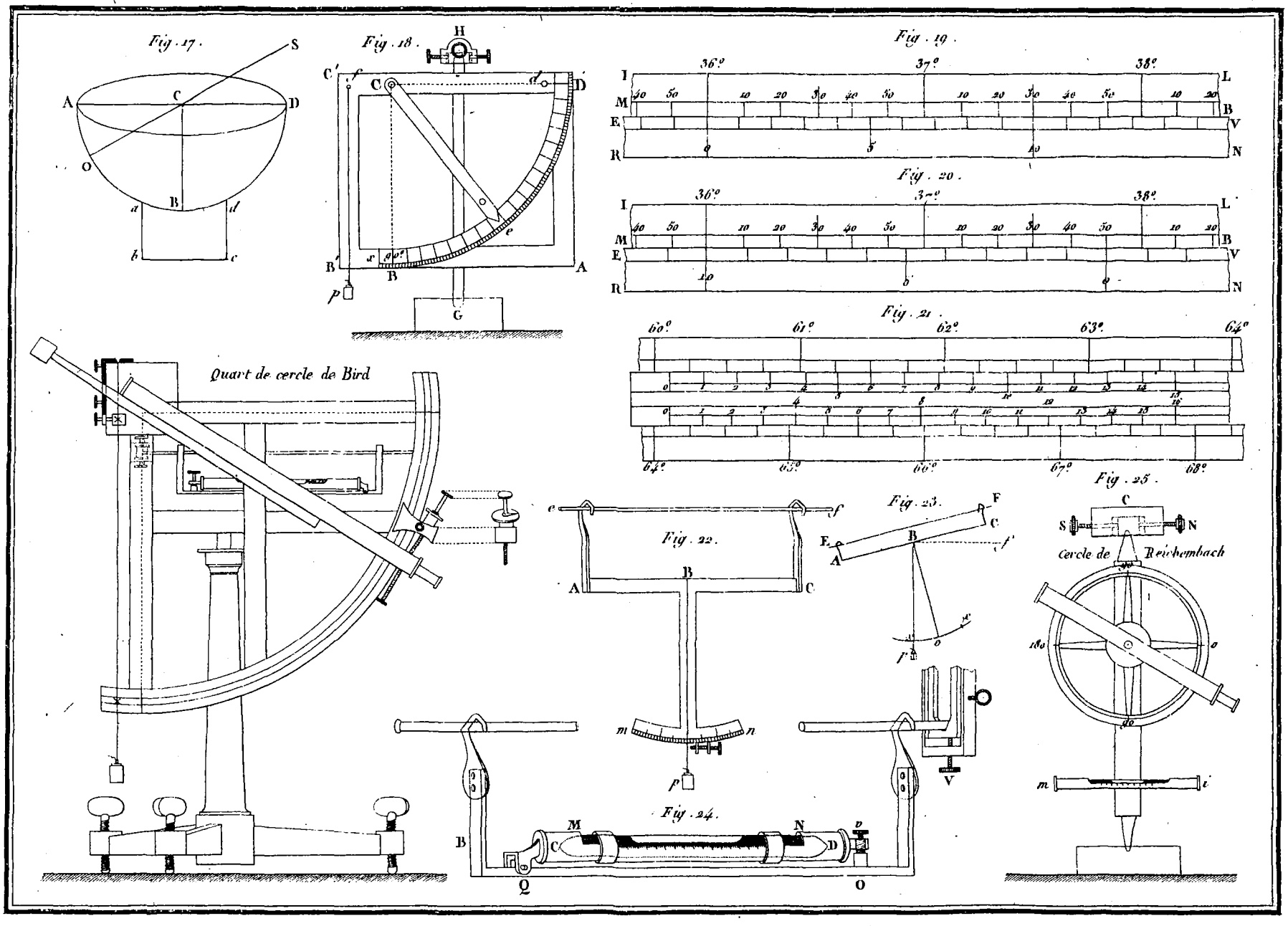


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Quart de cercle de Bird
Cercle de Reichembach

Fig. 26.

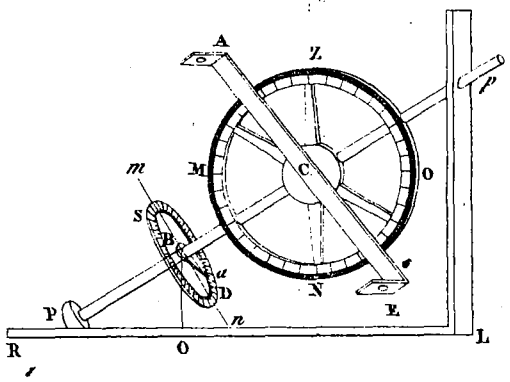


Fig 27.

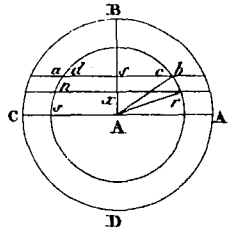


Fig. 28.

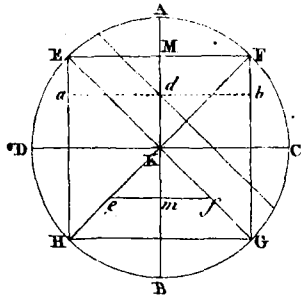


Fig. 29.

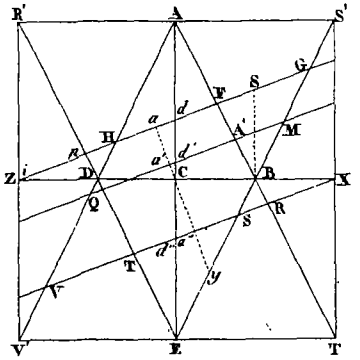


Fig. 30.

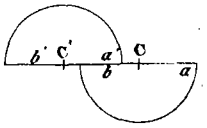


Fig. 31.

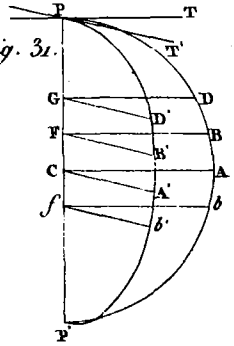


Fig. 32.

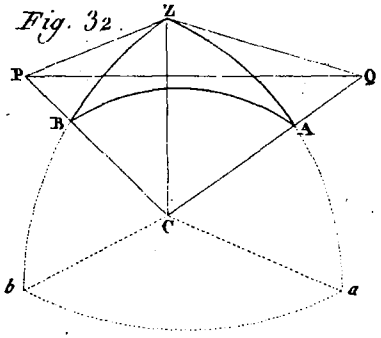


Fig. 33

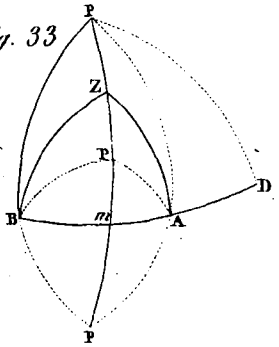


Fig. 34

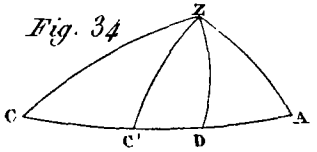


Fig. 35

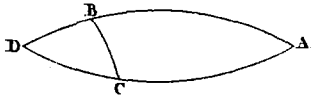


Fig. 39.

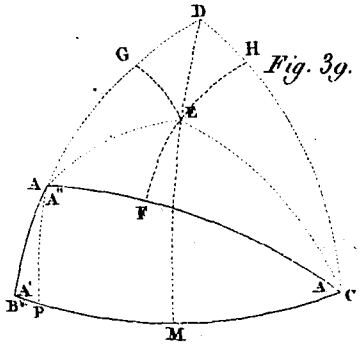


Fig. 36.

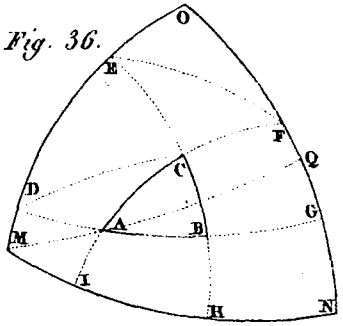


Fig. 37

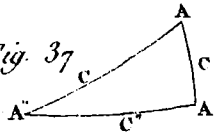


Fig 38.

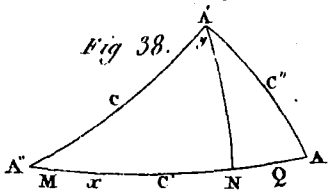


Fig. 40.

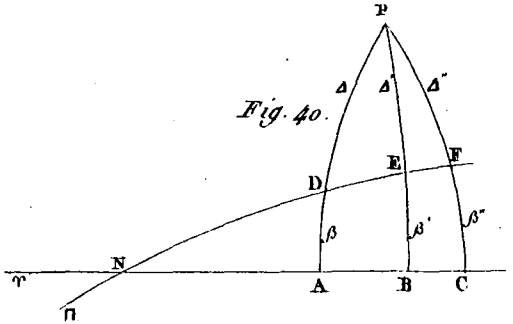


Fig. 41.

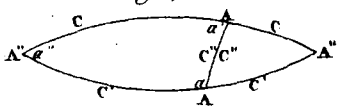
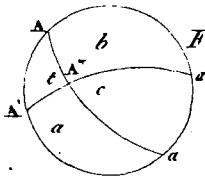


Fig. 42.



Gravé par Adam

Fig. 43.

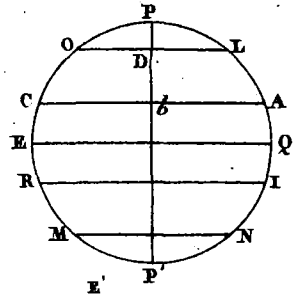


Fig. 44.

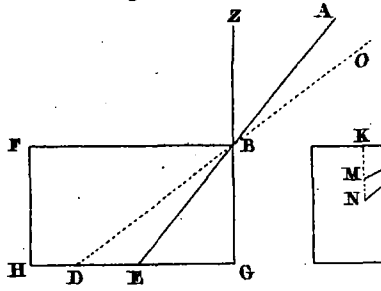


Fig. 45.

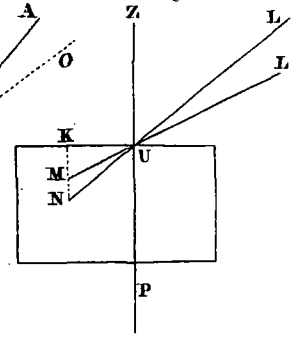


Fig. 46.

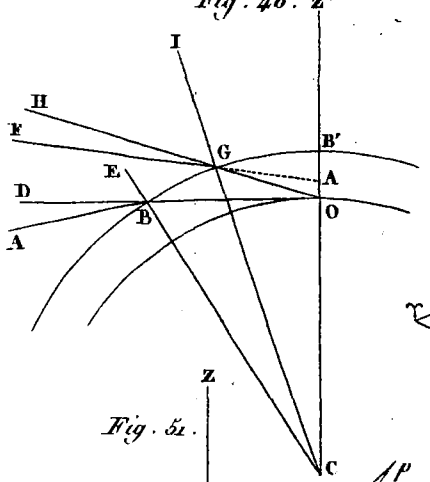


Fig. 47.

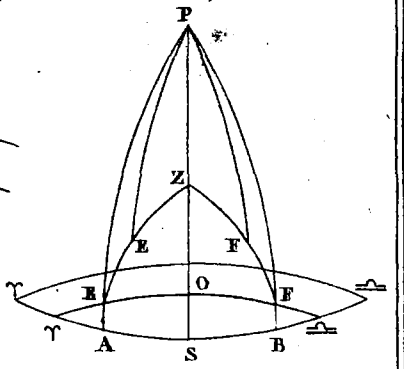


Fig. 48.

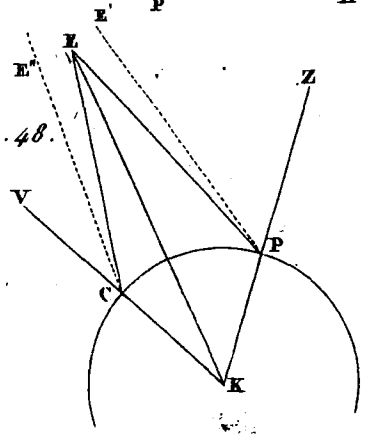


Fig. 49.

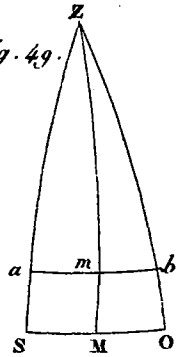


Fig. 50.

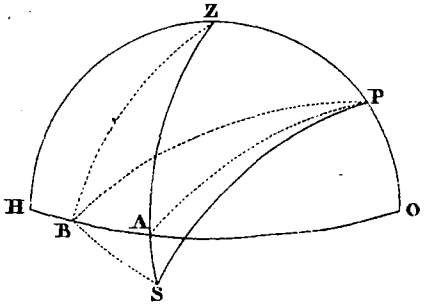


Fig. 51.

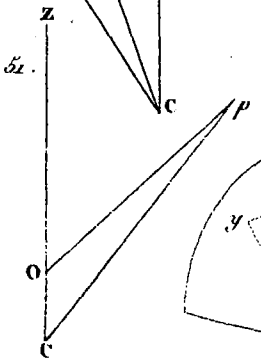


Fig. 52.

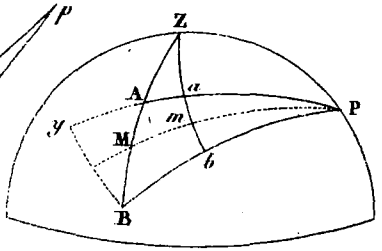


Fig. 53.

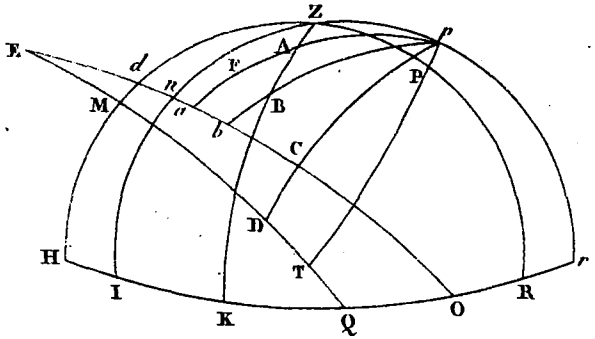


Fig. 54.

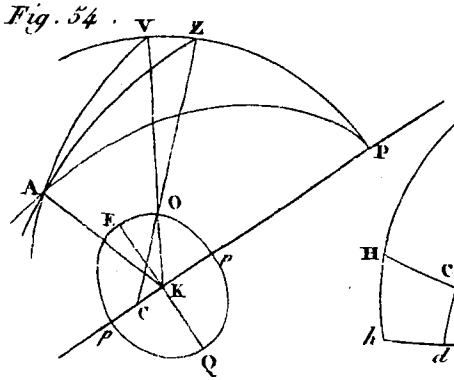


Fig. 55.

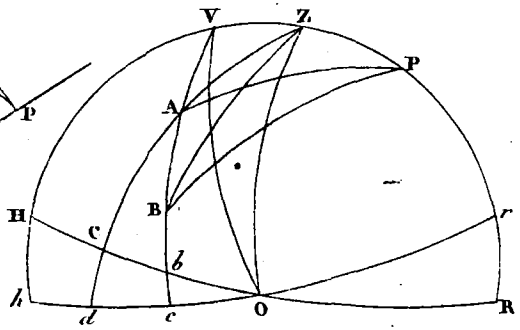


Fig. 56.

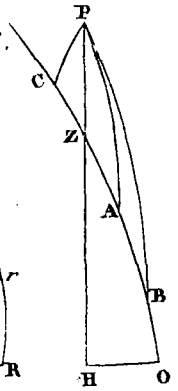


Fig. 57.

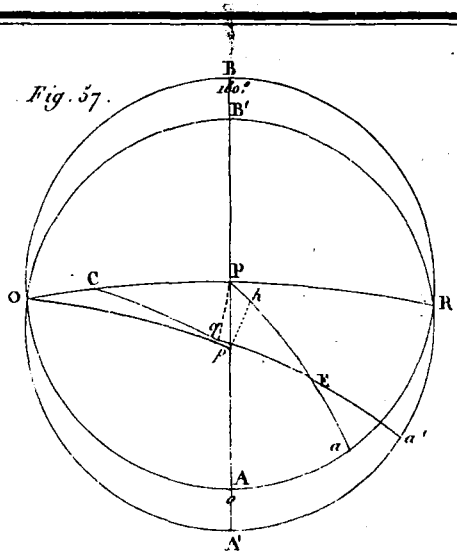


Fig. 58.

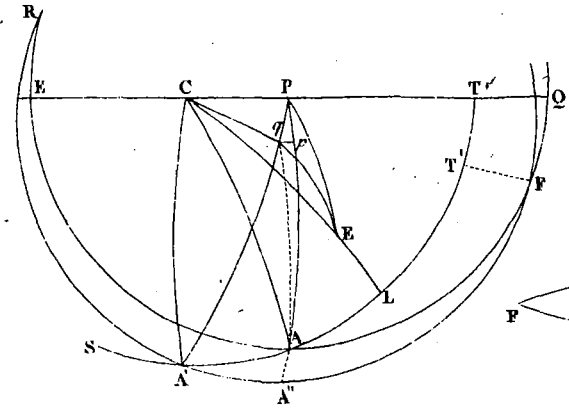


Fig. 59.

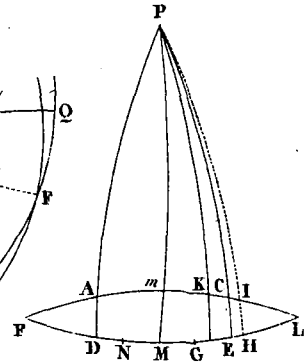


Fig. 60.

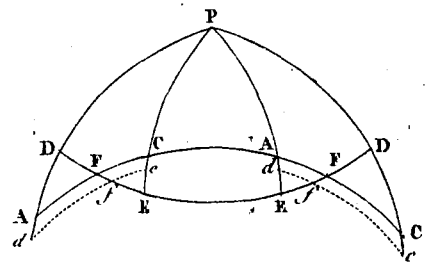


Fig. 61.

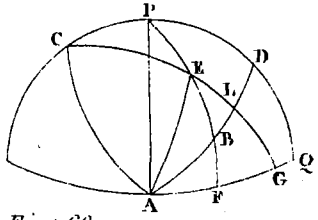


Fig. 62.

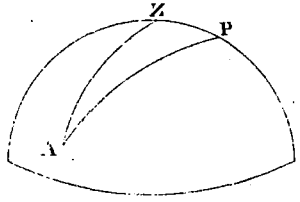


Fig. 63.

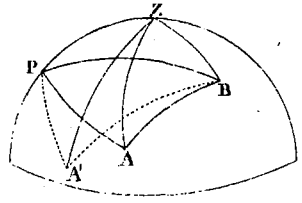


Fig. 64.

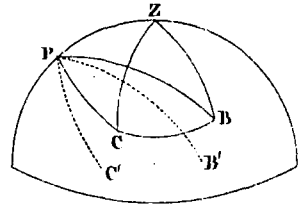


Fig. 65.

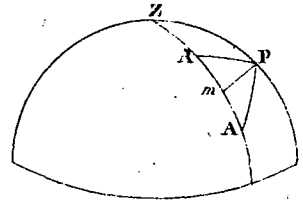


Fig. 66.

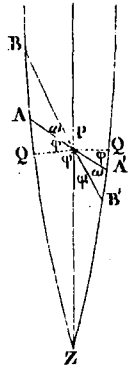


Fig. 67.

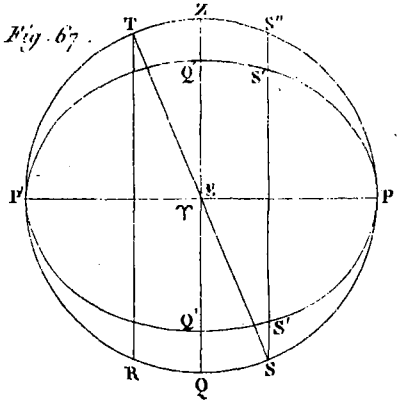


Fig. 68.

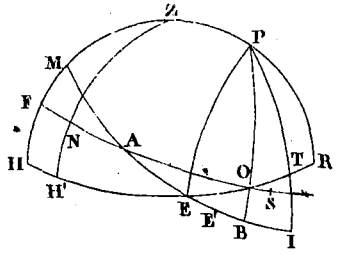


Fig. 69.

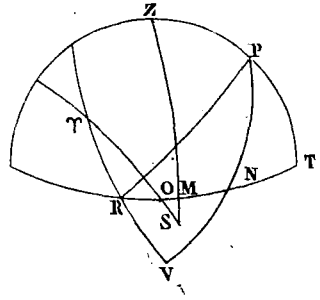
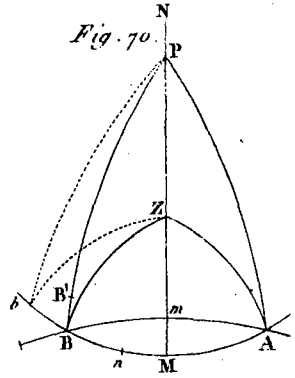


Fig. 70.



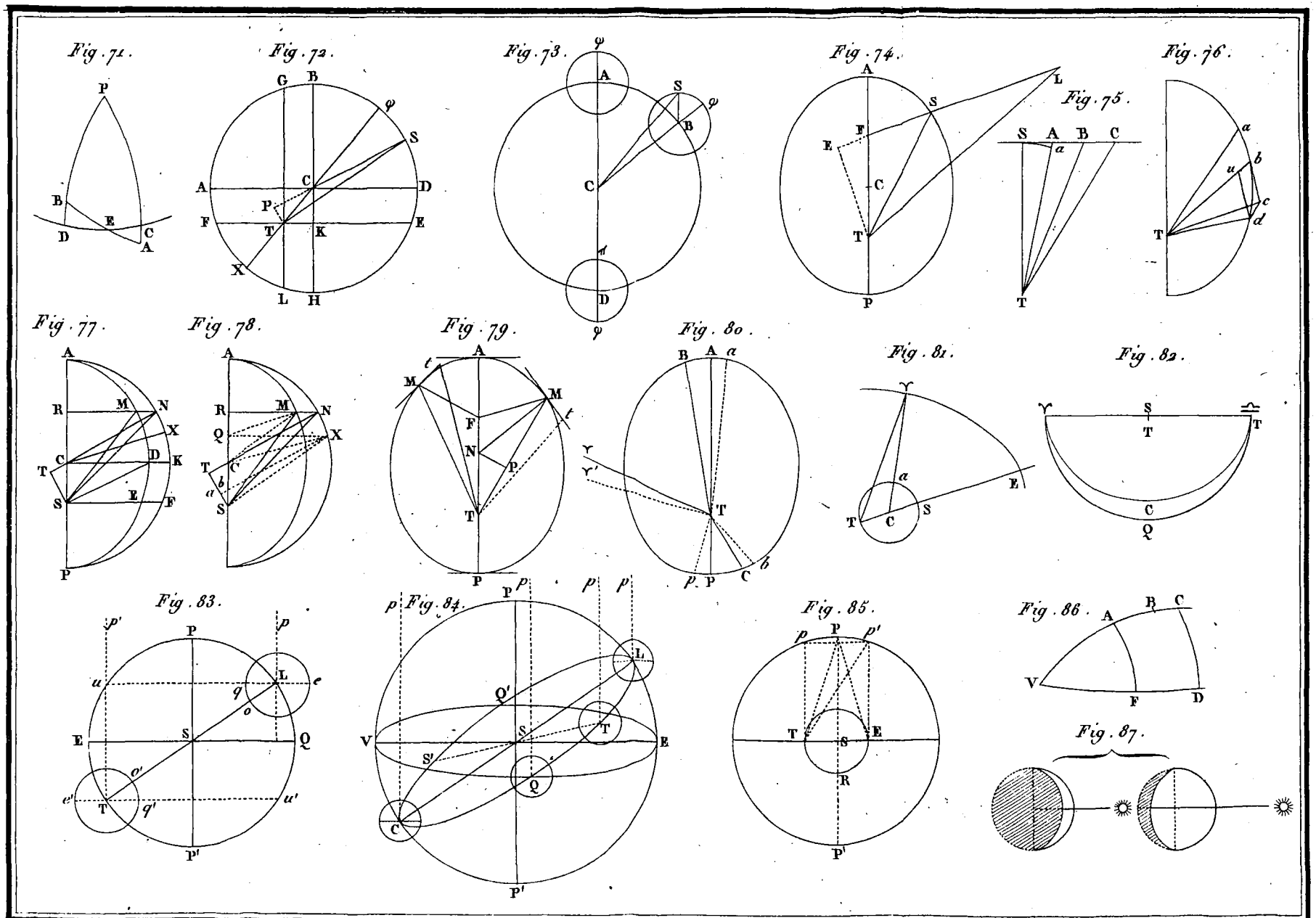


Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.

Fig. 88.

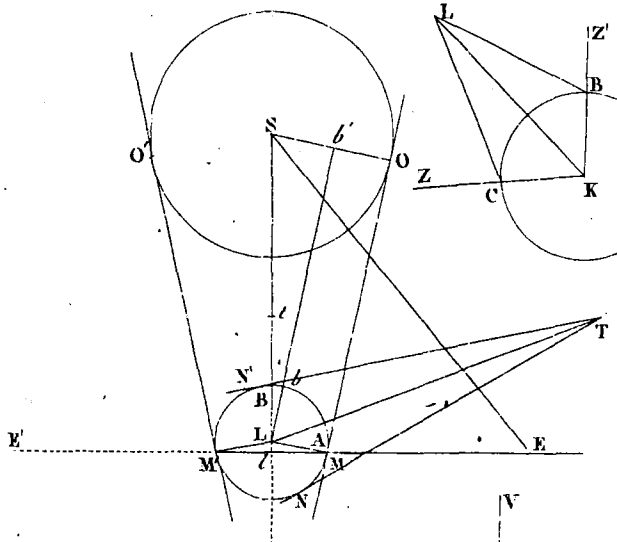


Fig. 89.

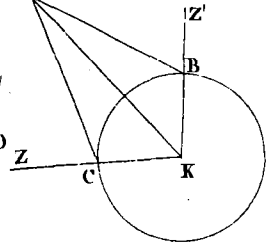


Fig. 90.

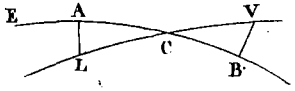


Fig. 91.

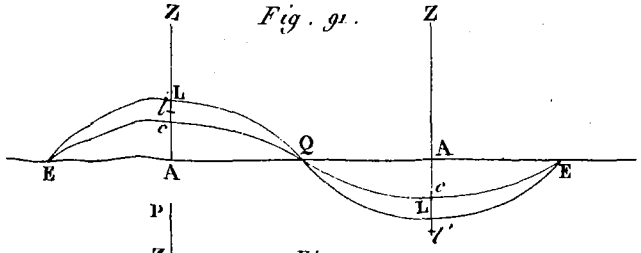


Fig. 93.

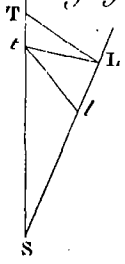


Fig. 92.

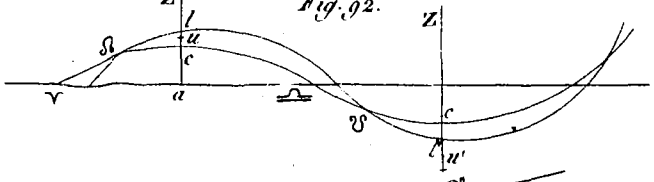


Fig. 94.

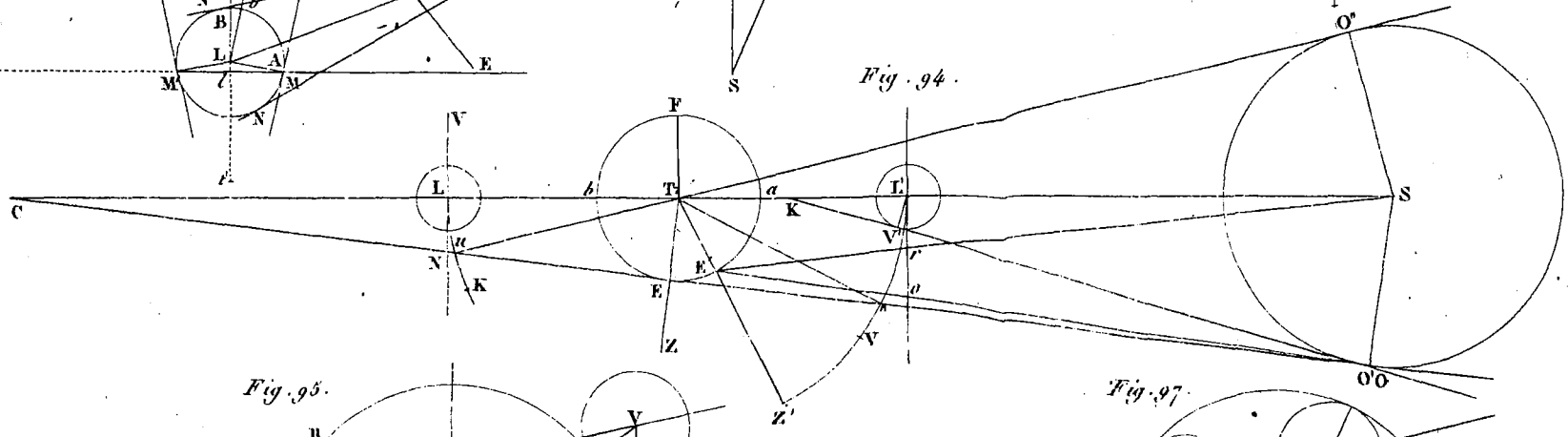


Fig. 95.

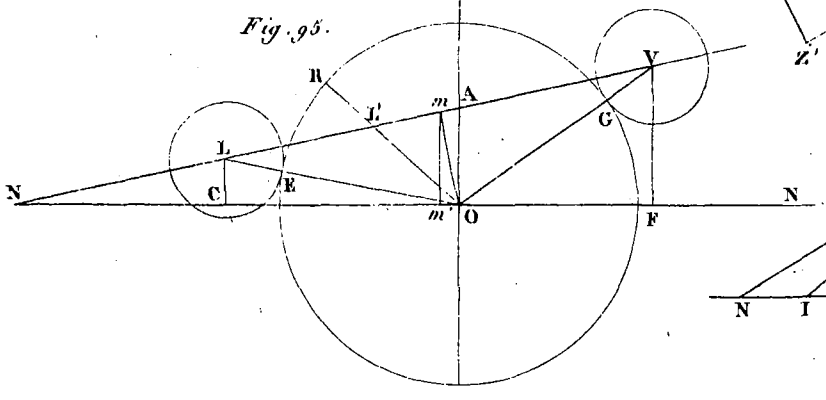


Fig. 96.

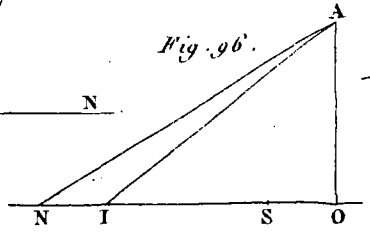
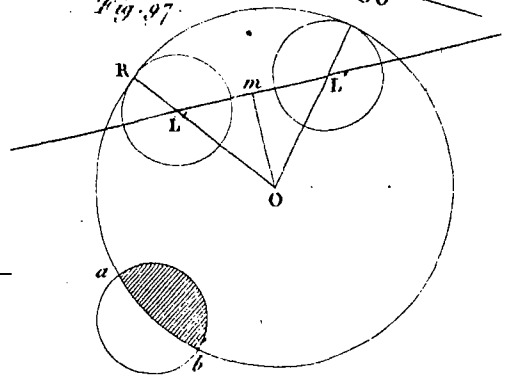


Fig. 97.



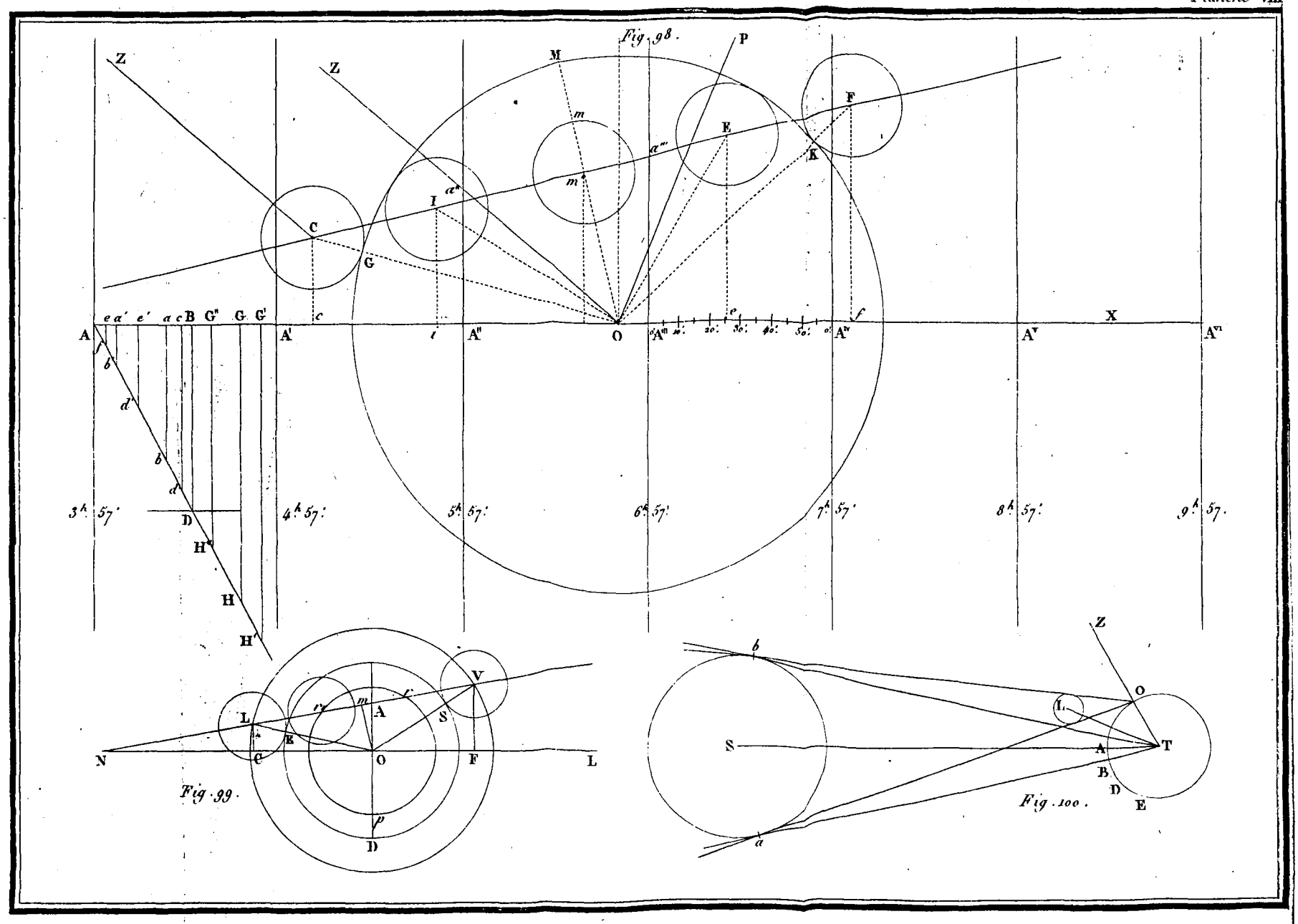


Fig. 98.
Z
Z
P
M
m
m
E
F
K
C
G
I
a'''
a''
A
A'
A''
A'''
A''''
A'''''
A''''''
O
X
3h. 57'
4h. 57'
5h. 57'
6h. 57'
7h. 57'
8h. 57'
9h. 57'
D
H''
H
H'
Fig. 99.
N
L
C
K
O
F
V
S
A
D
Fig. 100.
Z
b
a
S
O
T
A
B
D
E

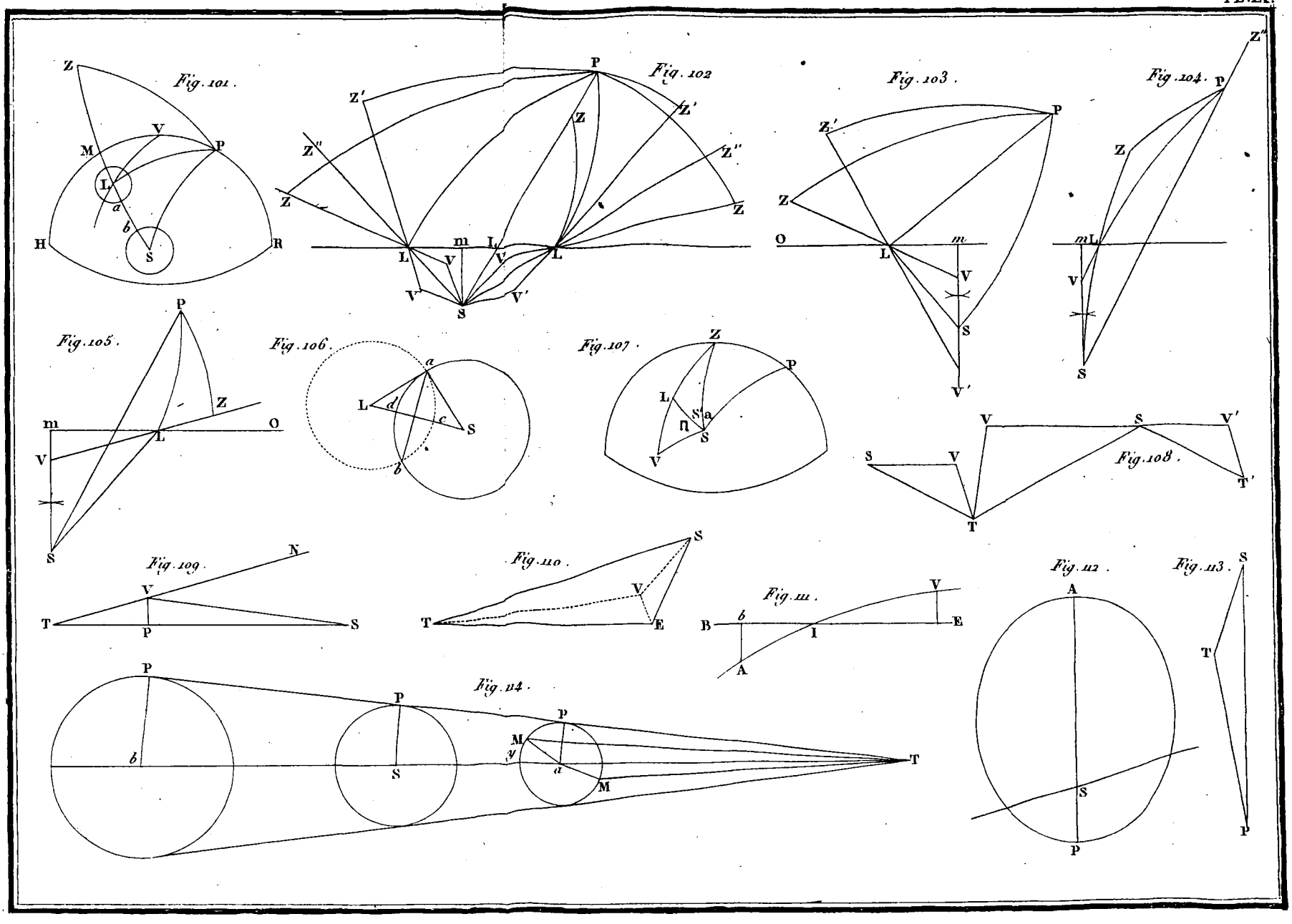
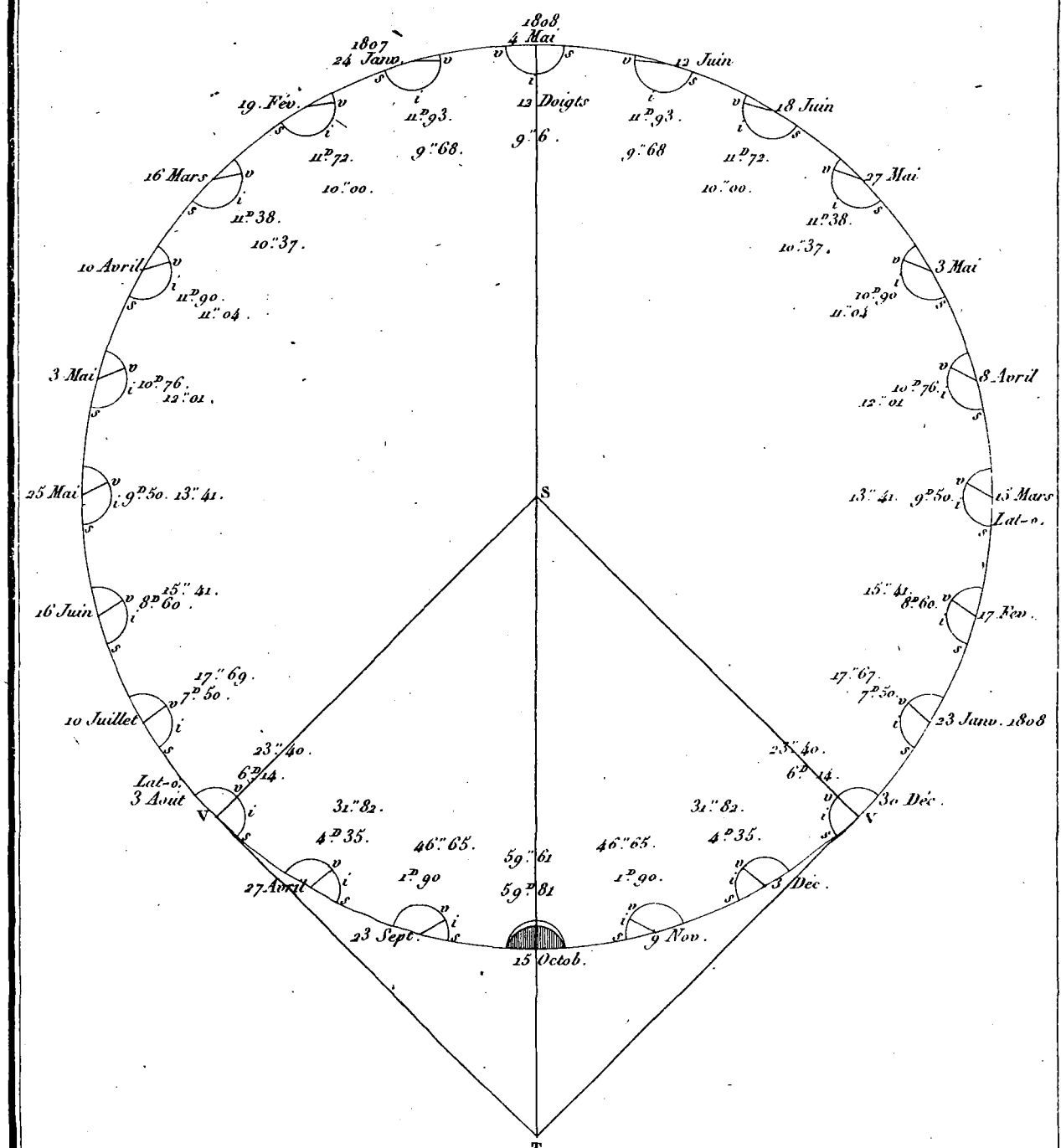


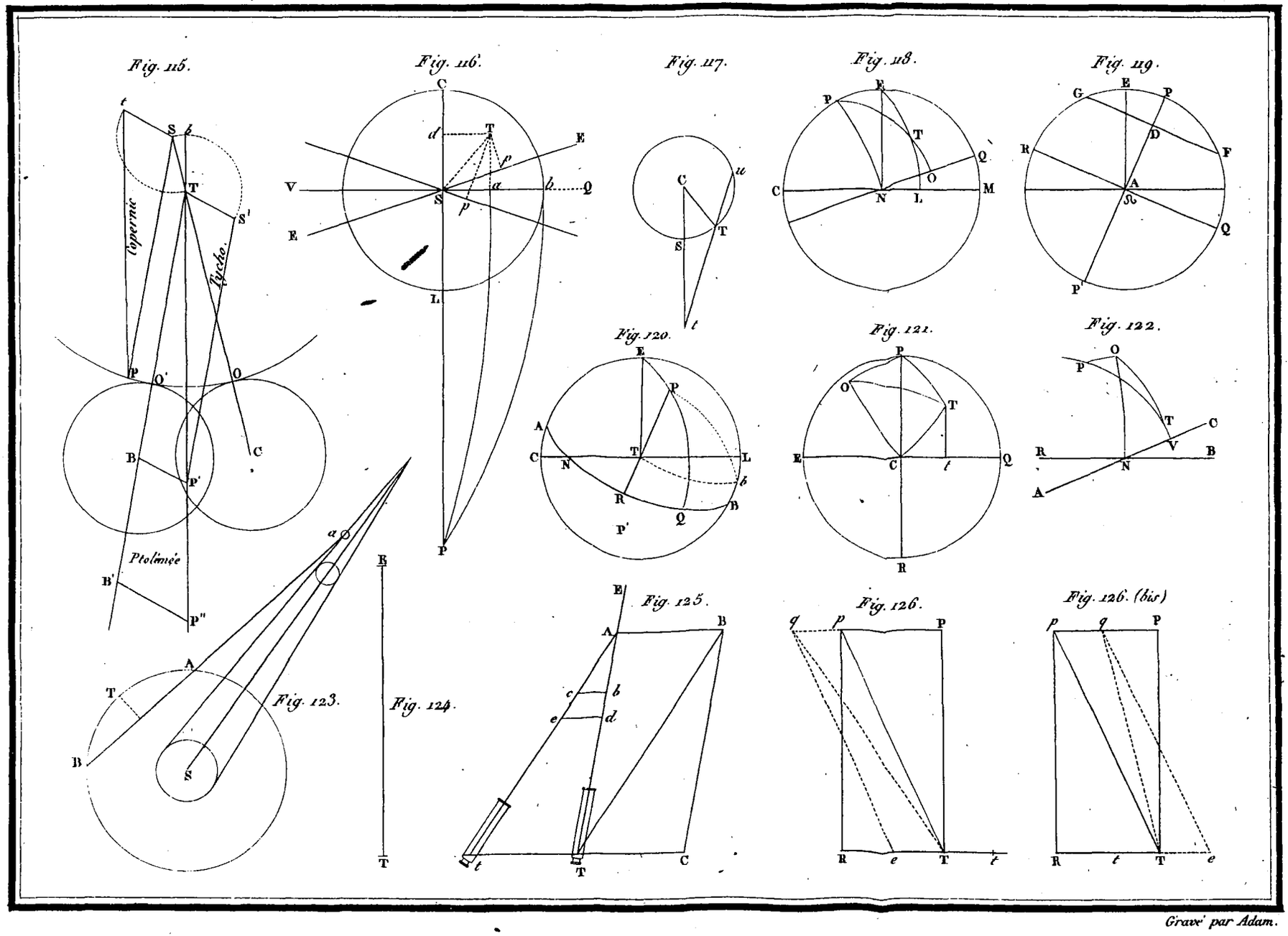
Fig. 101.
Fig. 102
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.

Cours de la Planete Vénus en 1807 et 1808 .

XVI 4 .



La partie v, i, s, est la seule qui fut visible de la terre T .



Gravé par Adam.

Fig. 127.

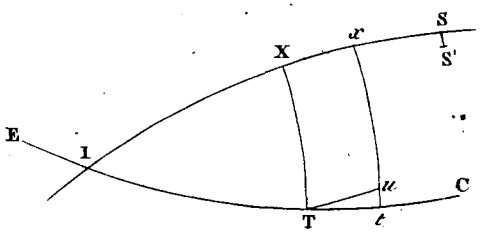


Fig. 128.

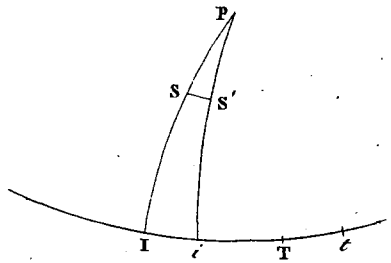


Fig. 129.

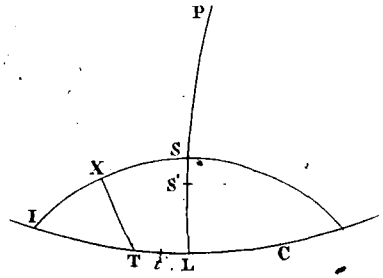


Fig. 130.

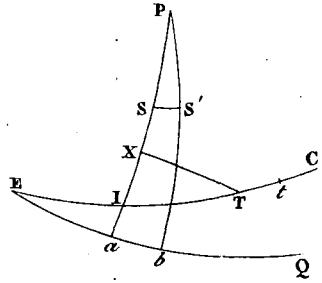


Fig. 131.

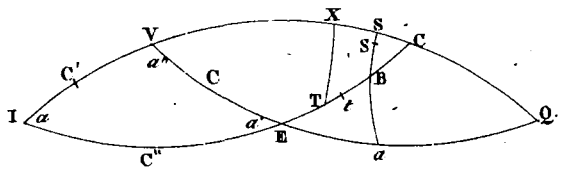


Fig. 132.

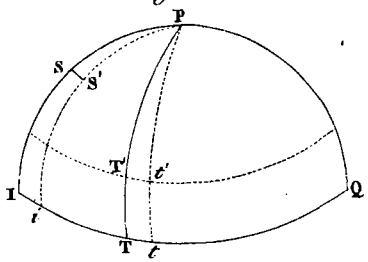


Fig. 133.

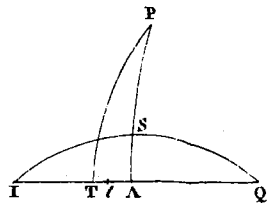


Fig. 134

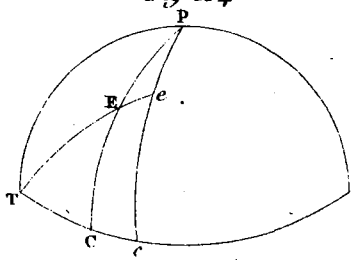


Fig. 135

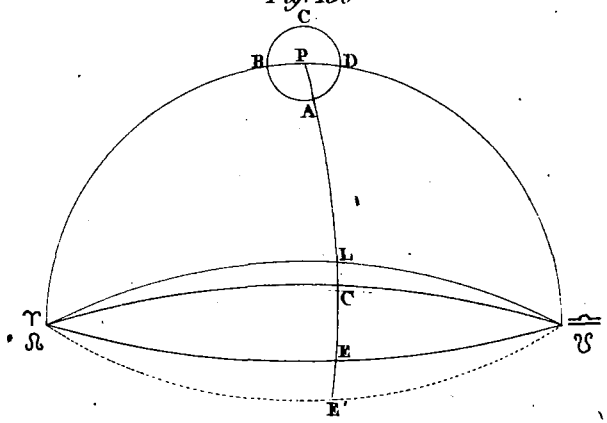


Fig. 136

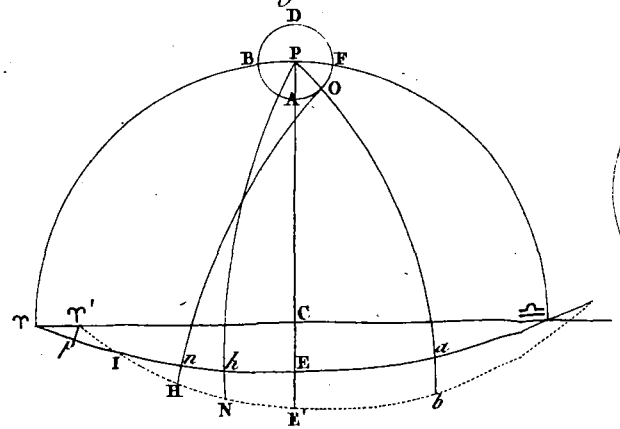


Fig. 137.

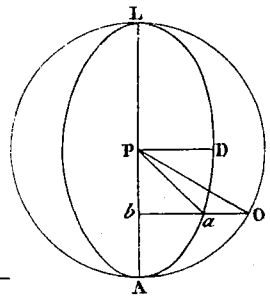
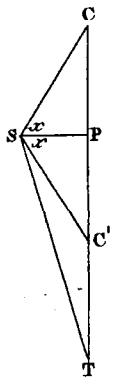
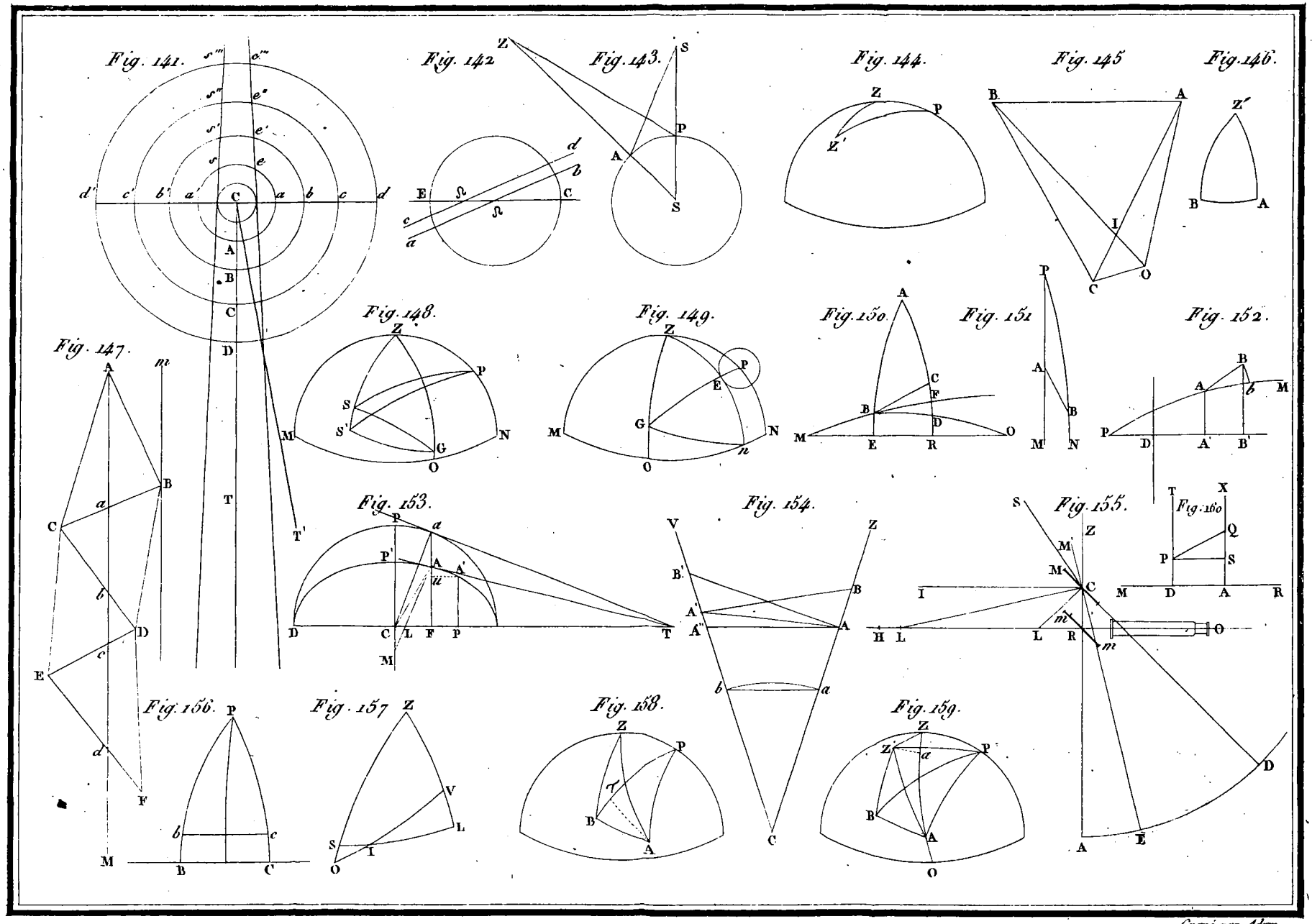


Fig. 138.



Gravé par Adam



Gravé par Adam.

Fig. 139.

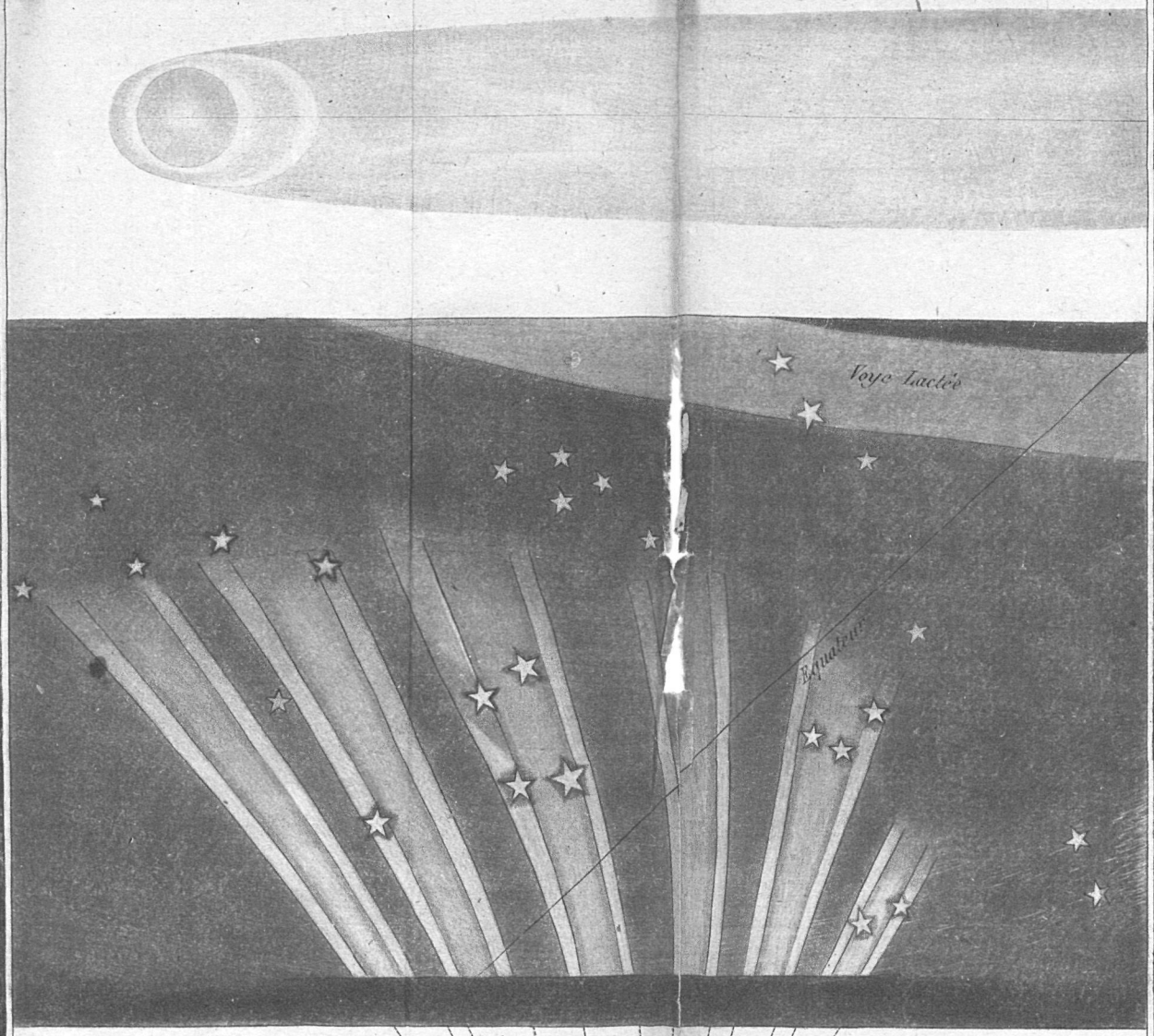
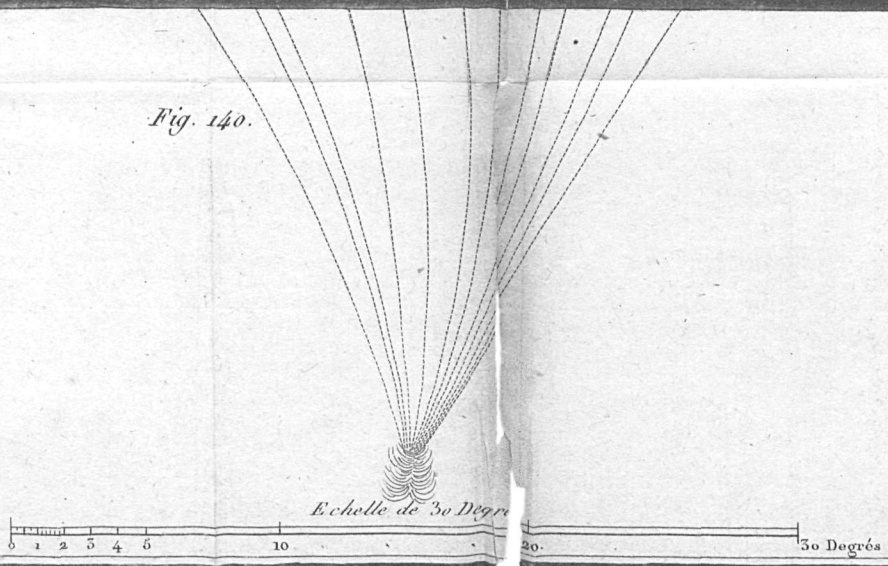



Fig. 140.