

*J. Gumbel*

# COURS

DE

## PHYSIQUE CÉLESTE,

OU

LEÇONS SUR L'EXPOSITION

DU SYSTÈME DU MONDE,

DONNÉES À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR J. H. HASSENFRAZ,

INSTITUTEUR DE PHYSIQUE.

RAREBOOK

QB  
501

.435

1810

NOUVELLE ÉDITION

REVUE ET CORRIGÉE. LIBR.

138

ARCHIVES

No. 7904

Shelf

Case

PARIS,

BRIAND, LIBRAIRE, RUE DES POITEVINS, N<sup>o</sup>. 2,  
AU COIN DE LA RUE HAUTEFEUILLE.

1810.

# **National Oceanic and Atmospheric Administration**

## **Rare Books from 1600-1800**

### **ERRATA NOTICE**

One or more conditions of the original document may affect the quality of the image, such as:

Discolored pages  
Faded or light ink  
Biding intrudes into text

This has been a co-operative project between NOAA central library, the Climate Database Modernization Program, National Climate Data Center (NCDC) and the NOAA 200th Celebration. To view the original document, please contact the NOAA Central Library in Silver Spring, MD at (301) 713-2607 x 124 or at [Library.Reference@noaa.gov](mailto:Library.Reference@noaa.gov)

HOV Services  
Imaging Contractor  
12200 Kiln Court  
Beltsville, MD 20704-1387  
April 8, 2009



Old  
Pacts.  
15

97243  
-600

**COURS**  
DE  
**PHYSIQUE CÉLESTE,** 52  
AVEC 29 PLANCHES.



This Book is the Property of the  
U.S. Census Bureau  
and must be carried on equipment  
if not returned before the expiration  
of the Calendar Year.

---

## PRÉFACE

DE L'ÉDITION PRÉCÉDENTE.

---

**D**EPUIS la formation de l'Ecole Polytechnique jusqu'à l'an neuf, le Cours de Physique, qui s'y est annuellement donné, a été divisé en cinq parties: 1°. Propriétés générales des corps; 2°. Météorologie; 3°. Électricité et Magnétisme; 4°. Acoustique; 5°. Optique; et ces connaissances étant enseignées en une seule année, les élèves étoient obligés de revenir au moins deux fois sur les mêmes objets.

Le Conseil de perfectionnement de cette Ecole ayant remarqué ce vice dans la distribution du Cours; considérant d'ailleurs qu'il étoit difficile, dans une seule année, d'enseigner, avec tous les développemens convenables, tant d'objets réunis, proposa de le diviser en deux parties; et comme les élèves doivent rester au moins deux années dans

cette institution , et que l'instruction y est généralement divisée en deux parties, de manière que les élèves passent successivement de la première division dans la seconde, le Conseil partagea également le Cours de Physique en deux sections, dont chacune fut destinée à une division ; ce qui , en doublant le nombre de leçons de ce Cours, donna la facilité d'y introduire de nouvelles branches d'enseignement.

Le Conseil ayant observé que les élèves sortoient de l'Ecole Polytechnique sans avoir aucunes connoissances astronomiques, et que cependant cette belle partie des sciences étoit généralement utile, et devenoit en quelque sorte indispensable à ceux qui désirent se livrer, soit à la navigation, soit à toute autre profession dans laquelle l'observation du ciel est nécessaire, proposa d'ajouter cette partie des connoissances humaines au Cours de Physique; et depuis que cet ordre d'enseignement a été adopté, les élèves sortent de l'Ecole Polytechnique

avec des connoissances à la fois plus étendues et plus approfondies.

Le Cours de Physique céleste ayant été fixé, par le Conseil de perfectionnement, à douze leçons, il a fallu le distribuer de manière à présenter aux élèves l'ensemble du système du monde, l'exposé des observations astronomiques, et le détail des opérations par lesquelles on les a faites, afin de leur en faciliter l'application dans les différentes circonstances où ils peuvent se trouver.

Les notions astronomiques contenues dans les ouvrages de physique sont généralement trop élémentaires, et souvent trop abrégées : les Cours complets d'astronomie, publiés par les savans qui professent cette science, sont trop volumineux; il falloit donc un ouvrage nouveau. *L'Exposition du Système du Monde* de Pierre-Simon LAPLACE a servi de base à l'enseignement de la Physique céleste à l'École Polytechnique; et ce choix, dicté par les hommes célèbres qui composent le Conseil de perfectionnement,

ment de cette Ecole, étoit sanctionné d'avance par la grande réputation dont ce livre jouit dans le monde savant.

Persónne, en effet, dans le siècle qui vient de finir, n'a, autant que ce grand géomètre, reculé les bornes des connaissances astronomiques. Newton n'avoit donné qu'une foible ébauche de l'explication du flux et reflux ; et quelques savans avoient senti la nécessité de revenir sur ce problème ; Laplace l'a repris entièrement, et l'accord surprenant des résultats de ses calculs avec l'observation est une des vérifications les plus imposantes de la loi de la pesanteur.

Les grandes inégalités de Saturne et de Jupiter ont beaucoup occupé les géomètres, vers le milieu du siècle dernier : Laplace est le seul qui ait à la fois assigné leur véritable cause et la longueur de leurs périodes.

L'inégalité séculaire de la lune étoit considérée comme un phénomène qui s'écartoit de la loi de la pesanteur ; La-

place lui-même avoit d'abord cru qu'il falloit, pour l'expliquer, admettre une nouvelle hypothèse, qui étoit que l'action de la pesanteur ne se transmet pas instantanément d'un corps céleste à un autre; mais, ayant examiné de nouveau cette importante question, il en a donné une solution complète; et c'est une des plus belles applications dont la théorie newtonienne soit redevable au siècle dernier.

En général, Laplace a donné les moyens de porter l'approximation des mouvemens célestes incomparablement plus loin qu'on ne le faisoit avant lui: ainsi, par exemple, de toutes les tables de la lune, celles qui étoient calculées, d'après la théorie, par les méthodes de Mayer, s'écartoient le moins de l'observation, et cependant elles s'en écartoient en certains points de trente secondes; maintenant, des tables calculées par les méthodes de Laplace ne s'en écartoient au plus que de cinq à six secondes.

La lune est l'astre qui a le plus occupé

les géomètres, et c'est aussi à perfectionner sa théorie que Laplace a le plus constamment dirigé ses travaux. Dernièrement encore, il a déterminé la loi et la cause de deux de ses inégalités, l'une en longitude, et l'autre en latitude, dont la comparaison des observations avoit fait soupçonner l'existence; et, comme ces inégalités sont dues à la non sphéricité de la Terre, il les a fait servir à déterminer la mesure de l'aplatissement de cette planète : ce moyen, quelque singulier qu'il paroisse, est cependant préférable à celui des mesures directes du méridien, puisque ces dernières ne peuvent jamais donner que l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur du lieu où elles sont prises.

Enfin, ce géomètre calculoit, par la théorie, la vitesse de rotation de l'anneau de Saturne, en même temps que Herschel la déterminoit par l'observation directe.

Dans son *Système du Monde*, Pierre-Simon Laplace a eu pour objet de faire

Connoître l'état actuel de l'astronomie, et l'ordre qu'il a suivi a dû être celui dans lequel les découvertes et les observations ont été faites ou publiées; mais on conçoit qu'en prenant cet ouvrage pour base de l'instruction, on pouvoit suivre une autre marche, et changer la disposition de ces riches matériaux: cette marche et cette disposition, favorables à un Cours, ont été données par l'expérience. C'est après avoir essayé, à l'Ecole Polytechnique et à l'Athénée de Paris, différentes méthodes d'enseignement, applicables, dans la première institution, à des jeunes gens fort instruits; et, dans le second établissement, à des gens du monde amis des sciences; que l'on a choisi la méthode adoptée dans ce Cours de Physique céleste.

Indépendamment de la différence de méthode, il a fallu, pour rendre cet ouvrage élémentaire, y introduire des figures, qui indiquassent la forme, le mouvement des corps célestes, et les opérations faites pour apprécier la cause des divers

phénomènes qu'ils nous présentent, et placer, dans le cours de l'ouvrage, des démonstrations simples de toutes les propositions qui en sont susceptibles.

Ce Cours de Physique Céleste n'est donc, à proprement parler, qu'un extrait d'un ouvrage, sur lequel l'opinion du monde savant a devancé le jugement de la postérité : c'est, en quelque sorte, un abrégé du *Système du Monde* de Pierre-Simon Laplace, mis dans un ordre propre à l'enseignement, et augmenté de figures et de démonstrations qui le rendent élémentaire : aussi ce grand géomètre, sous les auspices duquel il a été entrepris, a-t-il bien voulu le revoir ; et c'est assez faire entendre que, s'il est utile, s'il concourt, avec tant d'autres, à l'amélioration de l'instruction publique et aux progrès des connoissances humaines, c'est à lui que l'on en sera redevable.

*N. B.* On a suivi pour les mesures le système décimal, adopté dans l'ouvrage de Laplace, c'est-à-dire, la division du quart de cercle en cent degrés, le degré en cent minutes, etc. etc.

---

COURS  
DE  
PHYSIQUE CÉLESTE,  
OU  
LEÇONS SUR L'EXPOSITION  
DU SYSTÈME DU MONDE.

---

PREMIÈRE LEÇON.

DE LA TERRE, DU SOLEIL, DE LA LUNE, DES  
ÉTOILES, DES PLANÈTES, DES COMÈTES ET DE  
LEUR FORME APPARENTE.

§. I.

*De la Terre.*

1. **L**ORSQU'UN spectateur en repos regarde la surface de la terre sur laquelle il est placé, il n'aperçoit qu'un plan dont il ne peut déterminer l'étendue; s'il se trouve sur les côtes, ce plan paroît être borné par la mer, au-delà de laquelle

il ne voit que la voûte céleste qui l'environne de toutes parts. Telle a été la première observation des hommes qui ont dû en conclure que la terre est une surface plane; telle est encore l'opinion des enfans, et même celle d'un grand nombre d'adultes. Il a fallu une suite d'observations et un effort d'esprit particulier pour faire abandonner cette première opinion.

2. Les peuples pasteurs, les nations guerrières et commerçantes, se transportant à de grandes distances sur un même *continent*, ont remarqué que des étoiles qu'ils apercevoient sur une partie de ce continent n'étoient plus visibles sur une autre, et que, sur ce dernier point, ils en distinguoient de nouvelles. Comme cette disparition des unes et cette apparition des autres ne pouvoient être produites que par la courbure de la terre, ils en conclurent qu'elle n'étoit pas plane, comme on l'avoit cru d'abord, et que sa surface devoit être courbe.

En effet, si un spectateur, placé en A sur la ligne BAC, fig. 1<sup>re</sup>, aperçoit sur la voûte céleste les étoiles BDEFGHIC, il doit toujours les voir sur quelque partie de cette ligne qu'il se trouve; mais si, en se transportant de A en C, les étoiles BDE disparaissent à sa vue, et que de nouvelles KLM les rem-

placent de l'autre côté, il doit penser que la surface du ciel qu'il aperçoit est celle qu'il doit distinguer lorsqu'il est placé sur la courbe  $FNM$ , incliné sur le plan  $BAC$ . Cependant, puisqu'à mesure qu'il se porte de  $A$  vers  $C$ , des parties  $DEF$  du ciel disparaissent successivement, et sont remplacées par des portions correspondantes  $KLM$ , il s'ensuit qu'à chaque déplacement la ligne sur laquelle il se trouve s'incline de plus en plus, et que le spectateur marche sur une surface courbe que ces lignes touchent à chacun des points sur lesquels il passe.

3. Cette première observation fut bientôt confirmée par une autre : on remarqua que les hautes montagnes isolées, vues de loin, ne laissent d'abord apercevoir que leurs sommets, et qu'en s'en approchant on en découvrait successivement toute la hauteur en descendant jusqu'à la base. C'est particulièrement sur mer, lorsqu'aucun corps n'est interposé entre l'observateur et la montagne, que cet effet est remarquable ; et il est facile de voir, par la direction des lignes  $PS, QR$ , qu'il résulte de la courbure de la surface de la terre.

4. Après la découverte de la boussole, lorsque les hommes, au moyen de cet instrument, purent hasarder de s'éloigner des côtes et de

parcourir de grandes distances en mer, les navigateurs apportèrent non seulement des preuves multipliées de la courbure de la terre, mais encore celles d'une observation qui dut leur paroître aussi importante, et plus étonnante sans doute : ils virent qu'en partant d'un point quelconque U de sa surface, on pouvoit revenir au même point, en suivant constamment la même direction U T X Y U ; ce qui ne pourroit avoir lieu, si la terre n'étoit pas isolée ; et ils en conclurent qu'elle étoit un solide suspendu dans l'air.

5. Des observations successives ont présenté des développemens des notions suivantes : Tous les individus placés sur la terre y sont comme attachés ; tous les corps qu'on tente d'éloigner de sa surface, par le choc ou par tout autre moyen, y retombent ; ainsi tout ce qui est sur la surface de la terre pesant vers elle, y est retenu par cette action ; et comme sa forme a dû dépendre de la tendance vers son centre, de toutes les parties qui la composent, et que la *sphère* est la seule figure formée par la tendance de tous les corps à un centre, on a supposé que la forme de la terre devoit être sphérique.

Cette supposition a été vérifiée ensuite par deux observations importantes ; la première que

sur tous les points de la surface de la terre, sur laquelle se trouve un observateur, l'horizon est toujours terminé par un cercle lorsque des obstacles ne s'opposent pas à ce que la vue puisse s'étendre; la seconde que l'ombre de la terre reçue sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur, mené du soleil à cette planète, a toujours la forme d'un cercle ainsi qu'on l'observe dans les éclipses de lune.

Nous verrons dans une autre leçon de combien cette figure diffère de celle de la terre, que l'on a cherché à déterminer par une suite d'observations exactes.

6. On distingue sur la terre des substances de densités différentes : telles sont les terres, les pierres, les métaux, l'eau, et beaucoup d'autres. De hautes montagnes, parmi lesquelles il y en a de massives, et d'autres creusées par l'action des feux souterrains, rendent sa surface raboteuse; des masses d'eau en recouvrent une partie; et ces mers ayant des profondeurs inégales, il s'élève de leur fond des sommités et des chaînes de montagnes qui forment des îles, des archipels, qui ajoutent encore à l'irrégularité de la surface de la terre.

7. Les mers paroissent assujéties à un mouvement alternatif d'élévation et d'abaissement, nommé *flux et reflux*: ce mouvement, généralement régulier, éprouve des variations dont nous examinerons les lois dans une autre leçon.

8. La surface de la terre est environnée d'air,

fluide insensible à la vue et au toucher, mais qui peut se transvaser, se mesurer et se peser : c'est lui qui, par sa résistance, diminue le mouvement des corps, et qui, par son choc, produit des forces que l'industrie des hommes a su mettre à profit, soit pour la translation des vaisseaux, soit pour la rotation des moulins à vent, etc.

9. Ce fluide éminemment élastique, qui a été nommé *atmosphère*, exerce sur la surface de la terre une pression que l'on mesure par le *baromètre*, ainsi que nous l'avons exposé dans les leçons qui ont pour objet les phénomènes de l'atmosphère (1).

L'air en petite quantité est incolore, mais en grande masse il envoie des rayons colorés qu'il reçoit de la lumière solaire, et c'est là ce qui lui donne la couleur bleue plus ou moins intense que nous apercevons. On détermine ordinairement l'épaisseur de la couche d'air atmosphérique, ou la hauteur de l'atmosphère, par le temps

(1) Si l'on suppose que la densité moyenne de l'air, à la surface de la terre, soit à celle du mercure :: 1 : 11000 et que la colonne de mercure qui fait équilibre à la pression de l'air soit de 0<sup>m</sup> 75, il s'ensuivroit que la colonne d'air qui fait équilibre à la colonne de mercure, si l'on supposoit celle-là d'une densité uniforme, seroit de 8250 mètres.

qui s'écoule entre l'apparition du *crépuscule* et celle du soleil : cette méthode que nous avons fait connoître dans nos leçons d'optique et de météorologie, donne à cette hauteur 70847, <sup>mes.</sup> 5. (1).

La différence que l'on observe entre ces deux hauteurs provient de ce que l'on suppose en obtenant la première par la hauteur de la colonne du baromètre que sa densité est uniforme, tandis qu'il

(1) Soit CB fig. 1, le rayon de la terre, CA celui de la dernière limite de l'atmosphère : SBA la direction du soleil se levant pour un point B de la terre ; parmi tous les rayons réfléchis par la dernière tranche de l'atmosphère A que le rayon direct atteint, il y en aura un AD tangente de la surface de la terre qui produit la naissance du crépuscule. Le soleil ayant un mouvement apparent de SBA en S'AD arrive dans cette direction au bout d'un temps T, alors il se leve pour le point D. Si l'on observe le temps écoulé entre l'apparition du crépuscule et celle du soleil, on aura celui que l'astre lumineux aura mis à décrire SA S' et l'on aura la valeur de cet angle par cette proportion  $24^h : 2HR :: 1 : SA.S' = \frac{2HRt}{24}$ .

Connoissant l'angle SA S' on connoît son supplément BAD, conséquemment sa moitié BAC. Ainsi dans le triangle ABC on connoît le côté BC = le rayon de la terre, l'angle BAC plus celui ABC qui est droit ; de là cette proportion R : sinus BAC :: CA : BC ; donc  $CA = \frac{BC}{\sinus BAC}$

Si de CA on retranche le rayon de la terre CF, on a CA - CF = AF hauteur de l'atmosphère.

résulte des expériences de Perrier, au Puy-de-Dôme, et de l'élasticité de ce fluide aëriiforme, que sa densité diminue graduellement jusqu'à la dernière tranche.

10. L'atmosphère, pesant également de toutes parts sur la terre doit avoir une forme extérieure peu différente de celle du *globe* qu'elle entoure. Si la vue découvroit au-dessous de l'horizon, on pourroit distinguer cette forme sphérique ; mais le spectateur placé en A, fig. 2, n'aperçoit qu'un *segment* DBC. L'élévation d'un astre F, sur l'horizon, observée au point où le rayon de lumière qu'il nous envoie coupe l'arc DB au point E, c'est-à-dire en deux parties égales, pourroit servir de nouveau moyen pour mesurer le rayon GB du segment aperçu, et avoir la hauteur de l'atmosphère AB par cette méthode. En effet la hauteur moyenne de l'astre F, lorsqu'il coupe l'arc DB en deux parties égales, étant de  $26^\circ$ , la longueur *horizontale* AD et celle *verticale* AB sont entr'elles : : 3, 25 : 1 ; d'où il suivroit que la hauteur de l'atmosphère seroit les  $\frac{25}{278}$  du rayon de la terre, conséquemment neuf fois plus considérable que celle que l'on trouve par le temps observé entre le commencement de l'apparence du crépuscule et celle de l'apparition du soleil à l'horizon (1).

---

(1) En effet, soit GB fig. 2 le rayon de l'atmosphère et GA celui de la terre, RQ l'horizon au point A; on a  $\overline{AD}^2 = AV \times AB$ . Si l'on fait  $AB = x$ ,  $AD = y$  et  $AG = r$  le rayon

Par la méthode du crépuscule, on trouve que la hauteur de l'atmosphère  $AB$  est de  $70,847^{\text{met.}}$  lorsque le rayon de la terre  $GA$  est de  $6,369,374^{\text{met.}}$ ; d'où il suit que le rapport de la corde  $AD$  à la hauteur  $AB$  est :  $9,5 : 1$ . Ainsi, par la méthode du crépuscule, on trouve que le rayon horizontal de la voûte céleste est à son rayon vertical :  $9,5 : 1$ ; et, par l'angle que fait à l'horizon un astre qui coupe l'arc

de la terre, on a  $y^2 = x \times (2r + x) = x^2 + 2r x$ . Mais puisque (§ 10)  $y : r :: 3, 25 : 100$ , il s'ensuit que  $y = \frac{3,25}{100} x$ . Ainsi dans l'équation précédente on a  $(\frac{3,25}{100})^2 x^2 = x^2 + 2r x$  d'où l'on peut facilement déduire la valeur de  $x$ ; donc la hauteur de l'atmosphère.

Ce rapport  $3, 25$  à  $1$ , que nous venons de citer, peut être déterminé, soit par une opération *graphique*, soit par l'*analyse*.

La méthode graphique consiste à tracer du point  $G$ , comme centre, plusieurs arcs  $HI$ ,  $KL$ ,  $DC$ ,  $MN$ ,  $OP$ , *concentriques* à la surface de la terre, couper tous ces arcs par une ligne horizontale  $QR$ , et une verticale  $AS$ , diviser en deux parties égales les arcs compris entre ces deux lignes, et faire passer une courbe  $AET$  par toutes ces *intersections*; du point  $A$  mener une ligne  $AF$ , qui fasse, avec l'horizontale  $QA$ , un angle de  $26^\circ$ ; le point  $E$  d'intersection de cette ligne, avec la courbe, appartient à l'arc de cercle qui est divisé en deux parties égales par l'angle de  $26^\circ$ . Si du point  $G$ , avec un rayon  $GE$ , on décrit l'arc  $DEBC$ , cet arc sera celui que l'on cherchoit. Comparant la hauteur  $AB$  à la longueur  $AD$ , on voit, lorsque l'opération a été faite avec exactitude, que le premier est contenu  $3, 25$  fois dans le second.

céleste en deux parties égales, on trouve que ce rapport est :: 3,25 : 1. La différence entre ces deux rapports paroît venir de ce que nous ne jugeons pas la courbure de l'atmosphère par l'impression des molécules d'air de la dernière tranche, mais bien par l'action qui résulte de l'ensemble de toutes les molécules qui composent la tranche (1).

II. Il suit de tout ce que nous venons d'exposer, que la terre est un corps solide suspendu dans l'air, que sa forme est à peu-près sphérique, que les montagnes que l'on remarque à sa surface sont massives ou creuses, que les eaux de la mer qui couvrent en

(1) La tranche d'air horizontale intercepte beaucoup plus de lumière que la tranche verticale, non-seulement parce qu'elle a plus d'épaisseur et que, proportionnellement à son épaisseur elle doit contenir une plus grande quantité de molécules d'air qui intercepte de la lumière; mais encore parce qu'il existe dans la tranche horizontale une grande quantité de vapeurs qui réunit son action à celle de l'air et qui augmente la quantité de lumière interceptée. C'est à cette plus grande interception de lumière dans la tranche horizontale, que l'on doit attribuer cette facilité avec laquelle on peut fixer le soleil levant lorsque l'on peut à peine l'observer, quand il est un peu élevé au-dessus de l'horizon.

A cette cause qui éloigne la limite horizontale de l'atmosphère s'en réunit une seconde, c'est la présence de plusieurs objets placés dans cette direction, qui contribue également à éloigner la limite apparente de l'atmosphère.

Ces causes transportent donc en AD' et AB' fig. 2 (a) la limite de l'atmosphère qui est réellement en D et en B.

partie la terre ont différentes profondeurs, et sont soumises à un flux et reflux, et que ce globe est environné d'une atmosphère qui y produit divers phénomènes.

12. L'habitant de la terre, portant ses regards vers le ciel, y a d'abord remarqué deux corps ronds et lumineux, auxquels il a donné les noms de *soleil* et de *lune*; ensuite, observant un nombre considérable de petits corps également lumineux, il leur a donné des noms particuliers propres à les distinguer les uns des autres.

Nous allons nous occuper des observations qui ont été faites pour déterminer la forme du soleil et celle de la lune, et nous exposerons ensuite celle dont l'objet a été la connoissance des autres corps célestes.

## S. II.

### *Du Soleil.*

13. Le soleil est cet *astre radieux* qui répand une lumière brillante; c'est par elle que la terre et plusieurs corps célestes sont éclairés. Sa présence procure successivement le jour à diver-

ses parties de la terre, et son absence les plonge dans l'obscurité, et produit la nuit.

14. A la vue simple, le soleil a l'apparence d'un cercle dont le diamètre paroît plus grand lorsqu'il est à l'horizon, que lorsqu'il est au-dessus de la tête du spectateur : mais cette différence de grandeur n'est que le résultat d'une illusion produite par la diminution de lumière, qui, (§. 10) est moindre en traversant des couches de l'atmosphère d'une épaisseur plus considérable ; car, mesuré exactement avec un instrument propre à ces sortes d'opérations, le diamètre du soleil est le même dans les deux positions. On remarque, en outre que, lorsque cet astre est à l'horizon, sa forme est *elliptique*, le grand *axe* de l'ellipse est horizontal, et le petit axe vertical, tandis que sa forme est toujours un cercle lorsqu'il est au *zénith* : mais la différence apparente dans la grandeur des deux axes du soleil observé à l'horizon, est encore une illusion produite par la *réfraction* que sa lumière éprouve en traversant l'atmosphère. Nous développerons les causes et les effets de cette réfraction dans nos leçons d'*optique*.

15. On appelle *diamètre apparent* d'un astre l'angle qu'il présente au spectateur placé sur la surface de la terre : ainsi l'angle BAC, fig. 5,

formé par les deux rayons  $AB$ ,  $AC$ , menés de l'œil du spectateur en  $A$  sur le diamètre  $BC$  de l'astre, est son diamètre apparent.

16. Le diamètre apparent du soleil varie dans le cours de l'année; et l'on a observé que son plus grand diamètre est de  $6035''7$ , son plus petit de  $5836''3$ , et son diamètre moyen de  $5936''$ .

La grandeur apparente du soleil pouvant varier en raison de sa distance au spectateur, quoiqu'en effet sa grandeur réelle ne varie pas, ainsi qu'on le voit par la figure 3, où rien ne contribue à augmenter ou à diminuer cette grandeur, on doit conclure de cette seule observation que la distance du soleil à la terre varie.

17. Lorsqu'on examine le soleil à travers un verre coloré qui, en diminuant l'effet de sa lumière, empêche la forte impression qu'elle produiroit sur l'organe de la vue, et qu'on applique ce verre à un *telescope*, lequel, en grossissant la surface de l'astre laisse apercevoir des objets que l'œil nu ne sauroit distinguer, on remarque quelquefois de grosses taches noires qui paroissent adhérer à cette surface, sans cependant rester à la même distance du bord.

Ces taches ont été vues la première fois en 1611, par le P. Scheiner, jésuite, et par Galilée.

18. On a observé que ces taches avoient de plus grandes dimensions lorsqu'elles étoient au centre du soleil en A, fig. 4, et que leurs dimensions diminueoient en approchant des bords, ainsi qu'on le voit en B et en C.

Si la tache se mouvoit sur la surface d'un cercle B A C, fig. 5, elle paroîtroit à un spectateur T, placé sur la terre, sous un plus petit angle lorsqu'elle seroit à l'extrémité C, que lorsqu'elle seroit en B, et sous un angle plus grand, lorsqu'elle seroit au centre A; et, comme les dimensions des taches sur toutes les parties de la surface, suivent cette loi, et qu'elles sont absolument les mêmes que si elles se mouvoient sur un cercle, on a conclu que la surface du soleil, loin d'être un plan, comme elle en a l'apparence, doit être *convexe*, et que, cet astre ayant constamment une forme circulaire, et présentant au spectateur des faces différentes de sa surface, doit avoir la forme d'une sphère.

19. Les taches du soleil sont presque toujours comprises dans une *zone* de sa surface, dont la largeur mesurée par le *méridien* solaire, ne s'étend pas au-delà de 44 degrés de son *équateur*.

20. Ces taches ont des formes irrégulières; leur quantité, leur position et leur grandeur varient beaucoup. Souvent elles sont nombreuses,

et fort étendues; presque toutes sont environnées de *pénombres*, lesquelles sont renfermées dans des nuages de lumière plus clairs que le reste du soleil; et c'est au milieu de ces pénombres que l'on voit les taches se former et disparaître. « Tout cela, dit Laplace, indique à la surface « de ces énormes masses de feu de vives effervescences, dont les volcans ne sont que de « foibles images. »

21. Si le soleil est un corps sphérique, les parties de sa surface  $AB, CD, EF$ , fig. 6, vues par un spectateur placé sur la terre en  $T$ , doivent paroître d'autant plus grandes sous des angles égaux  $ATB, CTD, ETF$ , qu'on les observe plus près des bords, et d'autant plus petites, qu'on les voit plus près du centre; d'où il suit que les rayons de lumière envoyés des différens points de la surface apparente, et sous un même angle, doivent partir d'un espace d'autant plus étendu, qu'ils sont plus près de la circonférence: donc les bords du soleil doivent envoyer plus de lumière que le centre.

Bouguer s'est assuré, par des expériences délicates, que la lumière des bords du soleil est moins forte que celle du centre; ce qui ne peut s'expliquer qu'en supposant le soleil environné d'une épaisse atmosphère  $PGIKLM$ , qui est

traversée obliquement par les rayons émanés des bords, lesquels sont plus affoiblis que ceux du centre, parce que, sur les bords, ils sont obligés de traverser une plus grande masse *MLB* de cette atmosphère, que celle qu'ils traverseroient au centre, *CKID*, dans une direction *perpendiculaire*: ainsi ce phénomène indique, avec beaucoup de vraisemblance, qu'il y a une atmosphère solaire.

22. Il suit de ces observations que le soleil est un corps sphérique qui nous envoie des rayons de lumière; qu'il est environné d'une épaisse atmosphère qui en intercepte une partie; qu'il est probable qu'il se forme à sa surface de vives effervescences, enfin que cet astre est situé, à diverses époques, à des distances différentes de la terre.

### §. III.

#### *De la Lune.*

23. La lune est, après le soleil, le corps céleste qui fixe le plus nos regards. Cet astre, qui paroît sous des formes lumineuses variées, supplée en partie, la nuit, lorsqu'il est élevé sur l'horizon, à l'absence du soleil.

24. La lune a toujours la forme d'un cercle; mais ce cercle est diversement éclairé. On ap-

pelle *phases* les différentes apparences sous lesquelles les *planètes* paroissent éclairées. La lune se montre d'abord entièrement obscure A, fig. 7; ensuite on observe un filet de lumière sur le bord occidental en B, qui augmente successivement, comme en C et D, jusqu'à ce qu'elle soit entièrement éclairée, E: alors cette clarté décroît, en commençant par le bord occidental F; et la portion obscure augmente graduellement, jusqu'à ce que cet astre ne présente plus aucune partie éclairée. On donne le nom de nouvelle lune à cet astre, lorsqu'il est obscur A; on dit qu'elle est dans son premier quartier, lorsque sa moitié occidentale est éclairée C, on l'appelle pleine lune quand toute sa surface est éclairée E, et son dernier quartier est celui où sa moitié orientale envoie de la lumière.

25. Comme la partie éclairée de cet astre est toujours celle qui est tournée du côté du soleil, et que la lumière de la lune disparoit lorsqu'un corps comme la terre s'interpose entr'elle et le soleil, il s'ensuit que sa clarté lui vient de la lumière solaire qu'elle réfléchit vers la terre.

En effet, si l'on suppose que la lune prend successivement les positions A, B, C, D, E, F, G, H, fig. 8, autour d'un spectateur placé sur la terre en T, le soleil étant éloigné des deux astres et placé en S.

on voit que , dans toutes ses positions, la lune aura une de ses moitiés éclairée par le soleil , et l'autre dans l'ombre : mais la partie éclairée et la partie obscure étant dans chaque position situées différemment par rapport au spectateur, celui-ci verra des proportions différentes de sa surface éclairées; ainsi, en A, la lune lui paroîtra entièrement obscure *a*; en B, il la verra ayant un commencement de clarté à sa partie occidentale *b*; en C, il apercevra sa moitié occidentale éclairée *c*; en D, elle n'aura plus pour lui qu'une petite portion orientale dans l'obscurité *d*; en E, il la verra entièrement éclairée *e*; en F, une petite partie occidentale sera dans l'obscurité *f*; en G, la moitié orientale sera éclairée *g*; enfin, en H, une petite partie orientale lui paroîtra seule éclairée *h*.

La nouvelle lune a toujours lieu lorsque cet astre se lève et se couche avec le soleil, c'est-à-dire lorsque la lune est placée entre le soleil et la terre. Dans la pleine lune, le soleil se lève lorsque la lune se couche et réciproquement; ainsi la terre est alors entre le soleil et la lune: enfin dans le premier et le dernier quartier, le soleil se lève et se couche lorsque la lune est perpendiculaire au spectateur, et réciproquement.

26. On appelle *éclipse* la privation de lumière qu'un corps éprouve par l'interposition d'un autre corps; il suit de là que la lune L, fig. 9, se trouvant interposée entre le soleil et la terre, elle projette sur cette dernière une ombre ABC,

et l'on sent qu'alors le soleil n'est visible pour aucun des spectateurs placés sur cette surface obscure : là il y a *éclipse totale de soleil* ; mais, sur tout autre point de la terre , entre A et F ou entre C et G , on aperçoit des parties du soleil HI ou KM : il n'y a donc pour les spectateurs placés sur ces divers points , qu'une portion de cet astre d'éclipsée ; et c'est ce qu'on nomme *éclipse partielle de soleil*.

Lorsque la terre T , fig. 10 , est interposée entre la lune L et le soleil S , la lune , qui étoit auparavant éclairée par ses rayons , et que l'on pouvoit apercevoir de l'hémisphère terrestre M NOP , se trouve , par l'interposition de la terre , entièrement privée de la lumière solaire , et il y a *éclipse de lune* : cette éclipse est *totale* , si la lune est toute entière dans le cône d'ombre projeté par la terre ; elle n'est que *partielle* , s'il n'y a qu'une portion de cet astre dans ce cône d'ombre.

27. La grandeur de la lune ou son diamètre apparent varie comme celui du soleil : son plus petit angle est de  $5458''$  , son plus grand de  $6207''$  , et sa grandeur moyenne de  $5825''$  ; d'où il suit que cet astre s'offre , à nous , à des distances différentes.

28. En examinant la lune avec un instru-

ment grossissant, on observe que sa surface est recouverte de points diversement éclairés, et tels qu'on les a représentés fig. 11. Cette surface paroît d'ailleurs convexe; ce qui porte à croire que la forme de cet astre approche de celle de la sphère: cette opinion pourroit encore se déduire de l'observation qu'on a faite de la manière dont sa partie éclairée se termine sur sa partie obscure, cette courbe étant alors une ellipse. Mais on démontre cette sphéricité par la loi de la variation de ses phases, dont la largeur croît, à très-peu près, proportionnellement au sinus verse de la distance angulaire de la lune au soleil. (1)

29. En observant avec attention la courbe extérieure de la portion de la lune éclairée par

(1) Soit ACBD fig. 11 (a) la projection de la lune, SL la direction des rayons solaires; CLD la séparation d'ombre et de lumière, TL la direction du rayon vecteur de la terre à la lune, AB le plan perpendiculaire à cette direction;

Le spectateur placé sur la surface de la terre apercevrait le diamètre entier de la lune AB, si elle étoit entièrement éclairée; mais à cause que la portion ACOD ne reçoit et n'envoie point de lumière, elle ne peut être visible, et le spectateur n'aperçoit que la longueur BF, moindre que BA, de AF. Mais AF = le sinus verse de ALC et  $ALC = TLS$  à cause des perpendiculaires CD et AB: donc la partie visible est proportionnelle au sinus verse de l'angle, à la lune, du soleil et de la terre.

le soleil, on y distingue des espèces de dentelures : la ligne qui sépare, sur la surface de la lune, la partie éclairée de celle qui est obscure, présente également diverses découpures ; ces apparences ont fait soupçonner que cet astre étoit recouvert, comme notre globe, par de très-hautes montagnes, et ces soupçons ont été confirmés par l'observation suivie qu'on a faite des taches éclairées. Après avoir remarqué qu'elles étoient accompagnées d'espaces obscurs placés dans les directions opposées à celles du soleil, on s'est assuré que ces taches changeoient de place autour de celles qui étoient éclairées, de même que le font les ombres portées lorsqu'on change la position du corps éclairant ; l'on a observé aussi que l'intensité de la lumière des taches éclairées varioit. La surface lunaire paroît même offrir des traces d'éruptions volcaniques ; enfin la formation de nouvelles taches et des étincelles observées plusieurs fois dans la partie obscure, semblent y indiquer des volcans en activité.

De la proportion des dentelures observées sur le disque lunaire, des découpures et des points éclairés que l'on voit sur la ligne qui sépare la partie obscure de la portion éclairée, de la longueur des ombres projetées, *Herschel* conclut

que la plus grande hauteur des montagnes de la lune est de 3000 mètres.

30. Les taches principales et le plus grand nombre de celles observées sur la lune dans les différentes phases sont toujours les mêmes, c'est à-dire qu'elles gardent constamment leurs places; ainsi, lorsqu'on les observe bien dans la pleine lune, on voit, immédiatement après la nouvelle, toutes celles qu'on avoit remarquées sur le bord oriental de la pleine lune; et, dans son déclin on revoit toutes celles qu'on avoit observées sur son bord occidental; d'où l'on peut conclure que ces taches conservent leurs positions respectives, telles qu'on les a tracées en A, B, C, D, E, F, G et H, fig. 7.

31. Cependant une observation suivie du disque lunaire fait apercevoir de légers changemens dans ces apparences: les taches que l'on a remarquées s'approchent et s'éloignent alternativement des bords du disque sans quitter leurs positions respectives. Celles de ces taches qui sont très-voisines de la circonférence, disparaissent et reparoissent successivement, en faisant des oscillations périodiques, et cette variation a été désignée sous le nom de *libration de la lune*.

32. Lorsque la lune est nouvelle, ou fort près

de cette phase, la partie de sa surface qui n'est pas éclairée par la lumière solaire a cependant une foible clarté, que l'on nomme *lumière cendrée*, elle n'est due qu'à la lumière que l'hémisphère terrestre éclairé par le soleil réfléchit vers la lune.

33. Quand la lune n'a qu'une petite portion de son disque éclairée, cette portion ABC, fig. 12, semble appartenir à un cercle d'un diamètre plus grand que celui de la partie obscure D EFG: ce phénomène dépend de l'*irradiation* de la lumière qui fait paroître les corps lumineux d'autant plus grands que leur lumière est plus vive.

34. L'observation ayant appris que la terre et le soleil ont une atmosphère, on a été conduit à chercher si la lune en avoit une: mais, quelque soin qu'on ait mis dans les observations qui ont eu cette découverte pour objet, on n'a pu en reconnoître; et l'on est d'autant plus porté à croire que cet astre n'en a pas, que la réfraction que cet atmosphère produiroit, si elle existoit, seroit principalement sensible pendant la durée des éclipses de soleil et les *occultations* des étoiles par la lune (1). Mais les observations

---

(1) En effet, si cet astre L fig. 13 n'avoit pas d'atmosphère il cacheroit, sur un point de la terre T, une étoile placée dans

les plus précises n'ayant donné qu'une différence de 5'' entre le temps que la lune met à parcourir son diamètre et celui de l'occultation d'une étoile par cet astre, tandis que, sur la surface de la terre, l'action de la réfraction causeroit un effet mille fois plus grand, il s'ensuit que si l'atmosphère de la lune existoit, elle seroit d'une rareté plus grande que celle du vide que l'on obtient dans les meilleures machines *pneumatiques*.

Comme les liquides n'existeroient pas sur la surface de la terre sans la pression de l'atmosphère, la non existence d'une atmosphère lunaire annonce que tout est solide à la surface de cet astre, et que les animaux terrestres ne pourroient ni respirer ni vivre sur cette planète.

35. Il suit de ces observations sur la lune que la forme de cet astre est très-rapprochée de celle de

la direction  $PT$ , pendant tout le temps qu'il mettroit à parcourir son diamètre: mais si la lune avoit une atmosphère les rayons  $RT, QT''$ , envoyés par l'étoile, se réfracteroient et arriveroient sur la terre dans une direction  $OB, SC$ ; ainsi, pendant le mouvement de la lune, l'étoile ne seroit interceptée que durant le temps que cet astre mettroit à parcourir la distance  $BC$ , beaucoup moins grande que  $IK$ , et cette différence  $IK-BC$  seroit d'autant plus considérable que la réfraction seroit plus grande.

la sphère ; que la lumière qu'elle réfléchit sur la terre lui vient du soleil ; que ses phases proviennent de ses différentes positions à l'égard du soleil et de la terre , et aussi de celles du soleil à son égard ; qu'elle a une légère libration ; que sa surface est hérissée de montagnes dont les plus hautes peuvent avoir 3000 mètres ; que probablement plusieurs de ces montagnes sont des volcans en activité ; qu'il n'existe point d'atmosphère appréciable autour de cette planète , et que , conséquemment , elle ne doit contenir ni liquides , ni animaux semblables à ceux qui habitent la terre.

#### §. IV.

#### *Des Étoiles.*

36. Lorsque pendant une belle nuit d'été , et dans un instant où la lune n'envoie point de lumière sur l'horizon , on observe le ciel pur et sans nuages , on le voit tapissé d'une multitude de points brillans , auxquels on a donné le nom d'étoiles.

37. Ces corps célestes , observés attentivement et pendant une suite de nuits , paroissent avoir tous des situations constantes les uns par rapport aux autres , et conservent toujours le même ordre , le même arrangement , entr'eux aux yeux de plusieurs spectateurs placés sur divers points de la terre.

Ces étoiles, immuables dans leurs situations respectives se nomment *étoiles fixes*.

38. Pour s'assurer de leur invariabilité de position, on a pris leurs distances apparentes, ainsi que leurs directions, que l'on a apportées sur une portion de sphère dans l'ordre qu'elles ont, ou bien on les a projetées sur un plan.

La sphère sur laquelle on trace la position respective des étoiles dans le ciel se nomme *sphère céleste*. Nous indiquerons, dans la prochaine leçon, les méthodes qu'on a employées pour déterminer la position des étoiles.

39. Comme ces corps célestes présentent au premier aspect un amas confus de points brillans, et qu'il seroit difficile de retrouver leur position, si on n'indiquoit des limites dans lesquelles se trouvent placés ceux qu'on veut reconnoître, on a considéré chaque réunion d'étoiles comme renfermée dans un espace particulier, et circonscrit par un contour déterminé; et, afin de distinguer facilement ces contours les uns des autres, on leur a donné les formes de personnages fameux et d'objets connus, telles que celles d'animaux, de fleuves, d'instrumens d'un usage habituel. Chacune de ces réunions d'étoiles, qui représente par le contour qui les enveloppe une figure, a été nommée *constel-*

*lation* : c'est ainsi que l'on a formé la constellation de la *grande Ourse*, fig. 14, et toutes celles que l'on a tracées sur les projections de la sphère céleste, fig. 15.

40. Parmi les nombreuses constellations que l'on a tracées, on en distingue soixante-dix-sept principales (1).

41. On divise les étoiles fixes en douze classes, en raison de leur éclat ; et on les nomme, en

(1) Trente au nord : la grande Ourse, la petite Ourse, le Dragon, Céphée, le Bouvier, la Couronne boréale, Hercule, la Lyre, le Cygne, Cassiopée, Persée, Andromède, le Triangle, le Cocher, Pégase, le petit Cheval, le Dauphin, la Flèche, l'Aigle, le Serpenteaire, le Serpent, la Chevelure de Bérénice, la Giraffe, le Renard, le petit Lion, la Mouche, le Léopard, le Bouclier, le petit Triangle, Cerbère.

Douze au milieu, qui forment les signes du *zodiaque* dont nous parlerons dans la prochaine leçon, et qui sont : le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, l'Écrevisse, le Lion, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verseau et les Poissons.

Trente-cinq au midi : Antinoüs, la Baleine, l'Éridan, le Lièvre, Orion, le grand Chien, le petit Chien, le Navire Argos, l'Hydre, la Coupe, le Corbeau, le Centaure, le Loup, l'Autel, la Couronne australe, le Poisson austral, le Phénix, la Grue, le Paon, l'Indien, l'Oiseau de Paradis, le Triangle austral, la Mouche, le Caméléon, le Poisson volant, le Toucan, l'Hydre mâle, la Dorade, le grand Nuage, le petit Nuage, la Colombe de Noé, la Licorne, le Rhombe, le Coq, le Sextant.

conséquence, étoiles de première, de seconde grandeur, et ainsi de même jusqu'à la douzième. Celles des six premières classes se distinguent facilement à la vue simple; ce sont les seules que les anciens aient connues: les autres exigent une grande habitude d'observer, ou ne peuvent être aperçues qu'avec des instrumens grossissant. Celles des onzième et douzième grandeurs ne peuvent être distinguées qu'à l'aide de fortes lunettes; aussi les nomme-t-on *étoiles télescopiques*. On désigne les étoiles de chaque classe sur les sphères célestes par le nombre et l'arrangement des points radieux qui les environnent 1, 2, 3, 4, 5, 6, fig. 16.

42. On compte vingt-quatre étoiles de première grandeur; cinq au nord: sept au milieu et douze au sud (1).

---

(1) Les étoiles du nord sont: la chèvre, *Arcturus* du Bouvier, *Altair* de l'Aigle, *Véga* de la Lyre,  $\alpha$  de la Queue du Cygne; les sept du milieu sont: *Aldébaran* du Taureau,  $\alpha$  des Gémeaux, *Régulus* du Lion,  $\beta$  de la Queue du Lion, l'*Epi* de la Vierge, *Antares* du Scorpion, *Fomalhaut* du Verseau; les douze du sud sont: *Rigel* d'Orion,  $\alpha$  de l'Épaule d'Orion, le Cœur de l'Hydre, *Sirius* du grand Chien, *Procion* du petit Chien, *Acanar* de l'Éridan, *Canopus* du Navire Argos,  $\beta$  du Navire Argos, le Pied du Centaure, la Jambe du Centaure, le Pied de la Croix, l'OEil du Paon; les sept dernières ne sont pas visibles sur notre horizon.

43. En continuant avec attention l'observation des étoiles, et comparant leurs positions à celles qu'on avoit tracées sur la sphère, on a remarqué que quelques-unes changeoient de place, parcouroient un certain espace du ciel, et revenoient périodiquement à peu près aux mêmes positions : ce sont ces étoiles errantes qu'on appelle des *planètes*. On en distingue dix, auxquelles on a donné les noms de *Mercury, Venus, Mars, Cérès, Pallas, Junon, Vesta, Jupiter, Saturne et Uranus*. La *Terre* forme la onzième planète. On a donné aux quatre planètes : *Cérès, Pallas, Junon et Vesta* le nom d'*astéroïdes*. Nous ferons connoître séparément les apparences, la forme et la grandeur de chacune de ces planètes.

44. Quelquefois on aperçoit subitement dans le ciel des étoiles accompagnées de nébulosités, qui, en croissant, se terminent souvent en une queue d'une grande étendue, dont la matière est fort rare, puisque l'on aperçoit des étoiles à travers. Ces corps lumineux, d'abord très-petits, augmentent en grandeur et en clarté; ensuite décroissent dans un rapport à peu près semblable, et disparaissent enfin après avoir parcouru un certain espace : ces corps célestes ont été appelés *comètes*.

45. On remarque sur la voûte céleste, qui est d'une couleur bleue plus ou moins foncée, un espace assez considérable, de forme irrégulière, qui entoure le ciel comme une espèce de ceinture, et qui se fait distinguer par une lumière blanche: c'est ce qu'on appelle la *voie lactée*. Lorsqu'on l'observe avec un télescope, on y découvre un si grand nombre de petites étoiles, qu'il est probable que cette voie lumineuse n'est que la réunion de ces étoiles assez rapprochées pour produire une lumière blanche.

46. On observe aussi dans le ciel plusieurs places blanches qui paroissent de même nature que la voie *lactée*: plusieurs d'entr'elles, vues au télescope, offrent également la réunion d'un grand nombre d'étoiles; d'autres ne présentent qu'une lumière blanche et continue, peut-être à cause de la grande distance qui ne permet pas de distinguer les étoiles qui la produisent. Ces places blanches se nomment *nébuleuses* (1).

Herschel divise les étoiles en 8 espèces: 1<sup>o</sup> isolées; 2<sup>o</sup> doubles; 3<sup>o</sup> multiples; 4<sup>o</sup> en amas, la voie lactée; 5<sup>o</sup> groupées; 6<sup>o</sup> pelotonnées; 7<sup>o</sup> nébuleuses; 8<sup>o</sup> auréolées ou nébuleuses étoilées.

---

(1) La fig. 17. représente la nébuleuse d'Orion telle qu'elle a été observée par Méchain, et la fig. 18 offre l'assemblage des étoiles dont on pense que cette nébuleuse est formée.

47. Plusieurs étoiles offrant des variations périodiques dans l'intensité de leur lumière, on les a nommées *changeantes*; quelques autres se montrent tout-à-coup, et disparaissent entièrement, après avoir brillé du plus vif éclat : telle fut la fameuse étoile observée en 1572 dans la constellation de Cassiopée, et qui disparut sans changer de place après seize mois d'apparition.

48. L'intensité plus ou moins grande de lumière de plusieurs étoiles, observée périodiquement, peut être expliquée, dit Laplace, par des taches très-étendues que les étoiles nous présentent périodiquement en tournant sur elles-mêmes à peu-près comme le dernier satellite de Saturne, et par l'interposition de grands corps opaques qui circulent autour d'elles. Quant à la disparition des étoiles qui ont brillé pendant quelque temps d'une lumière vive, on peut l'expliquer par de grands incendies à leurs surfaces, lesquels ont été occasionnés par des causes extraordinaires. « Ce soupçon, dit encore ce savant, peut être confirmé par le changement de leur couleur, analogue à celui que nous offrent sur la terre les corps que nous voyons s'enflammer et s'éteindre. »

49. Il résulte de ces observations que les astres

que l'on aperçoit dans le ciel, peuvent être divisés en quatre classes ; 1°. étoiles fixes, 2°. planètes, 3°. comètes, 4°. nébuleuses ; que les étoiles fixes peuvent changer d'intensité de lumière par des taches très-étendues sur leur surface, ou par l'interposition de grands corps, et qu'il en est qui apparaissent et disparaissent lorsque les incendies qui produisent la lumière vive dont elles brillent viennent à cesser.

## DES PLANÈTES.

### §. V.

#### *De Mercure.*

50. Mercure, observé à la vue simple, est un astre de moyenne grandeur, dont l'éclat est extrêmement variable. On l'aperçoit toujours très-près du soleil ; souvent même ce dernier le cache, ou du moins en est si rapproché, que sa lumière, affaiblie par le vif éclat du soleil, ne peut plus être distinguée.

51. Cette planète, observée au télescope, présente des phases analogues à celles de la lune, et relatives à la position du soleil ; ce qui prouve qu'elle est sphérique, et que c'est de cet astre qu'elle emprunte sa lumière.

52. Le diamètre de mercure éprouve aussi de grandes variations : sa grandeur moyenne est de 21''3.

La grande proximité où cet astre se trouve du soleil nuit beaucoup aux observations, et a empêché jusqu'à présent d'avoir d'autres détails.

53. Ainsi mercure est une planète de forme sphérique; il emprunte sa lumière du soleil, et sa distance à la terre éprouve de grandes variations.

## §. VI.

### *De Vénus.*

54. Vénus est cette étoile brillante qui devance le lever du soleil, ou qui le suit à son coucher: c'est cette planète que les habitans des campagnes désignent sous les noms d'*étoile du berger*, *étoile du matin*, et *étoile du soir*.

55. Vénus accompagne le soleil, et se perd quelquefois dans ses rayons, comme mercure; vue au télescope, elle a des phases A, B, C, D, E, F, G, H, fig. 18(a), et elles sont beaucoup plus sensibles que celles de mercure. Ces phases, qui viennent de sa position à l'égard du soleil, prouvent qu'elle est éclairée par cet astre; et la courbe, qui sépare la portion éclairée de celle qui est obscure, annonce que sa forme est très-voisine de celle de la sphère.

56. De l'observation suivie qu'on a faite sur les variations des cornes de vénus, et des points lumineux que l'on remarque vers les bords de sa partie non éclairée ABCD, fig. 19, Schroeter a conclu qu'il existoit à sa surface de très-hautes montagnes, dont la plus grande élévation pouvoit être portée à 40,000 mètres; et, en observant la loi de dégradation qu'éprouve sa lumière dans le passage de sa partie obscure à celle qui est éclairée, il a jugé que cette

planète est environnée d'une atmosphère étendue, dont la force réfractive est peu différente de celle de l'atmosphère terrestre.

57. Le diamètre apparent de vénus présente de grandes inégalités; ce qui prouve que sa distance à la terre est très- variable. Son plus grand diamètre est de 177", et sa grandeur moyenne de 51" 54.

58. Ces observations annoncent que vénus est à peu près sphérique; que la lumière qu'elle envoie sur la terre lui vient du soleil; que ses phases ressemblent à celles de la lune; que de hautes montagnes s'élèvent à sa surface; qu'elle est environnée d'une atmosphère considérable, et qu'elle se meut à des distances très-variables de la terre.

## §. VII.

### *De Mars.*

59. A la vue simple, cette planète a l'apparence d'une petite étoile rougeâtre qui n'envoie qu'une lumière foible; observée au télescope, c'est un corps dont la forme éprouve quelque variation, lequel de circulaire devient elliptique, et réciproquement, (A, B, C, fig. 20) suivant sa position relativement au soleil; d'où l'on conclut que mars emprunte sa lumière de cet astre, et que sa forme est à peu près sphérique.

60. On remarque quelquefois, sur la surface de cette planète, des taches dont les formes sont très-variées. Les figures A, B, C, (fig. 20) représentent

plusieurs de ces taches observées à différentes époques; mais les observations les plus délicates n'ont pu encore apprendre si elle est environnée d'une atmosphère.

61. La grandeur apparente de mars varie beaucoup; elle est d'environ 30" dans son état moyen, et de 90" dans son maximum: ainsi cette planète se porte à des distances très-différentes de nous.

62. Il résulte de ce que nous venons d'exposer que mars est une planète opaque, à peu près sphérique, éclairée par la lumière qu'elle reçoit du soleil, sur laquelle on aperçoit des taches de diverses formes, qu'elle présente un diamètre très-variables de grandeur en raison de son éloignement, et dont l'atmosphère, si elle existe, n'a pu encore être distinguée.

## §. VIII.

### *Des Astéroïdes.*

63. Les astéroïdes sont au nombre de 4: Cérés; Pallas; Junon; Vesta. La première fut découverte par *Piazzi*, à Palerme le 1 janvier 1801; la seconde par *Olbers*, à Bremen le 28 mars 1802; la troisième par *Harding*, à Lillienthal en août 1804; la quatrième par *Olbers*, à Bremen le 29 mars 1807.

Ces astres sont extrêmement petits. Rarement ils sont visibles à la vue simple, mais la différence que leur clarté et leur grosseur présentent les assimile en tout aux autres planètes, d'où l'on conclut qu'elles ont une forme à peu près sphérique; que la lumière

qu'elles nous envoient leur vient du soleil et que leur distance à la terre varie.

## §. IX.

### *De Jupiter.*

64. Cette planète se présente sous l'apparence d'une étoile de la première grandeur, dont le vif éclat surpasse quelquefois celui de *Vénus*.

65. Au moyen d'un bon télescope, on remarque à la surface de jupiter plusieurs bandes obscures sensiblement parallèles entr'elles, fig. 21; on y observe aussi d'autres taches, dont quelques-unes, par leurs variations et les différences sensibles qu'on remarque dans la durée de leurs mouvemens, donnent lieu de croire que ces taches ne sont point adhérentes à la surface de la planète; et peuvent être considérées comme autant de nuages que les vents transportent avec des vitesses différentes dans une atmosphère agitée.

66. La forme apparente de jupiter est celle d'une ellipse, dont le rapport des deux axes, déterminé par des méthodes précises, est, à très-peu près, comme 13 est à 14. Son plus grand diamètre est de 149'', et sa grandeur moyenne de 120''; ainsi cette planète se meut à différentes distances de la terre.

67. On observe autour de jupiter quatre petits corps qui l'accompagnent sans cesse, A, B, C, D, fig. 22, et que l'on appelle en conséquence des *satellites*: on les désigne par premier A, second B,

troisième C, et quatrième D, cela en raison de leur proximité de la planète; et, comme on remarque toujours que les satellites disparaissent du côté du disque de jupiter J, opposé au soleil S; et par conséquent du même côté que le cône d'ombre que la planète projette sur A et B; comme on voit même quelquefois ces satellites passer sur le disque éclairé de jupiter et y projeter des ombres, on a conclu que cette planète et ses satellites sont des corps opaques éclairés par le soleil, et qu'en s'interposant entre cet astre et jupiter, les satellites forment sur ce dernier de véritables éclipses de soleil, semblables à celles que la lune produit sur la terre; de même lorsqu'ils passent dans le cône d'ombre projeté par jupiter, il y a des éclipses de satellites semblables à celles de lune.

68. On n'a pu mesurer exactement la grosseur des satellites de jupiter, parce que leur diamètre est insensible: on a essayé de l'apprécier par le temps qu'ils emploient à traverser l'ombre de la planète, mais les observations qu'on a faites offrent de grandes différences produites par la variété de la force des lunettes et la vue des observateurs, dans l'état de l'atmosphère, dans la hauteur des satellites au-dessus de l'horizon, leurs distances apparentes de la planète et la diversité des hémisphères qu'ils nous présentent.

69. Ces satellites brillent d'une lumière plus ou moins vive, suivant leurs positions: ces passages périodiques d'une clarté vive à une faible lumière que l'on observe à l'égard de chaque satellite ont

porté à conclure que ces corps célestes nous présentent, en divers temps, des faces différentes; et, comme les projections de chacune de leurs faces sont circulaires, on a pensé que leur forme approche de celle de la sphère.

70. Il suit de ce qui précède que jupiter est une planète de forme ellipsoïdale, dont le rapport des diamètres est :: 14 : 13; que sa lumière lui vient du soleil; qu'il est environné de quatre satellites à peu près sphériques, lesquels sont éclairés par la lumière du soleil et celle que réfléchit leur planète; que ces satellites s'éclipsent toutes les fois qu'ils passent dans le cône d'ombre projeté dans le prolongement du *rayon vecteur* mené du centre du soleil à celui de jupiter; qu'enfin cette planète se meut à diverses distances de nous.

## §. X.

### *De Saturne.*

71. Saturne a l'apparence d'une étoile dont la lumière a peu d'intensité, et dont la couleur est plombée.

72. Vue au télescope, cette planète présente un phénomène unique dans le système du monde: on la voit presque toujours au milieu de deux petits corps dont la grandeur et la figure sont très variables (fig. 23, 24 et 25), et qui semblent adhérer à sa surface; quelquefois ils disparaissent, alors sa forme est ovale, fig. 26, et son petit diamètre a un onzième de moins que l'autre.

73. En observant avec soin ces singulières apparences, Huygens a reconnu qu'elles sont produites par un anneau mince et large, qui environne la planète, et en est séparé de toutes parts : il se présente ordinairement sous la forme d'une ellipse dont la largeur, lorsqu'elle est la plus grande, est à peu près la moitié de sa longueur, et dont le petit axe, dans cette position, déborde le disque de la planète. Quelquefois l'ellipse se rétrécit au point de n'offrir qu'une seule ligne, fig. 27 ; quelquefois même elle disparaît entièrement, fig. 26, mais son ombre, projetée sur le disque de saturne, y forme une bande obscure que l'on distingue avec de fortes lunettes, et qui prouve que cette planète et son anneau sont des corps opaques éclairés par le soleil.

74. En représentant par la fig. 28 diverses positions de saturne, A, B, C, D, relativement au soleil S, et à la terre T, on conçoit que l'anneau doit disparaître pour nous lorsque la ligne menée de l'œil du spectateur T au centre de la planète C se trouve dans le plan de l'anneau ; il n'est pas apparent non plus lorsque ce plan est dans la direction du rayon vecteur du soleil SA ; enfin il ne peut l'être ni dans la position B, ni dans toute autre entre C et A, attendu que dans toutes ces situations, le plan de l'anneau coupe l'angle que forme la ligne menée de l'œil du spectateur, placé en T, et le rayon vecteur du soleil S, et qu'alors il n'a d'éclairé que la face opposée à celle qu'il nous présente, tandis que, dans toutes les positions autres que celles-ci, la lumière frappe

pant le côté que l'anneau nous le présente, comme en *D*, et elle est réfléchiée en assez grande quantité pour le faire distinguer.

75. Quoique l'anneau ne réfléchisse, par son épaisseur, qu'une trop petite quantité de lumière pour qu'elle soit sensible, on peut cependant l'apercevoir en augmentant la force des télescopes; c'est pourquoi, pendant la dernière disparition, cet anneau n'a cessé d'être vu par Herschel.

76. La largeur apparente de cet anneau est à peu près égale à sa distance de la surface de saturne : l'une et l'autre paroissent être égales au tiers du diamètre de cette planète; mais le diamètre de saturne doit nous paroître plus grand qu'il n'est en effet, à cause de l'irradiation de sa lumière.

77. La surface de l'anneau de saturne n'est point continue, une bande obscure, qui lui est concentrique, la sépare en deux parties, et paroît former deux anneaux distincts. Plusieurs bandes noires, aperçues par quelques observateurs, semblent même indiquer un plus grand nombre d'anneaux.

78. Herschel a remarqué sur la surface de cette planète cinq bandes parallèles à son grand diamètre, ainsi qu'on les a indiquées sur les fig. 23, 24 et 25.

79. Le diamètre apparent de saturne varie; ce qui prouve qu'il s'approche et s'éloigne de la terre: son diamètre moyen est de 54'' 4.

80. On a observé sept satellites autour de saturne, fig. 29. Lorsque le septième est à l'orient de cette planète, sa lumière s'affoiblit à un tel point, qu'il

devient très-difficile à distinguer ; ce qui ne peut venir que des taches qui couvrent l'hémisphère qu'il nous présente alors.

81. Il résulte de ces observations que saturne est une planète de forme ellipsoïdale, dont le rapport des deux diamètres est :: 10 : 11 ; que la lumière qu'elle nous envoie lui vient du soleil, lequel éclaire aussi l'anneau et les satellites qui l'environnent ; que cet anneau qui paroît, soit sous la forme d'une ellipse, soit sous celle d'une ligne, en raison des positions de saturne, de la terre et du soleil, cesse même d'être aperçu avec des télescopes ordinaires dans certaines de ces positions ; que, lorsqu'il est très-apparent, il semble être divisé en plusieurs bandes ou anneaux distincts, et qu'enfin le diamètre variable de cette planète annonce que sa distance à la terre varie en différens temps.

## §. XI.

### *D'Uranus.*

82. Cette étoile, invisible à la vue simple, ne peut être aperçue qu'avec des télescopes ; aussi avoit-elle échappé, par sa petitesse, aux anciens observateurs. Flamsted, à la fin du dix-septième siècle, Mayer et Lemonnier, dans le dernier, l'avoient déjà observée comme une petite étoile ; mais ce n'est qu'en 1781 que Herschel s'assura que c'est une planète.

83. Le diamètre apparent d'uranus est très-petit, et paroît être à peine de 12''.

84. Herschel, au moyen d'un fort télescope, a re-

connu six satellites en mouvement autour de cette planète, fig. 30.

85. Du petit nombre d'observations qu'on a faites jusqu'à ce jour sur uranus, on peut conclure que cette planète, qui n'envoie que la lumière qu'elle reçoit du soleil, est environnée de satellites ; que sa distance à la terre varie, et qu'à juger de cette distance par la lenteur de son mouvement, elle doit être aux confins du système planétaire.

## §. XII.

### *Des Comètes.*

86. Les comètes se présentent souvent à la vue sous l'apparence d'étoiles accompagnées de nébulosités, qui, en croissant, prennent la forme de queues d'une grande étendue, et dont la substance paroît être extrêmement rare, puisqu'on distingue les étoiles à travers.

87. Lorsqu'on les observe avec un bon télescope, les comètes paroissent avoir, comme les planètes, une forme sphérique, dont le diamètre, qui est différent pour chacune, croît depuis le moment où on les découvre jusqu'à celui où, parvenues à leur *maximum* de grandeur, elles commencent à décroître graduellement, et finissent par ne pouvoir plus être

distinguées avec les meilleurs instrumens (1).

90. Souvent les comètes ont leur disque entier éclairé; d'autres fois elles n'ont d'éclairée que la partie du disque qui regarde le soleil : telle étoit celle qu'on aperçut en 1744. Cette observation prouve que ce sont de grands corps opaques qui empruntent leur lumière de cet astre.

91. Les queues des comètes ont des formes très-variées A, B, C, D, E, fig. 33. Ces longues traînées de lumière ont ordinairement une direction opposée à la situation du soleil par rapport à la comète, ainsi qu'on l'a représentée, fig. 34, où le soleil est supposé en S, et la terre en T.

92. Il suit de ce que nous venons d'exposer que les comètes sont de grands corps opaques toujours environnés de nébulosités, qui souvent se terminent en queues; que ces corps reçoivent du soleil la lumière qu'ils réfléchissent vers nous; qu'ils s'approchent quelquefois fort près de la terre, et

(1) 88. Les neuf figures sous le n° 31 représentent la comète de 1661 telle qu'elle a été vue depuis le 2 février, au moment où l'on a commencé à la distinguer, jusqu'au 2 mars, où elle avoit atteint son maximum de grosseur.

89. La fig. 32 représente la marche de la comète de 1784 dans le ciel, telle qu'elle a été observée à Paris.

s'en éloignent ensuite à des distances telles, qu'ils ne sont plus aperçus; qu'enfin la longue traînée lumineuse qui les accompagne se dirige du côté opposé au soleil.

## II<sup>me</sup>. LEÇON.

### DU MOUVEMENT DES ASTRES.

*Ce mouvement sera divisé en deux parties, la première traitera des mouvemens apparens, la seconde des mouvemens réels.*

#### DES MOUVEMENS APPARENS,

#### §. XIII.

#### *Du mouvement du Ciel.*

93. **L**orsqu'on est placé la nuit sur un lieu où l'horizon est vaste et à découvert, et qu'on examine avec quelque attention un ciel sans nuages, le spectacle qu'il offre varie à chaque instant : des étoiles s'élèvent, d'autres s'abaissent sur l'horizon; quelques-unes paroissent vers l'orient, lorsque d'autres disparaissent vers l'occident, et qu'un grand nombre ne cessent pas d'être visibles. Dans ce mouvement général des étoiles, qui semble être celui de la voûte céleste, presque

toutes conservent, ainsi que nous l'avons déjà observé (§. 37), leurs positions respectives, et décrivent seulement des cercles de divers diamètres.

94. Dans la partie du ciel, couverte d'étoiles, que l'on observe sur notre horizon H h, fig. 35, il est un point B qui paroît n'avoir aucun mouvement; l'étoile la plus proche de ce point se nomme *étoile polaire*. Les habitans du cap de Bonne-Espérance, ceux de la Nouvelle-Hollande et de l'Amérique méridionale, observent également sur leur horizon un point près duquel est une étoile immobile A, appelée de même étoile polaire. Si l'on suppose une droite AB menée de l'un à l'autre de ces points, cette ligne, qui passe par le centre de la terre T, est l'axe du monde, autour duquel tournent toutes les étoiles. Les points du ciel que cet axe touche s'appellent *pôles*; celui qui est situé en B se nomme *pôle boréal* ou *septentrional*; le pôle A se nomme *austral* ou *méridional*; et toutes les étoiles paroissent décrire des cercles plus ou moins grands à raison de l'éloignement où elles sont de cette ligne droite qui se termine aux deux pôles.

95. Quoique l'on n'aperçoive les étoiles à la vue simple que la nuit, on peut cependant

les observer avec un bon télescope, même au moment où le soleil est le plus élevé sur l'horizon, et l'on suit alors leur marche avec autant de facilité que pendant une belle nuit.

96. La durée de l'apparition de chaque étoile dépend, pour chaque spectateur, de sa position sur la surface de la terre; celui qui est placé en  $P$  ou  $p$ , ayant, l'un l'étoile polaire  $B$ , l'autre l'étoile polaire  $A$ , perpendiculairement au-dessus de leurs têtes, aperçoivent toujours les mêmes étoiles qui tournent autour d'eux; mais les spectateurs qui sont dans la position  $E$  ou  $e$ , apercevant à la fois les deux pôles  $A$  et  $B$ , ne voient décrire à chaque étoile qu'une demi-circonférence; ainsi les spectateurs placés dans la première position ne peuvent jamais voir que les étoiles que l'on remarque dans la moitié de la voûte céleste, tandis que ceux qui sont dans la seconde situation les aperçoivent toutes les unes après les autres; et quant aux observateurs placés entre  $E/P$ ,  $E/p$ ,  $eP$ ,  $ep$ , ils découvrent successivement un nombre d'étoiles d'autant plus grand, qu'ils sont plus rapprochés des points  $E'$  ou  $e$ , et ils en voient d'autant moins qu'ils sont plus voisins de  $P$  et  $p$ : seulement, dans cette dernière position, leur proximité de  $P$  et  $p$ , leur en fait découvrir une plus grande

quantité qui décrivent des cercles entiers.

97. On appelle *mouvement diurne* celui qui se fait autour de la terre dans la durée d'un jour. On nomme mouvement *sidéral* celui des étoiles; la durée du mouvement diurne des étoiles est le jour sidéral, qui est de  $0^{\text{jour}} 99727''$ , conséquemment le jour sidéral est de  $273''$  plus court que le *jour moyen*.

98. Si l'on suppose dans le ciel un grand cercle  $EQR/TeFGe$ , qui, partageant le globe terrestre en deux, passe par le centre de la terre et soit perpendiculaire à l'axe du monde  $AB$ , ce cercle se nomme *équateur*: le point du ciel perpendiculaire à un spectateur placé sur quelque point de la surface de la terre que ce soit, et que nous supposerons maintenant arrêté au point  $O$  se nomme *zénith*  $Z$ ; le point qui lui est opposé  $N$  s'appelle *nadir*; le grand cercle  $HTh$ , qui ceint la terre en la divisant en deux parties égales, et qui est toujours, pour chaque spectateur, perpendiculaire à la verticale qui va de son zénith à son nadir, supposé ici en  $zTN$ , se nomme l'*horizon*, laquelle est toujours parallèle au plan que forme l'eau stagnante dans le lieu qu'occupe l'observateur.

Si l'on conçoit une suite de grands cercles  $AEBE$ ,  $AQBG$ ,  $ARBF$  etc., ayant pour

diamètre l'axe du monde  $AB$ , ces cercles se nomment *méridiens*: tel est celui indiqué par les lettres  $AEB$ , qui passe par le zénith et le nadir  $ZN$ , et partage en deux parties égales les arcs que chaque étoile paroît décrire sur l'horizon.

Les cercles  $Mm$  parallèles à l'équateur, et que les étoiles semblent décrire dans le ciel, se nomment *parallèles*.

99. Les cercles méridiens et parallèles, étant perpendiculaires entre eux, servent à déterminer la position de tous les corps célestes. On appelle *ascension droite*, l'angle que fait un méridien avec un autre, ou la distance angulaire qu'il y a entre deux méridiens; et *déclinaison*, la distance d'un parallèle à l'équateur.

100. Les étoiles fixes ayant des positions constantes, on détermine cette position en indiquant leur ascension droite avec un méridien, et leur déclinaison. Le méridien que l'on prend ordinairement pour point de départ est celui qui passe par l'*équinoxe* de printemps, ou celui qui sépare la constellation des poissons de celle du bélier (1).

---

(1) Pour avoir l'ascension droite d'une étoile, on remarque l'heure du passage du premier méridien au zénith de l'obser-

101. Il suit des observations faites sur le mouvement des étoiles, qu'elles ont, autour de deux points fixes, un mouvement journalier ou diurne; qu'elles décrivent par ce mouvement des cercles plus ou moins grands, en raison de la distance où elles sont de l'axe de rotation; que le mouvement diurne des étoiles est de  $0^{\text{jour}} 99727''$ ; que par le moyen des cercles appelés méridiens et parallèles, qui sont perpendiculaires entr'eux, on peut connoître l'ascension droite et la déclinaison des astres et conséquemment déterminer leur position dans le ciel.

#### §. XIV.

##### *Des mouvemens du Soleil.*

102. Lorsqu'on observe cet astre avec attention, on voit qu'il a trois mouvemens particuliers, l'un diurne autour de la terre, l'autre an-

vateur, et celle du passage, au même zénith, du méridien dans lequel se trouve l'étoile; le temps écoulé entre les passages des deux méridiens au zénith donne leur distance angulaire; car l'intervalle qu'il y a entre deux passages successifs d'un même méridien à un zénith, est à l'intervalle qui s'écoule entre le passage de deux méridiens, comme la circonférence du cercle est à l'arc qui sépare les deux méridiens.

Pour avoir la déclinaison d'une étoile, tout se réduit à prendre sa distance angulaire avec une des étoiles polaires; la différence qu'il y a entre cent degrés (distances des pôles à l'équateur) et l'angle obtenu, est la distance de l'étoile à l'équateur, ou sa déclinaison.

nuel par rapport aux étoiles, le troisième de rotation sur son axe. Nous allons examiner séparément ces trois mouvemens, ainsi que les phénomènes qu'ils produisent sur la surface de la terre.

### §. XV.

#### *Du mouvement diurne du Soleil.*

103. Chaque jour on voit le soleil se lever sur un point de l'horizon pour se coucher sur un autre. Ce phénomène observé sur tous les points de la surface terrestre ne peut être que la suite d'un mouvement apparent et journalier de cet astre S, fig. 36, autour de la terre *ABDP*; en effet, comme la terre ne reçoit de lumière que celle que le soleil lui envoie, la moitié seulement de sa surface *BAP*, au-dessus de laquelle cet astre est placé, est éclairée, tandis que l'autre moitié *BDP* est dans l'obscurité. La présence ou l'absence du soleil sur chaque horizon terrestre produit le jour ou la nuit.

104. Le mouvement diurne du soleil paroît être d'orient en occident: sa durée est l'intervalle qui s'écoule entre deux passages successifs de cet astre sous le méridien situé au zénith de l'observateur; cet intervalle, ou cette durée *journa-*

*lière*, est aussi appelé *jour astronomique*. Les jours astronomiques ne sont pas égaux. Près du solstice d'été, ils sont plus courts, et sont plus longs près du solstice d'hiver. Si l'on prend pour unité le jour moyen, le jour sidéral =  $0^{\text{jour}} 997^{\text{''}}$ . On verra à la fin de cette leçon comment on détermine le jour moyen.

### §. XVI.

#### *Du mouvement annuel du Soleil.*

105. Si l'on compare jour par jour les positions du soleil dans le ciel, on observera qu'elles changent continuellement par rapport aux étoiles; ainsi l'on remarque, par exemple, que celles qui sont situées sur la route du soleil  $s$ , fig. 36, et qui se couchent un peu après lui en  $E$ , se perdent quelques jours après dans sa lumière, puis se couchent en même temps que lui; quelques jours plus tard, le devançant dans son coucher, et paroissent le matin avant son lever en  $E'$ . On remarque encore que les étoiles en  $e$ , qui passent en même temps que le soleil  $S$ , dans le méridien situé au zénith de l'observateur, paroissent le lendemain avant lui au même méridien en  $e'$ , et avancent chaque jour moyen de  $10^{\circ} 09' 20''$ , d'où il suit que le mouvement du soleil étant plus

lent que celui des étoiles, ou retardant chaque jour sur leur mouvement apparent, cet astre semble se mouvoir, par rapport à elles, d'occident en orient, c'est-à-dire dans une direction opposée à celle de son mouvement par rapport à la terre. Par le mouvement du soleil, observé comparativement à celui des étoiles, cet astre met 365 jours 25634'' à revenir au même point du ciel, et cette durée forme l'année sidérale.

106. Le mouvement diurne du soleil paroît se faire sur l'équateur, ou du moins dans un plan qui lui est parallèle; mais en suivant attentivement son mouvement annuel, on voit qu'en partant de l'équateur, il va toujours en s'en écartant pendant trois mois; qu'ensuite il s'en approche pendant trois autres mois, pour s'en écarter dans un sens opposé durant un même intervalle et s'en rapprocher encore pendant une égale durée de temps. En observant jour par jour les points du ciel où correspondent les différentes positions du soleil vu de la terre, on remarque que ces points forment un grand cercle  $ACDSBF$ , fig. 57, appelé *écliptique*, et que le plan passant par tous les points de ce cercle, coupe celui de l'équateur  $AGHJ BK$ , suivant une droite  $AB$ , qui passe par le centre de la terre  $T$ : ces deux plans sont inclinés l'un sur

l'autre, et leur inclinaison, qui éprouve tous les ans quelque variation, étoit au commencement de l'année 1801 de  $26^{\circ}, 07315''$ .

107. C'est de la combinaison du mouvement diurne du soleil, parallèle à l'équateur, et de son mouvement annuel sur l'écliptique, que résulte la différence des saisons.

108. L'axe du monde rencontrant la terre, fig. 38, en deux points A et B, appelés *pôles terrestres*, on a nommé *pôle arctique* celui qui est du côté du pôle boréal, et *pôle antarctique* celui qui est du côté du pôle austral.

109. Le plan de l'équateur coupant la terre en deux parties à peu-près égales ou hémisphères E B e, E A e, la courbe d'intersection E F e se nomme *équateur terrestre*. La portion du globe E B e est l'*hémisphère boréal ou septentrional*, et la portion opposée E A e est l'*hémisphère austral ou méridional*.

110. Le plan de l'écliptique coupant de même la terre en deux parties G B g, G A g, à peu-près égales, la courbe d'intersection G F g, sur la surface de la terre se nomme *écliptique terrestre*.

111. Lorsque le soleil est sur l'écliptique en SD, fig. 39, sa direction ST, faisant le plus grand angle possible avec l'équateur EF, une moitié de la sphère L E p B N, séparée par le

grand cercle  $LTmN$  perpendiculaire à la direction du soleil, est éclairée, tandis que l'autre moitié est dans l'obscurité: le mouvement diurne de cet astre étant parallèle à l'équateur  $ETF$ , les rapports entre la durée du jour et de la nuit sont exprimés sur chaque point de la terre par les intersections des parallèles tracés sur sa surface avec la ligne  $LTmN$ ; ainsi, sur la parallèle  $p q$ , la durée du jour est à celle de la nuit ::  $pm : mq$ , et sur la parallèle  $No$ , entièrement éclairée par le soleil, de même que sur le segment  $NBo$  il n'existe point de nuit.

Si, dans cette situation, on compare la durée du jour sur chaque hémisphère  $EBF$ ,  $FAE$ , on voit qu'elle est plus grande sur l'hémisphère boréal que sur les parties correspondantes de l'hémisphère austral, et qu'elle est aussi d'autant plus grande sur les deux hémisphères qu'en s'éloignant plus de l'équateur on s'approche davantage des pôles; on voit enfin que le segment  $LAR$  de l'hémisphère austral est entièrement dans l'obscurité, et que sur chaque point correspondant des deux hémisphères, la durée des jours et des nuits d'un côté, est en raison inverse de celle qui a lieu de l'autre.

112. En changeant successivement de position sur l'écliptique, par son mouvement d'oc-

cident en orient, le soleil arrive sur l'intersection de l'équateur et de l'écliptique, alors la direction du soleil étant dans le plan de l'équateur  $\Sigma E' \Phi$ , fig. 40, la ligne  $l\beta$  de séparation de l'ombre et de la lumière, est un méridien qui coupe tous les parallèles en deux parties égales; à cette époque les jours et les nuits sont égaux sur toute la surface de la terre, et chacun des hémisphères  $E' \Pi l \Phi$ ,  $\Phi \Delta \beta E'$  est également éclairé.

113. En continuant sa route dans la même direction, le soleil qui s'éloigne de plus en plus de l'équateur en s'avancant vers le pôle austral, se trouve enfin dans la direction  $s p t d$ , fig. 41, qui forme le plus grand angle avec l'équateur. Pendant la marche de cet astre, la durée des jours va en augmentant sur l'hémisphère austral, et en diminuant sur l'hémisphère boréal, jusqu'à ce que cette durée ait atteint son *maximum* d'un côté, et son *minimum* de l'autre; alors le soleil se rapproche de nouveau de l'équateur pour rétablir l'égalité dans la longueur des jours et des nuits.

114. Lorsque le soleil se trouve sur l'intersection de l'équateur et de l'écliptique, les jours sont égaux aux nuits sur toute la surface de la terre; de là le nom d'*équinoxe* donné à cette position, et la dénomination de *jours équi-*

*noxiaux*, donnée à ces jours égaux sur les deux hémisphères. Comme dans son mouvement sur l'écliptique, le soleil rencontre l'équateur aux deux points d'intersection A et B, fig. 37, il s'ensuit qu'il existe deux équinoxes, que l'on a distingués en équinoxe de printemps et équinoxe d'automne.

115. Le soleil, en s'éloignant de ces points d'intersection, et conséquemment de l'équateur, arrive, au bout d'environ trois mois, aux points S ou F, qui en sont les plus éloignés: dans ce mouvement, la durée de la nuit a été en augmentant d'un côté et en diminuant de l'autre; et la différence en plus ou en moins de deux nuits successives est d'autant moins grande, que le soleil est plus voisin de sa plus grande distance de l'équateur; et comme, lorsqu'il est près de ce maximum d'éloignement, la différence dans la longueur des nuits paroît insensible, et que le soleil semble être alors stationnaire par rapport à cette distance, de laquelle dépend la durée du jour, on a nommé *solstice*, la position de cet astre près de son maximum d'éloignement de l'équateur, ou à ce maximum même; et points *solsticiaux*, ceux où l'on jouit de cette presque égalité dans la durée successive des nuits: ainsi il y a deux solstices, l'un, lorsque

le soleil est le plus éloigné de l'équateur sur l'hémisphère boréal; l'autre lorsqu'il est arrivé au même point vers l'hémisphère austral.

116. Les cercles que le soleil décrit pendant les deux solstices à son maximum d'éloignement de l'équateur, s'appellent *tropiques*; l'un a été nommé *tropique du cancer*, l'autre *tropique du capricorne*: ces dénominations ont été données fort anciennement, parce qu'alors les solstices avoient lieu au moment où le soleil se trouvoit dans l'une ou l'autre de ces constellations. Aujourd'hui, les points solsticiaux se trouvent placés dans les constellations des gémeaux et du sagittaire, et ces points s'éloignent continuellement du cancer et du capricorne.

117. On a donné également le nom de *tropiques* aux points de la surface terrestre qui correspondent aux cercles que le soleil décrit dans le ciel à chacun des solstices. Les *tropiques terrestres* forment deux cercles, dont chacun est éloigné de  $26^{\circ} 07' 315''$  de l'équateur terrestre. On leur a également conservé les anciennes dénominations des constellations par lesquelles passaient autrefois les cercles que décrivait le soleil: le *tropique du cancer* est sur l'hémisphère boréal, et celui du *capricorne* sur l'hémisphère austral.

118. Pendant que le soleil est aux solstices, on observe sur la surface de la terre deux espaces ou zones, situés aux pôles, dont l'un est entièrement obscur, et l'autre entièrement éclairé : les cercles qui terminent ces zones sont appelés polaires : celui qui est au-dessous du pôle boréal se nomme *cercle polaire arctique*, et celui qui est au dessous du pôle opposé, *cercle polaire antarctique*.

119. Ainsi, la terre se trouve divisée, par les deux cercles polaires et les deux tropiques, tous parallèles, en cinq parties appelées zones ou *climats*. Les deux des extrémités portent le nom de zones glaciales, parce qu'elles sont en effet les plus froides de la terre ; celle du milieu se nomme *zone torride*, parce que le soleil étant successivement perpendiculaire sur tous ces points, elle est très-échauffée, et les deux autres sont les *zones tempérées*.

120. C'est, comme on sait, à l'action du soleil sur la surface de la terre que sont dues les variations de températures que nous éprouvons : l'effet dû à cette action peut varier, soit par les diverses distances où le soleil se trouve de la terre, soit par la continuité même de son action sur la même surface.

La distance du soleil à la terre ne paroît pro-

duire aucun des grands effets de températures que l'on y éprouve; car, quelle que soit cette distance, il est toujours l'été sur un hémisphère lorsqu'il est l'hiver sur l'autre : c'est donc à sa présence plus ou moins prolongée sur une même surface, qu'il faut attribuer la différence des saisons (1).

---

(1) En effet, lorsque le soleil est aux équinoxes, et qu'il éclaire également l'un et l'autre hémisphère, la température sur chacun est moyenne, et l'on a le printemps ou l'automne; ensuite, lorsqu'il avance sur l'un des hémisphères, celui-ci s'échauffe et l'autre se refroidit, et cela, en raison de ce que sa présence est plus long-temps continuée sur le premier, et de plus courte durée sur l'autre. C'est ainsi qu'une observation habituelle nous apprend que la température de chaque jour n'atteint son maximum qu'après midi, c'est-à-dire, qu'après la plus grande hauteur du soleil sur l'horizon; de même on n'éprouve le maximum de température sur chaque hémisphère, qu'après la plus grande hauteur solsticielle du soleil : l'on a en effet l'été sur l'hémisphère austral, et l'hiver sur l'hémisphère boréal, lorsque le soleil, après avoir atteint sa plus grande élévation sur le pôle austral, revient vers l'équateur; de même l'été pour ce dernier hémisphère et l'hiver pour l'autre arrivent à l'époque où le soleil, après avoir atteint sa plus grande élévation vers le pôle boréal, revient vers l'équateur : ainsi l'on éprouve les plus grandes chaleurs sur un hémisphère et les plus grands froids sur l'autre, tandis que le soleil parcourt l'espace situé entre le solstice et l'équinoxe. On a de même, sur chaque hémisphère, le printemps et l'automne, lorsque cet astre parcourt l'espace qu'il y a entre l'équinoxe et le solstice.

Sur l'hémisphère boréal que nous habitons, l'on a le prin-

121. On a remarqué que le soleil met des temps inégaux à parcourir l'espace compris entre les équinoxes et les solstices, et qu'il emploie sept jours de plus à aller de l'équinoxe de printemps à celui d'automne, que de ce dernier à l'autre.

122. On a encore remarqué que la vitesse journalière de cet astre est inégale, et que cette vitesse est la plus grande, lorsqu'il est vers le solstice austral, et la plus petite, quand il est vers le solstice boréal(1).

123. Les astres se mouvant dans des courbes particulières appelées *orbes*, on peut déterminer la nature de celle que forme le soleil dans

temps pendant que le soleil se transporte de l'équinoxe de printemps au solstice boréal, et pendant le même temps on a l'automne sur l'hémisphère austral. On a l'été sur l'hémisphère boréal et l'hiver sur l'autre, lorsque cet astre se porte du solstice boréal à l'équinoxe d'automne. On a l'automne sur ce même hémisphère boréal et le printemps sur l'austral, lorsqu'il va de l'équinoxe d'automne au solstice austral. Enfin, on éprouve l'hiver sur l'hémisphère boréal et l'été sur l'hémisphère opposé, tandis qu'il vient du solstice austral à l'équinoxe du printemps.

(1) Le mouvement des astres se mesurant par l'angle qu'ils parcourent dans des temps égaux, l'observation a appris que l'angle que le soleil décrit dans un jour, lorsqu'il est au solstice austral, est de  $1^{\circ} 13'27''$ , tandis que celui qu'il décrit dans le même temps, quand il est au solstice boréal, n'est que de  $1^{\circ} 05'31''$ .

son mouvement apparent d'occident en orient, en prenant jour par jour la direction du rayon vecteur de la terre à cet astre, et rapportant sur chacune de ces directions TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG, TH, etc. fig. 42, la distance du soleil à la terre. La courbe qui passera par les points ABCDEFGHIKLM sera celle que le soleil paroît parcourir dans le ciel; ainsi la détermination de l'orbe solaire dépend de deux sortes d'observations: 1<sup>o</sup> de la direction du *rayon vecteur* à cet astre; 2<sup>o</sup> de sa distance à la terre, prise sur chaque direction. Cette direction du rayon vecteur se détermine par la situation d'une étoile qui se trouve dans la direction de ce rayon que l'on prolonge, et la distance de l'astre se prend par la *parallaxe*.

124. La *parallaxe d'un astre*, ou sa transposition dans un autre point du ciel, est la différence de position à laquelle deux spectateurs, dont l'un seroit placé au centre de la terre et l'autre sur la surface, rapporteroit l'astre dans le ciel. C'est l'angle T'SC fig. 43, formé par le rayon T'S mené du centre de la terre au centre de l'astre et le rayon CS mené du point de la surface de la terre où est le spectateur au même centre S.

Lorsque le spectateur voit l'astre à l'horizon comme en A, la parallaxe TSA, est dite *horizon-*

*zale* : lorsqu'il la voit dans toute autre position comme en C, on la nomme parallaxe de hauteur (1).

La parallaxe de hauteur est égale au produit de la parallaxe horizontale par le sinus de la distance au zénith, et la parallaxe horizontale est égal au quotient de la parallaxe de hauteur par le sinus de la distance au zénith (2).

Ayant la hauteur d'un astre vue de la surface de la terre, on peut en conclure la hauteur vue

(1) Pour prendre la parallaxe de hauteur : soient deux observateurs O. O' fig. 43 (bis) prenant les angles OAH, O'A H' de l'astre A avec les horizons H et H'.

Dans le quadrilatère AOCO', on connoît le triangle OCO' puisque la position du spectateur est donnée de la OO'. On connoît AOO' et AO'O, car AOC = AOH + HOC et HOC est droit ; AOO' = AOC - COO' de même AO'O = AO'C - CO'O, ainsi, dans le triangle ACO' on connoît le côté OO' et les deux angles sur ce côté; de la AO ou AO'; dans les triangles AOC et AO'C on connoît deux côtés AO et OC, ou AO' et O'C; ainsi que l'angle compris entre leur côté; d'où l'on peut conclure les *parallaxes de hauteur* CAO et CAO'.

(2) En effet dans les triangles AST, CST fig. 43, on a, sin. AST : R :: AT : ST, de même sin. CST : sin. SCT :: CT : ST, et comme CT = AT ; on a AST : R :: sin. CST : sin. SCT; de la sin. CST = sin. AST  $\times$  sin. SCT, et sin. AST =  $\frac{\sin. CST}{\sin. SCT}$ ; comme CST est la parallaxe de hauteur, AST la parallaxe horizontale, et SCT le sinus de la distance au zénith, il s'ensuit que... etc.

du centre ; elle est égale à la hauteur prise de la surface à laquelle on ajoute la parallaxe de hauteur (1).

La distance d'un astre à la terre est égale au rayon de la terre, divisé par le sinus de la parallaxe (2). Celle du soleil étant de  $27'' 2$ , la distance de cet astre à la terre est, d'après cette méthode, de 23405 rayons terrestres : le diamètre du soleil étant à celui de la terre comme le sinus des angles sous lesquels chacun des deux corps est aperçu du centre de l'autre ; l'angle du soleil à la terre étant de  $6036''$ , et celui de la terre au soleil de  $54'' 4$ , il s'ensuit que le diamètre du soleil est 113 fois plus grand que celui de la terre, et son volume 1,500,000 fois plus considérable.

125. Cette méthode de prendre la parallaxe ne pouvant être appliquée au soleil à cause du très-petit angle qu'elle présente, nous donnerons de nouveaux détails sur cet objet, en exposant les moyens qu'on emploie pour

(1) En effet soit  $H'H$  l'horizon du lieu, l'angle de hauteur  $\approx SCH$ . Soit  $h'h$  l'horizon rationel, la hauteur vue du centre  $\approx ST h \approx SCH + CST$ .

(2) On a  $\sin. AST : R :: AT : ST$  mais  $AT \approx$  le rayon de la terre  $\approx r$  ; donc  $ST \approx \frac{r}{\sin. AST}$ .

prendre la distance de la lune à la terre. Quant à la distance du soleil à la terre, Aristarque, dans l'antiquité, fit usage de la méthode suivante, qui suppose la distance de la lune à la terre déjà connue.

126. La lune ayant des phases différentes, la ligne qui sépare la partie éclairée de celle qui est obscure est aperçue sous la forme d'une demi-ellipse, qui varie successivement depuis celle du cercle jusqu'à celle de la ligne droite : pour que la ligne de séparation d'ombre et de lumière observée sur la lune  $L$ , fig. 44, paroisse une droite  $AB$  au spectateur placé en  $C$  sur la terre  $T$ , il faut que le plan passant par cette ligne soit perpendiculaire à la droite  $LS$  menée du centre de la lune à celui du soleil  $S$  : si dans cet instant on prend l'angle formé par les droites  $CL$ ,  $CS$ , menées du spectateur aux centres de la lune et du soleil, on aura un triangle rectangle  $CLS$ , dans lequel on connoît l'angle droit à la lune et l'angle à la terre, conséquemment l'angle au soleil  $LS C$  ; alors, si l'on connoît la distance de la lune à la terre  $LC$ , on a celle du soleil à la terre  $ST$ .

127. Lorsqu'on a la distance du soleil à la terre et l'angle que présente le diamètre du soleil à cette distance, il est facile de déter-

miner toutes les autres distances par la seule observation de l'angle sous lequel le diamètre se présente, parce que la distance du soleil à la terre est réciproque à son diamètre apparent (1).

Comme le diamètre apparent du soleil est le plus petit dans l'été et le plus grand dans l'hiver, il s'ensuit que dans l'été, pour notre hémisphère, cet astre est à sa plus grande distance de la terre, et qu'il est, au contraire, le plus rapproché pendant l'hiver.

128. Lorsqu'on trace l'orbe du soleil, fig. 42, d'après ses directions journalières et ses diverses distances à la terre sous ces directions, on observe que cet orbe est une ellipse, à l'un des foyers de laquelle le centre de la terre est placé : ainsi, lorsque le soleil se trouve sur la partie de l'ellipse G, qui correspond à une des extrémités de son grand diamètre A T G, il est à sa plus

(1) En effet, si SD, fig. 45, est le demi-diamètre du soleil, et SA, SB, ses différentes distances à la terre, on a SA : SD :: ray. : tang. SAD; donc  $SD \times \text{ray.} = SA \times \text{tang. SAD}$ . SB : SD :: ray. : tang. SBD; donc  $SD \times \text{ray.} = SB \times \text{tang. SBD}$ . De ces deux proportions on déduit SA : SB :: tang. SBD : tang. SAD; mais les tangentes de très-petits arcs, ou d'arcs au-dessous d'un degré, sont comme les angles; ainsi l'on a SA : SB :: SBD : SAD; donc la distance du soleil à la terre est réciproque à son diamètre apparent.

grande distance du foyer T, placé au centre de la terre; et il est à sa plus petite distance de ce foyer, quand il arrive à la partie opposée de l'ellipse A (1).

129. Si le soleil, dans tous ses points d'éloignement TA, TF, de la terre T, fig, 46, parcourait des arcs égaux AB, FG, les vitesses apparentes, ou les angles ATB, FTG, seroient réciproques (127) à leurs distances TA, TF; mais l'observation a appris que lorsqu'il s'éloigne de la terre la diminution de sa vitesse est double de celle qui devrait se remarquer, si cette diminution n'étoit que réciproque, d'où il suit que la vitesse angulaire est à très-peu-près réciproque aux carrés des distances (2).

(1) On nomme *apogée*, la plus grande distance d'un astre à la terre, et *périgée*, sa plus petite distance.

(2) En effet, par la diminution réciproque aux distances, on a  $V \cdot V' : 1 : \frac{1}{r} : \frac{1}{r'}$ ; maintenant, si l'on fait  $r = 1$ , et  $r' = 1$

+  $e$ , on aura  $V : V' : : 1 : \frac{1}{1+e}$ ; mais  $\frac{1}{1+e}$ , en négligeant les deuxièmes puissances, égale  $1 - e$ ; donc  $V : V' : : 1 : 1 - e$ . Puisque  $e$  est la différence, lorsque les vitesses sont réciproques aux distances, une différence double, telle que l'observation la donne, est  $1 - 2e$ ; ainsi l'observation donne  $V$  :

$V' : : 1 : 1 - 2e$ . Mais  $1 - 2e = \frac{1}{(1+e)^2}$ , dont on a négligé les deuxièmes puissances; il résulte que le rapport des vitesses

130. De ce que les vitesses angulaires sont réciproques aux carrés des rayons, il s'ensuit que les secteurs ou les aires décrits par les rayons vecteurs, sont proportionnels aux temps (1).

Cette loi remarquable de la proportionnalité des aires aux temps dans le mouvement du soleil, est une des lois générales du mouvement des corps célestes découvertes par Képler, et elle

est  $V : V' :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{(1+e)^2}$  et comme 1 et  $1+e$  sont les deux

rayons, on a  $V : V' :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$

(1) Car les surfaces des cercles et celles des secteurs qui ont le même angle, sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons; et les secteurs, qui ont mêmes rayons, sont proportionnels à leurs angles; donc les secteurs, qui ont différens angles et différens rayons, sont comme les carrés des rayons par les angles.

Ainsi l'on a  $s : S :: ar^2 : AR^2$ .

Mais les angles infiniment petits décrits dans des temps égaux par le mouvement du soleil dans son orbite elliptique, peuvent être considérés comme s'ils appartenient à des cercles de différens rayons, et ces angles qui indiquent les vitesses, sont réciproques aux carrés des rayons, ainsi l'on a  $a : A ::$

$$\frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$$

Substituant les valeurs des angles dans la première équation, on a  $s : S :: \frac{r^2}{r^2} : \frac{R^2}{R^2}$ ; mais  $\frac{r^2}{r^2} = \frac{R^2}{R^2}$ ; donc dans des temps égaux  $s = S$ , et dans des temps inégaux les secteurs sont proportionnels aux temps.

s'applique en effet à tous ces corps, ainsi qu'on le verra par la suite.

131. La réciprocité entre les carrés des rayons, la vitesse angulaire et le mouvement dans l'ellipse, conduit à ce théorème : la variation dans la vitesse angulaire du soleil est à-peu-près proportionnelle au co-sinus de la moyenne distance angulaire de l'astre au point de l'orbite où cette vitesse est la plus grande (1).

132. Le soleil paroissant se mouvoir autour de la terre dans un orbe elliptique, on peut se former une idée juste de son mouvement, en supposant un cercle décrit autour de la terre

(1) Si dans l'ellipse DMNQ, fig. 47, on fait l'excentricité  $CF=e$ .

Le rayon vecteur  $FM=z$ ,

L'angle  $DFN$  du rayon vecteur avec le grand-axe  $DQ=\phi$ ;

l'équation de l'ellipse, par rapport au rayon vecteur, donne

$$z = \frac{(1-e)^2 (1-e \cos. \phi)}{1-e^2 \cos. \phi^2}$$

Négligeant les quantités élevées au carré, ou les deuxièmes puissances, on a  $z=1-e \cos. \phi$ . La vitesse étant proportionnelle au carré du rayon, elle varie

comme  $\frac{1}{z^2}$ ; mais  $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1-e \cos. \phi)^2} = 1 + 2e \cos. \phi$ , en négligeant les

secondes puissances.

Dans la valeur de  $\frac{1}{z^2}$  il n'y a de variable que  $\cos. \phi$ ; donc la portion de la vitesse angulaire variable est à-peu-près proportionnelle au cosinus de l'angle d'inclinaison.

avec un rayon  $TS$ , fig. 48, égal au périégée, et sur lequel le mouvement uniforme d'un astre soit représenté par des divisions égales  $S, a, b, c, d, e, f, g$ ; que de même sur l'ellipse soient tracées les divisions  $S, A, B, C, D, E, F, G$ , comme indiquant la marche du soleil dans son orbe, et que les secteurs  $STA, ATB, BTC$ , etc., soient proportionnels aux temps; alors comparant le mouvement de l'astre fictif sur le cercle à celui du soleil sur l'ellipse, on voit qu'en partant du périégée, le mouvement angulaire de ce dernier, dans son orbe  $STA, ATB$ , est plus grand que celui de l'astre dans le cercle  $STa, aTb$ ; qu'ensuite le mouvement du soleil  $BTC, CTD$ , diminue sur celui de l'astre  $bTc, cTd$ , et que le rapport entre ces deux vitesses est tel, que, du périégée au quart de son mouvement  $B$ , la marche du soleil est plus rapide que celle de l'astre fictif; qu'arrivé là, son mouvement, comparé à celui du dernier corps, diminue jusqu'à ce qu'il soit arrivé à la moitié de sa course ou à son apogée  $D$ , où les deux corps sont sur la même droite; qu'ensuite, en se portant de  $D$  en  $F$ , le soleil continue à retarder sur l'astre fictif, et qu'à partir de ce dernier point, il accélère sa marche en se mouvant plus vite que l'astre, pour arriver en même temps que lui au point de

départ S. Il est facile de voir, en suivant ces deux mouvemens, que les rayons vecteurs de l'astre fictif et du soleil ne sont dans une même droite que lorsque ce dernier est à son périhélie ou à son apogée : dans toute autre position ces rayons forment entr'eux un angle que l'on nomme *équation du centre*: son maximum ou son plus grand angle étoit, en 1808, de  $2^{\circ} 38' 18''$ . Il diminue de  $50'', 025$  par siècle. Le peu d'excentricité de l'orbite solaire rend son ellipse très-approchant du cercle.

133. On observe dans cet orbite trois mouvemens particuliers; le premier dans son grand axe, le second dans la direction du plan de l'équateur, le troisième dans l'inclinaison de son plan sur celui de l'équateur.

On a déterminé la position du grand axe de l'ellipse solaire, en observant la direction du soleil lorsqu'il est au périhélie ou à l'apogée, et l'on a remarqué que cet axe, qui change continuellement de position, a un mouvement d'occident en orient dans le sens du mouvement annuel du soleil, par lequel il décrit annuellement un arc de  $36'', 44$ .

Si la direction du plan de l'équateur étoit constante par rapport aux étoiles, ainsi que l'est celle du plan de l'écliptique, la ligne d'intersection de ces deux plans auroit dans le ciel une

direction constante; mais le plan de l'équateur changeant de direction, tandis que l'autre reste constant, l'intersection doit varier : aussi a-t-on observé que les équinoxes ont, par suite de ce changement de direction, un mouvement d'orient en occident, c'est-à-dire, rétrograde sur celui du soleil, et par lequel cette ligne d'intersection décrit chaque année un arc moyen de 154", 63.

La distance de l'équinoxe du printemps au périhélie de l'ellipse solaire, varie chaque année en vertu de ces deux mouvemens : elle étoit, au commencement de 1750 de 309°, 5790".

Enfin l'orbite solaire se rapproche insensiblement de l'équateur, et l'on estime à 160", 85, par siècle, la diminution de son obliquité.

134. L'orbite dans lequel le soleil paroît se mouvoir est peu différent du cercle, car son excentricité est égale à la cent soixante-dix-huit millième partie de sa distance moyenne à la terre. Les observations paroissent indiquer dans cette excentricité une diminution fort lente, à peine sensible dans l'intervalle d'un siècle.

135. Ainsi le mouvement apparent du soleil dans son orbite paroît éprouver six sortes d'inégalités.

1° Dans le mouvement de son ellipse.

2° Dans l'obliquité de son orbe sur l'équateur.

3° Dans le mouvement du grand axe de son ellipse.

4° Dans la position de ses *nœuds* (1).

5° Dans l'angle que forment entr'eux les plans de l'orbe solaire et de l'équateur.

6° Dans l'excentricité de l'orbe solaire.

Si le soleil n'avoit pas sur l'écliptique un mouvement rétrograde, la durée de son mouvement diurne seroit égale à celle de celui des étoiles, et seroit constante; mais l'arc rétrograde qu'il décrit sur l'écliptique, et qu'il doit parcourir de plus pour arriver au méridien d'où il est parti, augmente la durée de ce mouvement; ainsi cette durée est égale au jour sidéral, plus au temps qu'il doit mettre pour parcourir cet arc rétrograde; et comme le mouvement journalier du soleil est rapporté à l'équateur, les six sortes d'inégalités que l'on remarque, tant dans ce mouvement, que dans le mouvement et la forme de son orbe, doivent nécessairement en apporter de plus ou moins considérables dans la durée du jour astronomique.

136. Le jour astronomique étant composé

(1) C'est ainsi que l'on appelle les points de l'orbe qui rencontrent le plan de l'équateur.

du jour sidéral, plus du temps que le soleil met à parcourir son arc rétrograde sur l'écliptique rapporté à l'équateur; pour connoître l'excès du jour astronomique sur le jour sidéral, il faut déterminer la grandeur de cet arc; pour cela, si, par les extrémités du petit arc  $AB$  (fig. 49,) que le soleil décrit sur l'écliptique  $E e$ , dans un jour et par les pôles du monde  $P p$ , on imagine deux grands cercles de la sphère céleste; l'arc de l'équateur  $ab$ , qu'ils interceptent, est le mouvement journalier du soleil rapporté à l'équateur, et le temps que cet arc met à traverser le méridien, est l'excès du jour astronomique sur le jour sidéral: or il est visible que cet arc varie par rapport à la vitesse rétrograde du soleil et à sa distance des points équinoxiaux.

Lorsque le soleil est à l'équinoxe  $E$ , fig. 50, l'arc  $EB$ , sur l'écliptique, est à l'arc  $EA$ , sur l'équateur, comme le rayon est au cosinus de l'angle  $AEB$  de l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur; en conséquence, dans cette position, l'arc est diminué dans ce même rapport: mais, lorsque cet astre est au solstice en  $S$ , l'arc qu'il parcourt étant le même que celui qu'il décrirait sur le tropique  $SL$ , il est à celui que l'on observe sur l'équateur dans le rapport des rayons des deux cercles; donc: :  $SL : DE$ ; mais  $DE = ES$ ,

ainsi ::  $SL : ES$ , ou comme le cosinus de l'angle d'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur est au rayon ; d'où il suit que , lorsque le soleil est au solstice , l'arc mesuré sur l'équateur est plus grand que celui qui est parcouru sur l'écliptique dans le même rapport ; ce qui fait que le jour astronomique est augmenté au solstice et diminué aux équinoxes , parce que le mouvement du soleil sur l'écliptique est rapporté à celui qu'il auroit sur l'équateur.

137. Pour avoir un *jour moyen* indépendamment de ces causes et tel que le donneroit une bonne pendule , on suppose le soleil se mouvant sur l'écliptique , fig. 51 , parcourant des arcs inégaux  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ , et un second soleil se mouvant sur le grand cercle de l'écliptique , en parcourant des arcs  $abcd$   $efghl$  égaux , et traversant , toujours au même instant que le vrai soleil , le grand axe  $Al$  de l'orbe solaire , ce qui fait disparaître l'inégalité du mouvement propre du soleil. On fait ensuite disparaître l'effet de l'obliquité de l'écliptique , en imaginant un troisième soleil passant par les équinoxes  $LM$  au même instant que le second , et mu sur l'équateur d'un mouvement uniforme , de manière que les distances angulaires de ces deux soleils , à l'équinoxe du printemps  $M$ ,

soient constamment égales entr'elles : l'intervalle compris entre deux retours consécutifs de ce troisième soleil au méridien, forme le jour moyen astronomique. Le *temps moyen* se mesure par le nombre de ces retours, et le *temps vrai* se mesure par le nombre des retours du vrai soleil au méridien. L'arc de l'équateur  $\zeta$ , intercepté entre deux méridiens, mené par les centres du vrai soleil G, et du troisième  $\gamma$ , et réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour un jour, est ce que l'on nomme *équation du temps*.

## §. XVII.

### *Du mouvement de rotation du Soleil.*

138. Le soleil est souvent couvert de taches qui paroissent changer de position sur son *disque*; en examinant avec soin leurs diverses positions, on a remarqué qu'elles suivoient une direction constante d'orient en occident, et que leur mouvement, lent vers les bords, s'accéléroit en approchant du milieu de la surface de cet astre; que plusieurs de ces taches, après avoir traversé son disque, reparoissoient, au bout d'un certain temps à la même place où elles avoient été aperçues. Cette position constante, à des époques

fixes, a fait conclure qu'elles adhèrent à la surface du soleil; que cet astre a un mouvement de rotation qui lui est propre, et dont la durée est de vingt-cinq jours et demi; enfin des observations exactes ont appris que son équateur  $AB$ , fig. 52, ou le plan perpendiculaire à son axe de rotation  $CD$ , est incliné sur l'écliptique  $ST$  de  $8^{\circ} \frac{1}{2}$  environ, et que les points de cet équateur, en s'élevant par leur mouvement de rotation au-dessus de ce plan vers le pôle boréal, le traversent dans un point  $B$ , fig. 53, qui, vu du centre du soleil  $S$ , formoit au commencement de 1750, un angle de  $6^{\circ}$ ,  $2000''$  avec l'équinoxe du printemps  $SP$ .

### *Récapitulation.*

139. Il suit des observations que nous venons de rapporter sur le soleil et sur ses mouvemens, dont la parallaxe est de  $27''$ , dont le diamètre est 113 fois celui de la terre, le volume 1,300,000 fois plus considérable, et sa distance à la terre de 23,578 rayons terrestres; il suit, disons-nous, que cet astre a trois mouvemens; le premier diurne, d'orient en occident, dont la durée varie chaque jour de l'année; le second annuel, d'occident en orient, sur un orbe elliptique dont la terre occupe un des foyers; que les aires décrites sur cet orbe par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps, et que les vitesses angu-

lares sont à-peu-près proportionnelles au cosinus de la moyenne distance angulaire de cet astre au point de l'orbite où cette vitesse est la plus grande ; que de la combinaison de ces deux mouvemens, diurne et annuel, résultent le jour et la nuit, et la différence de température ou les saisons, que l'orbe solaire a aussi trois mouvemens, l'un dans son grand axe, par lequel il décrit annuellement, d'occident en orient, un angle de  $36''{,}44''$  ; l'autre dans la direction de ses nœuds, qui rétrogradent, relativement au soleil, d'environ  $154''{,}63$  par année, et un autre dans l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, qui diminue d'environ  $160''{,}83$  par siècle, que ces trois mouvemens de l'orbe solaire produisent plusieurs inégalités apparentes dans la marche du soleil ; que le troisième mouvement de cet astre est celui de rotation sur son axe dont la durée est de vingt-cinq jours et demi ; enfin que l'équateur solaire est incliné de  $8^\circ$  sur l'écliptique.

### DES MOUVEMENS DE LA TERRE.

La terre a deux mouvemens différens que nous examinerons séparément : l'un est celui de rotation sur son axe, l'autre est un mouvement de translation autour du soleil.

#### §. XVIII.

#### *Du mouvement de rotation de la Terre.*

141. Nous avons vu que les étoiles paroissent

tourner autour de la terre (93), et que la durée de leur mouvement, quel que soit le cercle qu'elles décrivent dans le ciel, est ce 0<sup>h</sup> 99727 (97); que le soleil paroît également tourner autour de notre globe, et que la durée de ce mouvement forme le jour astronomique (104); que généralement les corps célestes paroissent se mouvoir autour de la terre, et que la durée de leur mouvement diurne diffère de celle du jour astronomique; mais, en réfléchissant sur la marche de tous ces corps, on observe que leurs mouvemens peuvent s'expliquer de deux manières: ou en supposant, ainsi que nous l'avons fait jusqu'ici, qu'ils tournent en effet autour de la terre, ou en admettant, ce qui est beaucoup plus simple, que c'est la terre qui, tournant sur elle-même, produit cette illusion du mouvement des corps célestes autour d'elle (1).

(1) En effet, si un spectateur S, fig. 54, placé sur la surface de la terre T, a un astre A à son zénith, et que la terre ait un mouvement de rotation sur son axe S vers B, ce spectateur, arrivé en B, verra l'astre dans la direction BG, faisant avec sa verticale BD un angle DBG égal à celui AST, qui auroit lieu s'il fût resté en S, tandis que l'astre seul se fût mu de A vers O avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation de la terre; d'où il suit que le phénomène du mouvement des astres autour de la terre s'explique également et par la rotation.

Puisque le mouvement des astres s'explique dans ces deux hypothèses, on doit chercher laquelle des deux est la plus probable, et examiner si toutes les apparences de ces mouvemens peuvent également s'expliquer par l'une et par l'autre.

142. Si l'on s'arrête un instant aux divers degrés de probabilité qu'offre chacun de ces mouvemens, on est porté à admettre de préférence celui de rotation de terre (1).

143. Mais, ce qui doit principalement dé-

de la terre, en supposant les astres en repos, et par la marche des corps célestes, en supposant la terre en repos.

(1) Le centre du soleil étant éloigné de nous de 23,578 rayons terrestres, il faudroit qu'il eût dans son mouvement autour de notre globe une vitesse 23,578 plus grande que celle qui auroit lieu sur l'équateur terrestre, où, sur ce dernier, chaque point de la terre parcourt environ 400 mètres par seconde : d'où il suit que le centre du soleil parcourroit 9,431,200 mètres dans le même temps pour produire la même apparence. Si l'on considère d'ailleurs que le soleil est plus d'un million de fois plus considérable que la terre (124), on sentira que le volume de cet astre embrasseroit l'orbe de la lune, et s'étendrait au-delà à une distance près d'une fois plus grande ; il est donc infiniment plus simple de supposer que le globe que nous habitons a un mouvement de rotation sur lui-même, que d'imaginer dans une masse aussi considérable que celle que présente le soleil un mouvement aussi rapide que celui qui lui seroit nécessaire pour produire les mêmes effets.

terminer en faveur de la probabilité de la rotation de la terre, c'est le spectacle que nous offre le mouvement régulier des étoiles comparé à celui du soleil (1).

144. Comme le mouvement diurne des astres paroît se faire d'orient en occident, et que, pour produire la même apparence par la rotation de la terre, il faut qu'elle ait un mouvement en sens contraire, on est conduit à admettre que notre globe a un mouvement de rotation, et que ce mouvement se fait d'occident en orient, comme celui du soleil et de tous les autres corps célestes, ainsi que nous l'expliquerons par la suite.

145. On prouve enfin l'existence de ce mouvement par la déviation vers l'est d'un corps

(1) En effet, si l'on admettoit le marche extrêmement rapide de cet astre autour de la terre, il s'ensuivroit que les étoiles, étant à des distances infiniment grandes par rapport à nous, devroient avoir des vitesses infinies, et qu'étant à des distances différentes de notre globe, et cependant conservant toujours leurs positions relatives, le mouvement de chacune d'elles devroit être réglé de manière que jamais ces positions ne pussent être troublées : l'on voit que toutes ces suppositions, dont l'admission exige des moyens qui surpassent l'imagination, se trouvent inutiles, et que le spectacle que nous offre le mouvement du ciel est expliqué par la seule *hypothèse* de la rotation de la terre et de la fixité des étoiles.

qui tombe d'une grande hauteur, déviation qui ne peut avoir lieu qu'autant que la terre a un mouvement sur son axe de l'ouest vers l'est (1).

146. Le mouvement de rotation de la terre

(1) Si la terre a sur son axe un mouvement dont la vitesse fasse parcourir 400 mètres par seconde à tous les points de son équateur, comment se fait-il que les individus qui habitent sa surface ne sentent pas ce mouvement, tandis qu'ils en distinguent de très-foibles, quand ils ont lieu, sur quelque point particulier de la surface terrestre? Et comment se fait-il aussi qu'ils puissent, sans s'en apercevoir, se trouver sur des points opposés de cette surface, de manière qu'ils soient placés alternativement de haut en bas, comme en A, fig. 55, ou de bas en haut en C, ou de côté, comme en B et en D?— Ces questions, que font habituellement les personnes qui n'ont pas réfléchi à ce qui se passe sur la surface de la terre, et à l'action qui tend à en rapprocher les corps que l'on veut en éloigner; ces questions, disons-nous, sont faciles à résoudre. On ne distingue de mouvement dans l'air que par la résistance qu'il oppose aux corps qui se meuvent dans ce milieu: c'est ainsi que, lorsqu'on est dans la chambre d'un bateau qui se meut sur une eau tranquille, on distingue si peu son mouvement, que, si l'on fixe le rivage, on croit que c'est ce dernier seul qui se meut, et qu'on peut mesurer, par la vitesse apparente de ce rivage, la vitesse réelle du bateau: quant à l'atmosphère qui environne la terre (8), comme elle est entraînée dans son mouvement avec le spectateur, et avec une vitesse égale, elle ne lui présente aucune résistance, et conséquemment aucun moyen de distinguer le mouvement de rotation du globe sur lequel il est placé. La situation du spectateur sur la surface de la terre ne peut pas non plus avoir d'influence sur lui, car il

doit tendre à éloigner de son centre les corps qui sont à sa surface, et conséquemment agir en sens inverse de la pesanteur : cette force, que l'on appelle *centrifuge*, et sur laquelle nous reviendrons dans une des leçons suivantes, étant d'autant plus grande que la vitesse elle-même l'est davantage, doit être en conséquence beaucoup plus considérable à l'équateur qu'aux pôles, et, par une suite naturelle, doit tendre à abaisser la terre aux pôles, à les élever à l'équateur, et à diminuer la pesanteur sur cette dernière partie : ces résultats de la théorie ont été confirmés par la mesure de la longueur des différens degrés d'un arc du méridien terrestre, et par l'observation du pendule.

147. En observant le mouvement apparent des étoiles autour de la terre, on remarque qu'il éprouve trois sortes de variations : la première est la *précession des équinoxes* ; la seconde, la *nutation* ; la troisième, l'*aberration*.

---

n'y tient pas en raison de telle ou telle situation particulière, mais par l'action générale de la pesanteur, et la tendance que tous les corps ont vers le centre de notre globe (5) : c'est donc à cette tendance que sa position se rapporte ; et, comme elle est la même dans toutes ses situations sur la terre se mouvant dans l'espace, il s'ensuit qu'il ne doit apercevoir aucune différence entre ces diverses situations.

Nous allons examiner séparément chacun de ces mouvemens.

148. La *précession des équinoxes* est un mouvement général de toutes les étoiles, et commun à chacune, qui se fait d'occident en orient, et qui, changeant leur position par rapport à l'équateur terrestre, conserve celle qu'elles ont par rapport à l'écliptique (1). Ce mouvement est occasionné par l'action du soleil sur le ménisque qui enveloppe la sphère terrestre.

---

(1) On peut représenter cette variation en traçant autour des pôles S et V, et de l'écliptique L et M, fig. 56, deux cercles BCDEFX et AGHIKY, parallèles à l'écliptique, et éloignés de ses pôles V, S, de  $26^{\circ}, 07315$ , et suposant que les pôles du monde changent continuellement de position sur ces cercles en allant d'orient en occident, et décrivant chaque année un arc de  $154'' , 63$ , de manière que les axes du monde BA, CG, DH, EI, FK, passent toujours par le centre de la terre T. Par ce mouvement, l'axe du monde tourne continuellement autour des pôles de l'écliptique, tandis que l'équateur NO, PQ, toujours perpendiculaire à ces axes, observe sur l'écliptique un mouvement semblable à celui de l'axe du monde, et conserve la même inclinaison sur l'écliptique : les plans de celle-ci et de l'équateur, perpendiculaires à ces axes, doivent conserver la même inclinaison ; mais les nœuds ou points d'intersection des deux plans doivent varier de position, et suivre le mouvement de l'axe : or, comme ces pôles se meuvent dans le ciel d'un mouvement rétrograde sur celui du soleil en décrivant par année un angle de  $154'' , 63$ , les nœuds doivent de même rétrograder sur le mouvement du soleil, et par conséquent diminuer de  $154'' , 63$  de celui qu'il doit faire

149. La *nutaton* ou la déviation des étoiles est un léger balancement qui a lieu dans le mouvement de l'équateur sur l'écliptique, et dont la *péripétie* paroît être absolument semblable à celle des nœuds de l'orbe lunaire (1).

pour revenir à l'équinoxe; ainsi l'année tropique, qui est le mouvement de cet astre par rapport aux équinoxes, doit être plus courte que l'année sidérale (105) du temps qui lui est nécessaire pour décrire cet arc. Les nœuds de l'équateur décrivant chaque année un arc de  $154''{,}63$  autour de l'écliptique, la révolution de la précession des équinoxes doit être de 25,868 ans environ.

(1) On peut concevoir la nutation en imaginant une petite ellipse ABCD, fig. 57, tangente à la sphère céleste, et dont le centre H, que l'on peut considérer comme le pôle moyen de l'équateur, décrit uniformément chaque année  $154''{,}63$  du parallèle à l'écliptique MN sur lequel il est situé. Le grand axe AC de cette ellipse, toujours tangent au cercle de latitude et dans le plan de ce cercle, sous-tend un angle ATC de  $62''{,}2$ ; et son petit axe BD sous-tend un angle BTD de  $46''{,}3$ . La situation du vrai pôle sur cette ellipse se détermine ainsi: On trace sur le plan de l'ellipse ABCD, fig. 58, un petit cercle ASCV, qui a le même centre H, et dont le diamètre est égal à son demi grand axe HA; ensuite on conçoit un rayon de ce cercle mu uniformément d'un mouvement rétrogradé, de manière qu'il coïncide avec la moitié du grand axe HA la plus voisine de l'écliptique toutes les fois que le nœud ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec l'équinoxe de printemps; enfin, de l'extrémité E de ce rayon mobile, on abaisse une perpendiculaire EF sur le grand axe de l'ellipse; le point G, où cette perpendiculaire coupe la circonférence de cette ellipse, est le lieu vrai du pôle de l'équateur.

Ce phénomène est occasionné par l'attraction de la lune sur le ménisque qui environne la sphère terrestre.

150. Si la terre étoit immobile, il faudroit qu'indépendamment du mouvement diurne que les étoiles auroient sur l'axe de l'équateur céleste, elles en eussent un second sur l'axe de l'écliptique, afin d'expliquer la précession des équinoxes, et un troisième de balancement pour expliquer la nutation; car, la terre étant immobile, le pôle de l'équateur qui répond toujours au même point de la surface terrestre sera également sans mouvement : mais on vient de voir que ces deux variations pouvoient être expliquées; la première, en supposant au pôle de la terre un léger mouvement autour de celui de l'écliptique; la seconde, en supposant aussi un léger mouvement du pôle de l'équateur autour d'une ellipse dont le centre se meut uniformément autour du pôle de l'écliptique. « Ainsi, dit Laplace, le système entier de tant de corps si différens par leur grandeur, leurs mouvemens et leurs distances, sera encore assujéti à un mouvement général, qui disparoit et se réduit à une simple apparence si l'on suppose l'axe de la terre se mouvoir autour de l'écliptique. »

151. Les étoiles ayant un mouvement diurne

apparent dans le plan de l'équateur, et un mouvement annuel apparent dans le plan de l'écliptique, les astronomes, en déterminant la position des étoiles, ont dû la rapporter à ce plan; ils ont encore rapporté leurs distances à l'horizon, parce que les distances rapportées à ce plan sont les plus simples, les plus commodes, et qu'une fois connues on peut les rapporter facilement aux deux autres.

On appelle *hauteur méridienne* et *azimuth* les distances rapportées à l'horizon : la *hauteur méridienne* est l'angle d'élevation de l'astre au-dessus de l'horizon; l'*azimuth* est l'angle formé par le méridien du lieu où est le spectateur, avec un plan vertical passant par le centre de l'astre.

La distance des étoiles rapportées à l'équateur se nomme *ascension droite* et *déclinaison* (99).

Enfin on appelle *latitude* et *longitude* la distance des astres rapportées à l'écliptique.

152. La *latitude* est la distance d'une étoile ou d'une planète au plan de l'écliptique : elle diffère de la *déclinaison*, en ce que celle-ci est la distance de l'étoile à l'équateur (99). Pour avoir la latitude, on prend la distance angulaire de l'étoile au pôle de l'écliptique, on retranche cette distance de 100 degrés, et la différence donne la latitude de l'astre.

153. La *longitude* est l'angle formé par deux

grands cercles, l'un passant par les pôles de l'écliptique sur lequel l'astre se trouve, l'autre passant par les mêmes pôles et le premier point du bélier; elle diffère de l'ascension droite (99), en ce que celle-ci est la distance angulaire de deux méridiens ou de deux grands cercles qui passent par les pôles de l'équateur. Il est bon de remarquer que, quelle que soit la position des deux plans, la longitude se compte toujours d'occident en orient; qu'ainsi la longitude d'un astre peut quelquefois être très-approchant de 400<sup>es</sup>. (1).

(1) Soit ED l'équateur, fig. 59, EC l'écliptique, AE l'ascension droite, AS la déclinaison; BC la latitude, BE la longitude; ES un arc de grand cercle;  $\phi$  l'arc formé par l'arc SE et l'équateur; et  $\psi$  l'obliquité de l'écliptique.

Comme l'angle SAE est droit, l'arc SE est l'hypothénuse du triangle rectangle SAE.

On peut parvenir à trouver la latitude et la longitude par les quatre proportions suivantes :

$$1^{\circ} R : \sin. AE :: \cos. SA : \cos. \phi = \sin. \frac{AE \times \sin. AS}{R}$$

ou, ce qui est la même chose,  $\sin. AE : R :: \text{tang. AS} :$

$$\text{tang.} = \frac{\text{tang. AS}}{\sin. AE}$$

$$2^{\circ} R : \cos. : : AE : : \cos. ES = \cos. \frac{AE \times \cos. AS}{R}$$

## §. XIX.

*Du mouvement de la Terre autour du Soleil.*

154. Au premier aspect nous nous persuadons que le soleil S, fig. 61, a autour de la terre un mouvement annuel d'occident en orient dans un orbe sensiblement circulaire S s  $\Sigma$   $\sigma$   $\epsilon$ ; mais il est facile de s'assurer que cette apparence peut également avoir lieu, soit que cet astre tourne autour de la terre, soit que la terre T tourne autour du soleil S d'occident en orient dans un orbe semblable T t  $\theta$   $\tau$   $\eta$ .

155. Nous ne jugeons les mouvemens des astres qu'en rapportant leur direction aux étoiles; d'après cela, si l'on suppose qu'à une époque le Soleil S, vu de la terre T, soit dans la direction d'une étoile E, l'angle que font sur la terre le soleil et l'étoile sera le même, soit que, par son

$$3^{\circ}. R : \text{col.} (\Phi - \omega) :: \text{tang.} ES : \text{tang.} BE = \frac{\text{tang.} ES}{\cos. \Phi - \omega};$$

$$4^{\circ}. R : \sin. ES :: \sin. (\Phi - \omega) : \sin. SB = \sin. ES \times \sin. (\Phi - \omega).$$

On peut consulter sur cette détermination le N<sup>o</sup>. 899 de l'Astronomie de Delalande, tom. I, pag. 303.

mouvement, le soleil ait été de S en  $\Sigma$ , soit que la terre ait été de T en  $\theta$ . En effet, les directions TE, te,  $\theta^e$ , sont parallèles, et les angles sTE,  $\Sigma TE$ , etc. sont égaux à ceux Ste,  $S\theta^e$  formés par les positions de la terre sur son orbe, analogues à celles que le soleil présente dans son mouvement apparent, d'où il suit que, pour l'observateur placé sur la surface de la terre, l'un et l'autre mouvement offrent absolument la même apparence.

156. L'analogie qui paroît exister entre la terre et les autres planètes confirme encore son mouvement de rotation et celui de translation autour du soleil : toutes les planètes ont en effet ce double mouvement, ainsi que nous le verrons dans les leçons suivantes. Ce mouvement de notre globe autour du soleil est conforme à cette loi générale par laquelle les petits corps célestes circulent autour des grands corps dont ils sont voisins; et l'on pourroit considérer comme une bizarrerie, en contradiction avec le système général de l'univers, cette opinion qui suppose- roit que notre globe, qui n'est pas la millionième partie de celui du soleil (124), puisse entraîner cet astre autour de lui.

Enfin ce mouvement de translation de la terre autour du soleil est démontré par

Explication du phénomène de l'aberration.

157. L'aberration est un mouvement circulaire  $A B C D$ ; fig. 60, parallèle à l'écliptique  $E G F H$ ; que les étoiles paroissent décrire chaque année, et dont le diamètre du cercle décrit, vu du centre de la terre  $T$ , sous-tend un angle de  $25''$ . En vertu de ce mouvement, la circonférence de la courbe  $A B C D$ ,  $\alpha b o d$ ,  $\alpha \beta \gamma d$ , décrite par chaque étoile, paroît sous la forme d'une ellipse plus ou moins aplatie, suivant la hauteur de l'étoile, au-dessus de l'écliptique. La courbe  $A B C D$ , décrite par l'étoile au pôle de l'écliptique, paroît un cercle, et celle  $\alpha \beta \gamma d$ , décrite sur l'écliptique, paroît une droite: dans toutes ces apparences, *le petit axe de l'ellipse est au grand axe comme le sinus de la hauteur de l'axe, au-dessus de l'écliptique, est au rayon*. Ce mouvement paroît suivre exactement celui du soleil dans son orbite, de manière cependant que le soleil en  $S$  est constamment plus avancé de 100 degrés que les étoiles en  $A$ ,  $a$ ,  $\alpha$ .

158. L'aberration, découverte par Molineux et Bradley, en 1728, est un des plus singuliers phénomènes que l'on ait observés en astronomie: son explication a présenté de grandes difficultés; et a exigé deux choses, la supposition du mouvement de la terre autour du soleil fixe au milieu

du système planétaire (165), et la connoissance du mouvement de la lumière : ainsi ce phénomène étant une suite nécessaire du mouvement de la terre, dont nous allons nous occuper, doit être mis au rang des preuves les plus sensibles de ce mouvement.

159. Nous avons vu que les satellites de Jupiter s'éclipsent (66) toutes les fois qu'ils passent dans le cône d'ombre que cette planète projette; et nous exposerons plus bas comment, en observant les lois du mouvement de Jupiter et de ses satellites, on peut déterminer les intervalles qui existent entre chacune de leurs éclipses, et dresser des tables sur ces observations. *Roëmer* observa sur la fin du xvii<sup>e</sup>. siècle que les éclipses des satellites de Jupiter avançaient vers les *oppositions* de cette planète sur l'instant indiqué par ces tables, et retardoient vers les *conjonctions*; ce qui lui fit présumer que la lumière, au lieu de se transmettre en un instant des astres à la terre, employoit un espace de temps sensible à parcourir le diamètre de l'orbe terrestre (1).

---

(1) En effet, si l'on suppose que le soleil est en S, fig. 62, la terre en T, que le cercle T A' B C est l'orbe terrestre, et que jupiter soit placé en J dans les oppositions et en j dans les conjonctions, la distance  $SJ = S j$ ; on voit clairement que, dans

160. On conçoit que, d'après cette observation, les corps doivent paroître d'autant plus tôt qu'ils sont plus près de la terre, et d'autant plus tard qu'ils en sont plus éloignés; et, par une suite naturelle, que les phénomènes lumineux très-éloignés paroissent encore, quoiqu'ils n'existent plus depuis long-temps: ainsi, en supposant les étoiles qui se montrent presque subitement, comme la fameuse étoile de 1572, cent mille fois plus éloignées de nous que le soleil, elles peuvent ne pas encore paroître, quoiqu'elles brillent d'un vif éclat depuis plus de dix-huit mois, de même qu'elles peuvent être encore visibles pour nous, quoique les causes qui les font briller n'existent plus depuis le même temps.

161. Si tout étoit en repos dans l'univers, les corps seroient vus dans la position où ils sont;

les oppositions, jupiter en J est plus près de la terre T que dans les conjonctions en j, et que la différence de ces distances est  $Tj - TJ = TB$ ; conséquemment que la lumière doit arriver plus tôt au point T, lorsqu'elle part du point J, que lorsqu'elle vient du point j, et cela de tout le temps qu'elle met à traverser l'orbe de la terre TB. La loi des retards observés répond si exactement à cette hypothèse, qu'il est impossible de se refuser à l'admettre; et il résulte de l'observation de Roëmer que la lumière met 1142'' à parcourir l'orbe solaire, par conséquent 571'' à venir du soleil S à la terre T.

mais, si le corps visible et le point sur lequel le spectateur est placé sont en mouvement, alors la position apparente du corps visible dépendra de la vitesse et de la direction du mouvement de ce corps et du point duquel on le voit (1).

(1) En effet, si le corps visible *A*, fig. 63, est seul en mouvement dans la direction *AB*, il paroîtra au spectateur en repos, qui est placé en *T*, dans la position *A*, quoiqu'il soit en *a*, si la distance *Aa* est celle que le corps parcourt pendant que la lumière met à arriver de *A* en *T*, ou si les vitesses du corps et de la lumière sont entr'elles comme l'arc *Aa* et le rayon *AT*; car c'est par la direction des rayons reçus que l'on juge la position du corps qui les envoie : or, le corps étant en *A* envoie au spectateur en *T* des rayons suivant la direction *AT*; et c'est seulement lorsqu'il reçoit ces rayons qu'il le voit dans cette direction; cependant, lorsqu'ils lui arrivent, le corps est en *a*, où il ne peut le voir, puisque les rayons qu'il envoie de cette position ne lui arrivent pas encore : il le juge donc dans une position qui a précédé celle qu'il a réellement.

Si c'est le corps lumineux qui reste en repos tandis que le spectateur seul est en mouvement, le corps sera de même aperçu dans la direction où étoit le spectateur par rapport à ce corps lorsque le rayon qu'il a reçu lui a été lancé, c'est-à-dire que, si le spectateur *T*, fig. 64, se meut dans la direction *T'B* avec une vitesse telle qu'il parcourt *Tt* tandis que le rayon de lumière parcourt *AT*, lorsque l'observateur sera arrivé en *t*, il verra le corps lumineux en *a* dans une direction *ta*, parallèle à *TA*, qui est celle que le corps avoit quand il a lancé le rayon de lumière qui est arrivé au spectateur; car le rayon qu'il reçoit en *t* lui vient bien suivant la direction *At*; mais, comme il se meut vers *B* avec une vitesse qui est à celle du

162. D'après les observations de Roëmer, la lumière met  $571''$  à venir du soleil  $S$  à la terre  $T$ , fig. 65, pendant lesquelles la terre parcourt autour du soleil un arc  $Tt$  de  $62''5$  : ainsi la vitesse de la lumière est à celle de la terre comme le rayon est à un arc de  $62''5$ , ou comme  $ST$  est à l'arc  $Tt$ .

163. C'est de ce rapport entre les deux vitesses de la lumière et de la terre que l'on déduit l'explication de l'*aberration* (1).

rayon :  $Tt$  :  $TA$ , il choque la molécule lumineuse dans la direction de son mouvement, et l'impression qu'elle fait sur lui est la même que si cette molécule étoit venue de  $B$  en  $t$  avec une vitesse égale à celle du spectateur : ainsi ce dernier, en  $t$ , reçoit deux chocs du même rayon, l'un dans la direction  $At$ , avec une force exprimée par  $At$ , l'autre dans la direction  $Bt$ , avec une force exprimée par  $Bt$  ; et, comme l'on sait que, lorsqu'un corps est sollicité par deux forces, l'effet produit est le même que s'il n'étoit sollicité que par une seule qui fût la résultante des deux, et que  $at$ , parallèle à  $AT$ , est la résultante des deux forces  $AT$ ,  $Bt$ , il s'ensuit que le spectateur doit voir l'astre en  $a$  dans la direction qu'il avoit en  $A$  lorsqu'il étoit en  $T$ .

(1) A quelque distance de la terre que soit une étoile  $E$ , fig. 66, la vitesse de la lumière, venant de cette étoile, sera à celle de la terre comme le rayon est à un arc de  $62''5$  : si l'on suppose au point de l'orbe terrestre  $T$ , où se trouve la terre, un plan  $aETt$  tangent à cet orbe et passant par l'étoile, on peut, à cause de l'arc infiniment petit que la terre parcourt, pendant que la lumière lui vient de l'étoile, considérer le mouvement de la terre comme s'il avoit lieu sur ce plan. La terre parcourant la distance  $Tt$  tandis que la lumière

164. L'aberration de la lumière affecte les positions des corps célestes, et les fait voir dans une position différente de celle qu'elles ont. Le mouvement apparent d'un corps dans l'espace

lui vient du point E, l'étoile E, lorsque la terre sera en *t*, sera vue en *e* dans une direction telle, que l'angle *Ete*, formé par la direction vraie de l'étoile avec celle dans laquelle elle est vue, sera de  $62''{,}5$  : ainsi, pendant le mouvement continué de la terre, l'étoile paraîtra toujours distante de  $62''{,}5$  de sa vraie position. La terre tournant autour de son orbe, le plan tangent sur lequel l'étoile est vue tournera de même; ce qui fait que l'étoile aperçue paraîtra se mouvoir avec la terre autour de l'étoile vraie, en s'en écartant toujours d'une distance de  $62''{,}5$ ; et, comme la terre fait le tour entier de son orbe en une année, l'étoile apparente décrira autour de l'étoile vraie une circonférence entière, parallèle au plan de l'orbe terrestre, en une année. Le soleil étant vu dans la direction TS, qui est celle du rayon de l'orbe, l'étoile étant aperçue dans le plan TH, tangent au point de l'orbe où aboutit le rayon dans la direction duquel on voit le soleil, et ces deux directions étant perpendiculaires entr'elles, il s'ensuit que l'étoile est vue à  $100^{\text{des}}$  de distance de la direction du soleil. Par le mouvement de la terre autour de cet astre, dans la direction TB, le soleil fixe en S semble se mouvoir de S en D; l'étoile étant dans la direction tH, et paroissant aller de *e* en F ou de H en S, qui lui est parallèle, son mouvement est dans la direction de celui de cet astre; mais elle retarde sur lui de  $100^{\text{des}}$  : ainsi le mouvement des étoiles, connu sous le nom d'aberration, n'est qu'une illusion produite par la combinaison du mouvement de la lumière avec celui de la terre; et, pour rapporter les étoiles à leur vraie position, il suffit de les placer au centre de la petite circonférence qu'elles semblent décrire.

se forme de la combinaison de son mouvement réel avec celui de la terre, c'est cette combinaison de mouvement, observée de notre globe, que l'on nomme *mouvement géocentrique*. Si, au mouvement de l'astre, on ajoute celui de la terre que l'on suppose imprimé à l'astre en sens contraire, on a son mouvement géocentrique en supposant la terre en repos; l'on voit donc que, pour avoir la vraie position d'un astre à chaque instant, il faut le dépouiller de l'effet que produit l'aberration : ainsi on aura cette position vraie en ajoutant à la longitude et à la latitude géocentriques de l'astre observées, son mouvement géocentrique en longitude et en latitude, dans l'intervalle de temps que la lumière met à parvenir de l'astre à la terre.

### *Récapitulation.*

165. Il résulte de tout ce que nous avons exposé dans cette leçon que la terre a deux mouvemens réels; l'un de rotation sur elle-même sur un axe dont la position est invariable par rapport à elle; l'autre de *translation* autour du soleil; que le premier, qui est diurne, et que l'on prouve par la chute d'un corps dans un puits profond, ne peut avoir aucune influence sur nous relativement aux diverses positions que nous avons sur sa surface, lesquelles sont indifférentes, et dérivent toujours de la loi

générale de la pesanteur, et que, quant à la vitesse de ce mouvement, elle ne peut pas être plus sensible que ne nous le seroit celle d'un vaisseau qui voguerait sur une mer tranquille, et dans lequel nous serions renfermés; que le second mouvement, c'est-à-dire, celui de translation autour du soleil fixe au centre du système planétaire, est rendu probable, soit par le rapport des masses entraînées, le soleil ayant une masse énorme comparée à celle qu'offre notre globe, soit par l'analogie qu'il doit y avoir entre les mouvemens de la terre et ceux des autres planètes, et aussi par la loi générale en vertu de laquelle les petits corps célestes tournent autour des grands dont ils sont voisins; enfin il est prouvé par l'aberration, dont il seroit difficile d'expliquer la cause dans une autre hypothèse que celle du mouvement de la terre: cette aberration affectant le mouvement des corps célestes, on ne peut avoir leur position vraie qu'en les en dépouillant: qu'indépendamment de ces deux mouvemens de la terre, son axe en a un particulier, qui produit la précession des équinoxes et la nutation; qu'en admettant ces divers mouvemens, les lois en vertu desquelles les corps célestes se meuvent sont uniformes; qu'enfin la pensée de ces mouvemens de notre globe réunit en sa faveur la simplicité, l'analogie, et tout ce qui caractérise le vrai système de la nature. « C'est ainsi, dit Laplace, que l'astronomie, s'est élevée à travers les illusions des sens; et ce n'a été qu'après les avoir dissipées par un grand nombre d'observations et de calculs.

que l'homme enfin a reconnu le mouvement du globe qu'il habite et sa vraie position dans l'univers.»

---

APPENDICE A LA SECONDE LEÇON  
DES APPARENCES DUES AU MOUVEMENT  
DE LA TERRE.  
DU TEMPS ET DE SA MESURE.

§. XX.

*Des apparences dues au mouvement  
de la terre.*

166. **T**OUT spectateur en mouvement sur la surface de la terre remarque, dans les objets en repos qui son placés à diverses distances de lui, des mouvemens très-différens : les plus voisins paroissent avoir, dans une direction opposée à son mouvement, des vitesses d'autant plus grandes, qu'il s'en rapproche davantage, et les objets les plus éloigués, tels que la lune et les astres, semblent se mouvoir avec lui et suivre sa route.

167. C'est par l'angle que les objets font avec une direction donnée, que l'on juge leur vitesse (1).

---

(1) Ainsi, pour le spectateur en repos en S, fig. 67, le corps A, en se portant en a, paroît avoir une vitesse plus

168. On sait que, sur un vaisseau mu d'un mouvement uniforme, tous les corps sont entraînés par ce mouvement en conservant leurs positions respectives, et qu'un corps, lancé verticalement de bas en haut, retombe au point d'où il a été lancé absolument de même que si le vaisseau eût été sans mouvement lorsque le corps a été lancé et qu'il est retombé (1).

169. La terre ayant deux mouvemens, l'un de rotation sur son axe (140), l'autre de translation autour du soleil (156), un spectateur, placé sur la

grande que celle du corps B, quoique la distance  $Bb$ , parcourue dans le même temps, soit double de  $Aa$  : cette apparence est due à ce que la distance  $BS$  étant plus que double de  $SA$ , l'angle  $BSb$  est plus petit que l'angle  $ASa$ .

Ainsi, si un spectateur en  $S$ , fig. 68, aperçoit les corps  $B, C, D, E$ , sur une même droite, dans la direction d'un astre  $A$ , il verra, en se portant de  $S$  en  $s$ , tous les corps s'éloigner de cette direction en formant des angles  $Bsb, Csc, Dsd$ , d'autant plus grands, que les corps sont plus près de lui. Quant à l'étoile, ses deux directions  $SA, sa$ , sont sensiblement parallèles, à cause de sa grande distance à la surface de la terre comparée au petit espace parcouru par le spectateur ; et, comme ce dernier rapporte toujours la position de cette étoile aux objets qu'il a sous les yeux, sur la surface de la terre, il lui semble qu'il s'éloigne avec elle, et qu'elle l'accompagne dans sa marche.

(1) Cela résulte de ce que, en lançant le corps  $A$ , fig. 69, verticalement, c'est-à-dire de  $A$  en  $V$ , il est animé par deux mouvemens, le premier vertical  $AV$ , le second horizontal  $Aa$  : par le premier seul il retomberoit au point  $A$ , par

surface de la terre, doit porter sur la position des autres corps répandus dans l'espace un jugement indépendant de son mouvement; de même que nous avons vu que le spectateur, en mouvement sur la surface de la terre, porte sur les corps en repos un jugement dépendant de son mouvement (167). Nous allons examiner quels effets ce double mouvement doit produire sur les corps qui sont à la surface de la terre, ainsi que sur les étoiles et le soleil; enfin l'aberration, la précession des équinoxes et la nutation.

17c. Tous les objets placés sur la surface de la terre doivent être entraînés dans son mouvement de la même manière que ceux qui sont placés dans un vaisseau mu d'un mouvement uniforme; car, le mouvement de la terre étant commun à tous les corps situés à sa surface et aux fluides qui en recouvrent une partie, leurs mouvemens relatifs sont les mêmes que si elle étoit en repos. Les fluides conservent leur niveau, ainsi qu'on l'observe lorsqu'on imprime un mouvement de rotation à un vase qui contient de l'eau. Un projectile, lancé verticalement de bas en haut, retombe au point d'où il étoit parti par la même loi qui agit sur celui qu'on lance dans un vaisseau (168): vu du vaisseau, le projectile semble décrire une ligne droite; vu du rivage, il

---

le second il seroit transporté au point *a* dans le temps qu'il auroit mis à monter et à descendre; et c'est en vertu de ces deux mouvemens qu'il doit retomber au point *a*, qui est le même que celui où est arrivé le point *A*, d'où il a été lancé.

décrit la parabole  $ABCDEFa$ , fig. 69 : ainsi un corps, lancé de dessus la surface de la terre, décrit dans l'espace une courbe à double courbure, formée de la tendance générale de tous les corps au centre de la terre, du mouvement de rotation de notre globe et de son mouvement de translation, quoique le mouvement apparent de ce corps soit une ligne droite.

171. Par le mouvement de rotation de la terre, les astres ont un mouvement diurne apparent d'orient en occident ; par celui de translation autour du soleil, ils décrivent dans le ciel une courbe semblable et parallèle à l'orbe de la terre, dans laquelle les positions diffèrent de 200 degrés de celle de la terre sur son orbe (1).

---

(1) En effet, soit la terre en  $T$ , fig. 70, et un astre en  $A$  ; ce dernier sera vu par le spectateur sur la terre dans la direction  $TA$  ; mais, si elle se meut sur l'orbe  $T\epsilon\gamma\theta$ , la direction de l'astre doit changer dans l'espace : ainsi, en suivant la marche de la terre en  $\epsilon$ , la direction sera  $\epsilon A$  ; en  $\gamma$ ,  $\gamma A$  ; et en  $\theta$ ,  $\theta A$  ; et ces changemens de direction, par rapport au mouvement de la terre, produiront sur le spectateur supposé en repos en  $T$ , fig. 71, la même apparence que si l'astre se mouvoit dans la courbe  $AaA'a$  ; dans laquelle les directions  $TA, T\alpha, TA', T\alpha'$ , sont parallèles à celles  $TA, \epsilon A, \gamma A, \theta A$  ; on voit donc que l'apparence qui s'offre à l'œil du spectateur mu sur la terre en  $T\epsilon\gamma\theta$ , fig. 70, est absolument la même que celle de l'astre  $AaA'a$ , fig. 71, pour le spectateur en repos en  $T$  ; car ici la courbe  $AaA'a$  est semblable et parallèle à l'orbe de la terre  $T\epsilon\gamma\theta$ .

172. La courbe que l'astre paroît décrire dans le ciel est d'autant plus grande, qu'il est plus près de la terre, et d'autant plus petite, qu'il en est plus éloigné; car le diamètre de la courbe décrite est d'autant plus grand, que la différence des directions sous lesquelles on le voit des deux-extrémités de l'orbe terrestre est plus considérable; et cette différence est d'autant plus considérable  $ATB - A\gamma B$  et  $aTB - a\gamma B$ , que l'astre en  $A$  et en  $a$  est plus près de l'orbe terrestre: donc le diamètre de la courbe décroît avec l'augmentation de la distance.

173. Il suit de cette proposition que les étoiles sont à une distance infiniment grande de la terre; car la courbe qu'elles paroissent décrire dans le ciel en vertu du mouvement de la terre est insensible, son diamètre ne pouvant pas être apprécié.

174. Par le mouvement de translation de la terre dans son orbite, les étoiles doivent paroître décrire annuellement une circonférence parallèle à l'éclip-

Mais, pour le spectateur placé sur la terre en mouvement, fig. 70, la plus petite inclinaison de l'astre est celle qu'il observe quand la terre est en  $T$ , et la plus grande lorsque la terre est en  $\gamma$ . Pour le mouvement de l'astre, fig. 71, la plus petite inclinaison est lorsque cet astre arrive en  $A$ , et sa plus grande lorsqu'il est en  $A'$ ; et, comme toutes les positions  $T\gamma$  font avec celles  $AA'$  des angles de 200 degrés, ainsi que toutes les autres positions sur les courbes, il s'ensuit que l'apparence de l'astre est toujours aperçue à 200 degrés sur la courbe de la position de la terre sur son orbe, et conséquemment que la position des astres sur leur courbe est la même que celle du soleil.

tique, et dont le diamètre sous-tend, dans le ciel, un angle égal à celui sous lequel on voit leur centre de deux extrémités de l'orbe : ce mouvement a beaucoup de rapport avec celui qui résulte de la combinaison de ceux de la terre et de la lumière, appelé *aberration* ; mais il en diffère, en ce que les astres doivent avoir, sur la circonférence qu'ils décrivent, la même position que le soleil, tandis que, par l'*aberration*, elles en ont une qui retarde de 100 degrés sur le mouvement solaire : d'ailleurs, le diamètre de la courbe qu'elles paroissent décrire en vertu du mouvement de la terre est insensible, et celui de celle qu'elles décrivent par l'*aberration* sous-tend dans le ciel un angle de 125''.

175. Par le mouvement de rotation de la terre nous avons le jour et la nuit, et par son mouvement de translation autour du soleil nous avons les jours équinoxiaux, solsticiaux, et tous les jours intermédiaires, conséquemment les quatre saisons.

176. On sait que le jour est dû à la lumière du soleil quand il est au-dessus d'un hémisphère, et que la privation de cette lumière, dans le même temps, produit sur l'hémisphère opposé la nuit, et réciproquement : ainsi, que le soleil tourne autour de la terre supposée immobile, ou que la terre tourne sur son axe, dans un même espace de temps, devant le soleil immobile, toutes les parties de la terre seront successivement éclairées dans l'un ou l'autre cas, et auront également, dans ces deux hypothèses, le jour et la nuit.

177. On appelle mouvement *héliocentrique* celui

d'un astre autour du soleil. Par ce mouvement, la terre se meut dans un orbé elliptique à un des foyers duquel le centre du soleil est placé.

La plus petite distance de la terre au soleil se nomme *périhélie*, et sa plus grande *aphélie*: ces distances, comme on voit, sont les mêmes que celles appelées *périgée* et *apogée*; mais leurs directions sont opposées.

178. De l'inclinaison de l'équateur terrestre sur le plan de l'écliptique et du mouvement de la terre autour du soleil, résultent les quatre saisons que l'on observe (1).

(1) La terre, dans sa révolution annuelle autour du soleil ayant son axe de rotation  $Pp$ ,  $\Pi\pi$ ,  $P'p$ , fig. 72, incliné sur le plan de l'écliptique  $OQ$ , doit avoir son mouvement de rotation dans le plan de l'équateur  $AB$ ,  $\alpha\beta$ ,  $ab$ ; et, comme l'axe de la terre conserve toujours la même inclinaison, il en résulte que, dans la position  $APBp$ , les rayons  $SD$ ,  $sE$ , envoyés du soleil, éclairent plus l'hémisphère  $ADB$  que celui  $BEA$ . C'est alors que l'on a l'été sur le premier hémisphère, et l'hiver sur le second: mais, lorsque la terre est à l'autre extrémité de son orbite  $adP'be p$ , l'hémisphère le plus éclairé étant celui  $acb$ , et le moins éclairé celui  $adb$ , on conçoit que l'été et l'hiver ont changé d'hémisphère. Dans les positions extrêmes, lorsque le soleil est à sa plus grande distance de l'équateur  $AB$ ,  $ab$ , cet astre est dans les solstices; et, quand au contraire la terre se trouve en  $\alpha\pi\beta\pi$ , également distante des solstices, le soleil étant dans le plan prolongé de l'équateur, il est dans la direction de la ligne équinoxiale: alors les deux hémisphères étant éclairés de la même manière, il y a égalité de jour et de nuit sur toute la terre, et conséquemment le printemps et l'automne. Il suit de là que l'ordre des saisons s'ex-

179. Nous avons vu que le mouvement apparent du soleil autour de la terre présentait six inégalités (135) : la première, provenant du mouvement de cet astre dans une ellipse ; la seconde, par son mouvement dans l'écliptique rapporté à son mouvement diurne dans le plan de l'équateur ; la troisième, dans la position du grand axe de l'ellipse et le mouvement de son périhélie ; la quatrième, dans le mouvement des nœuds ou des intersections de l'écliptique et de l'équateur ; la cinquième, dans le rapprochement presque insensible de l'équateur et de l'écliptique ; la sixième, dans l'excentricité de son orbe. Ces six inégalités existent également en admettant le mouvement de la terre autour du soleil.

180. Comme le mouvement apparent de cet astre n'est qu'une illusion produite par le mouvement réel de la terre dans un orbe tout à fait semblable à celui que le soleil paroît décrire, les vitesses angulaires de la terre sur cet orbe sont les mêmes que les vitesses apparentes de cet astre ; ainsi les vitesses angulaires sont réciproques aux carrés des rayons vecteurs, et les aires décrites par ces rayons, sont proportionnelles aux temps.

181. Pour que la terre se meuve sur l'orbe solaire

---

plique également bien, soit que l'on suppose au soleil un mouvement annuel autour de l'écliptique terrestre, soit que l'on suppose à la terre un mouvement annuel autour de cet astre, pendant lequel il conserve constamment la même inclinaison.

en conservant toujours la même inclinaison sur son axe, il faut que chaque point de l'écliptique terrestre se présente successivement au soleil dans son mouvement autour de cet astre; ainsi, si la terre  $T$ , fig. 73 en se mouvant sur l'orbe  $T t D E G$  présente au soleil  $S$  le point  $A$  de son écliptique, elle lui offrira dans la position  $t$  le point  $c$  éloigné du point  $a$  (qu'elle lui présentait dans la première situation) de l'arc  $ac$ , mesure de l'angle  $atc$  égal à l'angle  $tsT$  que la terre a décrit autour du soleil, et qui lui-même égale l'angle  $I ts$  que le soleil paroît avoir décrit. Puisque dans ce mouvement les arcs journaliers de la terre autour du soleil se comptent sur l'écliptique terrestre, comme les angles journaliers de cet astre se compteroient sur l'écliptique céleste, et que ces angles doivent être rapportés au mouvement diurne de la terre sur le plan de l'équateur, les inégalités qui résultent dans le mouvement du soleil, relativement aux arcs de l'écliptique céleste rapportés à l'équateur céleste, sont les mêmes que celles des arcs de l'écliptique terrestre rapportés à l'équateur terrestre; ainsi, à partir des équinoxes, ces arcs sont plus petits dans le rapport du cosinus de l'angle d'inclinaison des deux plans au rayon; et, dans les solstices, l'angle rapporté est plus grand que l'angle vrai dans le rapport du rayon au sinus de l'angle d'inclinaison des deux plans.

182. On conçoit aussi que le grand axe de l'ellipse de l'orbe terrestre étant constamment dans la même direction du grand axe de l'ellipse de l'orbe solaire, toutes les inégalités produites par le mouvement de

celui-ci doivent être les mêmes dans le mouvement de l'autre.

183. Le mouvement de l'axe de la terre autour des pôles de l'écliptique occasionnant un mouvement rétrograde dans les nœuds de l'orbe terrestre avec le plan de l'équateur, et ce mouvement étant le même, soit que la terre se meuve autour du soleil, soit que cet astre se meuve autour de notre globe, on sent que les inégalités qui en résultent, affectant de la même manière l'un ou l'autre de ces mouvements, les inégalités produites doivent être les mêmes dans les deux cas.

184. L'inégalité produite par le mouvement de la terre dans son orbe, rapporté à son mouvement diurne dans le plan de l'équateur, étant la même dans l'hypothèse de la marche du soleil autour de notre globe que dans celle de la terre, autour de cet astre; dans l'une et dans l'autre les inégalités étant proportionnelles au rapport du rayon au cosinus de l'angle d'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, la variation dans la grandeur de l'angle doit produire dans les deux cas des inégalités semblables.

185. L'orbe dans lequel le soleil paroît se mouvoir étant le même que celui dans lequel la terre se meut, il en résulte que la variation dans l'excentricité du premier doit affecter de la même manière le second.

### *Récapitulation.*

186. Il résulte de ce que l'on vient d'exposer que le mouvement de la terre produit diverses apparences, telles que le mouvement des astres, celui du

soleil, le jour et la nuit, les saisons, la précession des équinoxes, la nutation, lesquelles apparences mieux approfondies ont été rapportées à leurs vraies causes; que le mouvement de la terre étant insensible à sa surface, tout s'y passe comme dans un vaisseau emporté par un mouvement commun; que le mouvement de notre globe autour du soleil produisant une apparence de mouvement semblable au sien dans tous les corps célestes, au moyen duquel l'angle que leur diamètre sous-tend est d'autant plus grand que ces corps sont plus près du soleil; on a dû juger que les étoiles sont à des distances infinies, puisque leur mouvement est insensible; enfin, que les six inégalités que nous avons précédemment observées, en supposant le mouvement du soleil autour de la terre, s'expliquent également bien, en admettant celui de notre globe autour de cet astre.

### §. XXI.

#### *Du Temps et de sa mesure.*

187. Toute espèce de mouvemens uniformes est propre à mesurer le temps : parmi ceux qui existent on a choisi celui qui marque la durée du jour moyen comme étant simple et commode.

188. il existe deux sortes de jour (97 et 104), le sidéral et l'astronomique : le premier, qui est la durée d'une révolution de la terre par rapport aux étoiles, est uniforme, 1<sup>o</sup> parce que le mou-

vement de la terre qu'il représente est uniforme ;  
 2<sup>o</sup> parce que le mouvement sur l'écliptique rapporté à l'équateur est nul pour les étoiles ; le second, qui est la durée d'une révolution de la terre par rapport au soleil, est variable et se compose du jour sidéral, plus du temps que la terre met dans cette durée à décrire la portion de l'arc qu'elle parcourt autour du soleil pendant sa révolution annuelle. En prenant pour unité le jour astronomique moyen (138), le jour sidéral = 0<sup>jour</sup> 997269672.

189. L'année sidérale étant la durée de la translation de la terre autour du soleil rapportée aux étoiles ; l'année tropique, la durée du mouvement de la terre entre deux équinoxes de printemps ; et les équinoxes ou points d'intersection de l'écliptique sur l'équateur ayant un mouvement rétrograde ou opposé à celui de la terre, par lequel ces points décrivent un arc inégal, dont la moyenne est de 154'', 63, la durée de l'année sidérale, qui se trouve à peu près uniforme, est de 365 jours 256383 ; mais l'année tropique est variable et se compose de l'année sidérale, moins le temps que la terre met à parcourir l'arc variable de rétrogradation de l'écliptique, et comme la durée nécessaire pour parcourir l'arc moyen est de 0,014119, l'année

tropique moyenne est de 365 jours  $242264$ .

190. Pour mesurer les parties de la durée, on emploie comme unité le jour astronomique, ou le retour du soleil au même méridien, pour mesurer de plus longues durées on se sert de l'année tropique, ou du retour de la terre aux mêmes équinoxes. Tout le monde sait que la réunion de cent années forme un siècle, et que l'année se divisant en jours, chacun de ceux-ci se divise en heures, l'heure en minutes, la minute en secondes, etc.

191. Toute durée devant avoir un commencement, le jour doit commencer au passage d'un méridien dans le rayon vecteur de la terre au soleil, l'année d'une position de la terre sur l'écliptique; et l'ère, qui est le commencement de toutes les révolutions, d'une position observée et déterminée du grand axe de l'ellipse terrestre, par rapport à l'intersection de l'équateur et de l'écliptique.

192. L'ère commence à des époques différentes chez toutes les nations, parce que chacune a pris pour origine de son ère un événement remarquable, qui lui est ordinairement particulier : cette diversité dans le choix de l'origine de la durée nécessite des calculs continus pour rapporter à une ère les observations faites dans une autre: il seroit donc à désirer que tous les

peuples adoptassent une même ère ; mais, pour qu'elle fût également utile à tous, et que son origine ne contrariât les principes politiques ou religieux d'aucun, il faudroit que cette origine, indépendante des révolutions morales, fût fondée sur les phénomènes astronomiques.

193. La durée moyenne de l'année étant de 365 jours 242264, on a imaginé des *périodes* (68) ou cycles, afin de donner à chaque année un nombre de jours complets, et l'on a eu, ainsi, des années de 365 et des années de 366 jours (1); mais la différence qui existe entre les périodes de chaque nation en établit dans les dates et les indications des phénomènes : l'inexactitude de

(1) Si l'année avoit 365,25 il seroit facile, en intercalant un jour tous les quatre ans d'avoir des années égales, savoir, trois consécutives de 365 jours et une quatrième de 366, nommée *bissextile*. Mais comme l'année moyenne n'est que de 365 jours 242264; et qu'il s'en faut de 0,007736 pour que cette intercalation soit exacte. Il s'ensuivroit, qu'au bout de quatre siècles on auroit intercalé 31,0944 de trop; on est convenu pour éviter cette augmentation de retrancher *trois années bissextilles* par quatre siècles consécutifs. Ainsi on retranche celle qui doit avoir lieu en 1700, en 1800, en 1900, on laisse subsister celle qui doit avoir lieu l'an 2000; et l'on continue ainsi. Les 0,0944 jours, qui restent encore tous les quatre siècles obligeront de retrancher une nouvelle année bissextile au bout de 38 siècles et demi environ. Laplace propose de supprimer une bissextile tous les 40 siècles.

plusieurs de ces périodes a placé quelquefois les fêtes consacrées à l'agriculture hors des saisons où elles devoient naturellement se célébrer. Pour détruire et prévenir la confusion produite par la diversité des périodes, on pourroit rapporter l'origine de l'année à un phénomène astronomique, soit à un équinoxe, soit à un solstice.

On auroit pu lorsqu'on réforma le calendrier grégorien, fixer le commencement de l'année au solstice d'hiver, ce qui auroit fait concourir l'origine de chaque saison avec le commencement d'un mois.

194. La division de l'année en douze mois est fort ancienne et presque universelle. Les Egyptiens avoient des mois égaux, de trente jours chacun, et ils rejettoient en dehors, sous le titre de jours complémentaires, ceux qui étoient nécessaires pour compléter l'année. Cette division qui avoit été adoptée en France, sur la fin du siècle dernier, vient d'être rejetée parce qu'elle nécessitoit des mesures administratives, trop embarrassantes.

195. De l'adoption des mois de trente jours, il résulteroit une division nouvelle, en décades. Mais la division des semaines qui présente une période des mois et des années, dont l'origine se perd dans la plus haute antiquité, que l'on

retrouve dans les calendriers de tous les peuples, et qui est identiquement la même sur toute la terre, a prévalu lorsque l'on a repris l'ancienne division des mois.

196. Le jour commence à différentes époques chez plusieurs nations ; mais Laplace pense qu'il seroit naturel de le commencer à minuit, c'est à-dire, au passage du soleil sur le méridien opposé, afin de pouvoir comprendre dans sa durée tout le temps de sa présence sur l'horizon.

Enfin, ce savant pense que la division du jour en dix heures, celle de l'heure en 100 minutes, de la minute en 100 secondes, est la plus simple ; et la plus commode pour les usages astronomiques. Dans les usages habituels on divise le jour en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes.

197. Les nations maritimes font passer par leurs villes capitales le premier méridien terrestre, d'où elles comptent les autres ; ce qui donne aux cartes marines une sorte de défaut, en ce qu'elles indiquent chacune, pour un même lieu, un nombre de degrés différens. Longtemps, les puissances maritimes de l'Europe se sont occupées de la fixation d'un méridien commun et universel, afin de compter de ce point toutes les longitudes terrestres ; Laplace désire-

roit que l'on prit celui dont le minuit correspondoit à l'instant où le grand axe de l'écliptique étoit perpendiculaire à la droite d'intersection de l'équateur et de l'écliptique, lequel méridien est à l'orient de Paris de 185<sup>des</sup> 30'.

### *Résumé.*

198. Il suit des observations que nous venons de rapporter que les variations dans la manière de compter la durée du temps et la différence qui existe entre les ères adoptées par chaque nation, jetant beaucoup de confusion dans les dates des faits et celles de l'observation des phénomènes, il seroit utile, pour tous les peuples, qu'ils adoptassent pour la mesure du temps un mode immuable, uniforme, et tel qu'on peut l'obtenir des grands phénomènes astronomiques, en faisant coïncider dans le choix de l'époque l'origine de l'ère et celle de l'année; que les divisions les plus simples sont celles de l'année en quatre saisons et en douze mois, celle du mois en trente jours (en rejetant à la fin de l'année les jours complémentaires), mais que l'embarras que ce rejet nécessite, a fait préférer la division inégale des mois anciens : celle du jour en dix heures, qui se compteroient en partant de minuit ou du passage du soleil au méridien opposé au lieu de l'observateur; enfin celle de l'heure en 100 minutes, et la minute en 100 secondes; que l'on pourroit également faire cesser la confusion qui règne dans les cartes marines par suite de la diver-

sité du lieu que chaque nation maritime a désigné pour premier méridien , en fixant une origine unique pour méridien universel ; que ce premier méridien commun pourroit être celui dont le minuit correspondoit à l'époque où le grand axe de l'écliptique étoit perpendiculaire à la droite d'intersection de l'équateur à l'écliptique, lequel est à  $185^{\text{deg.}} 30'$  à l'orient de Paris.

---

 III<sup>me</sup>. LEÇON.

 DES MOUVEMENS DE LA LUNE. DE LA  
 THÉORIE DES ÉCLIPSES DE SOLEIL ET  
 DE LUNE.

199. LA lune a, comme le soleil, trois mouvemens distincts, l'un diurne d'orient en occident, l'autre périodique autour de la terre, le troisième de rotation sur son axe.

## §. XXII.

*Du mouvement diurne de la Lune.*

200. Ce mouvement n'est qu'apparent, puisqu'il n'est produit, comme le mouvement diurne de tous les astres, que par la rotation de la terre sur son axe (141). Si la lune étoit fixe dans le ciel comme une étoile, la durée de ce mouvement diurne apparent seroit de  $\alpha^j$  99227; mais, comme elle a d'occident en orient un mouvement  $Ll$ , fig. 74, dans le sens de celui de la terre  $SB$ , et que, par ce mouvement, elle décrit un arc moyen  $Ll$  de  $14^{\circ}6'410''$  avant que le spectateur en  $S$  l'ait rejointe en  $s$ , il s'ensuit que l'excès du jour lunaire sur la durée moyenne

du mouvement diurne de la terre, doit être de  $0^{\text{jour}} 03680''$ , et que le jour lunaire est de 1 jour  $0347''$ , c'est-à-dire de  $0^{\text{jour}} 03407''$  plus long que le jour solaire. En effet, si l'on compare la marche de la lune à celle du soleil, on voit que, lorsque l'un et l'autre se lèvent ensemble, la lune se couche plus tard, et continue à se lever et à se coucher plus tard, jusqu'à ce qu'elle ait fait une révolution entière pour rejoindre le soleil.

### §. XXIII.

#### *Du mouvement périodique de la Lune.*

201. Si le mouvement diurne du soleil, plus lent que celui des étoiles, donne à cet astre, par rapport à elles, un mouvement d'occident en orient, la lune, dont le mouvement diurne est plus lent encore que celui du soleil, doit, à plus forte raison, en avoir un dans le même sens. En observant jour par jour la position de la lune par rapport aux étoiles, on voit qu'elle se meut en effet dans cette direction, et que la durée de ce mouvement sidéral est de  $27^{\text{jours}} 52166''$ .

202. On ne compare pas seulement le mouvement de la lune aux étoiles, mais encore à ses

*syzygies*. On nomme ainsi la position des deux astres dans un plan qui passe par le centre de la terre et qui est perpendiculaire à l'orbe de la terre, fig. 75, ces deux astres peuvent être en *opposition* *LS*, ou bien en *conjonction* *IS*. la durée du mouvement de la lune, par rapport à ces conjonctions avec le soleil, se nomme révolution *synodique*; elle est plus longue que la révolution sidérale de 2 jours 20893'', c'est-à-dire qu'elle est de 29 jours 53059(1).

203. En observant jour par jour les directions

(1) En effet; pendant que la lune *L*, fig. 76, en conjonction avec le soleil, se meut autour de la terre *T* pour faire sa révolution sidérale *LMNO*, celle-ci se meut autour du soleil de *T* en *t*, la lune a fini sa révolution sidérale en *l* sans être en conjonction *tms*; et il faut, pour que la conjonction ait lieu, que la lune décrive un nouvel arc *lm*, dont l'angle *ltm* autour de la terre soit égal à l'angle *TSt* que la terre a décrit autour du soleil: ainsi la révolution synodique doit être plus grande que la révolution sidérale d'un angle qui dépend du rapport des vitesses de la lune autour de la terre et de la terre autour du soleil; plus la première vitesse sera grande par rapport à la seconde, moins la révolution synodique différera de la révolution sidérale.

Appelant *V* la vitesse de la terre, *v* la vitesse de la lune, *c* la circonférence du cercle, *x* l'arc que la lune doit parcourir autour de la terre de plus que son mouvement sidéral pour effectuer son mouvement synodique, on auroit, si les vitesses étoient uniformes,  $V : v :: x : c + x$ ; d'où l'on tire  $x = \frac{Vc}{v-V}$ .

de la lune dans le ciel, ainsi que ses distances à la terre, on peut tracer la courbe qu'elle décrit dans l'espace.

204. Parmi toutes les méthodes employées pour prendre la distance de la lune à la terre, celle que l'on préfère consiste à faire observer cet astre  $L$ , fig. 77, par deux spectateurs placés en  $A$  et  $B$  dans deux positions connues, et à leur faire prendre dans le même instant l'angle de sa direction  $AL, BL$ , avec les verticales  $AD, BF$  d'où l'on conclut la longueur  $CL$  (1).

205. Le rayon de la terre  $TR$ , fig. 78, est vu de la lune  $L$ , à sa distance moyenne  $LT$ , sous un angle  $TLR$  de  $10661''$ ; celui de la lune  $Lr$  est vu de la terre  $T$  sous un angle  $LTr$  de

(1) On connaît l'angle  $ACB$ , les rayons de la terre  $AC, AB$ : donc la corde  $AB = 2 \sin. \frac{ACB}{2} \times AC$ . On connaît

aussi les angles  $LAC, LBC$ , supplémens de  $DAL, FBL$ , ainsi que les angles  $CAB = CBA = \frac{200^{\text{d}} \text{r} 5}{2} - ACB$ ; d'où il

suit que l'on connaît  $LAB = LAC - BAC$  et  $LBA = LBC - ABC$ ; conséquemment dans le triangle  $LAB$  on connaît les angles  $LAB, LBA$  et le côté compris entre eux: donc on connaît les côtés  $LA$  et  $LB$ . De même, dans les triangles  $LAC$  ou  $LBC$ , on connaît l'angle  $LAC$  ou  $LBC$  et les côtés  $LA, AC$ , ou  $LB, BC$ , qui forment ces angles: donc on doit connaître le rayon vecteur ou la distance de la lune  $LC$ , qui a près de 60 rayons de la terre.

2911<sup>5</sup> : ainsi le rapport des rayons est à peu près :: 11 : 3 ; donc le diamètre de la lune est à peu près les  $\frac{1}{11}$  de celui de la terre, et son volume  $\frac{1}{49}$  de celui de la terre.

Lorsque l'on connoît le diamètre de la lune pour une distance, on détermine toutes les autres distances, attendu qu'elles sont réciproques aux diamètres apparens (127).

206. La courbe déduite des observations sur les directions du rayon vecteur de la lune et de la distance de la lune à la terre pour chaque direction, est une ellipse ALBM, fig. 79, à un des foyers de laquelle le centre de la terre T est placé. Si l'on prend pour unité la moyenne distance TM de cette ellipse au foyer, son excentricité CT = 0,0548553.

207. L'orbe de la lune et celui de la terre ne sont pas dans un même plan ; le premier Ll, fig. 80, est incliné sur le second TS*t* de 5°, 7222<sup>ll</sup>.

208. Le mouvement périodique de la lune éprouve trois sortes d'inégalités ; 1° dans sa vitesse ; 2° dans le mouvement de son orbe ; 3° dans sa courbure.

209. Les inégalités dans sa vitesse s'observent, soit dans les arcs de l'ellipse qu'elle parcourt dans des temps égaux, soit dans la durée de sa révolution sidérale.

210. L'observation a fait connoître que la lune a sur son orbe des vitesses différentes, en raison de sa proximité à la terre; qu'au périégée cette vitesse est la plus grande, tandis qu'à l'apogée elle est la plus petite; que ces vitesses sont telles, que la plus grande équation du centre est de  $6^{\circ},9983''$  (132), et que les vitesses angulaires sont réciproques aux carrés du rayon vecteur: delà, que les aires tracées par ce rayon sont proportionnelles aux temps (130). Cette inégalité est semblable à celle du mouvement de la terre dans son orbe elliptique.

211. La durée de la révolution sidérale de la lune n'est pas toujours la même; car, en comparant les observations modernes aux anciennes, on remarque qu'il y a une accélération dans le moyen mouvement de cet astre. Laplace a trouvé, par la découverte de sa cause, que cette accélération, peu sensible depuis l'éclipse la plus ancienne dont l'observation nous ait été conservée, est soumise à un mouvement périodique; et l'on conçoit qu'il faudroit une suite d'observations faites pendant un grand nombre de siècles pour en déduire exactement la loi qu'elle suit.

212. L'orbe lunaire a trois sortes de mouvemens: l'un dans son grand axe, l'autre dans ses nœuds, le troisième dans son inclinaison

sur l'orbè de la terre, lesquels sont analogues à ceux de l'orbè terrestre.

213. Le grand axe de l'orbè lunaire  $ATB$ , fig. 81, a un mouvement autour du centre de la terre  $T$  d'occident en orient  $Aa$ , dans le sens du mouvement de la terre en vertu duquel il décrit  $0^{\text{des}}$ ,  $1237''$  par jour. La révolution sidérale du périée  $TA$  étoit de  $3232^{\text{jours}}$   $58075''$ , au commencement de ce siècle; mais cette révolution n'est pas constante; et pendant que le mouvement de la lune s'accélère de siècle en siècle, celui de son périée se ralentit.

Au commencement de ce siècle, la longitude du périée lunaire étoit de  $295^{\circ}$   $66824$ . Et la longitude moyenne de la lune ou sa distance moyenne, angulaire à l'équinoxe du printemps, rapporté à l'écliptique, étoit de  $124^{\circ}$   $01299$ .

214. Si le plan de l'orbè lunaire  $ACBD$ , fig. 82, avoit une position constante dans l'espace, la ligne  $AB$ , qui est celle d'intersection de cet orbè avec l'orbè terrestre  $TtM\theta$ , conserveroit la même direction pendant toute la durée du mouvement de la terre  $T$  sur son orbè; d'où il suivroit que, dans les positions  $T, t, \theta$  de la terre, la direction des nœuds seroit  $AB, ab, \alpha\beta$ ; et si la direction des nœuds  $AB$  étoit dans celle du rayon vecteur  $ST$  lorsque la terre est en  $T$ ,

il faudroit qu'elle fit une révolution entière sur son orbe pour que les nœuds se trouvassent dans la même position par rapport au rayon vecteur de la lune au soleil : ainsi l'année, rapportée aux nœuds de la lune seroit la même que l'année sidérale ; mais, comme l'orbe lunaire change continuellement de direction dans l'espace, celle des nœuds doit varier aussi. On a observé que le mouvement des nœuds étoit rétrograde sur celui de la lune, c'est-à-dire que, tandis que cet astre se meut de  $B''$  en  $b$  ou d'occident en orient, les nœuds se meuvent de  $b$  en  $B''$  ou d'orient en occident ; d'où l'on voit que, par le mouvement contraire de ces nœuds, leur direction  $A'B'$  doit se trouver dans celle du rayon vecteur  $S\theta$  avant que la terre n'ait fait sa révolution entière, et que ce mouvement est tel, que l'année, rapportée aux nœuds de la lune, avance sur l'année tropique de  $18^{\text{jours}} 622315$ , et que la durée moyenne d'une révolution de la terre rapportée aux nœuds de l'orbe lunaire, est de  $346^{\text{jours}} 619949$ .

L'orbe lunaire coupe le plan de l'orbe terrestre en deux points  $AB$  ; le premier, incliné sur le second, est coupé par ce plan en deux parties, l'une  $BCA$ , qui s'élève au-dessus de l'écliptique, l'autre  $ADB$ , qui s'abaisse au-des-

sous; et c'est dans ce plan que la lune se meut. On appelle *nœud ascendant* le point B d'où cet astre s'élève au dessus de l'écliptique, et *nœud descendant* le point A d'où il s'abaisse au-dessous. Au commencement de ce siècle, la longitude du nœud ascendant étoit de  $17^{\circ}, 69^{\circ}33'$ : la durée de la révolution sidérale des nœuds étoit, à cette époque, de  $6793^{\text{jours}} 42^{\text{h}} 18^{\text{m}}$ , et au commencement de 1750, de  $6793^{\text{jours}} 46500$ .

Le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire est assujéti à plusieurs inégalités, dont la plus grande est proportionnelle au sinus du double de la distance angulaire du soleil S *t* B'' au nœud ascendant B'' de l'orbe lunaire; il s'élève à  $1^{\circ} 8102''$  dans son maximum, c'est-à-dire, lorsque les distances angulaires sont 50, 150, 250, 350 degrés: ces inégalités sont nulles lorsque les angles sont de 100, 200, 300 degrés.

215. Nous avons vu que l'orbe lunaire LL, fig. 80, est incliné sur l'orbe terrestre (207), et que l'angle moyen de son inclinaison est de  $5^{\text{deg}} 7222$ . Cet orbe, oscillant sur l'orbe terrestre, fait varier son inclinaison; sa plus grande variation, qui est de 0,1627, est proportionnelle au cosinus du double de la distance angulaire du soleil au nœud ascendant de l'orbe lunaire.

216. Les inégalités observées dans la courbure de l'orbe lunaire et dans les vitesses de la lune sont de trois sortes : l'évection, la variation et l'équation annuelle.

217. L'évection est un changement dans la courbure de l'orbe lunaire  $ABCD$ ,  $abcd$ , fig. 83, par lequel il s'approche ou s'éloigne de la forme du cercle : ce changement dépend des distances respectives du soleil  $S$ , de la lune  $L$  et de la terre  $T$  ; le maximum d'inégalité, qui est de  $1^{\circ} 4452''$ , est proportionnel au sinus du double de la distance angulaire  $LTS$  de la lune au soleil vue de la terre, moins la distance  $LTA$  de la lune au périécée de son orbite : dans les oppositions et les conjonctions, cette inégalité se confond avec l'équation du centre qu'elle diminue constamment.

218. La variation est une augmentation ou une diminution dans le mouvement moyen de la lune, en raison des situations respectives du soleil  $S$ , de la lune  $L$  et de la terre  $T$ , fig. 84 ; cette inégalité, qui a été déduite de la théorie, est nulle dans les syzygies  $SLT$ ,  $STL$ , ainsi que dans les quadratures  $STl$ ,  $ST\lambda$  : son maximum est de  $0^{\text{tes}} 5877$ , on l'observe lorsque les angles du soleil et de la lune à la terre  $STA$ ,  $STB$ ,  $STC$ ,  $STD$ , sont de 50, 150,

250, 350 degrés : ainsi cette inégalité est proportionnelle au sinus du double de la distance moyenne angulaire de la lune au soleil.

219. *L'équation annuelle* est une inégalité dans la vitesse de la lune dépendante de la distance rectiligne  $ST$ , fig. 85, de la terre  $T$  au soleil  $S$  ou  $s$  : la vitesse de la lune augmentant au périégée et diminuant à l'apogée (210) et cela réciproquement au carré de son rayon vecteur, plus la lune est éloignée de la terre, et plus son mouvement diminue. La distance de la lune à la terre variant de même que celle du soleil, plus ce dernier est près de la terre, plus la lune en est éloignée : ainsi la vitesse de la lune doit diminuer lorsque le soleil s'approche de la terre, et augmenter lorsqu'il s'en éloigne ; mais on a vu que la vitesse apparente du soleil est d'autant plus grande, qu'il est plus près de la terre (129) ; d'où il suit que les inégalités dans les vitesses de la lune doivent être contraires à celles du soleil : dans son maximum, cette inégalité, qui est de  $0^{\text{de}}.2086$ , se confond dans les éclipses avec l'équation du centre du soleil.

#### §. XXIV.

#### *Du mouvement de rotation de la Lune.*

220. Le disque lunaire offrant un grand nom

bre de taches invariables (30), ces taches que l'on a observées et décrites avec soin, se présentant toujours de la même manière, on a dû conclure que cet astre tourne constamment la même face vers la terre. (1)

221. Ce mouvement de rotation de la lune a des inégalités, dont une est réelle, et les autres apparentes; ces dernières sont au nombre de trois; *libration en longitude*, *libration en latitude* et *libration diurne*. La première provient du mouvement de cet astre sur son orbite; la seconde, de l'inclinaison de la lune sur son

(1) Puisque dans son mouvement elliptique  $LII'$   $\lambda$  fig. 86, autour de la terre, il présente toujours la même face  $L$ ,  $l$ ,  $L'$ ,  $\lambda$ , il faut que le diamètre  $LB$ ,  $lb$ ,  $L'B'$ ,  $\lambda\beta$  soit toujours dirigé vers elle: cependant, dans ses diverses positions, ce diamètre fait, avec le grand axe  $BTB$  ou ses parallèles  $AC$ ,  $\alpha\gamma$  des angles qui varient comme la position de la lune sur son orbite. En se mouvant de  $L$  en  $l$ , d'occident en orient, le diamètre  $Lb$ , d'abord dans la direction  $AC$ , s'est mu d'occident en orient de  $A$  en  $l$ , et l'angle que forment ces deux lignes est le même que celui que la lune a décrit de  $L$  en  $l$  autour de la terre  $T$ : la lune continuant à se mouvoir sur son orbite, le diamètre  $BL'$  s'éloigne de plus en plus de sa première direction jusqu'à ce que l'astre soit revenu en  $L$ , où l'axe  $LB$  est dans sa première position: d'où l'on voit qu'en même temps que la lune a un mouvement périodique autour de la terre, elle a un mouvement de rotation sur son axe, dont la durée est égale à celle de sa révolution autour de notre globe.

orbe; la troisième, de la position de l'observateur sur la surface de la terre. L'inégalité réelle est produite par la libration qui est, ainsi que nous l'avons vu (31) une oscillation dans l'axe de la lune.

222. La lune ayant sur son axe un mouvement de rotation uniforme, et sur son orbe un mouvement inégal plus vif au périégée qu'à l'apogée, et le mouvement de rotation ne participant pas d'une manière sensible à ces inégalités, il doit être variable par rapport au rayon vecteur  $LT$ , fig. 87, et le globe de la lune doit osciller sur ce rayon de  $A$  en  $a$ , et de  $a$  en  $A$ ; ces oscillations, correspondant aux inégalités de son mouvement périodique, doivent faire découvrir alternativement au spectateur  $S$  des parties  $Ab$ ,  $aB$  de sa surface. Les oscillations dont l'axe est celui de la lune produisent une *libration en longitude*.

223. L'axe de rotation de la lune  $AB$ ,  $ab$ , fig. 88, est incliné sur le plan de son orbe  $LTl$ ; son inclinaison forme un angle  $ALT$  de  $94^{\circ} 27' 78''$ . En supposant que, dans la révolution de cet astre autour de la terre, la direction de son axe soit constante, il en résulteroit que la lune étant en  $L$  ne laisseroit apercevoir au spectateur en  $T$  qu'un de ces pôles  $A$ ; que l'autre  $B$  lui

lui seroit caché, qu'après une demi révolution, la lune étant en  $L$ , le spectateur en  $T$  apercevrait le pôle  $b$ , et ne verroit plus le pôle  $a$  : ainsi, par cela seul que l'axe de la lune est incliné sur l'orbe lunaire, cet astre doit, dans sa révolution autour de la terre, laisser apercevoir successivement ses deux pôles de la même manière que si la lune, étant en repos sur son axe, avoit un mouvement d'oscillation sur le plan de l'orbe, et présenter en conséquence une inégalité dans son mouvement dépendante de cette *libration en latitude* apparente.

224. Des observateurs répartis sur la surface de la terre  $T$ , fig. 89, de  $S$  en  $s$ , doivent apercevoir des parties différentes de la lune  $L$ ; celui qui est en  $S$  aperçoit toute la partie comprise en  $A a B$ , celui qui est en  $s$  aperçoit toute la partie comprise en  $a B b$  : ainsi le spectateur  $S$  voit la portion  $A a$ , qui n'est pas aperçue par celui placé en  $s$ , et celui-ci voit la portion  $B b$ , qui n'est pas vue par le premier; mais, en tournant autour de la terre  $T$ , fig. 90, la lune présentée à un spectateur en repos en  $S$  la même différence qu'aux deux spectateurs  $S s$ , fig. 89; car, cet astre étant en  $L$ , fig. 90, le spectateur en  $S$  aperçoit du point  $A$ , qui est celui d'intersection du rayon vecteur de la lune, un arc  $A C$  plus

grand que celui  $AB$ , et, lorsque la lune est en  $L$ , il aperçoit au contraire un arc  $ac$  plus petit que  $ab$ ; ce qui fait que, pendant le mouvement de la lune, il cesse de voir des parties aperçues du côté  $C$ , et qu'il en découvre vers  $B$ . Les points  $A$  et  $a$  restent les mêmes durant le mouvement, quoique le même axe de l'astre soit constamment tourné vers le centre de la terre (220): d'où il suit que le mouvement diurne de la lune et son mouvement périodique doivent faire apparaître et disparaître successivement différentes parties de la face qu'elle présente à la terre; de la même manière que si elle avoit un léger mouvement de *libration diurne*.

225. Le plan de l'orbite lunaire  $OTD$ , fig. 91, coupe celui de l'équateur terrestre  $ATC$ ; l'inclinaison de ces deux plans est de  $5^{\circ} 7' 22''$  (207); leur intersection ou la direction des nœuds a un mouvement rétrograde sur celui de la lune (214), parce que le plan de l'orbite change de direction. Le plan  $Bb$  de l'équateur lunaire coupe aussi le plan de l'orbite lunaire  $OTD$ ; l'inclinaison de ces deux plans  $BL$ ,  $LP$ , est de  $7^{\circ} 38' 88''$ ; celle de l'équateur lunaire  $Bb$  et de l'équateur terrestre  $Ee$  ou  $bLe = 1^{\circ} 67''$ . Puisque le plan de l'orbite lunaire varie de position, l'intersection de l'équateur avec ce plan variera de

position, si le premier conserve sa direction; mais, si au contraire le plan de l'équateur se mouvoit avec l'orbe de la lune et de la même manière, l'intersection des deux plans seroit constante. Dominique Cassini a observé que, si par l'intersection L de l'équateur et de l'orbe lunaire on mène un plan E  $\varepsilon$  parallèle à celui de l'orbe terrestre, ces trois plans ont toujours une commune intersection en L; mais, comme les nœuds de l'orbe lunaire changent de direction sur l'orbe de la terre, il faut, pour que l'équateur lunaire reste dans leur commune intersection, qu'il se meuve avec l'orbe de la lune : or, ce mouvement ne peut avoir lieu sans produire une libration réelle dans l'axe de cet astre, par laquelle ses pôles décrivent dans le ciel de petits cercles parallèles à l'écliptique: la période de ce mouvement est la même que celle des nœuds, c'est-à-dire, de 6793 jours 42118 (214). Cette libration prouve que la lune est un ellipsoïde dont le grand axe est constamment dirigé vers la terre.

### *Récapitulation.*

226. Il résulte de ce que nous venons d'exposer, que la lune a trois mouvemens, le premier diurne, et ayant une durée de 1 jour 03407''; le second péri-

dique dans un orbe elliptique dont la révolution sidérale est de 27<sup>jours</sup> 52166''; et la révolution synodique de 29<sup>jours</sup> 53059''; le troisième de rotation sur son axe, qui a la même durée que la révolution sidérale; que le premier, qui n'est qu'apparent, se compose de celui de rotation de la terre, dont la durée est de 0<sup>jour</sup> 99722'', et de l'arc moyen de 14°6410'' décrit par la lune, et qui augmente le mouvement diurne de 0<sup>jour</sup> 03680, et que les deux autres mouvemens sont réels; que le mouvement périodique de la lune éprouve trois sortes d'inégalités, l'une par la vitesse inégale de cet astre, l'autre par le mouvement de son orbe, et la troisième par les changemens de son excentricité; que les inégalités de vitesse de la lune ont lieu, 1° dans son mouvement elliptique, d'où il résulte que les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps; 2° dans sa révolution sidérale, dont la durée diminue de siècle en siècle; que l'orbe lunaire a, comme celui de la terre, trois mouvemens particuliers, le premier dans son grand axe, le second dans ses nœuds, le troisième dans son inclinaison sur l'orbe terrestre; ce qui retarde l'année, rapportée aux nœuds de la lune, de 18<sup>jours</sup> 622315 sur l'année solaire; que la durée de la révolution sidérale des nœuds des deux orbes est de 6793<sup>jours</sup> 42118', et que ce mouvement éprouve également plusieurs inégalités; que l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'orbe terrestre est de 5° 7222'' et sa plus grande variation de 0° 1627'; que les inégalités dans la courbure de l'ellipse et dans sa vitesse, dé-

pendant de la proximité du soleil, sont désignées par les dénominations d'*évection*, de *variation* et d'*équation annuelle*; que le maximum de l'inégalité de l'évection est de  $1^{\circ}4452'$ , celui de la variation de  $0^{\circ}5877''$ , et de l'équation annuelle de  $0^{\circ}2086''$ ; que les deux premières inégalités sont proportionnelles, savoir, la variation au sinus du double de la distance moyenne angulaire de la lune au soleil, et l'évection au sinus du même angle, moins la distance angulaire de la lune au périhélie de son orbite; que le mouvement de rotation de la lune éprouve deux inégalités que l'on peut partager en deux espèces, l'une d'elles étant réelle, les autres seulement apparentes; que ces dernières sont occasionnées par le mouvement de la lune dans son orbite, par l'inclinaison de l'axe de cet astre sur cet orbite, et par la position de l'observateur sur la surface de la terre; que l'inégalité réelle qui est produite par le mouvement de l'axe de la lune, se reconnoît par la commune intersection du plan de l'orbite terrestre, de l'équateur lunaire et d'un plan parallèle à cet orbite; enfin que la distance de la lune à la terre, mesurée par la parallaxe, est de près de soixante rayons terrestres, que le diamètre de cet astre est les  $\frac{3}{11}$  de celui de notre globe, et son volume  $\frac{1}{49}$ .

## §. XXV.

*Des éclipses de Soleil et de Lune.*

227. Les éclipses de soleil ne s'observent que lorsque la lune s'interpose entre cet astre et la

terre (26), c'est-à-dire lorsque le soleil et la lune sont en conjonction, et il n'y a d'éclipse de lune que quand cet astre passe dans le cône d'ombre formé derrière la terre, c'est-à-dire lorsque la lune et le soleil sont en opposition. Si le plan de l'orbe lunaire *coïncidoit* avec celui de l'orbe terrestre, il y auroit éclipse de soleil dans toutes les conjonctions, et éclipse de lune dans toutes les oppositions; mais, comme l'orbe lunaire est incliné de  $5^{\circ} 7' 22''$  sur l'écliptique, il ne peut y avoir d'éclipses que dans les conjonctions et oppositions particulières.

228. Les syzygies peuvent exister dans toutes les positions de la lune sur son orbe; cependant, si elles ont lieu lorsque cet astre est en L ou L', fig. 92, c'est-à-dire aux points les plus élevés sur l'orbe terrestre, alors, dans les conjonctions T L S, la lune n'est pas interposée entre la terre et le soleil; dans les oppositions L' T S elle n'est pas non plus dans le cône d'ombre formé derrière la terre: ainsi il ne peut y avoir ni éclipse de cet astre ni éclipse de soleil dans ces positions; mais, lorsque les syzygies ont lieu dans l'instant où la lune est en L  $\lambda$  dans les nœuds de l'orbe lunaire, le rayon vecteur de cet astre coïncidant avec celui de la terre au soleil, il y a toujours éclipse.

229. Les éclipses de soleil peuvent être totales ou annulaires (1).

230. Les éclipses de lune sont *totales*, *partielles* ou *appulses* (2).

(1) Comme le diamètre de la lune varie (27) entre  $5438''$  et  $6207''$ , que celui du soleil varie aussi (16) entre  $5836''$  et  $6035''$ , et que ces variations suivent des lois différentes, il peut arriver, dans les éclipses de soleil, que le diamètre de cet astre soit ou plus petit, ou égal, ou plus grand que celui de la lune et ainsi l'angle  $atb$  de la lune, fig. 93, étant plus grand que celui du soleil  $AtB$ , les spectateurs placés dans tout l'espace  $\beta t \alpha$  ont une éclipse totale de soleil; et, lorsque l'angle du soleil  $AtB$ , fig. 94, est égal à celui de la lune  $atb$ , il y a également éclipse totale au point  $t$  seulement; car elle est partielle ou nulle pour les spectateurs placés sur toutes les autres positions, mais, lorsque l'angle du soleil  $AtB$ , fig. 95, est plus grand que celui de la lune  $atb$ , celle-ci ne cachant qu'une partie  $ab$  du diamètre du soleil, il y a éclipse annulaire telle qu'elle est représentée fig. 96, où  $ABCD$  est le disque du soleil, et  $ab cd$  la projection du disque de la lune; ce qui fait que l'espace en forme d'anneau, compris entre ces deux disques, est entièrement éclairé. Quant aux éclipses partielles, fig. 97, des espaces  $NAMH$ ,  $NBLG$ ,  $NCKF$ ,  $NDIF$ , sur le disque du soleil  $NCEF$ , elles ont lieu toutes les fois que le spectateur se trouve hors de la surface placée dans le cône d'ombre formé par la lune, et, que par sa position, cet astre lui cache une partie du disque du soleil: ainsi il y a éclipse de ce genre pour tous les spectateurs placés dans les espaces  $\alpha t$  et  $t \beta$ , fig. 94.

(2) Le soleil étant vu de la terre sous un angle moyen de  $5936''$ , ainsi qu'il est représenté  $ESF$ , fig. 98, et cet astre nous envoyant des rayons qui font entre eux un angle égal à

231. Entre la rencontre des syzygies et la position de la lune aux nœuds de son orbe, et celle des syzygies et la position de la lune au plus haut de son orbe, il a y plusieurs positions intermédiaires dans lesquelles il y a éclipse de soleil et de lune : le maximum de distance des nœuds, où il peut y avoir éclipse, varie en raison des distances du soleil et de la lune à la terre, et de l'inclinaison de l'orbe. Lorsque la terre est à

celui de son diamètre apparent, le cône d'ombre BAD formé derrière la terre doit avoir la même base, et l'angle BAD = ESF. Le diamètre de la terre étant vu de la lune sous un angle de  $21322''$  (204), on peut, en comparant les triangles BAT, BLT, formés par l'axe des deux cônes et leurs côtés, avoir les rapports entre la longueur du cône d'ombre et la distance de la lune à la terre; car on a  $AT : TB :: \text{ray} : \text{tang. BAT}$ .

$$TB : LT :: \text{tang. BLT} : \text{ray.}$$

d'où l'on tire  $AT : LT :: \text{tang. BLT} : \text{tang. BAT}$ ; mais les tangentes des très-petits arcs sont comme les arcs ou comme les angles, et les angles sont  $:: 21322'' : 5936''$ , à peu près  $:: 35 : 10$  : il s'ensuit que la longueur du cône d'ombre est à peu près 3, 5 fois la distance de la lune à la terre; la tranche d'ombre *bd*, parcourue par la lune, est environ les  $\frac{2}{3}$  du diamètre de la terre; le diamètre de la lune étant les  $\frac{1}{11}$  de celui de la terre (204), cette tranche sera égale aux  $\frac{55}{11}$  du diamètre de la lune : ainsi cet astre s'y trouvera totalement éclipse, et cela pendant un temps  $= \frac{2}{3}$  de celui qu'il met à parcourir son diamètre, les  $\frac{2}{3}$  restans ne donnant que des éclipses partielles, et lorsque la lune effleura l'ombre par son bord, l'éclipse sera appulse.

*l'aphélie* de son orbé et la lune au périégée, on trouve par l'analyse, qu'il peut encore y avoir des éclipses de soleil lorsque la lune est écartée de  $21^{\text{deg}}$  des nœuds, et des éclipses de lune lorsqu'elle en est écartée de  $14^{\text{deg}}$ . On trouve pareillement que, quand la terre est au *périhélie* de son orbé et la lune à son apogée, il peut encore y avoir des éclipses de soleil, la lune étant à  $14^{\text{deg}}$  de ses nœuds, et des éclipses de lune, cet astre étant au  $8^{\circ}$  degré de ses nœuds.

252. Pour connoître les dates des éclipses, les lieux de la terre où elles sont visibles, et leur durée, il faut, d'après la connoissance du rapport des vitesses de la terre et de la lune, déterminer les époques exactes des syzygies, ensuite chercher la position précise de la lune sur son orbé, et l'éloignement de ses nœuds pour chacun des instans de ces époques : avec ces deux données on peut savoir si l'éclipse est possible ; et, dans ce cas, cherchant quelle est la position du point de la terre rencontré par rayon vecteur de la lune, on peut déterminer la partie de notre globe sur laquelle elle doit être visible, ainsi que son commencement, son milieu et sa fin, sur chaque point de la surface d'où elle est vue, et enfin annoncer si elle doit être totale, annulaire

ou partielle. C'est ainsi que l'on détermine chaque année les éclipses visibles sur divers points de la terre.

253. On peut connoître l'instant et le lieu des éclipses par l'analyse ou par des procédés graphiques. Pour les éclipses de lune on conçoit, par le centre de la lune, un plan perpendiculaire à la droite qui joint les centres du soleil et de la lune; sur ce plan, on trace l'intersection du cône d'ombre formé par la terre, la route que la lune doit suivre, ainsi que son diamètre; connoissant la vitesse de cet astre on détermine ses circonstances et sa durée. On doit à Kepler une méthode analogue pour la détermination des éclipses de soleil, elle consiste à concevoir, du centre de la terre, un plan perpendiculaire au rayon vecteur mené du soleil à la lune, à tracer sur ce plan la projection de la terre, celle de l'intersection du cône d'ombre formé par la lune, et la trace du mouvement de cet astre, connoissant la vitesse de la lune on trace le mouvement de l'intersection du cône d'ombre, et l'on cherche quels sont les points de la terre, déduits de son mouvement de rotation, qui passent successivement dans la projection de l'ombre de la lune.

254. Si l'on vouloit se contenter d'indiquer à l'avance les éclipses, on pourroit le faire par la

simple remarque de celles qui ont été observées pendant une révolution de dix-huit années, de l'époque fixe où elles ont paru, et des lieux de la terre où elles ont été visibles; car, dans la révolution suivante de dix-huit années, on doit voir les mêmes éclipses à peu près dans le même ordre et avec les mêmes apparences, attendu que la durée d'une révolution de la terre, par rapport aux nœuds de la lune, étant de 346<sup>jours</sup> 619949'' (214), et celle d'une révolution synodique de la lune de 29<sup>jours</sup> 53059'' (202), le rapport de ces deux révolutions est sensiblement :: 223 : 19; ainsi, dans 223 mois lunaires, il doit y avoir dix-neuf années lunaires; mais, celles-ci sont aux années solaires :: 346<sup>jours</sup> 619949 : 365<sup>jours</sup> 256383, il suit que dix-neuf années lunaires font à peu près dix-huit années solaires. L'an 430 avant l'ère chrétienne *Méton* donna, pour rapport, 255 mois lunaires pour dix-neuf années solaires, et ce rapport fut écrit en lettres d'or à Athènes, et nommé *nombre d'or*. Puisque toutes les dix-huit années solaires le mouvement de la lune, par rapport à celui de la terre, se fait dans le même ordre et de la même manière que les dix-huit années suivantes, les éclipses doivent également paroître dans le même ordre et de la même manière, mais, pour que cette méthode

de déterminer les éclipses fût rigoureuse, il faudroit, 1<sup>o</sup> que les dix-neuf années lunaires correspondissent exactement aux deux cent vingt-trois mois lunaires, ou que les nombres qui expriment la durée d'une année et d'un mois lunaire fussent commensurables; 2<sup>o</sup> que le mouvement de la lune fût régulier, et n'éprouvât aucune inégalité susceptible de changer le rapport entre ces deux durées : or, comme, d'une part, le rapport n'est pas formé de nombres commensurables, et que, de l'autre, il existe dans le mouvement de cet astre des inégalités qui troublent ce rapport, il s'ensuit que la méthode de prévoir les éclipses par la révolution de dix-huit années solaires, ne peut donner qu'une approximation.

### *Récapitulation.*

235. Il suit de ce que nous venons d'exposer que les éclipses de lune et de soleil arrivent dans les syzygies, les premières dans les oppositions, les dernières dans les conjonctions; que les unes et les autres n'ont lieu que quand la lune est dans les nœuds de son orbe, ou à une très-petite distance; que celles du soleil n'arrivent que lorsqu'elle est éloignée de moins de 21<sup>es</sup> des nœuds, et celles de lune lorsqu'elle en est à moins de 14<sup>es</sup>; que, pour calculer les éclipses, il faut connoître l'instant précis des syzygies, le

point de la lune sur son orbe, et celui de la terre rencontré par le rayon vecteur de cet astre; qu'avec ces trois données, et la loi du mouvement de la lune et de la terre, on peut déterminer la surface de notre globe sur laquelle l'éclipse sera visible, et l'instant précis, sur chaque point de cette surface, de son commencement, de son milieu et de sa fin; que l'on peut encore, d'après le rapport entre l'année et le mois lunaire, qui est :: 19 : 223, déterminer à l'avance, et par approximation, les éclipses qui arriveront pendant dix-huit années consécutives, puisque ces éclipses doivent suivre à peu près le même ordre que celles qui ont été observées pendant les dix-huit années précédentes.

#### IV<sup>e</sup>. LEÇON.

##### DES MOUVEMENS DES PLANÈTES.

EN observant les planètes, on a remarqué qu'il y en a qui semblent osciller autour du soleil et paroissent entraînées par cet astre dans sa marche et d'autres qui s'en éloignent à toutes distances : ce qui a conduit à les diviser en deux classes ; l'une comprend les planètes qui paroissent osciller autour du soleil, l'autre celles qui semblent avoir un mouvement indépendant de cet astre.

##### 1<sup>o</sup>. DES PLANÈTES QUI PAROISSENT OSCILLER AUTOUR DU SOLEIL.

Ces planètes sont au nombre de deux, *mercure* et *vénus*.

## §. XXVI.

*Du mouvement apparent de Mercure.*

256. Mercure accompagné toujours le soleil, et participe à ses deux mouvements diurne et périodique : on le voit osciller aux côtés de cet astre *S*, fig. 98; se mouvoir de *M* en *m*, et de *m* en *M*; la limite de ses écarts *MS*, *mS*, varie depuis  $18^{\circ}$  jusqu'à  $32^{\circ}$ ; il s'écarte aussi du plan de l'écliptique *MSm*, sur lequel le soleil paroît se mouvoir, et le maximum de cet éloignement *MS*,  $\mu S$ , est de  $5^{\circ}$ .

257. Le mouvement apparent du soleil se faisant sur l'écliptique *ABCDE*, fig. 99, le mouvement de la planète s'en éloigne quelquefois pour suivre la route *Abgc h dE*. La marche du soleil, rapportée aux étoiles, est à peu près uniforme, tandis que le mouvement de mercure est très-varié (1).

(1) On le voit se dégager le soir des rayons solaires *A*, et devancer le mouvement du soleil jusqu'à ce que ce dernier étant en *B*, la planète soit arrivée en *b*, à une distance d'environ  $25^{\text{deg}}$  de l'astre; alors le mouvement de mercure se ralentit jusqu'à ce qu'il soit en *g*, à  $20^{\text{deg}}$  du soleil; là il reste stationnaire par rapport aux étoiles, puis il revient de *g* en *h* vers l'astre, l'atteint en *c*: d'abord il se plonge le soir dans ses rayons; passé en *c* sur son disque, et continue sa marche jusqu'à ce qu'il soit arrivé en *h*, à  $20^{\text{deg}}$  du soleil; il y reste quelque temps stationnaire, et se met de *h* en *d* plus lentement que l'astre, jusqu'à ce qu'étant arrivé en *d*, il s'en trouve

238. La durée des oscillations de mercure, ou le temps qu'il met à aller de A en E varie entre 106 et 130 jours; l'arc moyen de sa rétrogradation  $gh$  est de 15 <sup>des.</sup>, et sa durée moyenne de 23 jours. En général, le mouvement de cette planète est très-complicé.

239. Le diamètre de mercure est à son minimum lorsqu'il se plonge le matin en A et E dans les rayons solaires; qu'il disparoit derrière cet astre, et encore lorsqu'après ce passage il se dégage le soir des rayons solaires. Il est à son maximum lorsqu'après s'être plongé le soir en C dans les rayons solaires, il passe sur son disque en c ou aux environs, pour se dégager ensuite le matin des rayons de cet astre.

## §. XXVII.

### *Du mouvement apparent de Vénus.*

240. Vénus accompagne toujours le soleil, ainsi que mercure, et participe aux deux mouvemens de cet astre. Cette planète a aussi un mouvement de rotation sur son axe.

Le mouvement de vénus, par rapport au soleil, est le même que celui de mercure; il n'en diffère que par la grandeur et la durée de ses écarts et de ses oscillations; ses plus grandes digressions

---

éloigné en  $dD$  de 25 <sup>des.</sup>; alors son mouvement devient plus rapide que celui du soleil pour le rejoindre en E: enfin il se plonge dans ses rayons, et disparoit en E derrière cet astre.

$MS$ ,  $S m$ , fig. 98, sont de  $50$  à  $53^{\text{deg}}$ , et son plus grand éloignement de l'écliptique  $MS$ ,  $\mu S$ , n'est que de quelques degrés (1).

242. Le plus grand diamètre de vénus s'observe lorsqu'elle passe sur le soleil en  $c$  ou aux environs, ou lorsqu'elle s'en rapproche le soir et s'en écarte le matin : son plus petit diamètre se remarque lorsque cette planète passe derrière le soleil en  $A$  et en  $E$ , ou quand elle s'en rapproche le matin et s'en écarte le soir.

### Résumé.

243. Il suit des observations faites sur vénus et mercure que ces planètes sont entraînées par le soleil dans sa marche, et qu'elles ont, comme lui, un mouvement diurne et périodique; qu'elles oscil-

(1) En observant vénus lorsqu'elle part du point  $A$ , fig. 99, on la voit se dégager le soir des rayons solaires, et devancer le mouvement de l'astre; puis retarder son mouvement, devenir stationnaire en  $g$ , et suivre ensuite une marche rétrograde pour se plonger le soir dans les rayons de l'astre en  $c$  sortir le matin de ses rayons, continuer sa marche jusqu'en  $h$ , devenir de nouveau stationnaire, puis se diriger vers le soleil avec un mouvement accéléré, jusqu'à ce qu'elle l'ait atteint en  $E$ , pour se plonger le matin dans ses rayons, et se cacher enfin derrière son disque. La durée moyenne de ses oscillations  $A E$  est de 584 jours; son mouvement rétrograde commence et finit lorsqu'elle est éloignée de  $32^{\text{deg}}$  du soleil, l'arc moyen de rétrogradation est de  $18^{\text{deg}}$ , et sa durée moyenne de 42 jours.

lent de chaque côté du soleil; que l'étendue des oscillations varie dans chacune, et que l'oscillation de vénus est plus considérable que celle de mercure; que ces planètes ont, relativement au soleil, un mouvement plus ou moins rapide que lui; que, comparées aux étoiles, elles sont quelquefois stationnaires; que, d'autres fois, elles ont un mouvement dans le sens du soleil, et quelquefois aussi un mouvement contraire.

### §. XXVIII.

#### *Des mouvemens réels de Vénus.*

245. Cette planète a deux mouvemens réels, l'un de rotation sur son axe, l'autre périodique autour du soleil; le premier se déduit directement de l'observation, et le second du mouvement d'oscillation qu'elle a autour du soleil.

246. En observant attentivement les taches remarquées sur le disque de vénus (56), *Dominique Cassini* et *Schroeter* virent qu'elles avoient un mouvement régulier et périodique, qui ne pouvoit être attribué qu'à un mouvement de rotation de cette planète sur son axe. De la vitesse du mouvement des taches, *Schroeter* conclut que la durée de la rotation de vénus est de  $0^{\text{jour}} 97300''$ ; et, par la direction du mouvement des taches, *Dominique Cassini* trouva

que l'équateur de vénus  $Ee$ , fig. 100, forme un angle considérable avec l'écliptique  $E'VS$ .

247. La planète de vénus présente au spectateur des parties de son disque plus ou moins éclairées (55); ces phases dépendent de sa position à l'égard du soleil. Le soir, lorsqu'elle se dégage des rayons solaires  $A$ , fig. 99, son disque entier est éclairé, et son diamètre est très-petit; ce qui prouve qu'elle est placée au-delà du soleil. A mesure qu'elle s'écarte de cet astre, en avançant son mouvement, on voit la portion de son disque éclairée diminuer sensiblement, et son diamètre augmenter; lorsqu'elle est en  $b$ ; à sa plus grande digression elle n'a plus que la moitié de son disque éclairée, et son diamètre est moyen entre toutes ses grandeurs. Continuant de se mouvoir, pour devenir stationnaire, puis rétrograde, la partie éclairée du disque va toujours en diminuant, en même temps que son diamètre augmente, jusqu'à ce que, se plongeant le soir dans les rayons du soleil, elle passe sur son disque en  $C$ , ou du moins à une distance peu considérable; alors sa lumière est extrêmement affoiblie, et son diamètre est le plus grand possible. En suivant sa marche pour devenir stationnaire en  $h$ , et reprendre son mouvement direct jusqu'en  $E$ , on voit la partie éclairée du

disque augmenter; et le diamètre diminuer, en suivant une progression entièrement opposée à celle de la diminution de sa lumière; enfin en E le disque reparoît éclairé dans son entier, et le diamètre est le plus petit possible.

248. L'intensité de lumière que vénus nous envoie dépendant de sa distance et de la grandeur de la partie éclairée du disque qui est aperçue, il s'ensuit que sa plus grande intensité n'a jamais lieu, lorsque la distance est la plus grande ou la plus petite, mais lorsqu'elle est entre ces deux extrêmes.

En supposant que l'intensité de la lumière envoyée soit en raison composée, 1<sup>o</sup> de la surface du disque éclairée qui est aperçue du spectateur placé sur la terre, 2<sup>o</sup>, de l'inverse du carré des distances de vénus à la terre, *Hallei* a trouvé que la plus grande intensité de lumière de vénus a lieu lorsque sa distance du soleil est d'environ 44 degrés.

249. Il est facile de conclure, par le rapport entre les phases et les distances, que vénus a un mouvement autour du soleil; car, lorsqu'elle est à son plus grand éloignement de la terre, derrière le soleil en V, fig. 101, elle montre la partie entière éclairée de son disque ABC, tandis que lorsqu'elle est en V', à sa distance moyenne, elle

ne laisse voir que la moitié  $ba$  d'éclairée. Quand elle est en  $v$ , à sa plus petite distance de la terre, on n'aperçoit plus que la partie non éclairée; et, en passant en  $\nu$ , on voit de nouveau la moitié de la partie éclairée  $x\beta$ : enfin, quand elle est revenue en  $V$  à sa plus grande distance, elle montre son disque entier éclairé. Il paroît en conséquence, que, du rapport entre les distances et ceux des portions de disque éclairées, on peut conclure que vénus a un mouvement périodique autour du soleil, dont la durée, par rapport aux conjonctions de cet astre, est celle des oscillations de cette planète.

250. Comme vénus est en conjonction avec le soleil dans ses deux positions extrêmes, il s'en suit qu'elle a deux conjonctions; *la conjonction supérieure*  $TSV$  lorsque cette planète est à son plus grand éloignement de la terre, et *la conjonction inférieure*  $T\nu S$  quand elle en est à sa plus petite distance.

251. En prenant jour par jour la direction de vénus dans le ciel, et la distance de cette planète à la terre, on peut tracer la route qu'elle suit, et déterminer la forme de son orbe. La direction de cette planète peut être obtenue par une suite d'observations; mais, pour avoir ces différentes distances à la terre, il faut connoître sa parallaxe pour un

diamètre apparent, afin d'obtenir sa distance pour ce diamètre, et déterminer ensuite les autres distances par le rapport trouvé; les diamètres apparens étant réciproques aux distances (127).

252. On prend la parallaxe de vénus lors du passage de cet astre sur le soleil observé par différens spectateurs placés à de grandes distances sur la surface de la terre (1).

(1) Pour cela, on détermine d'abord, dans l'espace, la position  $T'S\theta\Sigma$  de l'orbe de la terre, fig. 102, de même que la position  $SV$  de l'orbe de vénus. Par la comparaison des vitesses de la terre et de vénus observées, ainsi que par leur situation respective par rapport au soleil, on détermine l'instant précis de la conjonction inférieure de la planète, et le point  $B$  ou  $b$  où doit être projeté sur le disque du soleil le centre  $V$  de vénus vu du centre de la terre  $T$ : on projette de même la corde  $abc$  que le centre de la planète, vu de celui de la terre, parcourt sur le disque du soleil, et l'on détermine, par le calcul des vitesses, le temps que vénus met à parcourir cette corde. Deux spectateurs en  $o$  et  $\omega$  observent l'instant précis de l'entrée et de la sortie de vénus sur le disque du soleil. Dans l'hypothèse d'une vitesse à peu près uniforme, les longueurs des cordes étant comme les temps que l'astre met à les parcourir, on a les rapports des cordes  $ghi, abc, def$ ; ces cordes étant entre elles comme les arcs  $gni, anc, dnf$ , qu'elles sous-tendent, il s'ensuit que l'on a, d'une manière rigoureuse, la position de ces cordes sur le disque du soleil, et conséquemment leurs distances respectives: connoissant la distance  $o\omega$  des deux observateurs, et celle  $hbe$  ou  $HBE$  des deux cordes observées, on en déduit le rapport entre  $T'V$  et  $VB$ ; car on a

253. Durant le passage de vénus sur le disque du soleil, on observe deux phénomènes remarquables; le premier est un point noir, ou une espèce de ligament de même couleur, qui unit en un instant les deux bords de cette planète et du soleil lors même que leurs circonférences sont encore séparées; le second est la diminution du disque de vénus, lequel paroît beaucoup plus petit que lorsqu'il est éloigné de la surface du soleil: ces deux effets peuvent être occasionnés par l'irradiation de la lumière (33), qui fait paroître le disque de l'astre plus grand qu'il ne l'est réellement, et diminue la grandeur des corps opaques qui passent devant sa surface, de même que l'on voit le diamètre d'un astre diminuer lorsqu'il cache une partie du soleil, et que la lumière déborde des deux côtés.

254. Les passages de vénus sur le soleil sont extrêmement rares: après s'être succédés dans l'intervalle de huit ans, ils ne reparoissent plus qu'au bout d'un siècle; aussi les derniers passages

---

$O\omega: HE:: TV: VB$ , et  $O\omega + HE: O\omega:: BT: VT$ ; d'où l'on déduit la parallaxe de vénus et sa distance à la terre. Comme elle se trouve, par une loi remarquable du mouvement des astres, intimement liée à la parallaxe du soleil, on sent que l'observation des passages de vénus est d'une grande importance en astronomie.

de 1761 et 1769 ont-ils excité l'émulation des astronomes, qui les ont observés à Paris, à Londres, à Pétersbourg, à Stockholm, dans la Laponie, aux Indes, à Otaïti, dans la baie d'Hudson, enfin dans tous les lieux où il leur a été possible de se transporter. Le premier ou le plus prochain passage aura lieu en 1874, et le second en 1882.

255. Des observations du passage de vénus sur le disque du soleil faites en 1761 et 1769, il est résulté que la parallaxe moyenne du soleil est de 27", le diamètre de vénus,  $\frac{13}{4}$  diamètres terrestres, et son volume  $\frac{2}{9}$  de celui de la terre.

256. Les mouvemens de vénus, observés du centre de la terre, peuvent être déterminés en supposant la terre immobile et le soleil tournant autour d'elle, ou en supposant le soleil immobile et la terre tournant autour de cet astre. Les courbes sur lesquelles vénus se meut dans chacune de ces hypothèses sont très-différentes.

257. Si l'on suppose la terre T, fig. 103, immobile; la courbe que vénus paroît décrire dans le ciel est un épicycloïde (1).

---

(1) La durée des oscillations moyennes de vénus étant de 584 jours, il s'ensuit qu'en partant d'une conjonction supé-

258. Si l'on rétablit le mouvement réel de la terre T, fig. 104, autour du soleil S, et qu'à chaque observation on place la terre sur le point de son orbite où elle doit se trouver, la courbe que vénus décrit est une ellipse (1).

rière T S V de cette planète V avec le soleil S, celui-ci fera 1,6 de révolution pendant cet intervalle; ainsi, au bout de 146 jours, cet astre aura fait environ 0,4 de sa révolution, et sera en S' lorsque vénus en V' sera à sa plus grande digression du soleil, à peu près à égale distance de la terre que cet astre: après 292 jours, ce dernier sera en  $\Sigma$ , et vénus en  $\gamma$  en conjonction inférieure et à sa plus petite distance de nous; mais comme pour arriver en  $\gamma$  la planète a fait un mouvement rétrograde, elle étoit donc en A plus avancée que  $\gamma'$ ; continuant ce mouvement rétrograde, elle arrive en B, puis reprend son mouvement direct pour arriver en  $\nu$ , à sa plus grande distance du soleil s, après 438 jours de mouvement; là, sa distance de la terre diffère peu de celle du soleil; enfin, après 584 jours de marche, elle arrive en W dans sa conjonction supérieure avec cet astre en SS. Si, jour par jour, on trace dans l'espace de diverses positions de vénus, on voit que la courbe V V' A  $\gamma$  B  $\nu$  W qu'elle a parcourue est une *épicycloïde* engendrée par le mouvement de cette planète autour du soleil pendant que cet astre se meut autour de la terre: on voit encore que la courbe sur laquelle vénus se meut autour du soleil est une ellipse, dont un des foyers est occupé par le centre de cet astre.

(1) Si dans la conjonction supérieure la terre est en T, vénus est en V; après 145 jours la terre est en T', et la planète en V'; au bout de 292 jours la terre est en  $\theta$ , et vénus en conjonction inférieure  $\gamma$ ; après 438 jours la terre est arrivée en t, et la planète à sa plus grande *élongation* en  $\nu$ :

259. Si l'on ne veut considérer que les positions de vénus  $V$ , fig. 105, par rapport à la terre  $T$  et au soleil  $S$ , on verra de même, en rapportant dans chaque observation les trois distances du soleil à la terre, de la planète également à la terre, et de vénus au soleil, que l'on peut conclure du triangle que forment les trois astres, dans lequel on connoît deux côtés et l'angle compris, que la courbe ainsi obtenue est de même une ellipse à un des foyers de laquelle le centre du soleil est placé.

260. Vénus se meut donc autour du soleil dans une ellipse dont un des foyers est occupé par le centre de ce dernier astre; le demi grand axe de cette ellipse est de 0,723 de celui de la terre, et son excentricité moyenne de 0,0069. Si l'orbe de vénus étoit sur le même plan que celui de la terre, cette planète passeroit sur le milieu du disque du soleil toutes les fois qu'il y auroit conjonction inférieure. Puisque les révolutions de cette espèce de conjonction sont de 584 jours

---

enfin après 584 jours de mouvement la terre est en  $Tt$ , et vénus en conjonction supérieure  $W$ : maintenant, si l'on trace jour par jour la position de cette planète dans le ciel, on verra qu'elle parcourt un orbe elliptique entièrement semblable au précédent, et dont le centre du soleil occupe un des foyers.

environ, et qu'il y a souvent un siècle d'intervalle entre ces passages, il s'ensuit que l'orbite de vénus est inclinée sur celui de la terre : cette inclinaison étoit en 1801 de  $5^{\circ},78058$ .

261. En comparant, fig. 104, le mouvement  $V V' \gamma \nu W$  de vénus autour du soleil à celui de la terre  $TT' \theta t Tt$ , on voit qu'elle fait deux révolutions et demie, plus un arc  $\gamma W$ , qui équivaut à peu près à un dixième de la circonférence du cercle, ce qui fait en tout 2,6 de circonférence, tandis que la terre ne fait qu'une révolution et demie, plus l'arc  $Q Tt$ ; ce qui fait 1,6 de révolution : ainsi le rapport des vitesses est à peu près comme 26 : 16; et, comme les temps des révolutions sont réciproques aux espaces parcourus dans les temps égaux, il suit que la durée de la révolution de vénus doit être environ les  $\frac{2}{3}$  de celle de la terre; et en effet la durée de la révolution sidérale de cette planète est de 224 jours 70082399.

262. Le mouvement diurne de vénus est composé comme celui du soleil, 1<sup>o</sup> de la circonférence que la terre parcourt par son mouvement de rotation sur son axe; 2<sup>o</sup> de l'arc que vénus est supposée parcourir pendant la durée de la rotation de la terre, plus le petit arc qu'elle décrit jusqu'à ce que le méridien terrestre sur lequel

elle étoit, l'ait rejointe. Quoique le mouvement de vénus soit quelquefois plus grand, d'autres fois égal, moindre, et même contraire à celui du soleil, l'arc moyen de son mouvement n'en est pas moins le même que celui de l'astre autour duquel elle tourne ; et l'arc que cet astre est supposé décrire étant celui que la terre décrit réellement autour de lui pendant la durée de sa rotation, il s'ensuit que le mouvement moyen diurne de vénus se compose des deux mouvemens de la terre ; 1° du cercle de rotation du mouvement diurne ; 2° de l'arc qu'elle parcourt autour du soleil, et que la durée du mouvement diurne de vénus est celle du jour moyen astronomique.

263. De même que dans le mouvement de la terre autour du soleil, et dans celui de la lune autour de la terre, le mouvement de vénus a cinq variations, 1° dans son mouvement sur son orbe elliptique ; 2° dans le mouvement du grand axe de son ellipse ; 3° dans l'excentricité de son orbe ; 4° dans le mouvement de ses nœuds ; 5° dans l'angle que fait l'orbe de vénus avec celui de la terre.

264. Le mouvement elliptique de vénus autour du soleil est, de même que celui de la terre et de la lune, réciproque au carré des rayons vecteurs ;

ainsi les aires décrites par ces rayons sont proportionnelles aux temps (130).

265. Le grand axe de l'ellipse de vénus a un mouvement rétrograde ; la longitude de son périhélie étoit au commencement de 1801 de  $142^{\circ},9077''$ , Le mouvement sidéral du périhélie est rétrograde, et l'angle qu'il décrit est de  $826'',63$  par siècle.

266. L'orbe elliptique de vénus varie, et se rapproche de la forme circulaire : la diminution de son excentricité est de  $0,00006271$  par siècle.

267. Le nœud ascendant de l'orbe de vénus sur celui de la terre a un mouvement rétrograde de  $5670'',99$  par siècle : sa longitude sur l'écliptique étoit au commencement de 1801 de  $83^{\circ},1972''$ .

268. Enfin l'inclinaison de l'orbe de vénus sur celui de la terre étoit au commencement de 1801 de  $3^{\circ},76936''$  : sa variation séculaire est de  $14'',05$  en moins.

## §. XXIX.

### *Du mouvement réel de Mercure.*

269. On n'a encore observé dans cette planète qu'un seul mouvement, c'est celui de translation. Comme jusqu'à ce jour on n'a pu aper-

cevoir avec les instrumens dont on fait usage pour les observations astronomiques aucune tache sur sa surface, il a été impossible de déterminer si elle a un mouvement de rotation ; cependant le plus grand nombre des planètes ayant ce mouvement, on a été porté à conclure, par analogie, que mercure devoit en avoir un semblable.

270. Mercure présente les mêmes apparences que vénus, et les portions éclairées de son disque sont d'autant plus grandes, qu'il est plus éloigné de la terre. Si l'on compare, ainsi qu'on l'a fait pour vénus (257, 258, 259) ses phases à ses distances, on voit qu'il se meut autour du soleil. En prenant jour par jour la direction de cette planète, et rapportant sur ces directions sa distance à la terre, on observe que, dans l'hypothèse du mouvement du soleil, la terre supposée immobile, la courbe décrite par mercure est une épicycloïde analogue à celle que vénus paroît décrire (257), et que, dans l'hypothèse du soleil immobile, la terre et mercure étant en mouvement, la courbe formée par ce dernier est une ellipse analogue à celle décrite par vénus (258), et à l'un des foyers de laquelle le centre du soleil est placé ; enfin si l'on ne considère, comme on l'a fait pour vénus (259), que la position

de mercure par rapport au soleil et à la terre, on remarque également qu'il se meut autour de cet astre dans un orbe elliptique.

271. Ainsi il suit de la comparaison journalière des distances angulaires de mercure au soleil, de sa distance rectiligne, et de celle du soleil à la terre pour chacun de ces angles, que cette planète se meut, ainsi que vénus et la terre, autour du soleil dans un orbe elliptique à un des foyers duquel le centre de cet astre est placé. Le demi grand axe de cette ellipse est 0,3871 de celui de la terre, ce dernier étant pris pour unité; et son excentricité est de 0,2055. L'orbe de mercure étoit en 1801 incliné sur celui de la terre de  $7^{\circ}, 78058$ , et la périodicité de son mouvement sidéral héliocentrique est de 87 jours 96925.

272. La parallaxe de mercure et sa distance à la terre se déduisent du passage de cette planète sur le disque du soleil, c'est à dire, par le moyen employé pour obtenir la parallaxe et la distance de vénus. Les passages de mercure s'observent ordinairement dans les derniers jours de brumaire et de floréal, temps auquel le soleil est dans les nœuds de cette planète : ces retours ont différentes périodes de 6, 13, 46 et 263 ans. De ces observations on a conclu que le diamètre de mercure est  $\frac{7}{17}$  de celui de la terre,

et son volume  $\frac{1}{13}$  de celui de notre globe.

273. Le mouvement de mercure autour du soleil a, comme celui de la terre, de la lune et de vénus, cinq inégalités, 1<sup>o</sup> dans son mouvement sur son orbe elliptique, duquel il résulte que les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps; 2<sup>o</sup> dans la position du grand axe de l'ellipse; la longitude du périhélie étoit au commencement de 1801 de 82°,6256, et le mouvement de ce périhélie, dans le sens de mercure, est de 1801'',10 par siècle; 3<sup>o</sup> dans l'excentricité de l'ellipse de cette planète, qui s'éloigne de plus en plus de la figure du cercle, l'augmentation de cette excentricité étant de 0,000003867 par siècle; 4<sup>o</sup> dans le mouvement de son nœud ascendant, dont la longitude étoit au commencement de 1801 de 51°,0651'', et dont le mouvement rétrograde sur celui de la planète est de 2414'',4 par siècles; 5<sup>o</sup> enfin dans l'angle que fait l'orbe de mercure sur celui de la terre, dont la variation séculaire est de 56'',12.

### *Résumé.*

274. Il résulte de ce que nous avons exposé dans cette leçon sur mercure et vénus, que ces planètes ont chacune deux sortes de mouvemens, l'un de

rotation sur leur axe, l'autre de translation autour du soleil ; que le mouvement de rotation de vénus, dont la durée est de 0<sup>jour</sup> 97300'', a été déterminé par l'observation, mais que celui de mercure n'est présumé que par l'analogie de ce qu'on remarque dans la plupart des autres planètes ; que le mouvement *héliocentrique* de mercure et de vénus se fait dans des orbes elliptiques, à l'un des foyers desquels le centre du soleil est placé ; que la durée de la révolution sidérale héliocentrique de vénus est de 224<sup>jour</sup> 7008'', et celle de mercure de 87<sup>jour</sup> 96925'', que le grand axe de l'orbe de vénus est de 0,723 diamètre de l'orbe terrestre, tandis que celui de mercure n'est que de 0,3871 de ce dernier, ce qui prouve que vénus est celle des deux planètes qui est le plus éloignée du soleil ; que l'excentricité de l'orbe elliptique de mercure est plus grande que celle de l'orbe de vénus, la première étant de 0,2055, et l'autre n'étant que de 0,0069 ; que les orbes de ces planètes sont inclinés sur celui de la terre, mais que celui de vénus l'est moins que celui de mercure, puisqu'en 1801 l'inclinaison du premier étoit de 3°,6936, et celle du second de 7°,78053 ; que la parallaxe moyenne des deux astres, qui est égale, est la même que celle du soleil, c'est-à-dire de 27 $\frac{2}{3}$  ; que le diamètre de vénus est plus grand que celui de mercure, le premier étant de  $\frac{3}{4}$  du diamètre de la terre, et le second seulement  $\frac{2}{17}$ , et que leurs volumes sont à celui de la terre :  $\frac{1}{14} : \frac{1}{17} : 1$  ; que les mouvemens de ces deux astres ont, ainsi que ceux

de toutes les autres planètes, cinq inégalités particulières; 1° dans le mouvement sur l'orbelle elliptique; 2° dans le grand axe de l'ellipse, dont le mouvement est toujours dans le sens de celui de l'astre, avec cette différence que le mouvement circulaire du périhélie, lequel se compose du mouvement rétrograde des équinoxes et du mouvement direct du grand axe, est rétrograde dans vénus, et direct dans mercure; 3° dans l'excentricité des ellipses, cette excentricité diminuant successivement dans celle de vénus, et augmentant dans celle de mercure; 4° dans le mouvement des nœuds, qui est toujours rétrograde sur celui de la planète; 5° dans l'inclinaison des orbites sur celui de la terre.

### 2° 275. DES PLANÈTES QUI PAROISSENT AVOIR UN MOUVEMENT INDÉPENDANT DE CELUI DU SOLEIL.

Ces planètes sont au nombre de quatre, *mars*, *jupiter*, *saturne*, et *uranus*. Entre *mars* et *jupiter* sont quatre autres petites planètes auxquelles on a donné le nom d'astéroïdes ou planètes télescopiques : *cérès*, *pallas*, *junon*, *vesta*.

Déjà l'examen de la position journalière des planètes oscillantes avec le soleil, nous a conduits à conclure qu'elles ont, en effet, autour de cet astre, un mouvement périodique dans un orbelle elliptique, à un des foyers duquel le centre du soleil est placé; nous allons considérer quelles

analogies ou quelles différences on peut déduire du même examen sur les autres planètes.

### §. XXX.

#### *Des mouvemens apparens de Mars.*

276. Mars a deux espèces de mouvemens apparens; le premier diurne, autour de la terre, le second périodique, par rapport aux étoiles.

277. Le mouvement diurne de cette planète est très-variable, attendu qu'il se compose du mouvement de rotation de la terre sur son axe; plus, de l'arc que mars décrit, rapporté à l'équateur, lequel, par rapport à la terre, est le plus souvent d'occident en orient; dans la direction du mouvement apparent du soleil; d'autrefois d'orient en occident, ou rétrograde sur celui de cet astre, et quelquefois enfin, nul. Comme la durée de la rotation de la terre est à peu près constante, il s'ensuit que celle du mouvement diurne de mars est ou plus longue, ou égale, ou plus courte que celle du mouvement de rotation de notre globe; mais sa plus grande durée est toujours moindre que celle de la marche diurne du soleil, conséquemment plus courte que celle du jour astronomique.

278. Le mouvement périodique de mars autour de la terre se forme de tous ses arcs journaliers, et ces arcs étant ou dans le sens du mouvement du soleil, ou rétrogrades ou stationnaires (277), il s'ensuit que le mouvement périodique de cette planète,

d'occident en orient, est extrêmement varié (1).

279. La révolution de mars par rapport à ses conjonctions avec le soleil est de 780 jours; la durée de son mouvement sidéral 686 jours, 9796; celle de son mouvement rétrograde de 73 jours, l'arc de rétrogradation est de  $18^{\text{deg}}$ , mais la durée de sa révolution, par rapport à ses conjonctions, celle de sa rétrogradation et la grandeur de l'arc de cette rétrogradation, ont des variations sensibles, et cette planète ne se meut pas exactement dans le plan de l'écliptique; mais s'en écarte de quelques degrés.

### §. XXXI.

#### *Des mouvemens de Cérés, Pallas, Junon et Vesta.*

280. Ces astéroïdes n'ont été que peu observées jusqu'à présent; cependant on leur a reconnu, comme

(1) En effet, lorsqu'elle est en M, fig. 106, en conjonction TSM, avec le soleil S, et que l'on commence à la voir le matin, elle a un mouvement moins rapide que celui de cet astre; mais, par rapport aux étoiles, sa vitesse est la plus grande à laquelle elle puisse atteindre dans toute sa révolution; le soleil allant plus vite se trouve en s, lorsque mars est en m, et, la vitesse de ce dernier continuant à diminuer, il arrive en a, à environ  $152^{\text{deg}}$  du soleil *fs*; là il demeure quelque temps stationnaire, puis il a un mouvement rétrograde: arrivé en M' au milieu de sa rétrogradation, son diamètre est à son maximum et le soleil est en opposition S'; le mouvement rétrograde continuant jusqu'en b à  $152^{\text{deg}}$  environ du soleil *sf*.

aux autres planètes, deux mouvemens, l'un diurne autour de la terre, et l'autre périodique : ce dernier est quelquefois direct d'occident en orient, d'autrefois rétrograde, d'orient en occident; on observe aussi des positions dans lesquelles elles restent quelque temps stationnaires : ainsi leur mouvement apparent est tout à fait semblable à celui que l'on a remarqué dans les autres planètes.

### §. XXXII.

#### *Des mouvemens apparens de Jupiter.*

281. Jupiter a, comme mars, deux mouvemens apparens; l'un diurne, composé de la rotation de la terre et de l'angle qu'il paroît parcourir dans l'espace; l'autre périodique, par rapport aux étoiles, formé de la somme des angles diurnes.

282. Le mouvement périodique de jupiter se fait, ainsi que celui de mars, d'occident en orient; il est très-varié, étant direct, stationnaire et rétrograde. Le mouvement stationnaire s'observe lorsque jupiter est éloigné d'environ 128<sup>des</sup> du soleil. La durée de sa révolution, par rapport aux conjonctions, est d'environ 399 jours, celle de son mouvement sidéral 4332 jours, 5963, de sa rétrogradation de 121 jours, de l'arc de rétrogradation de 11 degrés.

---

mars paroît de nouveau stationnaire, et reprend ensuite son mouvement direct, en accélérant sa vitesse jusqu'à ce qu'il ait de nouveau atteint le soleil pour se trouver en conjonction avec lui en  $M'' \Sigma T$ .

Le mouvement de cette planète a des différences sensibles dans sa révolution, par rapport aux conjonctions, dans l'étendue et la durée de sa rétrogradation, et son mouvement ne s'exécute pas exactement dans le plan de l'écliptique, mais s'en écarte de un ou deux degrés.

### §. XXXIII.

#### *Des mouvemens apparens de Saturne et d'Uranus.*

283. Saturne et uranus ont aussi deux mouvemens apparens, le premier diurne, le second périodique: leur mouvement diurne se compose de la rotation de notre globe et de l'angle diurne que ces planètes forment; leur mouvement périodique, qui se fait d'occident en orient, est direct, stationnaire et rétrograde.

284. Le mouvement stationnaire de saturne s'observe lorsqu'il est éloigné de  $121^{\text{deg}}$  du soleil; la durée de sa révolution, par rapport aux conjonctions, est de 378 jours, celle de son mouvement sydéral 10758 jours, 96984; de sa rétrogradation de 139 jours, et l'arc de rétrogradation de 7 degrés.

285. Le mouvement stationnaire d'uranus s'observe lorsque cette planète est éloignée de  $115^{\text{deg}}$  du soleil; la durée de sa révolution sidérale 30688 jours, 7127 celle de sa rétrogradation de 151 jours, et l'arc de cette rétrogradation de 4 deg.

### *Récapitulation.*

286. Il suit de ce que nous venons d'exposer que les planètes peuvent être divisées en deux classes, savoir : celles qui paroissent osciller autour du soleil, et celles qui s'écartent de cet astre à toutes distances ; que celles de la première classe sont mercure et vénus, et celles de la seconde, mars, cérés, pallas, junon, vèsta, jupiter, saturne et uranus ; que ces huit dernières ont deux mouvemens apparens, l'un diurne, l'autre périodique ; que le mouvement diurne, qui est inégal, se compose de celui de rotation de la terre, de l'arc diurne de ces planètes ; et que ces arcs sont inégaux ; que leur mouvement périodique est composé de la somme de tous ces arcs, et que dans leur marche, qui s'exécute généralement d'occident en orient, on remarque des mouvemens inégaux, directs et rétrogrades ; qu'entre ces deux derniers, ces planètes sont quelque temps stationnaires, et qu'enfin leur mouvement n'est jamais aussi accéléré que celui du soleil.

#### §. XXXIV.

### *Des mouvemens réels de Mars, Cérés, Pallas, Junon, Vesta, Jupiter, Saturne et Uranus.*

287. En comparant le mouvement périodique, direct, inégal, rétrograde, et les inter-

valles stationnaires de mars, cérés, pallas, junon, vesta, jupiter, saturne et uranus (278, 280, 282, 284, 285), aux mouvemens apparens de mercure et de vénus, on remarque entre eux une telle analogie, que l'on est conduit à chercher si ceux de ces huit planètes ne s'exécutent pas, comme ceux des deux autres, autour du soleil.

288. En examinant avec soin les mouvemens, on voit que le phénomène d'optique qu'ils présentent s'explique parfaitement en supposant que les planètes se meuvent autour du soleil (1).

(1) En effet, soit T, T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub>, T<sub>5</sub>, T<sub>6</sub>, T, le mouvement de la terre autour du soleil, soit P, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub>, P<sub>6</sub>, P, le mouvement d'une planète dans le même sens; comme le mouvement apparent, se détermine par l'angle que forme la planète et la terre dans deux positions successives, on voit que la planète allant de P en P, pendant que la terre se transporte de T en T, la nouvelle direction s'incline sur la première, dans le sens du mouvement réel de la planète: donc le mouvement apparent est direct. Les directions P, T<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, T<sub>2</sub>, restant parallèles pendant que la planète se meut de P<sub>1</sub> en P<sub>2</sub>, la planète paroît stationnaire puisqu'elle répond au même point du ciel. A mesure que la planète se meut de P<sub>2</sub> en P<sub>4</sub>, la direction du rayon vecteur mené de la terre à la planète s'inclinant dans une direction opposée à celle de son mouvement, celle-ci paroît rétrograder dans le ciel. Le rayon vecteur conservant son parallélisme pendant que la planète se

289. Pour déterminer la forme et les positions de l'orbe d'une planète, il faut avoir, jour par jour, ses directions dans l'espace, et rapporter sur ces directions la distance de la planète à la terre. On connoît cette direction en la comparant à celle d'une étoile; mais la détermination de sa distance exige que l'on ait d'abord celle de la planète pour un diamètre apparent quelconque, parce que les autres distances sont réciproques aux diamètres apparens (127). La détermination de la distance, pour un diamètre apparent, exige l'emploi de méthodes différentes

ment de P 4 en P 5. Elle paroît encore une fois stationnaire, enfin, en continuant son mouvement, comme la direction du rayon vecteur s'incline du côté vers lequel elle se meut, alors son mouvement paroît direct. Ainsi la grande variation que les planètes de mars, cérés, pallas, junon, vesta, jupiter, saturne et uranus, présentent dans leurs mouvemens, qui sont, ou directs avec le soleil lorsqu'il y a conjonction, ou rétrogrades quand il y a opposition, ou stationnaires avant et après les conjonctions, peut être expliquée en supposant à ces planètes, comme à la terre, à vénus et à mercure, un mouvement autour du soleil d'occident en orient; et si ensuite on fait remarquer que les distances, lorsque le mouvement est rétrograde, sont à leur *minimum*, tandis qu'elles sont à leur *maximum* lorsque le mouvement direct est le plus grand possible, cette supposition acquerra une nouvelle force, et se changera enfin en certitude quand on aura déterminé l'orbe que ces planètes parcourent.

qui dépendent des circonstances particulières dans lesquelles la planète se trouve ; il est donc utile d'examiner séparément les méthodes qu'on a employées pour connoître les distances de mars , cérés , pallas , junon , vesta , jupiter , saturne et uranus.

### §. XXXV.

#### *De la distance de Mars à la Terre.*

290. La méthode que l'on a suivie pour déterminer la distance de mars à la terre est la plus générale, c'est celle qui a présenté le plus de difficultés, et dont on a tiré le plus grand parti. Elle consiste à prendre la parallaxe annuelle  $SMT$ ; fig. 109, connoissant dans ce triangle la parallaxe,  $SMT$ , l'angle à la terre  $STM$  et la distance de la terre au soleil  $TS$  on en conclut et la distance  $SM$  de la planète au soleil et celle  $TM$  de la planète à la terre.

Pour avoir cette parallaxe on a d'abord cherché à déterminer la loi du mouvement de la planète autour du soleil, à laquelle on parvient par l'observation d'un grand nombre de conjonction (1).

---

(1) Soit  $aSA$ , fig. 108, une première conjonction de la planète  $A$  avec le soleil  $S$  vue de la terre ; comme dans cette

291. Lorsqu'on connoît la loi du mouvement de la planète autour du soleil, on peut facilement avoir sa distance à la terre, en observant cette

conjonction la direction  $aSA$  peut être rapportée à une étoile cette direction est prise pour la droite invariable à laquelle les autres conjonctions doivent être rapportées. Quel que soit le rapport de la vitesse de la planète à celle de la terre, on observe, après un espace de temps dépendant du rapport des deux révolutions, une seconde conjonction  $bSB$ , ensuite une troisième  $cSC$ , et d'autres conjonctions successives  $dSD$ ,  $eSE$ ,  $fSF$ ,  $gSG$ ,  $hSH$ ,  $iSI$ ,  $kSK$ , etc. ; et l'on peut, par le temps écoulé entre chacune d'elles, connoître le rapport des temps que la planète a mis à parcourir l'arc excédant une de ses révolutions entières ; car si  $T, T', T'', T'''$ , etc., sont les temps écoulés entre chaque conjonction, et  $m, n, o, p$ , etc., les arcs correspondans excédant la révolution entière, et si la durée de la révolution entière de la planète autour du soleil étoit constante, et qu'elle pût être exprimée par  $\theta$ , on auroit  $\theta + x = T$  pour la première révolution,  $\theta + x' = T'$  pour la seconde, et  $\theta + x'' = T''$ ,  $\theta + x''' = T'''$ , etc., pour les autres, alors les temps  $x, x', x'', x'''$ , etc., correspondroient aux arcs  $m, n, o, p$ , etc., En comparant donc entre elles un grand nombre de conjonctions pour la terre, ou d'oppositions pour le soleil, on peut découvrir la loi qui existe entre le temps et le mouvement héliocentrique, ou son mouvement angulaire autour du soleil ; l'analyse offre pour cet objet diverses méthodes, qui se simplifient, pour le cas présent, par les considérations que, les principales inégalités de la planète redeviennent les mêmes à chacune de leur révolutions sidérales, leur ensemble peut être exprimé par une série fort convergente de sinus d'angles multiples de leur moyen mouvement, série dont il est facile de

planète soit dans les *quadratures* (132), soit dans tout autre instant (1).

### §. XXXVI.

#### *De la distance de Jupiter à la Terre.*

292. On aperçoit près de Jupiter quatre satellites, qui oscillent sans cesse autour de cette planète; l'examen de leurs oscillations et leurs passages sur son disque a fait conclure qu'ils ont un mouvement périodique d'occident en orient dans un orbe rentrant, et que la durée de ce mouvement varie pour chaque satellite : c'est du

déterminer les coefficients. En réunissant quelques observations choisies, on a trouvé par ce moyen que le mouvement sidéral de Mars est de 686 jours 9796186.

(1) Connoissant le temps écoulé depuis une conjonction : on peut, puisque l'on a déterminé la loi du mouvement de la planète autour du soleil, connoître l'angle  $MSm$ , fig. 10, que fait son rayon vecteur avec la première direction; prenant l'angle  $m'S$  que le rayon vecteur du soleil à la terre fait avec cette direction, on déduit l'angle  $MSt$  qui est son supplément, donc l'angle au soleil  $m'st = MSt - MSm$ ; prenant l'angle à la terre  $mts$ , tout est connu dans ce triangle et l'on en déduit les deux distances  $mt$ ,  $ms$ . C'est ainsi que l'on a trouvé que la plus grande distance de Mars à la terre est d'environ deux fois et demie celle du soleil à la terre; sa plus petite distance environ 0,5; que le diamètre de Mars est à peu près la moitié de celui de la terre, et son volume un peu moins de  $\frac{1}{8}$ .

rapport du mouvement des satellites, comparé à celui de la planète, que l'on se sert pour déterminer la masse de jupiter.

293. On peut, par le temps écoulé entre deux passages successifs d'un satellite sur le milieu du disque de jupiter, comparé au mouvement de cette planète dans l'espace, déterminer la durée d'une révolution sidérale du satellite autour de jupiter (1).

C'est en effet ainsi, et surtout par leur éclipses,

(1) Car si, dans une conjonction inférieure, la terre en T, fig. 110, le satellite en S, et jupiter en J, la direction sidérale de ce dernier, par rapport au satellite, est SJE, et que, pendant l'intervalle écoulé entre cette conjonction et la suivante, la terre se meuve de T en t, et jupiter de J en j, la conjonction aura lieu dans un point s plus avancé; mais, si du centre de jupiter j on mène une droite  $\Sigma e$  parallèle à SE, l'arc décrit par le satellite égale la circonférence entière, plus l'arc  $\Sigma s$ : or, l'angle  $\Sigma js = j t E'$ , qui lui est opposé, et qui est formé des directions de la terre à l'étoile correspondant à la première conjonction, et de la direction de la terre, au centre de jupiter lors de la seconde conjonction; cet angle pouvant être obtenu par l'observation, il s'ensuit que l'on peut, par ce moyen, connoître l'arc parcouru par le satellite dans l'intervalle de deux conjonctions, ainsi que le temps qu'il a mis à parcourir cet arc, et qu'en comparant ensemble plusieurs observations semblables, on détermine la loi du mouvement sidéral des satellites autour de jupiter.

que l'on a trouvé que la durée de leur révolution est :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	1. jour	7691378.
2 <sup>e</sup> . . . . .	3.	5511810.
3 <sup>e</sup> . . . . .	7.	1545528.
4 <sup>e</sup> . . . . .	16.	6887697.

294. En comparant l'angle des plus grands écarts du satellites *ATJ*, *JTB*, à celui du demi diamètre de jupiter *CTJ*, on détermine la forme de l'orbe et le rapport de son plus grand à son plus petit diamètre; c'est ainsi que l'on a trouvé que les distances moyennes de ces satellites au centre de la planète, en prenant le demi-diamètre de cette dernière pour unité, sont :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	5,	812964.
2 <sup>e</sup> . . . . .	9,	248679.
3 <sup>e</sup> . . . . .	14,	752401.
4 <sup>e</sup> . . . . .	25,	946860.

Le premier et le second satellites ne présentent pas de différences sensibles dans leurs plus grands écarts; le troisième n'en offre qu'une très-foible, et celle du quatrième est la plus considérable; d'où l'on conclut que les orbes des premier et second satellites sont sensiblement circulaires, celle du troisième foiblement elliptique, et que celle du quatrième a une ellipticité très-sensible.

295. Si l'on observe le temps que dure une

éclipse d'un satellite de jupiter, on verra que la moitié de sa durée coïncide à peu près avec le point de son orbite où il est en opposition avec le soleil, et donne la direction prolongée du rayon vecteur du soleil à la planète. Si l'on remarque l'instant d'une première conjonction  $T SJ$ , fig. 111, d'un satellite de jupiter, et celui du milieu de l'éclipse du même satellite, qui a lieu immédiatement après cette observation; connoissant la loi du mouvement du satellite, on a, par le temps écoulé entre les deux observations, l'arc sidéral qu'il a décrit autour de la planète. Si donc, pendant cet intervalle, jupiter s'est porté de  $J$  en  $j$ , et que du centre de l'astre dans cette seconde position, on mène une ligne  $e e'$  parallèle à  $TE$ , direction de la conjonction précédente, l'arc décrit par le satellite sera  $e' D e s$ ; maintenant, si de cet arc, connu par le temps écoulé entre les deux observations, on retranche la demi circonférence  $s e D$ , il restera l'arc  $D A e'$ , composé des angles  $e' j A$  et  $A j D$ ; mais, à cause des parallèles  $e' e, t E'$ , on a l'angle  $e' j A = j t E'$ ; et l'on peut avoir ce dernier en prenant l'angle de jupiter à la terre dans sa seconde position avec la direction  $t E'$  qu'il avoit dans sa première; retranchant cet angle de la somme des deux autres, il reste l'angle  $A j D$  ou  $t j z$  formé par

les droites menées du centre de jupiter aux centres du soleil  $\Sigma$  et de la terre  $t$  : ainsi, dans le triangle  $tj\Sigma$  formé par la position des trois astres, on connoît l'angle à jupiter, on peut, par l'observation, avoir celui à la terre  $jt\Sigma$ , et l'on connoît aussi la distance de la terre au soleil : on doit donc en conclure la distance de jupiter au soleil et à la terre en distances du soleil à la terre ; et l'on trouve, par cette méthode, que la plus grande distance de cette planète à la terre est d'environ 6, 2 fois la distance du soleil à cette dernière, et sa plus petite distance 4, 2 ; enfin que son diamètre est près de 11 fois plus considérable que celui de la terre, et son volume plus de 1000 fois.

### §. XXXVII.

#### *De la distance de Saturne à la Terre.*

296. Saturne est environné de sept satellites, qui oscillent autour de cette planète de même que ceux de jupiter autour de ce dernier.

La durée moyenne des révolutions sidérales, déduite de leur passage sur le disque de saturne, est :

Pour le 1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	0,	10 <sup>ur</sup> ,	94271 <sup>u</sup> .
2 <sup>e</sup> . . . . .	1,		37024 <sup>u</sup> .
3 <sup>e</sup> . . . . .	1,		83785 <sup>u</sup> .
4 <sup>e</sup> . . . . .	2,		73948 <sup>u</sup> .
5 <sup>e</sup> . . . . .	4,		51749 <sup>u</sup> .
6 <sup>e</sup> . . . . .	15,		94550 <sup>u</sup> .
7 <sup>e</sup> . . . . .	79,		32960 <sup>u</sup> .

Leurs distances, déduites de leurs écarts, en prenant pour unité le demi-diamètre de l'équateur de saturne, sont :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	3.	080.
2 <sup>e</sup> . . . . .	3.	952.
3 <sup>e</sup> . . . . .	4.	893.
4 <sup>e</sup> . . . . .	6.	268.
5 <sup>e</sup> . . . . .	8.	754.
6 <sup>e</sup> . . . . .	20.	295.
7 <sup>e</sup> . . . . .	59.	154.

Le grand éloignement des satellites de saturne et la difficulté d'observer leur position n'ont pas permis de reconnoître l'ellipticité de leurs orbites, et encore moins les inégalités de leurs mouvemens; cependant l'inégalité du sixième satellite est sensible.

297. L'anneau de saturne *ASB*, fig. 112, étant incliné de  $34^{\circ},8$  sur le plan de l'écliptique (73), ne se présente jamais qu'obliquement à la terre *T*, ou sous la forme d'une ellipse *A'B'*,

$ab$ , ou sous celle d'une ligne droite  $AB$  : il paroît sous la forme d'une droite lorsque la ligne des nœuds  $M'N'$ ,  $mn$ ,  $MN$ ,  $\mu\gamma$ , est dans la droite  $TS$  menée du centre de la terre à celui de saturne, comme en  $MN$ ; et l'ellipse est la plus grande lorsque la droite  $TS$ , menée du centre de la terre à celui de la planète, est perpendiculaire à celle des nœuds, comme en  $M'N'$  : dans cette position, le petit axe  $EF$  est moitié de la longueur du grand axe  $A'B'$ .

298. L'inclinaison de l'anneau sur l'ecliptique se mesure par la plus grande ouverture de l'ellipse qu'il nous présente. La position de ses nœuds peut se déterminer, par la situation apparente de la planète, au moment où l'anneau disparoît et reparoît, la terre étant dans son plan. Toutes les disparitions et réapparitions, d'où résulte la même position sidérale des nœuds, sont dues à ce que la prolongation de son plan rencontre la terre, comme en  $TMN$ ; les autres viennent de la rencontre de la prolongation du même plan avec le soleil  $\Sigma\mu\gamma$  : on peut donc reconnoître par la position de saturne, lorsque l'anneau paroît ou disparoît, si ce phénomène dépend de la rencontre de la prolongation de son plan avec le soleil ou avec la terre. Quand cette prolongation passe par le soleil  $\Sigma\mu\gamma$ , la position

des nœuds donne celle de saturne vu du centre du soleil, et alors on peut déterminer la distance rectiligne de cette planète à la terre; car, dans le triangle  $T\Sigma\sigma$ , formé par des droites, menées des centres de la terre, du soleil et de saturne, on sait que la droite  $\Sigma\mu\sigma$  est parallèle à  $TMN$ , direction des nœuds: si donc on prend de la terre  $T$  l'angle  $\Sigma T\sigma$  du soleil et de saturne à la terre, et l'angle  $\sigma TM$  formé par la direction des nœuds- $TM$ , et celle de la planète  $T\sigma$ , on aura l'angle à saturne  $T\sigma\Sigma$ , qui est semblable à  $MT\sigma$ : ainsi dans le triangle  $T\sigma\Sigma$  on connoît trois angles  $\sigma T\Sigma$ ,  $T\Sigma\sigma$ ,  $MT\sigma$  qui égalent  $T\sigma\Sigma$ , et la distance du soleil à la terre  $T\Sigma$ ; d'où l'on doit conclure la distance  $T\sigma$ ; de saturne à la terre, et celle de  $\sigma\Sigma$  de saturne au soleil: on a trouvé par cette méthode que, dans ses plus petites distances, cette planète est éloignée de la terre d'environ 8, 5 fois la distance du soleil à la terre, et de 10, 5 fois dans son plus grand éloignement; que son diamètre est dix fois plus grand que celui de la terre, et son volume mille fois plus considérable.

299. Les distances de jupiter et de saturne au soleil et à la terre, déterminées par les méthodes indiquées, parag. XXXVI et XXXVII, ne sont qu'approximatives. On fait généralement usage

de la parallaxe annuelle, déterminée par les lois du mouvement des planètes et de la terre, telle qu'elle a été indiquée pour la distance de mars (290).

### §. XXXVIII.

*De la distance d'Uranus , Cérès , Pallas , Junon et Vesta à la Terre.*

300. Uranus est environné de six satellites.

Les durées de leurs révolutions sidérales sont :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	5. jour <sup>s</sup> 8926.
2 <sup>e</sup> . . . . .	8. 7068.
3 <sup>e</sup> . . . . .	10. 9611.
4 <sup>e</sup> . . . . .	13. 4559.
5 <sup>e</sup> . . . . .	38. 0750.
6 <sup>e</sup> . . . . .	107. 6944.

Leurs moyennes distances à la planète, en prenant pour unité son demi-diamètre, sont :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	13. 120.
2 <sup>e</sup> . . . . .	17. 022.
3 <sup>e</sup> . . . . .	19. 845.
4 <sup>e</sup> . . . . .	22. 752.
5 <sup>e</sup> . . . . .	45. 507.
6 <sup>e</sup> . . . . .	91. 008.

La durée de la révolution des second et quatrième satellites a été déduite de l'observation ; les autres

durées ont été conclues des plus grandes *elongations* observées, et de l'hypothèse que les carrés des temps des révolutions sont comme les cubes de leurs distances moyennes au centre de la planète; hypothèse que nous examinerons dans les leçons suivantes, et qui se trouve confirmée par l'observation des second et quatrième satellites.

301. Quoique uranus soit accompagné de satellites, ainsi que jupiter, il n'a pas été possible de se servir de l'observation de leurs éclipses pour déterminer leur distance, et l'on a été obligé de faire usage, ainsi que pour cérés, pallas, junon et vesta, des connoissances que l'on a sur leur vitesse, lesquelles sont encore imparfaites, à cause du peu de temps pendant lequel on a pu les observer, eu égard à la découverte récente de ces planètes; et l'on a employé aussi le beau rapport, trouvé par Kepler, entre la vitesse des planètes et leur grand axe, que nous ferons connoître dans une autre leçon. On trouve par cette méthode que, dans ses plus petites distances, uranus est dix-huit fois plus éloigné de la terre que le soleil, et vingt fois dans ses plus grandes; il résulte de ces observations, que le diamètre d'uranus est environ quatre fois et demie plus grand que celui de la terre, et son volume plus de quatre-vingts fois plus consi-

dérable. On trouve de même que les distances moyennes de cérés, pallas, junon et vesta, sont de 2,37 à 2,77 fois celle de la terre au soleil.

### §. XXXIX.

#### *Des orbés des planètes.*

302. Quand on prend, jour par jour, la direction de chaque planète, et que, sur chaque direction, on rapporte leurs distances à la terre, on trouve, en supposant cette dernière immobile, que la courbe qu'elles décrivent dans l'espace est une espèce d'épicycloïde  $MmM'$  «  $M''$ , fig. 106, formée par le mouvement de la planète sur une ellipse entraînée par le soleil dans son mouvement autour de la terre, et à un des foyers de laquelle, le centre du soleil est placé : si l'on suppose cet astre immobile, et la terre tournant autour de lui, la figure de l'orbe est de même une ellipse à un des foyers de laquelle le centre du soleil est placé : ainsi toutes les planètes connues, c'est-à-dire, mercure, vénus, la terre, mars, cérés, pallas, junon, vesta, jupiter, saturne et uranus, se meuvent autour du soleil dans un orbe elliptique dont un des foyers est occupé par

*le centre du soleil*; mais chacune de ces ellipses a un grand axe, une excentricité et une inclinaison différentes.

La loi du mouvement elliptique des planètes a été découverte par Kepler.

303. Les rapports des demi-grands axes des onze planètes, ou leurs moyennes distances au soleil, sont, fig. 113 :

Pour Mercure $\Sigma$ m. . . . .	0, 3870981.
Vénus $\Sigma$ V. . . . .	0, 7233323.
La terre $\Sigma$ T. . . . .	1, 000000.
Mars $\Sigma$ M. . . . .	1, 5236935.
Cérès $\Sigma$ C. . . . .	2, 767405.
Pallas. . . . .	2, 767592.
Junon. . . . .	2, 667163.
Vesta. . . . .	2, 375000.
Jupiter $\Sigma$ J. . . . .	5, 202778.
Saturne $\Sigma$ S. . . . .	9, 538785.
Uranus $\Sigma$ U. . . . .	19, 183475.

Les excentricités comparées aux demi-grands axes, prises pour unités, étoient en 1801 :

Mercure. . . . .	0, 205515.
Vénus. . . . .	0, 006853.
La terre. . . . .	0, 016853.
Mars. . . . .	0, 093154.
Cérès. . . . .	0, 078349.
Pallas. . . . .	0, 245384.
Junon. . . . .	0, 254944.

Vesta. . . . .	0, 093220.
Jupiter. . . . .	0, 048178.
Saturne. . . . .	0, 056168.
Uranus. . . . .	0, 046670.

L'inclinaison à l'écliptique, fig. 114, étoit au commencement de 1801 :

Mercure $m \Sigma T$ . . . . .	7°, 78058'.
Vénus $V \Sigma T$ . . . . .	3, 76936.
La terre. . . . .	0, 0000.
Mars $M \Sigma T$ . . . . .	2, 055663.
Cérés $C \Sigma T$ . . . . .	11, 8068.
Pallas. . . . .	38, 4654.
Junon. . . . .	14, 5086.
Vesta. . . . .	7, 9401.
Jupiter $J \Sigma T$ . . . . .	1, 46034.
Saturne $S \Sigma T$ . . . . .	2, 77102.
Uranus $U \Sigma T$ . . . . .	0, 8599.

Les durées des révolutions sidérales sont :

Mercure. . . . .	87. jour	969258.
Vénus. . . . .	224.	700824.
La terre. . . . .	365.	256384.
Mars. . . . .	686.	979618.
Cérés. . . . .	1681.	539.
Pallas. . . . .	1681.	709.
Junon. . . . .	1590.	998.
Vesta. . . . .	1355.	205.
Jupiter. . . . .	4332.	596308.
Saturne. . . . .	10758.	969840.
Uranus. . . . .	30688.	712687.

La longitude moyenne de toutes ces planètes, comptée de l'équinoxe moyen du printemps  $\Sigma E$ , fig. 115, étoit au 31 décembre 1800.

Mercure $E \Sigma m$ .	. . . . .	282.	15647".
Vénus $E \Sigma V$ .	. . . . .	11.	33672.
La terre $E \Sigma T$ .	. . . . .	111.	28179.
Mars $E \Sigma M$ .	. . . . .	71.	24145.
Cérès.	. . . . .	294.	1682.
Pallas.	. . . . .	280.	6858.
Junon.	. . . . .	322.	7938.
Vesta.	. . . . .	297.	1299.
Jupiter $E \Sigma J$ .	. . . . .	124.	67781.
Saturne $E \Sigma S$ .	. . . . .	150.	38010.
Uranus $E \Sigma U$ .	. . . . .	197.	54244.

304. Les mouvemens périodiques de mars, cérès, pallas, junon, vesta, jupiter, saturne et uranus, ont, comme ceux de mercure, de vénus et de la terre, cinq sortes de variations occasionnées, 1° par leur mouvement dans l'ellipse; 2° par celui du grand axe de l'ellipse; 3° par la variation dans l'excentricité de cette ellipse; 4° par le mouvement des nœuds des orbes sur le plan de l'écliptique; 5° par la variation dans l'angle que font les orbes avec l'écliptique.

305. Toutes les planètes ont dans leurs ellipses un mouvement plus rapide au périhélie qu'à l'aphélie; la variation dans la vitesse est réciproque au carré de leur rayon vecteur; d'où

il suit que les aires décrites par les rayons vecteurs sont proportionnelles aux temps : comme ce rapport est général, et qu'il s'observe également dans le mouvement des satellites autour de leurs planètes, Kepler en a formé cette deuxième loi fondamentale du mouvement des corps célestes, *que les aires décrites autour du soleil par les rayons vecteurs des planètes, et autour des planètes par les rayons vecteurs des satellites, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

306. Le grand axe de chaque ellipse a un mouvement d'occident en orient différent dans chaque orbe. Le mouvement sidéral et séculaire du périhélie est :

Mercure. . . . .	1801.	10.
Vénus. . . . .	— 826.	63.
La terre. . . . .	3641.	40.
Mars. . . . .	4884.	05.
Jupiter. . . . .	2048.	95.
Saturne. . . . .	5978.	60.
Uranus. . . . .	738.	69.

La longitude du périhélie des grands axes étoit, fig. 116, au commencement de 1801 :

Mercure m $\Sigma$ E. . . . .	82.	6256.
Vénus V $\Sigma$ E. . . . .	142.	9077.
La terre T $\Sigma$ E. . . . .	110.	5571.
Mars M $\Sigma$ E. . . . .	369.	3407.

Cérès. . . . .	162.	9565.
Pallas. . . . .	134.	7040.
Junon. . . . .	59.	2349.
Vesta. . . . .	277.	4630.
Jupiter J $\Sigma$ E. . . . .	12.	3812.
Saturne S $\Sigma$ E. . . . .	99.	0549.
Uranus U $\Sigma$ E. . . . .	185.	9574.

307. L'excentricité des ellipses des orbes de chaque planète varie, soit en augmentant, soit en diminuant l'ellipticité; les variations séculaires de ce rapport sont :

Mercure. . . . .	+	0. 000003867.
Vénus. . . . .	-	0. 000062711.
La terre. . . . .	-	0. 000041632.
Mars. . . . .	+	0. 000090176.
Jupiter. . . . .	+	0. 000159350.
Saturne. . . . .	-	0. 000312402.
Uranus. . . . .	-	0. 000025072.

308. L'intersection des orbes sur le plan de l'écliptique varie pour chacun de ces orbes. Le mouvement des nœuds est rétrograde sur celui de la planète, et se fait d'orient en occident. La variation séculaire est :

Mercure. . . . .	-	2414." 41.
Vénus. . . . .	-	5770. 99.
La terre. . . . .		0000. 00.
Mars. . . . .	-	7186. 65.
Jupiter. . . . .	-	4869. 04.
Saturne. . . . .	-	6995. 25.
Uranus. . . . .	-	11144. 81.

La longitude du nœud ascendant sur l'écliptique étoit au commencement de 1801, fig. 114, à :

Mercure m $\Sigma$ E. . . . .	51. <sup>o</sup>	c651. <sup>''</sup>
Vénus V $\Sigma$ E. . . . .	83.	1972.
La terre. . . . .	00.	0000.
Mars M $\Sigma$ E. . . . .	53.	3605.
Cérès. . . . .	89.	9083.
Pallas. . . . .	191.	7148.
Junon. . . . .	190.	1228.
Vesta. . . . .	114.	4630.
Jupiter J $\Sigma$ E. . . . .	109.	3624.
Saturne S $\Sigma$ E. . . . .	124.	3662.
Uranus U $\Sigma$ E. . . . .	80.	9488.

309. L'inclinaison des orbes des planètes sur l'écliptique varie ; la variation séculaire est de :

Mercure. . . . .	+ 56. <sup>''</sup>	12.
Vénus. . . . .	- 14.	05.
La terre. . . . .	00.	00.
Mars. . . . .	- 0.	47.
Jupiter. . . . .	- 69.	78.
Saturne. . . . .	- 47.	88.
Uranus. . . . .	+ 9.	38.

### §. XL.

#### *De la Rotation des Planètes. et des Satellites.*

310. Les taches que l'on voit distinctement sur le disque de mars, de jupiter et de saturne,

et leur changement de position, ont fait conclure que ces planètes ont un mouvement de rotation sur elles-mêmes d'occident en orient; la durée de leur rotation est :

Mars, de . . . . .	1.	jour	02735''
Jupiter. . . . .	0.		41377.
Saturne. . . . .	0.		42800.

On présume, par analogie, qu'uranus, cérés, pallas, junon et vesta, ont aussi un mouvement de rotation.

L'axe de rotation de mars est incliné sur l'écliptique de  $66^{\circ} 33'$ ; celui de jupiter est presque perpendiculaire à l'écliptique.

311. Les satellites de jupiter ayant à diverses époques un éclat différent, cette différence de clarté et la comparaison qu'on a faite de l'intensité de la lumière qu'ils envoient ont fait présumer qu'ils ont un mouvement de rotation : *Herschel*, qui s'est occupé de cette recherche délicate, a remarqué qu'ils se surpassent alternativement en clarté, circonstance propre à nous faire juger de leur éclat respectif. Les rapports des maxima et des minima de la lumière qu'ils envoient avec leurs positions mutuelles lui ont fait connoître qu'ils tournent sur eux-mêmes, comme la lune, dans un temps

égal à la durée de leur révolution autour de leur planète: *Maraldi*, en observant les retours d'une même tache sur le disque du quatrième satellite dans ses passages sur jupiter, en avoit déduit le même résultat à l'égard de ce quatrième satellite. Ce phénomène se remarque aussi dans le septième satellite de saturne : lorsqu'il est à l'orient de sa planète, sa lumière s'affoiblit à un tel point, qu'il est très-difficile de le distinguer; ce qui ne peut provenir que des taches qui couvrent l'hémisphère qu'il nous présente: on conçoit que, pour nous offrir constamment dans la même position ce phénomène, il faut que ce satellite, en cela, semblable à la lune et aux satellites de jupiter, tourne sur lui-même dans un temps égal à celui de sa révolution autour de saturne; ainsi l'égalité entre les durées de la rotation et de la révolution paroît être une loi générale des mouvemens des satellites.

Le grand éloignement des corps célestes affoiblissant l'apparence des phénomènes que leurs surfaces présentent, et les réduisant à de très-légères variétés dans l'intensité de leur lumière, lesquelles échappent à la première vue, et qu'un long exercice dans ce genre d'observation peut seul rendre sensibles, « on ne doit,

dit Laplace, employer qu'avec une extrême circonspection ce moyen de suppléer à l'imperfection de nos organes, pour ne pas se tromper sur les causes dont ces variétés dépendent.

312. La surface de l'anneau de saturne n'est pas continue (76); une bande noire, qui lui est concentrique, la sépare en deux parties, dont chacune paroît former un anneau distinct; et d'autres bandes noires, aperçues par plusieurs observateurs, semblent même indiquer un plus grand nombre d'anneaux. Herschel, en observant quelques points brillans de l'anneau, a conclu qu'il a un mouvement de rotation d'occident en orient, dans une période de 0.<sup>jour</sup> 437', autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et passant par le centre de la planète.

### *Récapitulation.*

313. Il suit de ce que nous venons d'exposer que les planètes ont deux sortes de mouvemens, l'un de rotation sur leur axe, l'autre périodique autour du soleil; que, dans toutes, ces mouvemens s'exécutent d'occident en orient; que celui de rotation a été reconnu par plusieurs taches qui couvrent la surface de quelques-unes, et qu'on a conclu, par analogie, que mercure, uranus, cérés, pallas, junon et vesta, en ont un semblable; que *le mouvement*

*périodique des planètes se fait dans des orbés elliptiques dont le centre du soleil occupe un des foyers, généralité dont Kepler a formé sa première loi du mouvement des corps célestes; que la figure de ces orbés a été déterminée en prenant, jour par jour, les directions des planètes dans le ciel, et rapportant sur ces directions leurs distances à la terre; que ces distances ont été prises par des méthodes différentes pour mars, jupiter et saturne; que le mouvement de toutes les planètes autour du soleil est sujet à cinq inégalités; la première dans le mouvement sur l'ellipse, d'où résulte cette seconde loi de Kepler que les aires décrites autour du soleil par les rayons vecteurs des planètes, sont proportionnelles aux temps employés à les décrire; la seconde dans le grand axe de l'ellipse, qui a un mouvement d'occident en orient; la troisième dans l'excentricité des ellipses, qui s'écartent ou se rapprochent de la forme circulaire; la quatrième dans le mouvement des nœuds, qui, dans tous les orbés, s'exécute d'orient en occident; la cinquième dans l'inclinaison des orbés sur l'écliptique, laquelle augmente ou diminue tous les siècles; que les satellites ont aussi deux mouvemens, l'un de rotation sur leur axe, et l'autre périodique autour de leurs planètes; que la durée du mouvement de rotation est égale à celle du mouvement périodique; que ce dernier se fait dans des orbés elliptiques dont le centre de la planète occupe un des foyers, et que les aires décrites autour des planètes par les rayons vecteurs des satellites sont proportionnelles aux*

*temps employés à les décrire ; que ces deux mouvemens des satellites se font aussi d'occident en orient ; enfin que l'anneau même de saturne a un mouvement d'occident en orient sur lui-même, c'est-à-dire autour de sa planète.*

---

## A P P E N D I C E

### A LA QUATRIÈME LEÇON.

#### §. XLI.

*Des Comètes, de leurs Mouvements apparens et réels, de leurs Orbes, et des Lois de leurs Mouvements.*

314. **N**ous avons déjà remarqué que les comètes, long-temps invisibles, ne paroissent d'abord qu'avec un foible éclat qui les fait confondre avec les étoiles les moins perceptibles ; qu'elles augmentent ensuite de grandeur et d'éclat, peuvent souvent être distinguées à la vue simple, et sont accompagnées d'une espèce de nébulosité qui se termine quelquefois en forme de queue (86). Les comètes ont, comme les planètes, deux mouvemens ; le premier, qui est diurne, et n'est qu'apparent ; est dû au mouvement de rotation de la terre ; le second, qui leur est propre, est très-complicqué, et s'exécute dans tous les sens ; il diffère du mouvement des planètes, en ce qu'il n'a pas toujours lieu d'occident en orient,

et sur des plans peu inclinés à l'écliptique.  
 315. Lorsqu'on aperçoit une comète dans le ciel, on ne peut observer que sa direction; car sa distance à la terre ou au soleil ne peut être déterminée immédiatement par l'observation: c'est donc de sa direction seule, vue de la terre, qu'il faut conclure sa position.

Soit la terre T, fig. 117, se mouvant sur son orbite TABD de T en T', et la comète C, se mouvant autour du soleil de C en C"; cela posé, un spectateur sur la surface de la terre peut, dans toutes les positions de cette dernière sur son orbite en T, T', T'', T''', prendre les directions TC, T'C', T''C'', T'''C''' : ces observations étant les seules que l'on puisse faire, et ces directions les seules données que l'on puisse se procurer, il faut déterminer avec elles le mouvement de la comète, sa vitesse et la forme de l'orbite sur lequel elle se meut.

316. Tous les corps planétaires parcourant des ellipses autour du soleil, il est naturel de supposer que les comètes se meuvent sur une courbe semblable, et de placer le soleil au foyer de l'ellipse qu'elles décrivent; mais, ces astres disparaissant après s'être montrés quelque temps, leurs orbites doivent être très-alongées, et le soleil doit être très-voisin de la partie de ces orbites où elles sont visibles.

317. Si l'on connoissoit la durée de la révolution des comètes, on pourroit, à l'aide de la quatrième loi de Kepler, que nous développerons dans les leçons suivantes, et qui consiste dans le rapport constant entre les carrés des temps des révolutions

des planètes et le cube du grand axe de leur ellipse, déterminer ces grands axes, et, par suite, les six éléments du mouvement elliptique; mais la plupart des comètes n'ont été observées qu'en une de leurs apparitions. Une seule ayant déjà été remarquée pendant quatre apparitions successives, en 1531, 1607, 1682 et 1759, on a déterminé, 1° la durée de sa révolution, qui est de soixante-seize ans; 2° son grand axe, de 35,9 fois la distance du soleil à la terre; 3° sa distance périhéliale, de 0,58 du grand axe de l'orbe terrestre; 4° son plus grand éloignement du soleil, au moins trente-cinq fois celui de la terre. On a remarqué aussi quelques anomalies dans sa révolution, puisque son retour a été de treize mois plus long de 1531 à 1607, que de cette dernière époque à 1682, et de huit mois plus court de 1607 à 1682, que de 1682 à 1759. Ne pouvant déterminer les éléments de l'orbe elliptique des comètes par les observations faites sur une seule de leurs apparitions, on a été obligé d'employer une autre méthode pour connoître la route qu'elles suivent dans le ciel.

Comme la petite portion de l'ellipse extrêmement allongée, décrite par la comète pendant son apparition, peut sensiblement se confondre avec une parabole, on a calculé son mouvement durant son apparition, comme si la portion de la courbe décrite étoit parabolique (1).

---

(1) Si l'on imagine, fig. 118, une planète mue dans le cercle PMB, dont le rayon soit égal à la distance périhéliale

Quand on a le rapport du secteur de la comète à celui de la planète fictive, on en déduit le rapport du secteur, tracé par le rayon vecteur de la comète

SP de l'orbe d'une comète PNA, le secteur PSN de la comète sera au secteur PSM de la planète ::  $\sqrt{AS} : \sqrt{\frac{AP}{2}}$

c'est-à-dire comme la racine carrée du rayon de la distance aphélie de la comète est à la racine carrée du demi-grand axe de l'ellipse.

En effet, soit  $s$  le secteur PSN décrit par le rayon vecteur de la comète, et  $s'$  celui PSM décrit par le rayon vecteur de la planète; soit  $e$  la surface de l'ellipse, et  $e'$  celle du cercle; soit encore  $a$  le rayon du cercle ou la distance périhélie de la planète, et  $b$  sa distance aphélie AS;  $a+b$  sera le grand axe; soit enfin  $t$ ,  $t'$  la durée des révolutions de la comète et de la planète, on aura  $s : s' :: \frac{e}{t} : \frac{e'}{t'}$ , et  $s^2 : s'^2 :: \frac{e^2}{t^2} : \frac{e'^2}{t'^2}$ . Puisque, par la quatrième loi de Kepler, les carrés des révolutions sont comme les cubes des grands axes, on a  $t^2 : t'^2 :: \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 : a^3$ ; substituant ces valeurs dans la dernière proportion, on aura  $s^2 : s'^2 :: \left(\frac{e^2}{(a+b)^3}\right) : \frac{e'^2}{a^3}$ ; mais la surface de l'ellipse  $e = \left(\frac{a+b}{2}\right) \pi \sqrt{ab}$ , et la surface du cercle  $e' = \pi a^2$ . Substituant ces valeurs dans la proportion, après en avoir ôté le facteur commun  $\pi$ , on a  $s^2 : s'^2 :: \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (ab)}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3} : \frac{a^4}{a^3} :: \frac{ab}{\left(\frac{a+b}{2}\right)}$   
 $a :: ab : a \left(\frac{a+b}{2}\right) :: b : \frac{a+b}{2}$ ; d'où  $s : s' :: \sqrt{b} : \sqrt{\frac{a+b}{2}}$

au soleil, avec celui que le rayon vecteur de la terre au soleil trace dans le même temps.

318. Si l'on suppose que le mouvement de la comète se fait sur une courbe parabolique, il faut, par les observations, déterminer les élémens du mouvement parabolique, c'est-à-dire, 1<sup>o</sup> la distance périhélie de la comète; 2<sup>o</sup> la position du périhélie; 3<sup>o</sup> l'instant du passage par le périhélie; 4<sup>o</sup> l'inclinaison de l'orbe sur l'écliptique; 5<sup>o</sup> la position des nœuds de l'orbe parabolique sur celui de la terre. Quoique la recherche de ces élémens présente de grandes difficultés, on est cependant parvenu à les déterminer par différentes méthodes: trois observations suffisent pour cette détermination, les autres ne servent qu'à confirmer l'exactitude de ces élémens et la vérité de la théorie.

319. On emploie ordinairement deux méthodes pour déterminer, d'après trois ou plusieurs observations, les élémens et la position de la parabole; l'une est graphique, l'autre analytique.

320. Par la première méthode, on trace sur un carton, la courbe TABD de l'orbe de la terre, fig. 117, et l'on détermine sur cette courbe les points T,

mais  $b = AS$  et  $a + b = AP$ ,  $s = PSN$  et  $s' = PSM$ ; donc  
 $PSN : PSM :: \sqrt{AS} : \sqrt{\frac{AP}{2}}$

Lorsque l'axe se change en parabole, le rapport entre la distance du périhélie et le demi-grand axe est :: 1 : 2; donc, dans ce cas, le rapport entre les secteurs est :: 1 :  $\sqrt{2}$ .

$T$ ,  $T'$ ,  $T''$  de la position de la terre au moment de l'observation; on tend ensuite les fils  $TC$ ,  $T'C'$ ,  $T''C''$ ,  $T'''C'''$ , qui représentent les directions de la comète dans l'espace au moment de chaque observation, et, après avoir indiqué en  $S$  la position du centre du soleil, on découpe autour de ce point une longue surface. Sur un second carton fig. 119, on trace plusieurs paraboles  $AQI$ ,  $BRK$ ,  $CSL$ , etc.; on découpe chacune de ces paraboles, que l'on place successivement sur l'orbite de la terre, fig. 117, de manière que leur foyer  $F$ , fig. 119, coïncide avec le centre du soleil  $S$ , fig. 117; on donne à ces paraboles différentes inclinaisons, jusqu'à ce qu'elles touchent au moins deux des fils de direction, et, parmi toutes celles qu'on a tracées et découpées, on en cherche une qui touche trois de ces fils; on marque sur cette courbe, fig. 117 (bis), les points  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ , de contact des fils, et, menant de chacun de ces points des droites au foyer  $F$ , on compare entre eux les secteurs  $CFI$ ,  $C'F'C''$ ,  $C''F'C'''$ , afin de s'assurer s'ils sont proportionnels aux temps écoulés entre chaque observation. Comme, parmi toutes les paraboles que l'on peut tracer, il n'en est qu'une qui puisse être assujétie aux trois conditions, 1<sup>o</sup> d'avoir son foyer au centre du soleil, 2<sup>o</sup> de toucher toutes les lignes menées de la terre à la comète, 3<sup>o</sup> d'avoir des secteurs formés par les droites menées du foyer aux points de contact, dont les surfaces soient proportionnelles aux temps écoulés entre chaque observation, il s'ensuit que l'on est sûr d'obtenir ainsi, par le tâtonnement, la parabole

unique qui indique la marche de la comète; et, d'après la position de cette parabole sur le carton représentant l'écliptique, on peut déterminer, 1° la position du périhélie 2° sa distance, 3° l'instant du passage de la comète au périhélie, 4° l'inclinaison de l'orbe sur l'écliptique, 5° la position des nœuds.

321. Par l'analyse, on fait usage d'une méthode indirecte consistant à chercher une parabole qui satisfasse à deux observations, à calculer ensuite le lieu de la comète à l'instant de la troisième observation, et le comparer à celui que l'on a observé; si ce lieu ne coïncide pas, on forme une nouvelle hypothèse, que l'on renouvelle jusqu'à ce que l'on ait trouvé celle qui satisfait aux trois observations; connoissant les élémens et la position de cette parabole, on en déduit les cinq élémens paraboliques nécessaires pour déterminer la marche de la comète.

322. Laplace propose, dans sa mécanique céleste, une méthode infiniment préférable à toutes celles qui ont été employées jusqu'à présent: elle consiste à déterminer, par l'observation, la latitude et la longitude géocentriques de la comète à plusieurs époques *équidistantes*; au moyen de ces données et des formules connues pour l'*interpolation*, on parvient à des expressions de la longitude et de la latitude et de leurs différences premières et secondes en fonction du temps; cela posé, on substitue ces expressions dans les trois *équations différentielles secondes*, du mouvement de la comète, et dans les *intégrales*, première et seconde de

ces équations : alors il est facile de déduire les cinq élémens paraboliques.

Cette méthode donne avec d'autant plus d'exactitude les élémens de la comète, qu'on y emploie un plus grand nombre d'observations, et que celles-ci sont plus rapprochées les unes des autres.

Laplace donne encore une règle pour corriger les premiers résultats, au moyen de trois observations éloignées entre elles; et, cette correction faite, on a des élémens assez exacts pour reconnaître la comète à son prochain passage : on pourra donc alors déterminer le temps de sa révolution et la grandeur de l'ellipse qu'elle parcourt; ce qui complétera sa théorie.

323. L'hypothèse du mouvement elliptique des comètes a été vérifiée d'abord par celle de 1531, 1607, 1682, 1759, dont on a observé les retours, et par plus de quatre-vingts comètes, dont les nombreuses observations sont exactement représentées par cette théorie; ce qui paroît prouver que leurs mouvemens et leurs retours sont réglés par les mêmes lois que le mouvement des planètes.

324. Le mouvement des comètes diffère cependant de celui des planètes, en ce que les premières ne se meuvent pas, comme les secondes, dans un même sens. Parmi les comètes, les unes ont un mouvement direct d'occident en orient, les autres un mouvement rétrograde sur celui-ci. L'inclinaison de leurs orbites offre toutes les variétés possibles, depuis la situation parallèle au plan de l'écliptique, jusqu'à la situation perpendiculaire sur ce plan.

325. Lorsqu'une comète a été observée, on juge de sa réapparition quand l'on retrouve les éléments déjà déterminés: c'est ainsi que l'on a reconnu l'identité de la comète de 1531, 1607, 1682 et 1759. Quelquefois cependant deux comètes présentent les mêmes apparences dans leurs mouvemens observés; telles sont celles des comètes de 1532 et 1661 que l'on avoit cru appartenir à la même, et dont on avoit fixé la révolution à cent vingt-neuf ans, mais qui n'a pas reparu en 1790, comme on s'y attendoit. La plus petite erreur dans l'inclinaison de l'orbite, dans la position des nœuds et du périhélie, et dans la distance de ce dernier, peuvent produire des différences très-considérables. Laplace pense que la probabilité qu'une comète nouvelle ne s'écartera pas d'une comète ancienne de 1<sup>deg.</sup> d'inclinaison d'orbite, 1<sup>deg.</sup> de position des nœuds, 1<sup>deg.</sup> de position du périhélie, et 0, 01 de la distance du périhélie, est de  $\frac{1}{300,000,000}$ ; si l'on multiplie cette

fraction par le nombre des comètes visibles et non encore observées, augmenté de l'unité, et si l'on divise l'unité par ce produit, plus 1, le quotient indiquera la probabilité qu'une nouvelle comète est la même que celle déjà vue: appelant  $x$  le nombre des comètes visibles, la probabilité =  $\frac{300,000,000}{x + 300,000,001}$ .

### *Récapitulation.*

326. Il suit de ce que l'on vient d'exposer qu'on ne peut observer que les directions des comètes :

que, d'après trois observations exactes on peut, soit par des moyens graphiques, soit par l'analyse, déterminer la portion de l'orbe que les comètes décrivent pendant le court espace de temps qu'elles sont aperçues; que la seule comète dont on ait observé les retours a un mouvement elliptique, et que le mouvement des quatre-vingt-douze comètes sur lesquelles on a fait de nombreuses observations, est exactement représenté par la théorie générale des corps planétaires; qu'ainsi, les comètes, que l'on a regardées pendant long-temps comme des météores, sont de la même nature que les planètes; que leurs mouvemens et leurs retours sont réglés d'après les mêmes lois; qu'elles n'en diffèrent que par la variété de la direction de leurs mouvemens et l'inclinaison de leurs orbes sur l'écliptique, puisque les unes se meuvent d'occident en orient, les autres d'orient en occident, et que leurs orbes forment, avec le plan de l'écliptique, tous les angles possibles depuis 0 jusqu'à 100<sup>des</sup>.

## V. LEÇON.

### §. XLII.

DE LA FIGURE DE LA TERRE,  
*et des différentes Méthodes employées  
 pour déterminer cette figure.*

327. Tous les corps pèsent sur la surface de

la terre : si cette pesanteur tendoit vers un centre commun, la figure de la terre seroit sphérique (5).

328. Mais cette planète a un mouvement de rotation sur son axe; et l'on sent qu'en vertu de ce mouvement les molécules qui la composent doivent tendre à s'écarter du centre de rotation avec des forces dépendantes de leurs vitesses, ainsi que nous l'exposerons dans l'appendice suivant. Comme les molécules ont à l'équateur une vitesse beaucoup plus grande que sur tout autre point, et qu'aux pôles la vitesse est nulle, il s'ensuit qu'à l'équateur ces molécules ayant une plus grande tendance à s'écarter de l'axe de leur mouvement que dans toute autre partie, et qu'aux pôles cette tendance étant nulle, la terre, en vertu de son mouvement de rotation, doit perdre de sa forme sphérique, et s'allonger vers l'équateur en s'aplatissant vers les pôles; ce qui fait que sa figure doit approcher de celle d'un ellipsoïde.

329. Puisqu'en vertu de l'action des molécules la forme de la terre devoit être celle d'une sphère (5), et que, par suite du mouvement de rotation, cette sphère doit s'aplatir aux pôles et se renfler à l'équateur, on voit que la figure de la terre doit être celle d'un sphéroïde

aplati ; mais quelle est rigoureusement cette figure ? c'est ce que l'on parvient à connoître par l'observation et l'expérience.

330. On emploie deux moyens pour déterminer la forme de la terre , 1<sup>o</sup> la mesure de la pesanteur sur différens points de sa surface , 2<sup>o</sup> la mesure des degrés des arcs du méridien et de ceux des parallèles à l'équateur.

331. Un phénomène très-remarquable, dont nous devons la connoissance aux voyages astronomiques faits sur différens points du globe : c'est la variation de la pesanteur à la surface de la terre. Cette force singulière anime dans le même lieu tous les corps proportionnellement à leurs masses, et tend à leur imprimer dans le même temps des vitesses égales. On sent bien qu'il n'est pas possible de reconnoître ces variations avec une balance, puisqu'elles affectent également le corps que l'on pèse et le poids auquel on le compare ; mais les observations du pendule sont propres à les faire découvrir, car il est clair que ses oscillations doivent être plus lentes dans les lieux où la pesanteur est moindre (1).

---

(1) Cet instrument, dont l'application aux horloges a prêté de grands secours à l'astronomie moderne et à la géographie,

333. L'oscillation du pendule étant produite par la pesanteur, il doit résulter de là que la vitesse du pendule simple est d'autant plus grande, que la pe-

consiste en un corps A, fig. 120, suspendu à l'extrémité d'un fil ou d'une verge inflexible AB, oscillant autour d'un point fixe B placé à l'autre extrémité : en écartant un peu en C le pendule de sa situation verticale BA, et l'abandonnant ensuite à l'action de sa pesanteur, il fait de petites oscillations CD, EF, qui sont, à très-peu près, de la même durée, malgré la différence des arcs qu'il décrit : cette durée dépend de la grandeur et de la figure du corps suspendu, de la masse, de la longueur de la verge ; mais les géomètres ont trouvé des règles générales pour déterminer, par l'observation des oscillations d'un pendule composé, de figure quelconque, la longueur d'un pendule simple dont les oscillations auroient une durée connue, et dans lequel la masse de la verge seroit supposée nulle relativement à celle du corps considéré comme un point infiniment dense : la longueur de ce pendule est égale à la somme des produits de tous les points matériels du pendule composé, multiplié par le carré de leurs distances au centre de suspension, divisé par le produit de la somme de tous les points matériels, par leurs distances au centre de suspension : c'est à ce pendule idéal, nommé *pendule simple*, que l'on a rapporté toutes les expériences faites avec cet instrument dans les divers lieux de la terre.

332. Soit A, B, D, E, F, H, fig. 121, un nombre quelconque de points matériels sur le pendule CH, dont C est le point de suspension ; tous ces corps sont mis en mouvement par l'action de la pesanteur, qui agit sur eux de la même manière. Si la verge inflexible, qui les contient, est dérangée de la verticale en Ch, l'action de la pesanteur s'exerce, en h, par une force exprimée par  $hi$ , qui se décompose en deux autres, l'une sui-

santeur l'est elle-même. La durée des temps des oscillations est comme la racine carrée de la longueur du pendule divisé par la pesanteur : l'on peut mesurer cette durée des oscillations par le nombre de cèbles qu'un pendule fait entre l'intervalle de deux passages d'une étoile au même méridien.

334. Bouguer ayant remarqué qu'un pendule de

vant  $KL$ , détruite par le point de suspension, l'autre suivant  $LM$ , en vertu de laquelle tous les corps doivent se mouvoir avec la même vitesse : mais, dans le mouvement d'oscillation, le corps  $A$  ne parcourt qu'un espace  $Aa$ , tandis que le corps  $H$  parcourt l'espace  $Hh$ ; le premier a une vitesse moindre que celle qui lui seroit propre, le second une vitesse plus grande; donc la verge  $CH$  doit avoir un point  $G$ , dont la vitesse est la résultante de toutes les autres. La somme des vitesses perdues par les corps au-dessus de ce point, doit être égale à la somme des vitesses gagnées par les corps au-dessous. Chaque vitesse perdue ou gagnée égale la masse du corps multiplié par le produit de sa distance au point de suspension, par la différence entre l'espace qu'il a parcouru et celui qu'il auroit dû parcourir : cette différence  $Aa' - Aa = aa'$ , ou  $Hh - Hh' = hh'$ , est proportionnelle à la distance de chaque corps au point  $G$ ; car, à cause des triangles semblables  $ag a'$ ,  $hg h'$ , on a  $aa' : hh' :: a'g : h'g :: AG : HG$ . Si l'on fait  $CG = x$  et  $CA, CB, CD, CE, CF, CH = \alpha, \beta, \delta, \epsilon, \varphi, \eta$ , on aura  $(x - \alpha).A\alpha + (x - \beta).B\beta + (x - \delta).D\delta = (\epsilon - x).E\epsilon + (\varphi - x).F\varphi + (\eta - x).H\eta$ ; d'où l'on tire  $x = \frac{A\alpha^2 + B\beta^2 + D\delta^2 + E\epsilon^2 + F\varphi^2 + H\eta^2}{A\alpha + B\beta + D\delta + E\epsilon + F\varphi + H\eta}$ . (1).

(1) Voyez 2<sup>e</sup> partie, liv. 2, chap. 3, pag. 464 de la mécanique de Bossut, édit. de 1775; et, pour de plus grands détails, le no 31 du premier livre de la mécanique céleste de Laplace.

même longueur a des durées d'oscillations moins grandes sur le bord de la mer qu'au sommet des hautes montagnes, conclut que la pesanteur diminue avec la distance au centre de la terre. D'après un grand nombre d'expériences faites au Pérou, il a trouvé que la pesanteur à l'équateur et au bord de la mer, étant exprimée par l'unité, est, au sommet du *Pichincha*, élevé de 4744<sup>met.</sup> au-dessus du niveau de la mer, de 0,998816. Cette diminution de la pesanteur à des hauteurs toujours très-petites, relativement au rayon terrestre, donne lieu de soupçonner que cette force diminue considérablement à de grandes distances du centre de la terre.

335. *Richer*, envoyé à Cayenne par l'académie des sciences, pour y faire des observations astronomiques, trouva que son horloge, réglée à Paris sur le temps moyen, retardoit chaque jour à Cayenne d'une quantité sensible : cette intéressante observation donna la première preuve directe de la diminution de la pesanteur à l'équateur ; elle a été répétée avec beaucoup de soin dans un grand nombre de lieux, en tenant compte de la résistance et de la température de l'air.

336. Il résulte de tous les calculs et observations faites sur le pendule que le rayon de la terre augmente du pôle à l'équateur ; que l'accroissement total de la pesanteur au pôle est  $\frac{1}{173}$  de la pesanteur à l'équateur ; que le pendule qui bat les secondes est plus grand aux pôles qu'à l'équateur de cinq cent soixante et sept cent millièmes de sa longueur à

l'équateur, et que, sur tous les autres points, son accroissement est proportionnel au carré du cosinus de la latitude (1).

337. Si la pesanteur sur la surface de la terre pouvoit être rapportée à son centre; si partout elle étoit proportionnelle à la droite menée de la surface au centre de la terre; et si elle n'éprouvoit aucune altération, on pourroit faire usage de l'observation du pendule pour déterminer la longueur des différens rayons, et conséquemment en déduire la figure de la terre: mais la pesanteur est dirigée dans le sens de la *normale*

(1) En effet (d'après le n° 333), on a  $t : : \sqrt{\frac{l}{p}}$ ;  $l$  étant la longueur du pendule,  $t$  le temps,  $p$  la pesanteur. Si donc deux pendules  $l, l'$ , font leurs oscillations dans le même temps en des lieux de la terre où la pesanteur soit  $p$  et  $p'$ , en sorte qu'on ait  $t : : \sqrt{\frac{l}{p}}$  pour le premier, et  $t : : \sqrt{\frac{l'}{p'}}$  pour le second; on aura  $\sqrt{\frac{l}{p}} = \sqrt{\frac{l'}{p'}}$ , et par conséquent  $l' : l : : p' : p$  ou  $l - l : l : : p' - p : p$ . Supposant donc que  $p$  et  $l$  correspondent à l'équateur, on voit que l'augmentation du pendule, en passant de l'équateur aux pôles, est comme l'augmentation de la pesanteur. or, cette dernière est comme le carré du cosinus de la latitude; car elle n'est autre chose que la force centrifuge décomposée suivant la verticale: donc l'accroissement du pendule est proportionnel au carré du cosinus de la latitude.

à la surface, qui elle-même ne tend pas au centre de la terre. De plus, tout fait croire que cette pesanteur n'est pas proportionnelle à la distance de la surface au centre ; enfin elle éprouve, sur chaque point de la terre, une diminution qui affecte la longueur du pendule, diminution occasionnée par la rotation de la terre, et qui est proportionnelle au carré du cosinus de la latitude. Toutes ces causes empêchant donc de faire usage de l'observation du pendule pour déterminer la forme très-compiquée du sphéroïde terrestre, on a dû employer la méthode plus longue, plus difficile, mais plus directe, de la mesure des degrés des arcs du méridien et des cercles parallèles à l'équateur.

338. La verticale sur un point de la surface de la terre étant une droite perpendiculaire à l'horizon de ce point, on conçoit que, d'après cette définition, les verticales  $AV, BV, DV, EV$ , fig. 121 (bis), doivent se réunir au centre de la terre si sa surface est sphérique, et que celles  $FV, GV, HV$ , ne s'y réunissent point si sa surface a toute autre courbure. Lorsque la courbe  $EF GH$  n'est pas un arc de cercle, il existe une autre courbe  $MX Y I$ , sur laquelle sont contenus les centres des *rayons osculateurs*  $HI, GY, FX, EM$ , avec lesquels on peut considérer que la

courbe est engendrée ; ainsi toutes les verticales aboutissent à cette courbe, et lui sont tangentes.

339. Les degrés du méridien se mesurent par l'angle que ces verticales font entr'elles. Si la surface de la terre formoit une sphère, toutes les verticales tendroient à un centre commun, et les arcs compris entre des angles égaux seroient égaux ; mais si la terre a toute autre courbure, les arcs correspondans seront inégaux, parce que les rayons de ces arcs le seront eux-mêmes : ainsi, si les angles  $ELF$ ,  $FKG$ , étoient égaux, l'arc  $EF$  décrit avec le rayon  $FL$  seroit plus grand que l'arc  $FG$  décrit avec le rayon  $FK$ , et cela dans le rapport de  $FL$  à  $FK$  ; parce que les arcs qui correspondent à des angles égaux sont proportionnels à leurs rayons.

340. On peut donc, par les mesures des degrés du méridien, déterminer la forme de la courbure de la terre qui correspond à ces mesures (1).

---

(1) En effet, si la terre étoit sphérique, tous les degrés des méridiens seroient égaux entr'eux, ainsi que les degrés de chaque parallèle, puisque les méridiens seroient de grands cercles, et les parallèles des cercles plus petits ; et si les degrés du méridien étoient inégaux, comme la grandeur des arcs est proportionnelle à celle des rayons osculateurs, ces rayons seroient inégaux. Soit, par exemple, le quart d'un arc du méridien

341. Si les pôles du monde étoient constans, et qu'il y eût une étoile fixe à chaque pôle, on pourroit prendre la mesure de l'angle que cette étoile fait avec l'horizon du point dont on veut avoir la latitude, et cet angle seroit égal à la distance de ce point à l'équateur. (1)

342. Comme le pôle du monde varie dans

dien divisé en sept parties; que les longueurs  $a\alpha$ ,  $b\beta$ ,  $c\gamma$ ,  $d\delta$ ,  $e\epsilon$ ,  $f\phi$ ,  $g\gamma$ , fig. 122, soient la mesure des arcs correspondans aux angles AIB, BK C, CLD, DME, ENF, FOG, GPH; on peut, en traçant les angles successifs, et rapportant sur chacun d'eux l'arc correspondant, décrire la courbe du méridien ABCDEFGH. Si la forme de la terre étoit une surface de révolution, la courbure de tous les méridiens seroit semblable, et celle de tous les parallèles seroit des cercles. Tout se réduit donc, pour connoître la forme de la terre, à déterminer d'abord le nombre de degrés contenus entre des points successifs du même méridien, ou leur différence de latitude; mesurer ensuite la grandeur des arcs qu'ils comprennent, puis déterminer le nombre de degrés contenus entre des points successifs d'un même parallèle, ou leur différence en longitude, et mesurer la grandeur de chacun de ces arcs.

(1) Soit H, fig. 123, le point dont on veut déterminer la latitude, HO l'horizon, Cp l'axe de la terre, qui, étant prolongé, doit rencontrer l'axe du monde, EC l'équateur, et H  $\pi$  une droite menée du point H au pôle du monde, et conséquemment parallèle à Cp: l'angle  $\pi$ HO de direction avec l'horizon est le complément de  $\pi$ HCp, et HCp est complément de ECH, donc  $\pi$ HO = ECH.

le ciel, et qu'il est rare de rencontrer une étoile à ce pôle lorsqu'on veut prendre la latitude, on observe une étoile près du pôle à l'instant de son passage au méridien; on prend, au moment de ce passage, son angle à l'horizon; douze heures après, on prend l'angle de la même étoile avec l'horizon, et la moitié de la somme des deux angles est exactement l'angle de l'horizon avec le pôle, affecté de la réfraction, et conséquemment c'est la latitude du lieu, quand cette réfraction en a été retranchée.

343. Lorsqu'on a ainsi déterminé la latitude de deux points  $Hh$  ou  $Hn$ , la différence des latitudes, si elles sont sur un même hémisphère  $Hh$ ; leur somme, si elles sont aux deux côtés de l'équateur  $Hn$ , donnent la mesure de l'arc compris entre les deux points.

344. On peut encore prendre la mesure de l'arc compris entre deux points  $Hh$ ,  $Hn$ , fig. 124, en prenant les angles  $\text{EHZ}$ ,  $ehz$ ,  $en\xi$  que forment la direction d'une étoile  $HE$ ,  $he$ ,  $ne$  avec la verticale  $HZ$ ,  $hz$ ,  $n\xi$ , lorsque cette étoile passe au méridien; la différence des angles  $\text{EHZ}$ ,  $ehz$ , quand l'étoile est d'un même côté par rapport à la verticale, la somme des angles  $\text{EHZ}$ ,  $en\xi$ , quand les étoiles sont des deux côtés de la verticale, donne la mesure des

arcs  $H \frac{1}{2}$  ou  $H \frac{2}{2}$  compris entre les deux points.

345. La longitude d'un lieu peut se prendre de deux manières, 1<sup>o</sup> par le moyen des montres marines ; 2<sup>o</sup> par l'observation d'un phénomène céleste.

346. La longitude étant la distance qui existe entre deux méridiens, si l'on observe l'heure du passage du soleil sur chacun des deux méridiens, la différence entre ces heures sera au jour entier comme la circonférence du cercle est à l'arc correspondant. Ainsi une montre bien réglée : mise à l'heure sur un point quelconque de la terre, et dont la position seroit déterminée, de manière qu'elle fit connoître l'heure du passage du soleil au méridien, de ce point; par l'heure qu'elle donneroit à l'instant où le soleil passeroit sur le méridien du lieu où seroit placé l'observateur pourroit, si elle n'éprouvoit aucune variation, indiquer la distance cherchée entre les deux méridiens; mais il a été long-temps difficile de construire de pareilles montres : les mouvemens irréguliers du vaisseau, les variations de la température, et les frottemens inévitables et très-sensibles dans des machines aussi délicates, étoient autant d'obstacles qui s'opposoient à la régularité de leur marche. On est heureusement parvenu

vaincre ces difficultés, et à exécuter des montres qui conservent, pendant plusieurs mois, une marche à très-peu près uniforme, et qui donnent le moyen le plus simple d'avoir les longitudes en mer. Comme ce moyen est d'autant plus précis, que l'intervalle pendant lequel on se sert de ces montres, sans vérifier leur marche, est plus court, on conçoit qu'elles sont très-utiles pour déterminer les positions respectives de deux lieux très-voisins l'un de l'autre; elles ont même, à cet égard, quelque avantage sur les observations astronomiques, la précision de celles-ci n'étant point augmentée par le peu d'éloignement entre les lieux où l'on fait les observations.

347. On se sert généralement de deux méthodes pour déterminer la longitude des lieux par l'observation des phénomènes célestes; par l'une, on réunit les observations d'un phénomène aperçu au même instant de tous les points de la terre sur lesquels il est visible; par l'autre, on fait usage des observations d'un phénomène qui, vu de plusieurs points de la terre, ne peut pas être aperçu de tous au même instant, ou, ce qui est la même chose, de l'observation des phénomènes qui sont indépendans ou qui dépendent de la parallaxe.

348. Les phénomènes qui peuvent être aper-

çus au même instant de tous les points de la terre sur lesquels ils sont visibles, sont les éclipses de lune et celles des satellites des planètes, particulièrement des satellites de jupiter. Lorsqu'on connoît l'heure à laquelle ces phénomènes doivent être aperçus dans un lieu quelconque, et qu'on observe celle à laquelle ils sont aperçus dans le lieu de l'observateur, la différence de ces heures est au jour entier comme l'arc correspondant aux méridiens des deux observateurs est à la circonférence du cercle : parmi tous ces phénomènes, celui de l'éclipse du premier satellite de jupiter est un des plus avantageux, parce qu'il se renouvelle à peu près au bout de  $\tau$ , <sup>jour</sup> 8, que l'on peut en observer avec précision le commencement et la fin, et que les tables de ces satellites, qui ont été très-perfectionnées de nos jours, donnent les instans de ces éclipses avec une précision presque égale à celle des observations mêmes.

L'observation des éclipses du premier satellite de jupiter offriroit aux navigateurs un moyen facile de reconnoître la longitude, s'ils pouvoient la faire en mer, mais les tentatives que l'on a faites pour vaincre les difficultés qu'opposent les mouvemens du vaisseau à ce genre d'observations, ont été jusqu'à présent infructueuses. Les marius

emploient avec succès l'observation de ces éclipses dans les relâches. La navigation et la géographie en ont retiré de grands avantages. Sur mer on n'emploie que l'observation des éclipses de lune, qui, comme on sait, sont très-rares.

349. Les phénomènes qui ne peuvent être observés au même instant de tous les points de la terre sur lesquels ils sont visibles, sont les occultations des étoiles par les planètes et par la lune : ou mieux, des distances angulaires des étoiles à la lune.

La lune ayant un mouvement très-rapide dans le ciel, se trouve dans des instans successifs à des distances différentes des étoiles. On a déterminé par des tables quelle est l'heure pour un méridien donné, celui de Paris, par exemple, où la lune est à une distance donnée d'une étoile vue du centre de la terre, c'est-à-dire, corrigée de la parallaxe et de la réfraction.

Supposons qu'un observateur soit placé sur un vaisseau : qu'il remarque en même-temps et la distance de la lune à une étoile, et l'heure qu'il est à son méridien, lors de l'observation : s'il calcule ensuite, quelle est la *distance vraie* : (c'est-à-dire, celle qui existeroit, si le phénomène étoit vu du centre de la terre, et telle qu'elle

auroit lieu sans l'effet de la réfraction et de la parallaxe), se servant des tables qui lui indiqueront l'heure à laquelle il aura remarqué la distance sur le premier méridien, et celle qu'il étoit à l'instant de l'observation sur le méridien où il se trouve, il pourra connoître la différence des heures, ce qui lui donnera l'intervalle qui sépare les deux méridiens et par conséquent la longitude (1).

---

(1) Pour apprécier l'exactitude de cette méthode, on doit considérer qu'elle est susceptible de deux erreurs; la première dans la détermination du lieu de la lune par l'observateur, lequel lieu ne répond pas exactement à l'heure désignée par son horloge, à cause du changement de longitude qu'il peut avoir éprouvé depuis le moment où elle a été réglée; la seconde en vertu de l'erreur des tables, par suite de laquelle ce même lieu ne se rapporte pas à l'heure correspondante qu'elles indiquent sur le premier méridien: la différence de ces heures n'est donc pas celle que donneroit une observation et des tables rigoureuses. Supposons que l'erreur commise soit d'une minute, pendant ce temps quarante minutes de l'équateur passent au méridien: cette erreur est celle correspondante sur la longitude du vaisseau, laquelle, à l'équateur, est de 40000 mètres, conséquemment moindre sur les parallèles: d'ailleurs, on peut la corriger, en partie, par des observations multipliées des distances de la lune au soleil et aux étoiles, que l'on répète pendant plusieurs jours pour compenser et détruire, les unes par les autres, les erreurs de l'observation et celles des tables.

On conçoit que les erreurs sur la longitude, correspondantes à celles des tables et de l'observation, sont d'autant moindres, que le mouvement de l'astre est plus rapide; ainsi les observations de la lune au périgée sont, par cette cause, préférables

350. Lorsque l'on connoît l'arc du méridien compris entre deux points, on peut, par une simple opération trigonométrique, avoir la distance entre ces deux points. Tout se réduit à mesurer une base, et à former, sur cette base, une suite de triangles qui se terminent aux extrémités de la ligne à mesurer; c'est ainsi que Picard, de l'académie des sciences, mesura, vers la fin du xvii<sup>e</sup> siècle, la portion de l'arc du méridien, entre les parallèles d'*Anières* et de *Malvoisine*, par un enchaînement de triangles représentés fig. 126, et dont la distance de *Villejuif* à *Juvisi* est la base mesurée. Depuis, Lahire a continué cette opération jusqu'à *Dunkerque*, comme on l'a représentée fig. 127, et Cassini jusqu'à *Perpignan*, ainsi qu'on le voit fig. 128.

C'est par cette méthode que l'on a mesuré l'arc du méridien terrestre qui traverse la France depuis *Dunkerque* jusqu'à *Mont-Joui*, près

à celles de la lune à l'apogée. Si l'on employoit le mouvement du soleil, lequel est environ treize fois plus lent que celui de la lune, les erreurs sur la longitude seroient treize fois plus grandes; d'où il suit que, parmi tous les astres, la lune est le seul dont le mouvement soit assez prompt, pour servir à la détermination de la longitude à la mer; et l'on sent, en conséquence, combien il étoit utile d'en perfectionner les tables.

de *Barcelone* : la longueur de cet arc est de  $10^{\text{deg.}} 7487''$ , et le milieu répond à  $51^{\text{deg.}} \frac{1}{3}$ . La longueur du degré s'y trouve de  $100017,^{\text{met.}} 9$ .

351. Comme on observa des différences dans la longueur des degrés mesurés sur le méridien qui passoit par l'observatoire de Paris; et comme ces différences, quoique très-petites, jointes aux erreurs inévitables de l'observation, empêchoient de pouvoir déduire aucune conséquence relative à la figure de la terre, l'académie des sciences, jugeant que la différence des degrés terrestres, si elle étoit réelle, se manifesterait principalement dans la comparaison de ceux mesurés à l'équateur et vers les pôles, envoya des académiciens à l'équateur même, qui y trouvèrent le degré du méridien =  $99552,^{\text{met.}} 3$ , c'est-à-dire  $465^{\text{met.}} 6$  plus petit que celui mesuré en France à  $51^{\text{deg.}} \frac{1}{3}$ . D'autres académiciens envoyés au nord, à  $75,^{\text{deg.}} 7$  environ de hauteur du pôle, y trouvèrent le degré du méridien de  $100969^{\text{met.}}$ , c'est-à-dire de  $1143,^{\text{met.}} 7$  plus grand qu'à l'équateur : ainsi l'accroissement des degrés des méridiens de l'équateur aux pôles fut incontestablement prouvé par ces mesures.

Les voyages des académiciens françois ayant dirigé l'attention des observateurs vers cet objet, de nouveaux degrés du méridien furent mesurés dans diverses parties de la terre, et toutes ces mesures concoururent à indiquer un accroissement dans les degrés de l'équateur aux pôles. Les mesures principales sont :

Noms des lieux.	Degrés.	Arcs du méridien.
A l'équateur. . .	0,° . .	= 99552, <sup>met.</sup> 3.
En Pensylvanie. 43, 56 . .		= 99787, 1.
En Italie. . . . 47, 80 . .		99948. 7.
En France. . . . 51, 33 . .		100017, 9.
En Autriche. . 53, . . .		100114, 2.
Dans le Nord. . 73, 7 . .		100696, 0.

352. Si la forme de la terre étoit sphérique, tous les degrés seroient égaux : puisqu'ils diffèrent de grandeur, il s'ensuit que sa forme n'est pas celle d'une sphère ; et, comme, après le cercle, la plus simple des courbes rentrantes est l'ellipse, on a cherché, d'après la mesure des degrés des méridiens, si la forme de la terre ne seroit pas un ellipsoïde de révolution.

353. On connoît plusieurs manières de construire une ellipse ; on peut la considérer comme étant engendrée par une suite de rayons osculateurs (336) : les arcs AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, fig. 122, qui correspondent à des angles égaux, augmentant comme leurs rayons, et les rayons osculateurs augmentant continuellement depuis l'extrémité H du grand axe HR jusqu'à l'extrémité A du petit axe AR, il s'ensuit que les arcs de l'ellipse doivent augmenter depuis l'extrémité du grand axe jusqu'à celui du petit. L'observation du pendule ayant appris que le

rayon de la terre est plus grand à l'équateur qu'aux pôles, et la mesure des degrés du méridien ayant fait connoître que ces degrés augmentent de l'équateur aux pôles, on étoit naturellement conduit à considérer la terre comme un ellipsoïde de révolution, il ne s'agissoit plus, pour s'en assurer, que de comparer les rapports des mesures des arcs du méridien avec la figure elliptique.

354. Dans une ellipse peu aplatie l'accroissement des arcs est à peu près proportionnel au carré du sinus de la hauteur du pôle sur l'horizon, ou au carré du cosinus de la latitude (1).

(1) En effet, soit  $AB$ , fig. 129, le demi-grand axe de l'ellipse  $= a$ , le rayon de courbure  $CM$  d'un point quelconque  $M=R$ ; l'abscisse  $AQ = x$ ; l'angle  $MNB$ , que l'observation donne pour la latitude, est formé par la normale  $MC$  et le grand axe  $AB$ ; il est complément de l'angle de la hauteur du pôle sur l'horizon  $= AKM$ . Soit cet angle  $MNB = \phi$ .

On suppose que l'arc du méridien  $DMF$ , dont le milieu est  $M$ , est assez peu étendu pour qu'il se confonde sensiblement avec le cercle osculateur du point  $M$  décrit avec le rayon  $CM$ ; et c'est pour cela qu'on regarde ces arcs mesurés, supposés égaux en degrés, comme proportionnels aux rayons de courbure qui répondent à leur milieu.

Représentant par  $2a$  le grand axe de l'ellipse. par  $K$  le rapport,  $AO:AB$  du petit axe au grand, et par  $x$  l'abscisse d'un point quelconque  $Q$  compté du centre  $A$ , on a pour le

355. On nomme aplatissement ou ellipticité d'un sphéroïde elliptique l'excès du grand axe de l'équateur sur celui des pôles : pour s'assurer si la terre est un ellipsoïde de révolution, on pouvoit chercher quelle est son ellipticité, déduite de la comparaison de deux degrés éloignés, et comparer cette ellipticité à celle déduite de la comparaison de deux autres degrés mesurés dans le cas où la terre auroit été un ellipsoïde de révolution; on eût obtenu dans toutes ces comparaisons la même ellipticité (1).

rayon de courbure en ce point  $R = \frac{(a^2 - x^2)(1 - K^2)}{K a^2}$ .

Lorsque l'ellipse est très-peu excentrique, on peut faire  $K = 1 - m$ ,  $m$  étant une très-petite fraction; cette valeur de  $R$ , en négligeant  $m^2$ , devient  $R = a + m \left( \frac{a - 3x^2}{a} \right)$ ; de plus appelant

$\Phi$  la latitude du point que l'on considère, et en négligeant la première puissance de  $m$ , on a  $x = a \cos. \Phi$ ; il vient donc  $R = a (1 + m(1 - 3 \cos. \Phi^2))$ ; or, comme dans cette quantité il n'y a de variable que  $\cos. \Phi$ , il s'ensuit que, dans une ellipse, les rayons osculateurs vont croissant de l'équateur aux pôles, et que, lorsque l'ellipse est peu aplatie, ces accroissements sont proportionnels au carré du cosinus de la latitude; et, comme les degrés croissent dans les mêmes rapports que ces rayons, il résulte que l'accroissement des arcs est proportionnel au carré du cos. de la latitude.

(1) En effet, étant donnée la grandeur des arcs de deux degrés quelconques, l'excentricité est égale à la différence de ces deux arcs, divisée par le produit du triple du plus petit par la différence

356. En comparant les degrés mesurés dans le Nord à ceux mesurés en France, on a, pour l'ellipticité de la terre,  $\frac{1}{146}$  de l'axe des pôles pris pour unité. En comparant les degrés de l'équateur à ceux de la France, on a pour l'ellipticité  $\frac{1}{114}$  : il paroît donc que la terre est sensiblement différente d'un ellipsoïde; il y a même lieu de croire qu'elle n'est pas un solide de révolution, et que ses deux hémisphères, de chaque côté de l'équateur, ne sont pas semblables. Le degré mesuré par Lacaille au Cap de Bonne-Espérance, à  $37^{\circ} 01$  de hauteur du pôle austral, a été trouvé de  $100050,^{m.} 5$ , tandis que celui qui a été mesuré en Pensylvanie, à  $43^{\circ} 56$  de hauteur du pôle boréal, n'a été trouvé que de  $99789^{m.}$  : le degré du Cap est même plus

des carrés des cosinus de latitude des arcs. Si l'on appelle  $p$  l'un des arcs, et  $\phi$  sa latitude,  $q$  le second arc et  $\psi$  sa latitude le rapport des arcs étant le même que celui des rayons, on aura  $\frac{p}{q} =$

$\frac{1 + m(1 - 3 \cos. \phi^2)}{1 + m(1 - 3 \cos. \psi^2)}$ ; d'où l'on tire, en négligeant toujours

le carré de  $m$ :  $\frac{p}{q} = 1 + 3m(\cos. \psi^2 - \cos. \phi^2)$ , et par consé-

quent l'ellipticité  $m = \frac{p-q}{3q(\cos. \psi^2 - \cos. \phi^2)}$ . lorsque les

degrés sont mesurés à l'équateur et aux pôles  $\psi = R = 1$  et  $\phi$

$= 0$ , on a  $m = \frac{p-q}{3q}$ .

grand que celui qui a été mesuré en France à  $51^{\circ} 33$ , puisque ce dernier n'est que de 100017, <sup>metr.</sup>9.

357. Un méridien céleste est formé par un plan qui passe par l'axe du monde et par le zénith de l'observateur : tous les lieux de la terre qui ont leur zénith sur la circonférence de ce méridien forment le méridien terrestre correspondant ; le zénith, étant le point où la perpendiculaire à l'horizon va rencontrer ce cercle. Comme la distance des étoiles est infinie, il en résulte qu'un méridien terrestre est la suite de tous les points pour lesquels la perpendiculaire à l'horizon est parallèle à un même méridien céleste. Si le sphéroïde de la terre étoit un solide de révolution, fig. 130, toutes les tranches  $AQGR$ ,  $BPHS$ ,  $DOIT$ , etc., perpendiculaires à l'axe de révolution, seroient des cercles, et les lignes  $FX$ ,  $EX$ ,  $DX$ , etc., parallèles au méridien céleste et normale à chaque tranche, seroient toutes dans un même plan  $LCF$  ; mais si le sphéroïde de la terre n'est pas un solide de révolution, fig. 131, les normales  $AP$ ,  $BP'$ ,  $Dp$ ,  $Eπ$ ,  $Fϕ$ , parallèles au plan du méridien céleste, ne passeront pas dans un même plan ; et, si par les points où ces droites rencontrent la surface de la terre on fait passer une ligne

ABDEF, elle sera une de celles que les géomètres appellent *courbe à double courbure* : d'où il suit qu'en raison de la forme du sphéroïde terrestre, il est possible que les points d'un méridien terrestre ne soient pas dans un même plan.

358. Le méridien terrestre n'est pas exactement la ligne que déterminent les mesures trigonométriques dans le sens du méridien céleste. En effet, le premier côté de la ligne mesurée est tangente à la surface de la terre, et parallèle au plan du méridien céleste; si l'on prolonge ce côté jusqu'à la rencontre d'une verticale infiniment voisine, et qu'ensuite on plie le prolongement jusqu'au pied de la verticale, on formera le second côté de la courbe, et de même des autres : la ligne ainsi tracée est la plus courte que l'on puisse mener sur la surface de la terre entre deux points quelconques pris sur cette ligne; elle n'est pas dans le méridien céleste, puisque le pied des deux verticales n'y est pas, et elle ne se confondroit avec le méridien terrestre que dans le cas où la terre seroit un solide de révolution. Quoi qu'il en soit, la différence entre la longueur de cette ligne et celle de l'arc correspondant du méridien terrestre est si petite, qu'elle peut être négligée sans erreur sensible.



361. La loi de diminution des degrés déduits de ces résultats, est très-irrégulière : l'ellipsoïde qui satisfait le mieux à ces mesures auroit un aplatissement de  $\frac{1}{170}$ ; le demi-axe des pôles, parallèle à celui de la terre, auroit 6244011<sup>mètres</sup>; celui de l'équateur 6386291, et le degré correspondant au parallèle moyen 99983<sup>mètres</sup>.7.

Pour obtenir cet ellipsoïde, il faudroit altérer d'environ 4,5 les hauteurs des pôles observées; et cette erreur n'est pas admissible, vu la grande précision des observations : mais on peut considérer cet ellipsoïde comme osculateur de la surface de la terre en France, à 51° de hauteur du pôle, dans une étendue de 5 à 6 degrés; car toutes les observations faites en France, en Autriche, en Italie, en Angleterre, et même en Laponie, s'accordent avec cet ellipsoïde : ainsi les observations faites dans l'hémisphère boréal, depuis 43 jusqu'à 73 degrés de hauteur du pôle, donnent à la surface de la terre, sur le méridien qui passe par la France, la forme d'un ellipsoïde dont l'aplatissement =  $\frac{1}{170}$ .

362. Il reste maintenant à continuer les opérations de Delambre et Méchain, non-seulement dans le sens du méridien, ce qui a été confié à MM. Biot et Arrago; mais encore dans toutes leurs perpendiculaires. Cette opéra-

tion, entreprise par Cassini, a déjà été exécutée pour la France : tous les lieux principaux élevés sur sa surface ont été liés par des triangles, par le moyen desquels on a tracé des courbes, fig. 132 ; les unes AT, BR, SD, etc., parallèles à la méridienne IQ ; les autres IA, KH, LB, etc. perpendiculaires à cette méridienne : ces dernières ont été prolongées jusqu'à la méridienne, les autres jusqu'à une perpendiculaire ZR menée de l'observatoire sur sa méridienne. Par la longueur de ces courbes, on a déterminé la position des lieux. Il seroit à désirer que ces opérations se continuassent sur toute la surface du globe, afin de déterminer d'une manière certaine et rigoureuse la forme de la terre.

### *Récapitulation.*

363. Il suit de tout ce que nous avons exposé dans cette leçon que la forme de la terre n'est pas celle d'une sphère ; que cette forme peut être déterminée par la loi de la pesanteur à sa surface, et par la mesure des degrés du méridien ; que la pesanteur croît de l'équateur aux pôles proportionnellement au carré du cosinus de la latitude ; que son accroissement total est au pôle  $\frac{1}{175}$  de sa pesanteur à l'équateur, et qu'il paroît résulter de ces observations que la terre doit avoir la forme d'un sphérobide aplati vers les pôles, mais qu'il est diffi-

cile de déterminer, par ce genre d'observations, la forme de ce sphéroïde ; que, pour connoître la grandeur des arcs des méridiens, il faut savoir déterminer la latitude et la longitude des différens lieux ; que la latitude se prend par l'observation de l'angle que fait avec l'horizon le point du ciel immobile, ou avec la hauteur méridienne d'un astre dont on connoît la déclinaison ; que la longitude peut être obtenue par le moyen d'une montre marine lorsque les distances sont peu considérables, et qu'on doit faire usage, dans le cas contraire, de l'observation des phénomènes célestes ; que sur terre on peut employer celle des éclipses du premier satellite de jupiter, qui, étant aperçues au même instant de tous les lieux où ce phénomène est visible, donne la longitude par la différence des heures sur les méridiens où ces éclipses sont remarquées ; que sur mer ces éclipses ne pouvant être observées, on a fait usage des distances parcourues, ou de la *distance vraie* des étoiles à la lune, qui donne un résultat beaucoup moins exact ; que, de la comparaison des mesures des degrés du méridien en France, au pôle et à l'équateur, il résulte que le sphéroïde de la terre n'est pas un ellipsoïde de révolution ; qu'en réunissant à ces observations celles qui ont été faites sur l'hémisphère austral, on a la preuve que la forme de la terre, étant très-composée, ne peut être déterminée que par un grand nombre de mesures de degrés de différens méridiens ; enfin que, des observations récentes faites en France par Delambre et Méchain pour

déterminer la longueur du mètre, continuée ensuite par Biot et Arrago, il résulte que l'ellipsoïde osculateur pour la France a un aplatissement de  $\frac{1}{170}$ ; que l'axe parallèle à celui des pôles = 6344011<sup>met.</sup>, l'axe qui est dans le plan de l'équateur = 6386391<sup>met.</sup>, et le degré correspondant au parallèle moyen = 99985<sup>met.</sup> 7.

## APPENDICE

## DES FORCES CENTRALES.

## DE LA PESANTEUR.

## §. XLIII.

*Des Forces centrales.*

364. LORSQU'UN corps A, fig. 133, tient à un centre C par un fil AC, et que l'on fait tourner le corps autour du centre, le fil se roidit, parce que le corps exerce sur le centre une force par laquelle il tend à s'en éloigner: cette force exercée par le corps se nomme *force centrifuge*. (146)

365. Si le corps A se meut librement autour du centre C, il a, par ce mouvement, ainsi qu'on vient de le voir, une tendance à s'échapper du centre: pour continuer à se mouvoir constamment dans le cercle ABD; il faut donc qu'une force l'attire vers ce centre, et qu'elle fasse équilibre à la force cen-

trifuge. Quelle que soit cette force, on la nomme *force centripète*.

366. Les *forces centrales* sont celles qui agissent sur un corps en mouvement autour d'un point, soit pour l'écarter, soit pour le retenir : ainsi les forces centrales se divisent en deux parties, forces qui écartent du centre ou centrifuges, et forces qui rapprochent du centre ou centripètes.

367. C'est en vertu de la force centrifuge qu'une pierre, que l'on fait tourner dans une fronde, tire la main qui tient l'extrémité de cette fronde, et tend sans cesse à la déranger du centre de mouvement ; que des billes AB, fig. 134, enfilées dans un axe ED, s'écartent du centre de mouvement, lorsque cet axe a un mouvement autour d'un centre C, et que leur vitesse d'écartement est d'autant plus grande, que le mouvement de rotation est plus accéléré ; que, dans des tubes fermés AB, DE, fig. 135, les corps pesans se portent à la circonférence du mouvement, et les corps légers qui les remplacent se portent au centre ; que l'on fait monter de l'eau dans des tubes inclinés AB, fig. 136, qui tournent autour d'un axe CD que l'on met en mouvement ; que les roues ABDE, fig. 137, font jaillir de l'eau en roulant lorsqu'elles sont mouillées ; que la pompe de *Verra* AB, fig. 138, laisse échapper dans la cuvette supérieure DEF l'eau qui étoit adhérente aux cordes ; que les ventilateurs ABDE, fig. 139, portent vers l'ouverture F l'air qui est contenu dans l'intérieur de la caisse pendant le mouvement des ailes, et que de nouvel air entre

de l'intérieur par l'ouverture C du centre, où il est plus raréfié, que dans les trombes, il y a de l'eau abandonnée à leur centre par le vide qui s'y forme, et que cette pluie est lancée au loin, en s'échappant dans la direction de la tangente de la rotation.

368. Pour qu'un corps se meuve dans un cercle ADHLO, fig. 140, il faut que la force centripète AC, qui attire le corps au centre, fasse équilibre à la force centrifuge CA, qui l'en écarte : ainsi les planètes ne se meuvent autour du soleil, la lune autour de la terre, les satellites autour de leurs planètes, que parce que la force centripète, qui les attire vers leur centre de mouvement, fait équilibre à la force centrifuge, qui tend à les en écarter. Comme l'on connoît par l'expérience la vitesse de chacun de ces corps autour de leur centre de mouvement, on peut, par le moyen de cet équilibre, déterminer exactement la valeur de ces forces.

369. Si la force centripète CA, qui agit sur un corps se mouvant dans un cercle, cessoit son action, le corps se mouvroit dans le sens de la tangente AFB, à partir du point A où la force centripète cesse d'agir sur le corps; mais, si la force centripète continuoît son action, il faudroit, pendant que le corps A se mouvroit de A en F dans la tangente, qu'il se rapprochât du centre de F en D : alors la direction du corps seroit dans la tangente DGE; et l'on voit que, pendant que le corps se mouvroit de D en G, il faudroit, pour lui faire continuer son mouvement dans le cercle, qu'il se

rapprochât du centre de G en H, et ainsi de suite. Les lignes FD, GH, etc., peuvent donc servir à exprimer l'action de la force centrale sur le corps pendant qu'il se meut de A en F, de D en G, etc.; mais les lignes FD, GH, sont les sinus versés des petits angles ACD, DCH, que le corps a formés dans son mouvement; et, comme, pour des angles très-petits, les lignes AF, DG, etc., sont sensiblement égales aux arcs AD, DH, etc., il s'ensuit que, dans un intervalle de temps très-court, l'effet des forces centrales peut être mesuré par le sinus versé du petit arc qu'il décrit, et le sinus versé d'un arc est sensiblement égal au carré de l'arc divisé par le diamètre =  $\frac{a^2}{d}$ . (1)

---

(1) On démontre, en mécanique, que toute force accélératrice égale le double de l'espace parcouru, divisé par le carré du temps : la force centripète étant une force accélératrice, ainsi qu'on le verra en traitant de la pesanteur, il s'ensuit que la force accélératrice  $F = \frac{2e}{t^2}$ ; mais l'espace parcouru dans ce cas-ci est le sinus versé du petit arc =  $\frac{a^2}{d}$  : mettant donc cette valeur à la place de  $e$ , on a  $F = \frac{2a^2}{dt^2} = \frac{a^2}{rt^2}$ . Dans un cercle les arcs parcourus sont toujours proportionnels au produit de la vitesse par le temps; donc  $a = vt$ , et  $a^2 = v^2 t^2$ ; d'où il suit que la force accélératrice  $F = \frac{v^2 t^2}{rt^2} = \frac{v^2}{r}$  : ainsi les forces centripètes et les forces centrifuges, qui leur font équilibre dans le mouvement circulaire, sont toujours égales au carré de la vitesse divisé par le rayon du cercle.

370. On peut, au moyen de ce résultat, comparer à la pesanteur la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre : c'est en vertu de cette rotation qu'à l'équateur les corps décrivent, dans chaque seconde de temps, un arc AD de 40'', 1095 de la circonférence de l'équateur terrestre ADHLOQA ; le rayon AC de cet équateur étant de 6375793<sup>met.</sup>, à fort peu près, le sinus verse FD de cet arc est de 0.<sup>met.</sup> 0126541. Un corps parcourt dans le vide à l'équateur, par l'action de la pesanteur, un espace = 3<sup>met.</sup> 64933 : ainsi la force centrale nécessaire pour retenir les corps à la surface de la terre, et par conséquent la force centrifuge due à son mouvement de rotation est à la pesanteur à l'équateur comme 0.<sup>met.</sup> 0126541 : 6375793 : 1 : 288,4. La force centrifuge diminuant la pesanteur, les corps ne tombent à l'équateur qu'en vertu de la différence, de ces deux forces = 3<sup>met.</sup> 64933 - 0.<sup>met.</sup> 0126541 = 3.<sup>met.</sup> 6366759. En nommant *gravité*, la pesanteur entière qui auroit lieu dans la diminution qu'elle éprouve, la force centrifuge à l'équateur est, à fort peu près,  $\frac{1}{289}$  de la gravité. Si la rotation de la terre étoit dix-sept fois plus rapide, l'arc décrit en une seconde à l'équateur seroit dix-sept fois plus grand ; les sinus verse augmentant à peu près comme les carrés des arcs (369), il seroit (17)<sup>2</sup> ou 289 fois plus considérable ; et, comme la force centrifuge seroit alors égale à la gravité, les corps cesseroient de peser à l'équateur. Les arcs étant entre eux comme les rayons, un corps qui seroit éloigné du centre de la terre de dix-sept fois

son rayon, et qui feroit sa révolution en même temps qu'elle, auroit une vitesse dix-sept fois plus grande que celle des corps à l'équateur; en conséquence, sa gravité seroit égale à sa force centrifuge, et il ne peseroit point sur la terre.

371. Les vitesses des corps mus circulairement sont entre elles comme les circonférences qu'ils décrivent divisés par le temps; ainsi  $V :: \frac{C}{T}$ . Les

circonférences étant comme les rayons, on a  $V :: \frac{R}{T}$ , donc  $V^2 :: \frac{R^2}{T^2}$ ; mais on a pour les forces

centrifuges  $F = \frac{V^2}{R}$  (369), d'où  $F = \frac{R^2}{T^2 R} = \frac{R}{T^2}$ ;

ainsi les forces centrales sont entre elles comme les rayons des circonférences divisés par les carrés des temps: il suit de là que, sur les divers parallèles terrestres A, B, D, fig. 141, la force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre est proportionnelle aux rayons de ces parallèles.

Ces beaux théorèmes, découverts par Huyghens, ont conduit Newton à la théorie générale du mouvement dans les courbes, et à la loi de la pesanteur universelle.

372. Un corps qui décrit une courbe quelconque tendant à s'en échapper par la tangente (369), on peut toujours imaginer un arc de cercle AB ou DF, fig. 142, qui passe par deux élémens contigus de la courbe AG, GB, ou DH, HF, et que l'on nomme *cercle osculateur*: dans deux instans consécutifs le corps est mu sur la circonférence de ce cercle, et

sa force centrifuge est (369)  $= \frac{V^2}{R}$ ; mais la position et la grandeur de ce cercle varient sans cesse; car l'on a dans le premier cas le rayon  $CG$ , et dans le second le rayon  $LH$ ; et, comme  $R$  est variable, il s'ensuit qu'en supposant  $V$  constant, la force centrale doit augmenter lorsque  $R$  diminue, et diminuer lorsque  $R$  augmente.

373. Si la courbe  $BE$ , fig. 143, est décrite en vertu d'une force dirigée vers un point fixe  $C$ , on peut décomposer cette force en deux; l'une  $BG$ , suivant le rayon osculateur  $BC$ ; l'autre  $BD$ , suivant l'élément de la courbe: la première fait équilibre à la force centrifuge, la seconde augmente ou diminue la vitesse du corps: cette vitesse est donc continuellement variable; mais elle est toujours telle, que les aires  $ABC$ ,  $BEC$ , décrites par le rayon vecteur  $BC$  autour de l'origine des forces  $C$ , sont proportionnelles aux temps. Réciproquement, si les aires tracées par le rayon vecteur autour d'un point fixe croissent comme les temps, la force qui sollicite le corps est constamment dirigée vers ce point.

374. Ces propositions fondamentales, dans la théorie du système du monde, se démontrent aisément de cette manière. (1)

---

(1) La force accélératrice peut être supposée n'agir qu'au commencement de chaque instant pendant lequel le mouvement du corps est uniforme; le rayon vecteur  $CA$  trace alors un petit triangle  $ABC$ ; si la force cessoit d'agir dans l'instant qui suit, le rayon vecteur traceroit dans ce nouvel instant un

375. Dans ce cas, si l'on imagine un très-petit secteur  $ACD$ , fig. 144, décrit pendant un intervalle de temps fort court; que, de la première extrémité  $A$  de l'arc de ce secteur, on mène une tangente  $AB$  à la courbe, et que l'on prolonge jusqu'à cette tangente en  $B$  le rayon vecteur  $CD$  mené de l'origine de la force à l'autre extrémité de l'arc, la partie de ce rayon  $BDA$ , interceptée entre la courbe et la tangente, sera visiblement l'espace que la force cen-

second triangle  $BDC = ACB$ , parce qu'ayant tous deux leurs sommets au point fixe  $C$ , origine de la force, leurs bases  $AB$ ,  $BD$ , situées sur une même droite, seroient égales, comme étant décrites avec la même vitesse pendant des instans que nous supposons égaux; mais au commencement du nouvel instant, la force accélératrice  $BC$  se combine avec la force tangentielle  $BD$ , et fait décrire la diagonale  $BE$  du *parallélogramme*  $BDEG$ , dont les côtés  $BD$ ,  $DE$ , représentent ces forces: le triangle  $BCE$ , que le rayon vecteur décrit en vertu de cette force combinée, est égal à celui  $BCD$  qu'il eût décrit sans l'action de la force accélératrice; car ces deux triangles ont pour base commune le rayon vecteur  $CB$  de la fin du premier instant, et leurs sommets sont sur une droite  $DE$  parallèle à cette base: l'aire  $CBE$ , tracée par le rayon vecteur, est donc égale dans deux instans consécutifs égaux, et par conséquent le secteur décrit par ce rayon croît comme le nombre de ces instans, ou comme les temps. Il est visible que cela n'a lieu qu'autant que la force accélératrice est dirigée vers le point fixe  $C$ , car autrement les triangles que nous venons de considérer n'auroient pas même hauteur et même base: ainsi la *proportionnalité des aires aux temps démontre que la force accélératrice est dirigée constamment vers l'origine du rayon vecteur.*

tripète aura fait décrire : l'on a, ainsi qu'on l'a vu (369),  $F = \frac{2 BD}{t^2}$ , mais  $e = BD$ ; ainsi l'on a  $F = \frac{2e}{t^2}$ .

L'on a vu (374) que les secteurs sont proportionnels aux temps; faisant le secteur  $ACD = S$ , on a  $S :: t$ ,

$S^2 :: t^2$ , donc  $F :: \frac{2e}{S^2} = \frac{2(BD)}{(ACD)^2}$ ; ainsi la force

centripète est comme la partie du rayon vecteur interceptée entre la courbe et la tangente divisée par le carré du secteur. A la rigueur, la force centripète dans les divers points de la courbe n'est pas proportionnelle à ces quotiens; mais elle est d'autant plus près de l'être, que les secteurs sont plus petits, en sorte qu'elle est exactement proportionnelle à la limite de ces quotiens: l'analyse différentielle donne cette limite en fonctions du rayon vecteur lorsque la nature de la courbe est connue, et alors on a la fonction de la distance à laquelle la force centripète est proportionnelle.

### Résumé.

376. Il suit de ce que nous venons d'exposer qu'un corps qui se meut dans une courbe est sollicité par deux forces, qui donnent naissance à un grand nombre, de phénomènes; l'une tangentielle à la courbe, appelée force centrifuge, et en vertu de laquelle il tend à s'écarter du centre de courbure; l'autre, qui lui fait équilibre en tendant à rapprocher le corps de son centre de mouvement, et que l'on nomme force centripète; que la réunion de ces deux

forces, agissant en sens contraire sur le centre du mouvement, s'appelle force centrale; que, dans un instant très-court, la force centripète est égale au sinus versé du petit arc que le corps décrit; que l'on trouve, par ce moyen, que la gravité à l'équateur est diminuée de  $\frac{1}{289}$ , et qu'un corps éloigné de dix-sept rayons du centre de la terre, qui feroit sa révolution en même temps qu'elle, n'exerceroit aucune pesanteur sur notre globe; que les forces centripète et centrifuge sont égales au carré de la vitesse divisé par le temps; que cette dernière force, due au mouvement de rotation de la terre, est, sur chaque point, proportionnelle aux rayons des parallèles à l'équateur; que l'on démontre la belle proposition de Kepler, que les aires décrites par le rayon vecteur autour de l'origine des forces sont toujours proportionnelles aux temps. Réciproquement, que, si les aires tracées par les rayons vecteurs autour d'un point fixe croissent comme les temps, la force qui sollicite les corps est constamment dirigée vers un même point; enfin que la force centripète est, comme la partie du rayon vecteur, interceptée entre la courbe et la tangente divisée par le carré du sec-tour.

## DE LA PESANTEUR.

377. La pesanteur est cette force en vertu de laquelle un corps tend à se porter vers un autre. Depuis les molécules les plus petites qui entrent dans la formation des corps, jusqu'aux masses

les plus considérables, tout, dans la nature, cède à cette force. La solidité des corps, leur cristallisation, la réfraction de la lumière, l'élevation et l'abaissement des fluides dans les tubes capillaires, et généralement toutes les combinaisons chimiques, sont des résultats de la pesanteur que l'on désigne sous le nom d'attraction, et dont la connoissance est un des principaux objets de la physique.

Nous ne nous occuperons maintenant que de la pesanteur des corps à la surface de la terre; l'on traitera, dans les paragraphes 47 et suivans, de la pesanteur générale des corps célestes, connue sous le nom de gravité; et, quant à la pesanteur des molécules des corps ou à l'*affinité*, ses effets sont démontrés en chimie.

La pesanteur sur la surface de la terre se divise naturellement en trois parties, 1<sup>o</sup> pesanteur absolue, 2<sup>o</sup> pesanteur relative, 3<sup>o</sup> pesanteur spécifique.

#### §. XLIV.

##### *De la Pesanteur absolue.*

378. Tout corps abandonné à lui-même tombe sur la surface de la terre en vertu de la pesanteur : la direction de sa chute est perpen-

diculaire à l'horizon , si elle se fait sur la surface de la mer ou au milieu d'une grande plaine ; elle est plus ou moins oblique à la verticale si la chute a lieu dans un pays de montagnes ; ses différences alors résultent de la pesanteur exercée par tous les corps environnans sur le corps abandonné. La Condamine, en prenant dans le même instant, des deux côtés d'une des hautes montagnes de la chaîne des Cordillères, l'angle d'une étoile avec une verticale formée par un long fil à l'extrémité duquel étoit un corps pesant, s'est assuré, par la différence des angles de l'étoile avec cette verticale, que la direction du fil étoit dérangée par l'action de la montagne, laquelle attiroit à elle le corps pesant qu'il soutenoit : cette observation, répétée par le docteur Maskeline sur une haute montagne d'Ecosse, eut un égal succès ; et tout récemment Cavendisch a vérifié, à l'aide de la balance de torsion de Coulomb que des masses considérables, placées sur la surface de la terre, agissent les unes sur les autres en s'attirant mutuellement.

379. Tous les corps élevés au-dessus de la surface de la terre, et ensuite abandonnés à eux-mêmes, tombent avec des vitesses différentes ; les plus lourds tombent avec plus de vitesse, les plus légers avec

plus de lenteur ; il en est même qui , à cause de leur grande légèreté , restent suspendus dans l'air : ce rapport entre la vitesse des chutes et la masse des corps avoit fait penser que la vitesse étoit proportionnelle aux masses. Pour s'en assurer, Newton et Desaglier firent tomber du haut de la tour de Saint-Paul de Londres, élevée de 82<sup>m</sup> 8, deux boules de 14<sup>centim.</sup> de diamètre, l'une pesant 1388 décigrammes, et l'autre 73 : ainsi les masses sous le même volume étoient à peu près :: 19 : 1 ; la plus pesante acheva sa chute en 7<sup>1</sup>/<sub>52</sub>, et la plus légère en 23<sup>1</sup>/<sub>15</sub>, à peu près dans le rapport de 8 à 24 25 ou de 1 à 3 ; d'où ils conclurent que la vitesse n'est pas proportionnelle aux masses :

380. Galilée, qui avoit le premier examiné la vitesse de la chute des corps de différentes densités, et qui avoit observé qu'elle ne répondoit pas à la différence des poids, chercha le moyen d'expliquer l'augmentation de vitesse que les corps tombans acquéroient en raison de leur densité, et il trouva que cette différence venoit de la résistance de l'air que les corps avoient à traverser. En effet, on a observé depuis que des corps de diverses densités, tels que la plume, le papier, le plomb, placés dans la partie supérieure d'un long tube AB, fig. 145, dans lequel on avoit fait le vide, mettoient le même temps pour parcourir sa longueur, c'est-à-dire arrivoient en même temps au bas, lorsqu'ils commençoient à tomber ensemble, et que conséquemment ils avoient la même vitesse.

381. Newton a cherché à déterminer par la chute

des corps, différemment denses, dans divers milieux, et par l'oscillation du pendule dans des milieux différens, la différence de vitesse que les corps ont dans leurs chutes. Pour cela, après avoir enveloppé de cire, des balles de plomb, de manière que l'enveloppe de chacune ayant des épaisseurs inégales, leurs densités soient différentes, il a fait tomber ces balles dans un tube de 2<sup>met.</sup> 72 de hauteur, qu'il a rempli successivement de divers liquides, tels que alcool, eau distillée, eau tenant du sel en dissolution, acides, etc.; et, comparant la durée de chaque chute à la densité des balles et des milieux, il a trouvé que, lorsque le milieu n'a pas, comme l'huile, une tenacité particulière dépendante de sa viscosité, la résistance des milieux étoit :

1<sup>o</sup> Proportionnelle à leur densité,

2<sup>o</sup> Proportionnelle aux carrés des diamètres des balles,

3<sup>o</sup> Proportionnelle aux carrés des vitesses des corps.

En faisant osciller des pendules de plomb, de fer, de bois, etc., ayant des diamètres égaux et des diamètres différens, et cela successivement dans l'air, dans l'alcool, dans l'eau, dans le mercure, etc.; mesurant le nombre d'oscillations que fait un pendule pour diminuer son arc d'une fraction de l'espace qu'il parcouroit au premier instant, Newton a trouvé que la résistance étoit :

1<sup>o</sup> Proportionnelle à la densité des milieux,

2<sup>o</sup> Proportionnelle aux carrés des diamètres des pendules,

3<sup>o</sup> Proportionnelle aux carrés des vitesses des pendules.

382. Puisque les corps différemment denses éprouvent en tombant des résistances qui croissent comme la densité des milieux et comme les carrés de leurs diamètres, il s'ensuit que des corps de même densité doivent tomber plus lentement lorsqu'ils sont divisés que lorsqu'ils sont en grandes masses; de là, qu'une masse d'eau, divisée par l'air en tombant, doit produire un choc moins grand que si, étant réunie sous la forme de glace, elle tomboit en une seule masse; qu'ainsi la pluie doit tomber moins vite que la grêle, et produire moins de dommages.

383. Des corps semblables ont en tombant une vitesse d'autant plus grande, qu'ils viennent de plus haut, c'est-à-dire qu'en divers instans de leur chute ils parcourent des espaces successivement plus grands. En faisant descendre un petit charriot C sur une corde inclinée AB, fig. 146, on voit que, si dans un instant il parcourt l'espace AD, dans un second il parcourt celui DE, dans un troisième celui EF, dans un quatrième celui FB, et que ces espaces sont entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc.; mais, comme en ajoutant ces nombres, on a ceux 1, 4, 9, 16, etc., qui sont les carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., Galilée conclut,

de cette expérience qu'il fit le premier, que les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps.

384. Cette expérience peut être répétée avec plus d'exactitude avec l'appareil nommé machine d'*Athood*.

Elle est composée d'une grande roue AB, fig. 147, dont l'axe C est porté par deux autres roues DE très-mobiles, qui diminuent le frottement de l'axe de manière à le rendre presque insensible : c'est de la diminution du frottement que dépend toute la perfection de la machine. Sur cette roue est un fil de soie très-léger FBAG, aux extrémités duquel sont suspendus deux disques HI, qui se font équilibre ; parallèlement au support de la machine est une règle verticale KL divisée en parties égales : sur cette règle se fixent, avec des vis, deux cercles N, M ; le premier N est un anneau à travers lequel un disque peut passer ; le second M est un plan qui reçoit le corps tombant. Sur le support de la machine est fixé un pendule OP, qui bat les secondes, et qui est destiné à mesurer le temps.

En plaçant sur les plateaux H et I des corps diversement pesans, le corps qui pèse le plus a une vitesse que l'on apprécie par l'espace par-

couru indiqué sur la règle, tandis que le temps employé à le parcourir est indiqué par le pendule. Avec cette machine on peut vérifier cette loi de l'accélération de la chute des corps, que les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps. (1)

385. Cette loi, trouvée par Gallilée, prouvé, ainsi qu'il l'avoit annoncé, et ainsi qu'on le démontre dans l'expérience du tube vide d'air, que la pesanteur paroît agir de la même manière sur tous les corps dans l'état de repos et dans celui de mouvement. Au premier instant un corps abandonné à son action acquiert un degré de vitesse infiniment petit, un nouveau degré de vitesse s'ajoute au premier dans le second instant, et ainsi de suite, en sorte que la vitesse augmente en raison des temps.

386. On démontre également par l'analyse, cette loi de la chute des graves que les *forces accélératrices* font parcourir des espaces qui sont comme les carrés des temps. (2)

---

(1) On peut, pour avoir la théorie complète de la machine d'Atwood, consulter les §. 266 à 270 du plan raisonné de la partie de l'enseignement de l'école polytechnique qui a pour objet l'équilibre et le mouvement des corps.

(2) Si l'on imagine un triangle  $ABC$ , fig. 148, dont un des

387. L'espace  $Aab = E$  est celui qu'un corps parcourt dans un temps donné  $TV$ ; mais, en vertu de la vitesse  $ab$ , acquise à la fin

côtés  $AB$  représente le temps  $T$ , et croisse avec lui, et l'autre côté  $BC$  la vitesse  $V$ , l'élément  $Aab$  de la surface de ce triangle étant égal au produit de l'élément du temps  $t$ , représenté par  $Aa$ , et de l'élément de la vitesse  $v$ , représenté par  $cd$ , il représentera l'élément de l'espace  $e$  parcouru dans un premier instant; car, lorsque le corps commence à tomber de  $A$ , il n'a aucune vitesse; mais, lorsqu'il est arrivé en  $a$ , il a la vitesse  $ab$ : ainsi la moyenne vitesse, pendant le temps  $Aa$  de sa chute, est  $cd$  moitié de  $ab$ , et  $cd \times Aa =$  la surface  $Aab$ . Pendant le second instant de sa chute  $aa'$ , il parcourt, en vertu de la vitesse acquise  $ab$ , l'espace  $aa'gb$  produit de  $aa'$  par  $ab$ , et double de  $Aab$ ; et, de plus, en vertu de sa pesanteur, le triangle  $lgb'$  égale  $Aab$ : donc l'espace parcouru dans le second instant  $= aa'gb + lgb' = 3 Aab$ . On prouvera de même que, dans l'instant suivant  $a'a''$ , le corps parcourra l'espace  $a'a''b''b' = 5 Aab$ ; dans l'instant suivant  $a''B$  l'espace  $a''Bcb'' = 7 Aab$ ... etc.: donc les espaces parcourus pour chaque temps égal et successif croîtront comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, etc., et, pendant le temps entier  $AB$ , le triangle  $ABC$  représentera l'espace  $E$  que la pesanteur fait décrire, de manière que  $E = Tv$ ; mais, dans ce triangle, les vitesses  $ab, a'b', a''b'', BC$ , augmentent comme les temps  $Aa, Aa', Aa'', AB$ , etc.; ainsi l'on a  $v : v' :: T : t'$ . Les hauteurs  $H$ , dont les corps tombent, sont représentées par les surfaces des triangles  $Aab, Aa'b'$ , etc.; les surfaces sont entre elles comme les carrés des côtés homologues  $Aa^2, Aa'^2, Aa''^2$  etc.; ou  $ab^2, a'b'^2, a''b''^2$  etc.; et, comme ces côtés représentent les uns  $Aa$  les temps, les autres  $ab$  les vitesses, il s'ensuit que les hauteurs  $H : h :: T^2 : t^2 :: V^2 : v^2$ .

de cet instant, l'espace  $aa'gb$ , qu'il parcourroit pendant un temps égal, étant doublé du premier, on a  $2E = TV$ .

388. Le rapport de la vitesse au temps est constant pour une même force accélératrice  $F$ ; il augmente ou diminue suivant qu'elle est plus ou moins grande; il peut donc servir à l'exprimer. (1)

389. Sur un plan incliné  $AB$ , fig. 140, l'action de la pesanteur qui fait descendre le corps selon la verticale  $AE$  se décompose en deux; l'une selon  $BE$ , qui est perpendiculaire au plan, et qui est détruite par la résistance; l'autre sur le plan  $AB$ . La longueur  $AE$  sur la verticale, déterminée par l'intersection des deux forces  $AB$  et  $BE$ , est leur

(1) Ainsi on a  $F = \frac{V}{T}$ ,  $2E = TV$ ; donc  $V = \frac{2E}{T}$ ,  
 $\frac{V}{T} = \frac{2E}{T^2}$ ; d'où  $F = \frac{V}{T} = \frac{2E}{T^2}$ ; de même  $F = \frac{V}{T}$   
 donne  $T = \frac{2E}{V}$  et  $F = \frac{V^2}{2E}$ : ainsi les forces accélératrices

peuvent être exprimées de trois manières,  $F = \frac{V}{T}$ ,  $= \frac{2E}{T^2} =$   
 $\frac{V^2}{2E}$ : ces trois manières d'exprimer sont utiles dans diverses

circonstances; elles ne donnent pas les valeurs absolues de ces forces, mais seulement leurs rapports, soit entre elles, soit avec l'une d'elles prise pour unité, et dans l'examen du système du monde on n'a besoin que de ces rapports.

résultante; et l'on a, à cause des triangles semblables  $ABE$ ,  $ADB$ ,  $AB$ , longueur du plan parcouru par le corps, est à  $AE$ , résultante des forces, comme  $AD$ , hauteur perpendiculaire du plan, est à  $AB$ , longueur du plan : or, comme le rapport est le même entre toutes les parties du plan  $AB$  et celles qui y correspondent dans la verticale  $AE$ , il suit que le mouvement sur le plan incliné est aussi accéléré que s'il se faisoit dans la verticale, et que les espaces parcourus sur  $AB$  sont aux espaces parcourus sur  $AE$  dans le rapport de la hauteur du plan  $AD$  à sa longueur  $AB$ ; et, à cause de l'angle droit formé par la force  $BE$ , perpendiculaire à  $AB$ , il suit que, si  $AE$  est considéré comme le diamètre d'un cercle, tous les plans inclinés  $AM$ ,  $AN$ ,  $AO$ ,  $AB$ , étant parcourus dans le temps  $AE$ , les vitesses et sur les plans inclinés sont entre elles comme les diamètres des cercles : donc toutes les cordes d'un cercle qui aboutissent à l'une des extrémités de son diamètre vertical sont parcourues, par suite de la pesanteur, dans le même temps que le diamètre.

390. Un projectile lancé suivant une droite quelconque  $AB$ , fig. 150, s'en écarte sans cesse, en décrivant dans l'espace une courbe  $AfhKmC$  concave, vers l'horizon, et dont cette droite est la première tangente. Son mouvement, rapporté à cette droite par des lignes verticales  $fe$ ,  $hg$ ,  $ki$ ,  $ml$ ,  $CB$ , est uniforme; mais il s'accélère suivant ces verticales, conformément aux lois qui viennent d'être exposées (383 et suiv.) En élevant de chaque point

de la courbe les verticales  $fe$ ,  $hg$ ,  $ki$ ,  $ml$ ,  $CB$ , sur la première tangente  $AB$ , elles seront proportionnelles aux carrés des parties correspondantes de cette tangente, et par conséquent proportionnelles aux carrés des quantités  $A\phi$ ,  $A\eta$ ,  $A\alpha$ ,  $A\mu$ , et en général  $AP$ . Ainsi, en faisant  $AP = x$ ; la tangente trigonométrique de l'angle  $BAP = b$ , et  $CP = \gamma$ ; on aura  $BC = ax^2$ ,  $BP = bx$ , et  $CP = y = bx - ax^2$ , qui est l'équation d'une parabole. Si la force de projection est dirigée suivant la verticale  $AF$ , la parabole se confond alors avec elle : ainsi les formules du mouvement parabolique donnent les mouvemens accélérés ou retardés dans la verticale.

391. Telles sont les lois de la chute des graves découvertes par Gallilée : il nous semble aujourd'hui qu'il étoit facile de parvenir à cette découverte ; mais puisque, malgré les phénomènes qui les reproduisoient sans cesse, elle avoit échappé aux recherches des philosophes, il falloit un rare génie pour les démêler dans ces phénomènes.

392. L'espace parcouru dans le vide par des corps de volumes et de poids différens étant égal pour des temps égaux, et la vitesse s'accélégrant de manière à faire parcourir au corps des espaces qui sont comme les carrés des temps, il devenoit intéressant de déterminer l'espace qu'un corps devoit parcourir dans un pre-

mier instant de sa chute : on s'est assuré par l'expérience, en faisant tomber différens corps dans le vide, que la hauteur parcourue dans la première seconde de leur chute est égale à 3, <sup>met.</sup>66107.

393. On démontre par l'analyse (1), que la longueur du pendule simple qui bat les se-

(1) On peut consulter le paragraphe 10, pag. 31 de la mécanique céleste de Laplace ; le parag. 126, pag. 86, de la mécanique analytique de Prony ; le parag. 201, pag. 286, de la mécanique de Franœeur.

Faisant le temps de l'oscillation =  $T$ , la gravité =  $g$ , la longueur du pendule =  $r$ , le rapport de la circonférence au diamètre =  $\Pi$ , Laplace arrive à cette équation  $T = \Pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ ,

$$\text{donc } g = \frac{\Pi^2}{T^2} r.$$

Faisant la longueur du pendule =  $a$ , et tout le reste comme Laplace, Prony et Franœeur arrivent à cette équation  $g =$

$$\frac{\Pi^2}{t^2} a,$$

Puisque  $r = a = l$ , longueur du pendule, l'équation devient  $g = \frac{\Pi^2}{t^2} l$ ; mais la gravité ou la force accélératrice =

$$\frac{2e}{t^2}, \text{ d'où l'on tire } 2e = \Pi^2 l, e \text{ est la hauteur } h \text{ de laquelle}$$

un corps tombe pendant le temps  $t$  et  $\Pi$  le rapport de la circonférence au diamètre =  $\frac{C}{D}$ . Faisant ces substitutions, on a

$$2h = \frac{C^2}{D^2} l, \text{ ou } \frac{2h}{C} = \frac{C^2}{D^2}; \text{ d'où l'on conclut } C^2 : D^2 ::$$

$$2h : l.$$

condes est au double de la hauteur d'où la pesanteur fait tomber les corps dans la première seconde de leur chute, comme le carré du diamètre est au carré de la circonférence : :  $(113)$  :  $(355)$  : : 12769 : 126025; la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris étant de  $0^{\text{m}}.741887$ , il en résulte que la pesanteur y fait tomber les corps de  $3^{\text{m}}.66107$  dans la première seconde; ce qui est conforme à l'expérience et aux autres observations.

Ce passage du mouvement d'oscillation au mouvement rectiligne des graves, dont on peut observer la durée avec une grande précision, est une remarque ingénieuse dont on est redevable à Huighens.

394. Les durées des oscillation fort petites des pendules de longueurs différentes, et animées par les mêmes pesanteurs, sont comme les racines carrées de ces longueurs; car, des arcs très-petits pouvant être considérés comme les cordes qui les soutiennent, et le temps que le corps met à parcourir ces cordes étant le même que celui qu'il emploie à tomber d'une hauteur égale au diamètre (389), lorsque deux corps sont animés par une même pesanteur, les hauteurs qu'ils parcourent (386) sont comme

les carrés des temps; mais les temps dans lesquels des hauteurs différentes sont parcourues doivent être comme les racines carrées des hauteurs : donc les durées des oscillations, pour de petits arcs, sont comme les racines carrées des longueurs des pendules, qui sont proportionnelles aux diamètres des cercles des arcs parcourus par ces pendules; mais si les pendules sont de même longueur, et animées par des pesanteurs différentes, les durées des oscillations sont réciproques aux racines carrées des pesanteurs. (1)

Ainsi la durée des oscillations du pendule peut servir à déterminer l'action de la pesanteur.

### Résumé.

395. Il suit de ce que nous venons d'exposer que, dans le vide, les corps tombent tous avec des vitesses semblables, et que la différence aperçue dans la vitesse des corps tombans dans l'air est due à la résistance de ce milieu; que la vitesse des corps qui tombent s'accélère, et que la loi de

---

(1) Car il suit du n<sup>o</sup> (388) que  $F : f :: \frac{2E}{T^2} : \frac{2e}{t^2}$ ; si

$$2E = 2e, \text{ on a } F : f :: \frac{1}{T^2} : \frac{1}{t^2}; \text{ donc } T : t :: 1 \sqrt{F} :$$

$$1 \sqrt{f} :$$

cette accélération est telle, que les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps; que sur les plans inclinés, que l'on peut considérer comme des cordes d'un cercle qui aboutissent à l'extrémité de son diamètre vertical, les cordes sont parcourues en vertu de la pesanteur dans le même temps que ces diamètres, d'où l'on voit que la pesanteur suit la même loi sur le plan incliné que sur la verticale; qu'un projectile lancé, obéissant à la force de projection et à celle de la pesanteur, décrit une parabole dans l'espace; que la hauteur parcourue dans le vide, par tous les corps, dans la première seconde de leur chute, est à Paris de 3.<sup>m</sup><sup>e</sup>.66107; enfin que la durée des oscillations de deux pendules d'égale longueur, placés sur divers points de la terre, peut servir à déterminer l'action de la pesanteur.

#### §. XLV.

##### *De la Pesanteur relative.*

396. C'est l'excès du poids d'un corps sur un autre auquel on le compare.

La pesanteur relative, est celle que nous considérons habituellement, et dont nous faisons usage dans les divers besoins de la vie : c'est proprement dit la masse des corps que nous comparons par le moyen des leviers et d'un étalon.

397. *L'étalon* dont on fait usage diffère dans chaque pays : en France, c'est le poids d'un

*centimètre* cube d'eau distillée prise à la température où sa densité est la plus grande ; il équivaut à 18, <sup>grains</sup> 827.

398. On appelle *balance* l'instrument avec lequel on prend la pesanteur des corps comparés à l'étalon pris pour unité. Les balances sont de deux sortes : balances ordinaires et balances appelées romaines.

399. Les balances ordinaires sont formées d'un levier  $AB$ , fig. 151, aux extrémités duquel des plateaux sont suspendus. Le point d'appui du levier le divisant en deux parties égales, il faut, pour établir l'équilibre, que le poids dans un des plateaux soit égal à celui que l'on met dans l'autre (1).

Le point d'appui des balances peut être en  $c$  dans la droite  $AB$ , menée par les points de suspension des plateaux ; en-dessus en  $D$ , ou au-dessous en  $E$ .

Les balances dont le point d'appui  $c$  est dans la première position, c'est-à-dire qui passe par le centre de gravité, ont le défaut de conserver leur équilibre, quelque situation que prenne le *fléau*.

(1) Appelant  $p$  le poids étalon,  $m$  le nombre de poids, et  $n$  celui du corps, on a  $mp = n$ .

Les balances dont le point d'appui est au-dessus du centre de pesanteur du fléau en D ne sont en équilibre que lorsqu'elles sont horizontales ; mais il faut, pour les déranger de cette position, des poids plus ou moins considérables, ce qui fait que ces balances ne sont pas aussi exactes que les premières ; cependant on les préfère malgré cette imperfection, à cause de la facilité avec laquelle on peut juger l'équilibre.

Les balances dont le point d'appui est au-dessous du centre de pesanteur en E sont appelées folles, parce qu'elles ne peuvent rester dans aucune position lorsque les poids sont égaux.

400. Les balances romaines, fig. 152, sont formées d'un levier AB, à l'une des extrémités B, duquel, est suspendu le plateau C destiné à placer le corps à peser : le point d'appui D est très-près du point de suspension du plateau ; un poids constant P glisse le long de l'autre extrémité DA, du levier, et indique, par sa position, le poids du corps (1).

---

(1) Appelant  $a$  la distance DB de la suspension du plateau au point d'appui, et  $n$  celle DQ du poids mobile au même point d'appui, ou  $a \pi = n P$ . On gradue le grand levier de manière à lui faire indiquer, par la position du poids, les pesanteurs correspondantes.

On peut, par le moyen de plusieurs poids  $P$ ,  $P'$   $P''$ , lorsque la balance romaine est bien faite, peser de grandes masses, en déterminant les plus petites différences dans les poids (1).

401. On se sert aussi du peson à ressort, fig. 153 et 154, que l'on gradue par le tâtonnement; mais on conçoit qu'à la longue le ressort se fatiguant, cet instrument devient inégal.

### §. XLVI.

#### *De la Pesanteur spécifique.*

402. On appelle pesanteur spécifique le rapport des poids absolus des corps sous des volumes égaux.

403. On nomme *densité* le rapport des masses sous des volumes égaux. La masse des corps étant proportionnelle aux poids absolus, il s'ensuit que les densités peuvent être exprimées par les pesanteurs spécifiques, et réciproquement (2).

404. Dans la comparaison des pesanteurs

(1) Si l'on veut avoir de plus grands détails sur la théorie de ces instrumens, on les trouvera dans le 26<sup>e</sup>. volume des Annales de Chimie, pag. 151 et suiv.

(2) Si l'on appelle  $P$  le poids absolu ou la masse d'un corps,  $D$  la densité,  $V$  le volume, on aura  $P = DV$ ,  $D = \frac{P}{V}$ ,  $V = \frac{P}{D}$ .

spécifiques il étoit nécessaire de prendre la masse d'un corps pour unité; on a choisi l'eau distillée, comme étant la substance la plus identique et la plus facile à obtenir dans tous les lieux: mais, l'eau changeant de densité avec sa température, on est convenu de prendre pour comparaison la pesanteur de l'eau à 15. <sup>des</sup> centigrades (1).

405. Les corps dont on prend la pesanteur spécifique peuvent être solides, liquides ou gazeux.

Si l'on pouvoit connoître le volume exact de tous les solides en les pesant, on auroit leur poids comparé à leur volume, conséquemment leur densité; mais la difficulté de mesurer la plupart des corps dans cet état est trop grande, pour espérer d'obtenir ainsi leur volume exact.

(1) Soit  $\pi$  la pesanteur absolue du volume  $\gamma$  d'eau, et  $\delta$  sa densité, on aura  $\pi = \gamma \delta$ , donc  $P : \pi :: D V : \gamma \delta$ ; et, si  $V = \gamma$ , on aura  $P : \pi :: D : \delta$ ; donc, sous des volumes égaux, la densité d'un corps, comparé à celle de l'eau, donne

$D = \frac{P \delta}{\pi}$ ; et dans le cas où l'on prendroit la densité de l'eau

pour l'unité, on auroit  $\delta = 1$ , et  $D = \frac{P}{\pi}$ ; ainsi tout se ré-

duit, pour avoir la densité ou la pesanteur spécifique d'un corps, à connoître le poids d'un volume égal d'eau distillée et du corps, et à diviser le poids du corps par celui de l'eau.

406. Archimède remarqua qu'un corps plongé dans l'eau perdoit une portion de son poids égale à celle de l'eau qu'il déplaçoit, que le volume de l'eau déplacée étoit égal à celui du corps lorsqu'il est submergé ; ce moyen parut propre à donner la densité des corps, et en conséquence, on fit usage des deux méthodes suivantes.

407. Par la première méthode on pèse un vase vide, dont nous ferons le poids  $= \pi$  ; on le pèse de nouveau plein d'eau, nous supposons son poids dans cet état  $= P'$ , et l'on obtient ainsi le poids de l'eau contenue dans le vase  $p = P' - \pi$ . On pèse dans l'air le corps dont on veut avoir la densité, et dont le poids  $= P$ , on le met dans le vase, que l'on remplit ensuite d'eau ; on pèse le tout, le poids total  $= P''$  : ainsi le poids  $p'$  de l'eau contenue dans le vase est  $p' = P'' - p + \pi$ , et le poids  $w$  de l'eau déplacée par le corps est  $p - p'$ . Connoissant par cette expérience  $P$

$$\text{et } \pi, \text{ on a } D = \frac{P}{w} = \frac{P}{P' - P''} = \frac{P}{P' - \pi - P'' + p - \pi} \\ = \frac{P}{P' - 2\pi - P'' + P' - \pi} = \frac{P}{2P' - 3\pi - P''}.$$

408. Dans la seconde méthode, qui est celle dont on se sert le plus, on pèse le corps dans l'air, et l'on connoit ainsi son poids  $= P$  ; on le pèse également dans l'eau, et l'on a son

poids =  $P'$  ; comme le poids qu'il a perdu en le pesant dans l'eau est justement celui d'un égal volume d'eau déplacée, on a  $P - P' = \omega$ , d'où

$$\text{l'on déduit } D = \frac{P}{P - P'}$$

409. Pour tous les solides insolubles dans l'eau, on peut faire usage des deux méthodes indiquées n<sup>os</sup> 407 et 408 ; mais si les solides sont solubles dans l'eau, il faut les plonger dans un liquide qui n'ait point d'action sur eux, et dont on connoisse la densité comparée à celle de l'eau. Soit  $d'$  cette densité, et  $\Pi'$  le poids comparé à celui de l'eau, il faut que l'on ait  $d' = \frac{\Pi'}{\omega}$ . (1)

410. Lorsque l'on veut avoir des densités

(1) On peut, en suivant le moyen indiqué page 2 du 28<sup>e</sup>. volume des Annales de Chimie, se servir d'un flacon plein de mercure, et faire usage de la méthode indiquée plus haut (408). En faisant  $d'$  la densité du mercure,  $\Pi'$  son poids,  $P$  celui du corps, on aura  $D = \frac{P d'}{\Pi'}$  ; mais comme  $d'$  est connu, puisque l'on a  $d' = \frac{\Pi'}{\omega}$ , en substituant sa valeur dans l'é-

quation, elle se trouvera transformée en  $D = \frac{P \Pi'}{\Pi' \omega} = \frac{P}{\omega}$ .

On peut encore se servir, soit d'huile de thérbentine, soit d'un liquide plus léger, ainsi qu'il a fait Mussenbroech ; peser le corps dans l'air, puis dans ce liquide ; et, par la méthode n<sup>o</sup>. 408, on a de même  $D = \frac{P d'}{\Pi'} = \frac{P}{\omega}$ .

exactes, il faut peser, autant qu'il est possible, des corps dont les volumes diffèrent peu; car on obtient des densités très-différentes lorsque la substance soumise à l'expérience est sous un volume considérable, ou divisée en de très-petites parties. On peut consulter, à ce sujet, les mémoires sur l'aréométrie, contenus dans le 26<sup>e</sup> volume des Annales de Chimie.

411. On prend la densité des liquides de deux manières, 1<sup>o</sup> par le poids du liquide qu'un vase donné peut contenir, 2<sup>o</sup> par celui que déplace un *aréomètre* que l'on plonge dans un liquide. La première méthode a été employée par Homberg, et la seconde par un grand nombre de physiciens (1).

412. Les aréomètres sont construits de manière que les uns mesurent la densité des liquides par des poids, les autres par le degré d'enfoncement d'un tube dans le liquide; le premier est attribué à Farenheit; les seconds ont été employés par plusieurs physiciens.

413. Les aréomètres, pour lesquels on fait usage

---

(1) Si, dans la première méthode, on fait  $\Pi$  le poids du vase vide,  $P'$  le poids de ce vase plein d'eau,  $P''$  le poids du même vase rempli de liquide, on aura  $\sigma = P' - \Pi$ , et  $PP' = P'' - \Pi$ ; donc la formule générale  $D = \frac{P}{\sigma}$  deviendra  $D = \frac{P'' - \Pi}{P' - \Pi}$ .

depoids, sont formés d'un tube ACDE, fig. 155, surmonté d'une tige très-fine AK, sur le sommet de laquelle est un petit plateau LM, et à l'extrémité inférieure un espace FGH rempli de mercure ou d'une autre substance pesante, afin que, le centre de gravité de tout l'ensemble étant beaucoup au-dessous du centre de figure, l'instrument puisse prendre une situation verticale dans le liquide où l'on veut le plonger. Sur un point I de la tige on trace une marque ineffaçable, afin de faire plonger constamment l'instrument jusqu'à cette marque.

Cet aréomètre doit avoir une pesanteur moindre qu'un égal volume du liquide le plus léger dans lequel on a l'intention de le plonger (1).

414. Nicholson a rendu l'aréomètre de Fahrenheit propre à prendre la densité des solides, en séparant le poids inférieur de l'instrument, et en formant avec ce poids un plateau inférieur suspendu en A, fig. 156 (2).

---

(1) Connoissant le poids de l'aréomètre =  $\Pi$ , celui qu'il faut y ajouter lorsqu'on l'enfonce dans l'eau distillée jusqu'à la marque I =  $P'$ , on a le poids de l'eau déplacé  $\pi = P' + \Pi$ . Connoissant de même le poids qu'il faut y ajouter pour le plonger dans un liquide jusqu'à la marque I, =  $P''$ , on a le poids du liquide déplacé  $P = P'' + \Pi$ ; ainsi l'équation  $D = \frac{P}{\pi}$  devient =  $\frac{P'' + \Pi}{P' + \Pi}$ .

(2) Connoissant le poids  $P'$  qu'il faut ajouter à l'instrument

415. Ramsden a proposé d'appliquer le trébuchet aux aréomètres, pour suppléer aux poids, et rendre leur usage plus commode. J'ai indiqué, page 151 et suivantes du 26<sup>e</sup> volume des Annales de Chimie, un perfectionnement à cette méthode, qui consiste à réunir plusieurs poids au trébuchet, afin d'obtenir de plus petites différences.

416. Les aréomètres à tige graduée, fig. 157, diffèrent principalement de celui de Fahrenheit, en ce qu'ils sont surmontés d'une tige qui peut indiquer la densité par le degré d'enfoncement.

Le Ratz, Baumé, Casbois, etc., ont proposé de tracer sur les tubes des divisions en parties égales, qui n'ont aucun rapport avec les densités indiquées, ni même avec les proportions de substances dissoutes.

pour le plonger dans l'eau distillée, on peut déterminer le poids d'un corps moindre que celui  $P'$ . En plaçant le corps sur le bassin  $K$ , et y ajoutant un poids  $P'''$ , pour l'enfoncer jusqu'à la marque  $I$ , le poids du corps  $P = P'' - P'''$ ; plaçant ensuite le corps sur le plateau inférieur  $A$ , et ajoutant sur le plateau supérieur un poids  $P''$ , on a le poids du corps dans l'eau  $p = P' - P''$ , et le poids de l'eau déplacée

$\omega = P - p$  : ainsi l'équation  $D = \frac{P}{\omega}$  devient  $= \frac{P - P'''}{P' - P''}$  =

$$\frac{P - P'''}{P' - P'' + P''}$$

Brisson a proposé une méthode pour graduer l'instrument de manière à lui faire indiquer les densités.

On trouve dans les volumes 26, 27 et 28 des Annales de Chimie, plusieurs mémoires dans lesquels j'indique la manière de graduer la tige de ces sortes d'aréomètres de manière à leur faire indiquer ou des densités, ou des rapports de combinaisons : je crois inutile d'entrer ici dans des détails qu'on peut lire dans cet ouvrage; j'observerai seulement que, dans la graduation, les hauteurs doivent être en raison composée de la directe des masses et de l'inverse des densités (1).

417. La difficulté de diviser les tubes réciproquement aux densités pouvant être un long obstacle à l'usage des aréomètres destinés à indiquer les densités par cette graduation, il seroit possible de substituer à ces sortes d'instrumens

(1) Car on a  $V : v :: \frac{P}{D} : \frac{p}{d}$ . Appelant B les bases, et H les hauteurs, on a  $V : v :: HB : hb$ . Les bases étant les mêmes dans un même tube, on a  $V : v :: H : h$ ; donc  $H : h :: \frac{P}{D} : \frac{p}{d}$ ; et, comme le poids de l'instrument est constant, on a  $H : h :: d : D$ , d'où  $H = \frac{h d}{D}$ .

un aréomètre indiquant les différens volumes des corps sous un même poids ; car, puisque l'on a  $V : \nu :: H : h$ , on voit que tout se réduiroit à diviser les tiges en parties égales, à partir de deux points dont on connoitroit l'indication de volume, et de les diviser de manière que l'échelle présentât des rapports de volume : cet instrument, dont la construction pourroit être exécutée par les ouvriers les moins intelligens, offriroit dans tous les temps, et avec une extrême facilité, les moyens de déduire les densités par les observations faites sur les volumes (1).

418. Pour prendre la densité des gaz, on fait le vide dans un ballon, et on le pèse ; on l'emplit d'eau et on le pèse de nouveau. On a par ce moyen le poids de l'eau qu'il contient, on l'emplit

(1) Car dans la proportion  $P : \pi :: V D : \gamma \delta$ , substituant  $H$  et  $h$  pour  $V$  et  $\gamma$ , on a  $P : \pi :: H D : h \delta$  ; donc  $\frac{P}{D} : \frac{\pi}{\delta} :: H : h$  ; mais comme le poids de l'instrument est constant, on a  $P = \pi$  ; d'où  $H : h :: \frac{1}{D} : \frac{1}{\delta}$  ; ainsi  $D = \frac{h \delta}{H}$ , et la densité de l'eau  $\delta$  étant supposée l'unité, on aura la densité du corps  $D = \frac{h}{H}$  ; transformation extrêmement simple, puisqu'elle se réduit à diviser la hauteur de la tige plongée dans l'eau par celle de la tige plongée dans le liquide dont on cherche la densité.

d'un gaz quelconque à une pression et à une température connue et on le pèse, on a par ce moyen le poids du gaz à cette température et à cette pression; mais rarement ce poids a une température. Mais comme il est nécessaire, pour comparer les densités des gaz, de connoître les poids des volumes égaux sous une même pression et à une même température, et qu'il est rare que les pesanteurs soient prises à cette pression et à cette température, il faut ramener la pesanteur obtenue à celle que l'on devoit avoir (1).

(1) Soit  $\Pi$  le poids du ballon vide,  $P'$  celui du ballon plein d'eau, on a  $P' - \Pi = b$  poids de l'eau;

Soit  $P''$  le poids du ballon plein du gaz à une pression  $h$  et une température  $t$ , on a  $P'' - \Pi = \omega$  le poids du gaz;

Soit  $H$  la pression à laquelle on veut rapporter le gaz, et  $T$  la température;

Puisque la masse des gaz, pour des volumes égaux, est proportionnelle à leur pression, on a  $h : H :: \omega : \omega' = \omega \frac{H}{h}$ .

D'après les expériences de Gay-Lussac, le volume du gaz augmente de  $\frac{1}{213}$  par degré du thermomètre de Réaumur, à partir de la température de la glace; et comme le poids pour des volumes égaux est en raison inverse de l'augmentation du volume, on a

$$1 + \frac{T}{213} : 1 + \frac{t}{213} :: \omega' : \omega'' \text{ ou } 213 + T : 213 + t ::$$

$$\omega' : \omega''; \text{ donc } \omega'' = \omega' \frac{213 + t}{213 + T} = \omega \left( \frac{H}{h} \right) \cdot \left( \frac{213 + t}{213 + T} \right).$$

$$\text{Puisque l'on a } P : \omega'' :: \rho : \delta = \frac{\omega'}{P}, \text{ on a } \delta = \frac{\omega}{P} \left( \frac{H}{h} \right) \cdot \left( \frac{213 + t}{213 + T} \right).$$

*Résumé.*

419. Il résulte de ce que nous venons d'exposer dans les deux paragraphes précédens sur la *pesanteur relative* et la *pesanteur spécifique*, que la première s'obtient par le moyen de balauces et d'un étalon, qui, en France, est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée prise à la température de 4°,5 du thermomètre décimal; que les balances ordinaires s'équilibrent avec des poids égaux, et les balances romaines avec des poids inégaux; que la pesanteur spécifique est le rapport du poids des corps sous des volumes égaux, et que l'eau distillée à 15.°<sup>Re</sup> a été prise pour unité de densité à laquelle tous les autres corps sont comparés; qu'ainsi la densité d'un corps est égale au poids de ce corps divisé par celui d'un même volume d'eau; que toutes les opérations faites pour obtenir les pesanteurs spécifiques ont pour objet de comparer des poids de volumes égaux, des corps et de l'eau; que, dans cette comparaison, la différence dans le volume du corps peut donner des densités inégales de la même substance; qu'enfin on peut, aux aréomètres qui mesurent directement la densité, substituer des instrumens propres à mesurer le volume sous un même poids, et qu'en divisant le volume du corps par celui de l'eau sous un même poids, ou, ce qui revient au même, la hauteur du tube plongé dans les deux liquides, l'on peut transformer les rapports des volumes sous des poids égaux en ceux des densités.

---

---

DE LA GRAVITÉ.  
DES MASSES DES PLANÈTES , ET DE  
LA PESANTEUR A LEURS SURFACES.

## §. XLVII.

*De la Gravité.*

420. On appelle gravitation ou pesanteur universelle la tendance qu'ont tous les corps à se porter les uns vers les autres : cette propriété générale est démontrée par le mouvement des planètes autour du soleil, et celui des satellites autour de leurs planètes; par la cohésion des molécules qui composent les planètes et les satellites, lesquelles, en vertu du mouvement de rotation qu'ont les corps, devroient se disperser dans l'espace; par la forme sphérique que prennent les gouttes de liquide sur la surface de la terre; par la cohésion des molécules dans les solides, et enfin par l'affinité que toutes les molécules ont les unes pour les autres, affinité employée par les chimistes, soit pour décomposer un grand nombre de substances, soit pour former des composés nouveaux.

La gravitation paroît suivre une loi constante; partout où il a été possible de déterminer la marche de cette loi, on a trouvé que cette force agit en raison directe des masses, et inverse des carrés des distances. On peut prouver cette loi par le mouve-

ment des corps de deux manières, 1<sup>o</sup> en comparant la vitesse de la chute des corps sur la surface de la terre, 2<sup>o</sup> en comparant la vitesse des planètes et des satellites autour de leur centre de mouvement.

### §. XLVIII.

*De la détermination de la loi de la gravitation par la comparaison de la chute des corps sur la surface de la terre.*

241. On peut trouver cette loi, soit par la comparaison de la pesanteur des corps placés à diverses hauteurs, soit par la comparaison de la pesanteur de la lune sur la terre à celle d'un corps placé sur la surface de cette dernière.

422. On a vu (331 et suiv.) que la pesanteur sur la surface de la terre peut être déterminée par la durée des oscillations d'un pendule. Puisque la durée des oscillations des pendules de même longueur sont réciproques aux racines carrées de la pesanteur qui les anime (394), et que la longueur d'un pendule est au double de la hauteur de laquelle un corps tomberoit pendant la durée de ses oscillations comme le carré du diamètre est à celui de la circonférence (393), il s'ensuit que, d'après la détermination de la longueur du pendule qui bat les secondes sur différens points de la terre, on peut comparer l'action de la pesanteur sur ces points; mais sur chaque point de la surface de la terre la pesanteur étant diminuée par la vitesse de sa rotation (370), il s'ensuit que si, à la pesanteur observée,

on ajoute la diminution occasionnée parla rotation, laquelle, à l'équateur, est de  $\frac{1}{288}$  environ de la pesanteur aux pôles et qui, sur les autres points, est égale au produit de  $\frac{1}{288}$  multiplié par le carré du co-sinus de latitude, on aura la gravité. Et si l'on comparoit alors la gravitation à diverses hauteurs sur la surface de la terre, on trouveroit qu'elle seroit réciproque au carré de sa distance au centre de la terre si l'attraction étoit dirigée vers un seul point ; mais, comme elle doit être composée de celle de toutes les molécules de la terre, ainsi que Laplace l'a démontré, et que les hauteurs dont on peut faire usage sont trop petites pour mesurer celle-ci, il s'ensuit que cette loi doit, sur la surface de la terre, être déterminée d'une autre manière.

423. La lune ayant un mouvement périodique autour de la terre (199), et la durée de son mouvement sidéral étant de 27. <sup>jours</sup> 52166'' (201), si elle n'étoit pas retenue vers la terre par l'action de sa pesanteur, elle devoit s'écarter sans cesse du centre de cette planète : comme dans toute sa révolution elle parcourt sensiblement le même orbe, il s'ensuit que sa force centripète ou sa pesanteur fait équilibre à sa force centrifuge ; on peut donc, par la vitesse du mouvement de la lune, connoître sa gravitation vers la terre, la comparer à celle des corps sur la surface de notre globe, et en déduire la loi de la gravitation des corps à la surface de cette dernière.

424. La force qui écarte, à chaque instant, la

lune L, fig. 158, de la tangente LB de son orbite, lui fait parcourir en une seconde le sinus verse LD de l'arc Ld. Cet arc est d'environ 1,4641. La distance de la lune est d'environ 60 diamètres de la terre (204), et sa parallaxe de 1066". Comme le mouvement de la lune présente de grandes inégalités, il faut, pour avoir un résultat qui soit indépendant de ces inégalités, prendre, pour sa parallaxe moyenne, la partie de cette parallaxe qui n'en est point affectée : cette partie est celle où le carré du sinus de latitude =  $\frac{1}{3}$ ; la parallaxe est là de 10541"; le rayon mené d'un point de ce parallèle au centre de gravité de la terre seroit de 6369374 mètr., et la distance de la lune =  $\frac{6369374 \text{ mètr.}}{\sin. 10541''}$ . D'après ces données, on trouve que la force qui sollicite la lune à tomber de L en D ou de l en d, pendant une seconde, = 0 mètr. 00101727; mais l'action du soleil diminuant la pesanteur lunaire d'environ  $\frac{1}{318}$ , on a, pour l'expression de la hauteur que la lune parcourt dans une seconde en vertu de sa pesanteur sur la surface de la terre, 0 mètr. 00101727  $\frac{0,00101727}{358} =$  0 mètr. 00102005.

Dans son mouvement relatif autour de la terre, la lune est sollicitée par une force égale à la somme des masses de la terre et de la lune divisée par le carré de leurs distances mutuelles. Laplace a trouvé, par les phénomènes du flux et du reflux, que la masse de la lune est  $\frac{1}{68,5}$  de la masse de la terre;

la somme des deux masses est donc de 69,5 de celle de la lune. Pour avoir la hauteur dont la lune tomberoit dans une seconde par la seule action de la terre, il faut diminuer l'espace précédent dans le rapport de la masse de la terre = 68,5 à la somme des deux masses = 69,5 ; cet espace ainsi diminué = 0. mèt. 00102005  $\times \frac{68,5}{69,5}$  = 0. mèt. 00100637.

425. On a vu (370) que la pesanteur à l'équateur fait parcourir aux corps, dans la première seconde de leur chute, 3. mèt. 63667. Sous le parallèle dont le carré du sinus de latitude =  $\frac{1}{3}$ , l'espace que les corps parcourent dans le même temps, en raison de la pesanteur, = 3. mèt. 65622. A l'équateur l'attraction de la terre étant moindre que la gravité de  $\frac{1}{288}$  ; sous ce parallèle l'attraction est plus petite que la gravité des  $\frac{2}{3}$  de la force centrifuge due au mouvement de rotation à l'équateur ; il faut donc augmenter l'espace que les corps parcourent, à raison de la pesanteur, de  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{288} = \frac{1}{432}$  ; ce qui donne 3. mèt. 65622 +  $\frac{3. \text{mèt. } 65622}{432} = 3. \text{mèt. } 66469$  pour la gravité. Si la gravitation agit en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, il doit s'ensuivre que la gravitation des corps à la surface de la terre, étant exprimée par 3. mèt. 66469, doit être à celle de la lune  $x$  comme le carré de la distance de la lune à la terre =  $d^2$  est au carré du rayon de la terre =  $r^2$  : donc 3. mèt. 66469 :  $x$  : :  $d^2$  :  $r^2$  ; mais on a vu que  $d = \frac{r^2}{(\sin. 10541'')}$ , d'où l'on a 3. mèt.

$$66469 : x :: \frac{r^2}{(\sin. 10541'')^2} : r^2 :: \frac{1}{(\sin. 10541'')^2} : 1 ;$$

ainsi  $x = 3. \text{m}^{\text{et.}} 66469 \times (\sin. 10541'')$  ; cette hauteur, donné par l'expérience du pendule, diffère peu de celle qui résulte de l'observation directe de la parallaxe; et pour les faire coïncider, c'est-à-dire pour faire  $x = 0. \text{m}^{\text{et.}} 00100471$ , il faudroit diminuer la parallaxe de 2''.

### Résumé.

426. Il suit de ces résultats que, malgré la petite différence des deux parallaxes, on peut conclure que la force principale qui retient la lune dans son orbite est la pesanteur terrestre affoiblie en raison du carré de la distance. Déjà la loi de la pesanteur observée sur les hautes montagnes indiquoit cette différence; mais elle étoit suffisante pour en démontrer la loi, à cause du peu de hauteur des montagnes relativement à la distance qui existe entre ces deux corps célestes.

### §. XLIX.

*De la détermination de la loi de la gravitation par la comparaison de la vitesse des planètes et des satellites autour de leur centre de mouvement.*

427. La loi de la gravitation peut se déterminer par le mouvement des corps célestes de trois manières différentes, 1<sup>o</sup> en comparant les arcs parcourus

rus dans des temps égaux par tous les corps autour de leurs centres de mouvemens, 2<sup>o</sup> par le rapport entre la durée des révolutions et les grands axes des orbes, 3<sup>o</sup> par les rapports entre les aires décrites par les rayons vecteurs des astres et les temps employés à les décrire.

428. Les planètes qui tournent autour du soleil et les satellites qui tournent autour de leurs planètes ont des durées de révolutions d'autant plus grandes, que les unes et les autres sont plus éloignés de leur centre de mouvement : ainsi, en une seconde, l'arc moyen parcouru par

Mercure est de . . .	o." 454704.
Vénus. . . . .	o. 177519.
La terre. . . . .	o. 109488.
Mars. . . . .	o. 051371.
Cérès. . . . .	o. 023756.
Pallas . . . . .	o. 023785.
Junon. . . . .	o. 025780.
Vesta. . . . .	o. 029966.
Jupiter. . . . .	o. 009232.
Saturne. . . . .	o. 003718.
Uranus. . . . .	o. 001303.

Si par les points  $U, S, J, C, M', t, v, m'$ , fig. 159, des arcs parcourus dans une seconde par uranus, saturne, jupiter, cérès, mars; la terre, vénus et mercure, on mène sur les rayons vecteurs de ces planètes les sinus  $Uu', Ss', Jj', Cc', M'm', t\theta, v\gamma', m'm'$ , l'espace parcouru vers le soleil, en vertu de la pesanteur, dans une seconde de temps, est exprimé par les sinus versé  $U'u', Ss', Jj', Cc', M'm'$ ,

$T \theta$ ,  $V \gamma$ ,  $m m$ ; et, si l'on compare entre eux ces sinus verse, on trouve que leurs rapports sont sensiblement réciproques aux carrés des distances  $U' \Sigma$ ,  $s \Sigma$ ,  $j \Sigma$ ,  $c \Sigma$ ,  $M \Sigma$ ,  $T \Sigma$ ,  $V \Sigma$ ,  $m \Sigma$  de ces planètes au centre du soleil  $\Sigma$ ; de manière que, si ces planètes étoient toutes transportées à une même distance du soleil, elles tomberoient toutes vers son centre avec une égale vitesse.

La pesanteur des satellites vers leur centre de mouvement, déduite du rapport de leurs révolutions, prouve également que la loi de cette pesanteur est en raison inverse du carré de leurs distances.

429. Képler, persuadé qu'il devoit exister une loi entre les durées des révolutions et les grands axes des orbes des planètes, chercha ce rapport comme au hasard : il compara, pour cela, les racines et les puissances des nombres qui représentent ces distances et ces durées, et, après plusieurs années de recherches, il compara, en 1618, les carrés des temps des révolutions avec les cubes des grands axes des orbes de chaque planète, et il y trouva un rapport constant, lequel est à peu près pour la terre : 133410 : 1, si l'on suppose la durée de la révolution exprimée par des jours, et le rayon de la terre par l'unité.

430. De ce que les carrés des durées des révolutions sont entre eux comme les cubes des distances moyennes des astres au soleil, il s'ensuit que la pesanteur de chaque corps vers son centre de mouvement est réciproque au carré de sa distance à ce centre (1).

---

(1) Car on a  $t^2$  est comme  $R^3$ ; mais on a  $(388) V = \frac{2c}{t}$

Ainsi, de ce que l'observation établit que les carrés des temps de révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes, il s'ensuit que *la tendance des planètes vers le soleil est réciproque aux carrés des rayons de leurs orbites supposés circulaires*. L'hypothèse des orbites circulaires n'est pas rigoureuse il est vrai ; mais, le rapport constant des carrés des temps des révolutions aux cubes des grands axes des orbites des planètes étant indépendant des excentricités, il est naturel de penser qu'il subsisteroit encore dans le cas, où ces orbites seroient circulaires : ainsi *la loi de la pesanteur vers le soleil, réciproque au carré des distances, est clairement démontrée*.

43r. Indépendamment de la loi du mouvement des planètes énoncée (43o), Képler en a trouvé deux autres, qui ont été rapportées (129, 130, 302, 305) ; la première, que *le mouvement des planètes se fait toujours dans un orbite elliptique* ; la seconde, que *leur vitesse angulaire est réciproque au carré de leurs rayons vecteurs* ; delà, que les secteurs décrits

et dans le mouvement circulaire  $ae$  est comme  $R$  ; donc  $V$  est comme  $\frac{R}{t}$  et  $V^2$  comme  $\frac{R^2}{t^2}$ . En mettant à la place de  $t^2$  sa quantité proportionnelle  $R^3$ , on a  $V^2$  comme  $\frac{1}{R}$ . On sait, d'ailleurs que la force accélératrice ou la pesanteur  $P = \frac{V}{t}$  ; mais  $V$  est comme  $\frac{R}{t}$ , et  $t$  comme  $\frac{R}{V}$  ; donc  $P$  est comme  $\frac{V^2}{R}$  et  $V^2$  comme  $\frac{1}{R}$ , d'où  $P$  est comme  $\frac{1}{R^2}$ .

*par ces rayons sont proportionnels aux temps : c'est de la première loi que l'on a déduit que, dans toutes les parties de l'orbe, la gravitation est en raison inverse du carré des distances (1).*

(1) Ce résultat se démontre facilement pour les deux extrémités du grand axe de l'orbe de la planète ; car , au périhélie P, fig. 160, où la vitesse est la plus grande , et à l'aphélie A, où la vitesse est la plus petite , les arcs de l'ellipse sont semblables , puisqu'ils sont formés par les rayons osculateurs SP, CA, égaux ; ainsi les forces centrifuges qui font équilibre à l'attraction sont comme le carré des vitesses (331), d'où l'on tire F est comme V<sup>2</sup> ; mais , d'après la loi de Képler , les secteurs DSB, FSH, décrits dans le même temps , sont égaux , et les secteurs sont égaux à leurs arcs multipliés par leurs distances au centre de leurs mouvemens. Faisant les deux arcs DB = a FH = A ; les distances SA = d, et SP = D, ou a DSB = ad, et FSH = AD ; et comme , d'après la loi de Képler , ad = AD, il s'ensuit que l'on a A : a ::  $\frac{1}{D} : \frac{1}{d}$  ; donc les arcs sont réciproques aux distances , et A<sup>2</sup> : a<sup>2</sup> ::  $\frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$  ; mais les arcs sont comme les vitesses : ainsi A<sup>2</sup> est comme V<sup>2</sup> ou comme  $\frac{1}{D^2}$  , et les carrés des vitesses , lorsque les rayons sont égaux , sont comme les forces centrifuges , c'est-à-dire , comme la gravitation ou la pesanteur qui lui fait équilibre ; d'où il suit que P est comme  $\frac{1}{D^2}$  .

On voit que ce résultat n'est démontré ici que pour le périhélie et l'aphélie des planètes ; mais Newton , ayant examiné ce problème d'une manière plus générale , a trouvé que , lorsqu'une force dirigée vers le foyer d'une ellipse fait parcourir cette dernière à un projectile , cette force est récipro-

432. On peut s'assurer, par l'analyse, que non-seulement l'ellipse, mais encore toute section conique, peut être décrite par un astre en vertu de la force qui retient les planètes dans leurs orbites : ainsi une comète pourroit se mouvoir dans une hyperbole ; mais elle ne seroit visible qu'une fois, et, après son apparition, elle s'éloigneroit en se portant au-delà du système solaire, et s'approcheroit d'un nouveau soleil pour s'en éloigner encore, et parcourir ainsi les divers systèmes répandus dans l'immensité des cieux. Laplace croit qu'il peut exister des corps semblables, mais que leur apparition doit être fort rare, et que l'on ne doit observer le plus souvent que des comètes, qui, mues dans des orbes rentrants, reviennent à des intervalles plus ou moins longs dans les régions de l'espace voisin du soleil.

433. Les satellites tendent également vers le soleil : si la lune n'étoit pas soumise à son action, elle finiroit par abandonner la terre. Si les satellites de Jupiter n'étoient pas sollicités vers le soleil, ils offrieroient des inégalités que l'observation ne fait pas apercevoir : ainsi tout, dans le système solaire, est soumis à l'action de cet astre ; et, le système entier d'une planète et de ses satellites étant emporté d'un mouvement commun, les satellites se meuvent au-

---

que au carré du rayon vecteur ; d'où il suit que, dans toutes les parties de l'orbe elliptique d'une planète, la gravitation est réciproque au carré du rayon vecteur.

tour de la planète à peu près comme si elle étoit en repos.

### *Résumé.*

434. Il résulte de ce que l'on vient d'exposer sur la gravitation, sur cette force par laquelle les corps se portent les uns vers les autres, et qui les affecte tous de la même manière, que la loi générale de son action est, en raison directe des masses et inverse du carré des distances, et que cette loi est démontrée, 1<sup>o</sup> par la pesanteur observée, et comparée sur le sommet et au pied des hautes montagnes; 2<sup>o</sup> par la chute des corps à la surface de la terre, comparée à celle de la lune; 3<sup>o</sup> par la comparaison des arcs parcourus dans le même temps par toutes les planètes autour du soleil, et par ceux des satellites autour de leur planète; 4<sup>o</sup> par les rapports des carrés des temps des révolutions aux cubes des grands axes des orbites de chaque planète; 5<sup>o</sup> par la proportion constante entre les aires décrites par les rayons vecteurs de chaque planète et les temps employés à les décrire; 6<sup>o</sup> par le mouvement des astres dans un orbe elliptique, et la direction de leur pesanteur vers un des foyers de l'ellipse, toutes les sections coniques jouissant de la même propriété: ainsi ce qui détermine le mouvement des corps célestes, dit Laplace, n'est pas une de ces causes vagues, impossible à soumettre à l'analyse, et que l'imagination modifie à son gré pour expliquer les phénomènes. La loi de la pesanteur universelle a le précieux avantage de pouvoir être réduite au calcul.

et d'offrir, dans la comparaison de ses résultats aux observations, le plus sûr moyen d'en constater l'existence. Cette grande loi de la nature représente tous les phénomènes célestes jusque dans leurs plus petits détails; il n'y a pas une seule de leurs inégalités qui n'en découle avec une précision admirable : elle a donné la cause de plusieurs mouvemens singuliers entrevus par les astronomes, mais qui, trop compliqués ou trop lents, n'auroient pu être déterminés par l'observation, qu'après un grand nombre de siècles.

### §. L.

#### *De la Masse des Planètes, de leur Densité, et de la Pesanteur à leur surface.*

435. La masse des planètes peut être déterminée de quatre manières, 1<sup>o</sup> par la vitesse d'un astre autour du soleil, comparée à celle d'un satellite autour de la planète dont on veut déterminer la masse; 2<sup>o</sup> par la vitesse d'une planète, comparée à la pesanteur observée à sa surface; 3<sup>o</sup> par le changement séculaire que les planètes produisent dans les éléments du système solaire; 4<sup>o</sup> par la comparaison des volumes, en supposant la densité proportionnelle aux moyennes distances.

Laplace a déterminé, par la première méthode, les masses de jupiter, saturne et uranus; par la seconde, la masse de la terre; par la troisième, les masses de vénus et de mars; et par la quatrième, la masse de mercure.

436. La première méthode est fondée sur ce théorème : La masse du soleil est à celle de la planète, comme le cube du grand axe de l'orbe d'un astre qui tourne autour du soleil, divisé par le carré de sa révolution sidérale, est au cube du grand axe de l'orbe du satellite qui tourne autour de la planète, divisé par le carré de sa révolution sidérale (1).

D'après cela, pour avoir la masse d'une planète, tout se réduit à connoître la masse du soleil, sa distance à l'astre, la durée de la révolution sidérale de l'astre, la distance du satellite à sa planète, et la durée de sa révolution sidérale.

437. Pour appliquer ce théorème à la planète de jupiter, et comparer sa masse à celle du soleil, il faut observer que le rayon de l'orbe du quatrième satellite de jupiter JS, fig. 161, est vu du soleil  $\Sigma$  sous un angle  $J\Sigma S$  de 1530'' 86. Du point  $t$ , distant

(1) Si  $M$  est la masse du soleil,  $R$  le grand axe de l'orbe de l'astre qui tourne autour de lui,  $T$  la durée de sa révolution,  $m$  la masse de la planète,  $r$  le grand axe de l'orbe de son satellite,  $t$  le temps de sa révolution sidérale, on a  $M : m :: \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$ . En effet, on a vu (388) que  $P$  est comme  $\frac{V}{T}$  et  $V$  comme  $\frac{R}{T}$ , d'où  $P$  est comme  $\frac{R}{T^2}$ ; on a vu aussi (431) que  $P$  est comme  $\frac{1}{R^2}$ ; donc  $P : p :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ ; multipliant les pesanteurs par le carré des distances pour les ramener à des distances égales, ou a  $P' : p' :: \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$ ; mais, à des distances égales, les masses sont comme les pesanteurs; donc  $M : m :: \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$ .

de jupiter d'une quantité  $tJ$  égale au rayon moyen de la terre  $T\Sigma$ , il est vu sous un angle  $JtS$  de  $7946''{,}75$ : ainsi la distance  $JS$  du satellite à jupiter est à la distance  $Jt = T\Sigma$  de la terre au soleil, comme le sinus de l'angle  $JtS$  est au rayon du cercle  $JSt$ , ou comme  $7946''{,}75$  est à  $636619''{,}8$ . La durée de la révolution sidérale de ce satellite est de  $16$  jours  $68900''$ , et celle de la terre de  $365$  jours  $25640''$ ; donc la masse du soleil est à celle de jupiter ::  $\frac{(636619''{,}8)^3}{(365 \cdot 25640'')^2}$

$\frac{(7964''{,}75)^3}{(16 \cdot 68900'')^2} :: 1 : \frac{1}{1066,08}$ ; et comme la force qui retient jupiter dans son orbite est la somme des attractions de jupiter et du soleil, il faut augmenter le dénominateur d'une unité, et alors la masse de jupiter est  $\frac{1}{1067,08}$  de celle du soleil.

C'est par ce moyen que Laplace a trouvé que la masse du soleil étant = . . . 1.

$$\text{Celle de jupiter} = \dots \frac{1}{1067,08}.$$

$$\text{Celle de saturne} = \dots \frac{1}{3534,08}.$$

$$\text{Celle d'uranus} = \dots \frac{1}{19504}.$$

438. La seconde méthode consiste à déterminer quelle distance  $T\theta$ , fig. 162, une planète parcourt dans une seconde vers le soleil  $S$ , par la comparaison de sa vitesse sidérale au rayon moyen de son orbite  $TS$ . Ayant trouvé par l'expérience, quelle espace  $ca$ , un corps  $c$  abandonné à lui-même parcourt dans un temps donné vers la surface d'une

planète T, on peut, d'après la loi d'attraction en raison inverse du carré des distances, déterminer quel espace  $\gamma a$  il parcourroit dans le même temps vers la planète s'il en étoit à une distance T  $\gamma$  égale à celle TS de la planète au soleil. Comme, à distance égale, l'attraction est en raison des masses, on aura la masse de la planète, comparée à celle du soleil, par le rapport entre la vitesse de la chute du corps et celle de la planète (1).

(1) Si la terre T parcourt autour du soleil, dans une seconde, l'arc TD, on aura TD est à la circonférence TDAFT, comme le temps  $t$  employé à parcourir l'arc est au temps T employé à parcourir la circonférence : donc, faisant l'arc =  $a$ ,

la circonférence =  $c$ , on a  $a : c :: t : T$ ; d'où  $\frac{a}{t} = \frac{c}{T}$ , et

$a = \frac{c t}{T}$ ; mais  $c = D \times \frac{355}{113}$ ,  $t = 1''$  et  $T = 365.25638''$ ;

donc  $a = D \times \frac{355}{113} \times \frac{1}{365.25638}$ ; et, comme (369) le

sinus verse d'un arc =  $\frac{a^3}{D}$ , et que T  $\theta$  est le sinus verse que

la planète décrit, il s'ensuit que T  $\theta = \frac{1479565}{10^{20}}$ ; c'est la

quantité dont la terre tombe vers le soleil, dans une seconde, en vertu de son mouvement relatif autour de cet astre. Sous le parallèle ou le rayon terrestre =  $\frac{1}{2}$ , le sinus verse est de

6369374 m., et la pesanteur y fait tomber les corps de 3<sup>m</sup>.66469

en une seconde. Comme la parallaxe du soleil = 27'', la pesanteur des corps vers le centre de la terre, à une distance égale à la distance moyenne du soleil à la terre, = 3<sup>m</sup>ét.66469  $\times$

$\frac{(\sin. 27'')^3}{6369374} = \frac{4.38926}{10^{20}}$ . Si la pesanteur de la terre vers le

439. Les masses de vénus et de mars ont été déterminées par la troisième méthode, c'est-à-dire par les changemens séculaires que l'action des corps produit dans le système solaire. Laplace a conclu les masses de vénus et de mars de la diminution séculaire de l'obliquité de l'écliptique et de l'accélération du moyen mouvement de la lune. La masse du soleil étant représentée par l'unité, celle de mars =  $\frac{1}{2546320}$ , et celle de vé-

$$\text{nus} = \frac{1}{356632}$$

440. Ne pouvant appliquer aucune des trois méthodes précédentes à la planète de mercure, Laplace a été obligé de faire usage de la quatrième, qui suppose que la densité de cette planète et celle de la terre sont réciproques à leurs moyennes distances au soleil, hypothèse qui satisfait assez exactement aux densités respectives de la terre, de jupiter et de saturne. La densité de mercure, déterminée par cette méthode, est  $\frac{1}{2025810}$  de celle du soleil.

soleil, formée de la somme des masses, ou retranche celle de la terre, on aura celle du soleil =  $\frac{1479565}{10^{20}} - \frac{4.38926}{10^{20}}$   
 $= \frac{1479560,5}{10^{20}}$  : ainsi la masse du soleil est à celle de la terre  
 : : 1479560,5 : 4.38926 : : 337086 : 1 ; donc la masse de la  
 terre, déduite de cette méthode, =  $\frac{537086}{1}$  de celle du soleil.

441. On sait que la densité des corps est proportionnelle aux masses divisées par leurs volumes, et que, pour les corps à-peu-près sphériques, les volumes sont comme les cubes de leurs rayons; en prenant pour rayon des planètes celui qui correspond au parallèle dont le carré du sinus de latitude  $= \frac{1}{3}$ , lequel se trouve être égal au tiers de la somme du diamètre de l'équateur et du rayon du pôle, et comparant ces densités à celle du soleil supposée  $= 1$ , on a :

Densité	{	du soleil. . . . .	$= 1, 0000.$
		de la terre. . . . .	$= 3, 9393.$
		de jupiter. . . . .	$= 0, 8601.$
		de saturne. . . . .	$= 0, 4951.$
		d'uranus. . . . .	$= 1, 1376.$

442. Si les planètes étoient privées de leur mouvement de rotation, la pesanteur à leur surface seroit comme leur masse divisée par le carré de leur diamètre apparent vu du soleil; mais, comme elles jouissent de ce mouvement; il faut diminuer ce poids de la force centrifuge qui en résulte. Les diamètres de la terre et de jupiter étant comme  $54''$ , :

$599'', 15$ , et les masses ::  $\frac{1}{337086} : \frac{1}{1067}$ , il s'ensuit

que, si la pesanteur à la surface de la terre  $= 1$ , elle sera à la surface de jupiter  $= 2,566$ ; mais la rotation de cette dernière planète doit la diminuer de

$\frac{1}{9}$ . Les mêmes corps péseroient, à la surface du soleil,  $27,93$ , et parcourroient  $102^{\text{mets}}$  dans la première seconde de leur chute.

*Résumé.*

443. Il suit de ce que nous venons d'exposer que la masse des planètes peut être déterminée de quatre manières, 1<sup>o</sup> par la vitesse d'un astre autour du soleil, comparée à celle d'un satellite autour de la planète dont on veut déterminer la masse; 2<sup>o</sup> par la vitesse du mouvement sidéral d'une planète, comparée à la pesanteur observée à sa surface; 3<sup>o</sup> par le changement séculaire que les planètes produisent dans le système solaire; 4<sup>o</sup> par la comparaison des volumes, en supposant les densités réciproques aux moyennes distances au soleil; que c'est par ces quatre méthodes que Laplace a déterminé les masses des corps célestes, savoir :

$$\text{Du soleil} \dots = \frac{1}{1}.$$

$$\text{De mercure} \dots = \frac{1}{2025810}.$$

$$\text{De vénus} \dots = \frac{1}{356632}.$$

$$\text{De la terre} \dots = \frac{1}{337086}.$$

$$\text{De mars} \dots = \frac{1}{2546330}.$$

$$\text{De jupiter} \dots = \frac{1}{1067.69}.$$

$$\text{De saturne} \dots = \frac{1}{3534.08}.$$

$$\text{D'uranus} \dots = \frac{1}{19504}.$$

que les masses de jupiter, saturne et uranus, ont été déterminées par la première méthode, celle de la terre par la seconde, celles de vénus et de mars par la troisième, et celle de mercure par la quatrième; enfin que la densité des planètes est proportionnelle aux masses divisées par les cubes de leurs rayons, et la pesanteur à leur équateur proportionnelle à leurs masses divisées par le carré de leurs diamètres.

## DES PERTURBATIONS DANS LE MOUVEMENT DES PLANÈTES, DES COMÈTES, DE LA LUNE ET DES SATELLITES DE JUPITER.

### §. LI.

#### *Des Perturbations dans le mouvement elliptique des Planètes.*

444. Si les planètes n'obéissent qu'à l'action du soleil, leur mouvement s'exécute dans une ellipse dont la forme seroit constante; mais comme elles exercent les unes sur les autres une action qui donne naissance à des variations dans la courbe qu'elles parcourent, ces variations, qui ont été nommées *perturbations*, sont nécessaires à déterminer, pour avoir des tables exactes du mouvement des planètes; cependant, leur solution surpassant les moyens

actuels de l'analyse, on est obligé de s'en tenir à des approximations suffisantes pour la pratique.

445. Les perturbations sont de deux sortes ; les unes, qui croissent avec une extrême lenteur, affectent le mouvement elliptique, et ont été nommées *inégalités séculaires* ; les autres, dépendant de la position des planètes entr'elles, relativement à leurs nœuds et à leurs périhélies, et redevenant les mêmes, chaque fois que ces positions et ces configurations sont les mêmes, ont été nommées *inégalités périodiques*.

Les inégalités séculaires peuvent être représentées par le mouvement d'un astre fictif F, fig. 163, dans une ellipse AFBGA, dont le grand axe AB seroit constant, mais dont la figure AGB, AHB, AIB, etc., varieroit insensiblement : les inégalités périodiques pourroient de même être représentées par le mouvement de la planète P autour de cet astre fictif F, dans un très-petit orbe LMNP, dont la nature dépend de ses inégalités périodiques. Les inégalités séculaires doivent changer, à la longue, la forme et la position de tous les orbes.

446. Parmi les inégalités séculaires des planètes, celles de jupiter et de saturne sont les plus considérables. En comparant entr'elles les observations faites depuis le renouvellement de l'astronomie, on voit que le mouvement de jupiter va en s'accélégrant, tandis que celui de saturne retarde. En réunissant les observations modernes, Lambert a remarqué que le moyen mouvement de jupiter retarde sans cesse, tandis que celui de saturne augmente ; ce

qui doit porter à croire que ces retards et ces accélérations sont périodiques.

L'accélération du mouvement de jupiter étoit à son maximum en 1560, et cette planète avoit son mouvement moyen en 1700:

447. L'examen analytique de cette accélération et de ce retardement a exercé la sagacité des géomètres les plus célèbres: Laplace, après avoir remarqué que les moyens mouvemens de jupiter et de saturne approchoient beaucoup du point où ils peuvent devenir commensurables, et que cinq fois le mouvement de saturne étoit, à très-peu près, égal à deux fois celui de jupiter, regarda ces termes comme une cause fort vraisemblable des variations observées dans les moyens mouvemens de ces planètes; il discuta cette idée, la soumit au calcul, et trouva, 1<sup>o</sup> qu'il existe dans la théorie de saturne une grande inégalité de  $9024''{,}7$  dans son maximum, et dont la période est de  $917$  ans  $\frac{3}{4}$ ; 2<sup>o</sup> que le mouvement de jupiter est soumis à une inégalité correspondante, dont la période et la loi sont les mêmes; mais qui, affectée d'un signe contraire, ne s'élève qu'à  $3856''{,}5$ : avant ce beau résultat de Laplace, on croyoit que ces inégalités augmentoient comme les carrés des temps.

448. Le grand axe des ellipses et le moyen mouvement des planètes étant constans, l'inégalité ne peut provenir que de la variation des autres élémens de l'ellipse planétaire; c'est donc de la forme, de la figure des ellipses que ces variations dépendent. Si les formes moyennes des orbes de jupiter

et de saturne sont les ellipses  $ACBJ$ ,  $SKHI$ , fig. 164, et que l'orbe de jupiter s'aplatisse en  $E$ , tandis que celui de saturne se renfle en  $M$ , il y aura accélération dans le mouvement de jupiter, et retardement dans celui de saturne. Si, au contraire, l'orbe de jupiter se renfle en  $D$ , tandis que celui de saturne s'aplatit en  $L$ , il y aura ralentissement du mouvement de jupiter, et accélération de celui de saturne.

449. Les perturbations séculaires et périodiques du mouvement elliptique des planètes présentent trois questions principales, que Laplace a cru devoir examiner : 1° les ellipses planétaires ont-elles toujours été et seront-elles toujours à-peu-près circulaires ? 2° quelques-unes des planètes n'ont-elles pas été, dans l'origine, des comètes, dont les orbites sont peu-à-peu approchés du cercle par l'attraction des autres planètes ? 3° la diminution de l'obliquité de l'écliptique continuera-t-elle au point de faire coïncider l'écliptique avec l'équateur ; ce qui produiroit l'égalité constante des jours et des nuits ?

450. Laplace a démontré, par l'analyse, que par cela seul que les planètes se meuvent dans le même sens, dans des orbites peu excentriques et peu inclinées les uns sur les autres, les inégalités séculaires sont périodiques et renfermées dans d'étroites limites ; en sorte que le système planétaire ne fait qu'osciller autour d'un état moyen, dont il ne s'écarte jamais que d'une petite quantité : ainsi les orbites des planètes ont toujours été et seront toujours à-peu-près circulaires.

451. D'après ce résultat, il suit qu'aucune pla-

nète n'a été primitivement une comète, et que l'écliptique ne coïncidera jamais avec l'équateur, l'étendue de ses variations ne pouvant excéder 3 degrés.

452. L'embarras que les astronomes éprouvent aujourd'hui pour comparer les observations modernes aux anciennes, et celui qu'ils éprouveront par la suite, a engagé Laplace à chercher un moyen simple de déterminer, dans l'espace, un plan invariable, passant par le centre du soleil, auquel on puisse rapporter la position des orbes de toutes les planètes, à chaque époque. Pour cela, si à un instant quelconque, et sur un plan passant par le centre du soleil, on mène des droites aux nœuds ascendants des orbes planétaires rapportés à ce dernier plan; si l'on prend sur ces droites, à partir du centre du soleil, des lignes égales aux tangentes des inclinaisons des orbes sur ce plan; si l'on suppose ensuite aux extrémités de ces lignes des masses proportionnelles aux masses des planètes, multipliées respectivement par les racines carrées du paramètre des orbes et par le cosinus de leur inclinaison; enfin, si l'on détermine le centre de gravité de ce nouveau système des masses, la droite menée du centre du soleil à ce point, sera la tangente du plan invariable sur le plan donné, et en la prolongeant, au-delà de ce point, jusqu'au ciel, elle y marquera la position de son nœud ascendant: la position de ce plan dépend, à la vérité, de la masse des planètes; mais celle des planètes qui ont le plus d'influence sur cette position est déterminée, et la masse des

autres planètes sera bientôt suffisamment connue. En adoptant la valeur des masses des planètes (443), la longitude du nœud ascendant du plan invariable était de  $114^{\circ}, 6991''$  au commencement du 19<sup>e</sup> siècle, et l'inclinaison de l'écliptique sur ce plan étoit  $1^{\circ} 5194$  à la même époque. Quel que soit le changement arrivé dans l'orbite des planètes, le plan conservera toujours dans le ciel une position parallèle.

453. En vertu du rapport des mouvemens moyens de jupiter et de saturne, la conjonction des deux planètes se fait pendant vingt années consécutives dans le même signe, et dans les vingt années suivantes dans un autre signe, éloigné de huit signes du premier; ensuite, pendant une même période, dans un nouveau signe, également éloigné: les conjonctions ont lieu pendant deux siècles dans ces trois signes, puis elles se font dans trois autres; ainsi, lorsque les conjonctions arrivent dans le bélier, fig. 165, vingt ans après, elles sont dans le sagittaire; vingt ans ensuite, dans le lion; au bout de deux siècles, elles arrivent dans le taureau, le capricorne et la vierge; deux siècles après, dans les gémeaux, le verseau, la balance; enfin, dans les deux siècles suivans, ces conjonctions s'observent dans l'écrevisse, les poissons et le scorpion.

454. La planète d'Uranus, quoique découverte depuis peu de temps, offre déjà des perturbations considérables. Celle de cérés, dont les perturbations ont été calculées par Burckhardt, sont plus considérables encore; à cause de sa proximité de jupiter.

*Résumé.*

455. Il suit de ces observations, que le mouvement elliptique des planètes éprouve deux sortes de perturbations, l'une séculaire, dans la courbure de l'ellipse; l'autre périodique: que ces deux inégalités peuvent être représentées, de deux manières, par une ellipse qui éprouveroit des altérations séculaires, et par une petite courbe sur laquelle se mouveroit la planète, en même temps que son centre auroit un mouvement régulier sur la première ellipse; que les plus grandes inégalités remarquées sont dans les planètes de jupiter et de saturne; que le mouvement de l'une s'accélère, tandis que celui de l'autre retarde; que ces inégalités dépendent de l'action de la pesanteur des planètes les unes sur les autres, et que ces perturbations sont périodiques; que les ellipses des planètes ont toujours été et seront toujours à peu près circulaires; que ces corps célestes n'ont jamais été des comètes; que l'écliptique n'a qu'un léger mouvement d'oscillation sur l'équateur, dont le plus grand écart ne surpasse pas trois degrés; que l'on peut, en rapportant la position des orbes des planètes à un plan invariable de position passant par le centre du soleil, retrouver toutes les époques des observations; que la longitude du nœud ascendant de ce plan étoit, au commencement du 19<sup>e</sup> siècle, de  $114^{\circ} 699''$ , et son inclinaison sur l'écliptique de  $1^{\circ} 5194''$ ; qu'en vertu du moyen mouvement de jupiter et de sa-

turne , leur conjonction a lieu pendant deux siècles consécutifs dans les trois mêmes signes , et qu'elle parcourt , ainsi , de deux en deux siècles , tous les signes du zodiaque ; enfin , que l'on a déjà observé des perturbations considérables dans uraunus.

## §. LII.

### *Des Perturbations dans le mouvement elliptique des Comètes.*

456. Les comètes éprouvent sans doute des inégalités dans leurs mouvemens ; ces inégalités peuvent être occasionnées par l'action des planètes connues et inconnues , et par celle des corps dont elles s'approchent. La comète de 1551 à 1607 , à 1682 , à 1759 (323) , a retardé de treize mois dans sa seconde révolution ; Halley , d'après une estime vague , jugea que sa troisième révolution devoit encore être retardée. Clairaut , soumettant au calcul l'action des planètes de Jupiter et de saturne sur cette comète , annonça que l'intervalle du retour seroit de 618 jours plus long que celui de la dernière période ; conséquemment que ce retour auroit lieu vers le milieu d'avril 1759 : elle passa le 12 mars , c'est-à-dire un mois plutôt ; ce que Clairaut , lui-même , avait en quelque sorte prévu , en annonçant que , par les petites quantités négligées , le retour pouvoit avancer ou retarder d'un mois. A cette époque , Clairaut ne pouvoit tenir compte de l'action d'Uranus , qui n'étoit pas encore connue.

457. Les comètes ont été un sujet de terreur dans les siècles d'ignorance ; on craint cependant , avec quelque raison , le choc d'une comète et de la terre , et l'on peut , avec assez de vraisemblance , attribuer à une cause semblable le changement de position des eaux , le transport aux pôles des ossemens des animaux et les empreintes des plantes que l'on ne trouve que sous l'équateur , ainsi que la disparition d'un grand nombre d'espèces d'animaux et de végétaux dont on ne retrouve plus les analogues vivans : c'est aussi par une cause de cette nature que l'on parviendra à expliquer les déluges que les mythologies des divers peuples paraissent indiquer.

458. L'action des comètes sur le système solaire a été jusqu'à présent presque insensible ; ce qui semble indiquer que leurs masses sont très-peu considérables : il est possible cependant que plusieurs erreurs des tables dépendent de leur action.

459. On a craint que par l'attraction de la terre une comète , passant dans son voisinage pût , être assez attirée pour produire des bouleversemens analogues à ceux dont on retrouve presque partout des traces ; mais la grande-vitesse de leur marche diminue considérablement la probabilité du choc , et doit tranquilliser sur les effets qui en seroient la suite.

### *Résumé.*

460. Il résulte de ce que nous venons d'exposer , que le mouvement des comètes éprouve des perturbations occasionnées par l'action de la pesanteur des

planètes, dans le voisinage desquelles elles passent ; que les grands bouleversements observés sur la surface de la terre, et ceux dont les traditions conservent le souvenir, peuvent avoir été produits par le choc d'une comète ; mais que les probabilités d'un choc semblable étant extrêmement petit, on doit se tranquilliser sur les événemens de ce genre ; enfin, il résulte aussi de cet examen, que la masse des comètes est peu considérable.

### §. LIII.

#### *Des Perturbations du mouvement de la Lune.*

461. Le mouvement de la lune est celui qui présente le plus d'inégalités ; l'on y distingue quatre perturbations principales :

1° Dans la distance de la lune à la terre, et dans les vitesses du mouvement angulaire, dépendant de ces distances ;

2° Dans son équation séculaire, que l'on a cru être proportionnelle au carré du nombre de siècles écoulés ;

3° Dans son inclinaison sur l'orbite solaire ;

4° Dans le mouvement de ses nœuds, de son périhélie et de son apogée.

Nous allons examiner séparément les causes et les valeurs de chacune de ces perturbations.

#### *Première Perturbation.*

462. La lune étant soumise à l'action du soleil et

de la terre, ses distances doivent varier en raison de ces actions ; ainsi, lorsque le soleil est plus près de la terre, la lune s'en éloigne davantage ; lorsqu'il est plus éloigné, elle s'en rapproche.

463. Si l'attraction de la terre agissoit seule sur la lune, ou, ce qui est la même chose, si la distance du soleil étoit infinie, le mouvement de la lune autour de la terre s'exécutoit dans une ellipse inaltérable ABCD, fig. 166, au foyer de laquelle le centre de la terre seroit placé, et dans laquelle son attraction seroit équilibre à la force centrifuge ; mais la distance du soleil étant finie, et cet astre agissant à la fois sur la terre et sur la lune, doit, en raison de sa position et de sa distance, faire varier la courbe elliptique, en écartant ou en rapprochant le centre de la lune de celui de la terre.

464. Euler, Clairaut, Dalember ont cherché à déterminer par l'analyse le résultat de l'action du soleil et de la terre sur la lune ; de là les perturbations qui devoient en résulter : mais comme ce fameux problème des trois corps surpasse les forces de l'analyse, ils n'ont pu le résoudre que par approximation ; ils y sont parvenus parce que la distance de la lune à la terre est très-petite, comparée à celle de la terre au soleil, n'étant que d'environ  $\frac{1}{490}$ , et que de même la masse de la lune est fort petite, comparée à celle de la terre, n'étant que d'environ  $\frac{1}{79}$ . Quoi qu'il en soit, on peut, sans analyse, rendre raison de l'équation annuelle de la lune, et même de son équation séculaire.

465. Si  $LBL'C$ , fig. 167 et 168, est l'orbe que la lune décrit autour de la terre; si cette dernière agit seule sur le satellite, cette orbe variera, par l'action du soleil, dans ses différentes positions par rapport à la terre et à la lune. Dans ses sizygies, fig. 167, l'orbe sera allongé  $lb'l'c$ ; et dans les quadratures, fig. 167, l'orbe sera rétréci; car si la direction du soleil est en  $ST$ , fig. 167, la terre est en  $T$  et la lune en  $L$ , conséquemment en conjonction avec la terre, le soleil, plus près de la lune que de la terre, l'attirera davantage, et, d'après leur déplacement, la distance  $tl$ , de la lune à la terre, sera plus grande que la distance primitive  $TL$ ; et si la lune est en  $L'$  et la terre en  $T$ , le soleil, plus près de la terre que de la lune, l'attirera davantage; et, après leur déplacement, la distance  $tl'$ , de la terre à la lune sera plus grande que la distance primitive  $TL'$ : de même, si la direction du soleil est en  $ST$ , fig. 168, la terre est en  $T$ , et la lune en quadrature  $L$  ou  $L'$ , le soleil, agissant sur ces corps à des distances peu différentes, les attirera à peu près également; mais la direction des attractions étant convergente vers le soleil, la lune après son déplacement et  $l$ , ou en  $l'$ , se trouvera plus rapprochée de la terre en  $t$ : d'où il suit, qu'en raison de la position des trois corps, la lune et la terre étant en sizygies ou en quadratures, la lune sera plus éloignée ou plus rapprochée de la terre (1).

(1) 466. Si l'on fait :

$M =$  la masse du soleil,

467. Non-seulement la distance de la lune à la terre doit varier par les différentes positions du soleil

$m$  = la masse de la terre ,

$\mu$  = la masse de la lune ,

$D$  = la distance moyenne de la terre au soleil ,

$d$  = la distance moyenne de la terre à la lune ,

$P$  = la pesanteur moyenne de la terre vers le soleil ,

$p$  = la pesanteur moyenne de la lune vers la terre ,

$\Pi$  = la pesanteur de la lune dans les syzygies ,

$\pi$  = la pesanteur de la lune dans les quadratures ,

$T$  = la durée de la révolution sidérale de la terre autour  
la soleil ,

$t$  = la durée de la révolution sidérale de la lune autour de  
la terre ,

on a dans les syzygies , fig. 167, l'attraction de la terre , lors-

qu'elle est en  $T = \frac{M}{D^2}$  , et l'attraction de la lune , lorsqu'elle

est en  $L' = \frac{M}{(D-d)^2}$  ; ainsi la différence des deux attrac-

tions =  $\frac{M}{D^2} - \frac{M}{(D-d)^2} = M \left( \frac{1}{D^2} - \frac{1}{(D-d)^2} \right)$

=  $M \cdot \left( \frac{(D-d)^2 - D^2}{D^2 (D-d)^2} \right)$  ; développant , on a

$M \frac{(D^2 - 2Dd + d^2 - D^2)}{D^2 (D-d)^2}$  ; négligeant  $d^2$  dans le numé-

rateur , et  $d$  dans le dénominateur , on a  $-M \frac{(2Dd)}{D^4}$

=  $-\frac{2M d}{D^3}$  ; dans le cas contraire , lorsque la lune est

en  $L$  , l'attraction de la lune =  $\frac{M}{(D+d)^2}$  : donc la diffé-

rence =  $\frac{M}{D^2} - \frac{M}{(D+d)^2} = M \left( \frac{1}{D^2} - \frac{1}{(D+d)^2} \right)$

relativement à la lune et à la terre, mais encore par rapport à sa distance du soleil : la distance périégée

$$= M \left( \frac{(D+d)^2 - D^2}{(D+d)^2 D^2} \right) = M \left( \frac{D^2 + 2DA + d^2 - D^2}{(D+d)^2 D^2} \right)$$

$$= M \left( \frac{(D+d)^2 D^2}{2Dd + d^2} \right); \text{ en négligeant } d^2 \text{ au numérateur,}$$

$$\text{et } d \text{ au dénominateur, on a } a = M \frac{(2Dd)}{D^4} = \frac{2Md}{D^3}.$$

Dans les quadratures, fig. 168, en faisant  $SL = K$ , on a pour la pesanteur de la lune vers le soleil  $\frac{M}{K^2}$ ; mais cette

force se décompose en deux; l'une dans le sens de  $LD$ , parallèle à  $ST$ , l'autre dans le sens de  $LT$ : pour avoir cette dernière, que nous appellerons  $\phi$ , on a  $K : d :: \frac{M}{K^2} : \phi$  d'où

$$\phi = \frac{Md}{K^3}; \text{ ainsi, dans les syzygies, on a } \Pi = P - \frac{2Md}{D^3};$$

dans les quadratures  $\pi = p = \frac{Md}{D^3}$ , et la moyenne des deux

actions  $= p - \frac{Md}{2D^3}$ ; donc la pesanteur moyenne de la lune

vers la terre, diminuée par l'action du soleil,  $= \frac{Md}{2D^3}$ ; elle

est ::  $\frac{Md}{D^3} = f$ ; mais  $p = \frac{m+\mu}{d^2}$ , et  $P = \frac{M}{D^2}$ ; et, à

cause de l'action des forces centrales (371), on a  $p : P :: \frac{d}{t^2} : \frac{D}{T^2}$  donc  $\frac{m+\mu}{d^2} : \frac{M}{D^2} :: \frac{d}{t^2} : \frac{D}{T^2}$ ; ainsi l'on a  $f : p ::$

$$\frac{Md}{L^3} : \frac{m+\mu}{d^2} :: \frac{M}{D^2} \times \frac{d}{D} : \frac{m+\mu}{D^2} :: \frac{D}{T^2} \times \frac{d}{D} : \frac{d}{t^2} ::$$

$$\frac{1}{T^2} : \frac{1}{t^2}; \text{ d'où } f : p :: t^2 : T^2; \text{ donc } \frac{Md}{D^3} : \frac{m+\mu}{d^2} :: t^2 :$$

$T^2$ ; ainsi la variation sur la pesanteur de la lune vers la terre;

du soleil étant  $\frac{1}{80}$  plus petit que sa distance moyenne, la variation dans la grandeur du rayon lunaire, occasionnée par les différentes positions du soleil à la distance moyenne, étant de  $\frac{1}{318}$ , l'augmentation du rayon vecteur du soleil, de  $\frac{1}{80}$ , augmente la variation dans le rayon vecteur de la lune de  $\frac{1}{20}$  (1).

468. La vitesse de la lune à une distance moyenne

causée par l'action du soleil, est à la pesanteur de la lune sur la terre ::  $t^2 T^2 = \frac{t^3}{T^2}$ ; mais  $t = 27; 32166$ , et  $T = 365; 256384$ ; donc  $\frac{t^3}{T^2} = \left(\frac{27,32166}{365,256384}\right)^2 = 2^{\text{log}} 27,32166 - 2^{\text{log}} 365,256384 = 2,8731522 - 5,1252042 = -2,2520520 = \frac{1}{44}$ , de la pesanteur lunaire, et l'action moyenne, qui en est moitié, =  $\frac{1}{88}$ .

(1) La variation dans la vitesse angulaire du soleil étant réciproque aux carrés des rayons vecteurs, la différence est double des rayons. La distance périégée du soleil étant plus petite de  $\frac{1}{80}$  que la distance moyenne, il s'ensuit que la vitesse angulaire est de  $\frac{1}{80}$  plus grande; de même, la variation dans la distance de la lune à la terre étant =  $\frac{M d}{2 D^3} (466)$ . Si la moyenne distance =  $D$ , on peut faire la plus grande =  $D + K$ ; ce qui, lorsque le soleil est au périégée, donne pour différence  $\frac{M d}{2 D K^3} = \frac{M d}{2} \times \frac{1}{(D+K)^3}$ ; mais  $\frac{1}{(D+K)^3} = \frac{1}{D^3 + 3 D^2 K + 3 D K^2 + K^3}$ ; négligeant le  $K^3$ , on a  $\frac{1}{(D+K)^3} = \frac{1}{D^3 + 3 D^2 K}$ ; mais  $\frac{1}{D^3 + 3 D^2 K}$ , en négligeant le  $K^2$ , =  $\frac{1}{D^3} - \frac{3 K}{D^4}$ ; donc, lorsque le soleil est

du soleil à la terre étant diminuée de  $\frac{1}{179}$ , l'action du soleil au périégée étant augmentée de  $\frac{1}{20}$ , la diminution dans la vitesse doit être  $\frac{1}{179} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{3580}$ ; ainsi la variation dans la vitesse du soleil et de la lune, lorsque le soleil est au périégée ou à sa distance moyenne, est :  $\frac{81}{30} : \frac{1}{3580}$ , l'équation du centre du soleil étant à l'équation annuelle de la lune comme ces deux nombres, il s'ensuit que l'équation annuelle =  $2398''$ ; l'observation la donne de  $\frac{1}{2}$  environ plus petite, ce qui dépend des quantités négligées dans le calcul.

### *Seconde perturbation.*

469. On a publié plusieurs tables du mouvement de la lune, déduites des observations des éclipses, et de la position de la lune sur son orbite au moment de ces observations; parmi ces tables, on distingue celles de Ptolémée, corrigées huit siècles après par Albatenius, ainsi que celles que Jbn Junis construisit vers l'an 1000, sur l'ensemble des observations chaldéennes, grecques et arabes. En comparant le mouvement de la lune, déduit de ces

au périégée, son action =  $\frac{M d}{2 D^3} - \frac{M d}{2 D^3} \left( \frac{3 K}{D} \right)$ ; retranchant cette quantité de l'action moyenne  $\frac{M d}{2 D^3}$ , la différence =  $\frac{M d}{2 D^3} \left( \frac{3 K}{D} \right)$ ; mais  $\frac{K}{D} = \frac{1}{60}$ , et  $\frac{3 K}{D} = \frac{1}{20}$ ; donc l'action du soleil au périégée sur la lune est augmentée de  $\frac{1}{20}$ .

tables et des observations modernes, Halley, Dunthorne et Mayer ont remarqué que ce mouvement s'accélérait, et que cette accélération pouvoit être représentée en ajoutant, aux longitudes moyennes de la lune, une quantité proportionnelle aux carrés des nombres de siècles écoulés avant et après 1700; Dunthorne et Lalande ont supposé ce nombre de 30,"9, Mayer, 21,"6 et 27,"8. Cette accélération a été de nouveau examinée par Delambre et Bouvard, qui l'ont confirmée par la comparaison d'un grand nombre d'observations anciennes et modernes.

470. Cependant les astronomes ne pouvant ni découvrir, ni expliquer la cause de cette accélération, l'ont souvent révoquée en doute; d'autres l'ont attribuée à l'action des comètes, à la résistance de l'éther, à la transmission successive de la gravité; mais Laplace, ayant de nouveau considéré ce phénomène, a trouvé que *« l'équation séculaire de la lune est due à l'action du soleil sur ce satellite, combinée avec la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. »* C'est dans sa *Mécanique céleste* qu'il faut voir les preuves de ce théorème.

On conçoit en effet que l'action moyenne du soleil sur la lune diminuant sa vitesse angulaire de  $\frac{1}{179}$  (466); ce coefficient varie comme le cube de la distance de la terre au soleil: en développant ce cube, on trouve que cette série contient un terme  $= \frac{2}{3}$  du carré de l'excentricité de l'orbite terrestre: si l'excentricité de cet orbite étoit constante, ce terme se confondroit avec la vitesse moyenne angulaire de la

lune ; mais sa variation , quoique très-petite , a une influence sensible sur le mouvement de la lune , et l'accélère tant que l'excentricité diminue. Lorsque la diminution sera arrivée à son maximum , l'excentricité augmentera , et la vitesse diminuera.

471. Tant que la diminution du carré de l'excentricité de l'orbe terrestre pourra être proportionnelle aux temps , l'équateur séculaire de la lune croîtra sensiblement comme le carré des temps , et il suffira de multiplier  $31^{\prime\prime},5017$  par le carré du nombre des siècles écoulés depuis le commencement du 19<sup>e</sup> siècle ; mais lorsque cette proportion n'aura plus lieu , il faudra employer d'autres termes.

472. La diminution dans l'excentricité de l'orbe terrestre , qui influe directement sur sa vitesse autour du soleil , paroît ne pas avoir sensiblement altéré l'équation du centre du soleil , puisque , depuis l'éclipse la plus ancienne , cette diminution n'a pas produit  $15''$  d'altération , tandis que la longitude moyenne de la lune a varié de  $2^{\text{de}}$  , et son anomalie moyenne de  $9^{\text{le}}$ .

### *Troisième perturbation.*

473. Le soleil agissant sur la lune , en raison de l'inclinaison de son orbe , et l'inclinaison de l'orbe terrestre variant sur l'équateur terrestre , on pourroit croire que l'orbe lunaire devoit varier aussi , et produire des inégalités séculaires provenant de ces variations ; mais l'orbe lunaire étant , par l'action du soleil , ramené sans cesse à la même inclinaison sur l'orbe terrestre , et n'ayant sur cet orbe qu'un

mouvement d'oscillation, les perturbations qui résultent de cette action sont assujetties aux déclinaisons du soleil sur la terre.

#### *Quatrième perturbation.*

474. Le mouvement de la lune éprouvant une variation séculaire, Laplace a été conduit à conclure que le mouvement des nœuds et celui du périégée éprouvoient des variations analogues : le résultat d'une analyse délicate et épineuse lui a donné une équation séculaire soustractive de la longitude moyenne du périégée = 3,3 du mouvement séculaire de la lune : ainsi, pendant que la longitude de la lune avance de 10, celle du périégée diminue de 33 ; il a même trouvé, dans le mouvement des nœuds sur l'écliptique vraie, une équation séculaire additive à leur longitude moyenne = 0,74 de l'équation séculaire du moyen mouvement de la lune : ainsi le mouvement des nœuds, qui se fait en sens contraire de celui de la lune, se ralentit de 0,74 lorsque celui de la lune augmente de 10, et les rapports des variations séculaires de ces trois mouvemens sont les nombres 0,26 ; 4 et 1.

475. Ces variations sont périodiques comme l'excentricité de l'orbe terrestre ; elles ne se rétabliront qu'après des millions d'années ; elles altèrent les périodes imaginées pour embrasser, par des nombres entiers, les révolutions *lunisolaires*.

467. La théorie de la pesanteur se trouvant ainsi vérifiée relativement aux équations séculaires des

mouvements du périhélie et des nœuds de la lune, on peut les faire entrer dans la construction des tables. Les astronomes, n'ayant point eu égard à ces équations, ont nécessairement assigné un mouvement trop petit à la lune. Bouvard a trouvé, par une nouvelle discussion, que le mouvement séculaire du périhélie des tables de la lune, insérées dans la troisième édition de l'Astronomie de Lalande, devoit être augmenté de 15".

### *Résumé.*

477. Il suit de ce que nous venons d'exposer sur les perturbations du mouvement de la lune, que ce satellite a quatre perturbations principales; 1°. dans sa distance à la terre, qui est telle, qu'à une distance moyenne du soleil, son mouvement est altéré de  $\frac{1}{179}$  des quadratures aux syzygies, et qu'il est altéré de  $\frac{1}{3180}$  dans le mouvement de la terre du périhélie à l'aphélie; 2°. dans l'équation séculaire de la lune, qui dépend de la variation dans l'excentricité de la terre; 3°. dans l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'orbite terrestre, qui, n'éprouvant qu'une oscillation, et qui, étant sans cesse ramené par l'action du soleil à une inclinaison donnée, n'a qu'une très-courte période; 4°. dans le mouvement du périhélie et des nœuds de l'orbite lunaire, variation assujettie également à celle de l'excentricité de l'orbite terrestre, et dont les rapports des variations séculaires de ces trois mouvements est comme; 0,26; 4, et 1, la vitesse du périhélie et des nœuds diminuant,

tandis que celle de la lune augmente ; enfin que la théorie de la pesanteur se trouve vérifiée dans le mouvement de la lune , jusque dans ses perturbations.

478. L'observation a prouvé que l'action du second satellite de jupiter sur le premier, produit, dans le mouvement de celui-ci, une inégalité proportionnelle au sinus du double de la différence de longitude des deux satellites; ce qui, dans la figure 169, deviendrait  $= \sin. 2 (A J_1 - A J_2)$ , et l'équation de cette inégalité  $= 5050'' \times \sin. 2 (A J_1 - A J_2)$ .

Le second satellite a une inégalité produite par l'action du premier, dont l'équation  $= - 11920'' \times \sin. (A J_1 - A J_2)$ .

Le troisième satellite a une inégalité  $= - 808'' \times \sin. (A J_2 - A J_3)$ .

479. Ces inégalités résultent de l'attraction que les satellites exercent les uns sur les autres : en effet, soit  $r_1 d f$ , fig. 170, l'orbite que parcourt le premier satellite de jupiter; en vertu de l'action de cette planète, l'attraction du second doit, dans les conjonctions et dans les oppositions, l'en éloigner, et l'en rapprocher au contraire dans les quadratures : ainsi la courbe décrite en vertu de l'action du second satellite placé en  $a$  doit être  $abc$  ; en  $b$  la vitesse est plus grande qu'en  $i'$  ; en  $a$  elle est plus petite qu'en  $i$  : ainsi, quoique le satellite puisse mettre à peu près le même temps à parcourir l'arc  $ab$  que l'arc  $ii'$ , par la différence dans sa vitesse, il devancera d'abord sur la première courbe celui qui se mouvrait sur la seconde, et son mouvement diminuant, ils seront en même temps en conjonction,

en quadrature et en opposition. La plus grande différence dans les écarts est à 50, 150, 250, 350<sup>des</sup>; le sinus du double de ces angles est égal au rayon, conséquemment le plus grand possible. Ces satellites étant sur la même droite aux quadratures et aux syzygies, conséquemment aux angles de 100, 200, 300, 400<sup>des</sup>, et les sinus du double de ces angles étant nuls, on peut en conclure que cette inégalité est proportionnelle au double de l'excès de la longitude moyenne du premier satellite sur le second ou de l'angle à jupiter des deux satellites.

480. Le premier satellite agit de même sur le second. Si la courbe 2, 2', 2'', 2''', fig. 171, étoit l'orbite qui dût parcourir le second satellite en vertu de l'action seule de jupiter, le premier satellite, agissant continuellement sur lui, diminueroit tellement le rayon de l'orbite, que, dans les conjonctions, ce second satellite seroit plus près de jupiter que dans les quadratures, et plus encore dans ces dernières que dans les oppositions; ainsi, la vitesse la plus grande seroit dans les conjonctions, la plus petite dans les oppositions, le plus grand écart ou la plus grande variation dans les quadratures; or, le sinus de l'angle, dans les quadratures, est le plus grand possible, puisqu'il est le rayon; il est nul dans les oppositions et dans les conjonctions; donc l'inégalité est proportionnelle au double de l'angle à jupiter des deux satellites; ainsi elle est proportionnelle à la différence des longitudes.

481. Mais le second satellite est dérangé par l'action du troisième, comme le premier l'est par celle

du second, en même temps qu'il est dérangé par l'action du premier. La variation par l'action du troisième satellite est proportionnelle au double de la différence de la longitude du troisième et du second; par l'action du premier, la variation est proportionnelle à la différence des longitudes des satellites; et cette différence des longitudes étant l'angle de ces satellites à jupiter, il s'ensuit qu'appelant  $m$  la constante qui multiplie le rapport de la variation exercée par le troisième satellite sur le second, et  $n$  celle qui multiplie le rapport de la variation exercée par le premier sur le second, l'équation de la variation du second satellite, fig. 169,  $m (\sin. 2 (3 J 2) - n, \sin. (2 J 1)$ , résultat qui est conforme à l'expérience.

482. On a vu (293) que les révolutions des trois premiers satellites sont :

1 <sup>er</sup>	. . . . .	1,	jour 769.	. . .
2 <sup>e</sup>	. . . . .	3,	351.	. . .
3 <sup>e</sup>	. . . . .	7,	154.	. . .

ainsi leur vitesse sont à peu près :  $\frac{1}{177} : \frac{1}{333} : \frac{1}{713}$   
ou :  $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ ; d'où il suit que trois fois la vitesse du second égale la vitesse du premier, plus le double de la vitesse du troisième, car  $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ .

483. Soit la longitude du premier satellite  $1 J A$ , fig. 169, =  $a$ ; celle du troisième  $3 J A = c$ ; celle du second  $2 J A = b$  la longitude du premier, plus deux fois celle du troisième, plus trois fois celle du second; ayant été une fois égale à une constante  $d$ , qui est sensiblement la demi-circonférence

du cercle, cette constante doit être la même dans tous les temps (1).

484. De ce que la longitude du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, moins trois fois celle du second, égale deux angles droits (483), il s'ensuit que jamais les trois satellites ne pourront être éclipsés à la fois.

485. Les mouvemens des trois premiers satellites sont réguliers et durables, ainsi que l'on s'en est assuré par les comparaisons d'un grand nombre d'observations éloignées; ces rapports peuvent n'avoir pas été exacts à l'origine, mais leur action mutuelle l'a établie : Laplace croit cependant qu'il peut y avoir des variations provenant de l'inexactitude du rapport des vitesses à l'origine, variations assez peu considérables pour n'avoir pas encore été aperçues, et qu'il a désignées sous le nom de libration.

486. Les satellites de jupiter sont assujettis à des variations séculaires semblables à celles de la lune; mais, de même que les variations dans leurs

(1) Si donc on a  $a + 2c - 3b = d$ , les vitesses  $a$ ,  $b$ ,  $c$  étant  $:: 1 :: \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$  (482), il s'ensuit que, si  $a$  avance d'une quantité  $m$ ,  $b$  avancera de  $\frac{m}{2}$ , et  $c$  de  $\frac{m}{4}$ ; donc les positions seront  $a + m + 2\left(c + \frac{m}{4}\right) - 3\left(b + \frac{m}{2}\right)$ ; mais  $a + 2c - 3b = d$ , et  $m + \frac{2m}{4} - \frac{3m}{2} = 0$ ; donc  $a + m + 2\left(c + \frac{m}{4}\right) - 3\left(b + \frac{m}{2}\right) = d$ .

mouvemens se coordonnent, les variations séculaires doivent se coordonner, de manière que l'équation séculaire du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, égale trois fois celle du second.

487. Les *périjoves* des orbes des satellites de jupiter ont un mouvement semblables aux périhélies des orbes des planètes, au périégée de l'orbe de la lune.

Celui du quatrième est de  $7959''$ ; sa longitude, en 1700, étoit de  $159''.43$ .

Celui du troisième est très-variable; sa longitude, à la même époque, étoit de  $194''.11$ .

En 1684 les périjoves coïncidoient, en 1775 ils étoient opposés.

488. Les orbes des quatre satellites de jupiter sont plus ou moins inclinés sur l'orbe de cette planète; l'action mutuelle des satellites fait varier ces inclinaisons, et ces variations peuvent être rapportées à des plans fixes passant par l'intercession *J*, fig. 172, des plans de l'équateur *ee* de jupiter sur son orbe *JA*. Le calcul et l'observation donnent pour l'inclinaison de l'équateur sur l'orbe  $34352''$ .

L'orbe du premier satellite *J* 1 est incliné sur ce plan de  $20''$ .

Le plan *Ja*, sur lequel se meut l'orbe du second satellite *J* 2, est incliné à l'équateur, et l'orbe *J* 2 est incliné sur ce plan de  $5152''$ .

Le plan *Jb*, sur lequel se meut l'orbe du troisième satellite *J* 3, est également incliné à l'équateur, et l'orbe est incliné sur ce plan de  $2284''$ .

Le plan  $Jc$ , sur lequel se meut l'orbe du quatrième satellite  $J_4$ , est aussi incliné à l'équateur, et l'orbe est incliné sur ce plan de  $2772''$ .

489. Les nœuds de l'orbe du premier satellite, ainsi que ceux des trois plans sur lesquels ils se meuvent, coïncident avec les nœuds de l'équateur; mais les orbes des satellites se mouvant sur ces plans, leurs nœuds y ont un mouvement rétrograde.

La longitude des nœuds du second satellite sur ce plan étoit, en 1700, de  $179^{\circ}, 5186''$ ; son mouvement rétrograde annuel est de  $13^{\circ}, 5458$ , et sa période de trente ans.

La longitude du nœud des quatre satellites sur ce plan étoit, en 1700, de  $153^{\circ}, 5185''$ ; son mouvement rétrograde annuel est de  $7519''$ , et sa période de cinq cent trente-deux ans.

Tous les plans fixes sur lesquels les satellites se meuvent sont eux-mêmes entraînés par l'équation de jupiter dans son mouvement; la longitude de ses nœuds étoit, en 1700, de  $347^{\circ}, 8519''$ ; son mouvement annuel est de  $6''$ ; sa période est de plus de six cent mille ans: ce mouvement doit faire varier l'inclinaison des orbes par rapport à celui de jupiter.

490. Pour établir les tables de jupiter il a fallu connoître la pesanteur de ses satellites. Cinq données de l'observation sont nécessaire pour déterminer ces quatre inconnues; celles dont Laplace a fait usage sont: les deux inégalités principales du premier et du second satellite, la période des variations de l'inclinaison de l'orbe du second satellite, l'équation

du centre du troisième, qui se rapporte au périjove du quatrième.

En prenant la masse de jupiter pour unité, Laplace a trouvé que les pesanteurs étoient :

1 <sup>er</sup> satellite. . . . .	o. 0000175281.
2 <sup>e</sup> . . . . .	o. 0000232355.
3 <sup>e</sup> . . . . .	o. 0000884972.
4 <sup>e</sup> . . . . .	o. 0000426591.

On rectifiera ces valeurs quand la suite des temps aura fait connoître les variations séculaires des orbites de ces satellites.

491. En faisant usage de ces mêmes données, Laplace a trouvé que le rapport des deux axes de jupiter est de 0,9287 ; ce rapport, mesuré plusieurs fois, a donné pour moyenne entre toutes les mesures  $\frac{11}{12} = 0,919$ , quantité qui ne diffère pas sensiblement ; mais, en considérant la grande influence de l'aplatissement de jupiter sur le mouvement des nœuds et des périjoves des satellites, on voit que le rapport des axes de jupiter est donné par les observations des éclipses plus exactement que par les mesures les plus précises.

492. Le mouvement des satellites de jupiter étant mieux connu qu'à l'époque où Bradley s'en est servi pour déterminer la vitesse de la lumière, les observations de leurs éclipses étant plus nombreuses, Delambre a examiné de nouveau le rapport entre la théorie et l'observation, et il a trouvé pour l'aberration  $62''{,}5$ , valeur absolument la même que celle obtenu par Bradley.

*Résumé.*

493. Il résulte de ce que nous venons d'exposer que les satellites de jupiter ont deux sortes de perturbations, la première dans leur mouvement, la seconde dans celui de leurs orbes ; que l'inégalité du mouvement des trois satellites peut être renfermée dans une équation, dans laquelle le mouvement du premier, plus deux fois celui du troisième, égale trois fois celui du second ; que cette équation comprend de même, soit leurs inégalités, soit leurs variations séculaires ; que la théorie fait voir que ces mouvemens sont réguliers et durables ; que ces rapports peuvent n'avoir pas existé à l'origine, mais que l'action mutuelle des satellites l'a établie d'une manière positive ; que ce rapport doit éprouver quelques variations, appelées *librations* par Laplace ; que les orbes des satellites ont quatre sortes de mouvemens, 1° dans leurs excentricité, 2° dans leurs périodes, 3° dans leurs nœuds sur l'orbite de jupiter, 4° dans leur inclinaison sur cet orbite ; que l'inclinaison de l'orbite du premier satellite oscille sur l'équateur de jupiter, et que les trois autres satellites oscillent sur des plans qui font, avec l'équateur de jupiter, des angles constans ; que les nœuds des second, troisième et quatrième satellites, avec leurs plans, ont des mouvemens rétrogrades ; que ces plans sont entraînés par l'équateur de jupiter, dont les nœuds sur l'orbite de cette planète ont un mouvement annuel et rétrograde de 6'' ; que Laplace a déterminé, par la théorie, la pesanteur des

satellite de jupiter, comparée à celle de cette planète prise pour unité, ainsi que le rapport des deux axes de jupiter, et que le résultat ne diffère qu'infiniment peu de l'observation; enfin qu'une nouvelle discussion des éclipses des satellites de jupiter par Delambre lui a donné, pour la vitesse de la lumière, un résultat absolument semblable à celui de Bradley, c'est-à-dire, qu'elle met 62'',5 à parcourir le rayon de l'orbe terrestre.

## VI. LEÇON.

### DU FLUX (7) ET DU REFLUX DE LA MER

#### §. LV.

#### *Exposition des Phénomènes connus sous le nom de Flux et Reflux.*

494. **O**n appelle *flux* et *reflux* de la mer un mouvement journalier, régulier et périodique d'élévation BA, fig. 173, et d'abaissement HB alternatif des eaux de la mer, en vertu duquel elles s'élèvent et s'abaissent deux fois entre deux retours consécutifs de la lune au méridien supérieur. Le mouvement d'élévation se nomme flux, et celui d'abaissement reflux.

La durée de l'élévation des eaux à Brest est d'environ  $0^{\text{jour}} 25376''$ , et celle de son abaissement  $0^{\text{jour}} 25876''$ ; l'intervalle moyenne entre deux élévations successives est de  $0^{\text{jour}} 51525''$ : l'intervalle moyenne des retours de la lune au même méridien étant de  $1^{\text{jour}} 035050$ ; d'où il suit que l'on observe toujours deux élévations et deux abaissemens dans la durée d'un jour lunaire.

*La marée* emploie neuf à dix minutes de moins à Brest à monter qu'à descendre, et le rapport d'élévation et d'abaissement pour chaque intervalle entre une élévation et une autre est tel, que, sur la surface d'un cercle  $BDEFGKf$ , fig. 174, dont le diamètre  $Bf$  égale la différence de la haute à la basse mer, les arcs égaux  $BD, DE, EF, FG, GK, Kf$ , correspondent à des abaissemens et des élévations d'eau dans des temps égaux: ainsi les sinus verse des angles  $BfD, BfE, BfF, BfG, BfK, BfH$ , indiquent les hauteurs dans des temps égaux; mais les sinus verse sont sensiblement comme les carrés des arcs, et les arcs, vers ces limites, sont comme les temps; donc les hauteurs sont proportionnelles aux carrés des temps écoulés depuis la haute ou la basse mer dans ces points, rapport qu'il a lieu dans toutes les grandeurs

susceptibles d'un maximum ou d'un minimum.

495. On appelle *marée totale* la demi-somme de deux pleines mers consécutives, prise du point où elle est descendue entre les deux marées. Les marées totales présentent de grandes variations; on distingue chaque jour des différences plus ou moins considérables dans leur hauteur, différences qui paroissent dépendre de l'ascension droite, de la déclinaison et de la distance du soleil et de la lune à la terre.

496. On observe les marées totales les moins hautes  $7^{\text{jours}} 38264''$  immédiatement après les plus hautes. Les plus hautes se succèdent, ainsi que les moins hautes, tous les  $14^{\text{jours}} 76529''$ . Comme la révolution synodique de la lune est de  $29^{\text{jours}} 53059''$ , il s'ensuit que, dans chaque révolution lunaire, il y a deux grandes et deux petites marées; les grandes AB, *ab*, fig. 175, ont lieu dans les environs des *syzygies* lorsque le soleil S, la lune L et la terre T, sont dans une même droite, les marées les moins hautes AB, *ab*, fig. 176, ont lieu dans les quadratures.

Les plus hautes marées totales, qui ont lieu dans chaque révolution synodique de la lune, diffèrent entre elles tous les  $346^{\text{jours}} 61963''$ , c'est-à-dire toutes les révolutions du soleil par

rapport aux nœuds de la lune. Il y a dans cet intervalle deux hautes marées plus considérables, et deux marées plus basses que toutes les autres; et, tous les deux cent vingt-trois mois lunaires que dure la révolution de la terre par rapport au soleil, toutes les variations dans les marées se renouvellent.

497. On a observé à Brest que la plus haute marée totale étoit de 5<sup>met.</sup> 888, et la moins haute de 2<sup>met.</sup> 789, conséquemment :: 2 : 1. On a observé encore que, lorsque le diamètre de la lune croît de  $\frac{1}{8}$ , les marées des *syzygies* y croissoient de  $\frac{1}{8}$ , et celles des *quadratures*  $\frac{1}{4}$ ; et, comme la marée des *quadratures* est environ moitié de celle des *syzygies*, l'augmentation dans l'un et dans l'autre cas = 0<sup>met.</sup> 736; enfin, comme les plus grandes variations dans le diamètre de la lune sont  $\frac{1}{15}$  en-dessus ou en-dessous, et que l'on a :  $\frac{1}{8} :: \frac{1}{8} : \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{20}$ , il s'ensuit que la variation de la marée totale dans les *syzygies* = 0<sup>met.</sup> 883, et pour la variation entière de la lune, 1<sup>met.</sup> 766.

On a remarqué encore que, dans les *syzygies*, les marées des solstices sont plus petites que celles des équinoxes, et que celles des *quadratures* sont plus grandes. La diminution des marées vers les *syzygies* des solstices n'est qu'environ les  $\frac{1}{3}$  de la diminution correspondante vers

les syzygies des équinoxes : l'accroissement des marées vers les quadratures est deux fois plus grand dans les équinoxes que dans les solstices ; enfin on a observé des différences entre les marées du matin et celle du soir : dans les syzygies du solstice d'été les marées du matin, du premier et du second jour, sont plus petites de  $0^{\text{m}} 183$  que celles du soir ; elles sont plus grandes, de la même quantité, dans les syzygies du solstice d'hiver. Dans les quadratures des équinoxes d'automne les marées du matin, du premier et du second jour après les quadratures, surpassent celle du soir de  $0^{\text{m}} 138$  ; et elles sont plus petites, de la même quantité, dans les quadratures de l'équinoxe du printemps.

498. L'heure des marées suit en quelque sorte le mouvement de la lune : comme celle-ci retarde de  $0^{\text{jour}} 03505''$ , si une marée arrive un jour à  $0^{\text{jour}} 1^{\text{h}}$  après minuit, l'après-midi elle arrivera à  $0^{\text{jour}} 51752''$ , et le lendemain à  $0^{\text{jour}} 13505''$  : ce retard varie avec les phases de la lune, les distances du soleil et de la lune à la terre, et la déclinaison des deux astres.

La variation occasionnée par les phases de la lune est la plus petite possible vers les syzygies ; elle n'est que de  $0^{\text{jour}} 02705''$ , et, vers les quadratures, la plus grande ne s'élève qu'à  $0^{\text{jour}}$

05207". La différence des heures des marées correspondantes aux momens des syzygies et des quadratures, qui est de 0<sup>jour</sup> 20642', augmente pour les marées qui suivent.

L'heure des marées varie encore d'un jour à l'autre par les distances du soleil et de la lune à la terre; chaque minute d'accroissement dans le demi-diamètre apparent de la lune augmente ou diminue ce retard de 258" dans les syzygies, et de 86" dans les quadratures.

La déclinaison des deux astres fait encore varier ce retard dans les syzygies des solstices; ce retard journalier y est d'environ 155" plus grand que dans son état moyen; il est plus petit, de la même quantité, dans les syzygies des équinoxes: dans les quadratures des équinoxes, il surpasse sa grandeur moyenne de 543", et il la diminue de la même quantité dans les quadratures des solstices.

Ces phénomènes ont également lieu dans tous les ports et sur tous les rivages de la mer; mais les circonstances locales, sans rien changer aux lois des marées, ont une grande influence sur leur grandeur et sur l'heure de l'*établissement des ports*.

499. On appelle *établissement des ports* l'intervalle écoulé entre le midi ou le minuit vrai et

l'instant de la pleine mer au moment de la syzygie : à Brest elle suit le midi ou le minuit vrai de 0<sup>jour</sup> 14822'' ; dans les quadratures elle suit le midi ou le minuit vrai de 0<sup>jour</sup> 35464''. Les marées avancent ou retardent en raison du nombre d'heures dont elles précèdent ou suivent les syzygies, des distances du soleil et de la lune à la terre, et de l'inclinaison des deux astres.

Les marées des syzygies avancent ou retardent de 264'' pour chaque heure dont elles précèdent ou suivent les syzygies. La marées des quadratures avance ou retarde de 416'' pour chaque heure dont elle précède ou suit la quadrature.

Chaque minute d'accroissement dans le demi-diamètre apparent de la lune fait avancer ou retarder l'heure de la pleine mer de 354'' dans les syzygies, et 118'' dans les quadratures.

Dans les syzygies des solstices l'heure de la marée avance de 2' ; elle retarde de la même quantité dans les syzygies des équinoxes. Dans les quadratures des solstices l'heure de la marée retarde de 8', et elle avance de la même quantité dans les quadratures des équinoxes.

### *Résumé.*

500. Il suit de ce qui précède que les hauteurs et

les intervalles des marées ont des inégalités qui paroissent dépendre de la position du port et du mouvement du soleil et de la lune; que les périodes des inégalités occasionnées par le mouvement de ces deux astres sont très-différentes : les unes étant d'un demi-jour, d'un jour; d'autre d'un demi-mois, d'un mois; d'une demi-année, d'une année; que d'autres enfin sont les mêmes que celles des révolutions des nœuds et des périgées de l'orbe lunaire. dont la position influe sur les marées par l'effet de la déclinaison de la lune et des distances à la terre.

### §. LVI.

#### *Explication des phénomènes connus sous le nom de Flux et Reflux.*

501. Si les eaux de la mer couvroient toute la surface de la terre; si la mer avoit partout la même profondeur, et que ces eaux ne fussent soumises qu'à l'action de la pesanteur vers le centre de cette planète, elles prendroient (la terre supposée en repos) la forme d'une sphère; mais, à cause de son mouvement de rotation, les eaux de la mer devroient prendre la forme d'un ellipsoïde de révolution *ABCD*, *fig. 177*, dont le grand axe seroit dans le plan de l'équateur *BD*, et le petit dans l'axe de révolution *AC*.

Si les eaux de la mer n'éprouvoient d'autre

action que celle qui résulte de la pesanteur vers le centre de la terre et du mouvement de rotation du globe, l'ellipsoïde prendroit à la longue une forme constante, qui n'éprouveroit plus d'altération; mais, si la mer étoit soumise aussi à l'action du soleil, et pesoit vers cet astre, chacune de ses molécules étant plus attirée en raison de sa proximité de l'astre supposé sur le plan de l'équateur, ce plan, de circulaire, deviendrait elliptique FEHG, fig. 178; les points FH seroient à leur plus grande élévation au-dessus de la hauteur moyenne des eaux ABC, et les points GE seroient à leur plus grand abaissement au-dessous de la moyenne AC; d'où il suit que, par la seule action du soleil sur les eaux de la mer, il y auroit deux hautes et deux basses mers, les premières à 200 degrés l'une de l'autre, et les deux autres à 100 degrés des premières (1).

---

(1) Pour concevoir ces deux élévations, supposons le centre de la terre *c*, fig. 178 (bis) et le cercle des eaux *adbe*: par l'action du soleil, plus grande en *b* qu'en *a*, les eaux se porteront en B et A, et la courbe produite par la différence d'action sera ADBE. Si le centre de la terre restoit dans sa position primitive *c*, les eaux en A seroient rapprochées de la terre; elles n'en seroient éloignées qu'en B; ce qui ne produiroit qu'une élévation, et par conséquent qu'une seule marée.

502. Si le soleil se mouvoit avec la terre, et s'il avoit la même vitesse angulaire, l'action de l'astre étant constamment exercée sur le même point de cette planète, la forme que les eaux prendroient en vertu de la rotation de la terre et de l'action du soleil seroit constante; mais, le soleil changeant continuellement de position, par rapport à la terre, par son mouvement d'orient en occident, et les *maxima*  $FHfh$ , fig. 179, d'élévation des eaux, ainsi que les *minima*  $EG, eg$ , dépendans des directions  $SFH, sfh$ , des rayons vecteurs du soleil à la terre, qui changent également: il s'ensuit que tous les points de l'équateur doivent avoir successivement deux hautes marées  $FH, fh$ , et deux basses marées  $EG, eg$ : les deux plus hautes marées arriveront au moment du passage du soleil sur le méridien du lieu ou sur le méridien opposé, et les deux plus basses sur les méridiens éloignés de  $100^\circ$  de ceux sur lesquels le soleil passe; et, comme le soleil met une journée à parcourir tous les points de l'équateur terrestre, on conçoit qu'il y aura par jour

---

Mais comme le centre de la terre est également déplacé par l'action du soleil, et qu'il se porte en  $C$ , moitié du grand axe  $AB$ , il se forme par ce transport deux élévations, l'une en  $B$ , et l'autre en  $A$ .

deux hautes et deux basses marées sur chaque point de l'équateur, et que les hautes marées seront à  $0^{\text{h}} 5^{\text{h}}$  de distance les unes des autres, et les basses à  $0^{\text{h}} 2^{\text{h}} 5$  des hautes.

503. Si le mouvement du soleil se faisoit constamment dans le cercle de l'équateur  $EFGHIL$  *ihgfe*, fig. 180, les eaux seroient élevées sur chaque méridien  $PEp$ ,  $PFp$ ,  $PGp$ , etc., à un hauteur moindre que sur les points  $EFG$ , etc. de l'équateur : les points  $Pp$  des pôles, éloignés de 100 degrés de l'équateur, auroient toujours la même élévation, et les variations augmenteroient successivement, depuis les pôles où elles seroient nulles, jusqu'à l'équateur où elles seroient les plus grandes possibles.

504. Les eaux de la mer, pesant également vers la lune, doivent être de même soumises à son action, et le mouvement de cet astre autour de la terre doit produire des phénomènes semblables à ceux du mouvement du soleil autour de cette planète; elle doit occasionner deux hautes et deux basses marées pendant la durée de sa révolution; et, comme l'intervalle moyen entre deux retours successifs de la lune au même méridien est de  $1^{\text{h}} 035050''$ , il s'ensuit que les hautes marées lunaires devroient avoir lieu tous

0,51752'', et que les basses marées seroient à 0,25876'' d'intervalle des hautes marées.

505. Les eaux de la mer pesant vers le soleil et vers la lune, et ces deux astres agissant sur elles, ils doivent, par leur action réunie, produire un résultat composé.

506. Si la vitesse angulaire des deux astres étoit la même, l'action qu'ils produiroient dépendroit de leur position respective; s'ils étoient constamment en conjonction ou en opposition, les forces, agissant dans le même sens, s'ajouteroient: mais, si leurs rayons vecteurs formoient un angle quelconque  $SHL$ , fig. 181, leur action réunie seroit dans une direction  $FR$  dépendante des deux effets, et la courbe  $EGFKE$  seroit celle que formeroient les eaux de la mer; ainsi les hautes marées n'auroient pas lieu lors du passage de l'un des deux astres au méridien, et l'heure de la haute marée seroit toujours, entre celle des deux passages, dans un intervalle également distant du moment du passage des deux astres, si les forces étoient égales, et plus rapprochée du passage de l'astre, qui agiroit plus fortement, si ces forces étoient inégales.

507 La vitesse angulaire des deux astres étant différente, leur action doit varier en raison de leur position; elles s'ajoutent dans les syzygies,

et produisent les hautes marées les plus considérables ; elles se retranchent dans les quadratures , et produisent les marées les moins grandes. L'heure des hautes marées est , dans les syzygies , celle du passage des deux astres au méridien ; et , dans les quadratures , cette heure est celle du passage au méridien de l'astre qui exerce la plus forte action. Dans tout autre instant l'heure de la haute marée est entre celles du passage des deux astres au même méridien , et elle oscille autour de celle du passage de l'astre qui exerce la plus grande action.

508. L'intervalle moyen entre deux retours consécutifs du soleil au même méridien est d'un jour ; l'intervalle moyen entre deux retours également consécutifs de la lune au même méridien est de  $1^{\text{h}} 035050''$ . L'intervalle des conjonctions est de  $29^{\text{h}} 53059''$ . Au moment des conjonctions les marées solaires et lunaires coïncident ; la marée composée est la plus grande.  $7^{\text{h}} 38264''$  après , le soleil et la lune étant en quadrature , la marée composée est la plus petite , parce que la pleine mer , relative à l'un des deux astres , coïncide avec la basse mer , relative à l'autre.  $14^{\text{h}} 76529''$  après la conjonction , les astres étant en opposition , la marée composée est la plus haute , parce qu'elle est produite par

la somme des deux action;  $22^{\text{h}} 3479^{\text{s}} 5''$  après la conjonction, les astres, étant en quadrature, donnent naissance à une petite marée; enfin, après  $29^{\text{h}} 53059''$ , les astres, étant de nouveau en conjonction, produisent une très-haute marée. L'observation s'accorde parfaitement avec la théorie, à quelques variations près, occasionnées par la différence d'action du soleil et de la lune.

509. L'heure des plus grandes et des plus petites marées doit suivre le mouvement de l'astre qui exerce la plus grande action. Si les marées solaires l'emportoient sur les marées lunaires, les heures des plus grandes et des plus petites coïncideroient avec l'heure à laquelle la marée solaire auroit lieu si elle étoit seule; mais, si la marée lunaire l'emporte sur la marée solaire, alors la plus petite marée composée doit coïncider avec la basse mer solaire, et par conséquent son heure est à un quart de jour d'intervalle de celle de la plus grande marée composée. Ces données offrent donc un moyen simple de reconnoître si la marée lunaire est plus ou moins grande que la marée solaire. Toutes les observations concourant à faire voir que l'heure des plus petites marée diffère d'un quart de jour de celle des plus grandes, il s'en-

suit que la marée lunaire l'emporta sur la marée solaire.

510. On a vu (497) que la plus grande marée totale de chaque mois, à Brest, est de 5<sup>mètres</sup> 888, et la plus petite de 2<sup>mètres</sup> 789 : ainsi les hauteurs des deux marées sont comme 2 : 1. D'où il suit que l'action de la lune est triple de celle du soleil (1).

511. Du rapport de l'action de la lune, comparée à celle du soleil, Laplace a déduit que la masse de la lune est  $\frac{1}{58,7}$  de celle de la terre (2).

(1) Si l'on appelle  $s$  la hauteur à laquelle le soleil élève les eaux,  $l$  la hauteur à laquelle la lune les élève, on aura pour l'élévation par les deux actions,  $l + s = 2$ , et pour l'élévation de leur différence,  $l - s = 1$ ; ainsi,  $\frac{l+s}{2} = 1$ , et  $\frac{l+s}{2} = l - s$ ; de là  $l + s = 2l - 2s$ , et  $3s = 2l - l = 1$ ; donc l'action de la lune est trois fois plus grande que celle du soleil.

(2) En effet (466), si l'on fait la masse du soleil =  $M$ ,

Celle de la terre =  $m$ ,

Celle de la lune =  $\mu$ ,

La distance du soleil à la terre =  $D$ ,

de la lune à la terre =  $d$ ,

Le rayon de la terre =  $r$ ,

on a la différence moyenne de l'action de la terre et du soleil

=  $\frac{M d}{2 D^3}$ ; et, comme l'action de la lune, diminuée par

celle du soleil, =  $\frac{1}{179}$  de celle de sa pesanteur sur la terre (466),

512. Les hauteurs des marées, ainsi que les heures auxquelles elles doivent arriver, varient, 1<sup>o</sup> par le mouvement de la lune et du soleil dans des orbes elliptiques, 2<sup>o</sup> par l'inclinaison des deux orbes l'un sur l'autre (1).

on a  $\frac{M d}{2D^3} = \frac{P}{179}$ , et  $\frac{M}{D^3} = \frac{2}{179} \cdot \frac{P}{d}$ ; ainsi  $\frac{M r}{D^3} = \frac{2}{179} \cdot \frac{P r}{d}$ ;

la pesanteur de la lune vers la terre =  $\frac{m + \mu}{d^3}$ ; donc  $\frac{M r}{D^3}$   
 =  $\frac{2}{179} \cdot \frac{(m + \mu)}{d^3} r$ ; d'où il suit que la force du soleil, pour

soulever les eaux de la mer, est  $\frac{2}{179}$  ou  $\frac{1}{89,5}$  de celle de la somme des masses de la terre et de la lune, multipliée par le rayon de la terre, et divisée par le cube de la distance de la lune à la terre : mais l'action du soleil, pour soulever les eaux (510), =  $\frac{1}{3}$  de celle de la lune, et cette dernière =  $\frac{2 \mu r}{d^3}$ ; donc  $\frac{2}{179} \cdot \frac{(m + \mu)}{d^3} r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu r}{d^3}$ , et  $\frac{\mu + m}{179} = \frac{\mu}{3}$ ; d'où l'on tire 3 : 179 : :  $\mu$  :  $\mu + m$ , et 3 : 176 : :  $\mu$  :  $m$ , et enfin que la masse de la lune est à peu près  $\frac{1}{176} = \frac{1}{58,7}$  de celle de la terre.

(1) Par le mouvement de la lune dans un orbe elliptique, sa distance à la terre varie, de même que, par le mouvement de cette dernière dans un orbe elliptique, la distance de la terre au soleil varie; et, comme l'action de la pesanteur est en raison inverse du carré des distances, il s'ensuit que les mouvemens de la lune et de la terre dans les orbes elliptiques doivent faire varier, 1<sup>o</sup>. la hauteur à la-

L'heure des marées dépend de la distance au soleil, de la résultante des actions du soleil et de la lune sur les eaux de la mer : cette distance, qui est nulle dans les syzygies et les qua-

quelle la marée s'élève par l'action séparée et réunie de chacune de ces forces, 2°. les heures des marées ; car, comme ces heures, autres que celles des syzygies et des quadratures, comparées à celles du passage au méridien de l'astre qui agit le plus fortement, présentent des différences d'autant plus grandes, toutes choses égales d'ailleurs, que les deux forces sont plus près d'être égales, il s'ensuit que plus l'action du soleil augmente par rapport à celle de la lune, plus la haute marée retarde ou avance sur l'heure du passage de la lune au méridien.

Si les deux orbes étoient dans un même plan, l'action exercée dans les syzygies seroit égale à la somme des deux actions séparées, et celle qui seroit exercée dans les quadratures seroit égale à la différence des deux actions ; mais, par l'inclinaison de l'orbe de la lune  $Ll \lambda L' A$ , fig. 182, sur l'orbe de la terre, le soleil et la lune dans les syzygies sont à des distances différentes. Lorsque les syzygies ont lieu à l'époque où la lune  $L$  est à sa plus grande distance de l'orbe terrestre, l'angle  $STL$ , formé par les rayons vecteurs du soleil et de la lune à la terre, étant le plus grand possible, la somme des deux actions est la plus petite. Lorsque les syzygies ont lieu à l'époque où la lune  $\lambda$  est dans l'intersection des deux orbes, le soleil  $\Sigma$  et la lune  $\lambda$  sont sur une même droite, et la somme de leurs actions est la plus grande. En général, la somme des actions dans les syzygies est d'autant plus grande, que l'angle  $sTl$  que forme la direction des rayons vecteurs des deux astres est plus petit.

dratures, varie dans toutes les autres positions, en raison de l'angle formé par les rayons vecteurs des deux astres ; et ce angle varie avec la distance de la lune aux nœuds de son orbe ; d'où il suit que l'heure des marées doit varier par rapport à l'inclinaison des orbes et à la distance de la lune aux nœuds de son orbe.

513. Puisque les hauteurs des marées, leurs avances et leurs retards sur le passage de la lune au méridien, varient, 1<sup>o</sup> à cause du mouvement de la lune et de la terre dans une ellipse, 2<sup>o</sup> à cause de l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'orbe terrestre, il s'ensuit que, comme les positions du soleil et de la lune, par rapport à la terre, ont un changement périodique dont la durée est de deux cent vingt-trois mois lunaires environ, toutes les variations dans les marées doivent avoir une semblable période, et que, puisque la révolution de la terre, par rapport aux nœuds de la lune, est de 346<sup>d</sup> 61995<sup>''</sup>, il s'ensuit, que pendant cet intervalle, il doit y avoir deux très-grandes et deux très-petites marées. Laplace, ayant appliqué le calcul à l'action des astres sur les eaux de la mer, et ayant comparé ensuite ses résultats aux observations faites à Brest, tant sur les hauteurs des marées, que sur les retards et les avances des marées par rapport au mou-

vement de la lune ; a trouvé un accord parfait entre la théorie et l'observation.

514. Pour expliquer les phénomènes produits par l'action du soleil et de la lune sur les eaux de la mer ; Laplace rapporte leurs effets à l'action que produiroient plusieurs astres mus uniformément dans le plan de l'équateur, mais ayant chacun des mouvemens différens dans le plan de leurs orbites. (1).

(1) Les premiers A, fig. 183, ayant un mouvement très-lent de A en a pendant que la terre T fait sa révolution entière ; les seconds A, fig. 184, faisant une demi-révolution A Q a pendant que la terre fait sa révolution entière : les troisièmes A, fig. 185, faisant presque une révolution A P Q R a pendant que la terre fait la sienne.

Les premiers astres, fig. 183, produisent un flux et reflux tous les 0.5, avec les variations qui les accompagnent ; en les soumettant à l'analyse, on trouve que les marées totales des syzygies des équinoxes sont plus grandes que celles des syzygies des solstices dans le rapport du rayon au carré de la déclinaison du soleil ou de la lune vers les solstices : on trouve, de plus, que les marées totales des quadratures des solstices, surpassent celles des quadratures des équinoxes dans un plus grand rapport que celui du rayon au carré du cosinus de la déclinaison de la lune vers les quadratures et les équinoxes.

Les seconds astres, fig. 184, produisant des marées dont la durée est d'un jour, ces marées sont proportionnelles au produit du sinus par le cosinus de la déclinaison des astres : elles sont nulles quand les astres sont dans l'équateur, et elles croissent à mesure qu'ils s'en éloignent. En se combinant avec

515. Jusqu'ici nous avons supposé que les eaux de la mer couvrieroient uniformément la surface de la terre, et qu'elles avoient partout une égale profondeur; mais l'observation fait voir, au contraire, que deux grands continens, fig. 186, et des îles plus ou moins considérables s'élèvent au-dessus de son niveau, ce qui, en présentant des surfaces très-inégales, couvertes d'eau, donne à la mer des profondeurs extrêmement variées. Les différences dans l'étendue et la profondeur des mers, la position des côtes, la forme des surfaces couvertes d'eau, apportent de très-grandes variations dans la hauteurs des marées de chaque lieu, ainsi que dans l'heure des hautes marées; et ces variations sont

---

les marées de la première espèce, elles rendent inégales deux marées du même jour.

Les troisièmes astres, fig. 185, produisent des marées dont les périodes sont fort longues, et indépendantes de la rotation de la terre: si les durées de ces périodes étoient infinies, ces marées n'auroient d'autre effet que de changer la figure permanente de la mer, qui parviendroit bientôt à l'état d'équilibre dû aux forces qui les produisent; mais il est visible que la longueur de ces périodes rendroit l'effet de ces marées, à très-peu près le même que dans le cas où elles seroient infinies. On peut donc considérer la mer comme étant sans cesse en équilibre sous l'action des astres fictifs qui produisent les marées de la troisième espèce, et les déterminer dans cette hypothèse.

telles, que deux ports très-voisins ont souvent des hauteurs et des heures de hautes marées très-différentes.

### §. LVII.

#### *Des Variations occasionnées par l'étendue et la profondeur de la Mer.*

516. L'action des astres sur un espace couvert d'eau, est d'autant plus grande que la profondeur est plus considérable, et que la surface a plus d'étendue. Dans une masse fluide, les impressions que reçoit chaque molécule se communiquent à la masse entière; c'est pour cela que l'action du soleil et de la lune, insensible sur une molécule isolée, produit sur l'Océan des effets remarquables. Si l'on imagine un canal  $OA, oa$ , fig. 187, courbé sur le fond de la mer, et terminé par un tube vertical  $AHB, ahb$ , qui s'élève au-dessus de sa surface, et qui passe par le centre du soleil, l'attraction exercée par cet astre élèvera l'eau dans le tube, en raison de l'espace que ce dernier occupe dans la mer, et de la différence dans la direction et la force dont les molécules sont animées : or, plus le tube recourbé sera long, plus l'élé-

vation sera grande; et plus la surface et la profondeur de la mer seront grandes, plus les hauteurs des marées seront considérables : c'est là la raison pour laquelle le flux et le reflux sont insensibles dans les petites mers, telles que la mer Noire, la mer Caspienne, et même la Méditerranée.

### §. LVIII.

#### *De la Variation provenant de la direction des Côtes.*

517. Comme la haute mer est soumise à l'action du soleil et de la lune, les eaux de la marée montante et descendante doivent avoir une direction dépendante du mouvement de ces astres. Soit  $AB$ , fig. 188, cette direction : si une île, ou toute autre masse,  $CDEFGH$ , fait obstacle à ce mouvement, les eaux qui arrivent sur la surface  $HCD$ , étant arrêtées dans leur marche, se diviseront ; une partie suivra la direction  $CDE$ , l'autre celle  $CHG$ , après toutefois s'être élevées contre l'obstacle, et là, l'élévation sera plus grande que celle qui eût existé sans l'obstacle. Sur la face opposée  $EF$ , les eaux seront plus basses ; sur les faces laté-

rales DE, HG les niveaux iront en diminuant de D et de H, vers E et G; ainsi les eaux auront diverses élévations autour de l'obstacle : d'où il suit qu'en raison de la direction des côtes, par rapport à la direction de la marée, il doit y avoir des élévations d'eau différentes.

### §. LIX.

#### *De la Variation occasionnée par la forme de la surface des Mers.*

318. La surface de la mer est maintenue dans des limites placées à des distances très-différentes les unes des autres. Les deux continens, fig. 186, connus sous le nom d'ancien et de nouveau, divisent la mer en deux parties très-inégales : l'espace compris entre les côtes du Brésil, des Antilles, de l'Amérique méridionale et celles du Congo, de Guinée, du Portugal et de la France, connue sous le nom de mer du Nord ou *océan Atlantique*, est beaucoup plus étroit que celui qui est compris entre les côtes du Pérou, du Mexique, de la Californie, et celles de la Chine et du Japon, connu sous le nom de mer du Sud ou *océan Pacifique*. La mer de la Chine est resserrée entre la côte de la Chine, l'île de Bornéo

et les Philippines; le détroit de l'Endéavour est un long canal, formé entre la nouvelle Guinée et la nouvelle Hollande; la Manche est un autre canal formé par les côtes de France et celles d'Angleterre : rien n'est donc plus varié que les différens espaces que la mer recouvre.

519. La grandeur des marées dépend beaucoup de la forme et de l'étendue de ces espaces. Les ondulations de la mer, resserrées dans un détroit, peuvent devenir fort grandes, et la réflexion des eaux sur les côtes opposées peut les augmenter encore : c'est pour cela que les marées, généralement fort petites dans la mer du Sud, sont très-considérables dans nos ports.

520. Si les eaux de la mer s'enfonçoient dans la terre par un long canal étroit  $AKNM$ , fig. 189; que son embouchure à la mer fût en  $A$ , et les limites des basses et des hautes mers de  $A$  en  $K$ , il est clair que l'eau, en montant de  $A$  en  $K$ , s'étendrait dans ce canal en suivant un plan incliné, de manière que, arrivée en  $K$ , sa surface fût représentée, dans le canal, par la courbe  $KFGIM$  : arrivée à son plus haut point, elle descendrait, et l'eau, élevée dans le canal, s'abaisseroit successivement de chaque point; de manière qu'à la basse mer, elle auroit un point quelconque  $G$  de plus haute

élévation : l'eau s'élevant ensuite de A en K, elle s'abaisseroit au-dessous du point G, jusqu'à un certain point I, par de-là lequel il n'y auroit plus ni élévation, ni abaissement. Entre ce point et l'ouverture du canal A K, le flux et le reflux se distingueroient d'autant mieux que la distance seroit plus éloignée du point fixe, et les heures du flux retarderoient en raison de la distance de chaque point du canal à son embouchure. On observe de ces ondulations dans toutes les rivières, près de leur embouchure; elles se propagent fort loin dans les grands fleuves, puisqu'au détroit du Pauxis, dans la rivière des Amazones, à quatre-vingts myriamètres de la mer, elles sont encore sensibles.

521. Si un large canal, fig. 190, communique à la mer par ses deux extrémités AB, CD; quelle que soit l'heure à laquelle la haute ou la basse mer ait lieu à chaque extrémité, elle doit arriver dans les ports E, F, G, H, I, K, à une heure différente : en effet, les heures des marées ou des ondulations transmises par chaque embouchure étant différentes, il doit y avoir sur cette côte des points où le maximum des ondulations de l'une des ouvertures corresponde au maximum des ondulations de l'autre; d'autres points où les *minima* se correspondent; d'autres.

enfin, où le maximum de l'ondulation d'une ouverture coïncide avec le minimum de l'ondulation d'une autre. Dans le premier cas, les hautes marées seroient les plus élevées; dans le second, les eaux auroient le plus d'abaissement; et dans le troisième, la différence du flux et du reflux seroit la plus petite possible, et elle seroit nulle si les ondulations étoient égales: ainsi, par le seul effet des marées d'un demi-jour, il peut exister des ports dans lesquels il n'y ait ni flux, ni reflux; mais nous avons vu (514) que les deux marées de chaque jour varient, et que cette variation est produite par un flux qui a une période deux fois plus longue que celle des marées d'un demi-jour: comme les ports où correspondent les marées d'un demi-jour ne sont pas les mêmes que ceux où correspondent les ondulations dont la période est d'un jour, il s'ensuit que, sur les points du canal où il n'y a pas de flux par les ondulations d'un demi-jour de période. On doit en remarquer un pour les ondulations d'un jour de période. Ce singulier phénomène a été observé à Batslia, port du royaume de Tunquin, et dans quelque autre lieu: comme les ondulations d'un jour de période ne diffèrent de celles d'un demi-jour que lorsque le soleil et la lune sont hors du plan de l'équa-

teur, on n'observe aucun flux et reflux à Bothsa lorsque ces deux astres sont dans le plan de l'équateur.

522. Puisque les heures des marées, quoique soumises à l'action combinée du soleil et de la lune, doivent différer dans chaque port, en raison de la forme du bassin dans lequel les eaux de la mer sont renfermées, et de sa communication avec les autres mers, il s'ensuit que l'heure de la marée doit être différente dans chaque port. Laplace considérant chaque port comme placé dans un canal à l'embouchure duquel les marées partielles arrivent au moment même du passage des astres au méridien, fait dépendre l'heure de la marée, 1<sup>o</sup> du temps que la mer met à parvenir à ce port; 2<sup>o</sup> de la différence qui existe entre le méridien du port et celui de l'embouchure. Cette différence entre le méridien de l'embouchure et le nombre d'heures qui doit s'écouler entre le passage des astres à ces deux méridiens, est ce qu'il appelle *heure fondamentale* du port. Il suppose que, sur les côtes de France, la marée met un jour et demi à venir de l'embouchure aux ports; et il détermine cette heure fondamentale d'après celle de l'établissement du port, qui est elle-même celle de la marée au moment où elle coïncide avec les sy-

zygies. Le retard des marées étant de 2705'' d'un jour à l'autre, il sera de 3951'' pour le jour et demi; en ajoutant cette quantité à l'heure de l'établissement, on a l'heure fondamentale. Maintenant, si l'on augmente les heures des marées à l'embouchure, de quinze heures, plus l'heure fondamentale, on aura les heures des marées correspondantes dans le port; ainsi le problème se réduit à déterminer les heures des marées dans un lieu dont la longitude est connue, en supposant que les marées partielles arrivent à l'instant du passage au méridien: l'analyse donne pour cet objet des formules très-simples, faciles à réduire en tables, et qu'il seroit utile d'insérer dans les Ephémérides destinées aux navigateurs.

### *Résumé.*

523. Il suit de ce que nous venons d'exposer, que le flux et le reflux sont occasionnés par l'action du soleil et de la lune sur les eaux de la mer; que de la différence, tant dans l'action que dans la vitesse combinées de ces astres, et de l'obliquité de l'orbe lunaire sur l'orbe terrestre, résultent toutes les inégalités que l'on remarque dans les marées; que, lorsque ces deux astres agissent ensemble, c'est-à-dire, dans les syzygies, les marées

sont les plus hautes, et qu'elles sont, au contraire, les plus basses quand leurs actions sont opposées, comme dans les quadratures; que les marées des syzygies sont d'autant plus grandes, que le soleil et la lune sont plus voisins de la terre, et que leur déclinaison est moindre; que de la marche des marées, conforme à celle de la lune, on conclut que cette dernière planète est celle des deux astres qui exerce la plus grande action sur la mer, et que, de la différence qui existe entre les hautes marées des syzygies et celles des quadratures, Laplace a conclu que l'action de la lune est triple de celle du soleil, et que sa masse =  $\frac{1}{58,7}$  de celle de la terre; que ce savant, afin de présenter d'une manière plus palpable les divers phénomènes qui résultent de ces actions, a rapporté toutes les variations des marées aux mouvemens de trois sortes d'astres: les premiers, dont le mouvement très-lent produiroit les marées d'un demi-jour; les seconds, dont la révolution, étant d'un demi jour, produiroit des marées d'un jour; et les troisièmes, dont la révolution, étant d'un jour, produiroit les variations des marées de périodes fort longues; que la grande variation observée dans la hauteur des marées, à chaque port, peut être rapportée à l'étendue des mers, la position des côtes, la forme de la surface de ces mers, leur profondeur et leurs communications entre elles; que l'on peut dresser des tables des heures des marées pour chaque port, en considérant la marée produite par le mouve-

ment des eaux de la mer dans un canal d'un longueur particulière, et dont l'embouchure est sous un méridien semblable ou différent de celui du port ; que , pour les ports de France , on pouvoit considérer que ce canal étoit tel , que les eaux mettoient un jour et demi à arriver de son embouchure aux ports , et que le méridien pouvoit être déterminé , en ajoutant  $3951''$  à l'heure de la marée au moment des syzygies ; enfin que la somme de ces heures , appelée par Laplace , *heure fondamentale* , est le nombre de celles qui doivent s'être écoulées entre le passage des astres au méridien du port , et celle de ce même passage à celui de l'embouchure du canal.

F I N.

---

# TABLE.

## DES MATIÈRES.

---

Les chiffres indiquent les numéros placés en tête des divers articles dont se composent les cinquante-neuf paragraphes de cet ouvrage.

### PREMIERE LEÇON.

#### §. I<sup>er</sup>. DE LA TERRE.

	numéros.
ON l'a d'abord crue plate.	1
Comment on est parvenu à reconnoître qu'elle est ronde.	2
De l'Irrégularité de sa surface.	6
De l'Atmosphère.	8
Comment on détermine la hauteur de l'atmosphère.	9

#### §. II. DU SOLEIL.

De sa forme apparente.	14
De son diamètre apparent.	15
Des taches observées sur sa surface.	17
Comment on a reconnu que sa surface est sphérique.	18
Observation de Bouguer sur l'atmosphère solaire.	21

#### §. III. DE LA LUNE.

De ses phases.	24
Explication des phases.	25
Des éclipses de lune et de soleil.	26

DES MATIÈRES.	345
De la Sphéricité de la lune.	28
Des Montagnes observées sur la surface de la lune , et de leur hauteur.	29
De la Libration de la lune.	31
De la lumière cendrée.	32
De l'Irradiation.	33
La lune n'a pas d'atmosphère sensible , et il n'existe pas de liquide sur sa surface.	34
§. IV. DES ÉTOILES.	36
Des Etoiles fixes.	37
De la Sphère céleste.	38
Des Constellations.	39
De la Division des étoiles par leur grandeur appa- rente.	41
Des Planètes.	43
Des Comètes.	44
De la Voie lactée.	45
Des Nébuleuses.	46
Des Etoiles changeantes.	47
Causes des Variations dans la lumière des étoiles.	48
§. V. MERCURE.	50
De ses Phases.	51
De son Diamètre apparent.	52
§. VI. DE VÉNUS.	54
De ses Phases.	55
Des Montagnes observées sur sa surface.	56
De son Diamètre apparent.	57
§. VII. DE MARS.	
De ses Phases.	59

De ses Taches.	60
De son Diamètre apparent.	61

## §. VIII. DES ASTÉROÏDES.

De Cérès.	63
De Pallas.	<i>ibid.</i>
De Junon.	<i>ibid.</i>
De Vesta.	<i>ibid.</i>

## §. IX. DE JUPITER.

De ses bandes et de ses taches.	64
De sa forme elliptique.	65
De ses satellites.	66

## §. X. DE SATURNE.

De son anneau.	71
De l'apparition et de la disparition de l'anneau.	72
De ses satellites.	79

## §. XII. D'URANUS.

De ses satellites.	82
--------------------	----

## §. XII. DES COMÈTES.

De leur forme.	87
De leur queue.	91

## DEUXIÈME LEÇON.

## §. XIII. DU MOUVEMENT DU CIEL.

Des pôles.	94
Les étoiles peuvent être vues le jour.	95
Des mouvemens diurne et sidérale.	97
De l'équateur, du zénith et du nadir.	98
Des méridiens et des parallèles.	<i>ibid.</i>

De l'ascension droite et de la déclinaison.	99
Comment on prend cette ascension et cette déclinaison.	100
§. XIV. DES MOUVEMENS DU SOLEIL.	102
§. XV. DU MOUVEMENT DIURN DU SOLEIL.	103
Du jour astronomique et du jour sidéral.	104
§. XVI. DU MOUVEMENT ANNUEL DU SOLEIL.	105
De l'année sidérale.	<i>ibid.</i>
De l'elliptique céleste.	106
De la sphère terrestre et des pôles.	108
De l'équateur terrestre, des hémisphères.	109
De l'écliptique terrestre	110
De la durée des jours et des nuits.	111
Des équinoxes et des jours équinoxiaux.	114
Des solstices et des jours solsticiaux.	115
Des tropiques.	116
Des cercles polaires.	118
Des zones ou climats.	119
Des saisons et des causes des variations de température.	120
De l'orbite du soleil.	123
De la parallaxe, de la distance du soleil à la terre, de son diamètre et de son volume.	124
Méthode d'Aristarque pour prendre la distance du soleil à la terre.	125
La distance du soleil est réciproque à son diamètre apparent.	127
L'orbite solaire est une ellipse : le centre de la terre est placé à un de ses foyers.	128
De l'apogée et du périée.	<i>ibid.</i>

La vitesse angulaire du soleil est réciproque aux carrés des rayons vecteurs.	129
Les secteurs décrits par les rayons vecteurs sont proportionnels au temps.	130
La variation dans la distance angulaire du soleil est à-peu-près proportionnelle au cosinus de la moyenne distance angulaire de l'astre au point de l'orbite où cette vitesse est plus grande.	131
La vitesse du soleil est plus grande au périhélie qu'à l'apogée.	132
De l'équation du centre.	<i>ibid.</i>
Des mouvemens de l'orbe solaire.	133
Des six inégalités du mouvement du soleil.	133
Le jour astronomique est inégal.	136
Du jour moyen, et comment on le détermine.	137
Du temps moyen et de l'équation du temps.	<i>ibid.</i>
§. XVII. DU MOUVEMENT DE ROTATION DU SOLEIL.	138
§. XVIII. DU MOUVEMENT DE ROTATION DE LA TERRE.	
Son explication par le mouvement diurne des étoiles.	141
Le mouvement de la terre se fait d'occident en orient.	144
De la précession des équinoxes.	148
De la nutation.	149
De la hauteur méridienne.	151
De l'azimuth.	<i>ibid.</i>
De la latitude.	152
De la longitude.	153
§. XIX. DU MOUVEMENT DE LA TERRE AUTOUR DU SOLEIL.	154

L'effet optique qui résulte du mouvement , soit de la terre , soit du soleil , est le même pour le spectateur placé sur la surface de la terre.	155
Le mouvement de la terre est conforme à l'analogie et à la loi par laquelle les petits corps tournent autour des grands.	156
De l'aberration.	157
De la vitesse de la lumière , découverte par Roëmer.	159
Des effet d'optique résultans de la vitesse de la lumière.	160
L'aberration prouve le mouvement de la terre autour du soleil.	164
Du mouvement géocentrique.	165

## APPENDICE A LA SECONDE LEÇON.

§. XX. DES APPARENCES DUES AU MOUVEMENT DE LA TERRE.	166
Les corps ont un mouvement apparent d'autant plus lent, qu'ils sont plus éloignés du spectateur.	167
Tous les corps ont dans le ciel deux mouvemens apparens.	169
Preuve de la distance infinie des étoiles.	173
Différence entre le mouvement apparent des étoiles produit par celui de la terre et par l'aberration.	174
Du jour et de la nuit résultans du mouvement de la terre.	175
Du mouvement héliocentrique.	177
Des périhélies et des aphélies.	<i>ibid.</i>
Des saisons et des températures résultantes du mouvement de la terre.	178

Les six inégalités du mouvement de la terre sont les mêmes que celles du soleil.	179
§. XXI. DU TEMPS ET DE SA MESURE.	187
Du jour astronomique et du jour sidéral.	188
De l'année tropique et de l'année sidérale.	189
Des unités pour la mesure du temps.	190
A quelle époque l'ère devrait commencer.	192
Des périodes et des cycles.	195
A quelle époque l'année devrait commencer.	<i>ibid.</i>
A quelle époque le jour devrait commencer.	194
Où devrait être placé le premier méridien terrestre.	195

### TROISIEME LEÇON.

§. XXII. DU MOUVEMENT DIURNE DE LA LUNE.	200
§. XXIII. DU MOUVEMENT PÉRIODIQUE DE LA LUNE.	201
Des syzygies , des conjonctions , des oppositions et de la révolution synodique.	202
Méthode pour prendre la distance de la lune à la terre.	204
Du diamètre de la lune et de son volume.	205
L'orbe de la lune est une ellipse. Le centre de la terre est placé à un de ses foyers.	206
De l'inclinaison de l'orbe lunaire.	207
Des inégalités dans la vitesse du mouvement de la lune.	210
Du mouvement de l'orbe lunaire.	212
Des nœuds ascendants et descendans.	214
Des inégalités dans la courbure de l'orbe de la lune.	216

DES MATIÈRES.	351
De l'érection.	217
De la variation.	218
De l'équation annuelé.	219
§. XXIV. DU MOUVEMENT DE ROTATION DE LA LUNE.	220
Causes apparentes et réelles de la libration de la lune.	221
Des causes apparentes de cette libration.	222
De la cause réelle.	225
§. XXV. DES ÉCLIPSES DE SOLEIL ET DE LUNE.	227
Des éclipses totales, partielles et annulaires.	229
Dimensions du cône d'ombre formé derrière la terre, et dont la tranche traversée par la lune est le $\frac{11}{21}$ du diamètre de la lune.	230
Limites des positions de la lune sur son orbe, dans lesquelles il peut y avoir éclipse.	231
Détermination des époque où les éclipses doivent avoir lieu.	232
Tracé graphique de l'éclipse du soleil du 10 fructidor an 10.	133
Indication des éclipses, par le rapport entre les mois et les années lunaires.	234
Du nombre d'or.	<i>ibid.</i>

#### QUATRIÈME LEÇON.

§. XXVI. DU MOUVEMENT APPARENT DE MERCURE.	236
De la durée de ce mouvement.	238
§. XXVII. DU MOUVEMENT APPARENT DE VÉNUS.	140
De la durée de ce mouvement.	242

§. XXVIII. DES MOUVEMENS RÉELS DE VÉNUS.	245
De son mouvement de rotation.	246
De son mouvement autour du soleil.	247
Variation dans l'intensité de la lumière de Vénus.	248
Mouvement de Vénus déduit de ses phases.	249
Des conjonctions supérieures et inférieures de Vénus.	250
De la parallaxe de Vénus : manière de l'obtenir.	251
De la distance de Vénus, de son diamètre, de son volume.	255
En supposant la terre en repos, Vénus décrit dans le ciel une épicycloïde.	257
La terre étant en mouvement, Vénus décrit dans le ciel une ellipse, à l'un des foyers de laquelle le centre du soleil est placé.	258
Durée de la révolution sidérale de Vénus.	261
Des variations dans le mouvement de cette planète autour du soleil.	263
§. XXIX. DU MOUVEMENT RÉEL DE MERCURE.	269
De son mouvement de rotation conclu par analogie.	<i>ibid.</i>
En supposant la terre en repos, Mercure décrit dans le ciel une épicycloïde.	270
Le mouvement héliocentrique de Mercure se fait dans un orbe elliptique; le centre du soleil est à un des foyers.	271
De la parallaxe de Mercure. De la distance et de l'orbe de cette planète.	272
Des inégalités du mouvement de Mercure.	273
§. XXX. DES MOUVEMENS APPARENS DE MARS.	276
Durée de révolution apparente.	279

DES MATIÈRES.	353
§. XXXI. DES MOUVEMENS DE CÉRÈS	280
§. XXXII. DES MOUVEMENS APPARENS DE JUPITER.	281
§. XXXIII. DES MOUVEMENS APPARENS DE SATURNE ET D'URANUS.	283
§. XXXIV. DES MOUVEMENS RÉELS DE MARS, CÉRÈS, JUPITER, SATURNE ET URANUS.	287
Ces planètes se meuvent dans des ellipses.	288
§. XXXV. DE LA DISTANCE DE MARS A LA TERRE.	290
Détermination de la loi du mouvement de Mars autour du soleil.	<i>ibid.</i>
La loi de ce mouvement étant connue, on en dé- duit sa distance au soleil.	291
Du diamètre et du volume de Mars.	<i>ibid.</i>
§. XXXVI. DE LA DISTANCE DE JUPITER A LA TERRE, ET AU SOLEIL.	292
De la durée des révolutions des satellites de Ju- piter.	293
Des distances des satellites de Jupiter, à cette pla- nète.	294
Détermination de la distance de Jupiter, la loi du mouvement de ses satellites étant connue.	295
§. XXXVII. DE LA DISTANCE DE SATURNE A LA TERRE.	
De la durée des révolutions sidérales de ses satel- lites et de leurs distances.	296
Détermination de la distance de Saturne au soleil et à la terre, d'après l'observation de son anneau.	297
Du diamètre et du volume de cette planète.	298

## §. XXXVIII. DE LA DISTANCE D'URANUS ET DE CÉRÈS

A LA TERRE.

De la durée des révolutions sidérales des satellites d'Uranus et de leurs distances.	300
Détermination des distances d'Uranus et de Cérés d'après la loi de leur mouvement.	301
De leur diamètre et de leur volume.	<i>Ibid.</i>

## §. XXXIX. DES ORBES DES PLANÈTES. 302

Première loi de Kepler : Toutes les planètes se meu- vent autour du soleil dans un orbe elliptique , dont le centre de cet astre occupe un des foyers. <i>Ibid.</i>	
Des demi-grands axes et des excentricités des el- lipses des planètes ; des durées de leur révolution sidérale et de leur longitude moyenne à la fin de 1749.	302
Seconde loi de Kepler : Les aires décrites autour du soleil par les rayons vecteurs des planètes , et autour des planètes par les rayons vecteurs de leurs satellites , sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.	305
Des variations du grand axe de chaque ellipse et de la longitude du périhélie au commencement de 1750.	306
Des variations dans l'excentricité des ellipses.	307
Des variations séculaires dans le mouvement des nœuds , et de la longitude du nœud ascendant au commencement de 1750.	308
De la variation séculaire dans l'inclinaison des orbés.	309
§. XL. DU MOUVEMENT DE ROTATION DES PLANÈTES ET DES SATELLITES.	310

Du mouvement de rotation des satellites de Jupiter.	311
Du mouvement de rotation de l'anneau de Saturne.	312

## APPENDICE A LA QUATRIÈME LEÇON.

## §. XLI. DES COMÈTES, DE LEURS MOUVEMENTS APPARENS ET RÉELS, DE LEURS ORBES, ET DES LOIS DE LEURS MOUVEMENTS.

Des mouvemens apparens et réels des comètes.	314
Les orbés des comètes sont elliptiques.	316
La portion de l'orbé que les planètes parcourent pendant leur apparition est sensiblement parabolique.	317
Détermination de la parabole parcourues par les comètes.	319
Méthode graphique pour déterminer cette parabole.	320
Méthode analytique.	321
Méthode proposée par Laplace.	322
Mouvement elliptique des comètes vérifié.	325
Comment on reconnoît la réapparition des comètes.	325

## CINQUIÈME LEÇON.

## §. XLII. DE LA FIGURE DE LA TERRE ET DES DIFFÉRENTES MÉTHODES EMPLOYÉES POUR LA DÉTERMINER.

Probabilité que la terre est un ellipsoïde.	328
Détermination de la forme de la terre.	330
Du pendule simple.	331
Du pendule composé.	332

Usages du pendule pour reconnoître la pesanteur.	333
L'accroissement de la pesanteur aux pôles est $\frac{1}{179}$ de la pesanteur à l'équateur.	335
On ne peut faire usage du pendule ni de la pesanteur pour déterminer la forme de la terre.	336
Des verticales à la surface de la terre.	338
Comment on mesure les degrés du méridien.	339
Détermination de la forme de la terre, par la mesure des degrés du méridien.	340
Manière de prendre la latitude terrestre.	341
Des différentes manières de prendre la longitude terrestre.	345
Avec une montre marine.	346
Par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter.	347
Par le mouvement de la lune.	348
De la mesure des degrés du méridien en France.	350
De la mesure des degrés du méridien aux pôles, à l'équateur et en divers lieux.	351
Manière de déterminer le rapport entre les deux axes d'une ellipse, par la mesure des degrés du méridien.	353
Le rapport des deux axes de l'ellipsoïde de révolution de la terre varie en comparant entr'eux divers degrés du méridien; donc la terre n'est pas un ellipsoïde de révolution.	356
Des méridiens célestes.	357
Les méridiens terrestres sont des courbes à double courbure.	358
On ne peut déterminer la figure de la terre qu'en	

multipliant les mesures des degrés des méridiens.	359
Opérations de Delambre et de Méchain.	360
L'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur en France est de $\frac{1}{170}$ .	361
De l'utilité de la continuation des opérations relatives aux mesures des méridiens.	362

## APPENDICE DE LA QUATRIÈME LEÇON.

## §. XLIII. DES FORCÉS CENTRALES.

De la force centrifuge.	364
De la force centripète.	365
Quelques résultats de ces deux forces.	367
Equilibre de ces deux forces pour qu'un corps se meuve dans un cercle.	368
Les forces centrifuge et centripète sont égales au carré de la vitesse, divisé par le rayon du cercle.	369
Rapport de la force centrifuge à la pesanteur, sur la surface de la terre.	370
La force centrifuge due au mouvement de la terre est proportionnelle aux rayons des parallèles.	371
La proportionnalité des aires aux temps démontre que la force accélératrice est dirigée constamment vers l'origine du rayon vecteur.	373
La force centripète est comme la partie du rayon interceptée entre la courbe et la tangente, divisée par le carré du secteur.	375
DE LA PESANTEUR.	377
§. XLIV. DE LA PESANTEUR ABSOLUE.	378

Expériences de la Condaminé, Maskeline et Cavendish. *Ibid.*

Expériences de Newton et de Desaglier sur la chute des corps.	379
Expériences de Gallilée,	380
Lorsque les corps tombent dans des milieux, la résistance qu'ils éprouvent est proportionnelle à la densité, aux carrés des diamètres des corps et aux carrés de leur vitesse.	381
Conséquence de ces rapports.	582
Expériences de Gallilée sur la chute des corps, desquelles il résulte que les espaces parcourus sont comme les carrés des temps.	383
Machine d'Athood.	384
Démonstration de la loi de Gallilée.	385
Toutes les cordes d'un cercle qui aboutissent à l'une des extrémités de son diamètre vertical sont parcourues, par suite de la pesanteur, dans le même temps que son diamètre.	389
La courbe d'un projectile lancé dans l'air est une parabole.	390
Un corps parcourt dans le vide, dans la première seconde de sa chute, 3 mètres 66107.	392
Preuve de ce résultat par la longueur du pendule qui bat les secondes.	393
La durée des oscillations d'un pendule peut servir à déterminer la pesanteur.	394
§. XLV. DE LA PESANTEUR RELATIVE.	396
Des poids étalons.	397
Des balances.	398
De la balance romaine.	400
Du peson.	401

§. XLVI. DE LA PESANTEUR SPÉCIFIQUE.	402
Le poids des corps est comparé à celui d'un égal volume d'eau.	404
Comment on prend la pesanteur spécifique des corps.	405
De la pesanteur spécifique des solides non solubles dans l'eau.	406
Première méthode : par le moyen d'un vase dont on connoît le poids.	407
Méthode d'Archimède : par immersion.	408
Pesanteur spécifique des sels. Méthodes de Mussenbroech et d'Hassenfratz.	409
De la pesanteur spécifique des liquides. Méthode de Homberg.	411
Des aréomètres.	412
De l'aréomètre à poids de Farenheit et Nicholson.	414
Du trébuchet de Ramsden perfectionné.	415
Des aréomètres à tige graduée de Ratz, Baumé, Casbois, Brisson, etc.	416
D'un nouvel aréomètre.	417
Pesanteur spécifique des gaz.	418
§. XLVII. DE LA GRAVITÉ.	420
§. XLVIII. DE LA LOI DE LA GRAVITATION, PAR LA COMPARAISON DE LA CHUTE DES CORPS, SUR LA SURFACE DE LA TERRE.	421
Loi de la gravité déterminée par la vitesse du pendule.	422
Par le mouvement de la lune, comparée à la vitesse des corps tombant sur la surface de la terre.	423

§. XLIX. DE LA LOI DE LA GRAVITATION ; PAR LA COMPARAISON DE LA VITESSE DES PLANÈTES ET DES SATELLITES AUTOUR DE LEURS CENTRES DE MOUVEMENT.	427
De la loi de la gravitation , par la vitesse des planètes ; comparée à leurs distances.	428
Troisième loi de Kepler : les carrés des temps des révolutions des planètes sont comme les cubes des grands axes de leurs orbites.	429
Loi de la gravitation déduite de ce rapport.	430
Loi de la gravitation déduite du mouvement dans des ellipses.	451
§. L. DE LA MASSE DES PLANÈTES , DE LEURS DENSITÉS , ET DE LA PESANTEUR A LEURS SURFACES.	435
Détermination de la masse des planètes , par la vitesse d'un astre autour du soleil , comparée à la vitesse d'un satellite autour de la planète dont on veut connoître la masse.	436
Détermination de la masse des planètes par la vitesse de leur mouvement , comparée à la chute des corps à leur surface.	438
Détermination de la masse des planètes par les changemens séculaires que l'action des corps produit dans le système solaire.	439
Détermination de la masse des planètes par la comparaison de leur volume.	440
De la pesanteur des planètes.	441
De la pesanteur à la surface des planètes.	442
§. LI. DES PERTURBATIONS DANS LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES PLANÈTES.	444

	DES MATIÈRES.	361
Des inégalités séculaires et périodiques.		445
Application à Jupiter et à Saturne.		446
Questions que présentent ces inégalités résolues par Laplace.		449
Moyen de comparer les observations anciennes aux modernes.		452
Lois des conjonctions de Jupiter et de Saturne.		453
§. LII. LES PERTURBATIONS DANS LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES COMÈTES.		456
Les masses des comètes sont peu considérables.		458
§. LIII. DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DE LA LUNE.		461
<i>Id.</i> Dans la distance de la lune à la terre, et dans la vitesse du mouvement angulaire dépendant de ces distances.		464
<i>Id.</i> Dans son équation séculaire que l'on a cru être proportionnelle aux carrés du nombre de siècles écoulés.		469
<i>Id.</i> Dans son inclinaison sur l'orbe solaire.		473
<i>Id.</i> Dans le mouvement de ses nœuds, de son pé- rigée et de son apogée.		474
§. LIV. DES PERTURBATIONS DES SATELLITES DE JUPITER.		478
Loi de leurs inégalités déduite de l'observation.	<i>Ibid.</i>	
De l'action du premier satellite sur le second.		480
De l'action du second satellite sur le troisième.		481
Les mouvemens des trois satellites sont réguliers et durables.		485
Ils sont assujettis à des variations séculaires.		486

Les périodes des orbites des satellites ont un mouvement semblable à celui des périhélie des planètes.	487
Inclinaison des orbites des quatre satellites.	488
Les nœuds des orbites ont un mouvement retrograde.	489
Masse des satellites.	490
Rapport des deux axes de Jupiter.	491

## SIXIÈME LEÇON.

§. LV. EXPOSITION DES PHÉNOMÈNES CONNUS SOUS LES NOMS DE FLUX ET REFLUX.	494
Des marées totales.	495
Epoque des diverses marées.	496
Rapport de l'élevation des eaux dans les hautes marées.	497
Variations dans l'heure des marées.	499
§. LVI. EXPLICATION DES PHÉNOMÈNES CONNUS SOUS LES NOMS DE FLUX ET REFLUX.	501.
De l'action du soleil sur les eaux de la mer.	<i>Ibid</i>
De l'action de la lune.	504
De l'action du soleil et de la lune.	505
Variations des marées par la position des astres.	507
Les heures des marées sont réglées par le mouvement de la lune.	508
L'action de la lune est trois fois plus grande que celle du soleil.	509
Masse de la lune déduite de son action, sur les eaux de la mer.	511
Les hauteurs des marées varient : 1°. par le mou-	

vement de la lune et du soleil dans des orbes elliptiques; 2°. par l'inclinaison des deux orbes l'un sur l'autre.	512
Les variations des marées se renouvellent tous les dix-huit ans.	513
Explication de la variation, par le mouvement de trois astres fictifs.	514
§. LVII. DES VARIATIONS OCCASIONNÉES PAR L'ÉTENDUE ET LA PROFONDEUR DE LA MER.	516
§. LVIII. DE LA VARIATION PROVENANT DE LA DIRECTION DES CÔTES.	517
§. LIX. DE LA VARIATION OCCASIONNÉE PAR LA FORME DE LA SURFACE DES MERS.	518
Des heures fondamentales des ports.	522

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

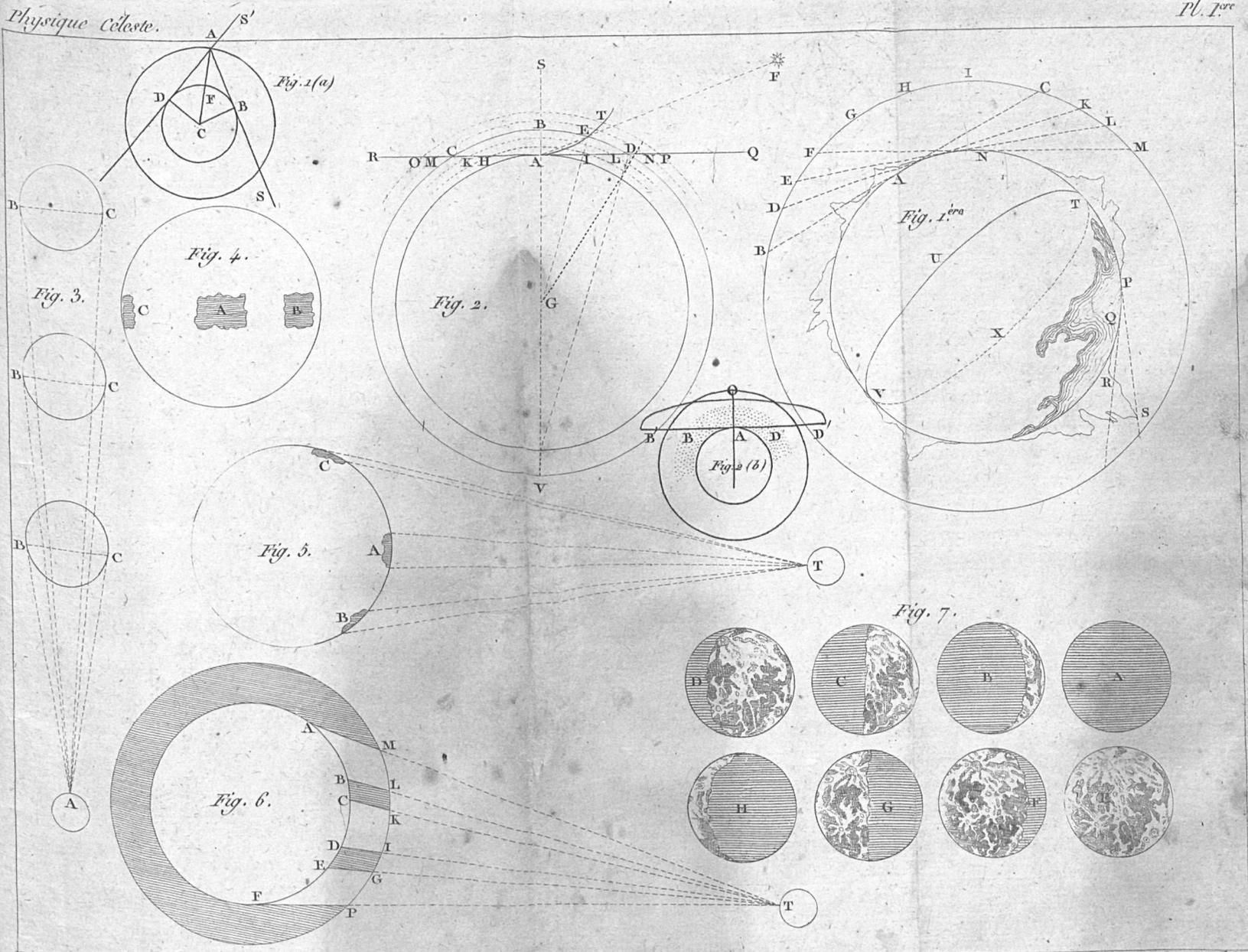


Fig. 8.

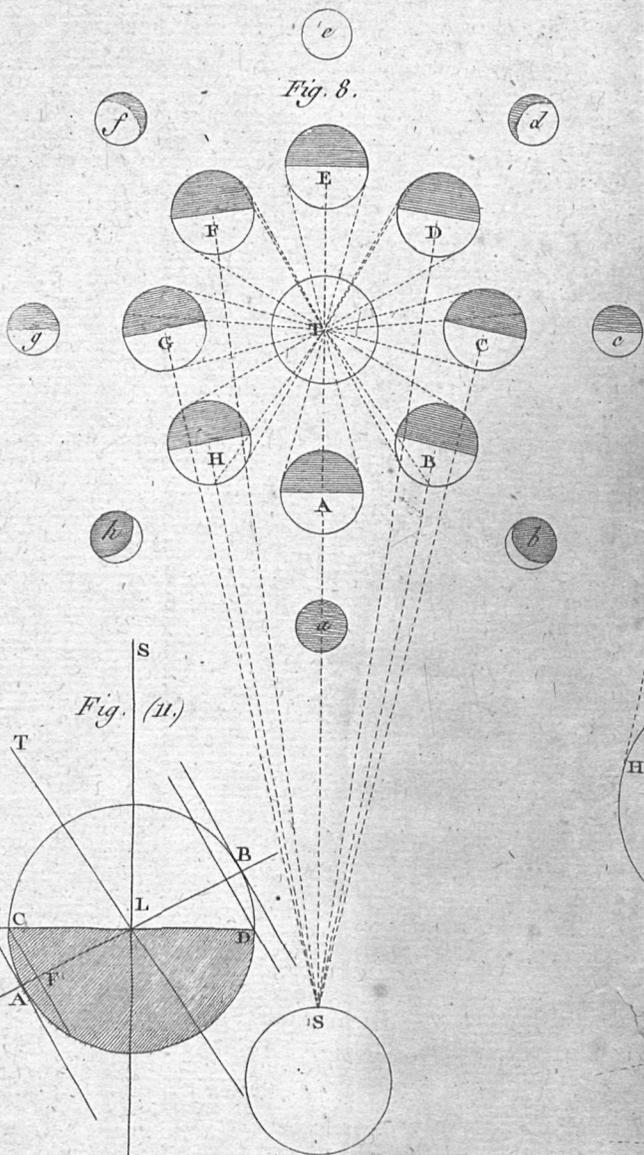


Fig. 9.

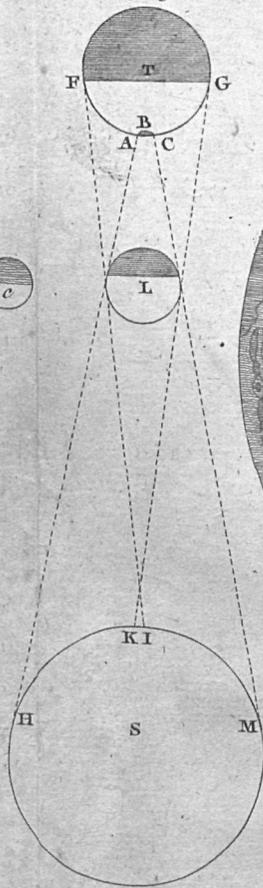


Fig. 11.

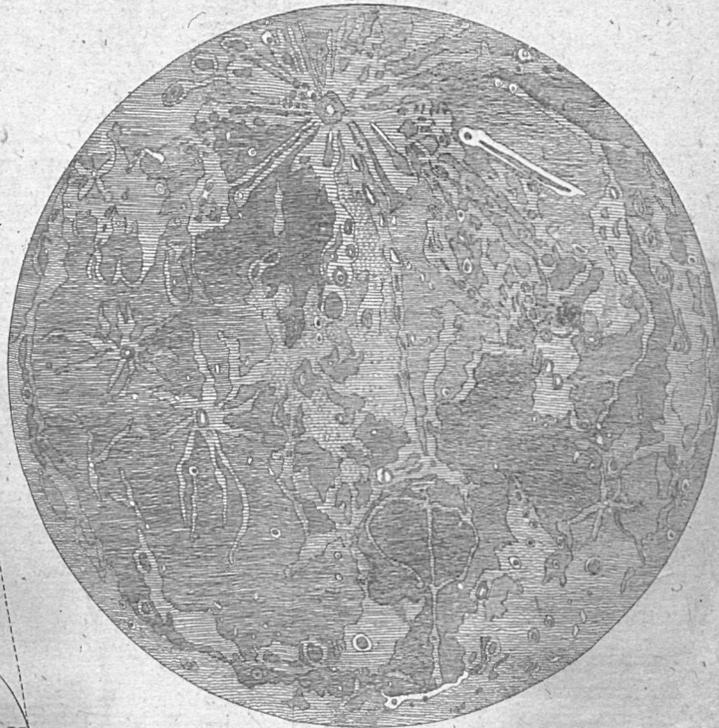


Fig. (11.)

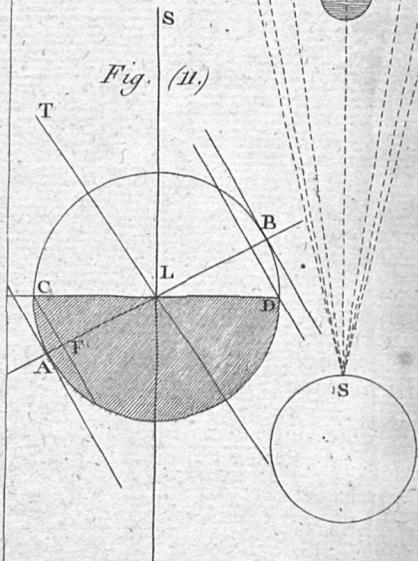
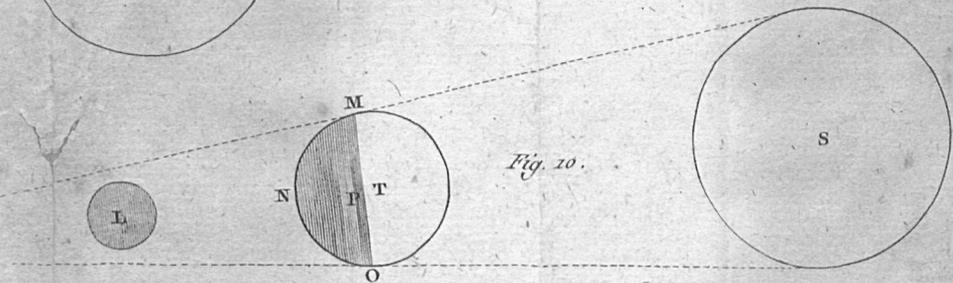


Fig. 10.



Physique Céleste.

Fig. 12.

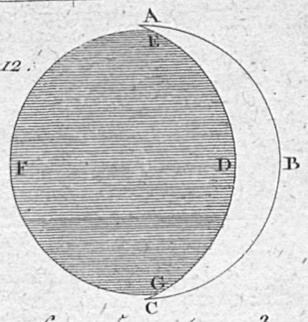


Fig. 16.

Fig. 14.

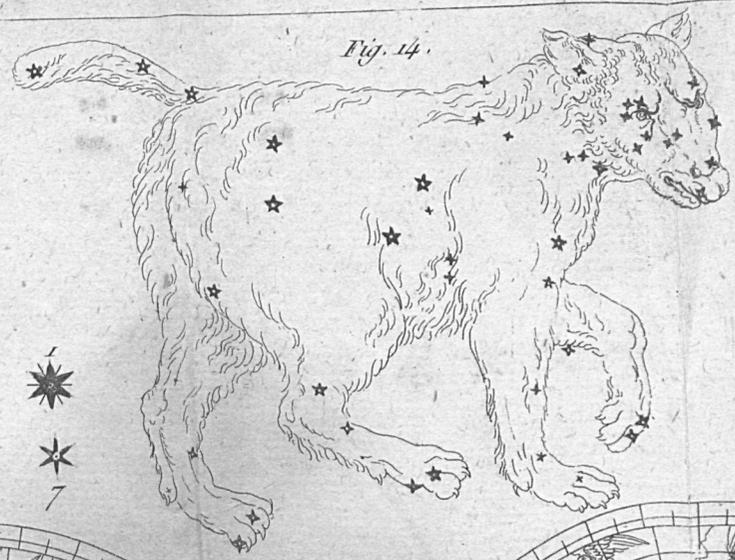


Fig. 13.

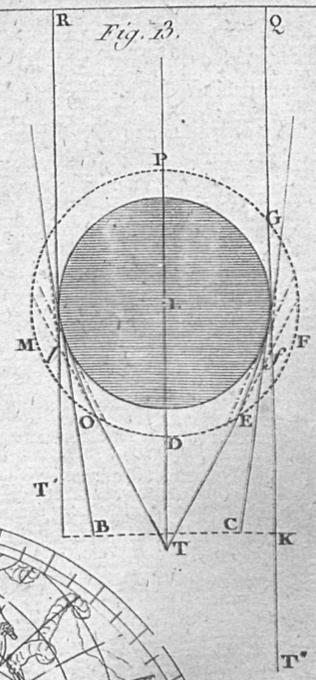


Fig. 15.

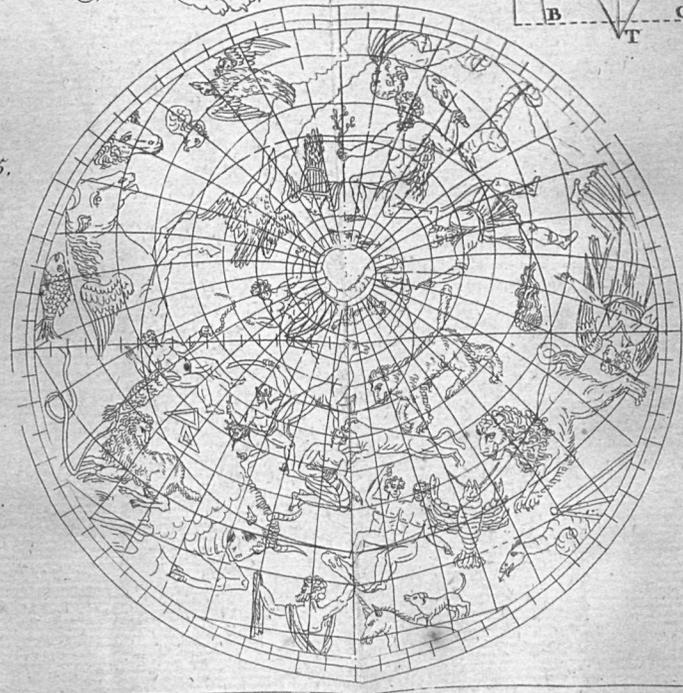
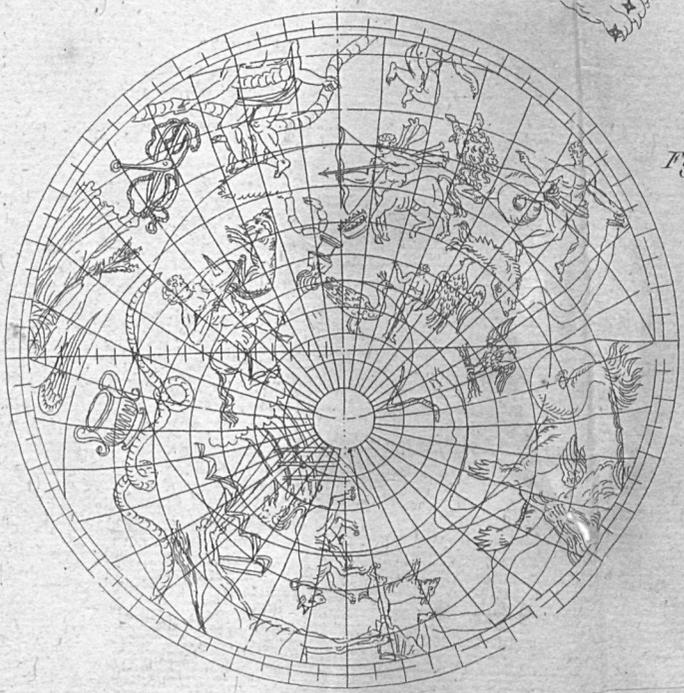


Fig. 17.

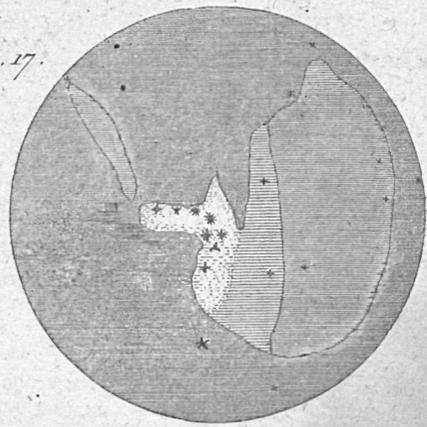


Fig. 18.

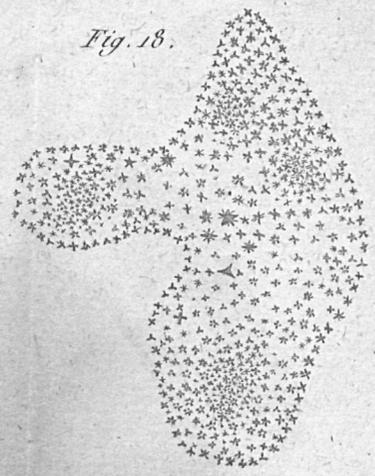


Fig. 19.

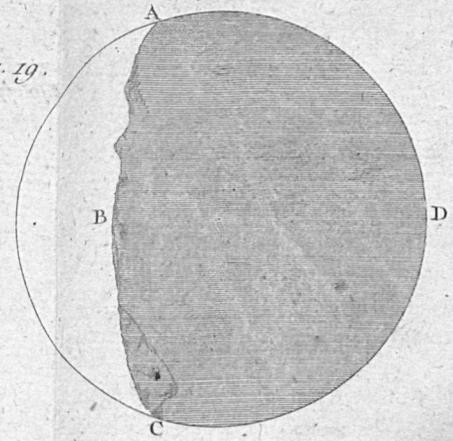


Fig. 18. (a)

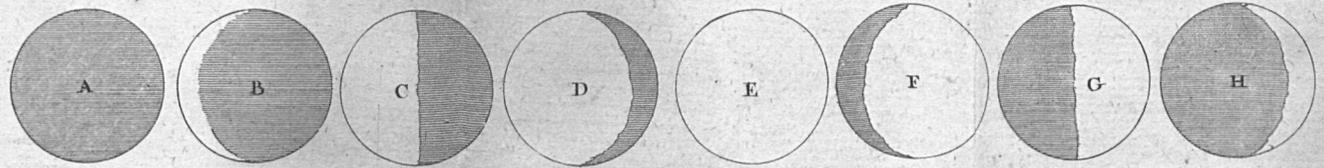


Fig. 20. Mars observé par Maraldi. ♂

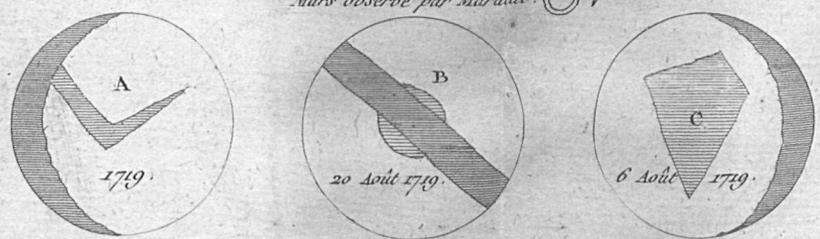


Fig. 21.

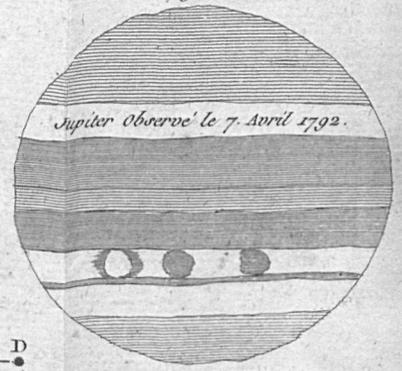


Fig. 22.

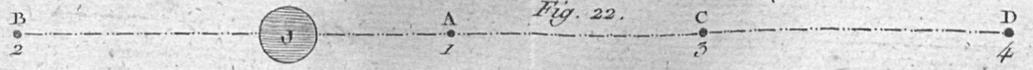


Fig. 23.

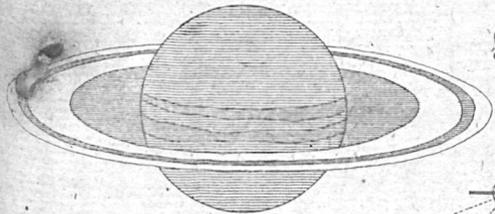


Fig. 24.



Fig. 25.



Saturne observé par Herschel.

Fig. 28.

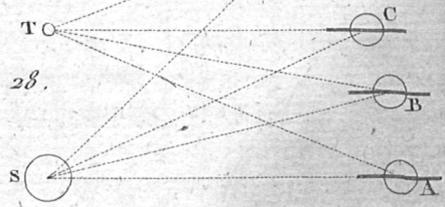


Fig. 27.

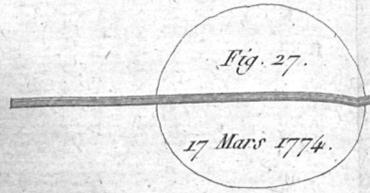


Fig. 26.

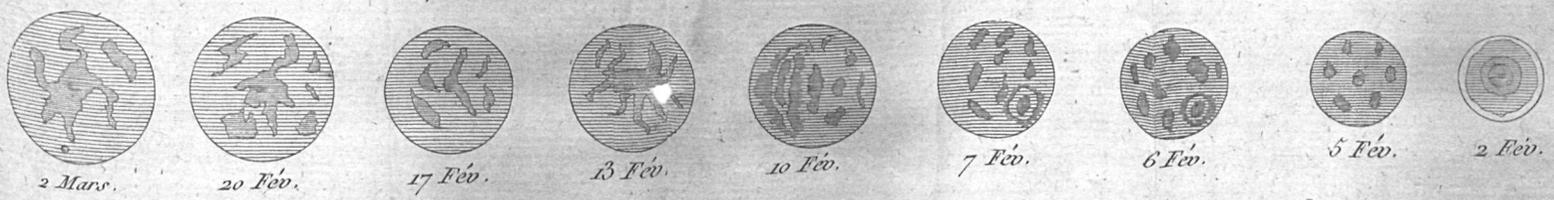


Fig. 30.



Fig. 29.

Fig. 31.



Comète observée en 1661, le

Route apparente de la première Comète de 1784.

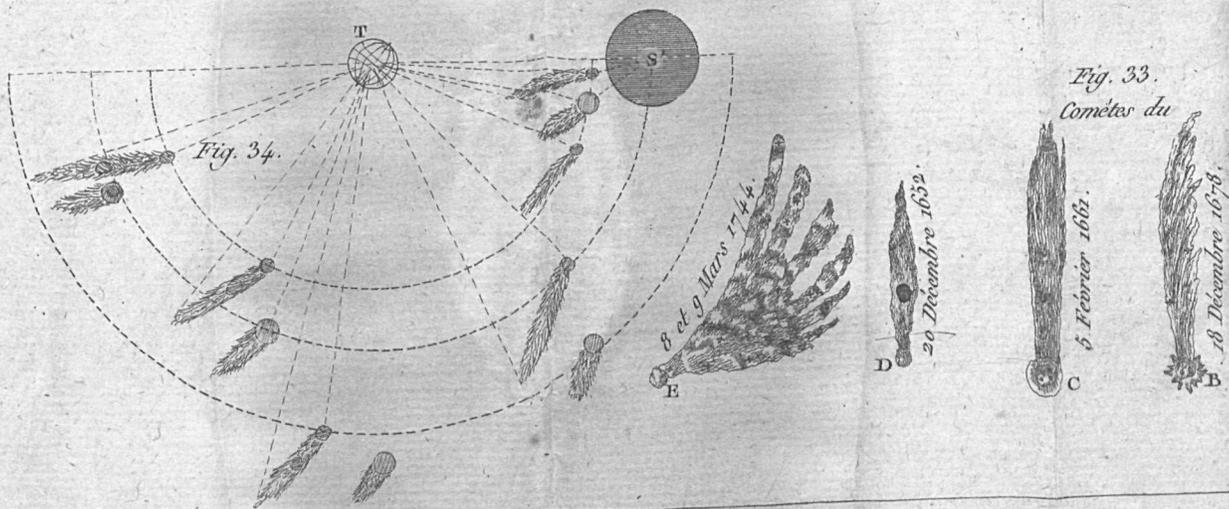
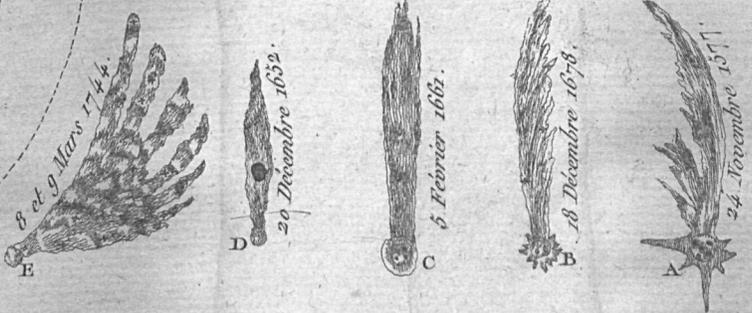


Fig. 33.  
Comètes du



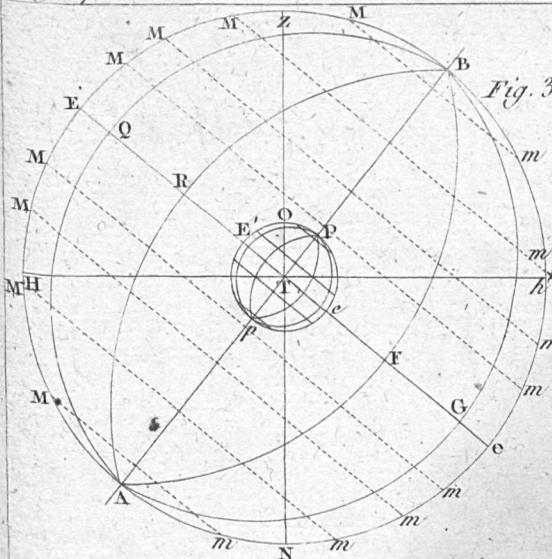


Fig. 35.

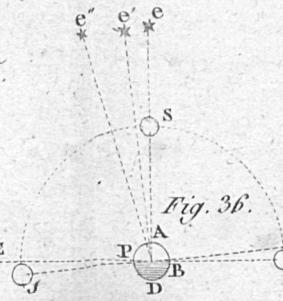


Fig. 36.

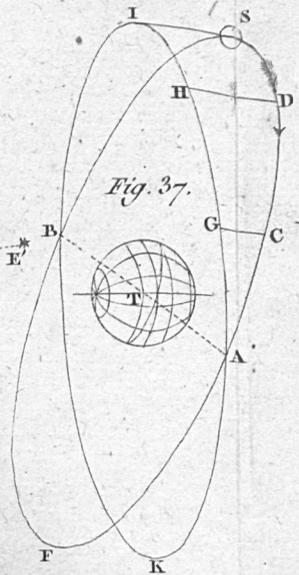


Fig. 37.

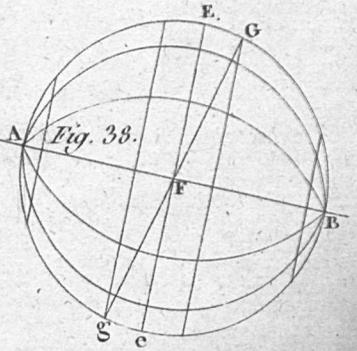


Fig. 38.

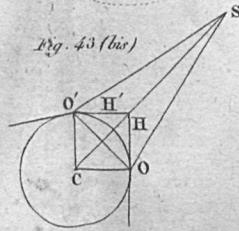


Fig. 43 (bis)

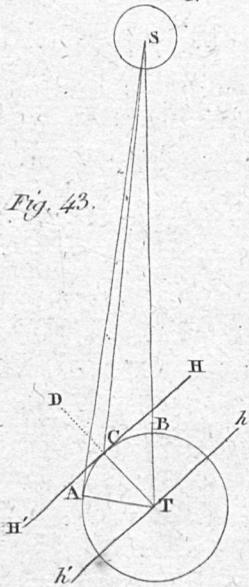


Fig. 43.

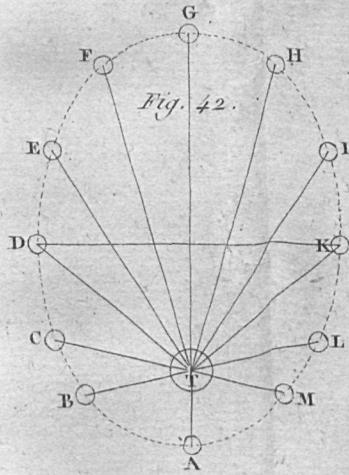


Fig. 42.

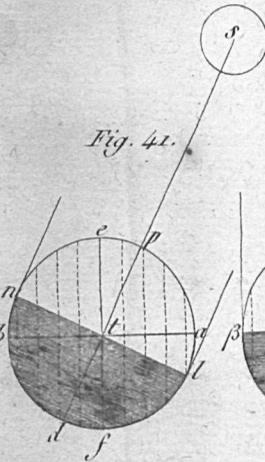


Fig. 41.

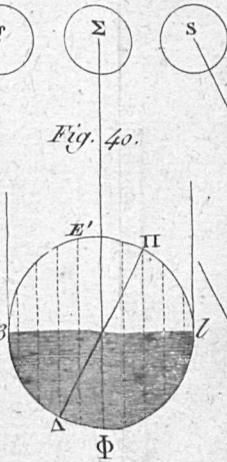


Fig. 40.

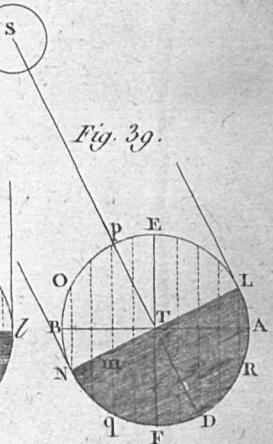
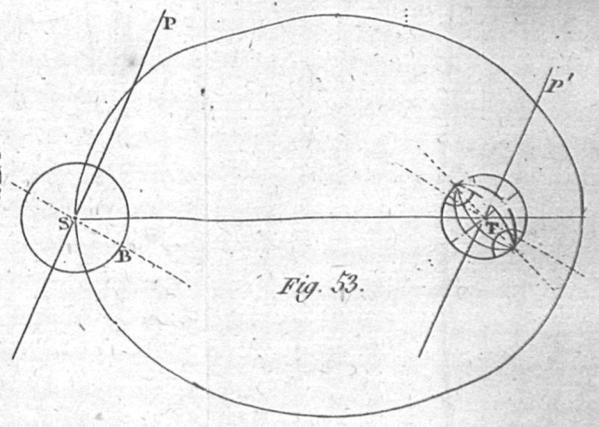
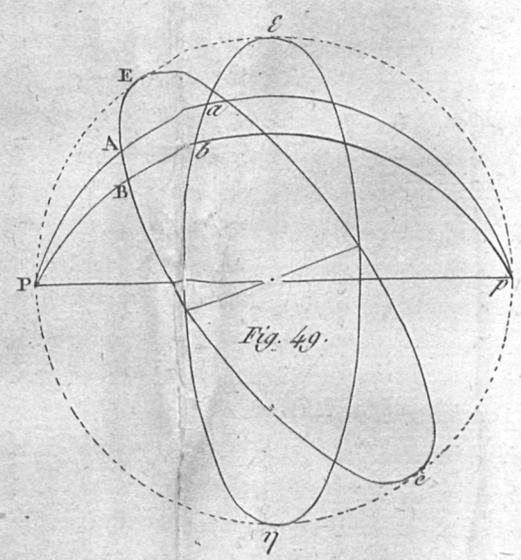
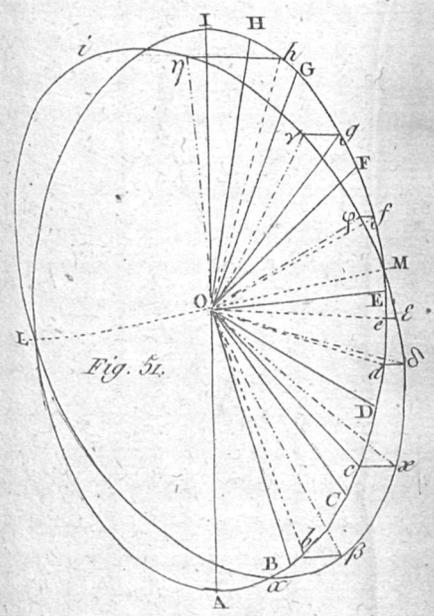
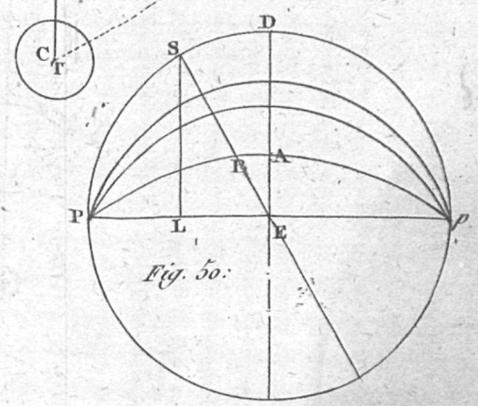
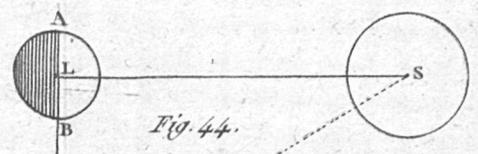
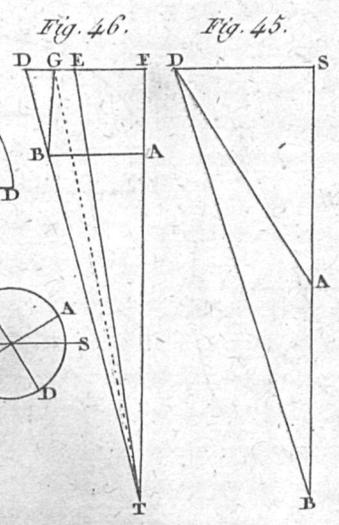
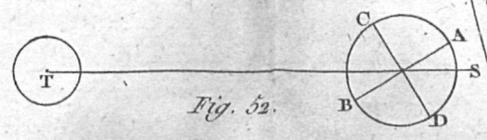
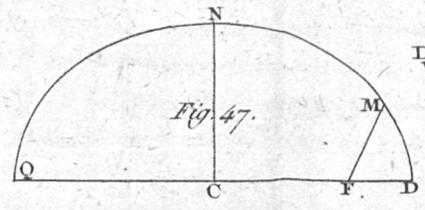
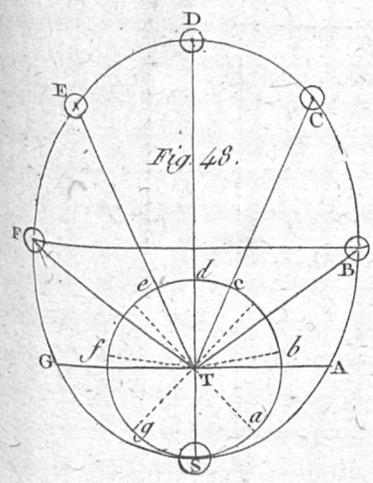
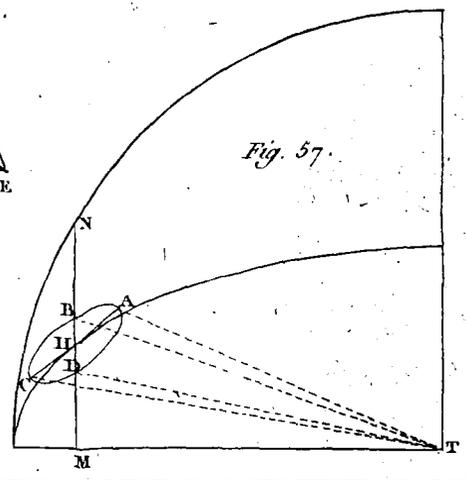
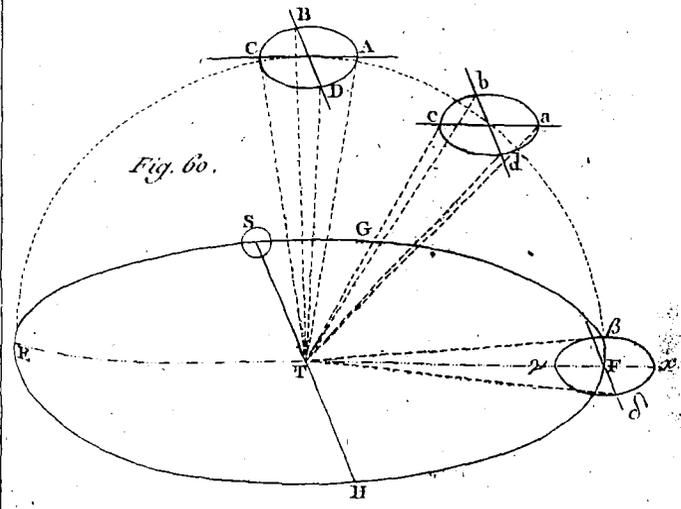
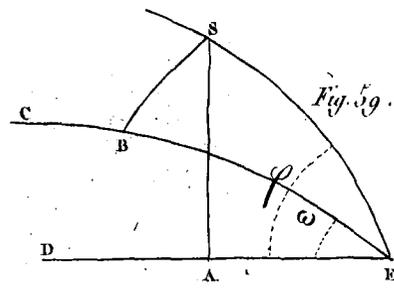
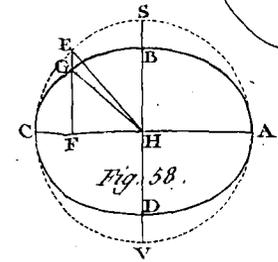
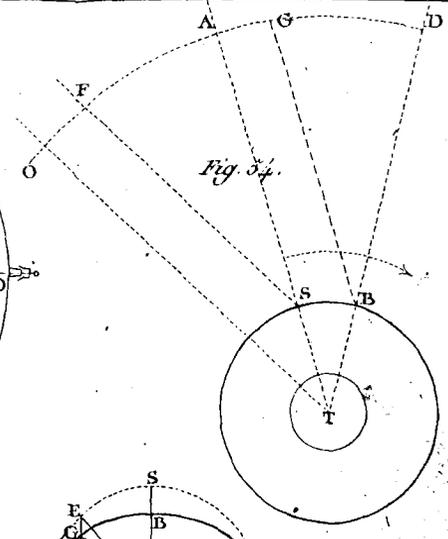
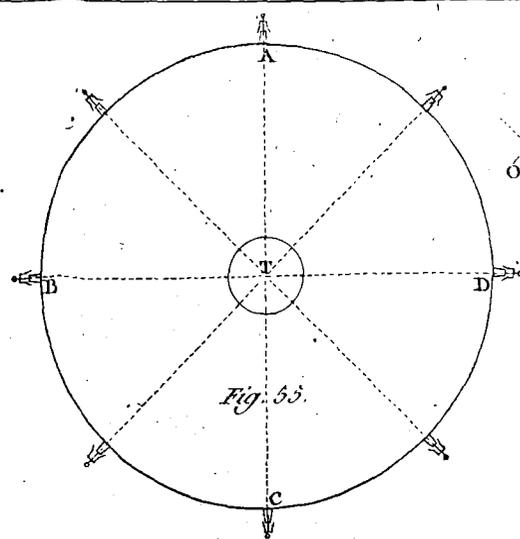
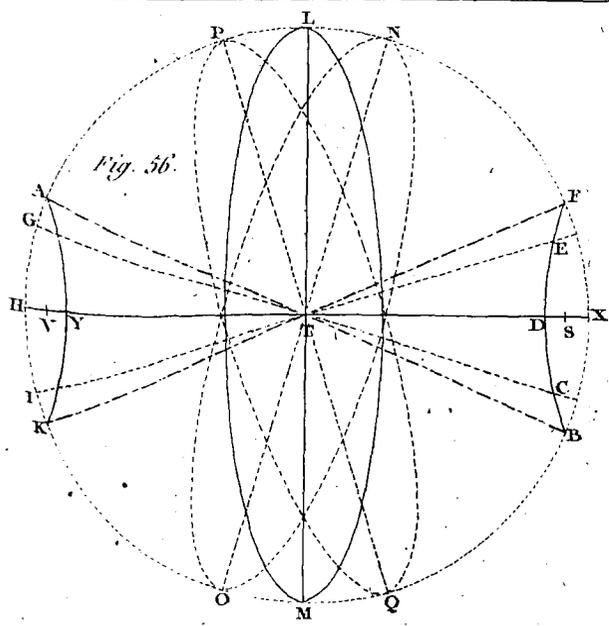


Fig. 39.





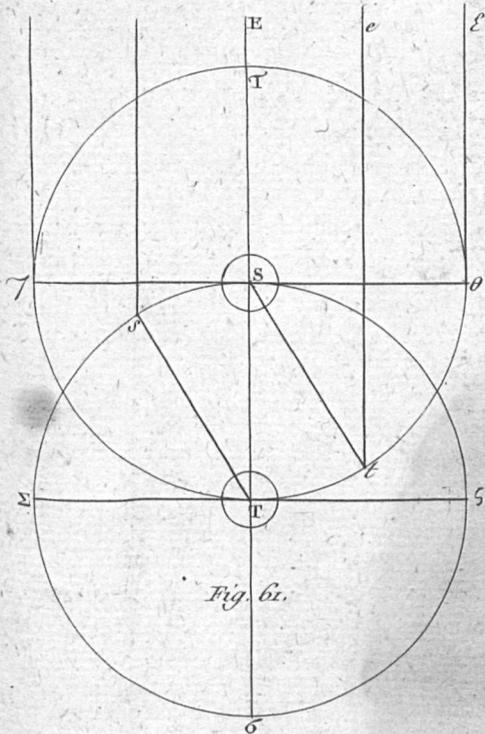


Fig. 61.

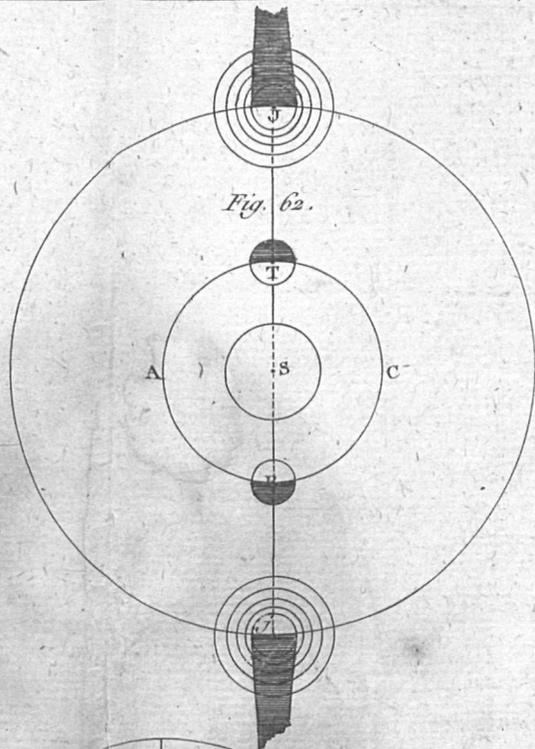


Fig. 62.

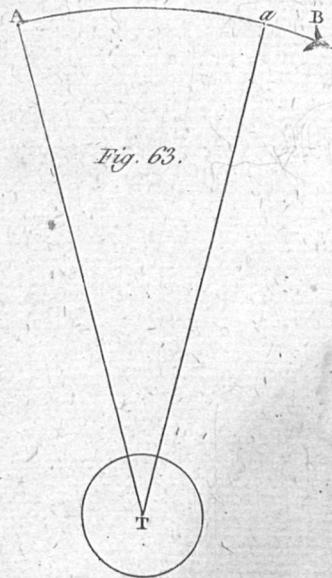


Fig. 63.

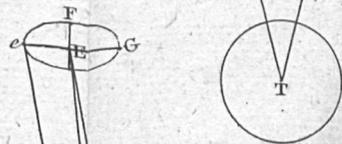


Fig. 64.

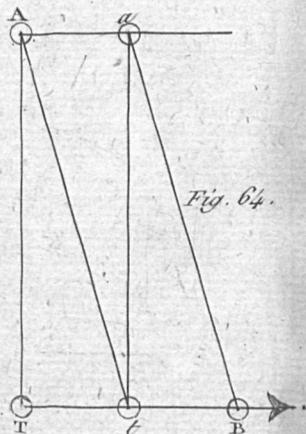


Fig. 65.

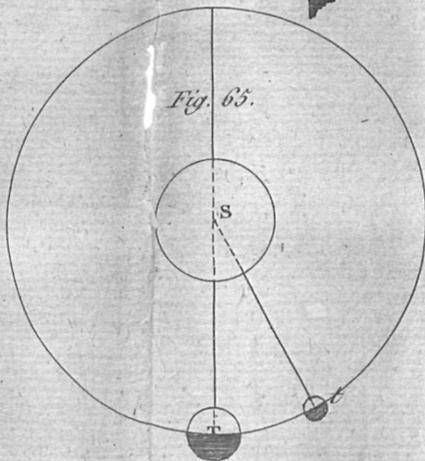
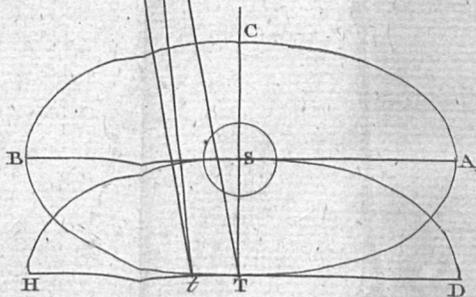


Fig. 66.



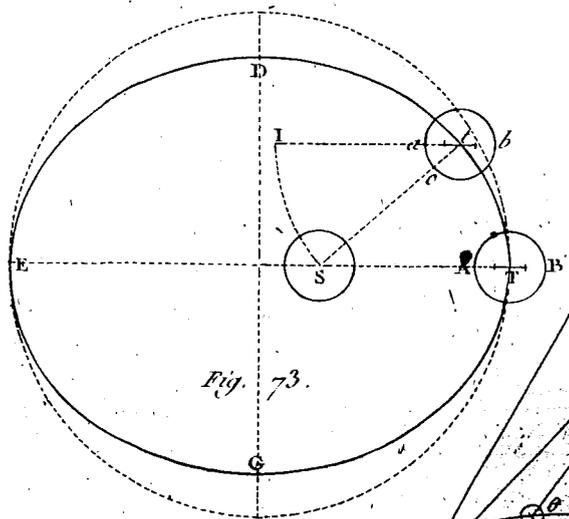


Fig. 73.

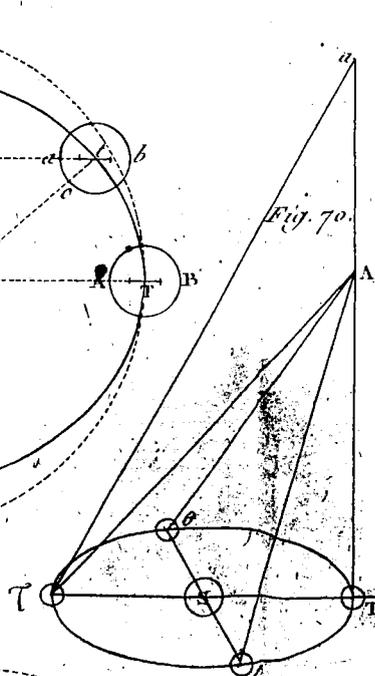


Fig. 70.

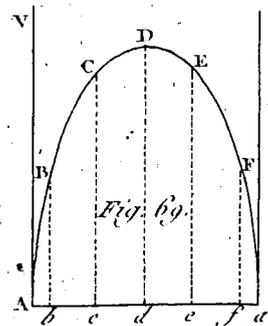


Fig. 69.

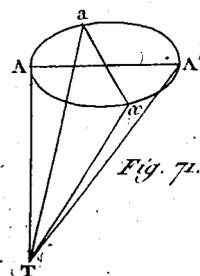


Fig. 71.

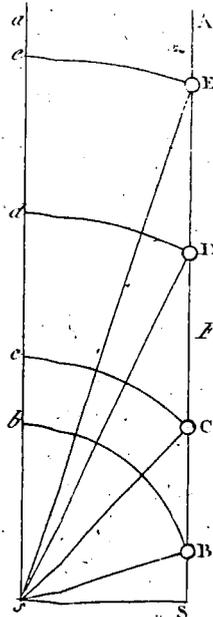


Fig. 68.

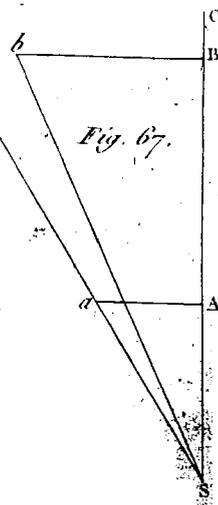


Fig. 67.

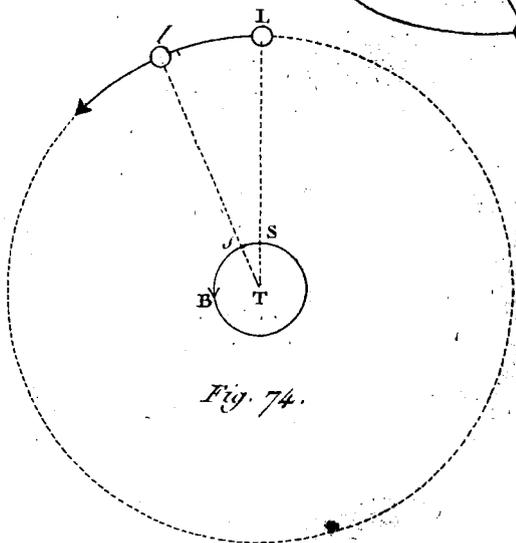


Fig. 74.

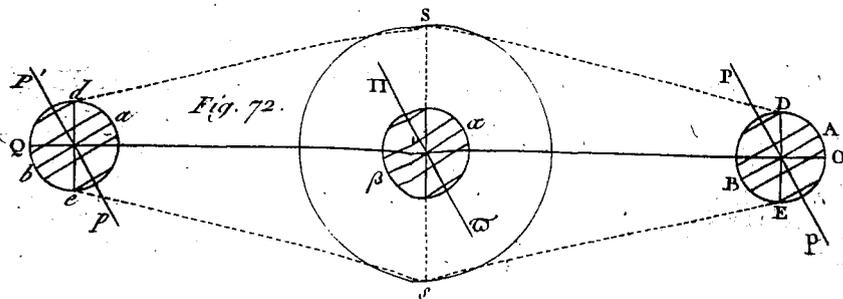
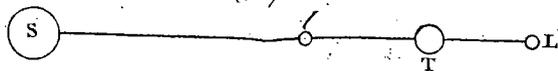
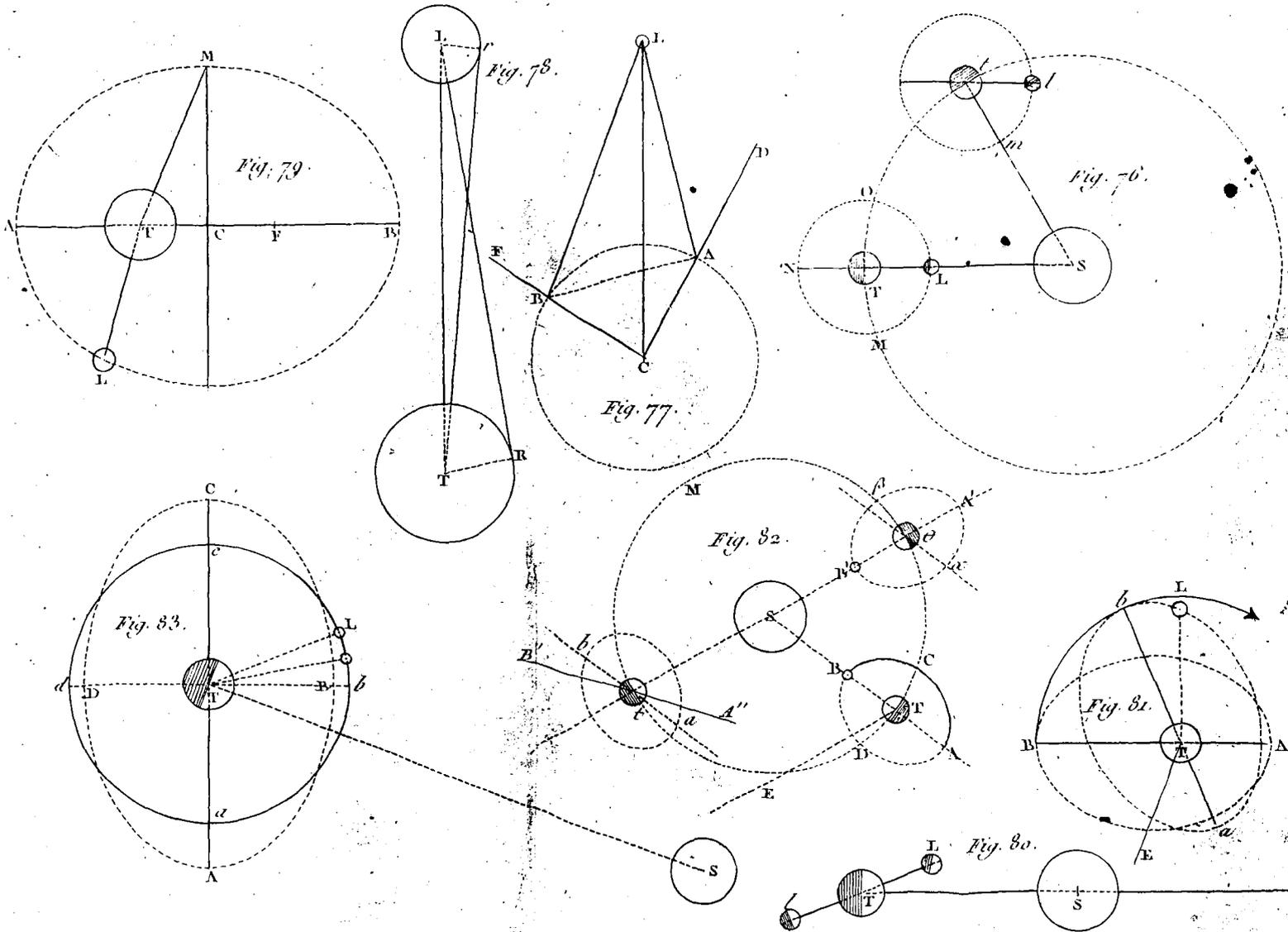


Fig. 72.

Fig. 75.





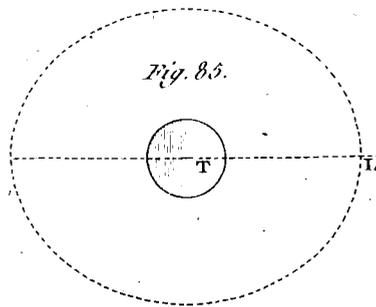


Fig. 85.

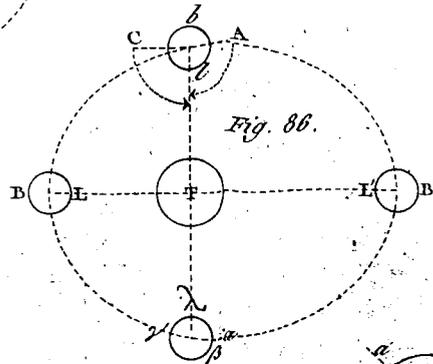


Fig. 86.

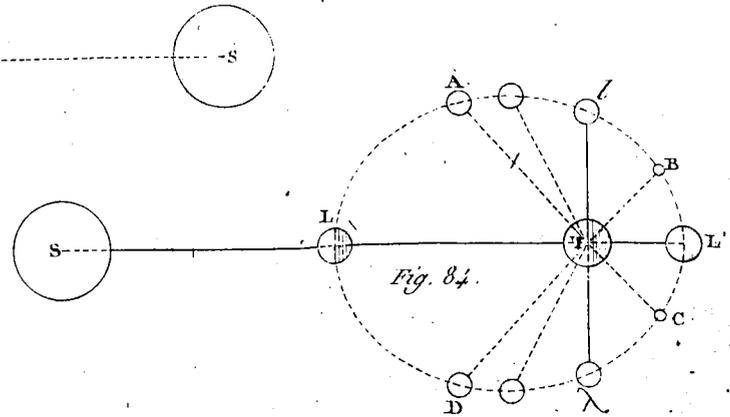


Fig. 84.

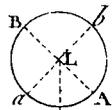


Fig. 87.

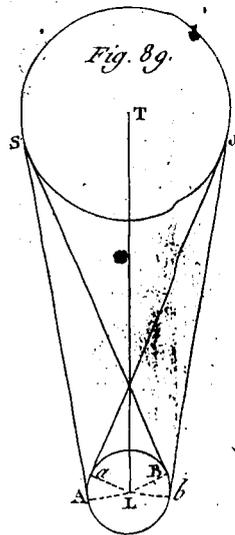
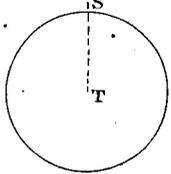


Fig. 89.

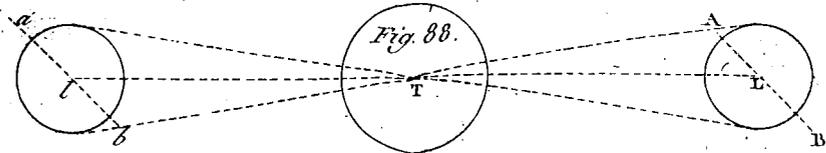


Fig. 88.

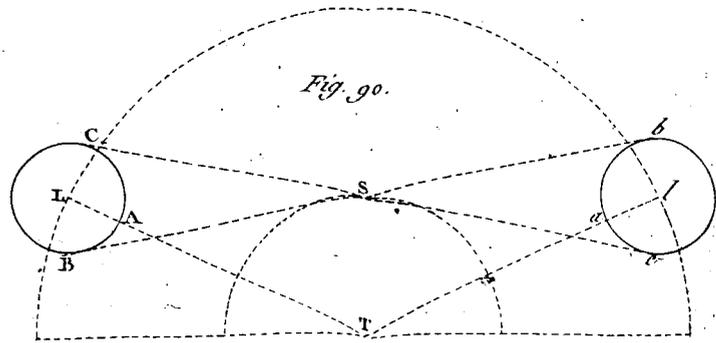


Fig. 90.

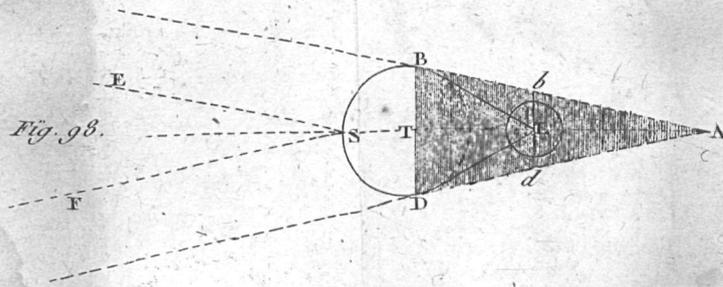
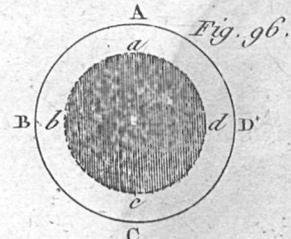
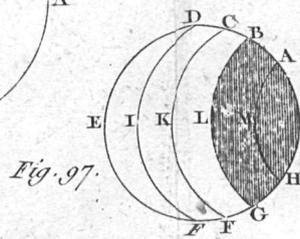
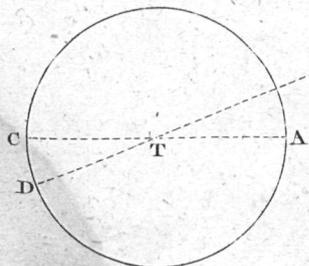
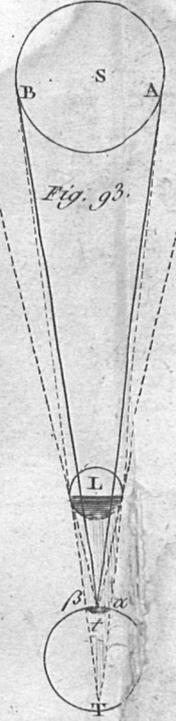
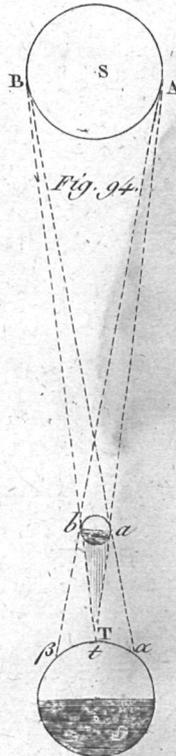
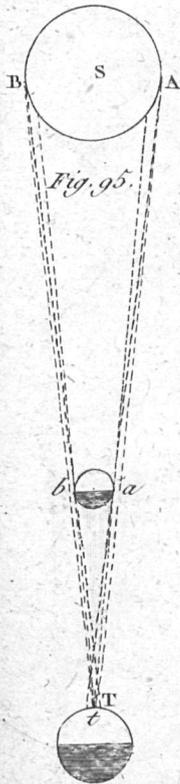
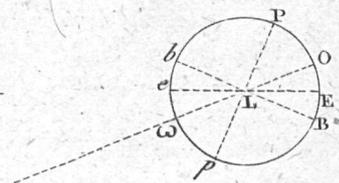
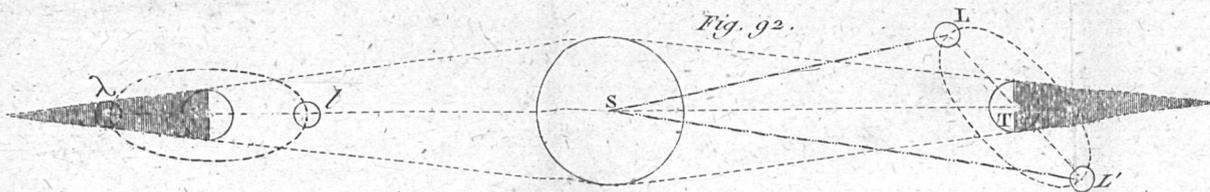


Fig. 96. (bis.)

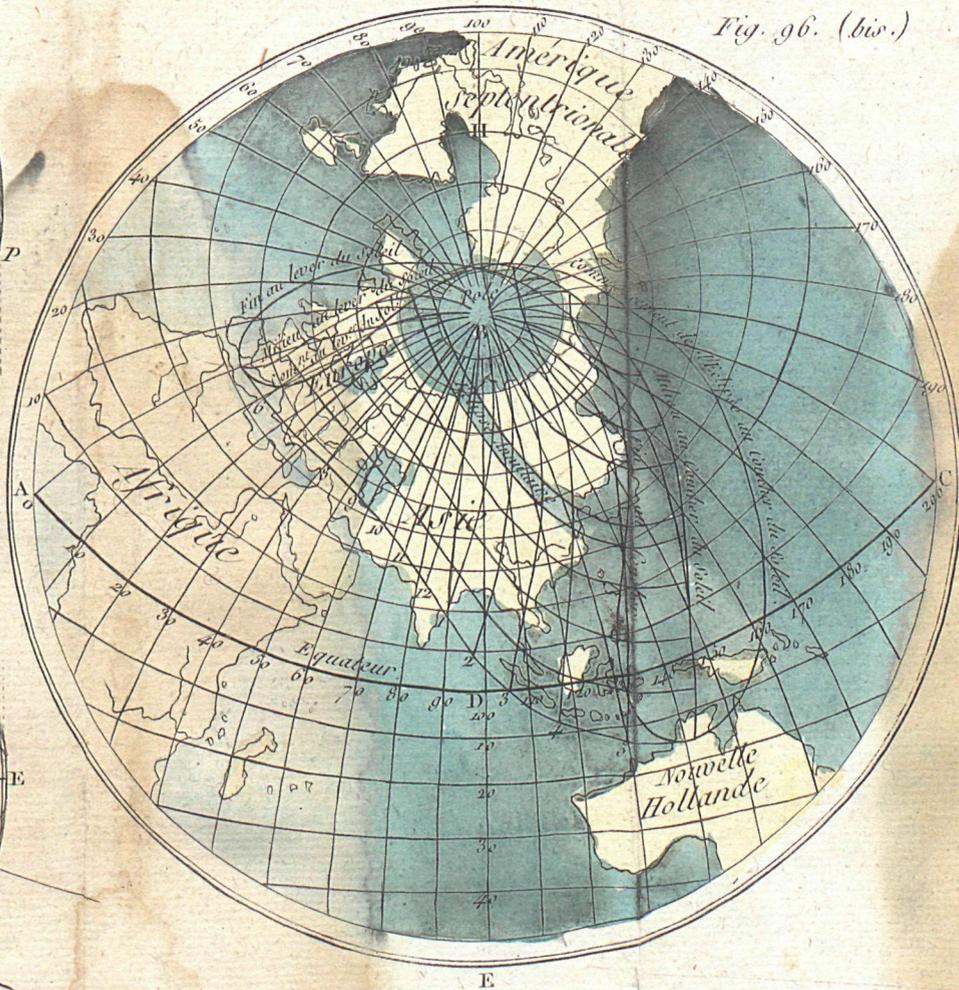
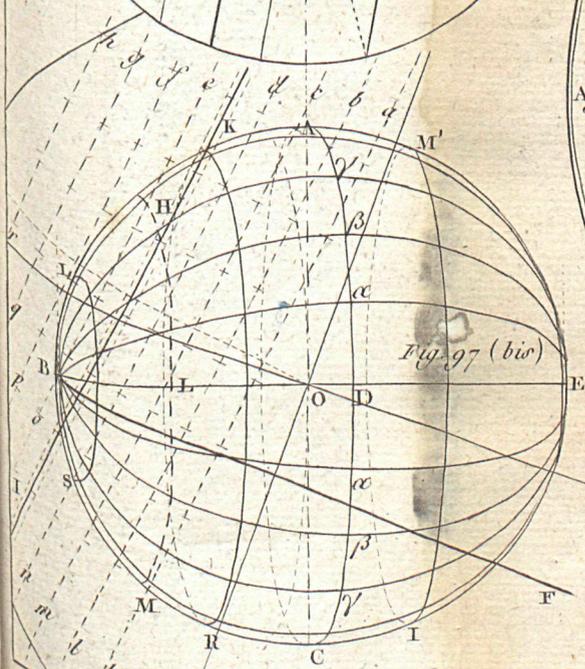
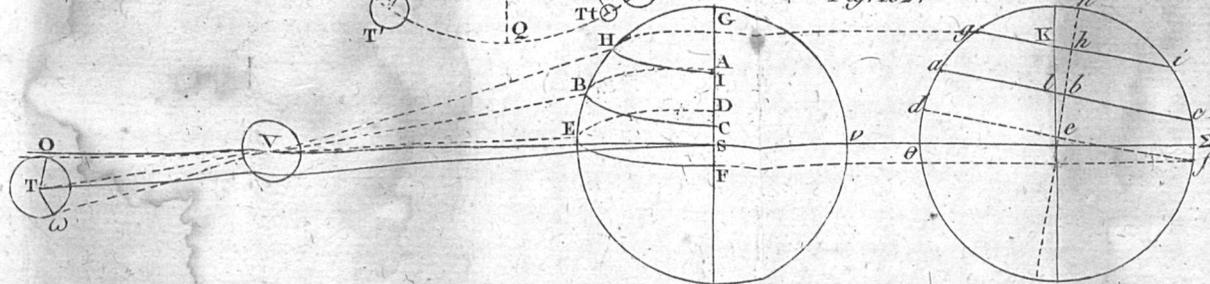
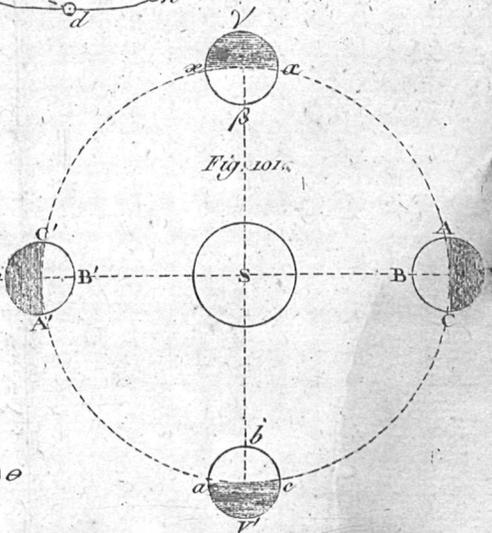
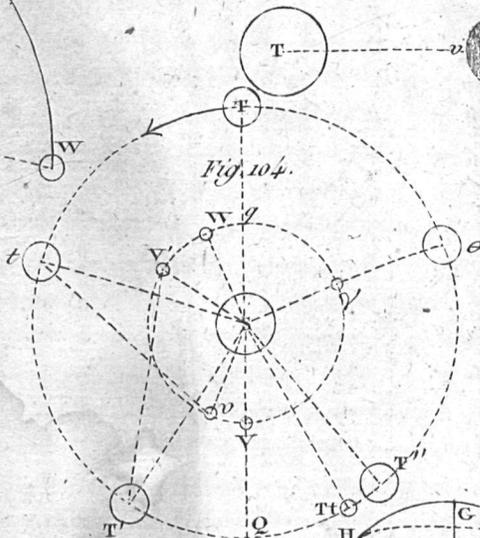
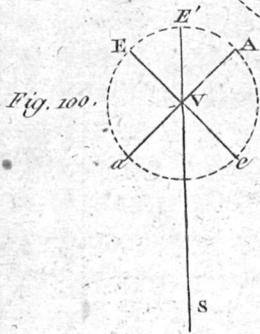
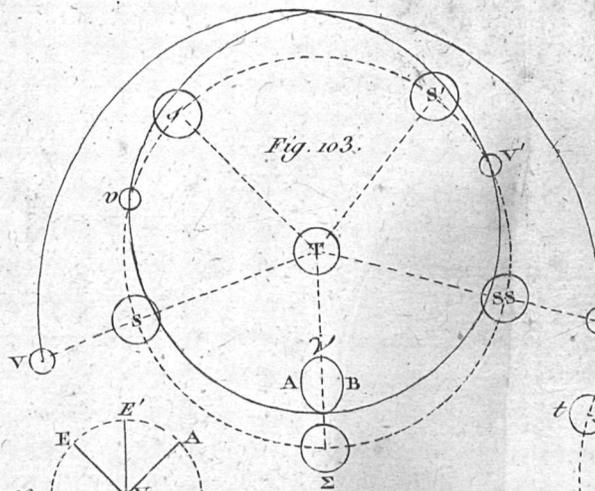
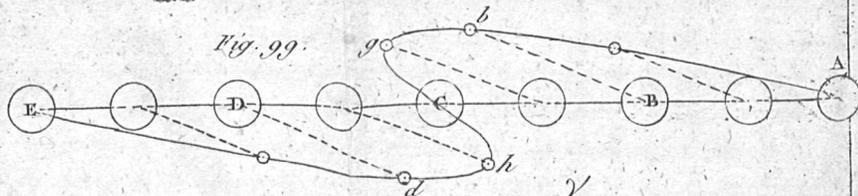
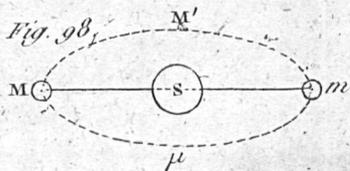
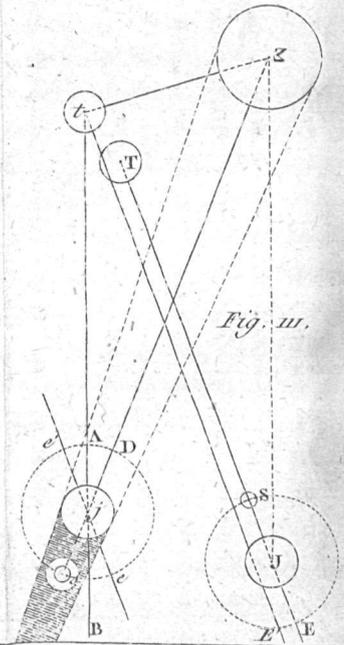
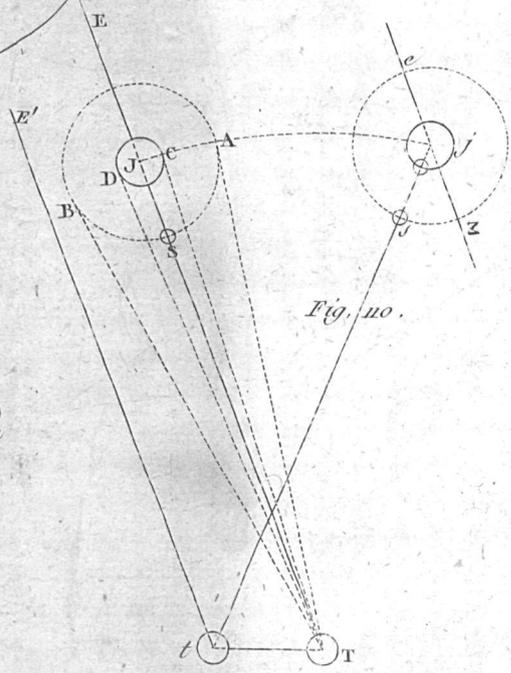
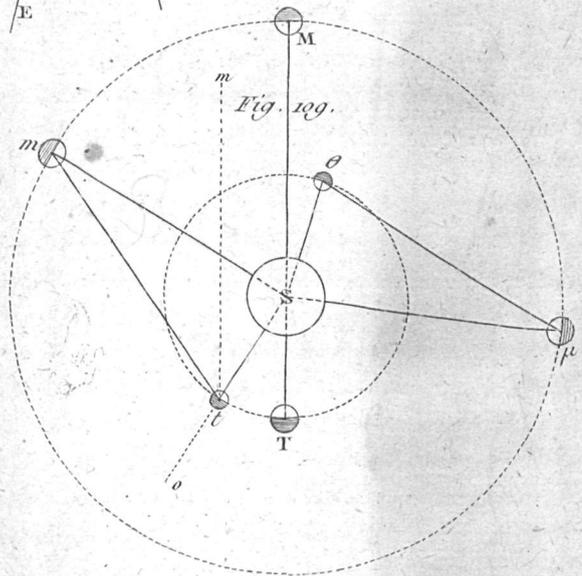
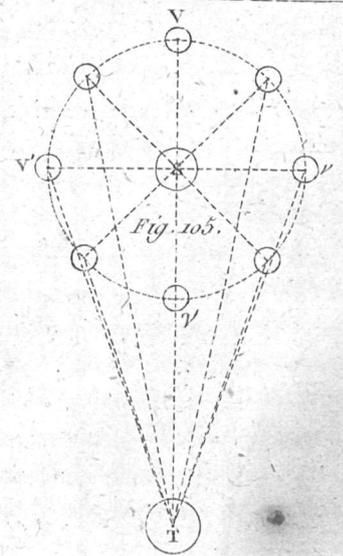
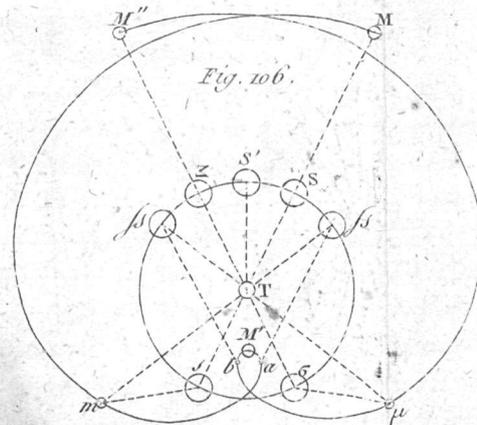
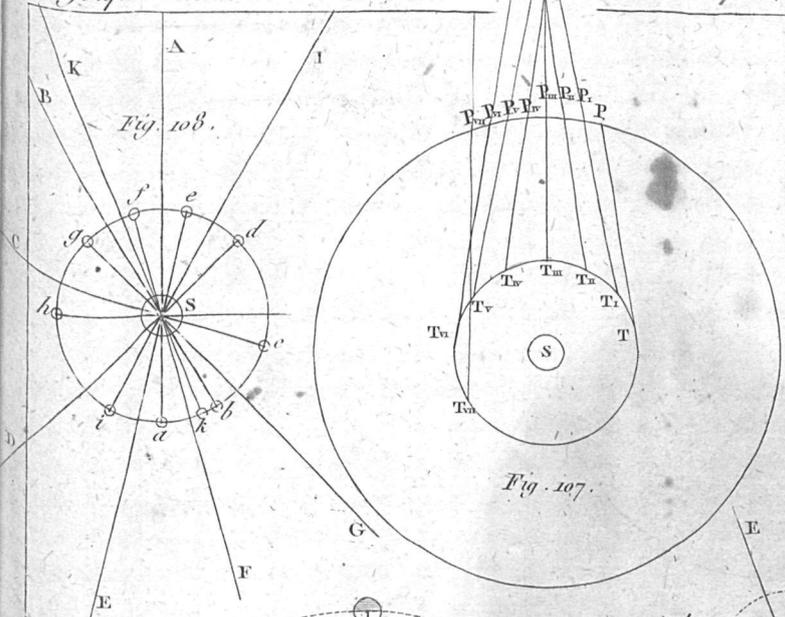
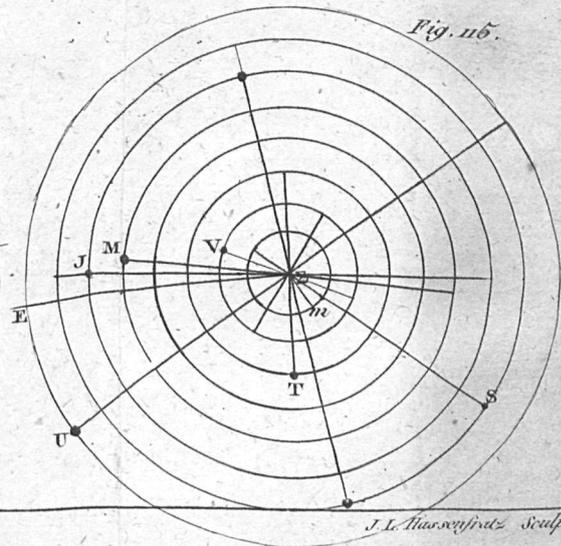
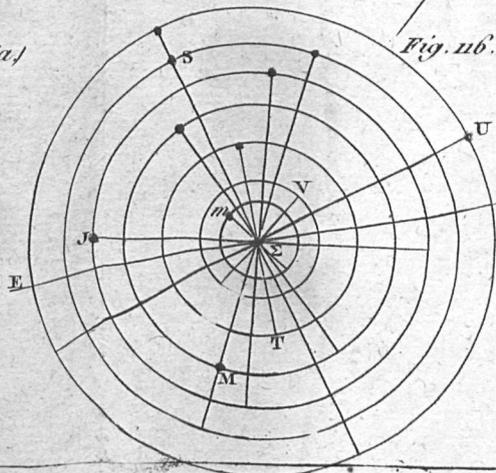
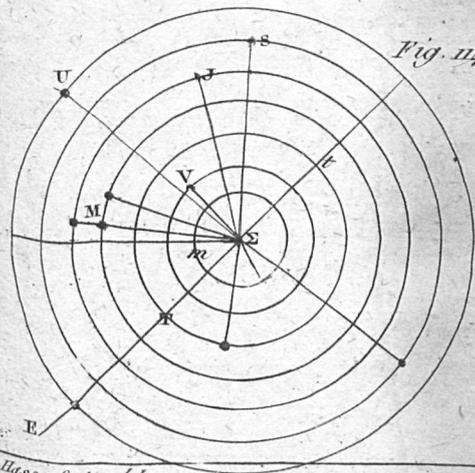
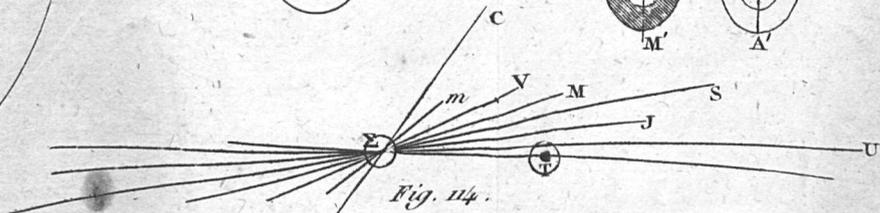
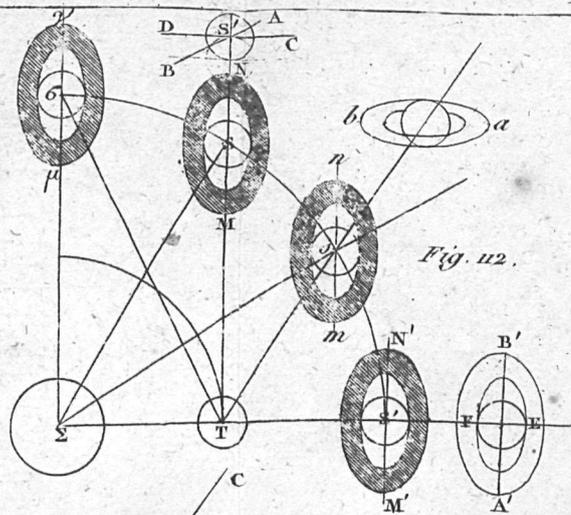
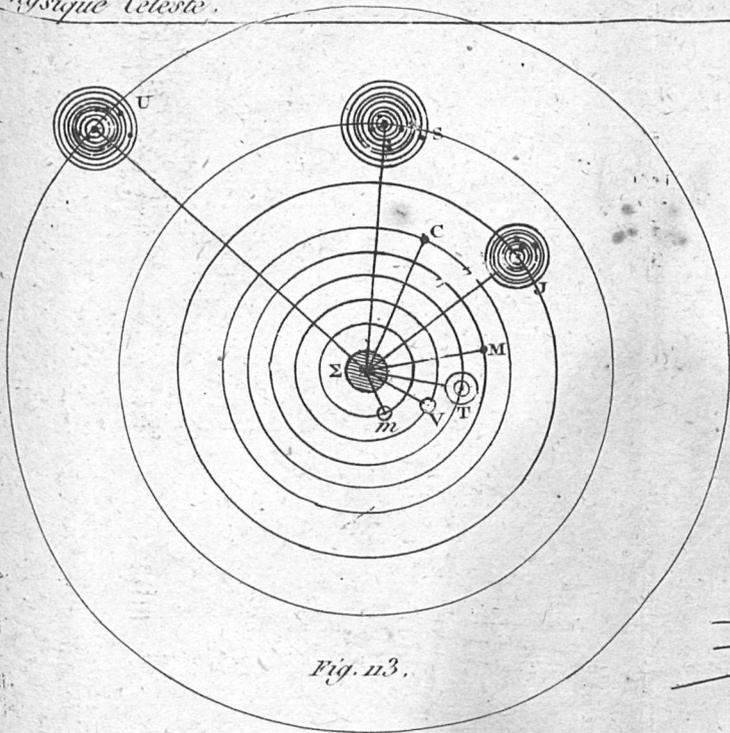


Fig. 97 (bis)









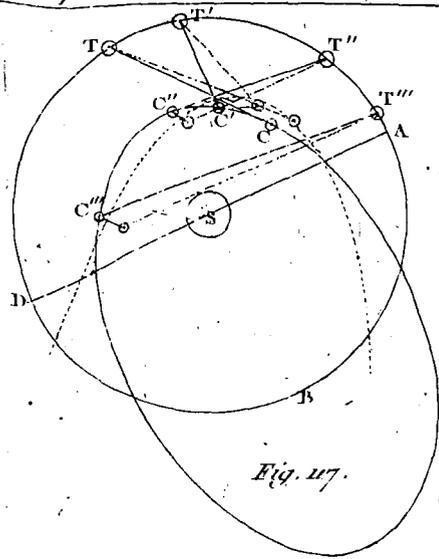


Fig. 117.

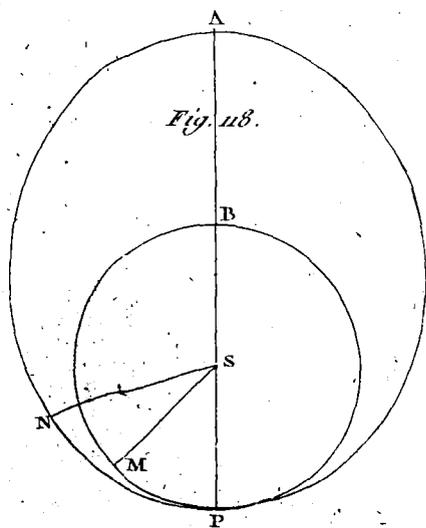


Fig. 118.

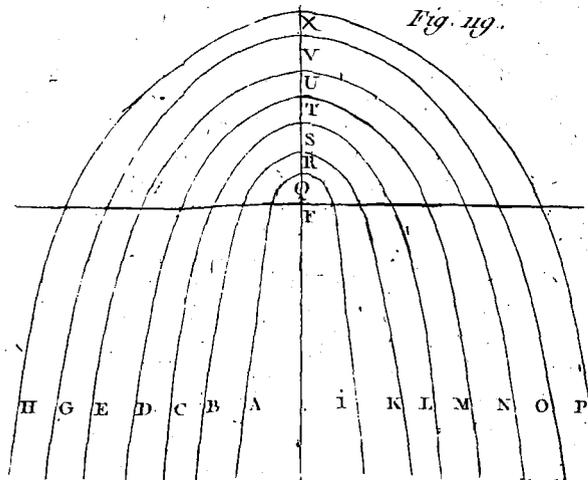


Fig. 119.

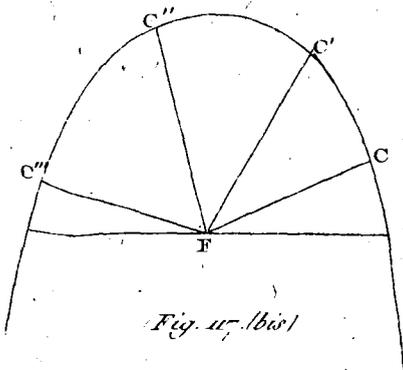


Fig. 117 bis.

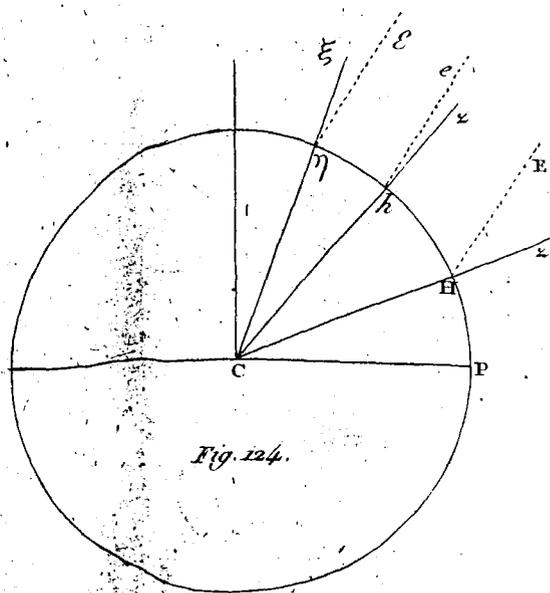


Fig. 124.

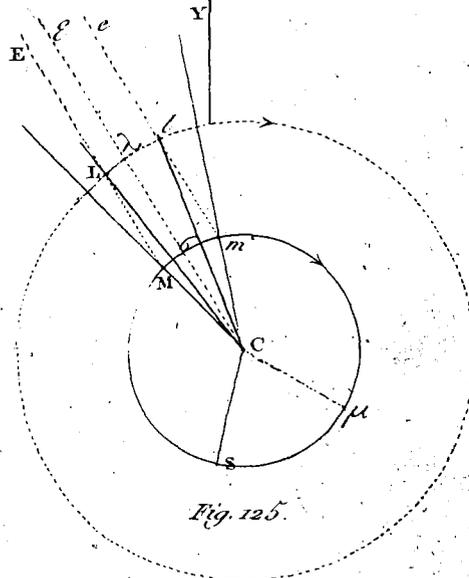


Fig. 125.

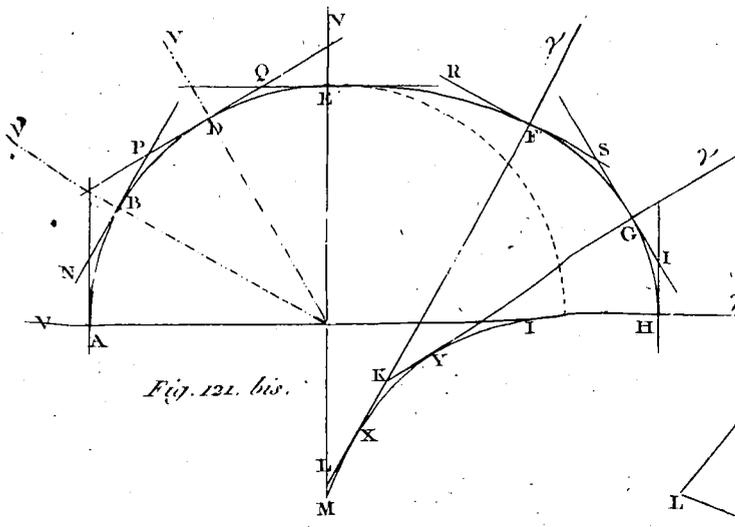


Fig. 121. bis.

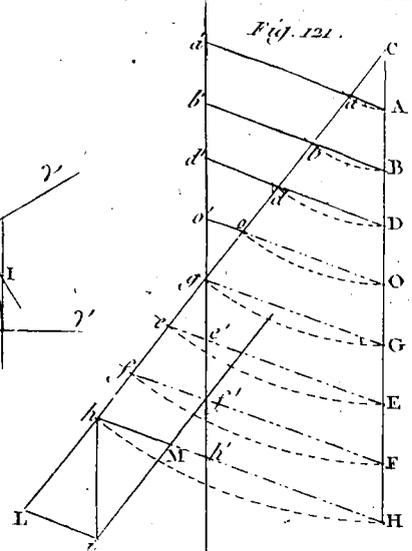


Fig. 121.

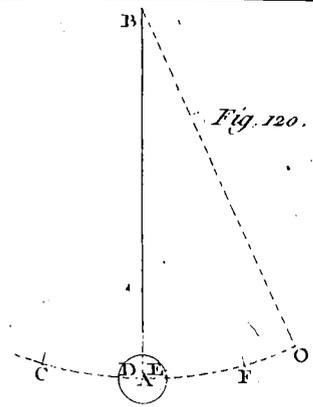


Fig. 120.

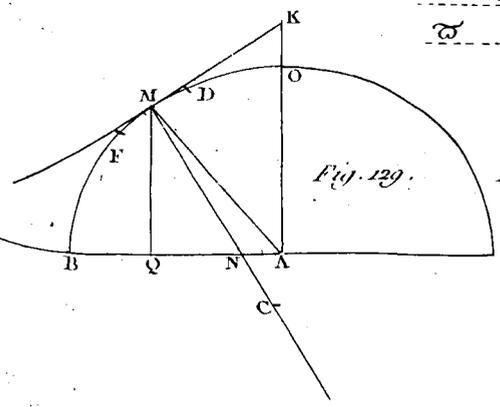


Fig. 129.

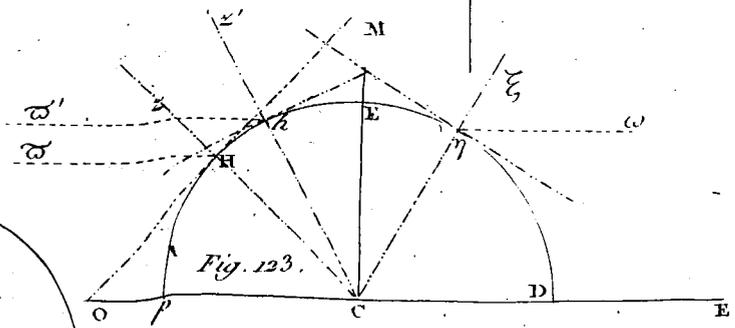
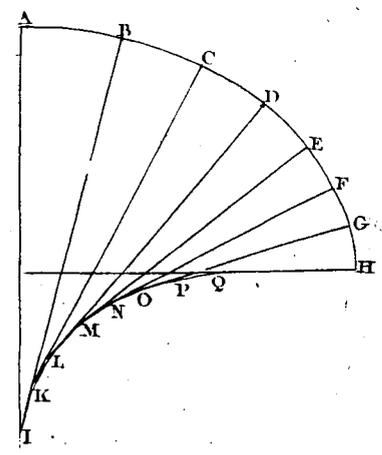


Fig. 123.



Fig. 122.



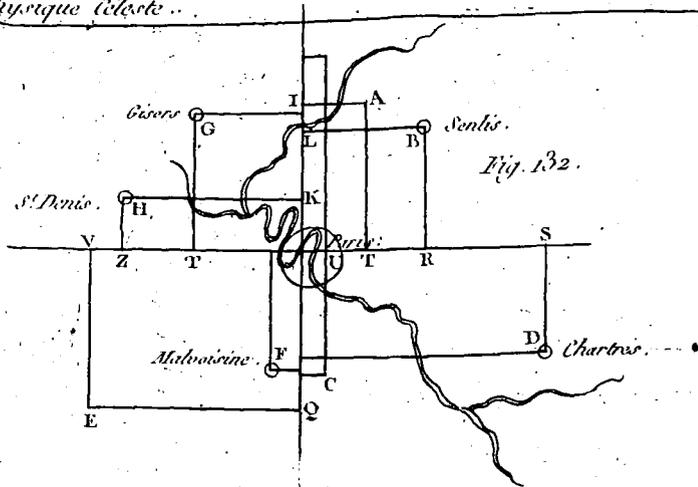


Fig. 132.

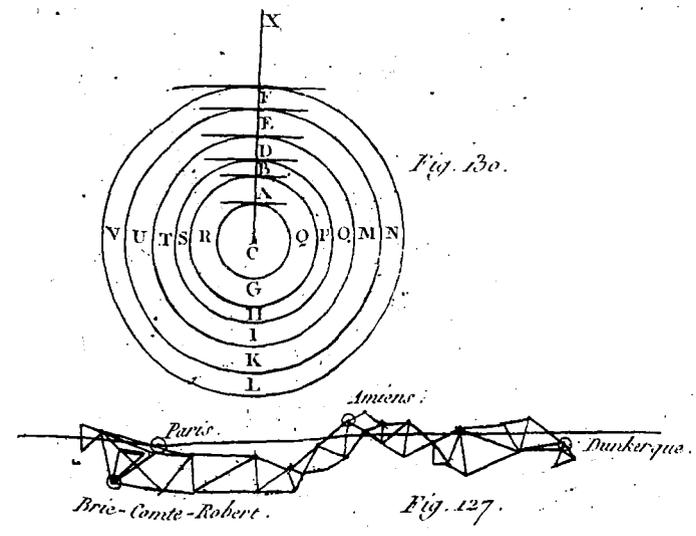


Fig. 130.

Fig. 127.

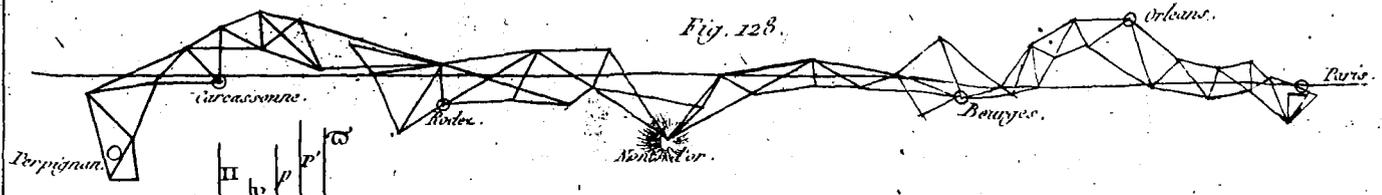


Fig. 128.

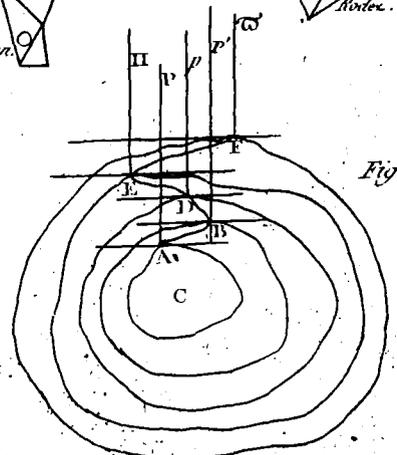


Fig. 131.

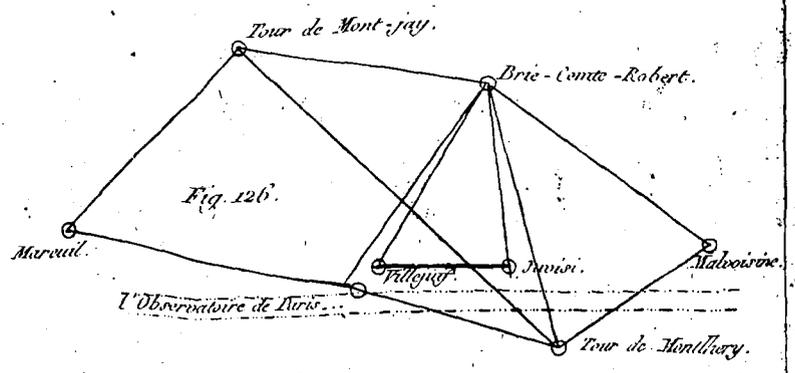
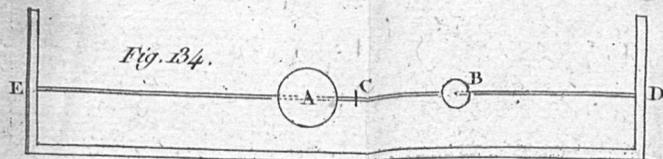
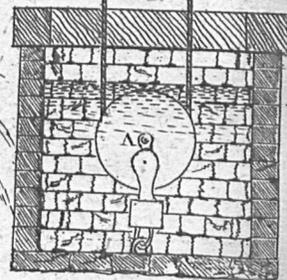
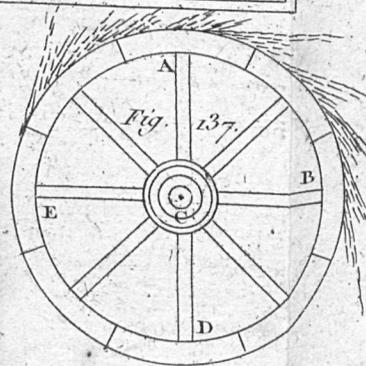
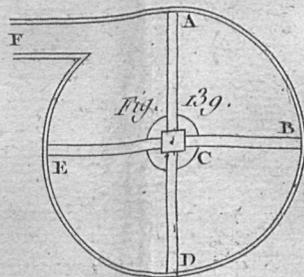
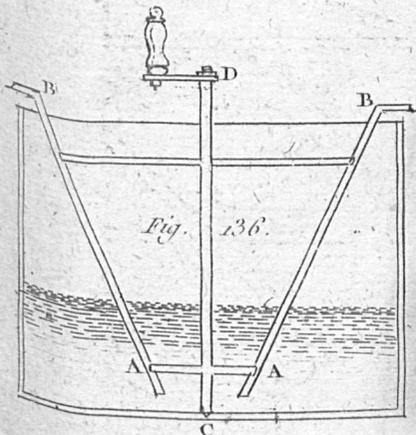
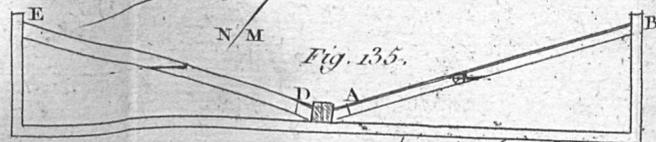
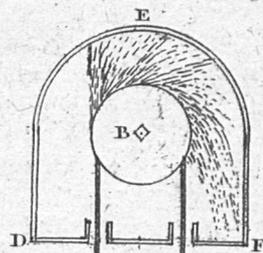
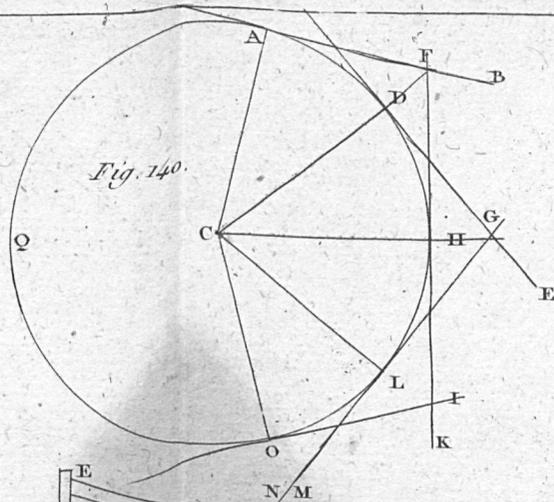
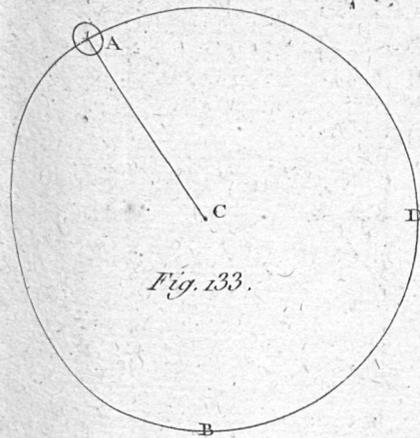


Fig. 126.



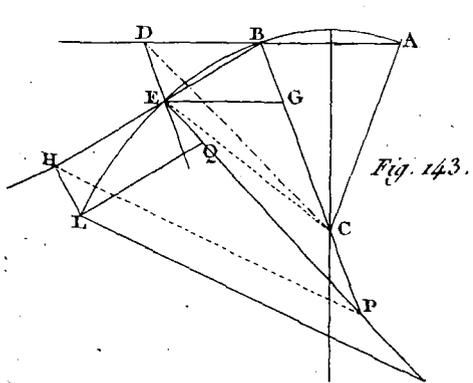


Fig. 143.

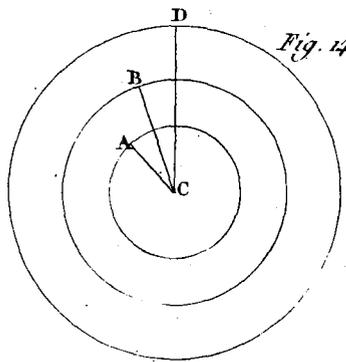


Fig. 141.

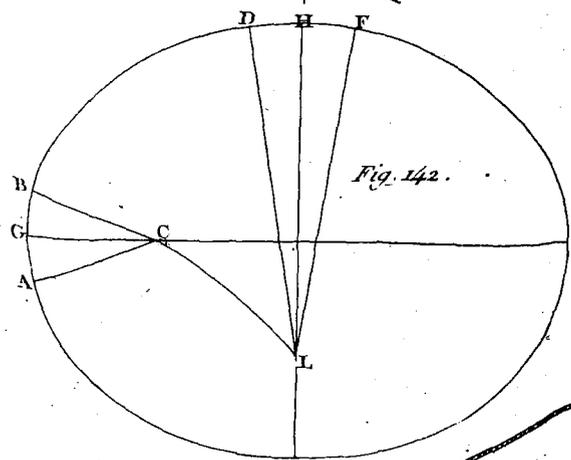


Fig. 142.

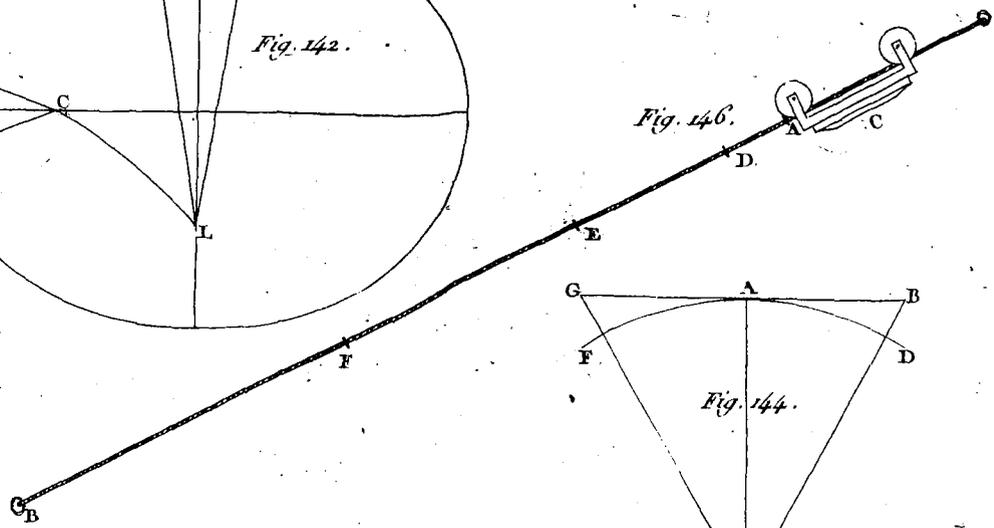


Fig. 146.

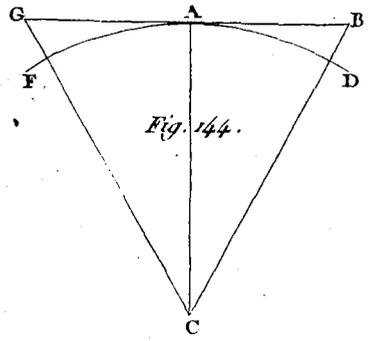


Fig. 144.

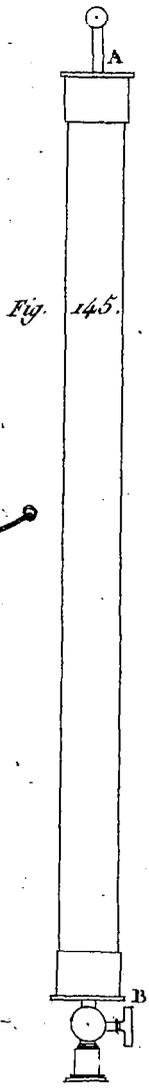


Fig. 145.

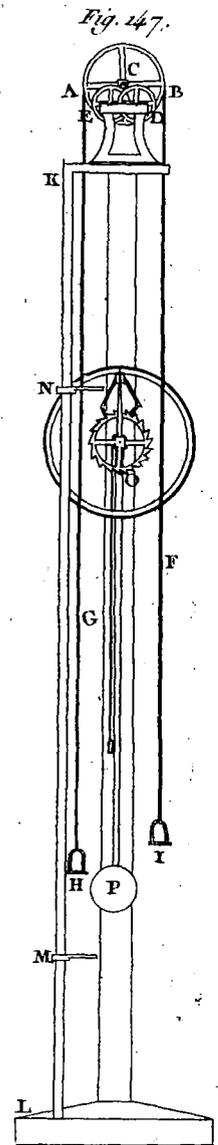
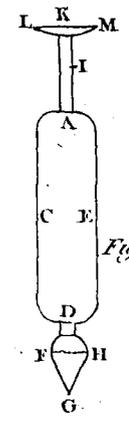
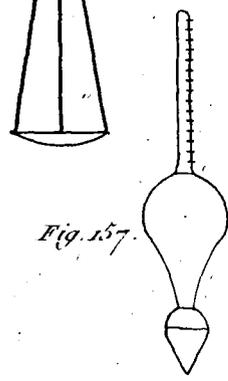
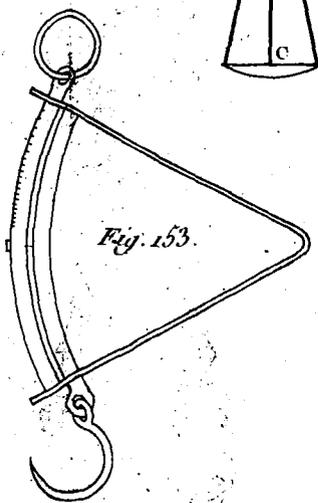
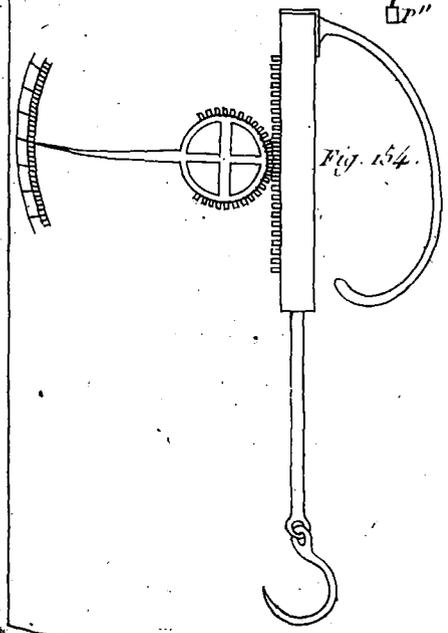
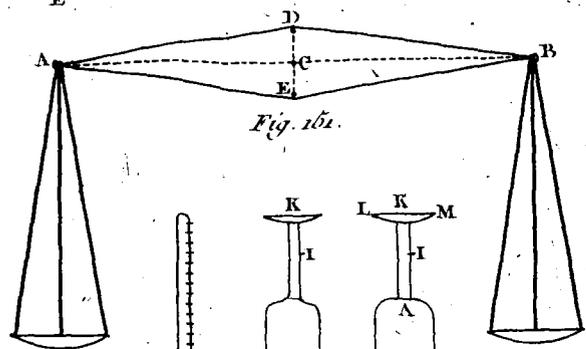
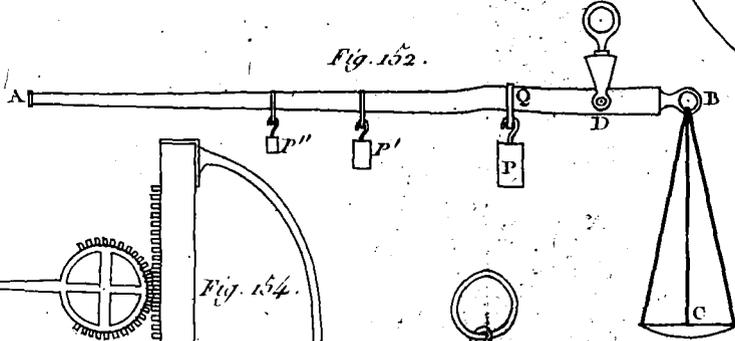
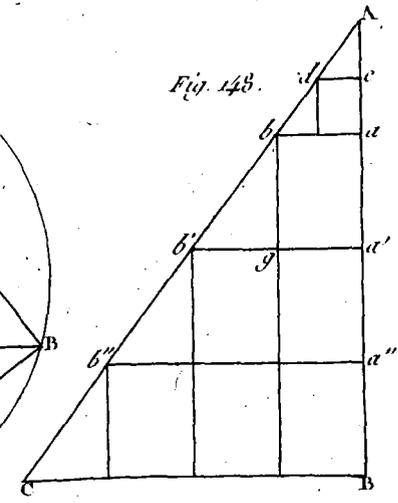
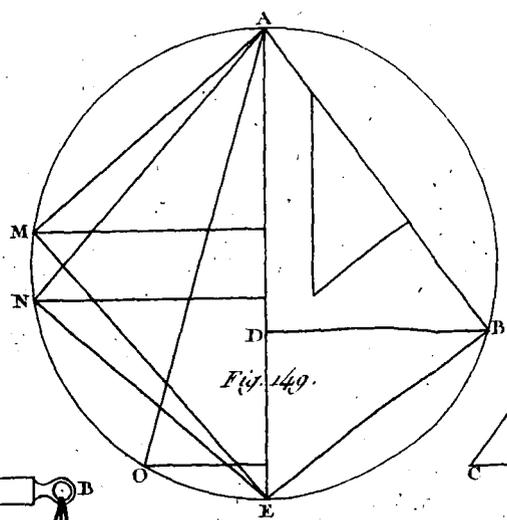
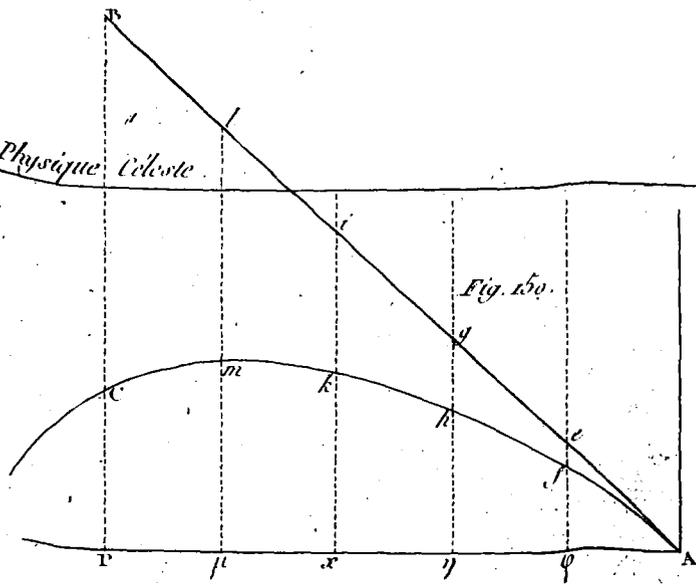


Fig. 147.



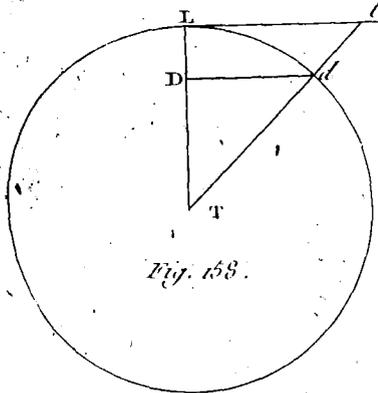


Fig. 158.

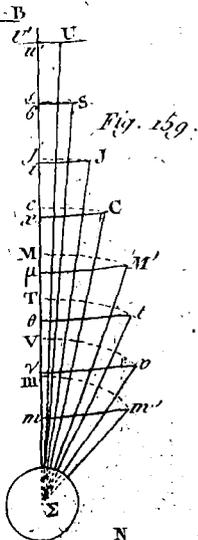


Fig. 159.

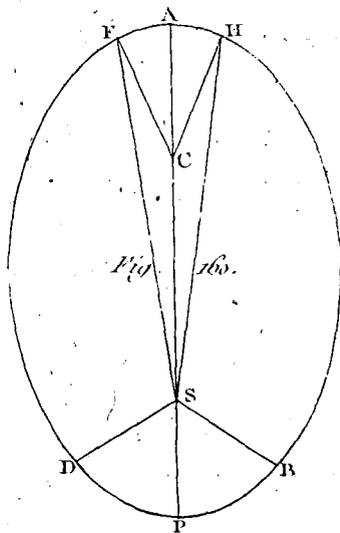


Fig. 160.

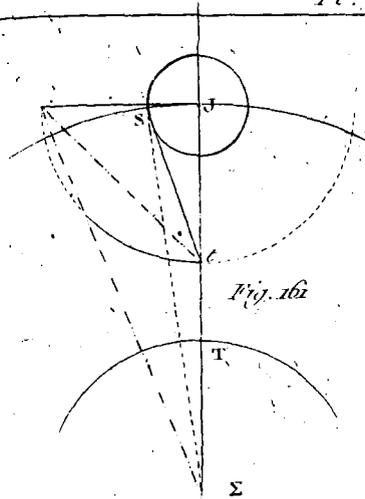


Fig. 161.

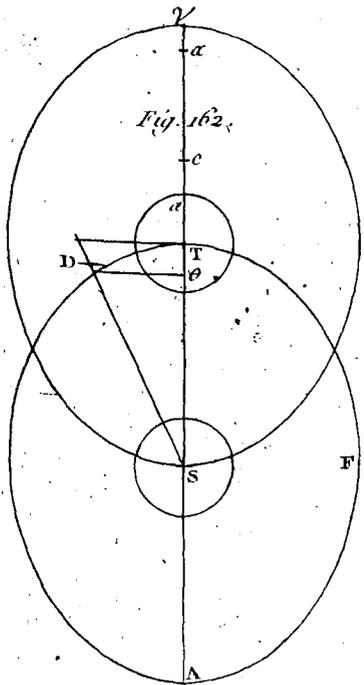


Fig. 162.

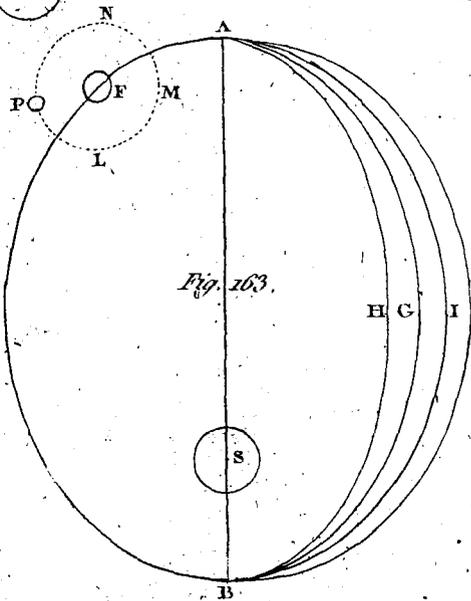


Fig. 163.

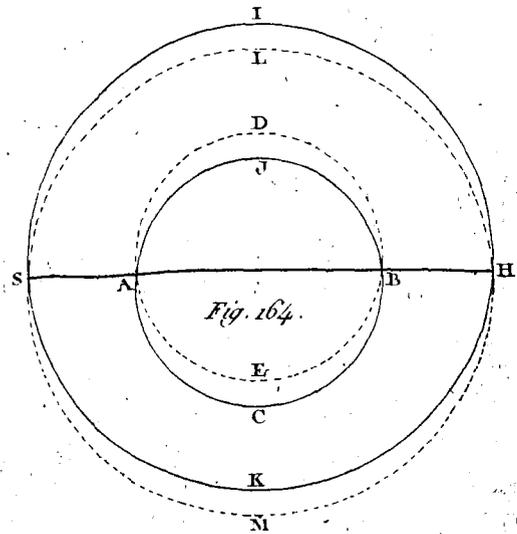


Fig. 164.

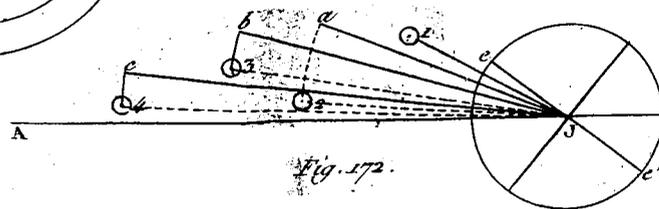
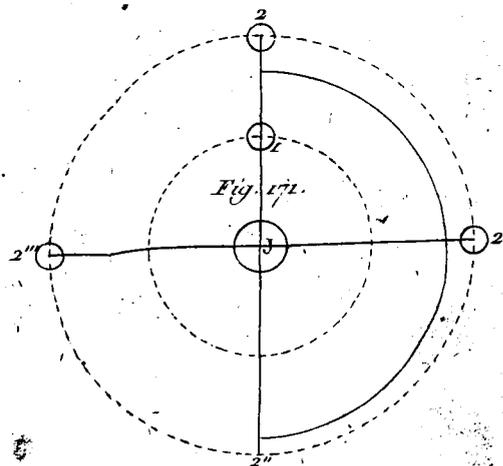
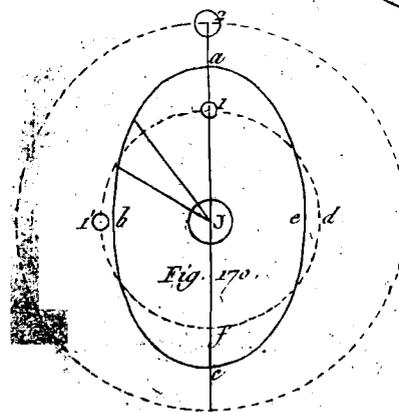
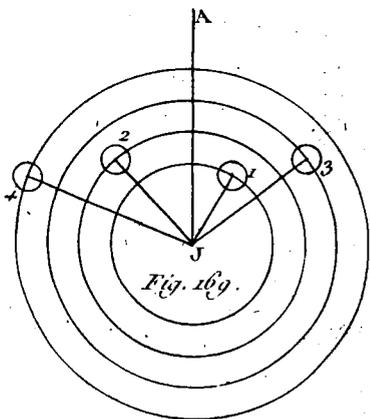
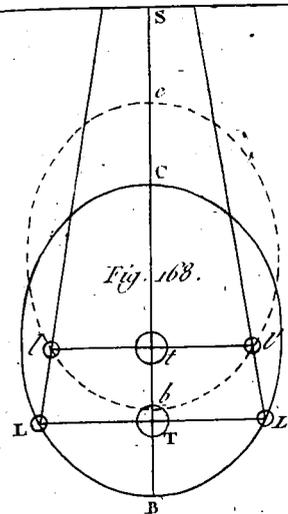
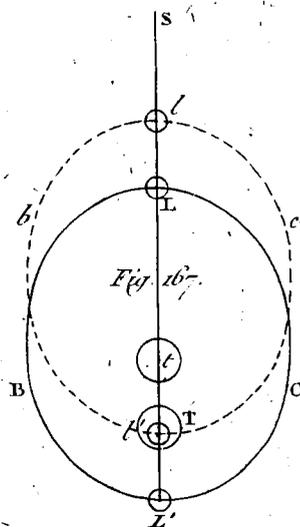
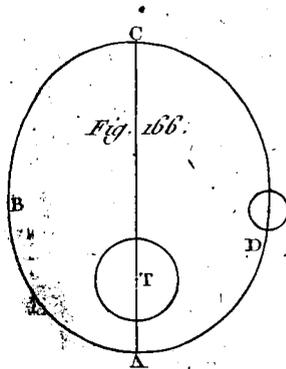
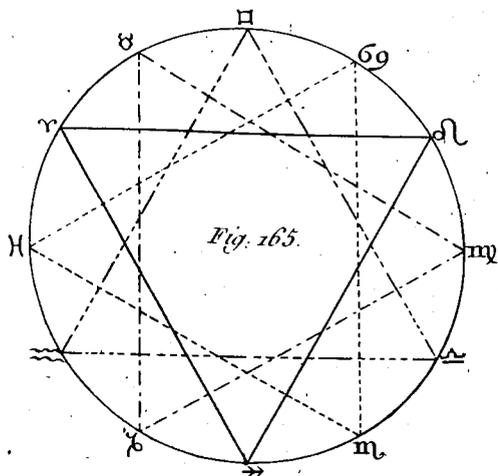


Fig. 174.

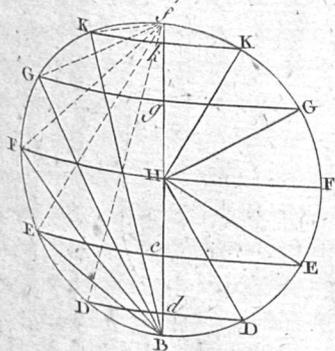


Fig. 173.

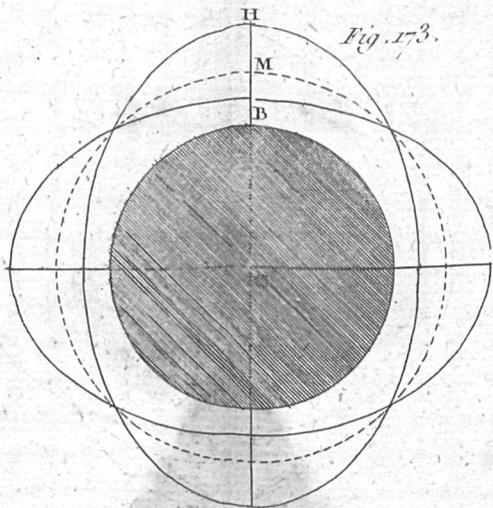


Fig. 175.

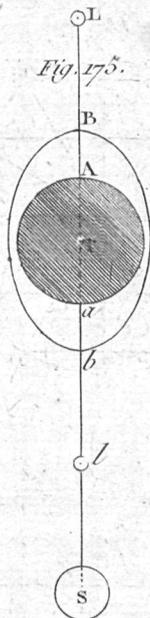


Fig. 176.

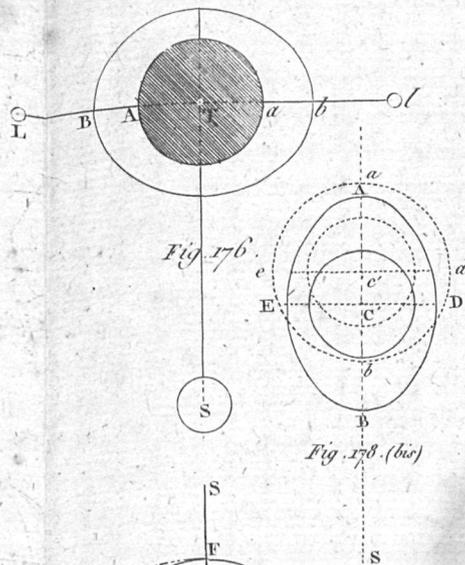


Fig. 178. (bis)

Fig. 178.

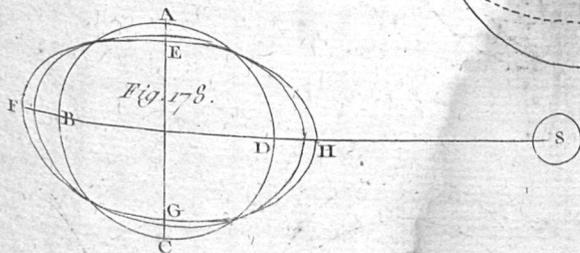


Fig. 180.

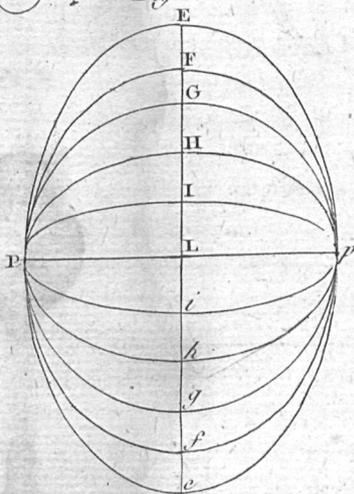


Fig. 179.

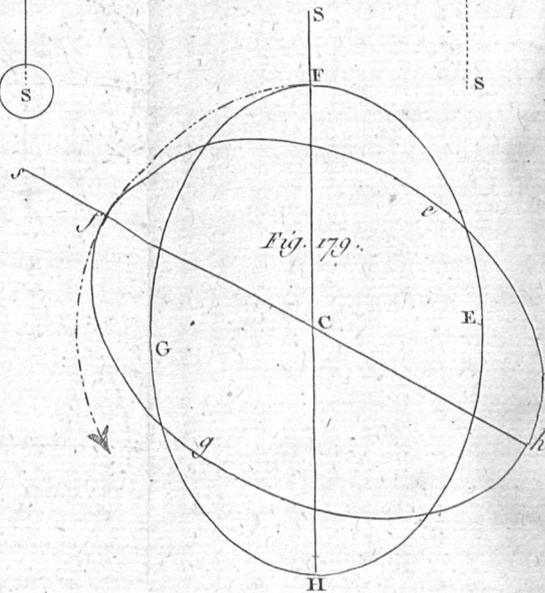


Fig. 177.

